Cours de Statistiques Inférentielles

CQLS : cqls@upmf-grenoble.fr

5 juillet 2014

Plan

Anniversaires

Quelles sont les chances qu'au moins 2 individus d'un groupe de 20 ou 30 ou 50 ou 100 personnes (N en général) soient nés le même jour ?

Simplification Pour pouvoir éventuellement réaliser cette expérience assistée par ordinateur, on convient ici de supposer (même si cela est peu abusif) que tout individu a la même chance d'être né à n'importe quel jour de l'année (excepté peut-être le 29 février qui ne sera pas considéré comme possible).

Votre intuition : Sauriez-vous dire à partir de quelles valeurs de N les chances sont à peu près de 50% ou 75% ou 95% ?

On joue ! Executer plusieurs fois la fonction R :
`anniv(n)` avec n=20, 30, 50 et 100.

Jeu des Gobelets

Une personne organise le jeu des gobelets (décrit ci-dessous) et invite un joueur à participer à ce jeu. A la fin du jeu, il lui demande quelle stratégie il désire adopter ? Qu'en pensez-vous ?

Règle du Jeu : L'organisateur prépare l'expérience en proposant 3 (ou $N \geq 3$ en général) gobelets dont un seul (choisi au hasard) contient une balle. Dans un premier temps, l'organisateur demande au joueur de choisir le gobelet sensé contenir la balle.
(Quelles sont les chances que son choix soit le bon ?)
Dans un deuxième temps, sachant où se trouve la balle, l'organisateur retourne 1 (ou N-2) gobelet(s) autre(s) que le premier choix du joueur (c'est toujours possible !) ne contenant pas la balle de sorte que le joueur n'a plus que maintenant 2 choix possibles.
Votre intuition : Quelle stratégie adopter : changer ou pas de choix ?

Jeu des Gobelets

Une personne organise le jeu des gobelets (décrit ci-dessous) et invite un joueur à participer à ce jeu. A la fin du jeu, il lui demande quelle stratégie il désire adopter ? Qu'en pensez-vous ?

On joue ! Executer les instructions R ci-dessous :

```
gobelet(change=T,nb=3)
gobelet(change=F,nb=3)
gobelet(change=T,nb=5)
gobelet(change=F,nb=5)
```

Lancer d'un dé

Cet exemple (pas le plus intéressant) va nous servir à appréhender la notion de mesures de chance de réalisation d'une prédiction avant et après le lancer du dé (équivalent à à choisir une boule au hasard dans une urne contenant 6 boules numérotées de 1 à 6).

Votre intuition : Avant le lancer du dé, sauriez-vous

- si la face supérieure du dé est aléatoire ou non ?
- évaluer les chances que la face du dé soit 2 (resp. ≤ 2).

Après le lancer du dé (i.e. *Alea jacta est*) sauriez-vous répondre aux mêmes questions précédentes. Comment formuler plus directement les réponses à la dernière question ?

Lancer d'un dé

Cet exemple (pas le plus intéressant) va nous servir à appréhender la notion de mesures de chance de réalisation d'une prédiction avant et après le lancer du dé (équivalent à à choisir une boule au hasard dans une urne contenant 6 boules numérotées de 1 à 6).

Votre intuition : Avant le lancer du dé, sauriez-vous

- si la face supérieure du dé est aléatoire ou non ?
- évaluer les chances que la face du dé soit 2 (resp. ≤ 2).

Après le lancer du dé (i.e. *Alea jacta est*) sauriez-vous répondre aux mêmes questions précédentes. Comment formuler plus directement les réponses à la dernière question ?

Remarque : La probabilité comme une extension de la logique !

Assertion certaine (vraie ou fausse) = proba 1 ou 0.

Assertion incertaine (peut-être vraie ou fausse) = proba dans $]0,1[$.

Election

Une candidate Amélie Poulain veut savoir 7 jours avant le 1er tour d'une élection l'intention de vote pour elle.

Paramètre d'intérêt : p^A la proportion d'électeurs potentiels qui ont l'intention de voter pour elle (7 jours avant).
Echantillonnage : Quel est le procédé d'échantillonnage le plus équitable si l'on a aucune connaissance sur la population des électeurs.

