

Cours de Statistiques Inférentielles

CQLS : cqls@upmf-grenoble.fr

5 juillet 2014

Plan

1 Intervalle de confiance

Motivation

Motivation

- 1 Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 échantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?

Motivation

- ❶ Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 échantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?
- ❷ Plus généralement, quelle confiance doit-on accorder à une estimation $\hat{\theta}^\bullet(\mathbf{y})$ le **jour J** selon son erreur standard $\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{y})$ plus ou moins grande.

Motivation

- ❶ Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 échantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?
- ❷ Plus généralement, quelle confiance doit-on accorder à une estimation $\hat{\theta}^\bullet(\mathbf{y})$ le **jour J** selon son erreur standard $\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{y})$ plus ou moins grande.
- ❸ Interprétation des résultats d'un sondage avant le premier tour des élections présidentielles 2002 : Votre attitude aurait-elle été influencée si à la place d'une estimation $\widehat{p}^J(\mathbf{y})$ (autour de 17%) pour le candidat Jospin, on vous avait fourni une "fourchette" [14.67%, 19.33%]. Il paraît que cette information ne nous est pas fournie car les Français ne sauraient pas interpréter ce type de résultats. Qu'en pensez-vous ?

Construction Intervalle de Confiance et *A. E. P.*

Y

Un Futur échantillon **Y** !

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.

$$\mathbf{Y} \longrightarrow \hat{\theta}^{\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^{\bullet}}(\mathbf{Y})$$

Une future estimation $\hat{\theta}^{\bullet}(\mathbf{Y})$

Sa future erreur standard $\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^{\bullet}}(\mathbf{Y})$

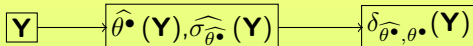
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.

$$\mathbf{Y} \longrightarrow \hat{\theta}^{\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^{\bullet}}(\mathbf{Y})$$

Une future estimation $\hat{\theta}^{\bullet}(\mathbf{Y}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\theta^{\bullet}, \sigma_{\hat{\theta}^{\bullet}})$ **inconnue**

Sa future erreur standard $\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^{\bullet}}(\mathbf{Y}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\sigma_{\hat{\theta}^{\bullet}}, \sigma_{\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^{\bullet}}})$ **inconnue**

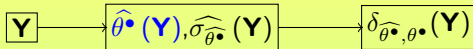
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet}, \theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\theta^\bullet}}(\mathbf{Y})}$$

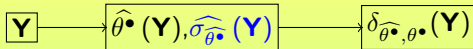
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\hat{\theta}, \theta}(\mathbf{Y}) = \frac{\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}(\mathbf{Y})}$$

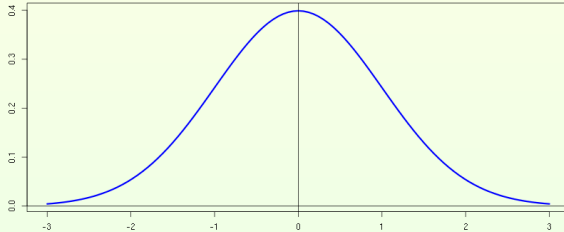
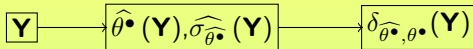
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet}, \theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\theta^\bullet}}(\mathbf{Y})}$$

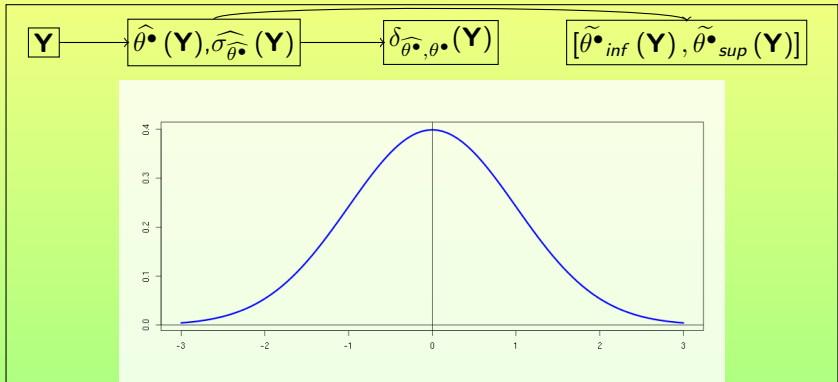
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\hat{\theta}^\bullet, \theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\hat{\theta}^\bullet(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y})} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1) \text{ connue !}$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.

