Práctica 1: Números complejos

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Gabriel Romero

1. Resolver las ecuaciones cuadráticas y comprobar el resultado.

   (a) $x^2 + 3x = -3$

   ** $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Resolución

   (b) $2y^2 + 4y = -5$

   ** $y = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} i$. Resolución

   (c) $t^2 + 3t = -8$

   ** $y = -\frac{3}{2} \pm \frac{23}{2} i$. Resolución

   (d) $x(x - 10) = -34$

   ** $x = 5 \pm 3i$

2. Efectuar las siguientes operaciones y obtener el número complejo en forma binómica.

   (a) $(-2 + 3i) + (1 + 3i)$

   ** $-1 + 6i$

   (b) $(1 - 3i) - (4 - 2i)$

   ** $-3 - i$

   (c) $i^2 + 3i + 2 - 5i^3$

   ** $1 + 8i$

   (d) $(3 + 2i)(i - 5)$

   ** $-17 - 7i$

   (e) $(i - 2)(3 + 2i)(1 - 3i)i$

   ** $-23 - 11i$. Resolución

   (f) $(3 + 4i)^{-1}$

   ** $\frac{3}{25} - \frac{4}{25} i$. Resolución

   (g) $\frac{5 - 2i}{5i - 2}$

   ** $-\frac{20}{29} - \frac{21}{29} i$. Resolución

   (h) $\frac{3 + 2i}{-3 - 4i}$

   ** $-\frac{17}{25} + \frac{6}{25} i$. Resolución

   (i) $\frac{-3i + 1}{4i - 2}$

   ** $-\frac{7}{10} + \frac{1}{10} i$. Resolución

   (j) $(1 - 2i)^2$

   ** $-3 - 4i$

   (k) $\frac{i}{i + 1} + \left(\frac{1 + i}{i}\right)^2$

   ** $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i$. Resolución

   (l) $(1 + 2i)^3$

   ** $-11 - 2i$

3. Representar en el plano complejo los siguientes números e indicar su módulo y argumento.

   (a) $1 + i$

   ** $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} = 45°$.

   (b) $2 - 3i$

   ** $|2 - 3i| = \sqrt{13}$, $\arg(2 - 3i) \simeq -56.31°$

   (c) $-1 + 3i$

   ** $|-1 + 3i| = \sqrt{10}$, $\arg(-1 + 3i) \simeq 108.43°$

   (d) $-2i - 4$

   ** $|-2i - 4| = 2\sqrt{5}$, $\arg(-2i - 4) \simeq -153.43°$

   (e) 3

   ** $|3| = 3$, $\arg(3) = 0°$

   (f) $2i$

   ** $|2i| = 2$, $\arg(2i) = \frac{\pi}{2} = 90°$

   (g) -1

   ** $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi = 180°$

   (h) $-5i$

   ** $|-5i| = 5$, $\arg(-5i) = -\frac{\pi}{2} = -90°$

   (i) $-\sqrt{2}$

   ** $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $\arg(-\sqrt{2}) = \pi = 180°$

   (j) $4i + 2$

   ** $|4i + 2| = 2\sqrt{5}$, $\arg(4i + 2) \simeq 63.44°$

   (k) $1 + \sqrt{2}$

   ** $|1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} \simeq 2.4142$,

$\arg(1+\sqrt{2}) = 0°$

(l) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$

** $\left|-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $\arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right) \simeq 123.69°$

(m) $i-4$

** $|i-4| = \sqrt{17}$, $\arg(i-4) \simeq 165.96°$

(n) $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}i$

** $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}i| = \sqrt{6+\sqrt{8}} \simeq 2.9713$, $\arg(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}i) \simeq -35.657°$

