# Analyse, simulation numérique et expérimentation des oscillateurs de Van der Pol

## Liste des membres du groupe


— HARRACHE Gwevenn
— COMMUNAL Hugo


## Positionnements thématiques

— Physique (électronique)
— Mathématiques (analyse, équations différentielles non linéaires)
— Informatique (informatique pratique, Python)

## Mots-clés

— Simulation numérique
— Oscillateur non linéaire
— Cycle limite
— Amortissement négatif
— Équation différentielle
— Attracteur

## Bibliographie commentée

Introduit par le physicien et ingénieur néerlandais Balthasar Van der Pol dans les années 1920, l'oscillateur de Van der Pol est un système dynamique non linéaire emblématique permettant de mettre en œuvre le théorème de Poincaré–Bendixson [1]. Initialement conçu pour modéliser des phénomènes électriques dans les circuits à lampe triode, cet oscillateur a par la suite trouvé des applications dans des domaines tels que la biologie (modélisation du rythme cardiaque), la mécanique, la sismologie ou encore les systèmes chaotiques.

L'étude de ce système permet d'aborder les notions de non-linéarité, d'auto-oscillations et de cycles limites.

### Équation de Van der Pol

L'équation différentielle dite de Van der Pol s'écrit :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \varepsilon\omega_0 \left(1 - x^2(t)\right) \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec :

— $\varepsilon$ : paramètre de non-linéarité modulant l'intensité de l'amortissement négatif,

— $\omega_0$ : pulsation propre du système.

Cette équation n'étant pas résolvable analytiquement du fait du coefficient non constant du terme d'ordre un, l'utilisation de simulations numériques est nécessaire afin d'obtenir des solutions approchées de $x(t)$.

L'existence des comportements limites de cet oscillateur peut être prouvée par le théorème de Poincaré–Bendixson, qui stipule que soit $x(t)$ converge vers une limite, soit son comportement asymptotique est une fonction périodique appelée *cycle limite*. Ce phénomène constitue un exemple typique d'oscillations auto-entretenues.

### Approche numérique et expérimentale

Il est possible de mettre en œuvre des systèmes électriques utilisant des amplificateurs opérationnels, des condensateurs et des bobines, mais également de simuler ce comportement à l'aide d'outils numériques. Une résolution utilisant des langages de programmation tels que Python permet une approche simple et efficace du phénomène.

Les simulations permettent notamment d'obtenir des résultats concernant :

— les cycles limites,

— la durée du régime transitoire,

— la période des oscillations.

Une approche visuelle est également possible grâce aux diagrammes de phase représentant $\frac{dx}{dt}$ en fonction de $x$. Le caractère attractif du cycle limite permet de prédire certains comportements à partir des isoclines.

### Oscillateur de Van der Pol forcé

Une seconde version de l'équation, dite *forcée*, s'écrit :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \varepsilon\omega_0 \left(1 - x^2(t)\right) \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X \cos(\omega t)$$

Cette version conduit à des comportements chaotiques, sensibles aux conditions initiales et non prévisibles à long terme, étudiés dans le cadre de la théorie du chaos déterministe.

## Problématique retenue

Comment les oscillateurs de Van der Pol permettent-ils d'illustrer l'existence et les caractéristiques de cycles limites dans des systèmes dynamiques non linéaires ?

## Objectifs du TIPE

— Simulations numériques pour différentes valeurs de paramètres
— Mise en place d'un dispositif expérimental sous forme de circuit électrique
— Interprétation et exploitation des résultats expérimentaux
— Preuve de l'existence du cycle limite à l'aide du théorème de Poincaré–Bendixson

## Références

## Références

[1] Théorème de Poincaré–Bendixson — Wikipédia

[2] J. Gleick, *Chaos : Making a New Science*, Flammarion, 1988.

[3] B. Van der Pol, J. Van der Mark, *The Heartbeat considered as a Relaxation Oscillation*, Philosophical Magazine, 1928.

[4] F. C. Moon, *Chaotic Vibrations*, Wiley, 1992.