Práctica 6: Determinantes

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Gabriel Romero

1. Calcular los siguientes determinantes Δ. Se puede utilizar cualquier método, tal como el de Sarrus y el de Laplace.

(a) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{3}{4} & 4 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2+3i & i \\ 2 & 1+i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -13 & 4 & 0 & -8 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ -9 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

2. Averiguar si la matriz A es inversible y, en caso de que lo sea, hallar la inversa.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 15 & 12 \end{pmatrix}$

(f) $D = \begin{pmatrix} 4 & 14 & -17 & 1 \\ 0 & 1 & 23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

3. Hallar para qué valor/es (en $\mathbb{C}$) de la incógnita dada el determinate toma el valor indicado.

(a) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 2x-2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix} = 14$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & x & x+1 \\ x+2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

4. Hallar para qué valor/es (en $\mathbb{C}$) de la incógnita dada la matriz M es invertible.

(a) $\begin{pmatrix} k^3 & 2 \\ 8 & k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha+2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1-x & -1 \\ x+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Averiguar si los sistemas de ecuaciones tienen solución única y, en caso de que si, resolverlos por el método de Cramer.

   (a) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -3y + y = -2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ -3x + y + 2z = \frac{11}{2} \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 5x + 6y - z = 13 \\ 4x - y + 3z = 8 \end{cases}$

6. Clasificar el sistema en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible a partir de los valores (en $\mathbb{R}$) de la incógnita.

   (a) $\begin{cases} k^3x + 2y = 1 \\ 8x + ky = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y + \lambda z = -1 \\ \lambda x + 2y - z = 3 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \alpha x - y + 2z = 0 \\ -3x + 4y + \alpha z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + my + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \end{cases}$

7. Utilizar el determinante para calcular los productos vectoriales indicados.

   (a) $\vec{u} \times \vec{v}$ con $\vec{u} = (2, -1, 1)$ y $\vec{v} = (-3, 1, 1)$.

   (b) $\vec{a} \times \vec{b}$ con $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

   (c) $\vec{m} \times \vec{n}$ con $\vec{m} = -3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\vec{n} = 6\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - \hat{k}$.

   (d) $(1, 2, 3) \times (-1, 3, 0)$.

8. Demostrar las siguientes propiedades sobre matrices de transformación en el plano.

   (a) El determinante de la matriz de reflexión sobre el eje x o y vale -1.

   (b) El determinante de la matriz de rotación con ángulo α vale 1.

   (c) El determinante de la matriz de cizallamiento de factor k en el eje x o y vale 1

   (d) El determinante de la matriz de compresión/expansión de factor k en el eje x o y vale k.

9. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcular $\det(A)$, $\det(B)$ y los siguientes determinantes relacionados aprovechando el uso de propiedades.

   (a) $\det(A^{-1})$

   (b) $\det\left((A.B)^T\right)$

   (c) $\det(A + B)$

   (d) $\det(2.A^4)$

(e) $\det(-k.B^n)$ con $k \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\det\left((A^T.B^{-1})^2\right)$

10. Resolver los siguientes ejercicios integradores

(a) Dada la matriz simétrica $A = \begin{vmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & c & 3 \end{vmatrix}$ calcular $\det(A)$.

(b) Dada la matriz $B = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix}$ tal que $\det(2B) = 160$, calcular $x \in \mathbb{C}$.

Respuestas

1. (a) $\Delta = 38$. Resolución por Matemáticas profe Alex

   (b) $\Delta = \frac{7}{2}$. Resolución por Matemáticas profe Alex

   (c) $\Delta = (2+3i).(1+i) - (2)(i) = -1+3i$.

   (d) $\Delta = -217$. Resolución por Matemáticas profe Alex

   (e) $\Delta = 42$. Resolución por Álgebra para Todos

   (f) $\Delta = 17$. Resolución por Susi Profe

   (g) $\Delta = -12$. Resolución por Álgebra para Todos

   (h) $\Delta = -272$. Resolución por Ktipio

2. (a) $\det(A) = 5$ por lo que $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

   (b) $\det(A) = 0$ por lo que $\nexists A^{-1}$.

   (c) $\det(A) = -1$ por lo que $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 32 & -19 & -20 \end{pmatrix}$.

   (d) $\det(A) = 5$ por lo que $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & 1 & \frac{16}{5} \\ 2 & -1 & -3 \\ -\frac{17}{5} & 2 & \frac{28}{5} \end{pmatrix}$.

   (e) $\det(A) = 0$ por lo que $\nexists A^{-1}$.

   (f) $\det(D) = 0$ por lo que $\nexists D^{-1}$.