4. Transformar los números complejos a sus formas restantes (binómica, trigonométrica o exponencial).

(a) $1+\sqrt{3}i$

** $1+\sqrt{3}i = 2\left[\cos(()+i\sin(()]\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

(b) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

** $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

(c) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

** $2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\sqrt{3}+i$

(d) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

** $\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2e^{-\frac{\pi}{4}}$

(e) $5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

** $5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 5e^{-\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i$

(f) $7e^{\pi i}$

** $7e^{\pi i} = 7[\cos(\pi)+i\sin(\pi)] = -7+0i$

(g) -7

** $-7+0i = 7[\cos(\pi)+i\sin(\pi)] = 7e^{\pi i}$

(h) $\sqrt{6}[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$

** $\sqrt{6}[\cos(\pi)+i\sin(\pi)] = \sqrt{6}e^{\pi i} = -\sqrt{6}+0i$

(i) $3e^{\frac{\pi}{4}i}$

** $3e^{\frac{\pi}{4}i} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

(j) $4i$

** $4i = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4e^{\frac{\pi}{2}}i$

(k) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

** $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(l) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

** $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0+i$

(m) $-2\sqrt{3}+2i$

** $-2\sqrt{3}+2i = 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$

(n) $4[\cos(0)+i\sin(0)]$

** $4[\cos(0)+i\sin(0)] = 4e^0 = 4+0i$

(o) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

** $2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1-\sqrt{3}i$

(p) $-1-i$

** $-1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

(q) $1\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = e^{\frac{\pi}{12}} \simeq 0.9659+0.2588i$

(r) $4e^{\frac{3\pi}{2}i}$

** $4e^{\frac{3\pi}{2}i} = 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 0-4i$

5. Utilizando complejos genéricos $z=a+bi$ y $w=c+di$, demostrar que se cumplen las siguientes propiedades para todos los números complejos.

(a) $Re(z+3w) = Re(z)+Re(3w)$

** $z+3w = (a+bi)+3(c+di) = a+bi+3c+3di = (a+3c)+(b+d)i$. Por lo ranto, $Re(z+3w) = a+3c = Re(z)+Re(3w)$

(b) $\overline{\overline{z}+w} = z+\overline{w}$

** Ya que $\overline{z} = a-bi$, se obtiene que el lado izquierdo es $\overline{\overline{z}+w} = \overline{(a-bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(-b+d)i} = (a+c)-(-b+d)i = (a+c)+(b-d)i$. Por otra parte, como $\overline{w} = c-di$ el lado derecho es $z+\overline{w} = (a+bi)+(c-di) = (a+c)+(b-d)i$. Podemos obserar que son iguales: $\overline{\overline{z}+w} = z+\overline{w} = (a+c)+(b-d)i$

(c) $Im(z.\overline{z}) = 0$

** $z.\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 = (a^2+b^2)+0i$, por lo que su parte imaginaria es cero.

(d) $\frac{z}{i} = -i.z$

** $\frac{z}{i} = \frac{a+bi}{i} = \frac{a+bi}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{(a+bi)i}{-1} = -i(a+bi) = -iz$

(e) $\overline{i.z} = -i.\overline{z}$

** Desarrollando el lado izquierdo se obtiene $\overline{i.z} = \overline{i(a+bi)} = \overline{ai+bi^2} = \overline{-b+ai} = -b-ai$. Desarrollando el lado derecho se obtiene $-i.\overline{z} = -i(a-bi) = -ai+bi^2 = -b-ai$, que es lo mismo.

(f) $z.\overline{z} = |z|^2$

** Por el lado izquierdo tenemos: $z.\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2$. Por el lado derecho tenemos $|z|^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2 = a^2+b^2$. Por lo tanto, son iguales.

(g) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$

(h) $|z.(1+2i)|^2 = (|z|.|3+4i|)^2$

(i) $z+\overline{z} \in \mathbb{R}$

(j) $z-\overline{z} \notin \mathbb{R}$

6. En cada inciso, hallar el número real (x, y, m, etc...) que cumpla la condición.

(a) $(3+2i)(x+6i)$ es un número imaginario puro

** $x = 4$. Resolución

(b) $\dfrac{y+3i}{2-5i}$ es un número real puro

** $y = -\dfrac{6}{5}$.hrefhttps://youtu.be/cgQsvNewGZ0Resolución

(c) $(5x+2m)+m^3i = 9-27i$

** $(x,m) = (3,-3)$. Resolución

7. Utilizando la forma exponencial, calcular los siguientes números complejos.

(a) $(-1-\sqrt{3}i)^9$

** 512. Resolución

(b) $\dfrac{1}{(2+2i)^7}$

** $8^{-\frac{7}{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Resolución

(c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^4}{(-1+\sqrt{3}i)^6}$

** $-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}i$. Resolución

(d) $\dfrac{(1+i)^4}{(-1-i)^6}$

** $2^{\frac{75}{2}}e^{\frac{7\pi}{4}i}$. Resolución

(e) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2i}$ (las raíces cúbicas de $2\sqrt{3}+2i$)

** Resolución

(f) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}i-1}$ (las raíces quintas de $-\sqrt{3}i-1$)

