Práctica 7: Rectas y Planos

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Gabriel Romero

1. Hallar una recta del plano que cumpla con las siguientes condiciones. Dar una ecuación implícita o general, explícita, paramétrica vectorial, paramétrica cartesiana y simétrica. Indicar si la recta hallada es única.

   (a) Pasa por el punto $P(-3,1)$ y es paralela al vector $\vec{d}=(2,-1)$

   (b) Pasa por el punto $P(1,2)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{AB}$ con $A(2,-5)$ y $B(4,-5)$

   (c) es coincidente con la recta $L: 2x-y+8=0$

   (d) Pasa por los puntos $P(-3,0)$ y $Q(-3,3)$

   (e) Pasa por el punto $P(1,4)$ y pendiente $-\dfrac{1}{2}$

   (f) Pasa por el origen y es perpendicular al vector $\vec{n}=(2,3)$

   (g) Pasa por el punto $P(1,2)$ y es perpendicular al eje de abscisas (eje x)

   (h) Tiene a -4 como absisa al origen y 3 como ordenada al origen

   (i) Pasa por los puntos $P(-3,1)$, $Q(1,3)$, $R(3,-3)$

   (j) Corta al eje de ordenadas en el punto $M(0,2)$

   (k) Forma un ángulo de 30° con el eje de abscisas (eje x).

   (l) Pasa por el punto $P(3,-2)$ y es normal a $\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es un vector con ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ con respecto al eje de ordenadas.

2. Analizar las posiciones relativas de las rectas del plano. Es decir, analizar si son paralelas, coincidentes, perpendiculares o incidentes. Calcular la intersección entre las rectas.

   (a) $s: 2x+y-1=0 \quad \text{y} \quad r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \end{cases}$

   (b) $r: \begin{cases} x = -3+2t \\ 4-t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \dfrac{x+6}{-4} = \dfrac{y-1}{2}.$

   (c) $r_1: 2x-4y=2 \quad \text{y} \quad r_2: x+y=0.$

   (d) $r_1: x+3y=7 \quad \text{y} \quad r_2: (x,y)=(4,1)+\alpha(-6,2)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (e) $r: 2x-y-3=0 \quad \text{y} \quad s: (x,y)=(-1,0)+k(-6,3)$ con $k \in \mathbb{R}$.

   (f) $r: y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad s: \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y-3=0.$

   (g) $r: (x,y)=(4,2-3k) \quad \text{y} \quad s: (x,y)=(2-4h,-3)$ con $k,h \in \mathbb{R}$.

   (h) $r: (x,y)=k(3,-2)+(10,5)$ con $k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad s: 2x+3y-35=0.$

3. Graficar los siguientes lugares geométricos relacionados a rectas.

   (a) $4x+3y>4$

   (b) $4x+3y\neq 4$

   (c) $2x-y\leq 6$

   (d) $2x-y<6$

   (e) $(x,y)=k(1,2)+(-2,3)$ con $k\in[0,+\infty)$

   (f) $(x,y)=\lambda(1,2)+(0,3)$ con $\lambda\in\mathbb{Z}$

(g) $(x,y) = k(1,2) + (-1,3)$ con $k \in [-1,1]$

(h) $y = mx + 2$ con $m \in [0,1)$

(i) $y = 2x + b$ con $b \in [-2,1]$

(j) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x+y-5 = 0 \wedge 2x+y-17 = 0\}$

(k) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x+y-5 = 0 \vee 2x+y-17 = 0\}$

(l) $\begin{cases} -x+y-5=0 \\ 2x+y-17=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} -x+y-5=0 \\ 2x+y-17=0 \\ x+2y-17=0 \\ 3x+3y-34=0 \end{cases}$

4. Resolver los siguientes problemas integradores sobre la geometría en el plano.

   (a) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y la recta $r: 3x + 4y - 24 = 0$.

   (b) Calcular la distancia entre el punto $(-1,7)$ y la recta $r: x - 3y - 10 = 0$.

