Definições

P: Conjunto de problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial

NP: Conjunto de problemas de decisão que são verificáveis em tempo polinomial

NP-Completo: L é NP-Completo se

1) $L \in NP$
2) Se para todo $L' \in NP$, $L' \leq_p L$.
   Por transitividade de $\leq_p$, se $L' \leq_p L$ para algum problema NP-Completo L'

https://en.m.wikipedia.org/wiki/NP-intermediate
en.m.wikipedia.org

Mostrar que o problema do conjunto independente é NP-Completo dado que o 3SAT é NP-Completo

3-SAT

Instância: Expressão booleana, F, formada por conjunções de cláusulas onde cada cláusula é um disjunção de 3 literais.

Ex: $F: (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

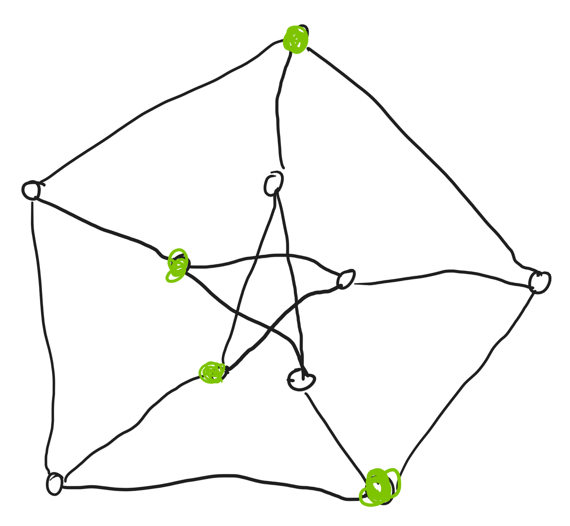
Problema: Determinar se F é satisfatível

Independent Set (IS)

Dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$ e um inteiro k determinar se G contém um subconjunto V' de k vértices de forma que não existam dois vértices em V' adjacentes um ao outro.

Ex:

$k = 4$



Sim

Prova

1) Mostrar que $IS \in NP$

2) Mostrar que $3SAT \leq_p IS$

   2.1) Mostrar que uma instância F do 3SAT pode ser tranformada em uma instância G_F de IS em tempo polinomial

   2.2) Provar que F é satisfatível se e somente se G_F tem um conjunto independente de tamanho K (K é igual ao número de cláusulas em F)

https://courses.engr.illinois.edu/cs374/fa2020
courses.engr.illinois.edu

https://www.cs.umd.edu/class/fall2017/cmsc40101/Lects/lect20-np-3sat.pdf
www.cs.umd.edu

2.1)

```
k ← number of clauses in F
for each (clause (x1 v x2 v x3) in F)
    create a clause cluster consisting of three vertices
    labeled x1, x2, and x3
    create edges (x1, x2), (x2, x3), (x3, x1) between all pairs of vertices in the cluster
for each (vertex xi)
    create edges between xi and all its complement vertices xi (conflict links)
return (G, k)
```

2.2)

$3SAT(F): SIM \Leftrightarrow IS(G_F, k): SIM$

a) $3SAT(F): SIM \Rightarrow IS(G_F, k): SIM$

se F é satisfatível

$\Rightarrow$ Pelo menos um literal em cada cláusula é verdadeiro

$\Rightarrow$ Se selecionarmos um destes literais de cada cláusula teremos:

- Um conjunto de k vértices (1 por cláusula)
- Neste conjunto não temos as arestas intra-cláusula (um vértice de cada cláusula)
- Neste conjunto não temos arestas inter-cláusulas (um literal e seu complemento não podem ser verdadeiros ao mesmo tempo)

$\Rightarrow$ O conjunto de vértices selecionados é um conjunto independente de tamanho k (só existem arestas intra-cláusulas e inter-cláusulas em G_F e nenhuma delas conecta os vértices do conjunto selecionado.)

b) $3SAT(F): SIM \Leftarrow IS(G_F, k): SIM$

Suponha que G_F tenha um conjunto independente V' de k vértices.

$\Rightarrow$ V' tem exatamente um nó de cada cluster

$\Rightarrow$ Podemos atribuir True para cada vértice em V'

$\Rightarrow$ Esta atribuição satisfaz F.