* Algoritmos de descida

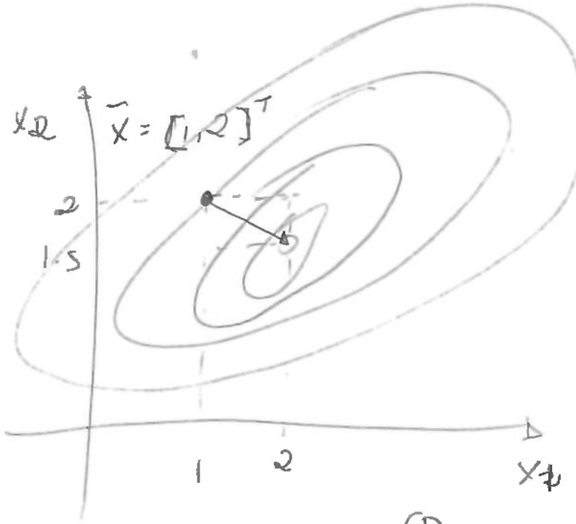
x_0 = Solução Inicial
$i = 1$
Repetir

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + t\bar{d}$$

$\bar{d} \to$ Direção segundo a qual f diminui

Definição (Direção de Descida)

Considere uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dizemos que d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$, quando existe $\delta > 0$ tal que $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$, para todo $t \in (0, \delta)$.



$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Teorema (Direção de descida)

Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.

Demonstração:

$$\nabla f(\bar{x})^T d = \frac{\partial f}{\partial d}(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + td) - f(\bar{x})}{t}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

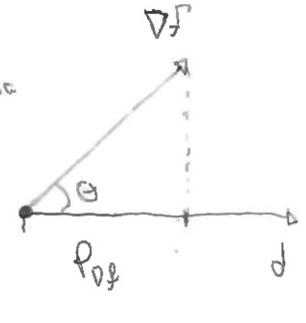
Pela hipótese e preservação do sinal, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x + td) - f(\bar{x})}{t} < 0$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Portanto, $f(\bar{x} - td) < f(\bar{x})$, para todo $t \in (0, \delta)$. □

$\cos\theta = \frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

$P_{\nabla f} = \|\nabla f\| \cos\theta$



$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f = f(\bar{x})$$

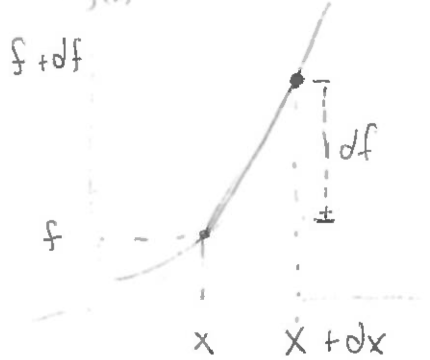
$$d\bar{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$$

