# Parte I

# Tópicos de Álgebra Abstrata

*Na abordagem matemática que baseia a Teoria da Elasticidade, há uma grande variedade de metodologias e notações. Didaticamente, é conveniente definir-se preliminarmente, de forma clara, os fundamentos matemáticos essenciais a serem utilizados: suas restrições e suas formas. Para fins de clareza e facilidade de compreensão, esta parte centraliza todas as definições e conceitos matemáticos utilizados ao longo do texto. Em resumo, apresenta-se os conceitos elementares da Álgebra Abstrata, os fundamentos da Álgebra Linear e aspectos geométricos envolvidos, Álgebra e Cálculo Tensorial. O escopo e o nível de profundidade dos temas tratados abrange o necessário. Os tópicos apresentados podem ser aprofundados consultando-se a bibliografia utilizada, apresentada ao final desta parte. Ao leitor já familiarizado com os temas tratados, é recomendável passar rapidamente pelos capítulos, ficando a par do enfoque e notação utilizados.*

Capítulo 1

# O Que é Álgebra?

Em algum momento ao longo do desenvolvimento de sua vital capacidade para a comunicação e também para a compreensão do mundo, o ser humano precisou transmitir, numa linguagem menos subjetiva que objetiva, as impressões sensoriais percebidas a partir dos objetos que o cercavam, de tal forma que essa transmissão ocorresse *sem dubiedades*. As duas primeiras ações humanas objeto dessa necessidade foram sucessivamente o contar e o medir. Nesses tempos primitivos, a Matemática surge como resultado do esforço para se codificar quantidades e tamanhos numa semântica própria, onde as interpretações subjetivas fossem minimizadas ou simplesmente suprimidas.

## 1.1 Generalização

A crescente sofisticação das demandas trouxe complexidade às questões afeitas à Matemática e a busca pela generalização surgiu naturalmente, como uma estratégia para expandir sua aplicabilidade, para simplificar suas descrições e métodos de solução. Se há estruturas que conceitualmente se repetem no tratamento específico de diversos problemas, a generalização dessas estruturas torná-las-ão aplicáveis a novos problemas, à construção de novas estruturas ou à simplificação da complexidade em outras já existentes.

No presente contexto, generalizar envolve três ações distintas: a) abstrair, quando se extrai mentalmente da estrutura global uma parcela ou subestrutura de interesse, apartando-a das demais, tornando-a independente; b) analisar, quando se decompõe a abstração para melhor compreendê-la; c) conceituar, quando se criam novos conceitos a partir da abstração analisada. O produto ou o resultado do processo de generalização é aquilo que se conhece por *abstrato*; e é a produção desses entes abstratos – construtos mentais rigorosamente concebidos – que permite à Matemática passar a tratar com menos estruturas o concreto antes descrito por diversas estruturas específicas, descrever por meio de concepções mais simples abordagens antes complexas. A infinita necessidade do homem por conhecimento e a prática incessante de generalizações sobre generalizações, disso resultando um abstrato cada vez mais abrangente e estável, conferem à Matemática seu forte caráter psicológico, quando a consideramos uma expressão observável das manifestações mais profundas do psiquismo humano. Sob esse ponto de vista, a Matemática, tal qual a pintura e a música, é parte integrante da natureza humana; ou seja, é *arte*.

Nos termos da abordagem exposta, *Álgebra* é o campo da Matemática que envolve generalizações de estruturas constituídas por símbolos e suas coleções, pelas relações que envolvem ambos e pelas restrições que as regem. Como exemplo, letras representando números reais, os conjuntos formados por elas, as funções que as têm como argumentos e as regras expressas nessas funções são respectivamente símbolos, coleções, relações e restrições que fazem parte do objeto de estudo da Álgebra. Trata-se portanto de um campo cujo alcance é bastante amplo, a tal ponto que a generalidade de suas estruturas permitiram que a Álgebra aproximasse áreas da Matemática aparentemente distantes. Por este aspecto agregador e que perpassa diferentes ramos de estudo, não seria incorreto falar da Álgebra como uma área fundamental da Matemática, tanto em termos de importância teórica quanto da construção do conhecimento matemático.

