Práctica 7: Rectas y Planos

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Gabriel Romero

1. Hallar una recta del plano que cumpla con las siguientes condiciones. Dar una ecuación implícita o general, explícita, paramétrica vectorial, paramétrica cartesiana y simétrica. Indicar si la recta hallada es única.

   (a) Pasa por el punto $P(-3,1)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (2,-1)$

   (b) Pasa por el punto $P(1,2)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{AB}$ con $A(2,-5)$ y $B(4,-5)$

   (c) Es coincidente con la recta $L: 2x - y + 8 = 0$

   (d) Pasa por los puntos $P(-3,0)$ y $Q(-3,3)$

   (e) Pasa por el punto $P(1,4)$ y pendiente $-\dfrac{1}{2}$

   (f) Pasa por el origen y es perpendicular al vector $\vec{n} = (2,3)$

   (g) Pasa por el punto $P(1,2)$ y es perpendicular al eje de abscisas (eje x)

   (h) Tiene a -4 como absisa al origen y 3 como ordenada al origen

   (i) Pasa por los puntos $P(-3,1)$, $Q(1,3)$, $R(3,-3)$

   (j) Corta al eje de ordenadas en el punto $M(0,2)$

   (k) Forma un ángulo de $30°$ con el eje de abscisas (eje x).

   (l) Pasa por el punto $P(3,-2)$ y es normal a $\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es un vector con ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ con respecto al eje de ordenadas.

2. Analizar las posiciones relativas de las rectas del plano. Es decir, analizar si son paralelas, coincidentes, perpendiculares o incidentes. Calcular la intersección entre las rectas.

   (a) $s: 2x + y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

   (b) $r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ 4 - t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \dfrac{x+6}{-4} = \dfrac{y-1}{2}.$

   (c) $r_1: 2x - 4y = 2 \quad \text{y} \quad r_2: x + y = 0.$

   (d) $r_1: x + 3y = 7 \quad \text{y} \quad r_2: (x,y) = (4,1) + \alpha(-6,2)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (e) $r: 2x - y - 3 = 0 \quad \text{y} \quad s: (x,y) = (-1,0) + k(-6,3)$ con $k \in \mathbb{R}$.

   (f) $r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad s: \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - 3 = 0.$

   (g) $r: (x,y) = (4, 2-3k) \quad \text{y} \quad s: (x,y) = (2-4h, -3)$ con $k, h \in \mathbb{R}$.

   (h) $r: (x,y) = k(3,-2) + (10,5)$ con $k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad s: 2x + 3y - 35 = 0.$

3. Graficar los siguientes lugares geométricos relacionados a rectas.

   (a) $4x + 3y > 4$

   (b) $4x + 3y \neq 4$

   (c) $2x - y \leq 6$

   (d) $2x - y < 6$

   (e) $(x,y) = k(1,2) + (-2,3)$ con $k \in [0, +\infty)$

   (f) $(x,y) = \lambda(1,2) + (0,3)$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$

(g) $(x,y)=k(1,2)+(-1,3)$ con $k\in[-1,1]$

(h) $y=mx+2$ con $m\in[0,1)$

(i) $y=2x+b$ con $b\in[-2,1]$

(j) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x+y-5=0 \wedge 2x+y-17=0\}$

(k) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x+y-5=0 \vee 2x+y-17=0\}$

(l) $\begin{cases} -x+y-5=0 \\ 2x+y-17=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} -x+y-5=0 \\ 2x+y-17=0 \\ x+2y-17=0 \\ 3x+3y-34=0 \end{cases}$

4. Resolver los siguientes problemas integradores sobre la geometría en el plano.

   (a) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y la recta $r: 3x+4y-24=0$.

   (b) Calcular la distancia entre el punto $(-1,7)$ y la recta $r: x-3y-10=0$.

   (c) Encontrar un punto que equidiste de las rectas $r: x+2y-3=0$ y $s: -x-2y+4=0$ y otro que equidiste de las rectas r y $t: 2x-y+1=0$.

   (d) Calcular la distancia entre la recta que pasa por (1,-4) de pendiente -2 y la recta $r: 2x+y-6=0$.