$$ds = \| d\bar{x} \|$$

$$ds^2 = \sum dx_i^2$$

$$f + df = f(\bar{x} + d\bar{x})$$



$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla f^T d\bar{x}$$

Seja $\bar{u}$ um vetor unitário na direção $d\bar{x}$

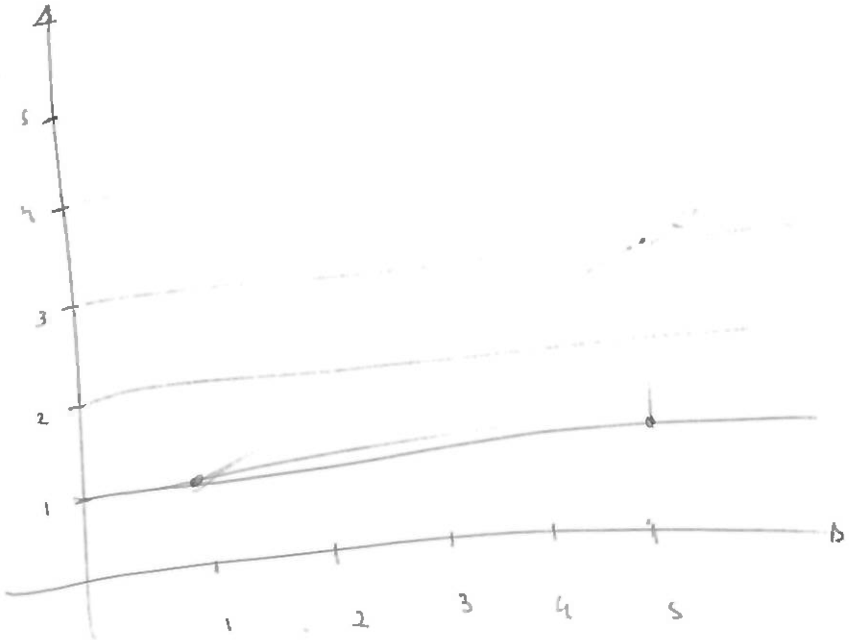
$$d\bar{x} = \bar{u}\, ds \Rightarrow \bar{u} = \frac{d\bar{x}}{ds}$$

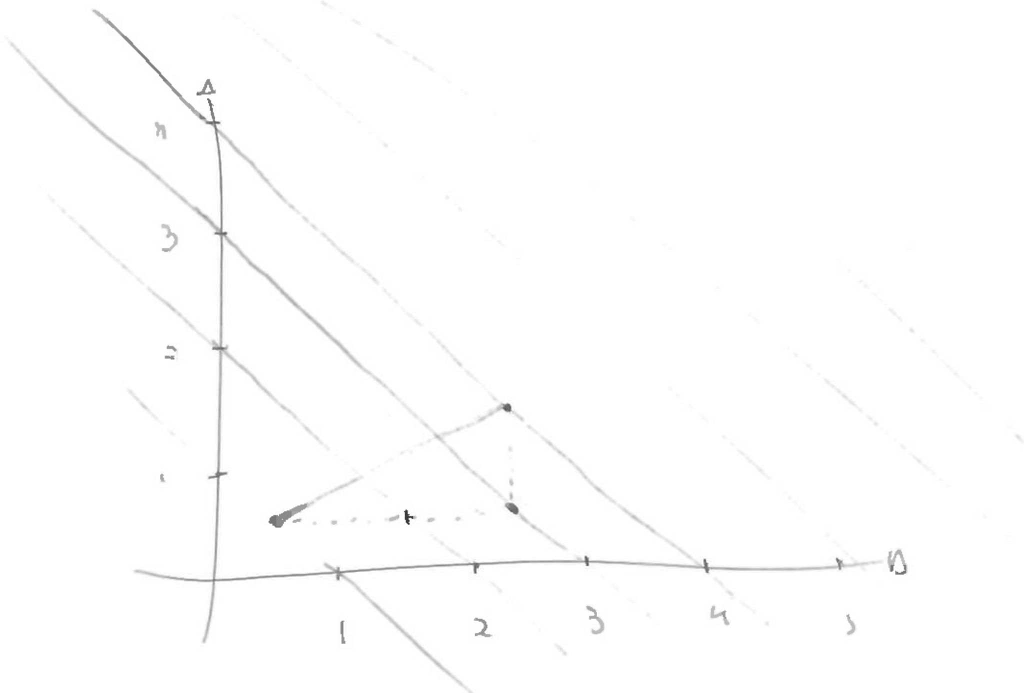
A taxa de variação de uma função em relação ao tamanho de passo ds é:

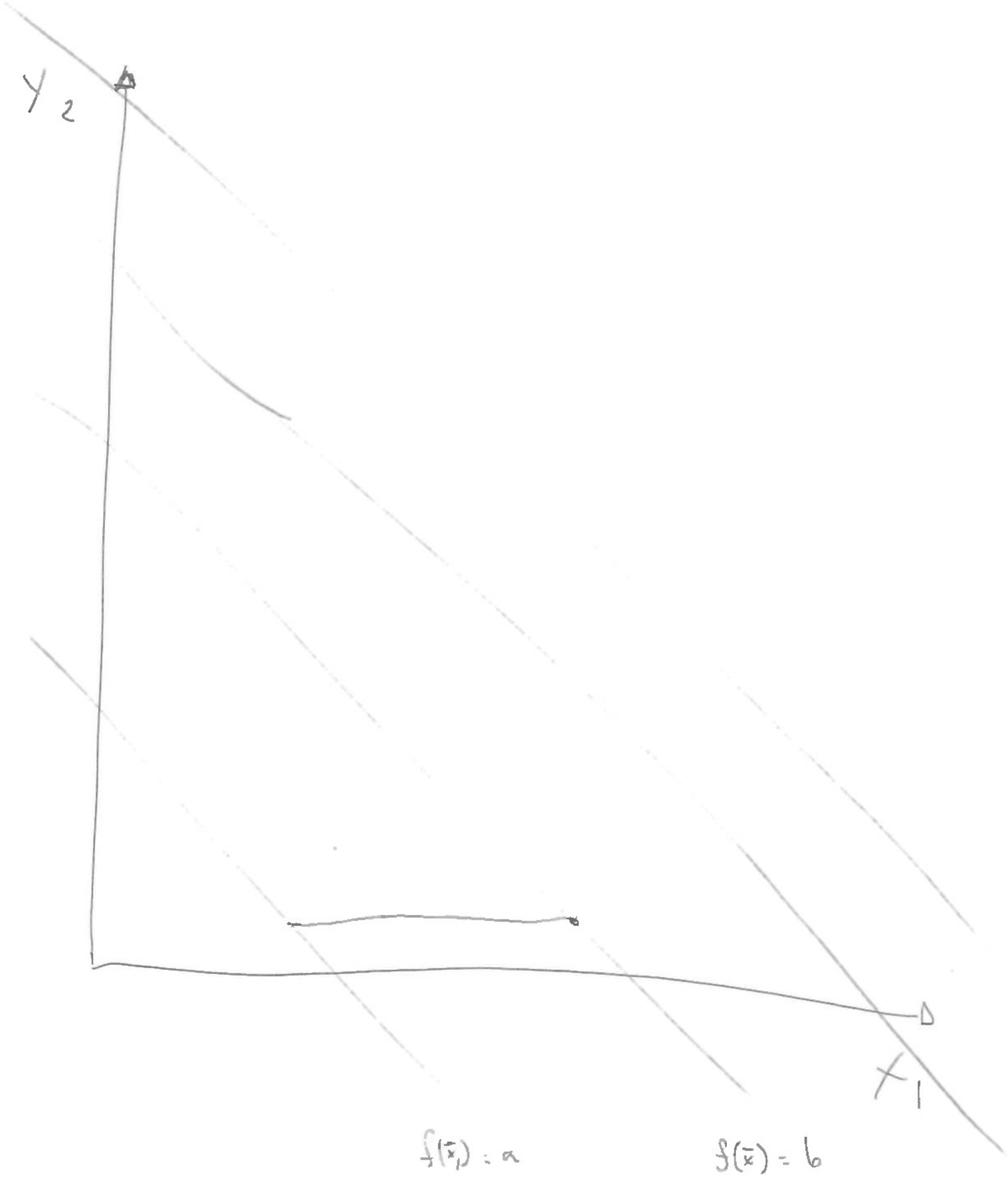
$$\frac{df}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \nabla f^T \frac{d\bar{x}}{ds} = \nabla f^T \bar{u}$$