Election

Une candidate Amélie Poulain veut savoir 7 jours avant le 1er tour d'une élection l'intention de vote pour elle.

Paramètre d'intérêt : p^A la proportion d'électeurs potentiels qui ont l'intention de voter pour elle (7 jours avant).
Echantillonnage : Quel est le procédé d'échantillonnage le plus équitable si l'on a aucune connaissance sur la population des électeurs.
Solution : Elle sait alors qu'il lui faudra demander de l'aide à un institut de sondage pour construire aléatoirement son échantillon de sorte que tous les électeurs ont les mêmes chances d'être choisi.

Election

Une candidate Amélie Poulain veut savoir 7 jours avant le 1er tour d'une élection l'intention de vote pour elle.

Paramètre d'intérêt : p^A la proportion d'électeurs potentiels qui ont l'intention de voter pour elle (7 jours avant).
Echantillonnage : Quel est le procédé d'échantillonnage le plus équitable si l'on a aucune connaissance sur la population des électeurs.
Solution : Elle sait alors qu'il lui faudra demander de l'aide à un institut de sondage pour construire aléatoirement son échantillon de sorte que tous les électeurs ont les mêmes chances d'être choisi.
Estimation : Comment obtiendra-t'elle l'estimation de p^A à partir de ce "futur" échantillon ?

Schéma de Formalisation

L'objectif est de formaliser un problème (ou, plus généralement, un phénomène) donné, de décrire sa nature aléatoire ou non et ainsi de mieux appréhender comment mesurer les chances de réalisation de certaines prédictions.

Schéma de Formalisation pour Evénement (SFE)

Identifier et décrire (si nécessaire) littéralement ou mathématiquement :

- l'expérience $\mathcal{E}$
- la (les) variable(s) (a priori) aléatoire(s) d'intérêt Y (, ...)
- l'événement d'intérêt exprimé en fonction de la (des) variable(s) Y (, ...)
- les mesures de chances (i.e. probabilités) de réalisations de l'événement d'intérêt

Schéma de Formalisation

L'objectif est de formaliser un problème (ou, plus généralement, un phénomène) donné, de décrire sa nature aléatoire ou non et ainsi de mieux appréhender comment mesurer les chances de réalisation de certaines prédictions.

Schéma de Formalisation pour Variable (SFV)

Identifier et décrire (si nécessaire) littéralement ou mathématiquement :

- l'expérience $\mathcal{E}$
- la variable (a priori) aléatoire d'intérêt Y
- la loi de probabilité de Y permettant d'évaluer toutes les mesures de chances (i.e. probabilités) de réalisations de tous les événements relatifs à Y.

Schéma de Formalisation

L'objectif est de formaliser un problème (ou, plus généralement, un phénomène) donné, de décrire sa nature aléatoire ou non et ainsi de mieux appréhender comment mesurer les chances de réalisation de certaines prédictions.

Schéma de Formalisation SFE et SFV

Expérience : Identifier et décrire (si nécessaire) l'expérience $\mathcal{E}$ (aléatoire ou non) correspondant au problème (ou phénomène) d'intérêt.

Variable d'intérêt : Variable (aléatoire ou non) mesurant une caractéristique (ou plusieurs dans le cas de vecteur) relative(s) à l'expérience $\mathcal{E}$.

Convention notation : Une variable aléatoire (ou supposée aléatoire) est notée en **majuscule** et une variable déterministe (i.e. dont on sait qu'elle est non aléatoire) est notée en **minuscule**.

Schéma de Formalisation

L'objectif est de formaliser un problème (ou, plus généralement, un phénomène) donné, de décrire sa nature aléatoire ou non et ainsi de mieux appréhender comment mesurer les chances de réalisation de certaines prédictions.

Schéma de Formalisation SFE et SFV

Expérience : Identifier et décrire (si nécessaire) l'expérience $\mathcal{E}$ (aléatoire ou non) correspondant au problème (ou phénomène) d'intérêt.
Variable d'intérêt : Variable (aléatoire ou non) mesurant une caractéristique (ou plusieurs dans le cas de vecteur) relative(s) à l'expérience $\mathcal{E}$.
Convention notation : Une variable aléatoire (ou supposée aléatoire) est notée en **majuscule** et une variable déterministe (i.e. dont on sait qu'elle est non aléatoire) est notée en **minuscule**.

