Matriz positiva definida

M de ordem $n \times n$ é definida positiva se $x^T M x > 0 \quad \forall z \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^n$

Se

$$x^T M x \geq 0,$$ dizemos que

M é semidefinida positiva

Exemplo:

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$

$\Rightarrow$ A é definida positiva

(2)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2$$

$\Rightarrow$ C é indefinida

③ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q(\bar{x}) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h_1^2$$

$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad Q(x) \geq 0$

$Q(x) = 0$

D é semidefinida positiva

Classificação de Matrizes

- A é uma matriz positiva definida se, e somente se, todos os menores principais líderes são maiores do que 0

- A é uma matriz positiva definida se, e somente se, todos os menores principais de A são maiores ou iguais a 0.

- Definição (Menor de uma matriz)

Seja A uma matriz $n \times n$. Um menor de ordem k é o determinante de uma submatriz $k \times k$ de A removendo-se $n-k$ linhas e $n-k$ colunas.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

- Definição (menor principal)

O menor principal de ordem k é um menor de ordem k no qual as mesmas linhas e colunas foram retiradas.

$|a|$ $|e|$ $|i|$

$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

- Menor Principal Líder

Um menor principal de ordem k onde foram removidas as últimas $n-k$ linhas e $n-k$ colunas.

$|a|$, $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$