

* Algoritmos de descida

$x_0 = \text{solução Inicial}$

$i = 1$

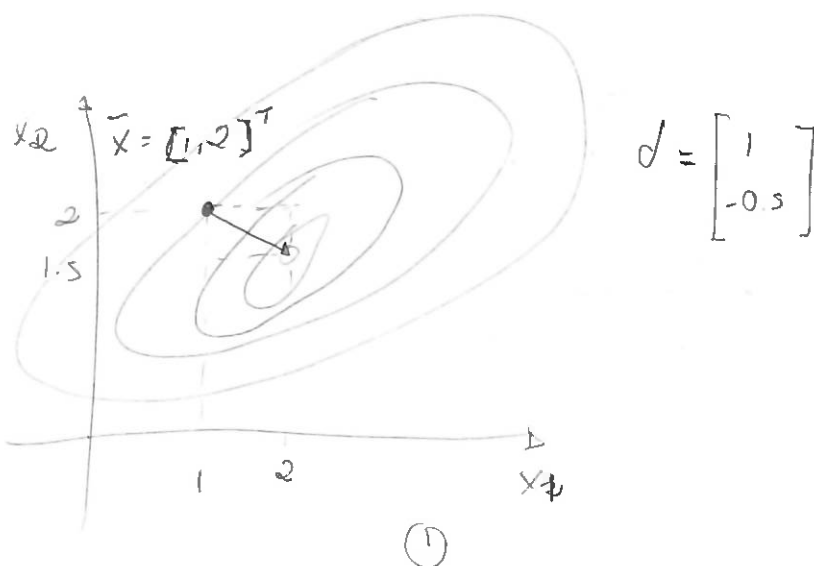
Repetir

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + t \bar{d}$$

$\bar{d} \rightarrow \text{Direção segundo a qual } f \text{ diminui}$

Definição (Direção de Descida)

Considere uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção
 $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dizemos que d é
uma direção de descida para f ,
a partir de \bar{x} , quando existe
 $\delta > 0$ tal que $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$, para
todo $t \in (0, \delta)$.



Teorema (Direção de descida)

Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então d é uma direção de descida para f , a partir de \bar{x} .

Demonstração:

$$\nabla f(\bar{x})^T d = \frac{\partial f}{\partial d}(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} - td) - f(\bar{x})}{t}$$

$$\uparrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \downarrow$$

Pela hipótese e preservação de sinal, existe $\delta > 0$ tal que

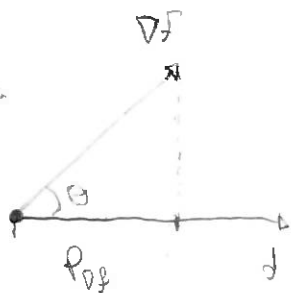
$$\frac{f(\bar{x} - td) - f(\bar{x})}{t} < 0$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Portanto,

$f(\bar{x} - td) < f(\bar{x})$, para todo $t \in (0, \delta)$. \square

$$\cos \theta = \frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$P_{Df} = \|\nabla f\| \cos \theta$$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f = f(\bar{x})$$

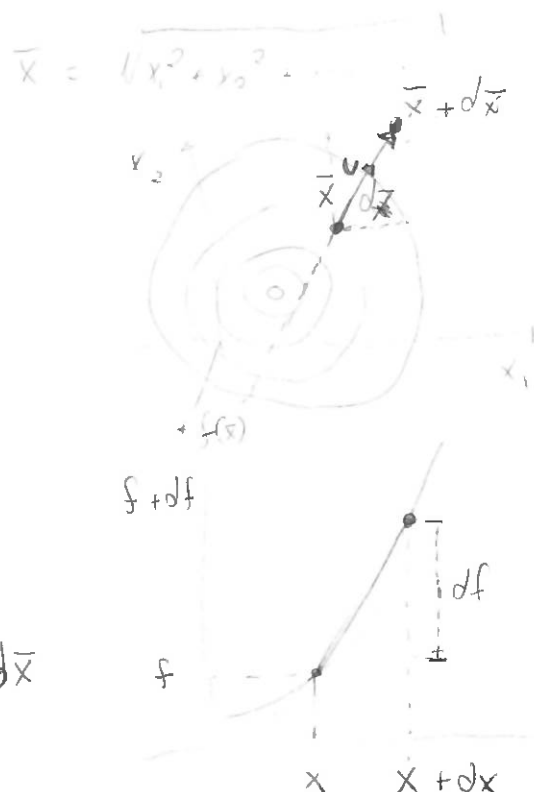
$$d\bar{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