3. (a) $\lambda = 3$ o $\lambda = -1$. Resolución por Roberto Pintos

   (b) $x = 2$ o $x = \frac{8}{3}$. Resolución por Mate Profesor Rosado

   (c) $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$. Resolución por Profe Online

   (d) $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$. Resolución por Matemático Compulsivo

4. (a) M es invertible cuando $\det(M) \neq 0$, es decir, para $k \in \mathbb{C} - \{2, -2, 2i, -2i\}$.

   (b) M es invertible cuando $\det(M) \neq 0$, es decir, para $\alpha \neq \dfrac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$. Resolución por Profe Online.

(c) M es invertible cuando $\det(M) \neq 0$, es decir, para $x \neq 0$ y $x \neq -2$, o bien $x \in \mathbb{C} - \{0, -2\}$. Resolución por Profe Córdoba.

(d) M es invertible cuando $\det(M) \neq 0$, es decir, para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 7\}$. Resolución por Yo Soy Tu Profe.

5. (a) $\Delta = -7$, $\Delta_x = -2$ y $\Delta_y = 8$ por lo que la solución es $(x, y) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right)$

(b) $\Delta = 2$, $\Delta_x = -61$, $\Delta_y = -74$ y $\Delta_z = -49$ por lo que la solución es $(x, y, y) = \left(-\frac{61}{2}, -37, -\frac{49}{2}\right)$

(c) $\Delta = 16$, $\Delta_x = -32$, $\Delta_y = 80$ y $\Delta_z = 112$ por lo que la solución es $(x, y, y) = (-2, 5, 7)$. Resolución por Julio Profe.

6. (a) $\Delta = k^4 - 16 = 0$ cuando $k = \pm 2$.

Con $k = 2$ y $k = -2$ es SI. Con $k \in \mathbb{R} - \{2, -2\}$ es SCD.

(b) $\Delta = a^2 - 1 = 0$ cuando $a = \pm 1$.

Con $a = 1$ es SCI, con $a = -1$ es SI y con $a \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ es SCD.

(c) $\Delta = \lambda^2 - 7\lambda = 0$ cuando $\lambda = 0$ o $\lambda = 7$.

Con $\lambda = 0$ y $\lambda = 7$ es SI y con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, -7\}$ es SCD.

(d) Es SCD si $m \in \mathbb{R} - \{2, -3\}$.

Es SCI si $m = 2$. Es SI si $m = -3$. Resolución por Cibermatex.

(e) $\Delta = -\alpha^2 - 14\alpha - 13 = 0$ cuando $\alpha = -1$ o $\alpha = -13$.

Con $\alpha = -1$ y $\alpha = -13$ es SCI (como es homogéneo no puede ser SI) y con $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, -13\}$ es SCD.

7. (a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -5, -1)$. Resolución por lasmatematicas.es

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 7\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} - 22\hat{k}$. Resolución por Matemáticas Edgar Navia

(c) $\vec{m} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & -10 & -1 \end{vmatrix} = 52\hat{\imath} + 27\hat{\jmath} + 42\hat{k}$. Resolución por JulioProfe

(d) $(1, 2, 3) \times (-1, 3, 0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-9, -3, 5)$. Resolución por Seletube

8. (a) $\det(M_x^{Ref}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

$\det(M_y^{REF}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$

(b) $\det(M_\alpha^{Rot}) = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$

(c) $\det(M_x^{Ciz}) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$\det(M_y^{Ciz}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1.$

(d) $\det(M_x^{C/E}) = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k.$

$\det(M_y^{C/E}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k.$

9. (a) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{5}.$

(b) $\det[(A.B)^T] = \det(A.B) = \det(A).\det(B) = 5.(-2) = -10.$

(c) $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 8 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 55$ (no hay propiedades utiles para aplicar).

(d) $\det(2.A^4) = 2^3.\det(A^4) = 8.\det(A)^4 = 8.5^4 = 5000.$

(e) $\det(-k.B^n) = (-k)^3.\det(B^n) = -k^3.\det(B)^n = -k^3.(-2)^n.$

(f) $\det\left((A^T.B^{-1})^2\right) = \det(A^T.B^{-1})^2 = \left(\det(A^T).\det(B^{-1})\right)^2 = \left(\det(A).\dfrac{1}{\det(B)}\right)^2 = \left(\frac{5}{-2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$

10. (a) Por la simetría $a = 2$, $b = 0$ y $c = 2$; y $\det(A) = -1$. Resolución por Ing. E Darwin

(b) Como $\det(2B) = 160$, entonces $\det(B) = 20$. Obteniendo el determinante se obtiene $x^3 - x^2 + x - 21 = 0$, con soluciones $x = 3$, $x = -1 + \sqrt{6}i$ y $x = -1 - \sqrt{6}i$. Resolución por Mates con Andrés