Anniversaires (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple des anniversaires.

Anniversaires (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple des anniversaires.

Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience $\mathcal{E}$:**
- **Variable d'intérêt :**

Anniversaires (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple des anniversaires.

Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience $\mathcal{E}$:** Elle consiste à choisir n personnes au hasard dans la population ou, de part la simplication, choisir n jours au hasard parmi l'ensemble des 365 jours.
- **Variable d'intérêt :** $Y=$Maximum des effectifs de la répartition des dates d'anniversaire pour les n personnes.

Anniversaires (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple des anniversaires.

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :**
- **Probabilité de réalisation :**

Anniversaires (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple des anniversaires.

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :** "$Y \geq 2$" i.e. au moins 2 personnes sont nés le même jour.
- **Probabilité de réalisation :** $\mathbb{P}(Y \geq 2)$ i.e. probabilité qu'au moins 2 individus parmi les n soient nés le même jour.

Jeu des Gobelets (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour le jeu des gobelets.

Jeu des Gobelets (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour le jeu des gobelets.
Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience $\mathcal{E}$:**
- **Variable d'intérêt :**

Jeu des Gobelets (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour le jeu des gobelets.
Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience $\mathcal{E}$:** Elle consiste à choisir un gobelet parmi les deux proposés à la fin du jeu.
- **Variable d'intérêt :** $Y=1$ si le gobelet choisi est le même que celui choisi par l'organisateur et 0 sinon.
  2ème option : Y^J et Y^O sont les numéros des gobelets choisis par le Joueur et l'Organisateur.

Jeu des Gobelets (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour le jeu des gobelets.

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :**
- **Probabilité de réalisation :**

Jeu des Gobelets (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour le jeu des gobelets.

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :** "$Y = 1$" équivalent à "$Y^J = Y^O$" (2ème option).
- **Probabilité de réalisation :** $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y^J = Y^O)$.

Dé avant lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé avant le lancer.

Dé avant lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé avant le lancer.

Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience $\mathcal{E}$:**
- **Variable d'intérêt :**

Dé avant lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé avant le lancer.

Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience** $\mathcal{E}$ **:** Elle consiste à lancer le dé et observer le numéro de la face supérieure.
- **Variable d'intérêt :** Y=numéro de la face supérieure du dé.

Dé avant lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé avant le lancer.

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :**
- **Probabilité de réalisation :**

Dé avant lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé avant le lancer.

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :** $Y = 2$ (resp. $Y \leq 2$).
- **Probabilité de réalisation :** $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{6}$ (resp. $\mathbb{P}(Y \leq 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$).

Dé après lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé après le lancer (objectif pédagogique).

Dé après lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé après le lancer (objectif pédagogique).

Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience $\mathcal{E}$:**
- **Variable d'intérêt :**

Dé après lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé après le lancer (objectif pédagogique).

Expérience et Variable d'intérêt ?

- **Expérience** $\mathcal{E}$ **:** Elle consiste une fois le dé lancé à observer le numéro de la face supérieure.
- **Variable d'intérêt :** y=numéro de la face supérieure du dé qui est en fait la réalisation de Y.

Dé après lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé après le lancer (objectif pédagogique).

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :**
- **Probabilité de réalisation :**

Dé après lancer (SFE)

Décrivons le Schéma de Formalisation pour l'exemple du dé après le lancer (objectif pédagogique).

Evénement d'intérêt et ses chances de réalisations ?

- **Evénement d'intérêt :** $y = 2$ (resp. $y \leq 2$).
- **Probabilité de réalisation :** $\mathbb{P}(y = 2) =$1 si $y = 2$ est vrai et 0 sinon (resp. $\mathbb{P}(y \leq 2) =$1 si $y \leq 2$ est vrai et 0 sinon).

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Expérimentateur :
il propose une interprétation des probabilités en se basant sur son aptitude à réaliser l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Mathématicien :
il propose une évaluation des probabilités via le développement et l'application de techniques mathématiques.

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Expérimentateur :
il propose une interprétation des probabilités en se basant sur son aptitude à réaliser l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Mathématicien :
il propose une évaluation des probabilités via le développement et l'application de techniques mathématiques.

