Analyse, simulation numérique et expérimentation des oscillateurs de Van der Pol

Liste des membres du groupe :
- HARRACHE Gwevenn
- COMMUNAL Hugo

Positionnements thématiques :
- Physique (électronique)
- Mathématiques (Analyse, équations différentielles non linéaires)
- Informatique (informatique pratique, python)

Mots-clés :
- Simulation numérique
- Oscillateur non linéaire
- Cycle limite
- Amortissement négatif
- Equation différentielle
- Attracteur

Bibliographie commentée :

Introduit par le physicien et ingénieur néerlandais Balthasar Van der Pol dans les années 1920, l'oscillateur de Van der Pol est un système dynamique non linéaire emblématique permettant de mettre en œuvre le théorème de Poincaré Bendixson [1]. Initialement conçu pour modéliser des phénomènes électriques dans les circuits à lampe triode, cet oscillateur a par la suite trouvé des applications dans des domaines tels que la biologie (modélisation du rythme cardiaque [2]), la mécanique, la sismologie ou encore les systèmes chaotiques[3]. L'étude de ce système permet d'aborder les notions de non-linéarité, d'auto-oscillations et de cycles limites.

L'équation différentielle dite de *Van der Pol* s'écrit :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \varepsilon\omega_0(1 - x^2(t))\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec : ε est un paramètre de non-linéarité qui module l'intensité de l'amortissement négatif

ω_0 est la pulsation propre du système.

Cette équation n'étant pas résolvable analytiquement du fait du coefficient non constant $\varepsilon\omega_0(1 - x^2(t))\frac{dx(t)}{dt}$ du membre du premier ordre, l'utilisation de simulation numérique est nécessaire pour obtenir des valeurs de x solutions de l'équation.

L'existence des comportements limites de cet oscillateur sur lesquels portent cette étude peuvent donc être prouvés par le biais du théorème de Poincaré Bendixson. Celui-ci stipule que soit x converge vers une limite, soit son comportement asymptotique est une fonction périodique appelée cycle limite. Ce phénomène est un exemple typique d'oscillations auto-entretenues, étudié en physique appliquée et en ingénierie des systèmes [4].

Il est donc possible de mettre en œuvre des systèmes électriques utilisant des amplificateurs opérationnels, des condensateurs et des bobines [5] mais aussi de simuler un tel circuit via des outils numériques. Une résolution utilisant des langages de programmation tels que python est donc abordable et permet une approche plus simple du phénomène. Ces simulations peuvent donc nous donner donc des résultats concernant les cycles limites, la durée du régime transitoire et la période de celui-ci.

Aussi, une approche assez visuelle des oscillations de Van der Pol est permise par des diagrammes de phase ($\frac{dx}{dt}$ en fonction de x). Nous pouvons alors prédire certains comportements grâce au tracé des isoclines [6] . En effet, de par la caractéristique d'attracteur du cycle limite, le système évolue constamment vers les intersections de ces isoclines. Nous pouvons aussi remarquer l'unicité des points d'équilibres du fait que les isoclines ne se coupent qu'en 0.

Une autre propriété intéressante des oscillateurs de Van der Pol est que les cycles limites ne sont ni influencés par les conditions initiales (sauf dans le cas où x(t=0) où le système est à l'équilibre) ni par la pulsation propre du système.

Aussi nous pouvons observer une seconde version de l'équation, l'oscillateur de Van der Pol forcé ci contre qui donne des résultats radicalement différents.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \varepsilon\omega_0(1 - x^2(t))\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X cos(\omega t)\mathrm{t}$$

Cette version mène à des comportements chaotiques, sensibles aux conditions initiales et non prévisibles à long terme, a été étudiée dans les années 1970 dans le cadre de la théorie du chaos déterministe [7].

Problématique retenue :

Comment les oscillateurs de Van der Pol permettent-ils d'illustrer l'existence et les caractéristiques de cycles limites dans des systèmes dynamiques non linéaires ?

Objectifs du TIPE :

- Simulations numériques de l'oscillateur selon plusieurs valeurs de paramètres
- Mise en place d'un dispositif expérimental sous la forme d'un circuit électrique
- Interprétation et exploitation des résultats expérimentaux
- Preuve de l'existence du cycle limite à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson

Références :

[1] Théorème de Poincaré-Bendixson — Wikipédia

[2] James Gleick « Chaos: Making a New Science », Paris, Flammarion, coll. « Champs », 1988 (réimpr. 1999, 2008), 431 p. (ISBN 978-2-08-081219-3 et 2-08081-219-X), p. 41-43 contient une description détaillée de l'oscillateur à tube de van der Pol.

[3] Balthazar van der Pol et J van der Mark, « The Heartbeat considered as a Relaxation oscillation, and an Electrical Model of the Heart », *Philosophical Magazine Supplement*, n° 6, 1928, p. 763-775.

[4] Jenkins, A. (2013). *Self-oscillation*

[5] Un modèle expérimental de l'oscillateur de Van der Pol

[6] Plan de phase et écoulement du système non linéaire de Van Der Pol, approximation de la méthode d'Euler avec Mathematica - YouTube

[7] Moon, F. C. (1992). *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. Wiley