Como resultado dessa influência em outros ramos e também da particularização didática de seus conceitos, a Álgebra possui diversas subdivisões. Dentre elas, as mais importantes são a *álgebra elementar* e a *álgebra abstrata*: a primeira diz respeito ao nível mais básico de generalização da *Aritmética* e a segunda alcança níveis profundos desta generalização. Embora consagrada, a inadequada classificação "abstrata" para essa álgebra mais profunda é um pleonasmo que visa a diferenciação didática; a Álgebra como um ramo matemático cuida de entes abstratos. Para os objetivos deste livro, também será estudada a chamada *álgebra linear*, que trata de vetores (símbolos), espaços vetoriais (coleções) e funções lineares (relações e regras).

## 1.2 Primórdios

O primeiro registro conhecido que se aproxima do pensamento algébrico atual foi escrito pelo matemático grego Diofanto de Alexandria no terceiro século depois de Cristo. De sua obra denominada *Arithmetica*, composta originalmente por diversos livros, restaram apenas 189 problemas, expressos numa notação própria, muito similar àquela utilizada nos dias de hoje para descrever equações: as incógnitas representadas em símbolos não numéricos com as operações separadas por uma igualdade. A equação que se expressa atualmente por

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$$

Diofanto a escreveu da seguinte forma[1]:

$$K^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\bar{\iota}\ ⋔\ \Delta^{Y}\overline{\beta}\mathbf{M}\overline{\alpha}'\acute{\iota}\sigma\mathbf{M}\overline{\varepsilon},$$

onde os símbolos com barras superiores são constantes numéricas, $'\acute{\iota}\sigma$ representa “igual”, ⋔ é o símbolo para diferença e os demais dizem respeito à incógnita $\varsigma$. Por conta de todo essa simbologia literal – até então inédita segundo os registros conhecidos – na proposição e solução dos problemas apresentados, muitos historiadores da Matemática consideram Diofanto o pai da Álgebra. Outros tantos argumentam que Diofanto não apresentou evolução metodológica alguma nas soluções dos problemas que propôs: cada uma delas é aplicável apenas individualmente, válida somente para cada caso particular. Não se observa na obra um esforço de generalização para criar procedimentos de solução extensíveis a diversos problemas de diferentes naturezas.

Seiscentos anos após a *Arithmetica* de Diofanto, por volta de 820 d.C., o polímata persa Muhammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850), membro

[1] Ver Derbyshire[8].

da renomada Casa da Sabedoria em Bagdá, escreveu *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-ğabr wa'l-muqābala*, ou *Manual de "al-jabr" e de "al-muqabala"* numa tradução mais literal. Não há palavras em português que expressem de maneira precisa as duas árabes transliteradas e colocadas entre aspas, cujo conceito pode ser apreendido segundo a metodologia proposta pelo autor. O livro é composto por três partes, sendo que a primeira trata da solução de equações lineares e quadráticas redutíveis a um dos seis tipos apresentados a seguir.

1. Quadrados igualam raízes: $ax^2 = bx$;
2. Quadrados igualam números: $ax^2 = c$;
3. Raízes igualam números: $bx = c$;
4. Quadrados e raízes igualam números: $ax^2 + bx = c$;
5. Quadrados e números igualam raízes: $ax^2 + c = bx$;
6. Raízes e números igualam quadrados: $bx + c = ax^2$;

Esses problemas genéricos, al-Khwārizmī não os descreveu seguindo uma notação simbólica, como Diofanto, mas literal, na forma das descrições que iniciam os seis itens apresentados. Para cada um deles, o autor criou métodos de solução literais, aplicáveis a qualquer problema específico, desde que fosse possível reduzi-lo numa das seis formas. Para tal, dois procedimentos foram propostos conforme se segue.

a) "al-jabr" corresponde a ações de adicionar ao lado que contém subtração um valor que "restaure" o termo subtraído e de balancear a equação acrescendo o outro lado dessa mesma quantidade. A palavra "al-jabr" é a origem etimológica da palavra "álgebra"[2], esta construída a partir da pronúncia daquela. Em notação simbólica, eis o

[2] Em Cervantes[5], há uma interessante passagem à p. 476: *En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaon a un pueblo donde fue ventura hallar un algebrista, con quien se curó....* Na citação, Dom Quixote e seu fiel escudeiro têm a sorte de encontrar um "algebrista", ou um curandeiro especialista em restaurar ossos quebrados ou deslocados. Convém ressaltar que a língua espanhola foi fortemente influenciada pelas invasões dos mouros ao sul da Espanha. Nessa mesma obra, o autor afirma que toda a palavra espanhola iniciada por "al" tem origem árabe.

