# FICHE T.D. 5 Tests d'hypothèses

**Avertissement :** Dans la plupart des exercices ci-dessous traitant des tests d'hypothèses, les indications `R` sont fournies à la fois pour le quantile et la p-valeur. Dans le cadre d'un examen, notez qu'un seul type d'indication `R` est généralement fourni.

**Quelques quantiles pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$ :**

```
> qnorm(c(0.8,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995))
[1] 0.8416212 1.2815516 1.6448536 1.9599640 2.3263479 2.5758293
```

**Exercice 1** *Une certaine agence pour l'emploi affirme que le taux de chômage en France serait cette année inférieur à* 10%*. Une enquête auprès d'un échantillon de* 200 *personnes choisies au hasard dans la population active donne* 16 *chômeurs.*

1. *Si on envisage un risque d'erreur de première espèce (maximal) fixé à 5%, peut-on confirmer l'assertion avancée par l'agence.*

   **Indication(s) R :**

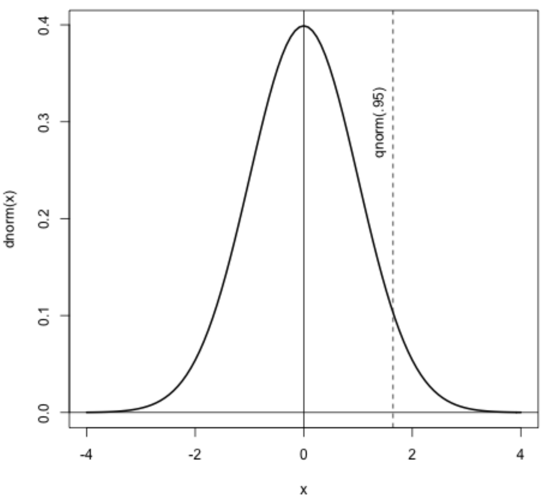
```
> 16/200
[1] 0.08
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -0.942809
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.1728893
```

2. *Peut-on pour autant montrer que l'agence pour l'emploi a effectué une mauvaise analyse ?*

**Exercice 2** *(suite du produit A - Juin 2003)*

*Sur vos conseils, l'industriel a lancé le produit A sur le marché (sa contrainte financière, rappelons-le, était de vendre mensuellement au moins 300000 exemplaires). Il est particulièrement satisfait car dès les deux premiers mois, il vend 350000 et 342000 exemplaires. Avec l'ambition qui le caractérise, l'industriel souhaite améliorer la qualité de son produit car selon lui beaucoup de gens le connaissent alors que finalement peu l'achètent. Il estime que s'il parvient à montrer que plus de* 80% *(strictement) des individus parmi la population ciblée de taille* $N = 2000000$ *connaissent le produit A (sans pour autant l'avoir acheté) alors il pourra investir dans l'amélioration de son produit. Pour montrer ceci, il décide d'interroger au hasard* $n = 500$ *individus (la question est moins "grave" que pour le lancement du produit A d'où le choix d'un n plus petit) issus de la population mère. Les informations sont stockées dans* `R` *dans le vecteur* `yCA` *(voir ci-après). Sur cet échantillon 420 personnes (autrement dit 84% des individus interrogés) lui ont répondu connaître effectivement le produit A.*

1. *Pourriez-vous décrire littéralement les deux erreurs mises en jeu dans cette problématique ?*
2. *Peut-on montrer avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 5% que plus de 80% (de gens parmi la population ciblée) connaissent le produit A ? Reportez sur le graphique ci-après (représentant la densité d'une loi* $\mathcal{N}(0,1)$*) le quantile d'ordre 95% ainsi que la* $p-$*valeur.*




**Indication(s) R :**

```
> yCA
  [1] 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 [38] 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
...
[445] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1
[482] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1
> mean(yCA)
[1] 0.84
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 2.236068
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9873263
```

3. *Même question avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 1% ?*

**Exercice 3** *(prime encouragement pour la qualité du produit A - contrôle continu 2003)*

*Comme chaque année l'industriel afin d'encourager ses employés décide de leur verser une prime de fin d'année si la clientèle (potentielle) juge le produit A de* ***bonne qualité****. Sur une échelle de valeurs entre 0 et 10 mesurant le degré de satisfaction, le produit est jugé de* ***bonne qualité*** *si la note moyenne (sur les* $N = 2000000$ *acheteurs potentiels), notée* $\mu^Q$*, est strictement supérieure à 6 prouvant une qualité plus qu'honorable de son produit.*

*Partie I (du point de vue de l'industriel) (25 min.)*

1. *a) Exprimez l'assertion d'intérêt conduisant à récompenser les employés en fonction du paramètre d'intérêt* $\mu^Q$*.*

   *b) De quelles informations doit-on disposer pour évaluer le paramètre* $\mu^Q$ *? Est-ce envisageable en pratique ?*

   *Pour apporter un élément de réponse, on décide d'interroger un échantillon de 200 personnes. Chacun d'eux se prononce donc sur la qualité du produit A à travers une note de 0 à 10. En* `R`*, on stocke le jeu de données* $\boldsymbol{y}^Q$ *dans le vecteur* **`yQ`** *:*

```
> yQ
  [1]  9  4  3  7  6  8  2  7  3  9  9  4  8  9  4  8 10  4  9  5  2  7  2  3  2
 [26]  4  9  6 10  8  5  5  5  5 10  7  4  4  4  4  6  8  2  8  9  5  7  8  6  4
...
[151]  7 10  6  5  4  9  5  6  4  2  6  7  5  6 10  8  6  5  9  7  2  2  2  8  9
[176]  6  3  8  7  6  3  8 10  2  2  8  9 10  9  8  2  7  7 10  3  3  2  9  7  6
```

2. *a) Décrivez littéralement les deux erreurs de décision.*

   *b) Précisez pour quelle(s) valeur(s) du paramètre d'intérêt $\mu^Q$ inconnu chacune de ces deux erreurs intervient.*

   *c) Quelle vous semble être la plus grave de ces deux erreurs* ***du point de vue de l'industriel*** *?*

   *d) A votre avis autour de quelles valeurs de $\mu^Q$ la décision vous semblera-t-elle difficile à prendre (cette valeur constituera la pire des situations) ?*

3. *Dans la pire des situations (i.e. lorsque $\mu^Q = 6$), la mesure d'écart standardisée de test s'écrit :*

$$\widehat{\delta_{\mu^Q,6}}\left(\boldsymbol{Y^Q}\right) = \frac{\widehat{\mu^Q}\left(\boldsymbol{Y^Q}\right) - 6}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_Q}\left(\boldsymbol{Y^Q}\right)}{200}}} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

   *Rappeler très brièvement comment on peut interpréter ce résultat via l'Approche Expérimentale.*

4. *a) Si on ne souhaite excéder 5% de risque de décider à tort de récompenser les employés, établir la règle de décision et conclure quant à la bonne qualité du produit en vous aidant des quelques instructions* R*.*

   *b) Concrètement, quelle décision doit prendre l'industriel quant au versement de la prime de fin d'année.*

   **Indication(s) R :**

```
> mean(yQ)
[1] 6.245
> sd(yQ)
[1] 2.458699
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 1.40921
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9206135
```

*Partie II (du point de vue des employés) (25 min.)*

*Indépendamment des réponses précédentes un employé ayant de solides connaissances en statistiques s'interroge sur le test précédent et notamment sur les deux risques d'erreur de décision mis en jeu.*

1. ***Du point de vue des employés****, quelle est la plus grave des deux erreurs de décision dans le test précédent ?*

2. *En tant que délégué, un employé exprime alors au nom de ses collègues la revendication suivante : "nous acceptons de ne pas recevoir de prime de fin d'année si vous pouvez prouver au vu du même jeu de données précédent que le produit n'est pas de bonne qualité (i.e. $\mu^Q < 6$)". Peut-on prouver au vu des données que la note moyenne du degré de satisfaction est strictement inférieure à 6 ? (Indication : rédaction standard et conclure en fournissant la valeur de la $p-$valeur)*

