Práctica 1: Números complejos

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Gabriel Romero

1. Resolver las ecuaciones cuadráticas y comprobar el resultado.

   (a) $x^2 + 3x = -3$

   (b) $2y^2 + 4y = -5$

   (c) $t^2 + 3t = -8$

   (d) $x(x - 10) = -34$

2. Efectuar las siguientes operaciones y obtener el número complejo en forma binómica.

   (a) $(-2 + 3i) + (1 + 3i)$

   (b) $(1 - 3i) - (4 - 2i)$

   (c) $i^2 + 3i + 2 - 5i^3$

   (d) $(3 + 2i)(i - 5)$

   (e) $(i - 2)(3 + 2i)(1 - 3i)i$

   (f) $(3 + 4i)^{-1}$

   (g) $\dfrac{5 - 2i}{5i - 2}$

   (h) $\dfrac{3 + 2i}{-3 - 4i}$

   (i) $\dfrac{-3i + 1}{4i - 2}$

   (j) $(1 - 2i)^2$

   (k) $\dfrac{i}{i + 1} + \left(\dfrac{1 + i}{i}\right)^2$

   (l) $(1 + 2i)^3$

3. Representar en el plano complejo los siguientes números e indicar su módulo y argumento.

   (a) $1 + i$

   (b) $2 - 3i$

   (c) $-1 + 3i$

   (d) $-2i - 4$

   (e) 3

   (f) $2i$

   (g) -1

   (h) $-5i$

   (i) $-\sqrt{2}$

   (j) $4i + 2$

   (k) $1 + \sqrt{2}$

   (l) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i$

   (m) $i - 4$

   (n) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}i$

4. Transformar los números complejos a sus formas restantes (binómica, trigonométrica o exponencial).

   (a) $1 + \sqrt{3}i$

   (b) $2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

   (c) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

   (d) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

   (e) $5\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

   (f) $7e^{\pi i}$

   (g) -7

   (h) $\sqrt{6}\,[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$

   (i) $3e^{\frac{\pi}{4}i}$

   (j) $4i$

   (k) $2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

   (l) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

   (m) $-2\sqrt{3} + 2i$

   (n) $4\,[\cos(0) + i\sin(0)]$

   (o) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

   (p) $-1 - i$

   (q) $1\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

   (r) $4e^{\frac{3\pi}{2}i}$

5. Utilizando complejos genéricos $z = a + bi$ y $w = c + di$, demostrar que se cumplen las siguientes propiedades para todos los números complejos.

   (a) $Re(z + 3w) = Re(z) + Re(3w)$

   (b) $\overline{\overline{z} + w} = z + \overline{w}$

   (c) $Im(z.\overline{z}) = 0$

   (d) $\dfrac{z}{i} = -i.z$

(e) $\overline{i.z} = -i.\overline{z}$

(f) $z.\overline{z} = |z|^2$

(g) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$

(h) $|z.(1+2i)|^2 = (|z|.|3+4i|)^2$

(i) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$

(j) $z - \overline{z} \notin \mathbb{R}$

6. En cada inciso, hallar el número real (x, y, m, etc...) que cumpla la condición.

   (a) $(3+2i)(x+6i)$ es un número imaginario puro

   (b) $\dfrac{y+3i}{2-5i}$ es un número real puro

   (c) $(5x+2m) + m^3 i = 9 - 27i$

7. Utilizando la forma exponencial, calcular los siguientes números complejos.

   (a) $(-1-\sqrt{3}i)^9$

   (b) $\dfrac{1}{(2+2i)^7}$

   (c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^4}{(-1+\sqrt{3}i)^6}$

   (d) $\dfrac{(1+i)^4}{(-1-i)^6}$

   (e) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2i}$ (las raíces cúbicas de $2\sqrt{3}+2i$)

   (f) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}i-1}$ (las raíces quintas de $-\sqrt{3}i-1$)

   (g) $\sqrt[4]{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}}$ (las raíces cuartas de $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}$)

   (h) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$ (las raíces cúbicas de $-1-i\sqrt{3}$)

   (i) $\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$ (las raíces quintas de $-1+\sqrt{3}i$)

8. Hallar todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ que solucionan la ecuación.

   (a) $iz^{-1} = 2 - i$

   (b) $z(1+2i) = 2z + \overline{z}$

   (c) $\overline{z} = \dfrac{3+i}{Re(z)}$

   (d) $\dfrac{z+1}{Im(z)} = \overline{z}$

   (e) $z + |z|^2 = 7 + i$

   (f) $z^5 - \sqrt{3} = i$

   (g) $z^5 - 1 = 0$

   (h) $\dfrac{-3i+1}{4i-2} = z^2 i$

   (i) $z^4 - 8 = 0$

   (j) $z^4 + i = 0$

9. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Jusificar.