   (e) Calcular la distancia entre las rectas $r: (x,y)=t(4,4)+(2,-5)$ y $s: (x,y)=k(1,1)+(0,-9)$

   (f) Calcular la proyección ortogonal del punto $P(3,-1)$ sobre la recta $r: -x-y-12=0$.

   (g) Calcular la proyección ortogonal del punto $P(-2,2)$ sobre la recta $r: -5x+y-1=0$ y el punto simétrico P'.

   (h) Hallar el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que el ángulo entre $r_1: ax+3y=0$ y $r_2: \begin{cases} x=4+\lambda \\ 1-2\lambda \end{cases}$ sea de 30°.

5. Hallar una recta del espacio que cumpla con las siguientes condiciones. Dar una ecuación paramétrica vectorial, paramétrica cartesiana y simétrica. Indicar si la recta hallada es única.

   (a) Pasa por los puntos $A(2,-3,1)$ y $B(-3,5,0)$.

   (b) Es paralela al vector $(2,5,-2)$ y contiene al punto $P(4,-5,0)$.

   (c) Incluye al punto $P(4,-5,0)$ y es perpendicular al vector $(2,5,-2)$.

   (d) Es perpendicular a los vectores $(-2,0,0)$ y $(0,0,-6)$ y pasa por el punto $P(3,3,0)$

   (e) Es paralela a $r: (x,y,z)=(2,4,-1)+t(-6,0,2)$ y pasa por $P(4,1,5)$.

   (f) Es perpendicular a $r: (x,y,z)=(2,4,-1)+t(-6,0,2)$ y contiene a $P(4,1,5)$.

   (g) Pasa por el punto $P(3,3,0)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases}$

   (h) Es perpendicular a $\pi: x+y+z-3=0$

   (i) Es perpendicular a $\pi: 3x-2y+z=5$ y incluye a $P(4,1,5)$

   (j) Es paralela a $\pi: 3x-2y+z=5$ y pasa por $P(4,1,5)$

   (k) Es perpendicular a $r_1: \dfrac{x+2}{2}=-y+3=\dfrac{z+2}{5}$ y a $r_2: x-3=\dfrac{2y-7}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ y contiene al punto $P(3,-3,4)$

   (l) Pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular a $r: (x,y,z)=(1,4,1)+t(3,-5,0)$ y no incluye a $P(0,0,3)$

(m) Está contenida en el plano $\pi : 2x - 3y + 2z = 6$ y es perpendicular a la recta $r : (x, y, z) = (2, -9, 7) + t(1, -1, 1)$.

(n) Es paralela a los planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 2$ y $\pi_2 : -x + 3y + 2z = 1$ e incluye al punto $P(2, 1, 0)$.

6. Hallar un plano que cumpla con las siguientes condiciones. Dar una ecuación implícita o general, explícita, paramétrica vectorial y paramétrica cartesiana. Indicar si el plano hallado es única.

(a) Pasa por el punto $P(2, 2, 2)$ y es perpendicular al vector $(3, -1, -2)$.

(b) Es paralelo a los vectores $(2, 0, 2)$ y $(0, 3, 0)$ y pasa por el punto $P(1, 2, 0)$.

(c) Pasa por los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, -2)$.

(d) Es perpendicular al vector $(-2, 0, 1)$.

(e) Es paralelo al vector $(2, -1, 4)$ y pasa por el punto $P(3, 3, 1)$.

(f) Pasa por los puntos $P(4, 0, 5)$ y $Q(-1, -1, 0)$.

(g) Pasa por los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(0, 2, -4)$ y $D(1, 7, 5)$.

(h) Pasa por los puntos $P(3, -2, 0)$ y $Q(1, -1, 1)$ y es paralelo al vector $(1, 2, 2)$.

(i) Pasa por los puntos $P(3, -2, 0)$ y $Q(1, -1, 1)$ y es paralelo al vector $(1, 2, 2)$.

(j) Es paralelo al plano $\pi : 2x - 3y + 2z = 6$ y pasa por el punto $P(2, 1, 0)$.

(k) Es paralelo a las rectas $r_1 : (x, y, z) = (1, 4, 0) + t(5, 5, -3)$ y $r_2 : (x, y, z) = (-10, 2, 7) + t(4, 0, 3)$ y contiene al punto $P(2, 2, 2)$.