3. *Ce délégué désireux d'approfondir son argumentation, pose la question suivante à l'industriel : "si on avait obtenu $\widehat{\mu^Q}\left(\boldsymbol{y^Q}\right)$ et $\widehat{\sigma_Q}\left(\boldsymbol{y^Q}\right)$ de l'ordre de 6.245 et 2.459 respectivement non pas avec la taille d'échantillon actuelle de $n = 200$ mais avec une taille plus grande, pensez-vous que vous auriez pu montrer que le produit était de bonne qualité ?"*

   *Et vous qu'en pensez-vous en vous aidant des instructions suivantes (en particulier si la taille d'échantillon avait été $n = 300$, $n = 500$ et $n = 1000$) ?*

```
> (mean(yQ)-6)/sqrt(var(yQ)/300)
[1] 1.725923
> pnorm((mean(yQ)-6)/sqrt(var(yQ)/1000))
[1] 0.9991867
```

**Exercice 4** *(compétence) Un service de contrôle d'une entreprise de métallurgie s'intéresse à savoir si un technicien est suffisamment précis au niveau des mesures quotidiennes qu'il effectue* *sur des minerais de fer (les mesures effectuées sont des mesures de diamètre). Une compétence "suffisante" que nous allons définir) sera récompensée par une prime. Le technicien sera d'autant plus précis que l'écart entre deux mesures d'un même minerai (sans qu'il le sache) est faible. Fort de constater que l'écart moyen est théoriquement nul (à justifier), la précision sera naturellement mesurée par la variance des écarts.*

*Soit $Y^C$ un futur écart entre deux mesures d'un même minerai. C'est une variable aléatoire qui est caractérisée (via l'approche expérimentale) par la donnée d'une infinité d'écarts virtuels (entre deux mesures) $y^C_{[1]}, \ldots, y^C_{[m]}, \ldots$. On notera $\sigma^2_C$ la variance de l'infinité de ces écarts de mesure qui constitue l'indicateur du niveau de précision du technicien. Cet indicateur constitue le paramètre d'intérêt de l'étude. Le service de contrôle décide que le technicien est compétent (et pourra ainsi lui verser une prime) si le paramètre d'intérêt est inférieur à* $0.1$.

1. *Au vu des données peut-on montrer que le technicien est compétent avec un risque d'erreur de première espèce fixé à 5%.*

   **Indication(s) R :**

```
> yC
 [1]  0.34520624  0.36187714  0.28326083 -0.04273267  0.07897429 -0.57583456
 [7] -0.71994324  0.18188198  0.04438047 -0.01951828 -0.34820050  0.26067820
...
[25]  0.31212572  0.12692537 -0.17803505 -0.17861634 -0.48143225 -0.07185419
> var(yC)
[1] 0.08843689
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -0.5474076
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.2920494
```

2. *Le service de contrôle (à qui on a fait comprendre que le risque $\alpha$ est généralement fixé à* $5\%$*) décide au vu de la p-valeur du précédent test de renvoyer sur le champ le technicien. Ce dernier bien plus au courant des techniques statistiques assigne son employeur aux prud'hommes et gagne le procès haut la main. L'argument avancé par le technicien est le suivant : "Le service de contrôle n'a en aucun cas prouvé que je n'étais pas compétent. Il n'a seulement pas pu prouver au vu des données que j'étais compétent : soit il prouve que je ne suis pas compétent, soit il me soumet à un nombre plus élevé d'échantillons de manière à ce que l'estimation de la variance soit significative.". Essayez de traduire mathématiquement l'argument du technicien.*
3. *Le service de contrôle décide alors de soumettre deux fois le technicien à $n = 500$ mesures sur les échantillons de minerai. Le vecteur des 500 écarts de mesures est encore noté $\mathbf{y}^C$. Avec ces nouvelles observations que concluez-vous au seuil de* $5\%$ *?*

   **Indication(s) R :**

```
> yC
  [1]  0.345206239  0.361877141  0.283260829 -0.042732674  0.078974292
  [6] -0.575834563 -0.719943239  0.181881984  0.044380473 -0.019518279
...
[491] -0.070185269  0.134088213  0.277789013 -0.079484256 -0.107560964
[496] -0.265767699 -0.124663757 -0.026684338  0.494449721 -0.304572345
> var(yC)
[1] 0.08299474
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -3.299262
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.0004846965
```

**Exercice 5** *(diététicien) Un diététicien affirme que son régime alimentaire permet une perte de poids rapide. On observe la répartition d'un échantillon de* $10$ *femmes ayant suivi ce régime* *pendant 2 semaines.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Poids avant AV** | 64 | 67 | 68 | 76 | 72 | 69 | 62 | 65 | 64 | 73 |
| **Poids après AP** | 65 | 61 | 64 | 69 | 65 | 66 | 60 | 59 | 61 | 68 |
| **Perte de poids** $Y$ | $-1$ | 6 | 4 | 7 | 7 | 3 | 2 | 6 | 3 | 5 |

*Voici les données préliminairement saisies et placées dans deux vecteurs* $\boldsymbol{AV}$ *et* $\boldsymbol{AP}$*. Le vecteur* $\boldsymbol{y}$ *est obtenu en faisant une différence élément par élément :*

**Indication(s) R :**

```
> AV-AP
 [1] -1  6  4  7  7  3  2  6  3  5
> mean(AV-AP)
[1] 4.2
> sd(AV-AP)
[1] 2.529822
> seMean(AV-AP)
[1] 0.8
```

*1. En supposant que* $Y \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$*, éprouver l'affirmation du dié téticien au seuil de signification* $5\%$.

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 5.25
> pt(deltaEst.H0,9)
[1] 0.9997362
```

*2. Fort de ce constat, le diététicien aimerait un titre plus accrocheur et souhaiterait montrer avec le même jeu de données* $\boldsymbol{y}$ *que son régime permet une perte de deux kilos par semaine. Éprouvez cette nouvelle affirmation au seuil de 5%.*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 0.25
> pt(deltaEst.H0,9)
[1] 0.5958998
```

*3. Pas désappointé pour autant par la précédente analyse, le diététicien décide de soumettre 40 femmes supplémentaires à son régime, et complète ainsi son précédent vecteur* $\boldsymbol{y}$ *correspondant aux pertes de poids. Il obtient finalement le jeu de données suivant :*

**Indication(s) R :**

```
> yD
 [1] -1  6  4  7  7  3  2  6  3  5  5  7  4  4  2  4  6  6  5  3  5  5  2  7  4
[26]  5  4  3  6  7  4  6  4  5  2  6  4  6  5  5  6  4  3  2  3  6  5  7  2  4
> mean(yD)
[1] 4.5
> sd(yD)
[1] 1.729103
> seMean(yD)
[1] 0.244532
```

*a) que pensez-vous alors de l'hypothèse faite précédemment affirmant :* $Y \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ *?*

*b) pensez-vous avec ce nouveau jeu de données que la nouvelle affirmation du diététicien est vraie (à un risque d'erreur de première espèce fixé à 5%) ?*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 2.044722
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9795589
```

*c) Qu'expriment les erreurs standard (`seMean(y)`) pour $n = 10$ et $n = 50$ ? Expliquez alors pourquoi on a pu accepter l'assertion d'intérêt du diététicien pour $n = 50$.*

**Exercice 6** *Un pilote de course en Formule 1 hésite entre deux équipes. Il fait alors des essais dans chacune des deux équipes pour savoir laquelle est la plus performante.*

*1) Pour l'équipe 1, le pilote commence par faire 20 premiers tours. Les données des temps effectués par tour sont exprimées en secondes et stockées dans le vecteur `y1`. Au vu des données peut-on montrer que le temps moyen de la voiture de l'équipe 1 est inférieur à 51 secondes avec un risque d'erreur de première espèce fixé à 5% ?*

**Indication(s) R :**

```
> mean(y1)
[1] 50.21973
> sd(y1)
[1] 2.276776
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -1.532634
> pt(deltaEst.H0,19)
[1] 0.07092418
```

*2) Le pilote effectue 20 tours supplémentaires (les données sont toujours stockées dans le vecteur `y1`). Même question que précédemment avec ce nouveau jeu de données complétées.*

**Indication(s) R :**

