Otimização com restrições

* O problema:

$$\max \quad f(\bar{x})$$
$$\text{s.a.} \quad \bar{x} \in D$$

* Objetivo:

Encontrar (caso exista) um ponto $\bar{p}$ no conjunto admissível D para o qual o valor da função objetivo seja o maior possível

- Se $\bar{p}$ está no interior do conjunto admissível as condições vistas para problemas sem restrições se aplicam.

- Contudo, se $\bar{p}$ não está no interior de D, $\bar{p}$ não precisa ser um ponto crítico de f.

Ver:

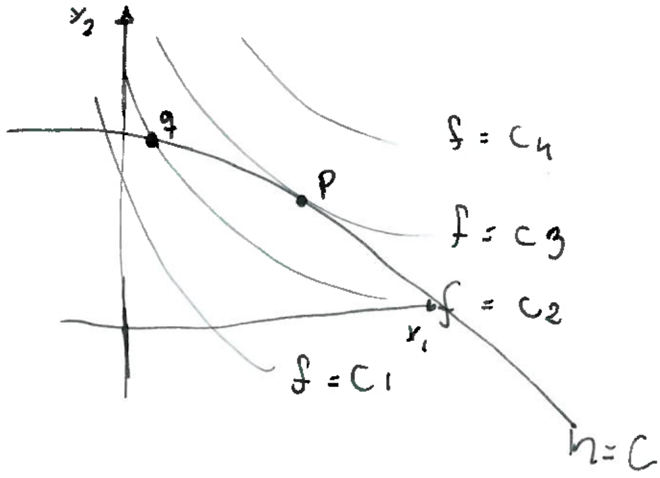
$$\max \quad x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.a.} \quad \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$$

$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2/4 + x_2^2/9 = 1\}$

$\bar{p}_1 = (0, -3)$ $\quad p_2 = (0, 3)$

- Otimização com uma restrição de igualdade

$$\max \quad f(x_1, x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad h(x_1, x_2) = c$$



$c_1 < c_2 < c_3 < c_4$

Pág 330
Bortolossi
Teorema 9.4.
$\nabla f(\bar{p})$ é sempre perpendicular à curva de nível que passa por $\bar{p}$.

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla h(p)$$

"filtro de primeira ordem"

Teorema (Dos multiplicadores de lagrange)
Sejam f e h funções de classe C^1 e seja $\bar{p}$ uma solução ~~max~~ local do problema

$$\max \quad f(\bar{x})$$
$$\text{s.a.} \quad h(\bar{x}) = c$$

Suponha que $\bar{p}$ satisfaça a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla h(\bar{p}) \neq \bar{0}$$

[Ver teorema de Fritz-John para o caso em que a condição de regularidade não é satisfeita]

Então existe um escalar λ^* (multiplicador de lagrange tal que:

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \lambda^* \nabla h(p) \\ h(p) = c \end{cases}$$

* Laguangeano

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) - \lambda\,(h(\bar{x}) - c)$$

$\to \quad \max\ \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda)$

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equivalente às condições apresentadas anteriormente.

Exemplo:

$$\max \quad f(\bar{x}) = x_1 x_2$$
$$\text{s.a.} \quad h(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 = 8$$

* Otimização com várias restrições de igualdade

Teorema:

Sejam $f, h_1, h_2, \ldots, h_m$ funções de classe C^1 de n variáveis e seja $\bar{p}$ um ponto extremo local de f no conjunto admissível $D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1(\bar{x}) = c_1, \ldots, h_m(\bar{x}) = c_m\}$

suponha que $\bar{p}$ satisfaça a seguinte condição de regularidade: o posto da jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\bar{p}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\bar{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m(\bar{p})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m(\bar{p})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

é m.

Então existem números reais $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ tais que:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{p}) = \lambda_1^* \nabla h_1(p) + \dots + \lambda_m^* \nabla h_m(p) \\ h_1(\bar{p}) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(\bar{p}) = c_m \end{cases}$$

isto é $\nabla f(\bar{p})$ é uma combinação linear dos gradientes das restrições em $\bar{p}$.

Equivalentemente, o ponto $(\bar{p}, \lambda^*)$ é ponto crítico do lagrangeano

$$L(\bar{x}) = f(x) - \lambda_1 (h_1(x) - c_1) - \dots - \lambda_m (h_m(\bar{x}) - c_m)$$