$$ds = \|d\bar{x}\|$$

$$ds^2 = \sum dx_i^2$$

$$f + df = f(\bar{x} + d\bar{x})$$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla f^T d\bar{x}$$



Seja \bar{u} um vetor unitário na direção $d\bar{x}$

$$d\bar{x} = \bar{u} ds \Rightarrow \bar{u} = \frac{d\bar{x}}{ds}$$

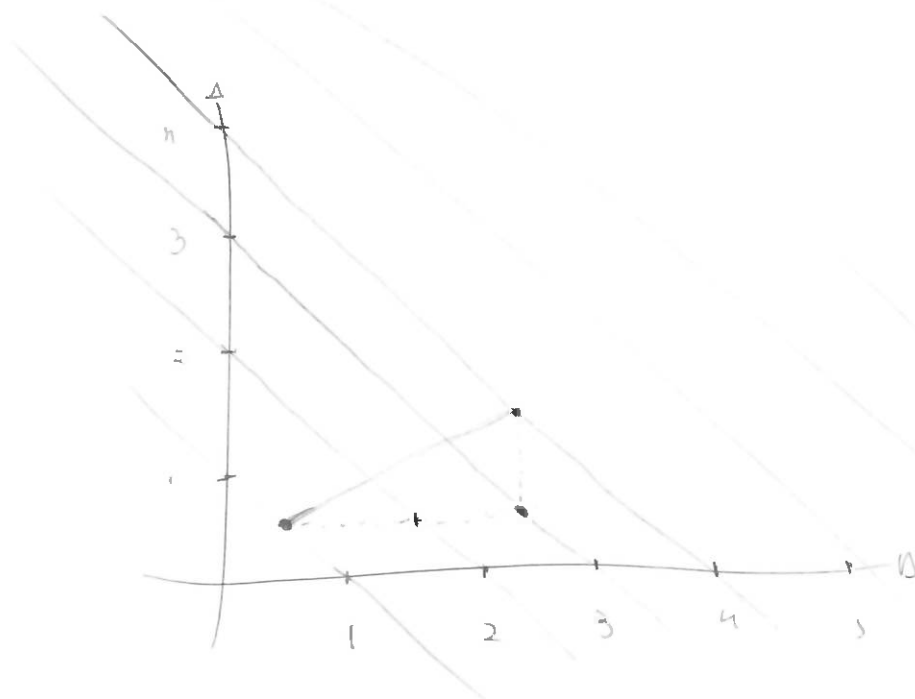
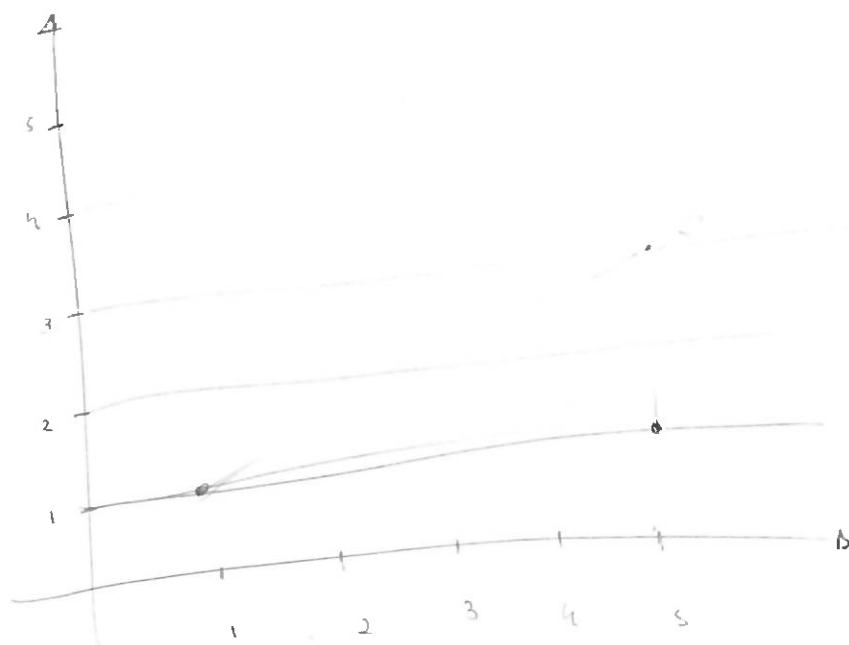
A taxa de variação de uma função em relação ao tamanho de passo ds é:

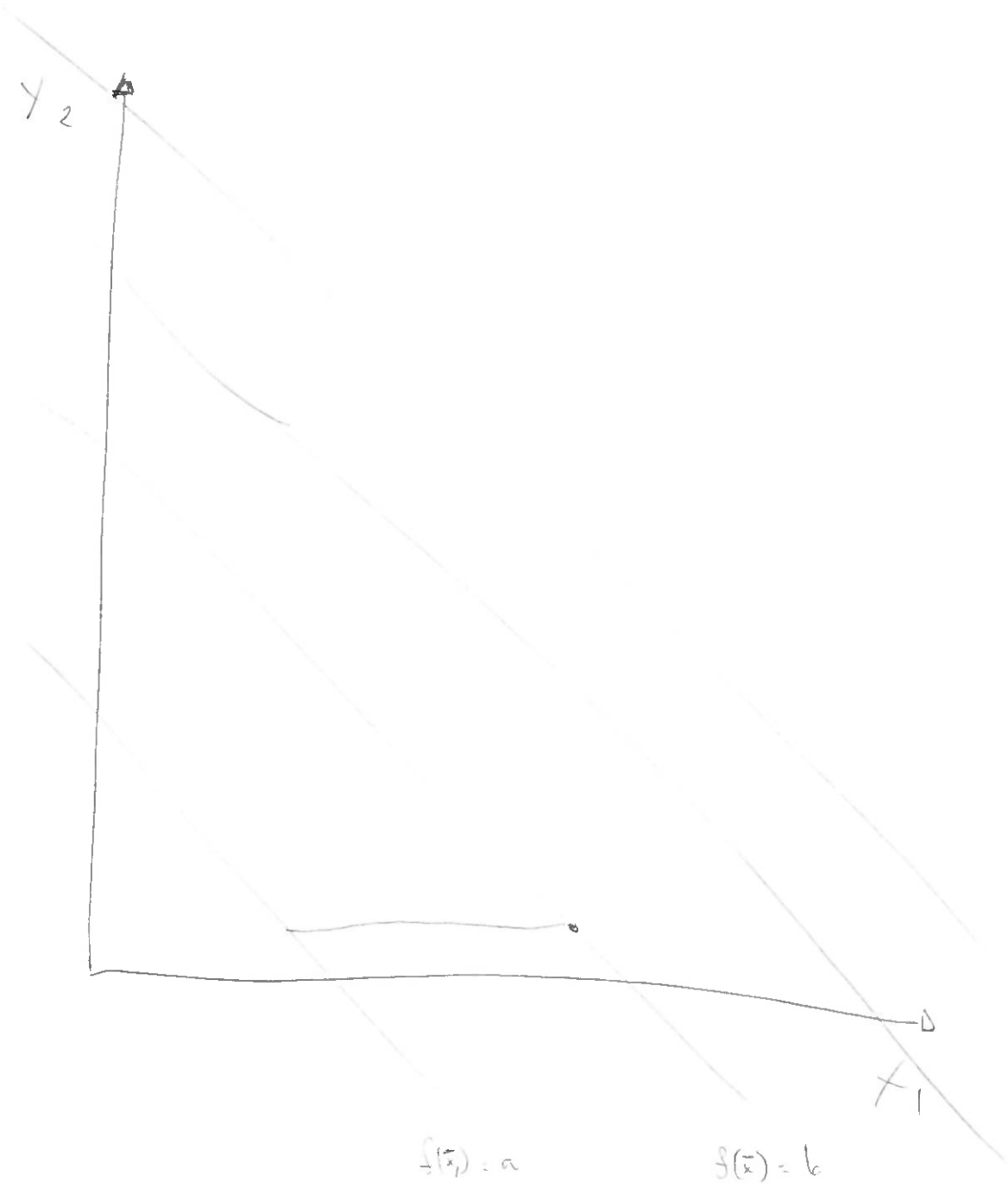
$$\frac{df}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \nabla f^T \frac{d\bar{x}}{ds} = \nabla f^T \bar{u}$$