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Probabilité de l'événement $Y \in E$ via l'A.E.P. :

$$\overline{\left(y_{[\cdot]} \in E\right)}_m \quad := \quad \text{Proportion des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \in E$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a,b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Probabilité de l'événement $Y \in E$ via l'A.E.P. :

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(y_{[\cdot]} \in E\right)}_m &:= \text{Proportion des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \in E \\
&\simeq \overline{\left(y_{[\cdot]} \in E\right)}_\infty
\end{aligned}
$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a,b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Probabilité de l'événement $Y \in E$ via l'A.E.P. :

$$\begin{aligned} \overline{\left(y_{[\cdot]} \in E\right)}_m &:= \text{Proportion des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \in E \\ &\simeq \overline{\left(y_{[\cdot]} \in E\right)}_\infty \\ &= P(Y \in E) \text{ (lien avec A.M.P.)} \end{aligned}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Moyenne de Y via l'A.E.P. :

$$\overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_m \quad := \quad \text{Moyenne des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Moyenne de Y via l'A.E.P. :

$$\begin{aligned} \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_m &:= \text{Moyenne des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \\ &\simeq \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_\infty \end{aligned}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =] - \infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Moyenne de Y via l'A.E.P. :

$$\begin{aligned} \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_m &:= \text{Moyenne des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \\ &\simeq \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_\infty \\ &= \mathbf{E}(Y) \text{ (lien avec A.M.P.)} \end{aligned}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a,b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Ecart-type de Y via l'A.E.P. :

$$\overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_m \quad := \quad \text{Ecart-type des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Ecart-type de Y via l'A.E.P. :

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_m &:= \text{Ecart-type des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \\ &\simeq \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_\infty \end{aligned}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a,b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Ecart-type de Y via l'A.E.P. :

$$
\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_m &:= \text{Ecart-type des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \\
&\simeq \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_\infty \\
&= \sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)} \text{ (lien avec A.M.P.)}
\end{aligned}
$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a, b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Quantile de Y via l'A.E.P. :

$$q_{95\%}\left(\left(y_{[\cdot]}\right)_m\right) := \text{Quantile d'ordre 95\% des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a,b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Quantile de Y via l'A.E.P. :

$$\begin{aligned} q_{95\%}\left(\left(y_{[\cdot]}\right)_m\right) &:= \text{Quantile d'ordre 95\% des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \\ &\simeq q_{95\%}\left(\left(y_{[\cdot]}\right)_\infty\right) \end{aligned}$$

Loi de probabilité (SFV)

Le comportement aléatoire d'une variable Y est caractérisé par la connaissance de toutes les probabilités $P(Y \in E)$ (avec E sous-ensemble quelconque, $E =]a,b]$ ou $E =]-\infty, b]$) mesurant les chances de réalisation des événements de la forme "$Y \in E$".

Approche Expérimentale des Probabilités : Répétitions de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un grand nombre de fois m (éventuellement infini) et obtention des réalisations de la v.a. Y : $\boxed{y_{[1]}, y_{[2]}, \ldots, y_{[m]}, \ldots}$

Quantile de Y via l'A.E.P. :

$$\begin{aligned} q_{95\%}\left(\left(y_{[\cdot]}\right)_m\right) &:= \text{Quantile d'ordre 95\% des } y_{[1]}, \ldots, y_{[m]} \\ &\simeq q_{95\%}\left(\left(y_{[\cdot]}\right)_\infty\right) \\ &= q_{95\%}(Y) \text{ (lien avec A.M.P.)} \end{aligned}$$

A.E.P. pour le lancer de dé

Y =Numéro face d'un dé.
$P(Y \leq 2) =$???
$\mathbf{E}(Y) =$???
$\sigma(Y) =$???