```
> y1
 [1] 47.89674 50.04087 54.53240 54.36718 48.80645 51.44077 49.72669 44.81843
 [9] 50.37910 48.32037 53.55150 50.38611 50.37899 49.44585 50.47262 50.66881
...
[33] 48.83423 51.93978 49.19886 52.67034 49.21360 48.35678 49.43116 48.95199
> mean(y1)
[1] 50.39458
> sd(y1)
[1] 1.965069
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -1.948534
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.02567557
```

*3) Avec la voiture de l'équipe 2, le pilote effectue 50 tours. Les données des temps effectués par tour sont exprimées en secondes et stockées dans le vecteur `y2`. Au vu des données peut-on montrer que le temps moyen de la voiture de l'équipe 2 est inférieur à 51 secondes avec un risque d'erreur de première espèce fixé à 5% ?*

**Indication(s) R :**

```
> y2
 [1] 51.89371 51.35814 52.16305 51.83228 52.97653 51.43513 50.89370 51.50756
 [9] 51.54468 52.22917 51.21122 52.96252 51.61797 52.40225 50.21097 51.73468
...
[49] 53.55974 52.44708
> mean(y2)
[1] 52.02422
> sd(y2)
[1] 0.8670206
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 8.353126
```

```
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 1
```

*4) Quel est l'ordre de grandeur de la $p-$valeur du précédent test ? Donc à la vue des sorties R précédentes, les données permettent-elles de laisser penser qu'une certaine assertion d'intérêt (à préciser) est vraie ?*
*5) Au vu des données peut-on montrer que le temps moyen de l'équipe 1 est inférieur à celui de l'équipe 2 avec un risque d'erreur de première espèce fixé à 5% ?*
*Cela est-il surprenant au regard le la conclusion de la question précédente ?*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -4.878811
```

*6) Au vu des données peut-on montrer que la variance des temps de l'équipe 2 est inférieure à celle de l'équipe 1 avec un risque d'erreur de première espèce fixé à 5% ?*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 3.161661
```

*7) Exprimez littéralement les deux conclusions des deux tests précédents. Si vous étiez le pilote, quelle équipe choisiriez-vous ?*

**Exercice 7** *(1h - environ 10 pts)*
*Partie I : compétence d'un technicien*

*Un service de contrôle d'une entreprise de métallurgie s'intéresse à savoir si un technicien (Alfred) est suffisamment précis au niveau des mesures qu'il effectue sur des minerais de fer. Le technicien sera d'autant plus précis que l'écart entre deux mesures d'un même minerai (sans qu'il le sache) est faible. La précision serait théoriquement mesurée par la variance d'une infinité d'écarts entre deux mesures. On notera $\sigma^2_A$ (comme Alfred) cette variance. Le service de contrôle décide qu'un technicien est compétent si ce paramètre d'intérêt est inférieur à* 0.1.

1. *On commence par soumettre Alfred à $n^A = 20$ échantillons de minerai de fer. Le jeu de données est stocké dans le vecteur **yA** dans **R**. Peut-on montrer au seuil de 5% qu'Alfred est compétent ? (précisez l'hypothèse mathématique faite sur la nature des données)*

   **Indication(s) R :**

```
> yA
 [1]  0.14467956  0.30839102  0.16507184  0.08100885 -0.15048984 -0.02163446
 [7] -0.25558794  0.09871536  0.59275135 -0.22962500 -0.21676732 -0.09707208
[13]  0.17050529 -0.05732366  0.65337514  0.17802469  0.29278735 -0.16514972
[19] -0.30080221  0.32129752
> var(yA)
[1] 0.07325571
> sd(yA)
[1] 0.2706579
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 13.91858
> qchisq(c(0.01,0.025,0.05,0.1,0.9,0.95,0.975,0.99),19)
[1]  7.632730  8.906516 10.117013 11.650910 27.203571 30.143527 32.852327
[8] 36.190869
> pchisq(deltaEst.H0,19)
[1] 0.2115835
```

2. *On complète le jeu de données précédent en soumettant le technicien à 30 **nouveaux** échantillons. Le jeu de données est toujours stocké dans le vecteur **yA**. Peut-on maintenant montrer au seuil de 5% que le technicien est compétent ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yA
 [1]  0.144679564  0.308391020  0.165071844  0.081008851 -0.150489836
 [6] -0.021634458 -0.255587943  0.098715356  0.592751352 -0.229624997
...
[41]  0.262084534 -0.215753300  0.173626815 -0.200160681 -0.255138748
[46]  0.125329351 -0.326049545  0.207517750  0.070438920 -0.303221493
> var(yA)
[1] 0.06362229
> sd(yA)
[1] 0.2522346
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -2.762438
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.002868572
```

*Partie II : comparaison de deux techniciens*

1. *On s'intéresse à un second technicien (Bernard) dont on cherche à montrer qu'il est compétent. Bernard a été soumis à $n^B = 20$ échantillons de minerai ; les données relatives à ses écarts de mesure sont stockées en* `R` *dans le vecteur* `yB`*. Peut-on montrer qu'il est compétent au seuil de 5% ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yB
 [1]  0.024830162  0.093791329  0.145188006 -0.049699994 -0.153214255
 [6]  0.120875740 -0.112933043 -0.345291716 -0.007106278  0.122016115
[11] -0.191976511 -0.368424436  0.188209329 -0.119061948 -0.202052804
[16]  0.249518927 -0.301396393  0.112303313  0.216480111  0.239335084
> var(yB)
[1] 0.03921612
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 7.451062
```

2. *Peut-on montrer (toujours au seuil de 5%) qu'Alfred est moins précis que Bernard ?*

   **Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 1.622351
> qf(c(0.01,0.025,0.05,0.1,0.9,0.95,0.975,0.99),49,19)
[1] 0.4350385 0.4954826 0.5546675 0.6325832 1.7129041 2.0008646 2.2983466
[8] 2.7135032
```

3. *Alfred et Bernard critiquent le précédent résultat et proposent de refaire le même test à taille d'échantillon identique (i.e. $n = 20$). Que peut-on dire à la vue de l'instruction ci-dessous ?*

   **Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pf(deltaEst.H0,19,19)
[1] 0.9088193
```

4. *On complète alors le jeu de données du second technicien, en soumettant Bernard à 40* ***nouveaux*** *échantillons (les données sont toujours stockées en* `R` *dans le vecteur* `yB`*). Peut-on cette fois-ci montrer qu'Alfred est moins précis que Bernard ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yB
 [1]  0.024830162  0.093791329  0.145188006 -0.049699994 -0.153214255
 [6]  0.120875740 -0.112933043 -0.345291716 -0.007106278  0.122016115
...
```

```
[51]  0.296275243 -0.162141374  0.060792874  0.090976915  0.119856496
[56]  0.310565975 -0.146785494  0.061968269 -0.182127778 -0.187890277
> var(yB)
[1] 0.03442929
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 2.037317
```

**Exercice 8** *(conduite)*

*Un expérimentateur veut savoir si les femmes conduisent mieux que les hommes au vu des notes de conduite suivantes :*

**Hommes** *: 24,28,29,29,34,36,40,41 et 60.*

**Femmes** *: 21,31,34,37,38,39,42,43,44,50 et 51.*

*Nous supposerons que* $Y^H \rightsquigarrow N\left(\mu^H, \sigma_H\right)$ *et* $Y^F \rightsquigarrow N\left(\mu^F, \sigma_F\right)$*, et nous choisirons un seuil de signification de* 5%*.*

**Indication(s) R :**

```
> yH
[1] 24 28 29 29 34 36 40 41 60

> yF
 [1] 21 31 34 37 38 39 42 43 44 50 51
> mean(yH)
[1] 35.66667
> mean(yF)
[1] 39.09091
> sd(yH)
[1] 10.75872
> sd(yF)
[1] 8.561011
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -0.7935825
> pt(deltaEst.H0,18)
[1] 0.2188878
```

