

Cours de Statistiques Inférentielles

CQLS : cqls@upmf-grenoble.fr

14 mars 2014

Plan

1 Test d'hypothèses

Décision pour le Produit •

Objectif : Nous rappelons que l'industriel désire établir une règle de décision à partir d'une unique estimation obtenue le **Jour J** quant au lancement du produit •.

CQLS

Décision pour le Produit •

Question : Quelle est la forme de la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt (c-à-d $\mu^\bullet > 0.15$) ?

CQLS

Décision pour le Produit •

Question : Quelle est la forme de la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt (c-à-d $\mu^\bullet > 0.15$) ?

Réponse : Accepter l'assertion d'intérêt si $\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y^\bullet}) > \mu_{lim}$.

Décision pour le Produit A

Question : Pour différentes urnes U_p^A , l'expérimentateur a évalué $\overline{p^A(y_{\cdot}^A)} > p_{lim}$ ₁₀₀₀₀. Comment ces valeurs ont-elles été obtenues ?

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Pour différentes urnes U_p^A , l'expérimentateur a évalué

$\left(\widehat{p^A} \left(y_{[.]}^A\right) > p_{lim}\right)_{10000}$. Comment ces valeurs ont-elles été obtenues ?

Réponse : proportions parmi $m = 10000$ (et parmi $m = \infty$ avec un peu de patience) estimations $\widehat{p^A} \left(y_{[.]}^A\right)$ supérieures à p_{lim} .

p	p_{lim}		
	15%	17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Comment la connaissance du **mathématicien**
 $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(p^A, \sqrt{\frac{p^A(1-p^A)}{n}})$ a été utilisée ?

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Comment la connaissance du **mathématicien**
 $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(p^A, \sqrt{\frac{p^A(1-p^A)}{n}})$ a été utilisée ?

Réponse :

$$P_{p^A=p}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim}) \stackrel{R}{=} 1 - \text{pnorm}(p_{lim}, p, \text{sqrt}(p * (1 - p)/n)).$$

p	p_{lim}		
	15%	17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Avec le point de vue de l'industriel, quelles valeurs de $P_{p^A=p}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim}) \simeq \left(\widehat{p^A}(\mathbf{y_{[.]^A}}) > p_{lim} \right)_{10000}$ conduisent à des risques d'erreur de décision (nature à préciser) trop grands ?

p	p_{lim}		
	15%	17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Réponse : pour $p = 10\%$, 14% et 15% , on a un **Risque 1ère espèce** (devenir pauvre) **raisonnable** ($< 5\%$) et **plutôt grand** ($\geq 5\%$)

p	p_{lim}		
	15%	17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Réponse : pour $p = 10\%$, 14% et 15% , on a un **Risque 1ère espèce** (devenir pauvre) **raisonnable** ($< 5\%$) et **plutôt grand** ($\geq 5\%$)
 et pour $p = 15.1\%$, 16% et 20% , **Risque 2ème espèce** (ne pas devenir riche) **raisonnable** ($< 5\%$) et **plutôt grand** ($\geq 5\%$)

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Peut-on choisir p_{lim} de sorte que tous les risques de 1ère et 2ème espèces soient raisonnablement petits ?

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Peut-on choisir p_{lim} de sorte que tous les risques de 1ère et 2ème espèces soient raisonnablement petits ?

Réponse : Non, puisque somme des risques de 1ère et 2ème espèces peut être aussi proche de 1 (ex : $p = 15\%$ et $p = 15.1\%$) !

p	p_{lim}		
	15%	17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Quel risque faut-il alors essayer de contrôler lors du choix de p_{lim} ?

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Quel risque faut-il alors essayer de contrôler lors du choix de p_{lim} ?

Réponse : le plus grave, c-à-d le risque de 1ère espèce (ici devenir pauvre), uniquement possible pour $p^A = p \leq 15\%$.

p	p_{lim}		
	15%	17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel $p \leq 15\%$ (ici $p = 10\%$, 14% et 15%), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel $p \leq 15\%$ (ici $p = 10\%$, 14% et 15%), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

Réponse : $p^A = p = 15\%$. Les risques avec $p < 15\%$ sont plus petits !

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel $p \leq 15\%$ (ici $p = 10\%$, 14% et 15%), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

Réponse : $p^A = 15\%$ sera la pire des (mauvaises) situations !