   (c) Encontrar un punto que equidiste de las rectas $r: x + 2y - 3 = 0$ y $s: -x - 2y + 4 = 0$ y otro que equidiste de las rectas r y $t: 2x - y + 1 = 0$.

   (d) Calcular la distancia entre la recta que pasa por (1,-4) de pendiente -2 y la recta $r: 2x + y - 6 = 0$.

   (e) Calcular la distancia entre las rectas $r: (x,y) = t(4,4) + (2,-5)$ y $s: (x,y) = k(1,1) + (0,-9)$

   (f) Calcular la proyección ortogonal del punto $P(3,-1)$ sobre la recta $r: -x - y - 12 = 0$.

   (g) Calcular la proyección ortogonal del punto $P(-2,2)$ sobre la recta $r: -5x + y - 1 = 0$ y el punto simétrico P'.

   (h) Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el ángulo entre $r_1: ax + 3y = 0$ y $r_2: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ 1 - 2\lambda \end{cases}$ sea de 30°.

5. Hallar una recta del espacio que cumpla con las siguientes condiciones. Dar una ecuación paramétrica vectorial, paramétrica cartesiana y simétrica. Indicar si la recta hallada es única.

   (a) Pasa por los puntos $A(2,-3,1)$ y $B(-3,5,0)$.

   (b) Es paralela al vector $(2,5,-2)$ y contiene al punto $P(4,-5,0)$.

   (c) Incluye al punto $P(4,-5,0)$ y es perpendicular al vector $(2,5,-2)$.

   (d) Es perpendicular a los vectores $(-2,0,0)$ y $(0,0,-6)$ y pasa por el punto $P(3,3,0)$

   (e) Es paralela a $r: (x,y,z) = (2,4,-1) + t(-6,0,2)$ y pasa por $P(4,1,5)$.

   (f) Es perpendicular a $r: (x,y,z) = (2,4,-1) + t(-6,0,2)$ y contiene a $P(4,1,5)$.

   (g) Pasa por el punto $P(3,3,0)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$

   (h) Es perpendicular a $\pi: x + y + z - 3 = 0$

   (i) Es perpendicular a $\pi: 3x - 2y + z = 5$ y incluye a $P(4,1,5)$

   (j) Es paralela a $\pi: 3x - 2y + z = 5$ y pasa por $P(4,1,5)$

   (k) Es perpendicular a $r_1: \dfrac{x+2}{2} = -y + 3 = \dfrac{z+2}{5}$ y a $r_2: x - 3 = \dfrac{2y-7}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ y contiene al punto $P(3,-3,4)$

   (l) Pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular a $r: (x,y,z) = (1,4,1) + t(3,-5,0)$ y no incluye a $P(0,0,3)$

(m) Está contenida en el plano $\pi : 2x - 3y + 2z = 6$ y es perpendicular a la recta $r : (x, y, z) = (2, -9, 7) + t(1, -1, 1)$.

(n) Es paralela a los planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 2$ y $\pi_2 : -x + 3y + 2z = 1$ e incluye al punto $P(2, 1, 0)$.

6. Hallar un plano que cumpla con las siguientes condiciones. Dar una ecuación implícita o general, explícita, paramétrica vectorial y paramétrica cartesiana. Indicar si el plano hallado es única.

   (a) Pasa por el punto $P(2, 2, 2)$ y es perpendicular al vector $(3, -1, -2)$.

   (b) Es paralelo a los vectores $(2, 0, 2)$ y $(0, 3, 0)$ y pasa por el punto $P(1, 2, 0)$.

   (c) Pasa por los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, -2)$.

   (d) Es perpendicular al vector $(-2, 0, 1)$.

   (e) Es paralelo al vector $(2, -1, 4)$ y pasa por el punto $P(3, 3, 1)$.

   (f) Pasa por los puntos $P(4, 0, 5)$ y $Q(-1, -1, 0)$.

   (g) Pasa por los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(0, 2, -4)$ y $D(1, 7, 5)$.

   (h) Pasa por los puntos $P(3, -2, 0)$ y $Q(1, -1, 1)$ y es paralelo al vector $(1, 2, 2)$.