$m = 250$ **réalisations** :

3, 1, 4, 5, 1, 2, 6, 5, 3, 5, 6, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4, 5, 1, 4, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 1, 3, 6, 6, 6,
4, 2, 6, 6, 5, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 5, 3, 6, 5, 3, 3, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 4, 1, 4, 5, 5, 3,
5, 5, 1, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 2, 1, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 3, 6, 2, 4, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 2,
1, 6, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 4, 6, 3, 4, 2, 2, 2, 6, 1, 4, 1, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 3, 3, 4, 3, 6, 6, 3, 1, 3,
4, 3, 3, 1, 5, 3, 6, 5, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 1, 5, 6, 6, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 2, 3, 3, 5, 5, 1, 2, 3, 3,
1, 1, 2, 6, 6, 4, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 6, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 2, 6, 2, 5, 4, 4, 3, 6, 2, 3, 2, 3, 2,
3, 5, 6, 5, 5, 5, 1, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 6, 3, 1, 1, 5, 3, 1, 6, 2, 5, 1,
5, 2, 3, 1, 6, 3, 5, 1, 1, 3, 2, 5

A.E.P. pour le lancer de dé

$$P(Y \leq 2) \simeq \overline{\left(y_{[\cdot]} \leq 2\right)}_{250} = \frac{89}{250}$$
$$\mathbf{E}(Y) \simeq \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{250} = 3.384$$
$$\sigma(Y) \simeq \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{250} = 1.681828$$

$m = 250$ **réalisations** :

3, 1, 4, 5, 1, 2, 6, 5, 3, 5, 6, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4, 5, 1, 4, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 1, 3, 6, 6, 6,
4, 2, 6, 6, 5, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 5, 3, 6, 5, 3, 3, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 4, 1, 4, 5, 5, 3,
5, 5, 1, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 2, 1, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 3, 6, 2, 4, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 2,
1, 6, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 4, 6, 3, 4, 2, 2, 2, 6, 1, 4, 1, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 3, 3, 4, 3, 6, 6, 3, 1, 3,
4, 3, 3, 1, 5, 3, 6, 5, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 1, 5, 6, 6, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 2, 3, 3, 5, 5, 1, 2, 3, 3,
1, 1, 2, 6, 6, 4, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 6, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 2, 6, 2, 5, 4, 4, 3, 6, 2, 3, 2, 3, 2,
3, 5, 6, 5, 5, 5, 1, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 6, 3, 1, 1, 5, 3, 1, 6, 2, 5, 1,
5, 2, 3, 1, 6, 3, 5, 1, 1, 3, 2, 5

A.E.P. pour le lancer de dé

$$P(Y \leq 2) \simeq \overline{\left(y_{[\cdot]} \leq 2\right)}_{10000} = \frac{3313}{10000} \simeq 0.3313$$
$$\mathbf{E}(Y) \simeq \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{10000} = 3.512$$
$$\sigma(Y) \simeq \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{10000} = 1.698898$$

$m = 10000$ **réalisations** :

3, 1, 4, 5, 1, 2, 6, 5, 3, 5, 6, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4, 5, 1, 4, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 1, 3, 6, 6, 6,
4, 2, 6, 6, 5, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 5, 3, 6, 5, 3, 3, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 4, 1, 4, 5, 5, 3,
5, 5, 1, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 2, 1, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 3, 6, 2, 4, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 2,
1, 6, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 4, 6, 3, 4, 2, 2, 2, 6, 1, 4, 1, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 3, 3, 4, 3, 6, 6, 3, 1, 3,
4, 3, 3, 1, 5, 3, 6, 5, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 1, 5, 6, 6, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 2, 3, 3, 5, 5, 1, 2, 3, 3,
1, 1, 2, 6, 6, 4, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 6, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 2, 6, 2, 5, 4, 4, 3, 6, 2, 3, 2, 3, 2,
3, 5, 6, 5, 5, 5, 1, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 6, 3, 1, 1, 5, 3, 1, 6, 2, 5, 1,
5, 2, 3, 1, 6, 3, 5, 1, 1, 3, 2, 5 , . . . , 4, 3, 3, 2, 1, 5, 3, 4, 2, 6, 2, 3, 2, 4, 1, 6, 2, 3, 3,
3, 1, 5, 5, 3, 5, 1, 5, 6, 4, 6, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 2, 6, 5, 2, 5, 1, 1

A.E.P. pour le lancer de dé

$$P(Y \leq 2) = \overline{\left(y_{[\cdot]} \leq 2\right)}_{\infty} = \frac{2}{6} \simeq \overline{\left(y_{[\cdot]} \leq 2\right)}_{10000} = \frac{3313}{10000} \simeq 0.3313$$

$$\mathbf{E}(Y) = \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{\infty} = 3.5 \simeq \overline{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{10000} = 3.512$$

$$\sigma(Y) = \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{\infty} = \sqrt{\frac{105}{36}} = 1.707825 \simeq \overleftrightarrow{\left(y_{[\cdot]}\right)}_{10000} = 1.698898$$

