Práctica 5: Matrices

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Gabriel Romero

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2i \\ -1 & -2i & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4i & 0 \\ i & 3 & 2i \end{pmatrix}$$

Cuando sea posible, resolver las siguientes operaciones

(a) $A + B$

** $A+B = \begin{pmatrix} -1 & 2+4i & 2i \\ -1-i & 3-2i & 2+i \end{pmatrix}$.
Resolución en este link.

(b) $\frac{2}{5}B$

** $\frac{2}{5}B = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{8}{5}i & 0 \\ \frac{2}{5}i & \frac{6}{5} & \frac{4}{5}i \end{pmatrix}$. Resolución en este link.

(c) $-2B$

** $2B = \begin{pmatrix} 4 & -8i & 0 \\ -2i & -6 & -4i \end{pmatrix}$.
Resolución en este link.

(d) $A^T + 2B^T$

** $A^T+2B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1+2i \\ 2+8i & 6-2i \\ 2i & 2+4i \end{pmatrix}$.
Resolución en este link.

(e) $A^T - B^T$

** $A^T-B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1-i \\ 2-4i & -3-2i \\ 2i & 2-2i \end{pmatrix}$.
Resolución en este link.

(f) $(A - B)^T$

** $A^T-B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1-i \\ 2-4i & -3-2i \\ 2i & 2-2i \end{pmatrix}$.

(g) $5\overline{A}$

** $A5\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -10i \\ -5 & 10i & 10 \end{pmatrix}$.

(h) $A^T + B^\dagger$

** $A + B^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & -1-i \\ 2+4i & 3-2i \\ 2i & 2-2i \end{pmatrix}$.

(i) $A + B^\dagger$

** No es posible, ya que A tiene tamaño 2x3 y $B^\dagger$ tiene tamaño 3x2.

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando sea posible, resolver las siguientes operaciones

(a) $A.B$

** Resolución en este link.

(b) $A^T.B^T$

** No se puede, ya que A^T es 2x3 y B^T es 2x2.

(c) $B^T.A^T$

** Resolución en este link.

(d) $(A.B)^T$

** Resolución en este link.

(e) B^2

** $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(f) B^3

** $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(g) $A.B^2$

** $A.B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

(h) $2A + B$

** No se puede, ya que $2A$ es 3x2 y B es 2x2.

(i) $B.A + B$

** No se puede calcular $B.A$ ya que B es 2x2 y A es 3x2.

(j) $B^2 - A^T.A$

** $B^2 - A^T.A = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

(k) $A^3 - A.E$

** No se puede calcular A^2 ya que 3x2, por lo tanto tampoco A^3.

(l) $E^T - 2E^2$

** $E^T-2E^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -20 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

(m) $5A - E.(A^T)^T$

** $5A - E.(A^T)^T = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -3 & 19 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

(n) $A.D + C^T$

** No se puede calcular $A.D$ ya que A es 3x2 y D es 3x1.

(o) $C.D$

** $C.D = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$

(p) $D.C$

** $D.C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(q) $E.D - D$

** $E.D - D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(r) $C.E + C$

** $C.E + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Hallar las incógnitas pedidas en las siguientes ecuaciones matriciales

(a) Calcular x, y y z para que $\begin{pmatrix} 8-y & 0 \\ x+2z & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

** $(x, y, z) = (3, -4, -4)$. Resolución por Aprende Matemáticas.

(b) Calcular α, β, γ y δ para que $\begin{pmatrix} 2+\alpha & 3 \\ 3\delta & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5-2\alpha & \beta \\ -8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ w-1 & 5\gamma \end{pmatrix}$

** $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, -3, \frac{7}{2}, -1)$. Resolución por Mate Profesor Rosado.

(c) Calcular x, y y z para que $\begin{pmatrix} x+2 & 0 \\ 3 & y^2+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ z & 6 \end{pmatrix}$

** Existen dos soluciones: $(x, y, z) = (-6, -3, 3)$ y también $(x, y, z) = (-6, 2, 3)$. El conjunto solución es $S = \{(-6, -3, 3), (-6, 2, 3)\}$. Resolución por Matemática Serie 23.

(d) Calcular a, b y c para que $\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & 1-c & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

** $(a, b, c) = (6, 0, 3)$. Resolución por Rolando Flores Aguilar.

(e) Dada $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$, calcular x e y para que que la matriz sea idempotente, es decir, $A^2 = A$.

** Existen dos soluciones: $(x, y) = (3, -2)$ y también $(x, y) = (-2, 3)$. El conjunto solución es $S = \{(-2, 3), (3, -2)\}$. Resolución por Mates con Andrés.

4. Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de propiedades o mediante notación de índices, o si son falsas dar un contraejemplo.

(a) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

**

(b) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

**

(c) Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $A + A^T$ es simétrica.

**

(d) Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $A - A^T$ es antisimétrica.

**

(e) Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $A.A^T$ es simétrica.

**

(f) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $A.B + B^T.A^T$ es simétrica.

**

(g) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $A.B + B^T.A^T$ es simétrica.

**

(h) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si A es simétrica la matriz entonces $B^T.A.B$ también es simétrica.