   (a) El módulo de $z = 3 + i$ es mayor que el de $w = 2 - 2i$

   (b) Si el argumento de (z) es α, entonces el argumento de $2z$ será 2α

   (c) Dado $z = 2e^{\beta i}$ y $w = 1 + i$, el argumento de $z.w$ será $\beta + \dfrac{\pi}{4}$

   (d) Si z es un número real puro, entonces z^2 es un número real puro

10. Representar en el plano complejo los números $z = x + yi$ tales que cumplan las siguientes condiciones.

   (a) $|z| = 3$

   (b) $|z| \leq 2$

   (c) $|z-3| = 4$

   (d) $|z+1+i| \leq 4$

   (e) $|z-2-2i| = 2 \quad \wedge \quad \dfrac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \dfrac{pi}{2}$

   (f) $|z+i| < 1 \quad \wedge \quad \dfrac{7}{4}\pi < Arg(z) < \dfrac{\pi}{2}$

   (g) $Im(z) > -\dfrac{1}{3}Re(z) \quad \wedge \quad 2 \leq |z-3+i| \leq 4$

   (h) $3Im(z) < 0 \quad \vee \quad |z+1| \leq 4$

   (i) $4Im(z) = 4 \quad \vee \quad 2 < |z-3+i|$

11. En el plano complejo, el número $w = z.e^{\phi i}$ está rotado ϕ grados con respecto a z y el número $u = k.z$ presenta una expansión de factor $k \in \mathbb{R}$ con respecto al origen. Utilizar estas propiedades de los complejos y realizar las siguientes actividades.

    (a) Rotar el complejo $z = 3 + i$ para que pertenezca a la región $A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z + 3| \leq 1\}$. Graficar.

    (b) Escalar el complejo $z = 1 + 4i$ para que pertenezca a la región $B = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) \leq 2 - Re(z)\}$. Graficar.

    (c) Al conectar los puntos de los complejos $a = 2i$, $b = 0$ y $c = 1$ se forma la letra L. Rotar la letra 90° en sentido antihorario. Independientemente, obtener una L cuyas dimensiones sean el triple de grandes. Graficar.

    (d) Al conectar los puntos de los complejos $a = 0$, $b = 2i$, $c = 1 + \frac{3}{2}i$ y $d = i$ se forma la letra P. Rotar la letra 60° en sentido horario. Por otra parte, obtener una letra P cuyo tamaño sea la mitad del original. Graficar.

    (e) Al conectar los puntos de los complejos $a = i$, $b = 1 + i$, $c = 0$ y $d = 1$ se forma la letra Z cuya altura mide 1 unidad. Aplicar una rotación y/o expansión para obtener una N cuya base mida 2 unidades. Graficar.

Respuestas

1. (a) $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Resolución

   (b) $y = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$. Resolución

   (c) $y = -\frac{3}{2} \pm \frac{23}{2}i$. Resolución

   (d) $x = 5 \pm 3i$

2. (a) $-1 + 6i$

   (b) $-3 - i$

   (c) $1 + 8i$

   (d) $-17 - 7i$

   (e) $-23 - 11i$. Resolución

   (f) $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. Resolución

   (g) $-\frac{20}{29} - \frac{21}{29}i$. Resolución

   (h) $-\frac{17}{25} + \frac{6}{25}i$. Resolución

   (i) $-\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$. Resolución

   (j) $-3 - 4i$

   (k) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. Resolución

   (l) $-11 - 2i$

3. (a) $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} = 45°$.

   (b) $|2 - 3i| = \sqrt{13}$, $\arg(2 - 3i) \simeq -56.31°$

   (c) $|-1 + 3i| = \sqrt{10}$, $\arg(-1 + 3i) \simeq 108.43°$

   (d) $|-2i - 4| = 2\sqrt{5}$, $\arg(-2i - 4) \simeq -153.43°$

   (e) $|3| = 3$, $\arg(3) = 0°$

(f) $|2i| = 2, \ \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2} = 90°$

(g) $|-1| = 1, \ \arg(-1) = \pi = 180°$

(h) $|-5i| = 5, \ \arg(-5i) = -\dfrac{\pi}{2} = -90°$

(i) $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \ \arg(-\sqrt{2}) = \pi = 180°$

(j) $|4i+2| = 2\sqrt{5}, \ \arg(4i+2) \simeq 63.44°$

(k) $|1+\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2} \simeq 2.4142, \ \arg(1+\sqrt{2}) = 0°$

(l) $\left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i\right| = \dfrac{\sqrt{13}}{4}, \ \arg\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i\right) \simeq 123.69°$