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Dans la pire des situations, comment choisir $p_{lim,\alpha}$ pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à $\alpha = 5\%$?

p	15%	p_{lim} 17%	20%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.32% \simeq 0.31%	0% \simeq 0%
15%	48.06% \simeq 50%	3.68% \simeq 3.83%	0% \simeq 0%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	4.3% \simeq 4.67%	0% \simeq 0%
16%	78.95% \simeq 80.58%	17.88% \simeq 19.42%	0.06% \simeq 0.03%
20%	99.99% \simeq 100%	99.02% \simeq 99.11%	48.23% \simeq 50%

Décision pour le Produit A

Question : Dans la pire des situations, comment choisir $p_{lim,\alpha}$ pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à $\alpha = 5\%$?

Réponse : trouver $p_{lim,\alpha}$ tq $P_{p^A=15\%}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim,\alpha}) = \alpha = 5\%$

p	p_{lim}		
	15%	16.8573%	17%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.52% \simeq 0.46%	0.32% \simeq 0.31%
15%	48.06% \simeq 50%	5.17% \simeq 5%	3.68% \simeq 3.83%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	6.18% \simeq 6.03%	4.3% \simeq 4.67%
16%	78.95% \simeq 80.58%	22.89% \simeq 22.98%	17.88% \simeq 19.42%
20%	99.99% \simeq 100%	99.35% \simeq 99.35%	99.02% \simeq 99.11%

Décision pour le Produit A

Question : Dans la pire des situations, comment choisir $p_{lim,\alpha}$ pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à $\alpha = 5\%$?

Réponse : trouver $p_{lim,\alpha}$ tq $P_{p^A=15\%}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim,\alpha}) = \alpha = 5\%$

c-à-d $p_{lim,5\%} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(.95, .15, \text{sqrt}(.15 * .85/1000)) = 16.8573\%$.

p	p_{lim}		
	15%	16.8573%	17%
10%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
14%	16.57% \simeq 18.11%	0.52% \simeq 0.46%	0.32% \simeq 0.31%
15%	48.06% \simeq 50%	5.17% \simeq 5%	3.68% \simeq 3.83%
15.1%	51.52% \simeq 53.52%	6.18% \simeq 6.03%	4.3% \simeq 4.67%
16%	78.95% \simeq 80.58%	22.89% \simeq 22.98%	17.88% \simeq 19.42%
20%	99.99% \simeq 100%	99.35% \simeq 99.35%	99.02% \simeq 99.11%

Décision pour le Produit A

Question Comment s'écrit l'assertion d'intérêt H_1 en fonction du paramètre d'intérêt ?

CQLS

Décision pour le Produit A

Question Comment s'écrit l'assertion d'intérêt H_1 en fonction du paramètre d'intérêt ?

Hypothèses de test :

$$H_1 : p^A > 15\%$$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test :

$$H_1 : p^A > 15\%$$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Décision pour le Produit A

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{p^A}(\mathbf{Y}^A) \underset{\sim}{\overset{approx.}{\rightsquigarrow}} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Décision pour le Produit A

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Règle de Décision :

Accepter H_1 si $\widehat{p^A}(\mathbf{y^A}) > p_{lim,\alpha}$

Décision pour le Produit A

Question : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur \mathbf{y}^A (y^A en \mathbb{R}) et pour lequel $\text{mean}(y^A) = 0.171$?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{p}^A(\mathbf{Y}^A) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Règle de Décision :

Accepter H_1 si $\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) > p_{lim,\alpha}$

Décision pour le Produit A

Question : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur \mathbf{y}^A (y^A en \mathbb{R}) et pour lequel $\text{mean}(y^A) = 0.171$?

Hypothèses de test : $H_0 : p^A = 15\%$ vs $H_1 : p^A > 15\%$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{p}^A(\mathbf{Y}^A) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Règle de Décision :

Accepter H_1 si $\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) > p_{\text{lim},\alpha}$

Conclusion : Au vu des données, puisque

$$\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) = 17.1\% > p_{\text{lim},5\%} \simeq 16.8573\%$$

on peut plutôt penser que le produit A est rentable.