**

(i) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si A es idempotente entonces $(A - I)^2 = I - A$

**

(j) Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si A y B no son singulares, entonces $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

**

5. Expresar X de manera simple en términos de otras matrices y calcularla en los casos donde se den los datos necesarios.

(a) $X = \left(A^T.B^T + 2.A^T.(B^T)^T.C^T - I\right)^T$ donde $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

** $X = B.A + 2C.B^T.A - I$. Resolución por Matías Hugo Cerrudo.

(b) $X = -D^T - E^T + 3\left(D - \frac{1}{3}D\right)^T$ donde $D, E \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

** $X = D^T - E^T$. Resolución por Jordy Lanzas.

(c) $X.A - 2B = C$ considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**

(d) $A.X.B + B = A$ considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

** Resolución en este link.

(e) $A.(A.B)^T + \frac{1}{2}A^{-1}(B.X)^T = \mathbb{O}$ donde $\mathbb{O}$ es la matriz nula y $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

** Resolución en este link.

(f) $AX = B$ considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**

(g) $(5X + AX)B = A$ considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

** .

(h) $(5XB)^T - X^T = A$ considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

** .

6. Modelizar las siguientes situaciones utilizando matrices.

   (a) Una empresa de motocicletas dispone de dos plantas de fabricación, una original que está en China y una nueva que está en Indonesia, en las que fabrica modelos de motos M1 y M2 en tres colores, rojo, verde y azul. La capacidad de producción en cada planta está representada por las tablas a continuación:

	China		Indonesia	
	M1	M2	M1	M2
Rojo	300	95	190	90
Verde	250	100	200	100
Azul	200	100	150	80

   Elaborar matrices de producción para las plantas de China (C) e indonesia (I). Indicar cuál es la producción total entre ambas plantas. Analizar qué significan los elementos $(C+I)_{31}$ y $(C+I)_{12}$. Indicar con una matriz cuánto debe incrementar la producción en la planta de Indonesia para igualar a la de China. Analizar qué significan los elementos $(C-I)_{22}$ y $(C-I)_{11}$.

   ** Resolución por Programa Matemática DuocUC.

   (b) Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C en tamaños grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A, 8000 grandes y 6000 pequeñas del tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas del tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos. Elaborar una matriz que indique la producción diaria por modelo por tamaño. Elaborar otra matriz que indique la cantidad de tornillos/soportes utilizados en cada estantería según el tamaño. Finalmente hallar una matriz que que represente la cantidad de tornillos y soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los modelos de estantería.

   ** Resolución en este link.

   (c) Una cadena de tiendas de electrónica vende televisores (TV), cámaras fotográficas (CF) y *smartphones* (SP), y tiene dos distribuidores D1 y D2. La tabla muestra las ventas de ambas tiendas en el mes de Mayo.

	TV	CF	SP
D1	300	95	190
D2	250	100	200

   En el mes de junio, se proyecta que las ventas aumentarán un 50% sobre las ventas de mayo. Elaborar una matriz que represente las ventas en mayo. Indicar que operación matricial permite obtener las ventas proyectadas en junio y calcularlas.

   ** Resolución por TuCiencia 2

   (d) Una fábrica ensambla tres modelos de automóviles (M1, M2 y M3) en dos plantas (A y B). Los ingresos mensuales de la fábrica se presentan en la tabla. Además, también se presentan los costos de producción mensuales por modelo y por planta. Elaborar una matriz U que representa la utilidad (ingreso-costo) para cada modelo y en cada planta. Identificar la planta que genera menor utilidad. También identificar qué modelo genera menor utilidad. Finalmente, indicar linea de producción (modelo y planta) es la que tiene menor utilidad.

	Ingresos			Costos		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3
A	10.000	12.000	13.000	9.000	9.000	10.000
B	9.000	11.000	14.000	7.000	8.000	11.000

** La planta A tiene menor utilidad al generar \$7000 al mes. El modelo M1 tiene menor utilidad al generar \$3000 mensuales. La linea de producción de menor utilidad es el modelo M1 en la planta A, que genera \$1000 mensuales. Resolución por TuCiencia 2

(e) Existen tres isótopos (tipos) de átomos de silicio con distintas masas y distintas abundancias, como indica la tabla

Símbolo	Masa (uma)	Abundancia (%)
^{28}Si	27,976927	92,2297
^{29}Si	28,976495	4,6832
^{30}Si	29,973770	3,0872

Elaborar una matriz fila que contenga la masa de los isótopos. Elaborar una matriz columna que contenga las abundancias de los isótopos. Averiguar cómo se calcula la masa atómica promedio de un elemento. Identificar qué operación matricial se debe realizar para obtener la masa atómica promedio del silicio. Bonus: ¿cómo se puede realizar este mismo cálculo con vectores? *Fuente:* link

** Masas: $M = \begin{pmatrix} 27,976927 & 28,976495 & 29,973770 \end{pmatrix}$. Abundancias: $A = \begin{pmatrix} 92,2297 \\ 4,6832 \\ 3,0872 \end{pmatrix}$. Mása atómica promedio: $M.\frac{1}{100}A = 28.0854132826$.

7. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando matrices inversas.

(a) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 2 \\ x - z = -3 \\ 3x + 5y - 2z = 1 \end{cases}$

**