$m = \infty$ **réalisations** :

3, 1, 4, 5, 1, 2, 6, 5, 3, 5, 6, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4, 5, 1, 4, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 1, 3, 6, 6, 6,
4, 2, 6, 6, 5, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 5, 3, 6, 5, 3, 3, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 4, 1, 4, 5, 5, 3,
5, 5, 1, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 2, 1, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 3, 6, 2, 4, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 2,
1, 6, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 4, 6, 3, 4, 2, 2, 2, 6, 1, 4, 1, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 3, 3, 4, 3, 6, 6, 3, 1, 3,
4, 3, 3, 1, 5, 3, 6, 5, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 1, 5, 6, 6, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 2, 3, 3, 5, 5, 1, 2, 3, 3,
1, 1, 2, 6, 6, 4, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 6, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 2, 6, 2, 5, 4, 4, 3, 6, 2, 3, 2, 3, 2,
3, 5, 6, 5, 5, 5, 1, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 6, 3, 1, 1, 5, 3, 1, 6, 2, 5, 1,
5, 2, 3, 1, 6, 3, 5, 1, 1, 3, 2, 5 , . . . , 4, 3, 3, 2, 1, 5, 3, 4, 2, 6, 2, 3, 2, 4, 1, 6, 2, 3, 3,
3, 1, 5, 5, 3, 5, 1, 5, 6, 4, 6, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 2, 6, 5, 2, 5, 1, 1 , . . .

A.E.P. pour Election

$\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})$ =estimation de p^A (fixé artificiellement à 15%).

$P(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > 16\%) = ???$

$q_{95\%}\left(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})\right) = ???$

$m = 100$ **réalisations** :

0.147, 0.148, 0.158, 0.149, 0.159, 0.146, 0.155, 0.151, 0.147, 0.155, 0.147, 0.145, 0.146, 0.143, 0.163, 0.16, 0.155, 0.132, 0.15, 0.157, 0.156, 0.141, 0.163, 0.159, 0.13, 0.156, 0.139, 0.159, 0.143, 0.156, 0.157, 0.154, 0.145, 0.144, 0.14, 0.167, 0.14, 0.149, 0.154, 0.146, 0.155, 0.152, 0.153, 0.156, 0.154, 0.142, 0.15, 0.152, 0.145, 0.152, 0.127, 0.126, 0.143, 0.152, 0.159, 0.139, 0.149, 0.144, 0.149, 0.14, 0.154, 0.167, 0.154, 0.144, 0.144, 0.154, 0.146, 0.149, 0.166, 0.158, 0.14, 0.157, 0.141, 0.148, 0.16, 0.164, 0.155, 0.129, 0.151, 0.11, 0.159, 0.158, 0.172, 0.143, 0.138, 0.176, 0.162, 0.157, 0.149, 0.14, 0.145, 0.146, 0.16, 0.165, 0.157, 0.14, 0.143, 0.168, 0.15, 0.154

A.E.P. pour Election

$$P(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > 16\%) \simeq \overline{\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right) > 16\%\right)}_{100} = \frac{11}{100}$$

$$q_{95\%}\left(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})\right) \simeq q_{95\%}\left(\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right)\right)_{100}\right) = 0.16605$$

$m = 100$ **réalisations** :

0.147, 0.148, 0.158, 0.149, 0.159, 0.146, 0.155, 0.151, 0.147, 0.155, 0.147, 0.145, 0.146, 0.143, 0.163, 0.16, 0.155, 0.132, 0.15, 0.157, 0.156, 0.141, 0.163, 0.159, 0.13, 0.156, 0.139, 0.159, 0.143, 0.156, 0.157, 0.154, 0.145, 0.144, 0.14, 0.167, 0.14, 0.149, 0.154, 0.146, 0.155, 0.152, 0.153, 0.156, 0.154, 0.142, 0.15, 0.152, 0.145, 0.152, 0.127, 0.126, 0.143, 0.152, 0.159, 0.139, 0.149, 0.144, 0.149, 0.14, 0.154, 0.167, 0.154, 0.144, 0.144, 0.154, 0.146, 0.149, 0.166, 0.158, 0.14, 0.157, 0.141, 0.148, 0.16, 0.164, 0.155, 0.129, 0.151, 0.11, 0.159, 0.158, 0.172, 0.143, 0.138, 0.176, 0.162, 0.157, 0.149, 0.14, 0.145, 0.146, 0.16, 0.165, 0.157, 0.14, 0.143, 0.168, 0.15, 0.154