$$\nabla f^T \bar{u} = \|\nabla f\| \|\bar{u}\| \cos \theta$$

$$\cos(0) = 1$$

(2.1)





Algoritmo básico

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

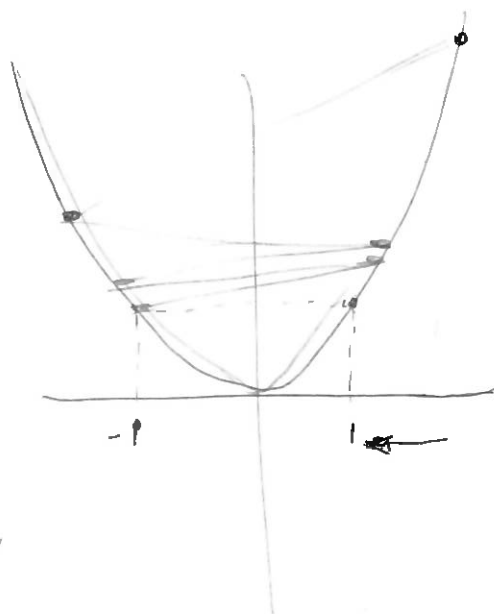
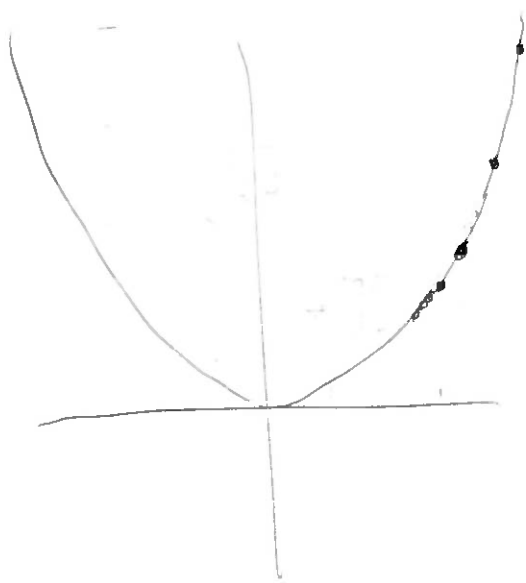
Repita enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$

Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$$

$k = k + 1$



$$\frac{df}{dx} = x$$

Para garantir convergência t_k não pode ser arbitrário.

Métodos de busca unidirecionais

Dada uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, uma direção de descida $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $t > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + t\bar{d}) < f(\bar{x})$$

* Busca exata.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\bar{x} + t\bar{d}) \\ & \text{sujeito a } t > 0 \end{aligned}$$

Exemplo:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 < 0$$

\bar{d} é uma direção de descida

$$\phi(t) = f(\bar{x} + t\bar{d}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

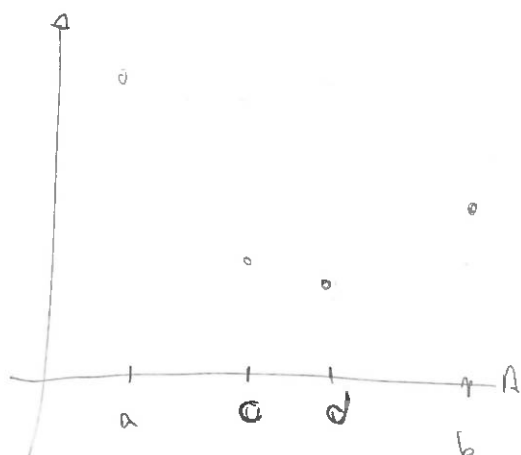
$$= f(1 + 3t, 1) = \frac{11t^2}{2} - 5t + \frac{3}{2}$$