*Traitement hors exercice pour vérifier si l'hypothèse sur l'égalité des variances de X et Y n'était pas abusive :*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 1.579323
> pf(deltaEst.H0,8,10)
[1] 0.7550565
```

**Exercice 9** *Situons le contexte de cette étude pour laquelle toute ressemblance avec une situation ou des personnages ayant réellement existé serait purement fortuite : nous sommes un peu* ***avant le premier tour*** *des élections présidentielles de 2001. Parmi l'ensemble des candidats, nous nous intéresserons aux trois principaux : Racchi, Pinjos et Penle. On notera dans l'ordre* $p^{C1}$*,* $p^{C2}$ *et* $p^{C3}$ *les proportions d'électeurs (parmi tout l'électorat) ayant voté pour ces trois candidats.*

*Un journaliste interroge ces trois candidats séparément et leur demande le score que chacun pense faire au premier tour. Racchi pense réaliser un score autour de 20%, Pinjos autour de 19% et Penle 18%. Le journaliste n'ayant pas confiance sur la façon dont sont construits les sondages se crée un échantillon de* $n = 1000$ *(choisis au hasard dans l'électorat français) et obtient les trois estimations* $\widehat{p^{C1}}(\boldsymbol{y}) = 20\%$*,* $\widehat{p^{C2}}(\boldsymbol{y}) = 15.4\%$ *et* $\widehat{p^{C3}}(\boldsymbol{y}) = 18.3\%$ *stockés en* `R` *respectivement dans les variables* `pC1Est`*,* `pC2Est` *et* `pC3Est`*.*

1. *Au vu des a priori des trois candidats et de ce que semblent penser les médias et la population, le journaliste veut alors savoir si la proportion d'électeurs votant pour*
   *a) Racchi est au moins de 17.5%.*

*b) Pinjos est au moins de 17.5 %.*
*c) Penle est inférieure à 17.5 %.*
*Formez les trois tests d'hypothèses répondant à ces questions pour un risque d'erreur de première espèce qui n'excède pas 5%. Rédigez sous forme standard le premier test.*

**Indication(s) R :**

```
> 200/1000
[1] 0.2
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 2.080626
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9812659
```

```
> 154/1000
[1] 0.154
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -1.747726
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.04025576
```

```
> 183/1000
[1] 0.183
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 0.6658003
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.7472306
```

2. *Pour les candidats Pinjos et Penle (qui ne sont pas sur un bateau) peut-on montrer le contraire des assertions respectives (justifiez en rédigeant succinctement) ?*
3. *La situation semblant plus préoccupante pour Pinjos et Penle, le journaliste tente de les départager en proposant de vérifier à partir du même jeu de données les assertions suivantes mais au seuil de $\alpha = 20\%$ (réponse sous la forme de rédaction abrégée) :*
   *a) le score de Pinjos est inférieur à 16.5%*
   *b) le score de Penle est supérieur à 16.5%*

   **Indication(s) R :**

```
> 154/1000
[1] 0.154
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -0.9371465
```

```
> 183/1000
[1] 0.183
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 1.533512
```

**Exercice 10** *(rapport adjectifs-verbe)*

*Un psychologue est intéressé par le rapport adjectif-verbe pour caractériser le style de discours d'un individu. Il veut alors savoir s'il y a une différence de style entre les étudiants. Un échantillon de 10 étudiants de chaque formation est choisi. Chque étudiant écrit un ensemble de textes libres. Le rapport entre le nombre de verbes et le nombre d'adjectifs utilisés par chaque est étudiant est donné dans le tableau suivant :*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *scientifique* | *1.04* | *0.93* | *0.75* | *0.33* | *1.62* | *0.76* | *0.97* | *1.21* | *0.8* | *1.18* |
| *litteraire* | *1.32* | *2.3* | *1.98* | *0.59* | *1.02* | *0.88* | *0.92* | *1.39* | *1.95* | *1.25* |

*1) Peut-on plutôt penser que les scientifiques d'une part et les littéraires d'autre part utilisent plus de deux fois plus d'adjectifs que de verbes ?*

**Indication(s) R :**

```
> sc
 [1] 1.04 0.93 0.75 0.33 1.62 0.76 0.97 1.21 0.80 1.18
> mean(sc)
[1] 0.959
> sd(sc)
[1] 0.343267
> deltaEst.H0
[1] 4.228445
> pt(deltaEst.H0,9)
[1] 0.9988942
```

```
> litt
 [1] 1.32 2.30 1.98 0.59 1.02 0.88 0.92 1.39 1.95 1.25
> mean(litt)
[1] 1.36
> sd(litt)
[1] 0.5540959
> deltaEst.H0
[1] 4.908102
> pt(deltaEst.H0,9)
[1] 0.9995809
```

*2) Peut-on penser que le discours des littéraires est plus littéraire que celui des scientifiques avec un risque d'erreur de 5% ?*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -1.945469
> pt(deltaEst.H0,18)
[1] 0.03375338
```

*Traitement hors exercice pour vérifier si l'hypothèse sur l'égalité des variances n'était pas abusive :*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 0.3837905
> pf(deltaEst.H0,9,9)
[1] 0.08494635
```

**Exercice 11 (Dictée)** *En 2000, une dictée (de niveau 3ème) a été proposée à un très grand nombre de futurs candidats au baccalauréat. A l'époque la note moyenne (calculée à partir de l'ensemble des candidats présents) obtenue était de* 6.3. *Un professeur de français pense (et voudrait le vérifier rapidement en soumettant 30 lycéens choisis au hasard à cette dictée) que les nouvelles méthodes d'enseignement, les nouveaux programmes, les nouvelles préoccupations des lycéens,... ont un effet sur le niveau en orthographe des bacheliers actuels.*

1. *On notera $\mu^D$ la note moyenne des bacheliers actuels soumis à la même dictée. Avec un risque d'erreur de première espèce (maximal) préfixé à 5% ? Peut-on penser, au vu des données, que l'assertion d'intérêt du professeur de français est plutôt vraie ? (rédaction standard)*

   **Indication(s) R :**

```
> yD
 [1]  9 10  0  1  0  5  6 10  8  1 13  9  8  3  0  0  1  0  0  0  6  9  6  8  3
[26]  5 11  5  0  0
> mean(yD)
[1] 4.566667
```

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -2.278765
```

2. *Avec le même risque d'erreur de première espèce, que peut-on dire de plus (pertinent) ? (une rédaction abrégée suffit)*

3. *Le professeur de français s'interroge alors sur l'hétérogénéité des étudiants. En particulier, il souhaite montrer, au vu des données, que la variance des notes (notée $\sigma^2_D$) des bacheliers actuels est supérieure à celle qui avait été obtenue en 2000 (par le très grand nombre de futurs bacheliers de l'époque) et qui valait* 10.8. *Rédigez sous forme standard un test d'hypothèses et conclure avec un risque d'erreur de première espèce (maximal) fixé à 5% ?*

   **Indication(s) R :**

```
> var(yD)
[1] 17.35747
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 2.482891
```

4. *Même question (en ne donnant que la conclusion) avec $\alpha = 1\%$.*

5. *A la vue de l'instruction ci-dessous, quelle(s) assertion(s) peut-on confirmer en tolérant un risque d'erreur de première espèce (maximal) fixé à 5% ?*

```
> pnorm((var(yD)-12)/seVar(yD))
[1] 0.9787468
```

**Exercice 12** *(machine)*

*Un chef d'entreprise désire changer son ancienne machine produisant des pièces d'un certain type au rythme moyen de* 1214 *pièces par jour avec un écart-type de* 35.4 *pièces par jour. Via l'Approche Expérimentale, ces caractéristiques correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart-type des productions quotidiennes obtenues* ***si on pouvait faire tourner cette machine pendant une infinité de jours*** *(il est sous-entendu que le chef d'entreprise ne l'a constaté que pour une période de $m$ jours avec $m$ très très grand).*

*Partie 1*

*Un représentant lui propose une nouvelle machine (que l'on appellera* ***machine 1****) produisant des pièces du même type. Le chef d'entreprise souhaite l'acheter à condition qu'il soit assuré que cette machine 1 est d'une part plus performante (c'est à dire, de moyenne théorique une fois et demi plus grande que son ancienne machine de référence) et d'autre part plus régulière (c'est à dire, d'écart-type théorique deux fois plus petit que l'ancienne). Soient $\mu^{M1}$ et $\sigma_{M1}$, les caractéristiques de la machine 1 correspondant respectivement à la moyenne et à l'écart-type des productions quotidiennes obtenues* ***si on pouvait faire tourner la machine 1 pendant une infinité de jours****.*