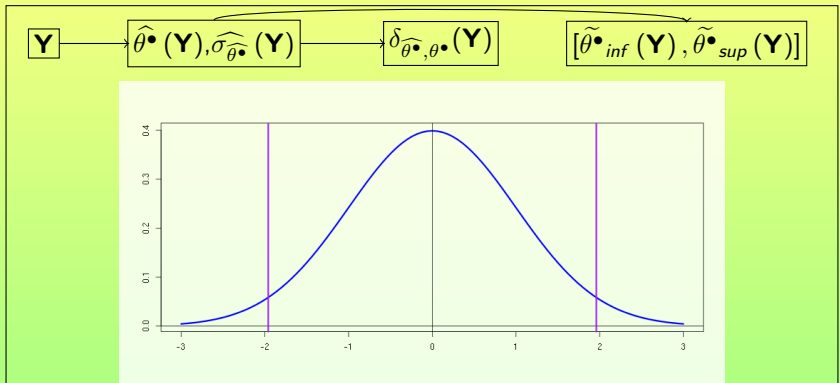


Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\hat{\theta}^\bullet, \theta^\bullet}(Y) = \frac{\hat{\theta}^\bullet(Y) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(Y)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1) \text{ connue !}$$

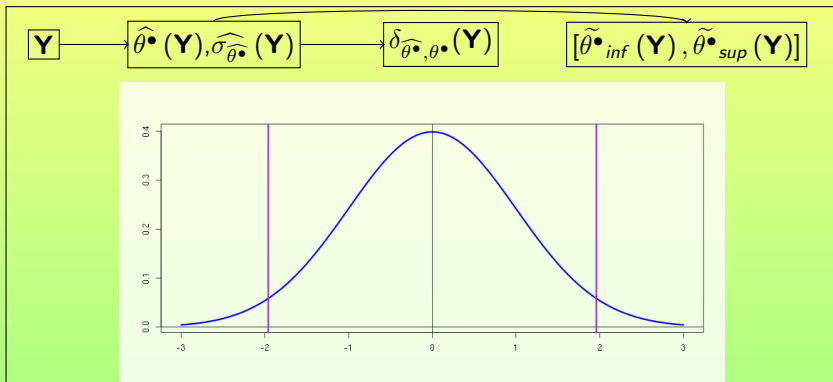
→ détermination de $[\tilde{\theta}^\bullet_{inf}(Y), \tilde{\theta}^\bullet_{sup}(Y)]$?

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



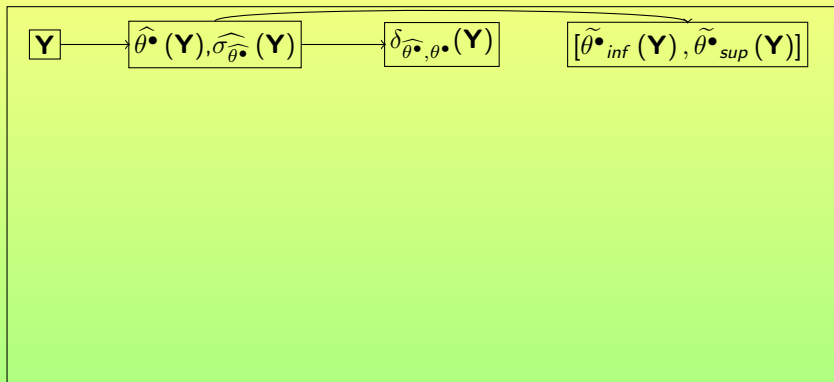
$$1-\alpha \simeq \mathbb{P} \left(-\delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \leq \delta_{\hat{\theta}^\bullet, \theta^\bullet}(\mathbf{Y}) \leq \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \right) \text{ avec } \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \begin{cases} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathcal{N}(0, 1)) \\ \simeq 1.96 \text{ si } \alpha = 5\% \end{cases}$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