(m) $|i-4| = \sqrt{17}, \ \arg(i-4) \simeq 165.96°$

(n) $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}i| = \sqrt{6+\sqrt{8}} \simeq 2.9713, \ \arg(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}i) \simeq -35.657°$

4. (a) $1+\sqrt{3}i = 2\left[\cos(() + i\sin(()\right] \dfrac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

(b) $2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

(c) $2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right] = -\sqrt{3}+i$

(d) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 2e^{-\frac{\pi}{4}}$

(e) $5\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 5e^{-\frac{\pi}{3}} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$

(f) $7e^{\pi i} = 7\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right] = -7+0i$

(g) $-7+0i = 7\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right] = 7e^{\pi i}$

(h) $\sqrt{6}\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right] = \sqrt{6}e^{\pi i} = -\sqrt{6}+0i$

(i) $3e^{\frac{\pi}{4}i} = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

(j) $4i = 4\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = 4e^{\dfrac{\pi}{2}i}$

(k) $2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(l) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0+i$

(m) $-2\sqrt{3}+2i = 4\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right] = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$

(n) $4\left[\cos(0) + i\sin(0)\right] = 4e^{0} = 4+0i$

(o) $2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 1-\sqrt{3}i$

(p) $-1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

(q) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = e^{\frac{\pi}{12}} \simeq 0.9659 + 0.2588i$

(r) $4e^{\frac{3\pi}{2}i} = 4\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right] = 0-4i$

5. (a) $z+3w = (a+bi)+3(c+di) = a+bi+3c+3di = (a+3c)+(b+d)i$. Por lo ranto, $Re(z+3w) = a+3c = Re(z)+Re(3w)$

(b) Ya que $\overline{z} = a-bi$, se obtiene que el lado izquierdo es $\overline{\overline{z}+w} = \overline{(a-bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(-b+d)i} = (a+c)-(-b+d)i = (a+c)+(b-d)i$. Por otra parte, como $\overline{w} = c-di$ el lado derecho es $z+\overline{w} = (a+bi)+(c-di) = (a+c)+(b-d)i$. Podemos obserar que son iguales: $\overline{\overline{z}+w} = z+\overline{w} = (a+c)+(b-d)i$

(c) $z.\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 = (a^2+b^2)+0i$, por lo que su parte imaginaria es cero.

(d) $\frac{z}{i} = \frac{a+bi}{i} = \frac{a+bi}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{(a+bi)i}{-1} = -i(a+bi) = -iz$

(e) Desarrollando el lado izquierdo se obtiene $\overline{i.z} = \overline{i(a+bi)} = \overline{ai+bi^2} = \overline{-b+ai} = -b-ai$. Desarrollando el lado derecho se obtiene $-i.\overline{z} = -i(a-bi) = -ai+bi^2 = -b-ai$, que es lo mismo.

(f) Por el lado izquierdo tenemos: $z.\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2$. Por el lado derecho tenemos $|z|^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2 = a^2+b^2$. Por lo tanto, son iguales.

(g) —

(h) —

(i) —

(j) —

6. (a) $x = 4$. Resolución

   (b) $y = -\frac{6}{5}$.hrefhttps://youtu.be/cgQsvNewGZ0Resolución

   (c) $(x,m) = (3,-3)$. Resolución

7. (a) 512. Resolución

   (b) $8^{-\frac{7}{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Resolución

   (c) $-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}i$. Resolución

   (d) $2^{\frac{75}{2}}e^{\frac{7\pi}{4}i}$. Resolución

   (e) Resolución

   (f) Resolución

   (g) Resolución

   (h) https://youtu.be/x1KOtRgsRrgResolución

   (i) Resolución

8. (a) $z = -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$. Resolución

   (b) $z = 0+0i$. Resolución

   (c) $z = \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i$ y $z = -\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$

   (d) $z = -\frac{1}{2}-i$

   (e) $z = 2+i$ y $z = -3+i$

   (f) Resolución

   (g) $z^5-1=0$

   (h) Resolución

   (i) $z \in \{2,-2,2i,-2i\}$

   (j) Resolución

9. —

10. (a) $|z| = 3$ es la circunferencia de radio 3 centrada en el origen. Resolución

    (b) $|z| \leq 2$ es el circulo de radio 2 centrado en el origen.

(c) $|z-3|=3$ es la circunferencia de radio 4 centrada en el punto $(3,0)$.

(d) $|z+1+i| \leq 4$ es el circulo de radio 4 centrado en el punto $(-1,-1)$. Resolución

(e) Resolución

(f) Resolución

(g) —

(h) Resolución

(i) Resolución

11. —