*1. Exprimer à partir de $\mu^{M1}$ et $\sigma^2_{M1}$ (ou $\sigma_{M1}$) les deux conditions d'achat de la nouvelle machine exprimées par le chef d'entreprise.*

*Pour espérer connaître les ordres de grandeur de ces quantités inconnues, le chef d'entreprise demande au représentant une période d'essai de 100 jours. Le vecteur $\boldsymbol{y^{M1}} = (y_1^{M1}, y_2^{M1}, \ldots, y_{100}^{M1})$ représente les nombres de pièces fabriquées pour chaque jour de cette période d'essai. Ce vecteur de données a été préalablement saisi dans le logiciel R sous le nom $yM1$.*

*2. Peut-on conseiller au chef d'entreprise d'acheter la machine 1 (lorsqu'on sait qu'il accepte que tout test statistique est généralement traité à un seuil de signification $\alpha = 5\%$) ?*

**Indication(s) R :**

```
> yM1
  [1] 1844 1828 1837 1833 1831 1818 1836 1837 1840 1820 1845 1815 1831 1839 1824
 [16] 1839 1836 1840 1822 1824 1820 1839 1849 1846 1817 1822 1832 1846 1832 1834
```

```
...
 [76] 1810 1838 1844 1830 1830 1829 1807 1797 1814 1807 1844 1834 1827 1841 1830
 [91] 1830 1834 1840 1832 1844 1815 1825 1821 1840 1821
```

*Performance*

```
> mean(yM1)
[1] 1830.13
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 8.197877
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 1
```

*Régularité*

```
> var(yM1)
[1] 124.0334
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -11.41626
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 1.734226e-30
```

*Partie 2 Le chef d'entreprise prêt à acheter la machine 1 reçoit la visite d'un second représentant vantant les mérites de sa machine (que l'on appellera bien évidemment* ***machine 2****) par rapport à toutes les autres existant sur le marché. Les machines 1 et 2 étant de prix équivalents, le chef d'entreprise convaincu par l'éloquence du représentant décide de tester cette seconde machine sur une période de $n^{M2} = 50$ ($< n^{M1} = 100$ de par les réalités du calendrier que doit tenir le chef d'entreprise) jours afin de la comparer à la machine 1.*
*Définissons par $\mu^{M2}$ et $\sigma_{M2}$, les caractéristiques de la machine 2. On stockera les productions quotidiennes sur 50 jours dans le vecteur $y^{M2}$, préalablement saisi en* `R` *sous le nom* `yM2` *:*

```
> yM2
 [1] 2025 2045 2017 2024 2016 2025 2023 2020 2008 2025 2017 2014 2024 2028 2009
[16] 2023 2024 2034 2023 2024 2029 2032 2013 2017 2019 2022 2023 2005 2031 2012
...
[31] 2014 2032 2018 2022 2035 2024 2034 2012 2017 2015 2020 2015 2018 2020 2033
[46] 2025 2026 2026 2023 2014
```

*1. a) Peut-on montrer que les productions moyennes des deux machines sont différentes ?*
*b) Peut-on montrer que la seconde machine produit plus (en moyenne) et plus régulièrement que la machine 1 ?*

**Indication(s) R :** *Performance*

```
> mean(yM2)
[1] 2021.88
> mean(yM1)-mean(yM2)
[1] -191.75
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -122.3457
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0
```

*Régularité*

```
> var(yM2)
[1] 60.80163
> var(yM1)-var(yM2)
[1] 63.2318
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
```

```
[1] 2.992739
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9986176
```

*2. a) Peut-on montrer que la seconde machine produit 190 pièces de plus par jour (en moyenne) que la première ?*

*b) La seconde machine est-elle 1.5 fois plus régulière (i.e. de variance 1.5 fois plus petite) que la première ?*

```
> (mean(yM1)-mean(yM2)+190)/seDMean(yM1,yM2)
[1] -1.116584
> pnorm( (mean(yM1)-mean(yM2)+190)/seDMean(yM1,yM2) )
[1] 0.1320861
> (var(yM1)/var(yM2)-1.5)/seRVar(yM1,yM2)
[1] 1.044032
> pnorm((var(yM1)/var(yM2)-1.5)/seRVar(yM1,yM2))
[1] 0.8517646
> pnorm((var(yM2)/var(yM1)-1/1.5)/seRVar(yM2,yM1))
[1] 0.07782401
```

**Exercice 13** *(contentement du menu d'un restaurant - Juin 2003)*

*Un restaurateur s'intéresse au contentement de sa carte auprès de ses clients s'exprimant par une note entre 0 et 10. Il considère que le contentement est satisfaisant si la note moyenne (que l'on notera $\mu^{AV}$) de l'ensemble de ses clients potentiels est strictement supérieure à 6. Pour appuyer son analyse, il interroge 40 individus et stocke les informations dans un vecteur **yAV** (**les traitements R sont fournis en fin de document**).*

1. *Avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 5%, le restaurateur parvient-il à montrer que le niveau de satisfaction de sa carte est satisfaisant ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yAV
 [1] 8 7 6 7 9 7 6 4 7 5 8 7 6 6 6 6 7 5 7 6 7 7 8 5 4 7 6 5 7 6 8 6 7 7 7 8 5 8
[39] 5 5
> mean(yAV)
[1] 6.45
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9922594
```

*Afin d'améliorer la qualité de son établissement, le restaurateur envisage une modification de sa carte. Il décidera de maintenir cette nouvelle carte si les clients sont bien plus satisfaits qu'auparavant. Pour appuyer son analyse, il interroge rapidement 30 **nouveaux** individus et stocke les informations dans le vecteur **yAP1** (voir fin exercice). On notera $\mu^{AP1}$ la note moyenne de satisfaction des clients de la nouvelle carte.*

2. *Le restaurateur juge sa nouvelle carte plus attractive si la note moyenne de satisfaction de sa clientèle a augmenté de 1 (de l'ancienne à la nouvelle carte). Peut-on le prouver au seuil de 5% ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yAP1
 [1]  9  9  9  6  7  7  9  6  8  6 10 11  6  9  8  8  6 10  7 10  6  8  7  8  9
[26]  6  9  9  6  7
> mean(yAP1)
[1] 7.866667
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.8957027
```

*Dans l'expectative, le restaurateur décide d'interroger les 40 clients qui s'étaient déjà prononcés sur la première carte, pensant qu'ils seraient plus à même de juger la nouvelle carte. Il reprend contact avec ces 40 clients et les invitent à se prononcer sur sa nouvelle carte. On stocke les notes associées à la nouvelle carte dans le vecteur* `yAP2` *(voir fin exercice).*

3. *Avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 5%, le restaurateur parvient-il cette fois-ci à montrer que le niveau de satisfaction de sa carte a augmenté de 1 ? (Indication : faites attention au fait que les* ***mêmes*** *individus ont été interrogés)*

   **Indication(s) R :**

```
> yAP2
 [1]  8 10  8  8  9  8  9  5 10  6 10  7  7  6  6  7 11  7 12  6  7  7 10  6  7
[26]  7  7  5  8  8 10  6  9  8  8  9  5 10  7  8
> mean(yAP2)
[1] 7.8
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9615129
```

**Exercice 14** *(notes étudiants - Mai 2003)*

*Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Tous les tests s'effectueront à un risque d'erreur de première espèce (maximal)* ***fixé à 5%****.*

*Partie I (comparaison entre contrôle continu et examen final)*

*A l'université, il est commun de penser que les examens sont plus difficiles que le contrôle continu et donc que la note à l'examen est en moyenne plus faible que celle du contrôle continu. Un professeur de statistiques souhaite rassurer ses étudiants, en leur montrant que certes l'examen est plus difficile mais que cette différence n'excède pas 2 points sur 20. Il interroge 50 étudiants (n'ayant pas réussi à contacter l'ensemble de l'ancienne promotion) de la section C ayant suivi son cours l'année dernière et leur demande respectivement leur note au contrôle continu ainsi qu'à l'examen. On saisit sous* `R` *ces notes dans deux vecteurs notés* `yContC` *et* `yExamC` *(voir la partie indications ci-après).*