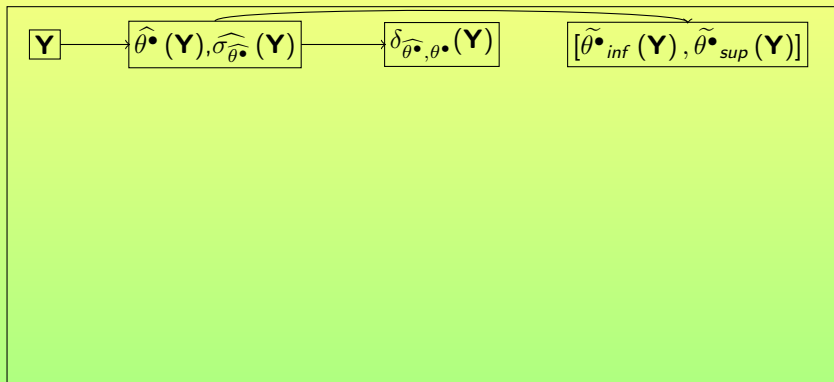
$$1 - \alpha \simeq \mathbb{P} \left(-\delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \leq \frac{\hat{\theta}^\bullet(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma}_{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})} \leq \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



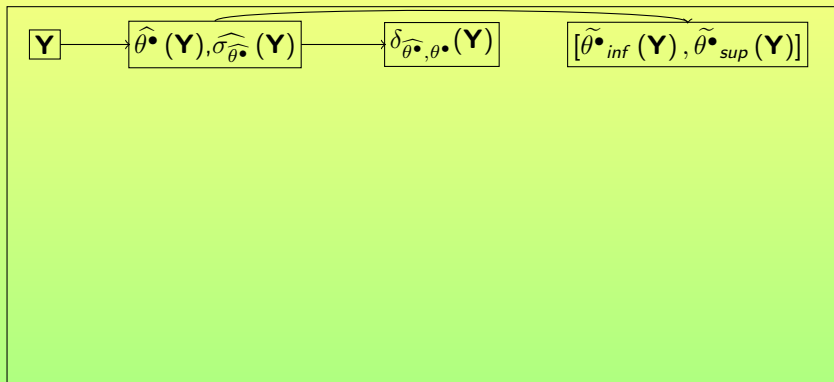
$$1 - \alpha \simeq \mathbb{P} \left(-\delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \times \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y}) \leq \hat{\theta}^\bullet(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet \leq \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \times \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y}) \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



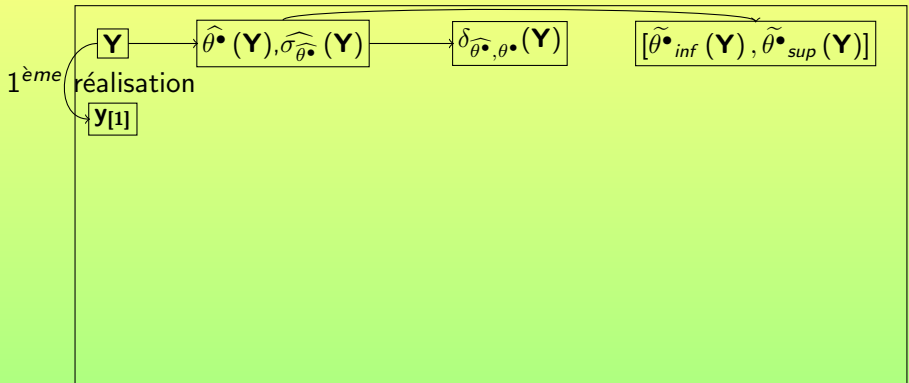
$$1 - \alpha \simeq \mathbb{P} \left(-\delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \times \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y}) \leq \theta^\bullet - \hat{\theta}^\bullet(\mathbf{Y}) \leq \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \times \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y}) \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