exemplo apresentado por al-Khwārizmī:

$$\begin{aligned} x^2 &= 40x - 4x^2 \\ 5x^2 &= 40x. \end{aligned}$$

b) "al-muqabala" consiste em subtrair ambos os lados por um valor que elimine algum dos termos. O exemplo apresentado pelo autor é:

$$\begin{aligned} 50 + x^2 &= 29 + 10x \\ 21 + x^2 &= 10x. \end{aligned}$$

A tradução do manual de al-Khwārizmī para o latim em 1145 muito contribuiu para a incorporação pelo Ocidente dos diversos elementos da matemática árabe. A partir dessas duas obras citadas, que essencialmente estudam equações e seus métodos de solução, inicia-se o desenvolvimento daquilo que hoje denominamos Álgebra.

Capítulo 2

# Coleções e Relações

Podemos dizer que é no mínimo inócuo estudar um determinado objeto matemático fundamental sem que ele esteja reunido com outros objetos matemáticos, compartilhando algum tipo de característica comum eleita para análise. Esse ajuntamento criterioso, que pode encerrar objetos e que define uma espécie de escopo, de abrangência, vamos denominá-lo coleção. A partir daí, é possível estabelecer relações entre objetos coligidos, chamados *elementos*, e também relações entre elementos de diferentes coleções. Tais relações são expressas por meio de *regras* que descrevem genericamente como elas devem ocorrer. Por conta de seu caráter genérico, essas regras, bem como coleções e elementos, são todos descritos segundo uma linguagem tipicamente algébrica.

## 2.1 Conjuntos

A coleção algébrica menos restrita em termos conceituais é denominada conjunto[1], que pode conter os mais variados elementos distintos, numa quantidade finita ou infinita deles. Assim, os elementos da coleção finita $a, b, b, a, c$ definem o conjunto finito $\{a, b, c\}$, formado por três elementos dis-

[1] O conceito de conjunto aqui considerado carece do rigor necessário a abordagens matemáticas mais formais. A definição de conjunto pela Teoria Axiomática de Conjuntos está fora do escopo deste livro. Ver Cameron[4].

tintos[2]. Importante ressaltar que a sequência descritiva dos elementos de um conjunto não altera sua definição: por exemplo, as definições $A := \{a, b\}$ e $A := \{b, a\}$ são idênticas. Por falar em comparações, dois conjuntos $A$ e $B$ são considerados iguais, $A = B$, se ambos são definidos pelos mesmos elementos; caso contrário, eles são diferentes: $A \neq B$.

O *conjunto vazio* $\emptyset$ é aquele desprovido de elementos e sua existência reforça no conceito de conjunto a ideia de seleção regida por algum critério: o conjunto vazio é resultado de uma seleção em cujo critério nenhum objeto se enquadra. Por exemplo, na coleção de todos os seres humanos vivos, o conjunto daqueles que possuem idade superior a duzentos anos é vazio; algo que não ocorreria fosse a idade mínima cento e um anos. No âmbito específico dos conjuntos, a citada "seleção regida por critério" é denominada *especificação*, cuja sintaxe matemática é a seguinte:

$$\texttt{conjunto} := \{\ \texttt{seleção} : \texttt{critério}\ \}. \tag{2.1}$$

A partir desse padrão e considerando $x$ um elemento qualquer,

$$P := \{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 2 = 0\} \tag{2.2}$$

é o conjunto dos números pares. A especificação anterior lê-se "o conjunto $P$ é definido pelos elementos pertencentes ao conjunto dos inteiros tal que o resto de sua divisão por dois é zero".

A relação entre um objeto e um conjunto consiste em averiguar, através da ideia intuitiva de pertencimento, se o primeiro é ou não elemento do segundo. Aliás, essa ideia é de fundamental importância na chamada Teoria Ingênua de Conjuntos[3]. Dito isso, se $a$ é elemento do conjunto $A$, dizemos que ele *pertence* ao conjunto ou que $a \in A$; caso contrário, dizemos que não pertence a $A$, ou $a \notin A$. Quando todos os elementos de um conjunto $A_1$ pertencem ao conjunto $A$, diz-se que $A_1$ é *subconjunto* de $A$. Nessas condições, se $A_1 \neq A$ diz-se que ele é *subconjunto próprio* de $A$ ou que $A_1 \subset A$; mas, se $A_1$ for subconjunto de $A$ ou igual a $A$, ele é dito *subconjunto impróprio* de $A$, descrito $A_1 \subseteq A$. Assim, concluímos que todo conjunto é subconjunto impróprio dele mesmo. O conjunto $\emptyset$ não seria subconjunto impróprio de um conjunto qualquer $A$ se ele possuísse algum elemento que não pertencesse a $A$; como isso é impossível porque $\emptyset$ não possui elementos, então $\emptyset \subseteq A$.