1. *Peut-on penser au vu des données que la note moyenne de l'examen (des étudiants de la section C) est strictement supérieure à 12 ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yExamC
 [1] 14 17 15 13 13 13 12 16 13 15 12 14 13 15 17 15 17 13 13 12 15 14 12 13  9
[26] 10 16 11 16 13 13 14 13 15 11 16 14 10  8 15 10 12 12 12 15 10 15  9 13 11
> mean(yExamC)
[1] 13.18
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 3.806977
```

2. *Formez le test statistique laissant penser que la différence de notes entre contrôle continu et examen final (des étudiants de la section C est en moyenne strictement positive.*

   **Indication(s) R :**

```
> yContC-yExamC
 [1]   2  -1  -3   3  -2  -3   3   3  -1  -1   5   2  -1  -5   0   1  -5   1  -2
[20]   4   3   6   1   1   0   0   2  -4 -10  -3   4   4  -2   2   3   0  -2   2
[39]   5  -2   2   4  -1   3   4   4   1   4   4   7
> mean(yContC-yExamC)
[1] 0.84
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 1.808212
```

3. *Peut-on penser (au vu des données) que la différence moyenne entre les deux notes n'excède pas deux points ?*

**Indication(s) R :**

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -2.497055
```

*Partie II (comparaison entre deux sections d'une même promotion)*

*A présent, on cherche à comparer les notes d'examen de statistiques entre deux sections (les sections C et D) d'une même promotion de deuxième année de sciences économiques (toute ressemblance avec des personnages connus ou ayant existé serait purement fortuite). Ayant déjà l'information des notes de 50 étudiants de la section C (information stockée dans le vecteur* **yExamC***), on décide d'interroger (au hasard et avec remise) 50 étudiants de la section D. On range alors les notes des étudiants interrogés dans le vecteur* **yExamD***. On décide de noter* $\mu^C$ *(resp.* $\mu^D$*) et* $\sigma_C$ *(resp.* $\sigma_D$*) les moyennes et écart-types des notes de l'ensemble de la section C (resp. D).*

1. *Montrez que la note moyenne de la section C est de plus d'un point supérieure à la note moyenne de la section D.*

**Indication(s) R :**

```
> yExamD
 [1] 13 13 11 10 13 11 12 11  9 13 10 11 12 14 11 11 10 17 10  7 17 11  9 10 14
[26] 11  9 11 10 10 12 11 12 12 10  9 12 12 10 11  8  5 14  9 12 11 11  9 11 11
> mean(yExamD)
[1] 11.06
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 2.606969
```

2. *Peut-on montrer que les niveaux des étudiants en section C et D sont hétérogènes, i.e. que les variances des notes des deux sections sont* ***différentes*** *?*

**Indication(s) R :**

```
> var(yExamC)
[1] 4.803673
> var(yExamD)
[1] 4.424898
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 0.2558515
```

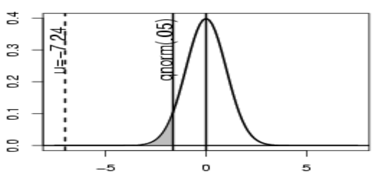
3. *Le professeur de statistiques tape dans son logiciel préféré (à préciser) les quatre instructions* R *suivantes calculant des* ***p−valeurs*** *associés à une question particulière qu'il se pose. A la seule lecture de ces quatre instructions complétez le tableau suivant (sans justification).*

```
> pnorm((mean(yExamC)-mean(yExamD)-2.5)/seDMean(yExamC,yExamD))       ## test 1
[1] 0.1882112
> pnorm((mean(yExamC)/mean(yExamD)-1.5)/seRMean(yExamC,yExamD))       ## test 2
[1] 2.220347e-13
> 1-pnorm((var(yExamC)/var(yExamD)-0.75)/seRVar(yExamC,yExamD))       ## test 3
[1] 0.1718079
> pnorm((var(yExamC)-var(yExamD)-2)/seDVar(yExamC,yExamD))            ## test 4
[1] 0.1367389
```

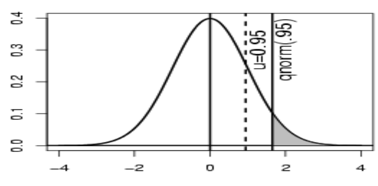
| *Test* | *hypothèse $H_1$* | *Expression littérale de $H_1$* | *Acceptation de $H_1$* |
|---|---|---|---|
| | | | *Oui* |
| *test 3* | | | |
| | $H_1 :\ \sigma_C^2 - \sigma_D^2 < 2$ | | |
| | | *la différence de note moy. entre les sections C et D est-elle inférieure à 2.5 points ?* | |

4. *Associez à chacun des tests (1 à 4) précédents le graphique représentant la règle de décision tracée au seuil de 5% basée sur $\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}(\boldsymbol{y})$ notée* ***u*** *en* R.

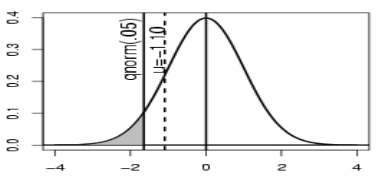
*Graphique 1*



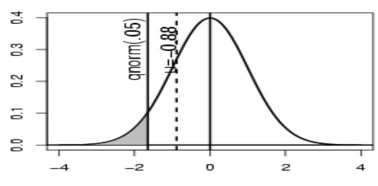

*Graphique 2*




*Graphique 3*




*Graphique 4*




**Exercice 15** *(Effet des vacances sur la connaissance des étudiants)*

*Un enseignant veut savoir si les vacances nuisent au suivi des connaissances. Il commence tout d'abord par évaluer le niveau moyen avant les vacances. Le niveau de compréhension d'un étudiant est évalué par un devoir dont la note est comprise entre 0 et 10. Il considère que le niveau moyen de compréhension est satisfaisant si la note moyenne (que l'on notera $\mu^{AV}$) de l'ensemble des étudiants de la promotion est strictement supérieure à 6. Pour appuyer son analyse, il n'interroge que 40 individus et stocke les informations dans un vecteur* ***yAV*** *(**les traitements R sont fournis en fin de document**).*

1. *Avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 5%, l'enseignant parvient-il à montrer (rédaction standard) que le niveau moyen de compréhension est satisfaisant ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yAV
 [1] 6 7 8 7 6 9 7 7 8 9 9 5 9 8 8 9 8 5 9 5 8 7 8 8 5 8 6 8 9 7 6 9 5 6 9 9 8 5
[39] 6 5
> mean(yAV)
[1] 7.275
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 1
```

2. *Proposez l'instruction* `R`*, permettant d'obtenir l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la note moyenne.*

```
> # IC <- (Instruction R à fournir dans la rédaction)
> IC
[1] 6.82571 7.72429
```

3. *Avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 5%, l'enseignant parvient-il à montrer (rédaction standard) que l'hétérogénéité des notes est faible c'est-à-dire que la variance des notes est inférieure à 3 ?*

   **Indication(s) R :**

```
> var(yAV)
[1] 2.101923
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] -3.147746
```

4. ***Après les vacances****, 30* ***nouveaux*** *étudiants sont invités à passer le même devoir. Les informations sont stockées dans le vecteur* ***yAP1*** *(voir fin exercice). On notera $\mu^{AP1}$ la note moyenne obtenue à ce devoir par l'ensemble des étudiants après les vacances. L'enseignant peut-il penser (rédaction standard) , au seuil de 5%, que les vacances sont nuisibles dans le sens que le niveau moyen de compréhension a diminué de plus de deux points ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yAP1
 [1] 5 5 4 7 5 7 6 5 5 4 7 7 4 4 5 5 5 5 5 6 4 6 5 5 6 5 6 5 7 5
> mean(yAP1)
[1] 5.333333
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.4198664
```

5. *Peut-on plutôt penser (rédaction abrégée) avec un risque d'erreur de 5% que la variance des notes après les vacances est plus de 2 fois plus grande qu'avant les vacances ?*