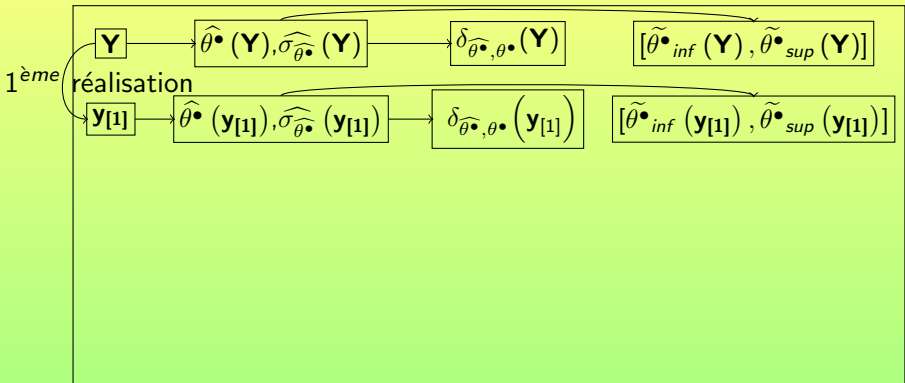
$$1 - \alpha \simeq \mathbb{P} \left(\underbrace{\hat{\theta}^\bullet(\mathbf{Y}) - \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \times \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y})}_{\widetilde{\theta}_{inf}^\bullet(\mathbf{Y})} \leq \theta^\bullet \leq \underbrace{\hat{\theta}^\bullet(\mathbf{Y}) + \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+ \times \widehat{\sigma}_{\hat{\theta}^\bullet}(\mathbf{Y})}_{\widetilde{\theta}_{sup}^\bullet(\mathbf{Y})} \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Construisons un premier échantillon $\mathbf{y}_{[1]}$!

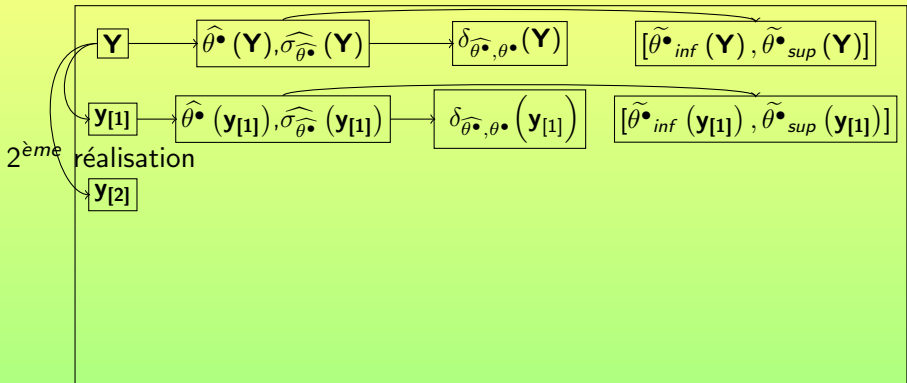
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y}_{[1]}$ est “**bon**” dans sa mission ssi