[2] Um conjunto não admite repetição de elementos. Ver Shen & Vereshchagin[26].
[3] Ver Halmos[13].

As relações entre conjuntos também dependem da ideia de pertencimento. A *união* dos conjuntos $A_1$ e $A_2$ é o conjunto $A_1 \cup A_2$, ao qual todos os elementos de $A_1$ e $A_2$ pertencem. Representamos $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ a união de $n$ conjuntos quaisquer $A_i$. O conjunto definido pelos elementos que pertencem tanto a $A_1$ quanto a $A_2$ é a *intersecção* $A_1 \cap A_2$. Em outras palavras, se o elemento $x \in A_1 \cap A_2$ então $(x \in A_1) \wedge (x \in A_2)$, onde $\wedge$ significa "E" em português. De maneira similar à união, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é como escrevemos a intersecção de $n$ conjuntos $A_i$. Utilizando diagramas de Venn, pode-se constatar que a intersecção é distributiva na união, ou seja, que

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)\,. \tag{2.3}$$

Quando um conjunto $A_1 \cap A_2$ é vazio dizemos que $A_1$ e $A_2$ são *disjuntos*. Nessa situação, se $x \in A_1 \cup A_2$ então $x \in A_1 \vee x \in A_2$, onde o símbolo $\vee$ significa "OU" em termos literais.

O conjunto *diferença* $A_1 \setminus A_2$ é composto pelos elementos de $A_1$ que não pertencem a $A_2$. Se o conjunto $A_1$ é subconjunto de $A$, então o conjunto $A_1' := A \setminus A_1$ é dito *complementar* de $A_1$ em $A$. Com isso, se $A_1$ e $A_2$ forem subconjuntos de $A$, é possível constatar, também por diagramas de Venn, que o complemento da união $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$, que o complemento da intersecção $(A_1 \cap A_2)' = A_1' \cup A_2'$ e a diferença $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2'$. A partir dessas igualdades, podemos dizer que na união a diferença é distribuída conforme

$$A_1 \setminus (A_2 \cup A_3) = (A_1 \setminus A_2) \cap (A_1 \setminus A_3)\,, \tag{2.4}$$

e na intersecção segundo

$$A_1 \setminus (A_2 \cap A_3) = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_3)\,. \tag{2.5}$$

**Demonstração**. Sejam os conjuntos $A_1, A_2, A_3 \subset A$. Temos então que $A_1 \setminus (A_2 \cup A_3) = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)' = A_1 \cap A_2' \cap A_3'$. Temos também que $(A_1 \setminus A_2) \cap (A_1 \setminus A_3) = A_1 \cap A_2' \cap A_1 \cap A_3' = A_1 \cap A_2' \cap A_3'$. Concluímos então a igualdade (2.4). Para provarmos (2.5), eis o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
A_1 \setminus (A_2 \cap A_3) &= A_1 \cap (A_2 \cap A_3)' \\
&= A_1 \cap \left(A_2' \cup A_3'\right) \\
&= \left(A_1 \cap A_2'\right) \cup \left(A_1 \cap A_3'\right) \\
&= (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_3).
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Sequências

Quando os elementos de uma coleção precisam estar ordenados, diz-se em Matemática que ela é uma sequência. Para tal ordenação, os elementos que constituem a sequência possuem suas posições respectivas, identificadas sequencialmente por números inteiros não negativos, definidores do conjunto $\mathbb{N}$, chamados *índices*. Assim, todo elemento que constitui uma sequência possui uma determinada posição, rotulada por um índice único. A igualdade de duas sequências é alcançada quando ambas são formadas pelos mesmos elementos igualmente posicionados. Na sequência $(a,b,c)$ por exemplo, o elemento $b$ tem posição 2, caso o índice inicie em 1; disso resultando $(a,b,c) \neq (a,c,b)$. Por conta dessa necessária característica posicional, uma sequência pode se constituir de elementos indistintos: a coleção $a,b,c,a$ é válida como sequência $(a,b,c,a)$, onde os dois elementos $a$ possuem a primeira e a quarta posições.

