統計學（一）

第三章 機率
(Probability)

授課教師：唐麗英教授

國立交通大學

工業工程與管理學系

聯絡電話：(03)5731896

e-mail：litong@cc.nctu.edu.tw

2013

本課程內容參考書目

● 教科書

Mendenhall, W., & Sincich, T. (2007). Statistics for engineering and the sciences, 5th Edition. Prentice Hall.

● 本課程內容參考書目

1. Berenson, M. L., Levine, D. M., & Krehbiel, T. C. (2009). *Basic business statistics: Concepts and applications*, 11th Edition. Upper Saddle River, N.J: Pearson Prentice Hall.
2. Larson, H. J. (1982). *Introduction to probability theory and statistical inference*, 3rd Edition. New York: Wiley.
3. Miller, I., Freund, J. E., & Johnson, R. A. (2000). *Miller and Freund's Probability and statistics for engineers*, 6th Edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
4. Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2011). *Applied statistics and probability for engineers*, 5th Edition. Hoboken, NJ: Wiley.
5. Watson, C. J. (1997). *Statistics for management and economics*, 5th Edition. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall.
6. 林惠玲、陳正倉（2009），「統計學：方法與應用」，第四版，雙葉書廊有限公司。
7. 唐麗英、王春和（2013），「從範例學 MINITAB 統計分析與應用」，博碩文化公司。
8. 唐麗英、王春和（2008），「SPSS 統計分析 14.0 中文版」，儒林圖書公司。
9. 唐麗英、王春和（2007），「Excel 2007 統計分析」，第二版，儒林圖書公司。
10. 唐麗英、王春和（2005），「STATISTICA6.0 與基礎統計分析」，儒林圖書公司。
11. 陳順宇（2004），「統計學」，第四版，華泰書局。
12. 彭昭英、唐麗英（2010），「SAS123」，第七版，儒林圖書公司。

第一單元：機率概念之介紹

第一章與第二章介紹了一些統計概念及統計量。當群體的參數不知時，必須要以樣本的統計量來推論群體的參數，此時就必須知道群體資料分佈的情況。而群體資料分佈的情況，乃是基於機率理論，因此，本單元介紹一些基本的機率概念與機率分佈。

定義一：實驗(Experiment)

實驗是指一個可記錄一些觀察體量測值的過程(Process)

例 1：
1) 擲一個銅板一百次
2) 擲一個骰子十次
3) 量測某物一百次

定義二：樣本空間(Sample Space,S)

一個實驗的所有可能出現的結果之集合稱為樣本空間。

例 2：1) 擲一個骰子一次，S= ______________________________

2) 擲一個銅板兩次，S= ______________________________

定義三：事件(Event)

實驗的結果稱為*事件*。

例：

定義四：事件A的機率：

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\#(\boldsymbol{A})}{\#(\boldsymbol{S})}$$

其中，$\#(\boldsymbol{A})$ 表 A 事件中元素個數

$\#(\boldsymbol{S})$ 表樣本空間中之元素個數

● 事件 A 與 B 之間有三個可能的關係：

1) 相依 (dependent) – 事件 A 的發生會受事件 B 的影響，反之亦然。

2) 獨立 (independent) – 事件 A 的發生與事件 B 的發生無任何關係或彼此不會互相影響。

3) 互斥 (mutually exclusive) – 若事件 A 與事件 B 不可能同時發生，則兩事件互斥。

例 3：假設兄弟隊與三商隊進行一場棒球賽，在進行 9 局後，可能的結果有：

｛兄弟隊贏三商隊、兄弟隊輸三商隊、兄弟隊與三商隊平手｝。

令 A=｛兄弟隊贏三商隊｝， B=｛兄弟隊輸三商隊 ｝， C=｛兄弟隊與三商隊平手｝，則事件 A，B 與 C 之間的關係為何？

● 機率三原理：

1) $\underline{\qquad\quad}$ ≦ $P(A)$ ≦ $\underline{\qquad\quad}$ **對樣本空間中任一事件 A**

