

# *Cours de Statistiques Inférentielles*

CQLS : [cqls@upmf-grenoble.fr](mailto:cqls@upmf-grenoble.fr)

5 juillet 2014

# Plan

## 1 Test d'hypothèses

## Décision pour le Produit •

**Objectif** : Nous rappelons que l'industriel désire établir une règle de décision à partir d'une unique estimation obtenue le **Jour J** quant au lancement du produit •.

## Décision pour le Produit •

**Question** : Quelle est la forme de la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt (c-à-d  $\mu^\bullet > 0.15$ ) ?

CQLS

## Décision pour le Produit •

**Question** : Quelle est la forme de la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt (c-à-d  $\mu^\bullet > 0.15$ ) ?

**Réponse** : Accepter l'assertion d'intérêt si  $\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y}^\bullet) > \mu_{lim}$ .

## Décision pour le Produit A

**Question** : Pour différentes urnes  $U_p^A$ , l'expérimentateur a évalué  $\widehat{p^A}(y_{[\cdot]}^A) > p_{lim}$  <sub>10000</sub>. Comment ces valeurs ont-elles été obtenues ?

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Pour différentes urnes  $U_p^A$ , l'expérimentateur a évalué  $\widehat{p^A}(y_{[.]}^A) > p_{lim}$  <sub>10000</sub>. Comment ces valeurs ont-elles été obtenues ?

**Réponse** : proportions parmi  $m = 10000$  (et parmi  $m = \infty$  avec un peu de patience) estimations  $\widehat{p^A}(y_{[.]}^A)$  supérieures à  $p_{lim}$ .

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Comment la connaissance du **mathématicien**  
 $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \xrightarrow{\text{approx.}} \mathcal{N}(p^A, \sqrt{\frac{p^A(1-p^A)}{n}})$  a été utilisée ?

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%



## Décision pour le Produit A

**Question** : Comment la connaissance du **mathématicien**  
 $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(p^A, \sqrt{\frac{p^A(1-p^A)}{n}})$  a été utilisée ?

**Réponse** :

$$P_{p^A=p}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim}) \stackrel{R}{=} 1 - \text{pnorm}(p_{lim}, p, \text{sqrt}(p * (1 - p)/n)).$$

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Avec le point de vue de l'industriel, quelles valeurs de  $P_{p^A=p}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim}) \simeq \left( \widehat{p^A}(\mathbf{y_{[.]^A}}) > p_{lim} \right)_{10000}$  conduisent à des risques d'erreur de décision (nature à préciser) trop grands ?

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Réponse** : pour  $p = 10\%$ ,  $14\%$  et  $15\%$ , on a un **Risque 1ère espèce** (devenir pauvre) **raisonnable** ( $< 5\%$ ) et **plutôt grand** ( $\geq 5\%$ )

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Réponse** : pour  $p = 10\%$ ,  $14\%$  et  $15\%$ , on a un **Risque 1ère espèce** (devenir pauvre) **raisonnable** ( $< 5\%$ ) et **plutôt grand** ( $\geq 5\%$ )  
 et pour  $p = 15.1\%$ ,  $16\%$  et  $20\%$ , **Risque 2ème espèce** (ne pas devenir riche) **raisonnable** ( $< 5\%$ ) et **plutôt grand** ( $\geq 5\%$ )

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Peut-on choisir  $p_{lim}$  de sorte que tous les risques de 1ère et 2ème espèces soient raisonnablement petits ?

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Peut-on choisir  $p_{lim}$  de sorte que tous les risques de 1ère et 2ème espèces soient raisonnablement petits ?

**Réponse** : Non, puisque somme des risques de 1ère et 2ème espèces peut être aussi proche de 1 (ex :  $p = 15\%$  et  $p = 15.1\%$ ) !

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Quel risque faut-il alors essayer de contrôler lors du choix de  $p_{lim}$  ?

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Quel risque faut-il alors essayer de contrôler lors du choix de  $p_{lim}$  ?

**Réponse** : le plus grave, c-à-d le risque de 1ère espèce (ici devenir pauvre), uniquement possible pour  $p^A = p \leq 15\%$ .

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%



## Décision pour le Produit A

**Question** : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel  $p \leq 15\%$  (ici  $p = 10\%$ ,  $14\%$  et  $15\%$ ), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel  $p \leq 15\%$  (ici  $p = 10\%$ ,  $14\%$  et  $15\%$ ), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

**Réponse** :  $p^A = p = 15\%$ . Les risques avec  $p < 15\%$  sont plus petits !

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel  $p \leq 15\%$  (ici  $p = 10\%$ ,  $14\%$  et  $15\%$ ), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

**Réponse** :  $p^A = 15\%$  sera la pire des (mauvaises) situations !

$p$	15%	$p_{lim}$ 17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question** : Dans la pire des situations, comment choisir  $p_{lim,\alpha}$  pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à  $\alpha = 5\%$  ?