$$\nabla f^T u = \| \nabla f \| \, \| u \| \cos\theta$$

$$\cos(0) = 1$$


A
5
4
3
2
1
B
1
2
3
4
5


A
4
3
2
B
1
2
3
4


y2
x1
f(x̄) = a
f(x̄) = b

Algoritmo básico

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

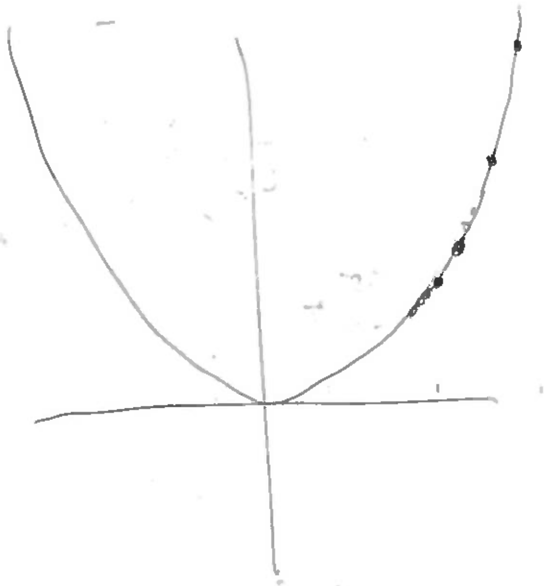
Repita enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

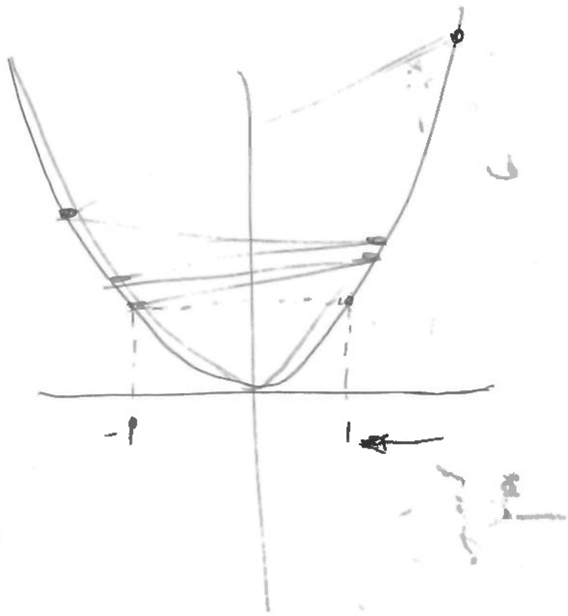
Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$

Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

$k = k+1$





x^2

$\frac{df}{dx} = x$

Para garantir convergência t_k não pode ser arbitrário.

Métodos de busca unidirecionais

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção de descida $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $t > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + t\bar{d}) < f(\bar{x})$$

* Busca exata

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\bar{x} + t\bar{d}) \\ \text{sujeito a} \quad & t > 0 \end{aligned}$$

Exemplo:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x)^T d = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 < 0$$

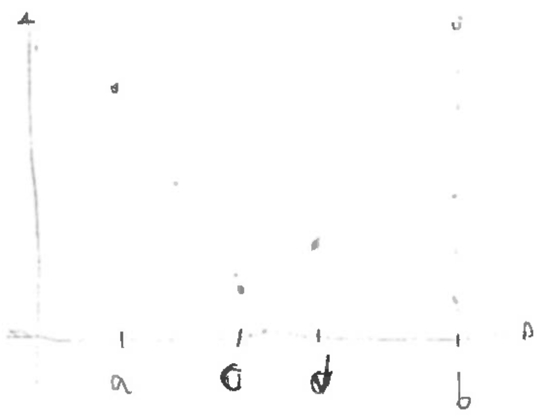
d é uma direção de descida

$$\varphi(t) = f(\bar{x} + t\bar{d}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

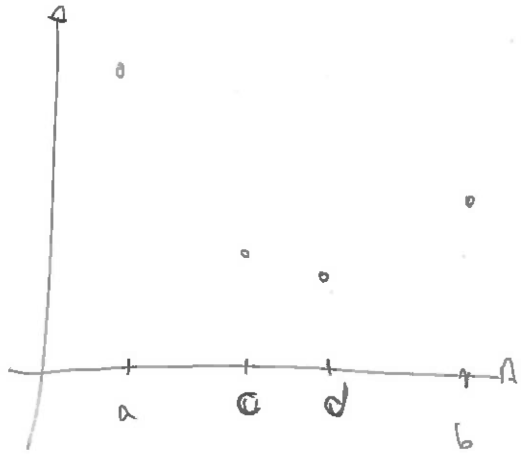
$$= f(1 + 3t, t) = \frac{11t^2}{2} - 5t + \frac{3}{2}$$