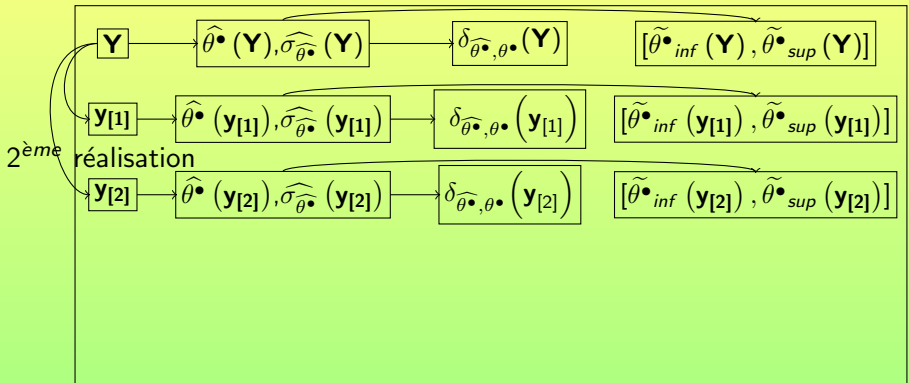
$$\theta^{\bullet} \in [\tilde{\theta}_{\inf}^{\bullet}(\mathbf{y}_{[1]}), \tilde{\theta}_{\sup}^{\bullet}(\mathbf{y}_{[1]})] \Leftrightarrow \delta_{\hat{\theta}^{\bullet}, \theta^{\bullet}}(\mathbf{y}_{[1]}) \in [-\delta_{\lim, \frac{\alpha}{2}}^+, \delta_{\lim, \frac{\alpha}{2}}^+]$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Construisons un deuxième échantillon $\mathbf{y}_{[2]}$!

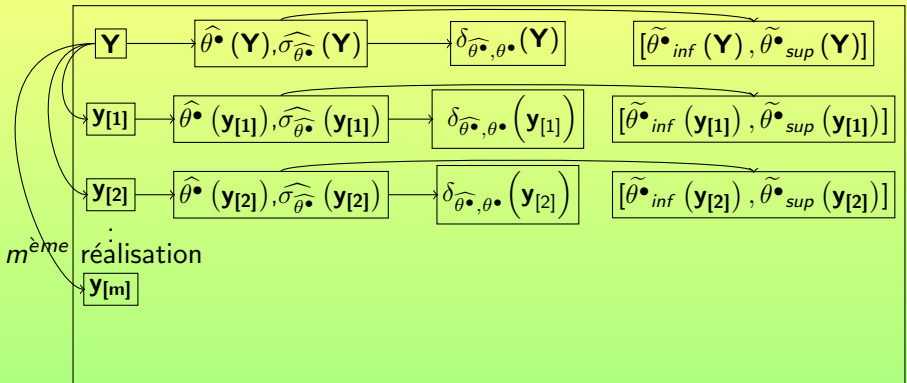
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y}_{[2]}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

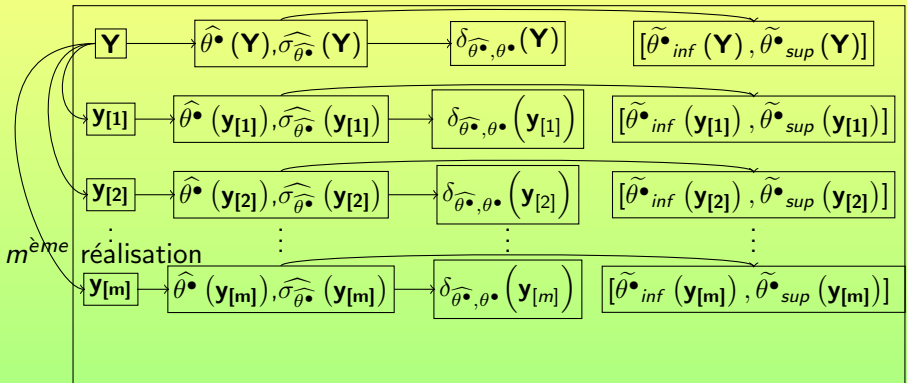
$$\theta^\bullet \in [\tilde{\theta}^\bullet_{inf}(\mathbf{y}_{[2]}), \tilde{\theta}^\bullet_{sup}(\mathbf{y}_{[2]})] \Leftrightarrow \delta_{\hat{\theta}^\bullet, \theta^\bullet}(\mathbf{y}_{[2]}) \in [-\delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+, \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+]$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Construisons un $m^{\text{ème}}$ échantillon $y[m]$!