(avec $p_{\text{lim},5\%} \stackrel{\text{R}}{=} \text{qnorm}(.95, .15, \text{sqrt}(.15 * .85/1000))$)

Décision pour le Produit B

Même démarche (accélérée) : Les valeurs des cases ci-dessous cor-

respondent à : $P_{\mu^B=\mu}(\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) > \mu_{lim}) \simeq \left(\widehat{\mu^B}(\mathbf{y}_{[.]^B}^B) > \mu_{lim} \right)_{10000}$
obtenues grâce à la connaissance du mathématicien suivante

$$\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\mu^B, \sigma_{\widehat{\mu^B}}) \text{ où } \sigma_{\widehat{\mu^B}} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$$

μ	μ_{lim}		
	0.15	0.17	0.20
0.1	0.01% \simeq 0.01%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
0.14	23.39% \simeq 24.38%	1.74% \simeq 1.86%	0.01% \simeq 0%
0.15	47.92% \simeq 50%	7.72% \simeq 8.6%	0.04% \simeq 0.03%
0.16	74.24% \simeq 74.07%	23.45% \simeq 25.93%	0.39% \simeq 0.49%
0.20	99.96% \simeq 99.98%	97.81% \simeq 98.3%	48.43% \simeq 50%

Décision pour le Produit B

Même démarche (accélérée) : On ne cherche donc qu'à contrôler le risque de 1ère espèce dans **la pire des situations**, i.e. $H_0 : \mu^B = 0.15$.

Question : Comment ajuster μ_{lim} de manière à ne produire qu'un risque maximal de 1ère espèce à $\alpha = 5\%$?

μ	0.15	μ_{lim} 0.17	0.20
0.1	0.01% \simeq 0.01%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
0.14	23.39% \simeq 24.38%	1.74% \simeq 1.86%	0.01% \simeq 0%
0.15	47.92% \simeq 50%	7.72% \simeq 8.6%	0.04% \simeq 0.03%
0.16	74.24% \simeq 74.07%	23.45% \simeq 25.93%	0.39% \simeq 0.49%
0.20	99.96% \simeq 99.98%	97.81% \simeq 98.3%	48.43% \simeq 50%

Décision pour le Produit B

Réponse :

$$\mu_{lim} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(.95, .15, \text{sqrt}(\text{varB015}/n)) \simeq 0.1740846$$

μ	0.15	μ_{lim} 0.1740846	0.2
0.1	0.01% \simeq 0.01%	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
0.14	23.39% \simeq 24.38%	0.94% \simeq 0.9%	0.01% \simeq 0%
0.15	47.92% \simeq 50%	4.63% \simeq 5%	0.04% \simeq 0.03%
0.16	74.24% \simeq 74.07%	16.04% \simeq 18.16%	0.39% \simeq 0.49%
0.20	99.96% \simeq 99.98%	95.74% \simeq 96.64%	48.43% \simeq 50%

Décision pour le Produit B

L'urne $U_{0.15}^A$ est une pire situation potentielle pour le produit B ainsi que beaucoup d'autres (à décrire). Par conséquent, $\mu_{lim,5\%}$ peut prendre les valeurs 0.1740846, 0.168573 ainsi que beaucoup d'autres (le plus grand à 3 boules max est 0.1840091) \Rightarrow **ECHEC !**

μ	$\mu_{lim,5\%}$	
	0.168573 ($U_{0.15}^A$)	0.1740846 ($U_{0.15}^B$)
0.1	0% \simeq 0%	0% \simeq 0%
0.14	0.52% \simeq 0.46%	0.94% \simeq 0.9%
0.15	5.17% \simeq 5%	4.63% \simeq 5%
0.16	22.89% \simeq 22.98%	16.04% \simeq 18.16%
0.1	99.35% \simeq 99.35%	95.74% \simeq 96.64%

Décision pour le Produit B

mais pas **MATH** ! : en effet, $\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0.15, \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}})$ sous \mathbf{H}_0 .

Heureusement, $\mathbf{H}_1 : \mu^B > 0.15 \Leftrightarrow \delta_{\mu^B, 0.15} := \frac{\mu^B - 0.15}{\sigma_B / \sqrt{n}} > 0$

estimé par $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_B}(\mathbf{Y}^B) / \sqrt{n}} \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$ sous \mathbf{H}_0 .

μ	δ_{lim}		
	0	1.6449	1.96
0.1	0.01% \simeq ???	0% \simeq ???	0% \simeq ???
0.14	100% \simeq ???	0% \simeq ???	0% \simeq ???
0.15	47.92% \simeq 50%	3.66% \simeq 5%	1.73% \simeq 2.5%
0.16	74.24% \simeq ???	53.52% \simeq ???	50.9% \simeq ???
0.20	99.96% \simeq ???	96.46% \simeq ???	92.45% \simeq ???