* Busca unidimensional iterativa

1) Assumindo que a função é unimodal em $[a, b]$

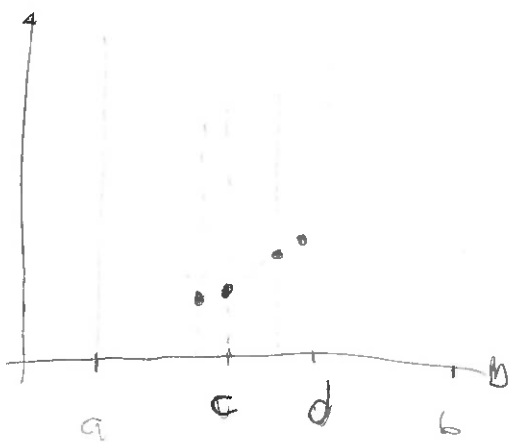


Definição: Uma função $f(x)$ é unimodal se, para algum valor m ela cresce monotonicamente para $x \leq m$ e decresce monotonicamente para $x \geq m$.



$$c = a + \frac{1}{3}(b-a)$$

$$d = b - \frac{1}{3}(b-a)$$



1) Considere $a < c < d < b \in [a, b]$

2) Se $f(c) < f(d)$ então $[d, b]$ não pode conter o mínimo.

3) Se $f(c) \geq f(d)$ então o trecho $[a, c]$ não pode conter o mínimo.

Um ponto c divide o segmento $[a, b]$ na razão áurea quando a razão entre a maior segmento e o segmento todo é igual à razão entre o menor segmento e o maior. Essa razão é o número de ouro.

$$\Theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$$

$$c = b - \Theta(b-a) \quad d = a + \Theta(b-a)$$

$$c = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382$$

$$d = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$$

Enquanto $b-a < d$

se $\varphi(c) < \varphi(d)$

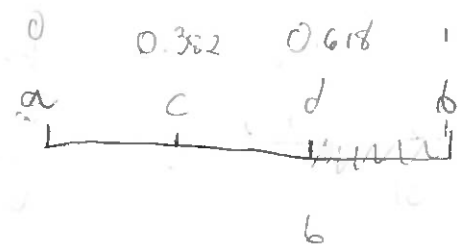
então $b = d$

$$d = c$$

$$\varphi(d) = \varphi(c)$$

$$c = b - \Theta(b-a)$$

$$\varphi(c) = \text{eval}(c)$$



Senão

$$a = c$$

$$c = d$$

$$d = a + \Theta(b-a)$$

$$\varphi(c) = \varphi(d)$$

$$\varphi(d) = \text{eval}(d)$$

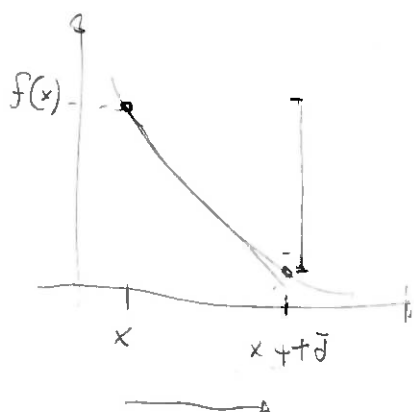
retorna $(a+b)/2$ @

* Busca inexata - Condição de Armijo

Considere um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, uma direção de descida $d \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in (0,1)$.

A regra de Armijo encontra $\bar{t} > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + \bar{t}d) \leq f(\bar{x}) + \eta \bar{t} \nabla f(\bar{x})^T d$$



$$\varphi = f(\bar{x} + t\bar{d})$$

Procuramos um passo cuja redução da função objetivo seja pelo menos uma fração η da redução obtida no modelo linear.

$$f(g(t)) = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \frac{d\varphi}{dt}(0) = f(\bar{x}) + t \nabla f(\bar{x})^T d$$

- Algoritmo:

Dados: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, $\gamma, \eta \in (0,1)$

$t = 1$

Repita enquanto $f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$

$$t = \gamma t$$

