$\max \ f(\bar{x})$

s.a. $\bar{x} \in D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\bar{x}) \leq b\}$

① $g(\bar{x}) < b$?

② $g(\bar{x}) = b$

$$\nabla f(\bar{p}) = \mu \cdot \nabla g(\bar{p})$$

$$\mu \geq 0$$

③ $g(\bar{x}) < b$

↳ Vale a regra de Fermat

$$\nabla f(\bar{p}) = 0$$

$$g(\bar{p}) < b$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(p) = \mu \nabla g(p) \\ \mu(g(p) - b) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ g(p) \leq b \end{array}\right.$$

Teorema: Sejam f e g funções de Classe C_1, seja $\bar{p}$ uma solução local do problema de otimização:

$\max \ f(\bar{x})$

s.a. $g(\bar{x}) \leq b$

Suponha que $\bar{p}$ satisfaça a seguinte condição de regularidade

$$\nabla g(\bar{p}) \neq \bar{0}$$

Então existe um número real μ^* tal que $(\bar{p}, \mu^*)$ satisfaz as condições de primeira ordem

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{p}) = \mu \, \nabla g(\bar{p}) \\ \cancel{\mu(g(\bar{p}) - b)} \\ \mu (g(\bar{p}) - b) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ g(p) \leq b \end{cases}$$

Este sistema também pode ser escrito, de maneira equivalente, em termos de lagrangeano:

$$L(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \mu (g(\bar{x}) - b)$$

—//—

* Problemas com várias restrições de desigualdade

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \mu_1^* \nabla g_1(p) + \dots + \mu_k \nabla g_k(p) \\ \mu_1 (g_1(\bar{p}) - b_1) \\ \vdots \\ \mu_k (g_k(\bar{p}) - b_k) \\ \mu_1 \geq 0 \\ \vdots \\ \mu_k \geq 0 \\ g_1(\bar{p}) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_k(\bar{p}) \leq b_k \end{cases}$$

* Condições de primeira ordem para problemas com restrições de desigualdade

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{p}) = \mu_1 \nabla g_1(\bar{p}) + \dots + \mu_k \nabla g_k(\bar{p}) \\ \mu_1 (g_1(\bar{p}) - b_1) = 0 \\ \vdots \\ \mu_k (g_k(\bar{p}) - b_k) = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \vdots \\ \mu_k \geq 0 \\ g_1(\bar{p}) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_k(\bar{p}) \leq b_k \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \mu) = f(\bar{x}) - \mu_1 (g_1(\bar{x}) - b_1) - \dots - \mu_k (g_k(\bar{x}) - b_k)$$

Ex. 1 max $x_1 x_2$

s.a. $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

Ex. 2 max xyz

s.a. $x + y + z \leq 1$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$z \geq 0$

* Condições de Karush - Kuhn - Tucker

Sejam $f, h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_k$ funções de classe C^1 de n variáveis definidas em ~~em~~ $\mathbb{R}^n$ e seja $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ um máximo local de f no conjunto admissível.

$$D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1(\bar{x}) = c_1, \ldots, h_m(\bar{x}) = c_m,$$
$$g_1(\bar{x}) \leq b_1, \ldots, g_k(\bar{x}) = b_k\}$$

formado com m restrições de igualdade e k restrições de desigualdade, onde $\bar{x} = (x_1 \ldots x_n)$

Caso alguma restrição de desigualdade esteja ativa em $\bar{p}$, vamos renomeá-las de forma que elas sejam as l primeiras, $g_1, \ldots, g_l$. Suponha que o posto da jacobiana das restrições em $\bar{p}$ seja $(m+l)$ (número de restrições ativas em p)

Considere o lagrangeano definido por

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}) - \lambda_1(h_1(\bar{x}) - c_1) - \ldots - \lambda_k(h_k(\bar{x}) - c_k)$$
$$- \mu_1(g_1(\bar{x}) - b_1) - \ldots - \mu_k(g_k(\bar{x}) - b_k)$$

onde

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$
$$\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$$

então existem multiplicadores tais que

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1}(\bar{p}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) = 0 \\
\vdots \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_n}(\bar{p}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) = 0 \\
h_1(\bar{p}) = c_1 \\
\vdots \\
h_m(\bar{p}) = c_m \\
\mu_1 (g_1(\bar{p}) - b_1) = 0 \\
\vdots \\
\mu_k (g_k(\bar{p}) - b_k) = 0 \\
\mu_1 \geq 0 \\
\vdots \\
\mu_k \geq 0 \\
g_1(\bar{p}) \leq b_1 \\
\vdots \\
g_k(\bar{p}) \leq b_k
\end{cases}
$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\bar{p}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla g_j(\bar{p}) \\ h_1(p) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(p) = c_m \\ \mu_1(g_1(\bar{p}) - b_1) = 0 \\ \vdots \\ \mu_k(g_k(\bar{p}) - b_k) = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \vdots \\ \mu_k \geq 0 \\ g_1(\bar{p}) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_k(\bar{p}) \leq b_k \end{cases}$$

Estes sistemas são denominados de condições da primeira ordem para o ponto máximo (local) $\bar{p}$.