** Resolución

(g) $\sqrt[4]{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}}$ (las raíces cuartas de $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}$)

** Resolución

(h) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$ (las raíces cúbicas de $-1-i\sqrt{3}$)

** https://youtu.be/x1KOtRgsRrgResolución

(i) $\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$ (las raíces quintas de $-1+\sqrt{3}i$)

** Resolución

8. Hallar todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ que solucionan la ecuación.

(a) $iz^{-1} = 2-i$

** $z = -\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}$. Resolución

(b) $z(1+2i) = 2z+\overline{z}$

** $z = 0+0i$. Resolución

(c) $\overline{z} = \dfrac{3+i}{Re(z)}$

** $z = \sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ y $z = -\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

(d) $\dfrac{z+1}{Im(z)} = \overline{z}$

** $z = -\dfrac{1}{2}-i$

(e) $z+|z|^2 = 7+i$

** $z = 2+i$ y $z = -3+i$

(f) $z^5-\sqrt{3} = i$

** Resolución

(g) $z^5-1 = 0$

** $z^5-1 = 0$

(h) $\dfrac{-3i+1}{4i-2} = z^2i$

** Resolución

(i) $z^4 - 8 = 0$

** $z \in \{2, -2, 2i, -2i\}$

(j) $z^4 + i = 0$

** Resolución

9. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Jusificar.

   (a) El módulo de $z = 3 + i$ es mayor que el de $w = 2 - 2i$

   (b) Si el argumento de (z) es α, entonces el argumento de $2z$ será 2α

   (c) Dado $z = 2e^{\beta i}$ y $w = 1 + i$, el argumento de $z.w$ será $\beta + \frac{\pi}{4}$

   (d) Si z es un número real puro, entonces z^2 es un número real puro

10. Representar en el plano complejo los números $z = x + yi$ tales que cumplan las siguientes condiciones.

   (a) $|z| = 3$

   ** $|z| = 3$ es la circunferencia de radio 3 centrada en el origen. Resolución

   (b) $|z| \leq 2$

   ** $|z| \leq 2$ es el circulo de radio 2 centrado en el origen.

   (c) $|z - 3| = 4$

   ** $|z - 3| = 3$ es la circunferencia de radio 4 centrada en el punto $(3, 0)$.

   (d) $|z + 1 + i| \leq 4$

   ** $|z + 1 + i| \leq 4$ es el circulo de radio 4 centrado en el punto $(-1, -1)$. Resolución

   (e) $|z - 2 - 2i| = 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \frac{pi}{2}$

   ** Resolución

   (f) $|z + i| < 1 \quad \wedge \quad \frac{7}{4}\pi < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$

   ** Resolución

   (g) $Im(z) > -\frac{1}{3}Re(z) \quad \wedge \quad 2 \leq |z - 3 + i| \leq 4$

   (h) $3Im(z) < 0 \quad \vee \quad |z + 1| \leq 4$

   ** Resolución

   (i) $4Im(z) = 4 \quad \vee \quad 2 < |z - 3 + i|$

   ** Resolución

11. En el plano complejo, el número $w = z.e^{\phi i}$ está rotado ϕ grados con respecto a z y el número $u = k.z$ presenta una expansión de factor $k \in \mathbb{R}$ con respecto al origen. Utilizar estas propiedades de los complejos y realizar las siguientes actividades.

   (a) Rotar el complejo $z = 3 + i$ para que pertenezca a la región $A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z + 3| \leq 1\}$. Graficar.

   (b) Escalar el complejo $z = 1 + 4i$ para que pertenezca a la región $B = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) \leq 2 - Re(z)\}$. Graficar.

   (c) Al conectar los puntos de los complejos $a = 2i$, $b = 0$ y $c = 1$ se forma la letra L. Rotar la letra $90°$ en sentido antihorario. Independientemente, obtener una L cuyas dimensiones sean el triple de grandes. Graficar.

   (d) Al conectar los puntos de los complejos $a = 0$, $b = 2i$, $c = 1 + \frac{3}{2}i$ y $d = i$ se forma la letra P. Rotar la letra $60°$ en sentido horario. Por otra parte, obtener una letra P cuyo tamaño sea la mitad del original. Graficar.

   (e) Al conectar los puntos de los complejos $a = i$, $b = 1 + i$, $c = 0$ y $d = 1$ se forma la letra Z cuya altura mide 1 unidad. Aplicar una rotación y/o expansión para obtener una N cuya base mida 2 unidades. Graficar.