$p$	$p_{lim}$		
	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit A

**Question :** Dans la pire des situations, comment choisir  $p_{lim,\alpha}$  pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à  $\alpha = 5\%$  ?

**Réponse :** trouver  $p_{lim,\alpha}$  tq  $P_{p^A=15\%}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim,\alpha}) = \alpha = 5\%$

$p$	$p_{lim}$		
	15%	16.8573%	17%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.52% $\simeq$ 0.46%	0.32% $\simeq$ 0.31%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	5.17% $\simeq$ 5%	3.68% $\simeq$ 3.83%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	6.18% $\simeq$ 6.03%	4.3% $\simeq$ 4.67%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	22.89% $\simeq$ 22.98%	17.88% $\simeq$ 19.42%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.35% $\simeq$ 99.35%	99.02% $\simeq$ 99.11%

## Décision pour le Produit A

**Question :** Dans la pire des situations, comment choisir  $p_{lim,\alpha}$  pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à  $\alpha = 5\%$  ?

**Réponse :** trouver  $p_{lim,\alpha}$  tq  $P_{p^A=15\%}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim,\alpha}) = \alpha = 5\%$

c-à-d  $p_{lim,5\%} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(.95, .15, \text{sqrt}(.15 * .85/1000)) = 16.8573\%$ .

$p$	$p_{lim}$		
	15%	16.8573%	17%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.52% $\simeq$ 0.46%	0.32% $\simeq$ 0.31%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	5.17% $\simeq$ 5%	3.68% $\simeq$ 3.83%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	6.18% $\simeq$ 6.03%	4.3% $\simeq$ 4.67%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	22.89% $\simeq$ 22.98%	17.88% $\simeq$ 19.42%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.35% $\simeq$ 99.35%	99.02% $\simeq$ 99.11%

## Décision pour le Produit A

**Question** Comment s'écrit l'assertion d'intérêt  $H_1$  en fonction du paramètre d'intérêt ?

CQLS

## Décision pour le Produit A

**Question** Comment s'écrit l'assertion d'intérêt  $H_1$  en fonction du paramètre d'intérêt ?

**Hypothèses de test :**

$$H_1 : p^A > 15\%$$



## Décision pour le Produit A

**Question** : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test :**

$$H_1 : p^A > 15\%$$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de  $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})$  dans la pire des situations ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de  $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A})$  dans la pire des situations ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{p^A}(\mathbf{Y}^A) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{p}^A(\mathbf{Y}^A) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

**Règle de Décision** :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) > p_{lim,\alpha}$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur  $\mathbf{y}^A$  ( $y^A$  en R) et pour lequel  $\text{mean}(y^A) = 0.171$  ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{p}^A(\mathbf{Y}^A) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

**Règle de Décision** :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) > p_{lim,\alpha}$

## Décision pour le Produit A

**Question** : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur  $\mathbf{y}^A$  ( $y^A$  en R) et pour lequel  $\text{mean}(y^A) = 0.171$  ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : p^A = 15\%$  vs  $H_1 : p^A > 15\%$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{p}^A(\mathbf{Y}^A) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

**Règle de Décision** :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) > p_{\text{lim},\alpha}$

**Conclusion** : Au vu des données, puisque

$$\widehat{p}^A(\mathbf{y}^A) = 17.1\% > p_{\text{lim},5\%} \simeq 16.8573\%$$

on peut plutôt penser que le produit A est rentable.

(avec  $p_{\text{lim},5\%} \stackrel{\text{R}}{=} \text{qnorm}(.95, .15, \text{sqrt}(.15 * .85/1000))$ )



## Décision pour le Produit B

**Même démarche (accélérée)** : Les valeurs des cases ci-dessous cor-

respondent à :  $P_{\mu^B=\mu}(\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) > \mu_{lim}) \simeq \left( \widehat{\mu^B}(\mathbf{y}_{[.]^B}^B) > \mu_{lim} \right)_{10000}$   
 obtenues grâce à la connaissance du mathématicien suivante

$$\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\mu^B, \sigma_{\widehat{\mu^B}}) \text{ où } \sigma_{\widehat{\mu^B}} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$$