* Busca unidimensional iterativa

1) Assumindo que a função é unimodal em $[a, b]$

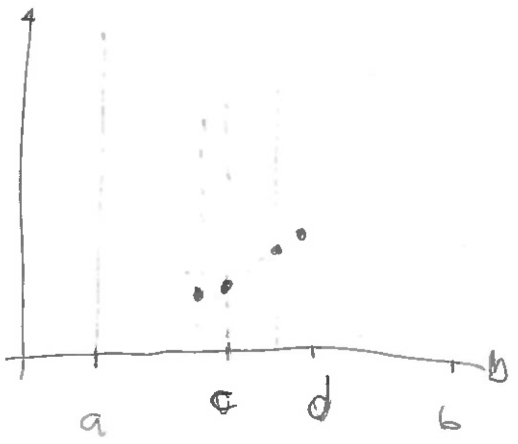


Definição: Uma função $f(x)$ é unimodal se, para algum valor m ela cresce monotonamente para $x \leq m$ e decresce monotonamente para $x \geq m$



$$c = a + \frac{1}{3}(b-a)$$

$$d = b - \frac{1}{3}(b-a)$$



1) Considere $a < c < d < b \in [0, \infty]$

2) Se $\varphi(c) < \varphi(d)$ então $[d, b]$ não pode conter o mínimo.

3) Se $\varphi(c) \geq \varphi(d)$ então o trecho $[a, c]$ não pode conter o mínimo

Um ponto c divide o segmento [a, b] na razão áurea quando a razão entre o maior segmento e o segmento todo é igual à razão entre o menor segmento e o maior.
Essa razão é o número de ouro:

$$\theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$$

$$c = b - \theta(b-a) \qquad d = a + \theta(b-a)$$

$$= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382 \qquad = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

Enquanto $b - a < tol$

se $\varphi(c) < \varphi(d)$

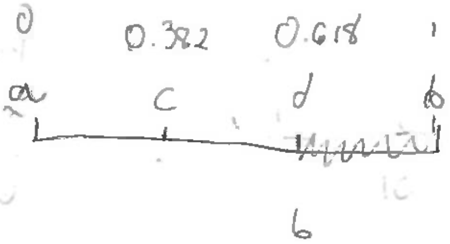
$b = d$

$d = c$

$\varphi(d) = \varphi(c)$

$c = b - \theta(b-a)$

$\varphi(c) = eval(c)$



senão

$a = c$

$c = d$

$d = a + \theta(b-a)$

$\varphi(c) = \varphi(d)$

$\varphi(d) = eval(d)$

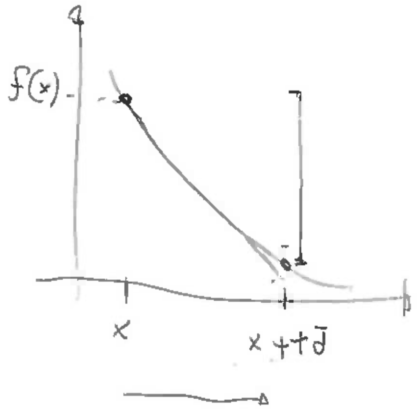
retorna $(a+b/2)$

* Busca inexata - Condição de Armijo

Considere um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, uma direção de descida $d \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in (0,1)$.

A regra de Armijo encontra $\bar{t} > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + \bar{t}\bar{d}) \leq f(\bar{x}) + \eta \bar{t} \nabla f(\bar{x})^T d$$



Procuramos um passo cuja redução da função objetiva seja pelo menos uma fração da redução η da redução obtida no modelo linear.

$$f(g(t)) = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\varphi = f(\bar{x} + t\bar{d})$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \frac{df}{dt}(0) = f(\bar{x}) + t \nabla f(x)^T d$$

- Algoritmo:

Dados: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, γ, $\eta \in (0,1)$

$t = 1$

Repita enquanto $f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$

$t = \gamma t$