   **Indication(s) R :**

```
> var(yAP1)
[1] 0.9195402
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9991686
```

6. *Pensant que le problème précédent est mal posé (puisque ce ne sont pas les mêmes étudiants qui ont passé le devoir avant et après les vacances), il demande aux 40 étudiants ayant passé le devoir* ***avant les vacances*** *de le repasser. On stocke les notes associées à dans le vecteur* ***yAP2*** *(voir fin exercice). Avec un risque d'erreur de première espèce préfixé à 5%, l'enseignant parvient-il à prouver (rédaction abrégée) que les vacances sont nuisibles dans le sens que le niveau moyen de compréhension a diminué de plus de deux points (et qu'il faudrait donc les supprimer) ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yAP2
 [1] 2 3 5 4 2 6 4 6 7 7 6 2 6 7 6 5 4 2 5 3 7 3 7 7 3 6 3 4 5 5 4 7 2 4 8 7 7 3
[39] 5 4
> mean(yAP2)
[1] 4.825
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9948867
```

**Exercice 16 (Chiffres d'affaires)** *Dans cet exercice, on va s'intéresser aux performances de l'ensemble des petites et moyennes entreprises (PME) de deux pays fictifs notés P1 et P2 en 2004 et 2005 en analysant leurs chiffres d'affaires (exprimés dans une même unité).*

<u>*Partie I :*</u>

*Dans cette partie, on s'intéresse uniquement au chiffre d'affaires moyen des PME du* **pays P1** *et plus précisément à son évolution au cours des années 2004 et 2005. Ne pouvant pas interroger l'ensemble des PME, on ne pourra disposer que des chiffres d'affaires sur un échantillon de PME. On commence par recueillir pour* **2004 et 2005***, les chiffres d'affaires de 20 PME (ce sont les mêmes PME que l'on suit de 2004 à 2005). Les données sont stockées dans les vecteurs* `y04` *et* `y05`*. On propose de noter $\mu^{04}$ et $\mu^{05}$ les chiffres d'affaires annuels moyens de l'ensemble des PME du pays P1 en 2004 et 2005.*

1. *Peut-on penser que le chiffre d'affaires annuel moyen des PME en 2004 est supérieur à 80 unités ?*

   <u>**Indication(s) R :**</u>

```
> y04
 [1] 84.03 95.47 88.89 93.09 87.24 90.00 86.85 86.61 73.24 73.88 97.20 96.47
[13] 85.61 64.47 67.98 78.20 86.76 81.73 74.35 83.55
> mean(y04)
[1] 83.781
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 1.827336
> qt(c(0.9,0.95,0.975,0.99),19)
[1] 1.327728 1.729133 2.093024 2.539483
```

2. *Peut-on penser que le chiffre d'affaires annuel moyen a augmenté entre 2004 à 2005 de 10 unités ?*

   <u>**Indication(s) R :**</u>

```
> y05
 [1]  98.83  96.56  86.08  84.08  93.68 106.74  93.42 104.04  99.24  87.47
[11] 117.65 115.26 109.33  92.71 105.48  93.09 106.59  82.92  96.31  87.99
> mean(y05)
[1] 97.8735
> mean(y04-y05)
[1] -14.0925
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pt(deltaEst.H0,19)
[1] 0.06435257
```

3. *On décide de compléter les précédents jeux de données en interrogeant 20 PME supplémentaires et en recueillant leur chiffres d'affaires en 2004 et 2005. Les jeux de données sont toujours notés* `y04` *et* `y05`*. Que peut-on dire de l'assertion d'intérêt de la question précédente ?*

   <u>**Indication(s) R :**</u>

```
> y04
 [1]  84.03  95.47  88.89  93.09  87.24  90.00  86.85  86.61  73.24  73.88
[11]  97.20  96.47  85.61  64.47  67.98  78.20  86.76  81.73  74.35  83.55
[21]  85.15  76.67  87.75  84.52 104.08  72.72 101.80  87.52  86.61  89.96
[31]  76.96  95.11  70.88  89.79  87.29  83.36  73.73  79.94  91.97 100.07
> y05
 [1]  98.83  96.56  86.08  84.08  93.68 106.74  93.42 104.04  99.24  87.47
[11] 117.65 115.26 109.33  92.71 105.48  93.09 106.59  82.92  96.31  87.99
[21]  99.77 111.22 106.49 100.80 109.97  96.91  83.39 101.57 100.10 110.07
[31]  94.03 114.85 105.30 106.50  88.68 100.94  98.40 101.98 112.11  79.68
> mean(y04)
[1] 85.0375
> mean(y05)
[1] 99.50575
> mean(y04-y05)
[1] -14.46825
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
```

```
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.01285186
```

<u>*Partie II :*</u>

*Dans cette partie, on va comparer les chiffres d'affaires des PME en 2005. Pour simplifier les notations, on propose de noter par $\mu^{P1}$ et $\sigma^2_{P1}$ (respectivement par $\mu^{P2}$ et $\sigma^2_{P2}$) la moyenne et la variance des chiffres d'affaires de l'ensemble des PME du pays $P_1$ (respectivement du pays $P_2$) en 2005.*

1. *Peut-on penser que le chiffre d'affaires annuel moyen des PME du pays P1 est de plus de 20 unités supérieur à celui du pays P2 ?*

   **<u>Indication(s) R :</u>**

```
> yP2
 [1] 63.89 72.36 88.48 74.28 71.63 82.45 67.42 76.01 74.33 77.81 71.67 72.38
[13] 80.33 77.67 67.29 73.98 65.97 76.65 74.02 88.96 71.19 81.90 75.03 80.35
[25] 86.16 73.15 73.94 63.95 79.94 59.04 67.50 77.15 74.01 77.45 78.13 74.46
[37] 96.59 80.00 78.19 72.97
> mean(yP2)
[1] 75.467
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9825057
```

2. *Peut-on penser que les hétérogénéités (mesurées par les variances) des chiffres d'affaires annuels des PME des deux pays diffèrent ?*

   **<u>Indication(s) R :</u>**

```
> var(yP1)
[1] 94.55306
> var(yP2)
[1] 52.20786
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9748944
```

3. *En analysant plus précisément les résultats de la question précédente, ne peut-on pas affirmer une certaine assertion d'intérêt ? (Rédaction abrégée)*

**Exercice 17 (Qualité d'évaluation de correction de copies)** *Dans cet exercice, on s'intéresse à la qualité d'évaluation de correction de copies.*

<u>*Partie I*</u> *:*

*On commence par s'intéresser à l'effet de deux correcteurs différents. L'examen d'une même épreuve s'est déroulé dans deux amphis différents que l'on notera $A_1$ et $A_2$. Deux correcteurs $C_1$ et $C_2$ prennent en charge respectivement l'amphi $A_1$ et l'amphi $A_2$. Pour se faire une idée sur leur différence d'évaluation, ils commencent chacun par corriger trente copies. Les jeux de données sont stockés en* `R` *dans les vecteurs* `yA1` *et* `yA2`.

1. *On notera $\mu^{A_1}$ et $\mu^{A_2}$ les moyennes des notes données respectivement par $C_1$ à $A_1$ et par $C_2$ à $A_2$. Dans le passé, $C_1$ est souvent passé pour un correcteur plus souple que $C_2$. Ceci peut-il être confirmé au vu des données en montrant que $\mu^{A_1}$ est strictement supérieure à $\mu^{A_2}$ ?*

   **<u>Indication(s) R :</u>**

```
> yA1
 [1]  5 19 15 12 10 15 10  9 12  6  8  6  2  8 10 17 12 13 11  6  9  9 11 12  8
[26]  8  9  2 10  6

> yA2
 [1] 12  8 11  6  5  5 11  5 10  7  4  5  7  3  3  6  9  0  6  0 10  6 14  5  8
[26]  7 11  5  0  3
> mean(yA1)
[1] 9.666667
```

```
> mean(yA2)
[1] 6.4
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9996505
```

2. *Après réflexion, les deux correcteurs comprennent que la question précédente ne permet pas de répondre à la plus grande souplesse du correcteur $C_1$. Les correcteurs s'accordent donc sur le fait qu'ils doivent corriger les mêmes copies. Le correcteur $C_2$ corrige alors les trente copies déjà corrigées par $C_1$. Ce nouveau jeu de données sera noté* **`yA1C2`**. *Pour simplifier les notations, on notera $\mu^{C_1}$ et $\mu^{C_2}$ les moyennes des notes données par les correcteurs $C_1$ et $C_2$ respectivement. Peut-on cette fois penser que $C_1$ est plus souple que $C_2$ ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yA1C2
 [1]  3 19 15 12 10 15  9  8 12  6  8  6  1  8  9 17 11 13 10  5  8  9 10 11  8
[26]  8  9  2 10  5
> mean(yA1C2)
[1] 9.233333
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9999852
```