Décision pour le Produit B

mais pas MATH ! : La Règle de Décision peut donc se formuler :

Accepter H_1 si $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(y^B) > \delta_{lim, \alpha} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(1 - \alpha)$

de sorte que le risque maximal de 1ère espèce soit fixé à (urne $U_{0.15}^B$)

$$\alpha \simeq P_{\mu^B=0.15}(\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(Y^B) > \delta_{lim, \alpha}) = \left(\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(y_{[\cdot]}^B) > \delta_{lim, \alpha} \right)_{\infty}.$$

μ	δ_{lim}		
	0	1.6449	1.96
0.1	0.01% \simeq ???	0% \simeq ???	0% \simeq ???
0.14	100% \simeq ???	0% \simeq ???	0% \simeq ???
0.15	47.92% \simeq 50%	3.66% \simeq 5%	1.73% \simeq 2.5%
0.16	74.24% \simeq ???	53.52% \simeq ???	50.9% \simeq ???
0.20	99.96% \simeq ???	96.46% \simeq ???	92.45% \simeq ???

Décision pour le Produit B

mais pas MATH ! : De plus, le résultat :

$$\alpha \simeq P_{\mu^B=0.15}(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}(\mathbf{Y}^B) > \delta_{lim,\alpha}) = \overline{(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}(\mathbf{y}_{[\cdot]}^B) > \delta_{lim,\alpha})}_{\infty}$$

est valide pour tout type d'urne potentielle pour le produit B comme le montre les résultats ci-dessous pour les urnes $U_{0.15}^A$ et $U_{0.15}^B$.

μ	$\delta_{lim,5\%}$	
	1.644854 ($U_{0.15}^A$)	1.644854 ($U_{0.15}^B$)
0.1	0% \simeq ???	0% \simeq ???
0.14	0.39% \simeq ???	0% \simeq ???
0.15	4.39% \simeq 5%	3.66% \simeq 5%
0.16	20.15% \simeq ???	53.52% \simeq ???
0.1	99.2% \simeq ???	96.46% \simeq ???

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit l'assertion d'intérêt H_1 en fonction du paramètre d'intérêt et en fonction du paramètre d'écart standardisé ?

CQLS

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit l'assertion d'intérêt H_1 en fonction du paramètre d'intérêt et en fonction du paramètre d'écart standardisé ?

Réponse : $H_1 : \mu^B > 0.15 \Leftrightarrow \delta_{\mu^B, 0.15} := \frac{\mu^B - 0.15}{\sigma_{\mu^B}} > 0$

avec $\sigma_{\mu^B} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$.

Hypothèses de test :

$$H_1 : \mu^B > 0.15$$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test :

$$H_1 : \mu^B > 0.15$$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B)$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B)$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{\delta}_{\mu^B, 0.15}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu}^B(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma}_{\mu^B}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

Règle de Décision :

Accepter H_1 si $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) > \delta_{lim, \alpha}$

Décision pour le Produit B

Question : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur \mathbf{y}^B (y^B en \mathbb{R}) et pour lequel $\text{mean}(y^B) = 0.172$ et $\text{sd}(y^B) = 0.5610087$?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

Règle de Décision :

Accepter H_1 si $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) > \delta_{\text{lim}, \alpha}$

Décision pour le Produit B

Question : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur \mathbf{y}^B (y^B en \mathbb{R}) et pour lequel $\text{mean}(y^B) = 0.172$ et $\text{sd}(y^B) = 0.5610087$?

Hypothèses de test : $H_0 : \mu^B = 0.15$ vs $H_1 : \mu^B > 0.15$

Statistique de test sous H_0 :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

Règle de Décision :

Accepter H_1 si $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) > \delta_{\text{lim}, \alpha}$

Conclusion : Au vu des données, puisque

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) = 1.24009 \not> \delta_{\text{lim}, 5\%} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(.95) \simeq 1.644854$$

on NE peut PAS plutôt penser que le produit B est rentable.

(avec $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) \stackrel{R}{=} (\text{mean}(y^B) - 0.15) / \sqrt{\text{var}(y^B)/n}$)