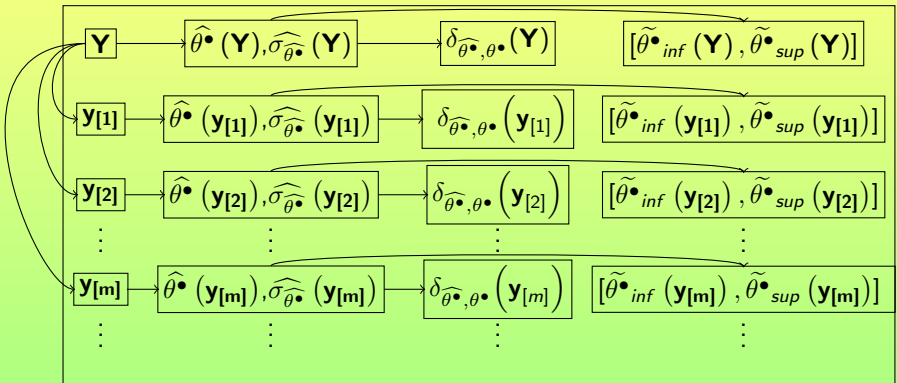
Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y}_{[m]}$ est “bon” dans sa mission ssi

$$\theta^\bullet \in [\tilde{\theta}^\bullet_{inf}(\mathbf{y}_{[m]}), \tilde{\theta}^\bullet_{sup}(\mathbf{y}_{[m]})] \Leftrightarrow \delta_{\widehat{\theta^\bullet}, \theta^\bullet}(\mathbf{y}_{[m]}) \in [-\delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+, \delta_{lim, \frac{\alpha}{2}}^+]$$

Construction Intervalle de Confiance et A. E. P.



Interprétation par l'A.E.P. : nous imaginons disposer d'une **infinité d'intervalles de confiance** dont une proportion (\simeq) $1 - \alpha$ (i.e. niveau de confiance) sont **"bons"**, i.e. contiennent le paramètre θ^* inconnu.

Obtention de $[\tilde{\theta}^*_{inf}(y), \tilde{\theta}^*_{sup}(y)]$ le jour J : équivalent à un choix au hasard d'un **unique intervalle de confiance** parmi cette infinité!!!

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

① niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:

- ▶ $n = 10$: $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]$, \dots
- ▶ $n = 100$: $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]$, \dots
- ▶ $n = 1000$: $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]$, \dots

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

① niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

❶ niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...

❷ niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$:

- ▶ $n = 10$: $[-0.118, 0.718]$, $[-0.096, 0.296]$, $[-0.199, 0.999]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0.129, 0.311]$, $[0.077, 0.263]$, $[0.101, 0.319]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0.197, 0.263]$, $[0.185, 0.247]$, $[0.162, 0.222]$, ...

❸ niveau de confiance $1 - \alpha = 50\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0.156, 0.444]$, $[0.033, 0.167]$, $[0.194, 0.606]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0.189, 0.251]$, $[0.138, 0.202]$, $[0.173, 0.247]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0.219, 0.241]$, $[0.205, 0.227]$, $[0.182, 0.202]$, ...

❹ niveau de confiance $1 - \alpha = 10\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0.273, 0.327]$, $[0.087, 0.113]$, $[0.362, 0.438]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0.214, 0.226]$, $[0.164, 0.176]$, $[0.203, 0.217]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0.228, 0.232]$, $[0.214, 0.218]$, $[0.19, 0.194]$, ...

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

❶ niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$, ...