A.E.P. pour Election

$$P(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > 16\%) \simeq \overline{\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right) > 16\%\right)}_{10000} = \frac{1751}{10000} \simeq 0.1751$$

$$q_{95\%}\left(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})\right) \simeq q_{95\%}\left(\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right)\right)_{10000}\right) = 0.169$$

$m = 10000$ **réalisations** :

0.147, 0.148, 0.158, 0.149, 0.159, 0.146, 0.155, 0.151, 0.147, 0.155, 0.147, 0.145, 0.146, 0.143, 0.163, 0.16, 0.155, 0.132, 0.15, 0.157, 0.156, 0.141, 0.163, 0.159, 0.13, 0.156, 0.139, 0.159, 0.143, 0.156, 0.157, 0.154, 0.145, 0.144, 0.14, 0.167, 0.14, 0.149, 0.154, 0.146, 0.155, 0.152, 0.153, 0.156, 0.154, 0.142, 0.15, 0.152, 0.145, 0.152, 0.127, 0.126, 0.143, 0.152, 0.159, 0.139, 0.149, 0.144, 0.149, 0.14, 0.154, 0.167, 0.154, 0.144, 0.144, 0.154, 0.146, 0.149, 0.166, 0.158, 0.14, 0.157, 0.141, 0.148, 0.16, 0.164, 0.155, 0.129, 0.151, 0.11, 0.159, 0.158, 0.172, 0.143, 0.138, 0.176, 0.162, 0.157, 0.149, 0.14, 0.145, 0.146, 0.16, 0.165, 0.157, 0.14, 0.143, 0.168, 0.15, 0.154 , . . . , 0.134, 0.149, 0.162, 0.14, 0.137, 0.137, 0.163, 0.148, 0.149, 0.133, 0.187, 0.168, 0.169, 0.143, 0.151

A.E.P. pour Election

$$P\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) > 16\%\right) = \overline{\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right) > 16\%\right)}_{\infty} = 17.5823\%$$

$$q_{95\%}\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right)\right) = q_{95\%}\left(\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right)\right)_{\infty}\right) = \frac{169}{1000} = 16.9\%$$

$m = \infty$ **réalisations** :

0.147, 0.148, 0.158, 0.149, 0.159, 0.146, 0.155, 0.151, 0.147, 0.155, 0.147, 0.145, 0.146, 0.143, 0.163, 0.16, 0.155, 0.132, 0.15, 0.157, 0.156, 0.141, 0.163, 0.159, 0.13, 0.156, 0.139, 0.159, 0.143, 0.156, 0.157, 0.154, 0.145, 0.144, 0.14, 0.167, 0.14, 0.149, 0.154, 0.146, 0.155, 0.152, 0.153, 0.156, 0.154, 0.142, 0.15, 0.152, 0.145, 0.152, 0.127, 0.126, 0.143, 0.152, 0.159, 0.139, 0.149, 0.144, 0.149, 0.14, 0.154, 0.167, 0.154, 0.144, 0.144, 0.154, 0.146, 0.149, 0.166, 0.158, 0.14, 0.157, 0.141, 0.148, 0.16, 0.164, 0.155, 0.129, 0.151, 0.11, 0.159, 0.158, 0.172, 0.143, 0.138, 0.176, 0.162, 0.157, 0.149, 0.14, 0.145, 0.146, 0.16, 0.165, 0.157, 0.14, 0.143, 0.168, 0.15, 0.154 , . . . , 0.134, 0.149, 0.162, 0.14, 0.137, 0.137, 0.163, 0.148, 0.149, 0.133, 0.187, 0.168, 0.169, 0.143, 0.151 , . . .