Se uma sequência é finita, ela é denominada *tupla*. A tupla de um único elemento é denominada *mônada*, de dois elementos *dupla*, de três elementos *tripla*, de quatro elementos *quádrupla*, de $n$ elementos *ênupla* ou $n$-tupla, onde $n \in \mathbb{N}$. A *sequência vazia* existe e é chamada 0-tupla.

Há ocasiões em que é bastante conveniente combinar elementos de vários conjuntos em tuplas. Como exemplo, posições num espaço tridimensional geralmente são representadas por meio de triplas, cada qual resultante da combinação de três conjuntos numéricos. A construção de tuplas desse tipo ocorre da seguinte forma: o número $n \geqslant 2$ de elementos das tuplas corresponde ao número de conjuntos que terão seus elementos combinados; os elementos de um conjunto específico terão uma única posição nas tuplas; uma dada combinação de $n$ elementos, cada qual pertencente a um dos $n$ conjuntos constitui uma única tupla. Dizemos que o conjunto formado por todas as $n$-tuplas assim construídas é o *produto cartesiano* dos $n$ conjuntos envolvidos. Nos termos da especificação de conjuntos, dada uma coleção $A_1, A_2, \cdots, A_n$ , o produto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in A_i \,, i = 1, \cdots, n\} \,, n \geqslant 2 \,. \tag{2.6}$$

A fim de simplificar a notação, reduzimos $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ para $A^{\times n}$. Nessas condições, se todos os $n$ conjuntos forem iguais a $A$, adota-se o formato $A^n$, denominado *potência cartesiana*.

Se pelo menos um dos conjuntos envolvidos no produto cartesiano for vazio, o resultado é sempre conjunto vazio: $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times A_1 = \emptyset$. Porque a sequência é uma coleção onde a ordem de seus elementos importa, o produto cartesiano $A_1 \times A_2$ é comutativo apenas quando um dos conjuntos for vazio ou se ambos forem iguais. Em outras palavras, se o conjunto $A_1 \neq A_2 \neq \emptyset$, então $A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1$. A ordenação dos elementos da sequência também determina a não associatividade do produto cartesiano, se os conjuntos envolvidos não forem vazios. Nessas condições, $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ porque dupla de dupla e elemento não é a mesma coisa que dupla de elemento e dupla; ou seja, $((a,b),c) \neq (a,(b,c))$, onde $a,b,c$ são elementos quaisquer de $A,B,C$ respectivamente, mesmo que tais conjuntos não sejam disjuntos.

O produto cartesiano é distributivo na união, intersecção e diferença de conjuntos. Assim, para quaisquer conjuntos $A,B,C$ podemos escrever o seguinte:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,; \tag{2.7}$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,; \tag{2.8}$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)\,; \tag{2.9}$$

**Demonstração**. Sejam os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ e $C = \{c_1, c_2, \cdots\}$. Para constatar (2.7), tem-se o desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned}\{a_1, a_2, \cdots\} \times (\{b_1, b_2, \cdots\} \cup \{c_1, c_2, \cdots\}) &= \{a_1, a_2, \cdots\} \times (\{b_1, b_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots\}) = \\ = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \cdots, &(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_2, c_1), (a_2, c_2), \cdots\} = \\ &= (\{a_1, a_2, \cdots\} \times \{b_1, b_2, \cdots\}) \cup (\{a_1, a_2, \cdots\} \times \{c_1, c_2, \cdots\})\,.\end{aligned}$$

A igualdade (2.8) pode ser demonstrada pelo seguinte raciocínio: se $(a_1, x) \in A \times (B \cap C)$ então, pelo conceito de intersecção e produto cartesiano,

$$(a_1 \in A) \wedge (x \in (B \cap C)) = (a_1 \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\,.$$

Logo a dupla $(a_1, x) \in (A \times B) \wedge (a_1, x) \in (A \times C)$. Pode-se aplicar essa mesma estratégia para demonstrar a última igualdade: se $(a_1, x) \in A \times (B \setminus C)$ então

$$(a_1 \in A) \wedge (x \in (B \setminus C)) = (a_1 \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)\,.$$

Logo a dupla $(a_1, x) \in (A \times B) \wedge (a_1, x) \notin (A \times C)$. □

## 2.3 Funções

O estabelecimento de relações entre entidades constitui o fundamento da linguagem, cuja finalidade é viabilizar o ato de pensar. No âmbito da linguagem algébrica, relacionar dois objetos significa descrever ou estabelecer algum elo matemático entre eles. Nesse contexto, os tipos de interação nesse par de objetos podem incluir vínculos de causa e efeito, transformações, dependências, atribuições, associações, entre outros. Essas correspondências são descritas por regras que especificam, através de expressões matemáticas, como serão construídos os pares de objetos relacionados.