$\mu$	$\mu_{lim}$		
	0.15	0.17	0.20
0.1	0.01% $\simeq$ 0.01%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
0.14	23.39% $\simeq$ 24.38%	1.74% $\simeq$ 1.86%	0.01% $\simeq$ 0%
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	7.72% $\simeq$ 8.6%	0.04% $\simeq$ 0.03%
0.16	74.24% $\simeq$ 74.07%	23.45% $\simeq$ 25.93%	0.39% $\simeq$ 0.49%
0.20	99.96% $\simeq$ 99.98%	97.81% $\simeq$ 98.3%	48.43% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit B

**Même démarche (accélérée)** : On ne cherche donc qu'à contrôler le risque de 1ère espèce dans **la pire des situations**, i.e.  $H_0 : \mu^B = 0.15$ .

**Question** : Comment ajuster  $\mu_{lim}$  de manière à ne produire qu'un risque maximal de 1ère espèce à  $\alpha = 5\%$  ?

$\mu$	0.15	$\mu_{lim}$ 0.17	0.20
0.1	0.01% $\simeq$ 0.01%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
0.14	23.39% $\simeq$ 24.38%	1.74% $\simeq$ 1.86%	0.01% $\simeq$ 0%
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	7.72% $\simeq$ 8.6%	0.04% $\simeq$ 0.03%
0.16	74.24% $\simeq$ 74.07%	23.45% $\simeq$ 25.93%	0.39% $\simeq$ 0.49%
0.20	99.96% $\simeq$ 99.98%	97.81% $\simeq$ 98.3%	48.43% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit B

Réponse :

$$\mu_{lim} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(.95, .15, \text{sqrt}(\text{varB015}/n)) \simeq 0.1740846$$

$\mu$	0.15	$\mu_{lim}$ 0.1740846	0.2
0.1	0.01% $\simeq$ 0.01%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
0.14	23.39% $\simeq$ 24.38%	0.94% $\simeq$ 0.9%	0.01% $\simeq$ 0%
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	4.63% $\simeq$ 5%	0.04% $\simeq$ 0.03%
0.16	74.24% $\simeq$ 74.07%	16.04% $\simeq$ 18.16%	0.39% $\simeq$ 0.49%
0.20	99.96% $\simeq$ 99.98%	95.74% $\simeq$ 96.64%	48.43% $\simeq$ 50%

## Décision pour le Produit B

L'urne  $U_{0.15}^A$  est une pire situation potentielle pour le produit B ainsi que beaucoup d'autres (à décrire). Par conséquent,  $\mu_{lim,5\%}$  peut prendre les valeurs 0.1740846, 0.168573 ainsi que beaucoup d'autres (le plus grand à 3 boules max est 0.1840091)  $\Rightarrow$  **ECHEC !**

$\mu$	$\mu_{lim,5\%}$	
	0.168573 ( $U_{0.15}^A$ )	0.1740846 ( $U_{0.15}^B$ )
0.1	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
0.14	0.52% $\simeq$ 0.46%	0.94% $\simeq$ 0.9%
0.15	5.17% $\simeq$ 5%	4.63% $\simeq$ 5%
0.16	22.89% $\simeq$ 22.98%	16.04% $\simeq$ 18.16%
0.1	99.35% $\simeq$ 99.35%	95.74% $\simeq$ 96.64%

## Décision pour le Produit B

mais pas **MATH** ! : en effet,  $\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0.15, \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}})$  sous  $\mathbf{H}_0$ .

Heureusement,  $\mathbf{H}_1 : \mu^B > 0.15 \Leftrightarrow \delta_{\mu^B, 0.15} := \frac{\mu^B - 0.15}{\sigma_B / \sqrt{n}} > 0$

estimé par  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_B}(\mathbf{Y}^B) / \sqrt{n}} \overset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$  sous  $\mathbf{H}_0$ .

$\mu$	$\delta_{lim}$		
	0	1.6449	1.96
0.1	0.01% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???
0.14	100% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	3.66% $\simeq$ 5%	1.73% $\simeq$ 2.5%
0.16	74.24% $\simeq$ ???	53.52% $\simeq$ ???	50.9% $\simeq$ ???
0.20	99.96% $\simeq$ ???	96.46% $\simeq$ ???	92.45% $\simeq$ ???

