Condições de otimalidade (Problemas sem restrições)

- Condição necessária de 1ª ordem

Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f, então:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Demonstração

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)(x - x^*) + r(x)$$

$$\lim_{x \to x^*} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

$$f(x) - f(x^*) = \nabla f(x^*)(x - x^*)$$

Se $\nabla f(x^*) > 0$

se $(x - x^*) > 0$, $f(x) - f(x^*) > 0$
se $(x - x^*) < 0$, $f(x) - f(x^*) < 0$
} Não pode ser mínimo

Se $\nabla f(x^*) < 0$

se $(x - x^*) > 0$, $f(x) - f(x^*) < 0$
se $(x - x^*) < 0$, $f(x) - f(x^*) > 0$
} Não pode ser mínimo

Se $\nabla f(x^*) = 0$

$f(x) - f(x^*)$ não depende de $(x - x^*)$

$\to$ Pode ser mínimo

- Condição necessária de segunda ordem:

Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f, então a matriz Hessiana de f no ponto x^* é semidefinida positiva, isto é,

$$x^T \nabla^2 f(x^*) x \geq 0$$

Demonstração:

$$f(x) = f(x^*) + \cancel{\nabla f(x^*)}^{\nabla 0}(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x - x^*)$$

Pela condição necessária de primeira ordem:

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2}(x - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x - x^*)$$

Se $\nabla^2 f(x^*) > 0$

$f(x) - f(x^*) > 0$, x^* é mínimo estrito

se $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$

x^* é mínimo local ou ponto de sela.

Condições de segunda ordem

Considere uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e x^* um ponto crítico de f $(\nabla f = 0)$

1) Se $\nabla^2 f(x^*) > 0$, x^* é um minimizador local
2) Se $\nabla^2 f(x^*) < 0$, x^* é um maximizador local
3) Se $\nabla^2 f(x^*)$ é indefinida, x^* é ponto de sela. Não é mínimo local nem máximo local.
4) Se $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$, x^* é mínimo local ou é ponto de sela.
5) Se $\nabla^2 f(x^*) \leq 0$, x^* é máximo local ou é ponto de sela.