Universidade Federal de Ouro Preto
PCC109 - Otimização não-linear
Taylor, Matrizes e Condições de Otimalidade

Prof. Rodrigo Silva

October 6, 2023

1 Exercícios

1. Aproximações por série de Taylor
   (a) Considere a função multidimensional $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$ em torno do ponto $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$.
      i. Calcule o valor da função $f(\mathbf{x})$ no ponto $\mathbf{x}_0$.
      ii. Calcule o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.
      iii. Calcule a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$.
      iv. Use a expansão de série de Taylor de segunda ordem para aproximar $f(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}_0$.
   (b) Considere a função multidimensional $f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 2x_2^2 - x_1x_2$ em torno do ponto $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$.
      i. Calcule o valor da função $f(\mathbf{x})$ no ponto $\mathbf{x}_0$.
      ii. Calcule o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.
      iii. Calcule a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$.
      iv. Use a expansão de série de Taylor de segunda ordem para aproximar $f(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}_0$.
   (c) Considere a função multidimensional $f(\mathbf{x}) = e^{x_1} + \sin(x_2)$ em torno do ponto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.
      i. Calcule o valor da função $f(\mathbf{x})$ no ponto $\mathbf{x}_0$.
      ii. Calcule o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.
      iii. Calcule a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$.
      iv. Use a expansão de série de Taylor de segunda ordem para aproximar $f(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}_0$.
2. Definição de Matrizes
   (a) Considere a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

      i. Quais são os menores princiapais desta matriz?
      ii. Quais são os menores principais líderes dessa matriz?
   (b) Considere as matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Para cada uma delas:

- Escreva a forma quadrática e classique a matriz em $A > 0$, $A < 0$, $A \geq 0$,$A \leq 0$ ou A indefinida.
- Calcule os menores principais líderes e observe o que acontece.

3. Condições de Otimalidade
   (a) Considere a função unidimensional $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$.
      i. Encontre todos os minimizadores locais da função e determine seus valores mínimos locais.
      ii. Identifique se existe algum minimizador global e, se existir, encontre-o e determine o valor mínimo global.
   (b) Considere a função bidimensional $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 2y$.
      i. Esta função possui minimizador? Justifique.
      ii. Encontre todos os minimizadores locais da função e determine seus valores mínimos locais.
      iii. Identifique se existe algum minimizador global e, se existir, encontre-o e determine o valor mínimo global.
   (c) Considere a função bidimensional $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - 4y^2$.
      i. Esta função possui minimizador? Justifique.
      ii. Encontre todos os minimizadores locais da função e determine seus valores mínimos locais.
      iii. Identifique se existe algum minimizador global e, se existir, encontre-o e determine o valor mínimo global.

2 Notas

Em forma vetorizada, a expansão de série de Taylor de segunda ordem para uma função multidimensional $f(\mathbf{x})$ em torno do ponto $\mathbf{x}_0$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \approx\ & f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Nessa expressão:

1. $f(\mathbf{x}_0)$ é o valor da função no ponto $\mathbf{x}_0$.
2. $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ é o vetor gradiente de f avaliado no ponto $\mathbf{x}_0$.
3. $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ é a matriz Hessiana de f avaliada no ponto $\mathbf{x}_0$.
4. $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ representa o vetor de diferenças entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_0$.

A matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ é uma matriz quadrada de segundas derivadas parciais e é definida como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Essa forma vetorizada permite que você aproxime a função multidimensional $f(\mathbf{x})$ como um polinômio quadrático nas proximidades do ponto $\mathbf{x}_0$. O vetor gradiente e a matriz Hessiana capturam informações sobre as primeiras e segundas derivadas da função, tornando-a uma ferramenta poderosa para otimização e análise numérica em espaços multidimensionais.