(l) Es perpendicular a la recta $r : (x, y, z) = (2, -9, 7) + t(1, -1, 1)$ y pasa por el punto $P(3, 1, -3)$.

(m) Contiene a la recta $r : (x, y, z) = (5, 1, 0) + t(1, -3, 1)$.

(n) Es perpendicular a los planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 2$ y $\pi_2 : -x + 3y + 2z = 1$ e incluye al punto $P(5, 1, 0)$.

(o) Es perpendicular al planos $\pi : 3x - 2y + z = 5$ y pasa por $P(4, 1, 5)$.

(p) Contiene a la recta $r : (x, y, z) = (2, 1, 2) + t(0, 4, 1)$ y al punto $P(1, 2, 3)$

(q) Contiene a las rectas $r_1 : (x, y, z) = (13, -2, 0) + t(-6, 0, 2)$ y $r_2 : (x, y, z) = (-14, -8, 16) + t(5, 2, -4)$.

7. Calcular la intersección de las siguientes rectas y/o planos.

(a) $r_1 : (x, y, z) = (13, -2, 0) + t(-6, 0, 2)$ y $r_2 : (x, y, z) = (-14, -8, 16) + t(5, 2, -4)$

(b) $r_1 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$ y $r_2 : (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(3, 8, 13)$

(c) $r_1 : (x, y, z) = (5, 4, -1) + t(-6, 0, 2)$ y $r_2 : (x, y, z) = (2, 2, -1) + t(-3, 2, 1)$

(d) $r_1 : (x, y, z) = (4, 0, 2) + t(2, 4, 6)$ y $r_2 : (x, y, z) = (9, 10, 15) + t(3, 6, 9)$

(e) $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 2$ y $\pi_2 : -x + 3y + 2z = 1$.

(f) $\pi_1 : 2x - 4y + 8z = 3$ y $\pi_2 : 3x - 6y + 12z = 2$.

(g) $\pi_1 : 2x - 4y + 8z = 3$ y $\pi_2 : 6x - 12y + 24z = 9$.

(h) $r_1 : (x, y, z) = (4, 0, 2) + t(2, 4, 6)$ y $\pi_2 : 6x - 12y + 24z = 9$

(i) $\pi_1 : 2x - 4y + 8z = 3$ y $r_2 : (x, y, z) = (2, 2, -1) + t(-3, 2, 1)$

8. Resolver los siguientes problemas integradores sobre la geometría en el plano.

(a) Dados los puntos $A(3,1,1)$ y $B(3,-2,4)$, y la recta $L:(x,y,z)=(1,-1,1)+t(1,1,0)$. Hallar un punto $C\in L$ tal que el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sea $60°$.

(b) Dadas las rectas L_1

Respuestas

1. (a) La recta es única.

   Algunas ecuaciones: $(x,y)=(-3,1)+k(2,-1)$.
   $\begin{cases} x=-3+2k \\ y=1-k \end{cases}$
   $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}$.

   (b) La recta es única. Se utiliza $\overrightarrow{AB}=(2,0)$ como director.

   $(x,y)=(1,2)+k(2,0)$.
   $\begin{cases} x=1+2k \\ y=2 \end{cases}$
   $y=2$.

   $y-2=0$.

   No existe simétrica.

   (c) La recta es única. $4x-2y+16=0$. $y=2x+8$. $(x,y)=(0,8)+k(1,2)$.
   $\begin{cases} x=k \\ y=8+2k \end{cases}$
   $x=\dfrac{y-8}{2}$.

   (d) La recta es única. Se utiliza $\overrightarrow{PQ}=(0,3)$ como director.

   $(x,y)=(-3,0)+k(0,3)$
   $\begin{cases} x=-3 \\ y=3k \end{cases}$
   $x=-3$.

   $x+3=0$.

   No existe simétrica.

   (e) La recta es única. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$. $(x,y)=(1,4)+k(2,-1)$.
   $\begin{cases} x=1+2k \\ y=4-k \end{cases}$
   $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-1}$.

   (f) La recta es única. Se utiliza $\vec{d}=(-3,2)$ como director ya que $\vec{n}\perp\vec{d}$.

   $(x,y)=k(-3,2)$.
   $\begin{cases} x=-3k \\ y=2k \end{cases}$
   $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{2}$.