2) $P(\emptyset)=$ $\underline{\qquad\quad}$， $P(S)=$ $\underline{\qquad\quad}$

3) 若 $A_1, A_2, \cdots A_K$ **互為互斥事件，則**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

例 4：從五十二張撲克牌隨機抽出一張牌，求以下之機率：

此牌為 a)一張黑桃 b)一張 K c)一張黑桃 K d)一張黑桃或一張 K？

例 5：假設生男生女的機率相等，則一個有三個小孩的家庭中，恰僅有一個女孩子的機率？

定義五：互補事件

任一事件 A 的互補事件為「A 不會發生的事件」，以 A'表示。

※$P(A') = 1 - P(A)$

例 6：滾動兩個骰子，求兩個骰子出現不同點數的機率？

● 條件機率(Conditional Probability)：

條件機率 $P(A|B)$ 表在已知 B 事件已發生的條件下，A 事件發生的機率。

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ **，其中假設** $P(B) \neq 0$

● 貝氏定理 (Bays' Theorem)：

條件機率可改寫成下式

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A)\cdot P(A)}{P(B\mid A)\cdot P(A)+P(B\mid \bar{A})\cdot P(\bar{A})}$$

<u>註：</u>

$P(B)=P(B\mid A)\cdot P(A)+P(B\mid \bar{A})\cdot P(\bar{A})$

P(B) 稱為全機率 (total probability)

例 7：

A television station would like to measure the ability of its weather forecaster. Past data have been collected that indicate the following:

1)The probability the forecaster predicted sunshine on sunny day is 0.8.

2)The probability the forecaster predicted sunshine on rainy day is 0.4

3)The probability of a sunny day is 0.6.

Find the probability that it will be sunny <u>given that</u> the forecaster has predicted sunshine.

第二單元：機率分佈 (Probability Distributions)

數值變數的兩種型式： 1) ________________

2) ________________

定義：離散型隨機變數(Discrete Random Variable)

離散型隨機變數為計數值的隨機變數。

例 8：生產線上缺陷製品的數目、人數等。

定義：連續型隨機變數(Continuous Random Variable)

連續型隨機變數是連續值的隨機變數。

例 9：厚度、重量與長度等

● 離散型隨機變數之機率分佈

定義：離散型隨機變數之機率分佈，是以圖或表來表示隨機變數 X 的每一可能值之相關機率。

$$P(X=x)=p(x) \qquad \text{for all } x$$

● p(x) 的特性為何?

i) ______ $\leqq$ $p(x)$ $\leqq$ ______

ii) $\sum_{all\ x} p(x)$ = ________

● 如何找出離散型隨機變數的機率分佈？

1. 先建立一表列出離散型隨機變數 X 的所有可能值。
2. 再計算出每一 X 之相對機率 p(x)。

例 10：擲一枚硬幣兩次，令 X 表硬幣人頭朝上(正面)的次數，

a) 求 X 的機率分佈　b) 將 p(x)繪成圖。

● 離散型隨機變數的期望值

設 X 為一離散型隨機變數，其機率分配為 p(x)，則 X 的期望值為

E(X)=__________ = _______

● 離散型隨機變數的變異數與標準差

設 X 為一離散隨機變數，其機率分配為 p(x)，則

X 期望值為 E(x)=________ ，

X 的變異數為 Var(X)=________ = E $\left[(x-\mu)^2\right]$ **= _______________**

X 的標準差為 St.D. (X) = _______=____________

例 11：我們從例 4 中得到以下之機率分配，

x	p(x)
0	.25
1	.50
2	.25

找出 a) 出現正面的期望次數，E(x)

b) X 的變異數與標準差

例 12：假設台北市建國南北路高架橋在星期五的尖峰時段，發生交通意外次數為 0，1，2，3 的機率分別為 0.93，0.02，0.03 及 0.02，

a) 試找出在星期五尖峰時段發生交通意外的期望次數。

b) 一年的期間內，在星期五尖峰時段發生交通意外的期望次數是多少？

c) 試找出在星期五尖峰時段發生交通意外的變異數與標準差。