*Partie II :*

*On s'interroge maintenant sur un éventuel changement d'évaluation d'une deuxième correction (par un même correcteur). Après avoir corrigé une première fois l'ensemble des copies, le correcteur $C_1$ décide de* ***recorriger*** *les trente premières copies, ce nouveau jeu de données sera noté, en* `R`, **`yAP`**. *On renomme le jeu de données* **`yA1`** *par* **`yAV`**. *On note $Y^D = Y^{AV} - Y^{AP}$ une future différence de notes entre la première et la seconde correction ; le jeu de données associé est stocké dans le vecteur* **`yD`** *en* `R`. *On se propose de réaliser deux tests l'un portant sur la moyenne, l'autre sur la variance de la variable différence de notes*

1. *Peut-on plutôt penser que la moyenne de la différence de notes est différente de zéro (ce qui traduirait un effet sur la moyenne d'une deuxième correction) ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yAP
 [1]  5 20 16 13  7 13 12  7 13  6  8  6  2  7 10 17 12 11 12  6  9  8 10 12  7
[26]  7  9  1 10  5
> yD<-yAV-yAP

> yD
 [1]  0 -1 -1 -1  3  2 -2  2 -1  0  0  0  0  1  0  0  0  2 -1  0  0  1  1  0  1
[26]  1  0  1  0  1
> mean(yD)
[1] 0.3
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.9345922
```

2. *Peut-on plutôt penser que la variance de la différence de notes est supérieure à 0.25 ?*

   **Indication(s) R :**

```
> var(yD)
[1] 1.182759
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.998733
```

3. *Que concluez-vous sur cette partie II ?*

**Exercice 18 (Autour du produit B)** *L'industriel après avoir décidé de lancer le produit B (le jeu de données de taille 1000 ayant conduit à plutôt penser que $\mu^B > 0.15$) en janvier 2004* *décide d'approfondir ses connaissances en statistiques. Tour à tour, il se concentre sur trois petits problèmes.*

*<u>Partie I</u>*

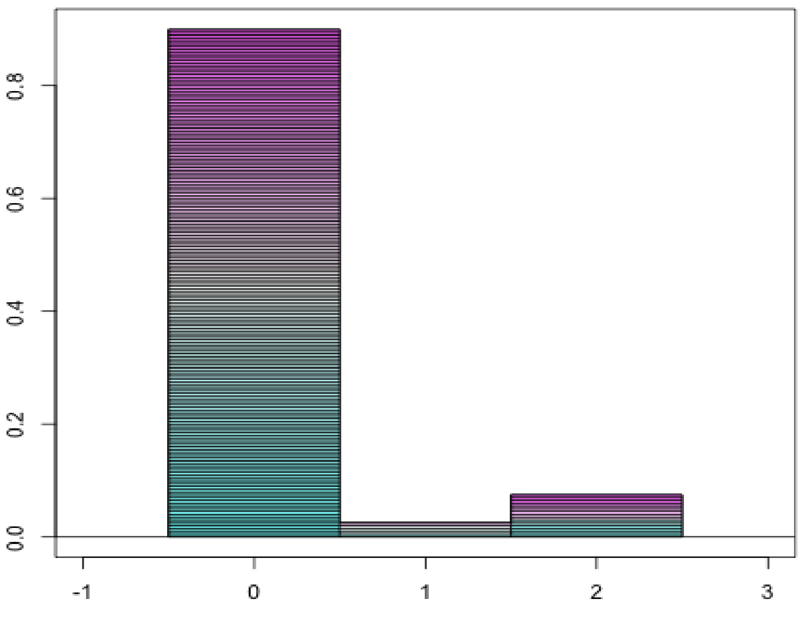
*L'industriel s'interroge sur l'importance de la taille d'échantillon et se demande ce qu'il aurait conclu s'il n'avait pu disposer le jour J (avant janvier 2004) que d'un échantillon de taille bien inférieure à celle qu'il a eu en réalité à savoir 1000.*

1. *Il s'imagine alors ne disposer que des nombres de produit(s) acheté(s) pour les 10 premières personnes de son échantillon de taille* 1000. *A partir des indications suivantes, quelle décision aurait-été prise par l'industriel quant au lancement de son produit ?* ***Rappelez auparavant la contrainte à imposer pour pouvoir répondre à ce type de question****.*

   **<u>Indication(s) R :</u>**

```
> y10
 [1] 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
> mean(y10)
[1] 0.1
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pt(deltaEst.H0,9)
[1] 0.3145356
```

2. *La contrainte à imposer vous semble-t-elle raisonnable dans cette problématique ? Justifiez brièvement votre réponse (3 lignes maximum). Le graphique ci-dessous représentant la répartition en histogramme discret des réponses des 1000 individus confirme-t-elle vos propos ?*




3. *Il convient alors d'augmenter la taille d'échantillon et de sélectionner dans son nouveau échantillon les 50 premiers individus de son échantillon original. Qu'aurait-il pu en conclure (rédaction standard) ?*

   **<u>Indication(s) R :</u>**

```
> y50
 [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0
[39] 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
> mean(y50)
[1] 0.18
```

```
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> deltaEst.H0
[1] 0.3786397
```

Partie II

*En Janvier 2005, cela fait un an que le produit B a été lancé. L'industriel pense que son produit mieux connu des consommateurs est plus vendu. Il dispose déjà de l'échantillon de taille* $n = 1000$ *obtenu en 2004 (que l'on note ici* `yB04`*) ayant notamment servi à estimer le nombre moyen de produit B vendus en 2004, désormais noté* $\mu^{B04}$*. En 2005, il décide d'interroger les mêmes* $n = 1000$ *individus qu'en 2004. Le jeu de données associé est noté* `yB05` *servant notamment à estimer le nombre moyen* $\mu^{B05}$ *de produit B vendus en 2005.*

1. *Peut-on penser au vu de ces données qu'il y a eu une augmentation moyenne de 2004 à 2005 d'au moins* $0.02$ *en nombre de produit(s) B vendu(s) (rédaction standard) ?*

   **Indication(s) R :**

```
> yB05-yB04
   [1]  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  1  0  0  0  0 -2  0  0
  [25]  0  1  1  0 -2 -2 -2  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  3  0  0  0  0
...
 [961]  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0 -1 -2  0  1  0  0
 [985]  0  0  0  0  3  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
> mean(yB05-yB04)
[1] 0.085
> # deltaEst.H0 <- (instruction R à fournir dans la rédaction)
> pnorm(deltaEst.H0)
[1] 0.991839
```

2. *En fait, après réflexion, il réalise qu'il dispose en 2005 de la valeur de* $\mu^{B04}$ *égale à* $0.19$*. Reformulez l'assertion d'intérêt et proposez l'instruction* `R` *fournissant la p-valeur associée.*

Partie III

*Souhaitant exporter le produit B en Allemagne, l'industriel se crée un échantillon de taille* $n = 500$ *individus, consommateurs potentiels du produit B allemands. Il souhaite alors comparer les deux pays. Ce nouveau jeu de données est noté* `yAll`

*On notera* $\mu^{All}$ *et* $\sigma^2_{All}$ *les moyennes et variances des réponses des consommateurs potentiels allemands. Pour simplifier, on notera* $\mu^{Fr}$ *et* $\sigma^2_{Fr}$ *les moyennes et variances des réponses des consommateurs potentiels français, et l'échantillon de taille 1000 est noté* `yFr`*.*

*A partir des instructions* `R` *ci-dessous, combien d'assertions d'intérêt différentes (en précisant lesquelles) peut-on confirmer avec les données ?*

```
> (mean(yFr)-mean(yAll)-0.045)/seDMean(yFr,yAll)
[1] 1.821887
> pnorm((var(yFr)/var(yAll)-2)/seRVar(yFr,yAll))
[1] 0.996465
> pnorm((var(yAll)/var(yFr)-.5)/seRVar(yAll,yFr))
[1] 1.967895e-05
```