## Décision pour le Produit B

**mais pas MATH !** : La Règle de Décision peut donc se formuler :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(y^B) > \delta_{lim, \alpha} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(1 - \alpha)$

de sorte que le risque maximal de 1ère espèce soit fixé à (urne  $U_{0.15}^B$ )

$$\alpha \simeq P_{\mu^B=0.15}(\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(Y^B) > \delta_{lim, \alpha}) = \left( \widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(y_{[\cdot]}^B) > \delta_{lim, \alpha} \right)_{\infty}.$$

$\mu$	$\delta_{lim}$		
	0	1.6449	1.96
0.1	0.01% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???
0.14	100% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	3.66% $\simeq$ 5%	1.73% $\simeq$ 2.5%
0.16	74.24% $\simeq$ ???	53.52% $\simeq$ ???	50.9% $\simeq$ ???
0.20	99.96% $\simeq$ ???	96.46% $\simeq$ ???	92.45% $\simeq$ ???

## Décision pour le Produit B

mais pas **MATH** ! : De plus, le résultat :

$$\alpha \simeq P_{\mu^B=0.15}(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}(\mathbf{Y}^B) > \delta_{lim,\alpha}) = \overline{(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}(\mathbf{y}_{[\cdot]}^B) > \delta_{lim,\alpha})}_{\infty}$$

est valide pour tout type d'urne potentielle pour le produit B comme le montre les résultats ci-dessous pour les urnes  $U_{0.15}^A$  et  $U_{0.15}^B$ .

$\mu$	$\delta_{lim,5\%}$	
	1.644854 ( $U_{0.15}^A$ )	1.644854 ( $U_{0.15}^B$ )
0.1	0% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???
0.14	0.39% $\simeq$ ???	0% $\simeq$ ???
0.15	4.39% $\simeq$ 5%	3.66% $\simeq$ 5%
0.16	20.15% $\simeq$ ???	53.52% $\simeq$ ???
0.1	99.2% $\simeq$ ???	96.46% $\simeq$ ???

## Décision pour le Produit B

**Question** : Comment s'écrit l'assertion d'intérêt  $H_1$  en fonction du paramètre d'intérêt et en fonction du paramètre d'écart standardisé ?

CQLS



## Décision pour le Produit B

**Question** : Comment s'écrit l'assertion d'intérêt  $H_1$  en fonction du paramètre d'intérêt et en fonction du paramètre d'écart standardisé ?

**Réponse** :  $H_1 : \mu^B > 0.15 \Leftrightarrow \delta_{\mu^B, 0.15} := \frac{\mu^B - 0.15}{\sigma_{\mu^B}} > 0$

avec  $\sigma_{\mu^B} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$ .

**Hypothèses de test** :

$$H_1 : \mu^B > 0.15$$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test :**

$$H_1 : \mu^B > 0.15$$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $H_1 : \mu^B > 0.15$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B)$  dans la pire des situations ?

**Hypothèses de test** :  $\mathbf{H}_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $\mathbf{H}_1 : \mu^B > 0.15$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B)$  dans la pire des situations ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $H_1 : \mu^B > 0.15$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $H_1 : \mu^B > 0.15$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{\delta}_{\mu^B, 0.15}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu}^B(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma}_{\mu^B}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $H_1 : \mu^B > 0.15$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Règle de Décision** :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) > \delta_{lim, \alpha}$

## Décision pour le Produit B

**Question** : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur  $\mathbf{y}^B$  ( $y^B$  en R) et pour lequel  $\text{mean}(y^B) = 0.172$  et  $\text{sd}(y^B) = 0.5610087$  ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $H_1 : \mu^B > 0.15$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Règle de Décision** :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) > \delta_{\text{lim}, \alpha}$



## Décision pour le Produit B

**Question** : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur  $\mathbf{y}^B$  ( $y^B$  en R) et pour lequel  $\text{mean}(y^B) = 0.172$  et  $\text{sd}(y^B) = 0.5610087$  ?

**Hypothèses de test** :  $H_0 : \mu^B = 0.15$  vs  $H_1 : \mu^B > 0.15$

**Statistique de test sous  $H_0$**  :

$$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{Y}^B) := \frac{\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y}^B) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\mu^B}}(\mathbf{Y}^B)} \underset{\text{approx.}}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Règle de Décision** :

Accepter  $H_1$  si  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) > \delta_{\text{lim}, \alpha}$

**Conclusion** : Au vu des données, puisque

$\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) = 1.24009 \not> \delta_{\text{lim}, 5\%} \stackrel{R}{=} \text{qnorm}(.95) \simeq 1.644854$   
on NE peut PAS plutôt penser que le produit B est rentable.  
(avec  $\widehat{\delta_{\mu^B, 0.15}}(\mathbf{y}^B) \stackrel{R}{=} (\text{mean}(y^B) - 0.15) / \text{sqrt}(\text{var}(y^B)/n)$ )