   (i) Pasa por los puntos $P(3, -2, 0)$ y $Q(1, -1, 1)$ y es paralelo al vector $(1, 2, 2)$.

   (j) Es paralelo al plano $\pi : 2x - 3y + 2z = 6$ y pasa por el punto $P(2, 1, 0)$.

   (k) Es paralelo a las rectas $r_1 : (x, y, z) = (1, 4, 0) + t(5, 5, -3)$ y $r_2 : (x, y, z) = (-10, 2, 7) + t(4, 0, 3)$ y contiene al punto $P(2, 2, 2)$.

   (l) Es perpendicular a la recta $r : (x, y, z) = (2, -9, 7) + t(1, -1, 1)$ y pasa por el punto $P(3, 1, -3)$.

   (m) Contiene a la recta $r : (x, y, z) = (5, 1, 0) + t(1, -3, 1)$.

   (n) Es perpendicular a los planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 2$ y $\pi_2 : -x + 3y + 2z = 1$ e incluye al punto $P(5, 1, 0)$.

   (o) Es perpendicular al planos $\pi : 3x - 2y + z = 5$ y pasa por $P(4, 1, 5)$.

   (p) Contiene a la recta $r : (x, y, z) = (2, 1, 2) + t(0, 4, 1)$ y al punto $P(1, 2, 3)$

   (q) Contiene a las rectas $r_1 : (x, y, z) = (13, -2, 0) + t(-6, 0, 2)$ y $r_2 : (x, y, z) = (-14, -8, 16) + t(5, 2, -4)$.

7. Calcular la intersección de las siguientes rectas y/o planos.

   (a) $r_1 : (x, y, z) = (13, -2, 0) + t(-6, 0, 2)$ y $r_2 : (x, y, z) = (-14, -8, 16) + t(5, 2, -4)$

   (b) $r_1 : (x, y, z) = (5, 4, -1) + t(-6, 0, 2)$ y $r_2 : (x, y, z) = (2, 2, -1) + t(-3, 2, 1)$

   (c) $r_1 : (x, y, z) = (4, 0, 2) + t(2, 4, 6)$ y $r_2 : (x, y, z) = (9, 10, 15) + t(3, 6, 9)$

   (d) $\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 2$ y $\pi_2 : -x + 3y + 2z = 1$.

   (e) $\pi_1 : 2x - 4y + 8z = 3$ y $\pi_2 : 3x - 6y + 12z = 2$.

   (f) $\pi_1 : 2x - 4y + 8z = 3$ y $\pi_2 : 6x - 12y + 24z = 9$.

   (g) $r_1 : (x, y, z) = (4, 0, 2) + t(2, 4, 6)$ y $\pi_2 : 6x - 12y + 24z = 9$

   (h) $\pi_1 : 2x - 4y + 8z = 3$ y $r_2 : (x, y, z) = (2, 2, -1) + t(-3, 2, 1)$

Respuestas

1. —

2. (a) $s \parallel r$. $s \cap r = \emptyset$. Resolución por Elena Virseda

   (b) $r \parallel s$. $r \cap s = \emptyset$. Resolución por Matemáticas y Física con Pablo

   (c) r_1 y r_2 son incidentes no-perpendiculares ya que se intersectan en un punto y sus normales no son perpendiculares: $(2, -4) \not\perp (1, 1)$. La intersección es $r_1 \cap r_2 = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$. Matemáticas con Huais

   (d) r_1 y r_2 son coincidentes. La intersección es $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$. Matemáticas con Huais

   (e) —

   (f) —

   (g) —

   (h) —

3. —

4. —

5. (a) —

   (b) —

   (c) —

   (d) —

   (e) —

   (f) —

   (g) —

   (h) —

   (i) —

   (j) —

   (k) $r : (x, y, z) = (3, -3, 4) + t(-8, -1, 3)$.

   $$r : \begin{cases} x = 3 - 8y \\ y = -3 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

   $r : \dfrac{x-3}{-8} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$.

   La recta es única. Resolución por Mate316.

   (l) —

   (m) —

   (n) —

6. —

7. —