

Mise en place d'un cryptosystème d'ElGamal sur les courbes elliptiques et étude de sa sécurité.

TIPE
February 12, 2026

Sommaire

1 Construction d'un groupe sur les courbes elliptiques

Les courbes elliptiques

Plan projectif et point à l'infini

Construction de la loi de groupe

Formalisation des propriétés géométriques

Construction d'un groupe cyclique

2 Table and Figure Examples

Table

Figure

3 Mathematics

4 Referencing

Les courbes elliptiques

Une courbe elliptique est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{K}$ où \mathbb{K} est un corps.

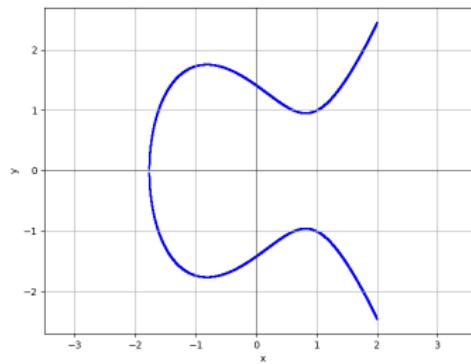


Figure: Courbe elliptique $y^2 = x^3 - 2x + 2$.

Plan projectif et point à l'infini

Definition

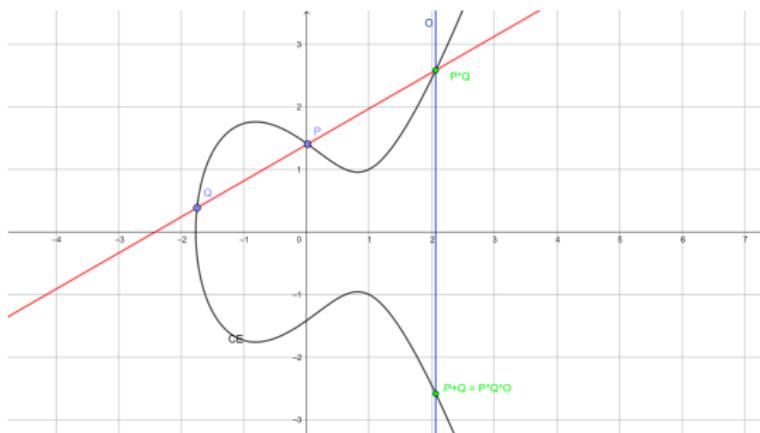
Le **plan projectif** \mathbb{P}^2 est l'ensemble des triplets de coordonnées homogènes (x, y, z) où $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Definition

Dans cette notation, les points admettant des coordonnées de la forme $(x, y, 0)$ forment la droite à l'infini. Nous allons associer à la droite à l'infini un point particulier, appelé **point à l'infini**.

Construction de la loi de groupe

Nous allons définir une loi de groupe additive géométriquement sur les points d'une courbe elliptique.



Cette loi de group est définie de la manière suivante :

- $P * Q = R$ où R est le troisième point d'intersection de la droite (PQ) avec la courbe elliptique.
- $P + Q = P * Q * O$ où O est le point à l'infini.

Formalisation des propriétés géométriques

Forme de Weierstrass

Les équation des courbes elliptiques définies sur \mathbb{R} (ou \mathbb{Q}) peuvent s'écrire sous la forme :

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{Q}).

Pour $P = (x_1, y_1)$ et $Q = (x_2, y_2)$, en étudiant des égalités de polynômes, on obtient les formules suivantes :

$$P^*Q = (x_3, y_3) \text{ avec : } \begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}$$

où $\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ et $\nu = y_1 - \lambda x_1$

Construction d'un groupe cyclique

Definition

Un **groupe cyclique** est un groupe à la fois monogène et fini. Il existe un élément g du groupe tel que tous les éléments du groupe soient un multipel de g .

Pour tout groupe cyclique \mathbb{G} il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{G} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application aux courbes elliptiques

Pour chaque couple d'entiers (x, y) vérifiant l'équation de la courbe elliptique, on applique un modulo à x et à y . L'équation de la courbe devient donc :

$$y^2 = x^3 + ax + b \pmod{n}$$

Table

Subtitle

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table: Table caption

Figure



[Figure](#): Creodocs logo.

Definitions & Examples

Definition

A **prime number** is a number that has exactly two divisors.

Example

- 2 is prime (two divisors: 1 and 2).
- 3 is prime (two divisors: 1 and 3).
- 4 is not prime (**three** divisors: 1, 2, and 4).

You can also use the theorem, lemma, proof and corollary environments.

Theorem, Corollary & Proof

Theorem (Mass–energy equivalence)

$$E = mc^2$$

Corollary

$$x + y = y + x$$

Proof.

$$\omega + \phi = \epsilon$$



Equation

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos \theta + \frac{3}{4} \cos 3\theta \quad (1)$$

Verbatim

Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}
  \frametitle{Theorem}
  \begin{theorem} [Mass--energy equivalence]
     $E = mc^2$ 
  \end{theorem}
\end{frame}
```

Slide without title.

Citing References

An example of the \cite command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2022, Kennedy, 2023].

References

-  **John Smith (2022)**
Publication title
Journal Name 12(3), 45 – 678.
-  **Annabelle Kennedy (2023)**
Publication title
Journal Name 12(3), 45 – 678.

Acknowledgements

Smith Lab

- Alice Smith
- Devon Brown

Cook Lab

- Margaret
- Jennifer
- Yuan

Funding

- British Royal Navy
- Norwegian Government

The End

Questions? Comments?