❷ niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$:

- ▶ $n = 10$: $[-0.118, 0.718]$, $[-0.096, 0.296]$, $[-0.199, 0.999]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0.129, 0.311]$, $[0.077, 0.263]$, $[0.101, 0.319]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0.197, 0.263]$, $[0.185, 0.247]$, $[0.162, 0.222]$, ...

❸ niveau de confiance $1 - \alpha = 50\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0.156, 0.444]$, $[0.033, 0.167]$, $[0.194, 0.606]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0.189, 0.251]$, $[0.138, 0.202]$, $[0.173, 0.247]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0.219, 0.241]$, $[0.205, 0.227]$, $[0.182, 0.202]$, ...

❹ niveau de confiance $1 - \alpha = 10\%$:

- ▶ $n = 10$: $[0.273, 0.327]$, $[0.087, 0.113]$, $[0.362, 0.438]$, ...
- ▶ $n = 100$: $[0.214, 0.226]$, $[0.164, 0.176]$, $[0.203, 0.217]$, ...
- ▶ $n = 1000$: $[0.228, 0.232]$, $[0.214, 0.218]$, $[0.19, 0.194]$, ...

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widetilde{\mu}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
7	0.22	0.187	0.253	1
8	0.222	0.19	0.254	1
9	0.186	0.157	0.215	1
10	0.216	0.184	0.248	1
11	0.198	0.168	0.228	1
12	0.228	0.195	0.261	1
13	0.198	0.168	0.228	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widetilde{\mu}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
7231	0.235	0.2	0.27	0
7232	0.194	0.165	0.223	1
7233	0.192	0.165	0.219	1
7234	0.195	0.165	0.225	1
7235	0.18	0.151	0.209	1
7236	0.181	0.153	0.209	1
7237	0.191	0.161	0.221	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widetilde{\mu}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Question : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [0.172, 0.234]) = ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Question : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [0.172, 0.234]) = 95\%$?

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widetilde{\mu}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\underbrace{\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[1287]})}_{0.172}, \underbrace{\widetilde{\mu}^\bullet_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[1287]})}_{0.234}]) = 100\%$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Question : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]) = ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]) = 0\% \text{ ou } 100\%$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widetilde{\mu}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Question : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu}_{\text{inf}}^\bullet(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu}_{\text{sup}}^\bullet(\mathbf{Y})]) = ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}_{[j]}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y}_{[j]})]$?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) \simeq \text{Taux de succès} =$				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]) = 95\%$

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté y_J en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ_J^2 s'obtiennent très facilement :

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté **yJ** en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ_J^2 s'obtiennent très facilement :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \widetilde{\mu}_{\text{inf}}^J(\mathbf{y}) \\ \widetilde{\mu}_{\text{sup}}^J(\mathbf{y}) \end{cases} &= \widehat{\mu}^J(\mathbf{y}) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \delta_{\text{lim}, \alpha/2}^+ \widehat{\sigma}_{\widehat{\mu}^J}(\mathbf{y}) \\ &\stackrel{\text{R}}{=} \text{mean}(\mathbf{yJ}) + \text{c}(-1, 1) * \text{qnorm}(.975) * \text{seMean}(\mathbf{yJ}) \\ &\simeq [100.06, 101.36] \end{aligned}$$

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté **yJ** en R. Les formules des **intervalles de confiance à 95%** pour μ^J et σ_J^2 s'obtiennent très facilement :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \widetilde{\sigma}_{J_{\text{inf}}}^2(\mathbf{y}) \\ \widetilde{\sigma}_{J_{\text{sup}}}^2(\mathbf{y}) \end{cases} &= \widehat{\sigma}_J^2(\mathbf{y}) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \delta_{\text{lim}, \alpha/2}^+ \widehat{\sigma}_{\sigma_J^2}(\mathbf{y}) \\ &\stackrel{\text{R}}{=} \text{var}(\mathbf{yJ}) + \text{c}(-1, 1) * \text{qnorm}(.975) * \text{seVar}(\mathbf{yJ}) \\ &\simeq [86.53, 134.06] \end{aligned}$$