   (g) La recta es única. Se utiliza $\hat{\jmath}$ como director ya que $\hat{\jmath}\perp\hat{\imath}$.

   $(x,y)=(1,2)+k(0,1)$.
   $\begin{cases} x=1 \\ y=2+k \end{cases}$

$x = 1$.

$x - 1 = 0$.

No existe simétrica.

(h) La recta es única. De los puntos $A(-4, 0)$ y $B(0, 3)$ se obtiene el vector director $\overrightarrow{AB} = (4, 3)$.

$(x, y) = (0, 3) + k(4, 3)$.

$$\begin{cases} x = 4k \\ y = 3 + 3k \end{cases}$$

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-3}{3}$.

(i) No existe una recta que cumpla con las condiciones ya que los puntos no están alineados. Se puede ver porque $\overrightarrow{PQ} \nparallel \overrightarrow{QR}$

(j) La recta NO es única, la misma responde a la ecuación $y = mx + 2$ o $(x, y) = (0, 2) + k(a, b)$. Por ejemplo, se elije $m = 1$ y se obtiene la recta $y = x + 2$.

(k) La recta NO es única. Se obtiene el vector unitario $\hat{d} = (\cos 30°, \sin 30°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ como director. Se puede elegir cualquier punto para definir la recta. Por ejemplo, con $P(1, 3)$ y se obtiene la recta $(x, y) = (1, 3) + k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(l) $\vec{n}$ puede ser $\overrightarrow{n_1} = (\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ o $\overrightarrow{n_2} = (\cos 135°, \sin 135°) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Por lo que la recta no es única. Las opciones son: $(x, y) = (3, -2) + k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ o $(x, y) = (3, -2) + t\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. (a) $s \parallel r$. $s \cap r = \emptyset$. Resolución por Elena Virseda

(b) $r \parallel s$. $r \cap s = \emptyset$. Resolución por Matemáticas y Física con Pablo

(c) r_1 y r_2 son incidentes no-perpendiculares ya que se intersectan en un punto y sus normales no son perpendiculares: $(2, -4) \not\perp (1, 1)$. La intersección es $r_1 \cap r_2 = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$. Matemáticas con Huais

(d) r_1 y r_2 son coincidentes. La intersección es $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$. Matemáticas con Huais

(e) Reemplazamos $\begin{cases} x = -1 - 6k \\ y = 3k \end{cases}$ en $2x - y - 3 = 0$ y obtenemos $k = -\frac{1}{3}$. Por lo tanto, $r \cap s = \{(1, -1)\}$. Además $\overrightarrow{n_r} = (2, -1)$ es paralela a $\overrightarrow{d_s} = (-6, 3)$, por lo que $r \perp s$.

(f) —

(g) —

(h) —

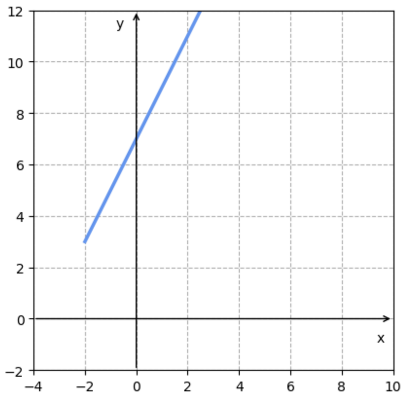
3. (a) —

(b) —

(c) —

(d) —

(e)



(f) —

(g) —

(h) —

(i) —

(j) —

(k) —

(l) —

(m) —

4. —

5. (a) —

(b) —

(c) —

(d) —

(e) —

(f) —

(g) —

(h) —

(i) —

(j) —

(k) $r : (x, y, z) = (3, -3, 4) + t(-8, -1, 3)$.

$$r : \begin{cases} x = 3 - 8y \\ y = -3 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

$$r : \frac{x-3}{-8} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{3}.$$

La recta es única. Resolución por Mate316.

(l) —

(m) —

(n) —

6. —

7. (a) —

   (b) $r_1 \cap r_2 = \{(5, 9, 13)\}$. Resolución por Mate316.

   (c) —

   (d) —

   (e) —

   (f) —

   (g) —

   (h) —

   (i) —

8. —