O conceito basilar que rege as relações algébricas chama-se função, aqui entendido como a correspondência sistemática entre pares de objetos onde, em cada par, um desses objetos é elemento de conjunto e cada um desses elementos define um único par. Em termos mais precisos, dizemos que função é uma dupla $(D, f)$, onde $D$ é o conjunto ao qual nos referimos, chamado *domínio* da função, e $f$ é a regra que implementa a tal correspondência sistemática. Para evitar confusões, adotaremos aqui a notação consagrada que toma a regra por função, ou seja, $f$ neste caso representará, além de regra, a função $(D, f)$ e a diferença dos significados dependerá do contexto.

O único objeto relacionado a um elemento $d \in D$ representamos $f(d)$, chamado *valor da função* $f$ *em* $d$. Quando queremos dar enfoque ao domínio $D$ da função $f$, utilizamos a notação combinada $D_f$. Há também uma representação alternativa para a função $f$ que leva em conta o seu domínio:

$$d \mapsto f(d)\,,\, \forall\, d \in D\,, \tag{2.10}$$

onde cada elemento $d$ relaciona-se com um valor $f(d)$ por $f$.

A descrição da regra $f$ é feita via expressões algébricas, nas quais o símbolo representante de qualquer elemento do domínio é chamado *variável*. Para exemplificar, seja a função $(\mathbb{R}, f)$ tal que

$$f(x) = x^2 + 2\,, \tag{2.11}$$

onde a variável $x$, em ambos os lados, representa qualquer valor real. Essa sentença diz que o valor da função $f$, no lado esquerdo, é igual ao valor da expressão algébrica à direita. Dizemos também que a variável $x$ é o *argumento* de $f$.

Além do domínio, há pelo menos dois conjuntos notáveis adicionais no estudo das funções. O primeiro, o qual denominamos *imagem* da função $f$, representado $R_f$, é formado por todos os valores da função $f$, ou

$$R_f := \left\{f(d) : d \in D_f\right\}. \tag{2.12}$$

Quando se quer estudar a parcela do domínio de $f$ relacionada a um determinado subconjunto de sua imagem, falamos em *preimagem*. Melhor explicando, dado um conjunto $B \subseteq R_f$, a preimagem de $B$ é o conjunto $R_B^{-1} \subseteq D_f$ tal que

$$R_B^{-1} := \left\{ d \in D_f : f(d) \in B \right\}. \tag{2.13}$$

Se a função $f$ define valores distintos para os elementos de seu domínio, diz-se que ela é *inversível* e a resultante correspondência elemento-valor é um para um, ou *unívoca*. Em termos mais rigorosos, $f$ é inversível quando

$$d_1 \neq d_2 \Leftrightarrow f(d_1) \neq f(d_2), \forall\, d_1, d_2 \in D_f. \tag{2.14}$$

Quando os valores de $f$ inversível constituem uma imagem $R_f$, uma função $f^{-1}$ é dita *inversa* de $f$ se

$$D_{f^{-1}} = R_f \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(d)) = d\,, \forall d \in D_f\,. \tag{2.15}$$

Como consequência, temos que $f_{-1}$ também é inversível. Assim, considerando $g := f^{-1}$ e sua imagem $R_g$, pode-se admitir que existe um $g^{-1}$ onde, segundo a definição de função inversa,

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(f(d))) &= f(d) \\ g^{-1}\left(f^{-1}(f(d))\right) &= f(d) \\ g^{-1}(d) &= f(d)\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

para qualquer elemento $d \in D_f$; o que nos faz concluir que a função $f$ é a inversa de $f^{-1}$ e ambas portanto são ditas inversas entre si.

Podemos dizer que a sobreposição da inversa de uma função à ela própria resulta uma função na qual cada um de seus valores é idêntico ao seu argumento respectivo. Generalizando essa característica, uma função desse tipo recebe o nome de *identidade*, representada $i$, onde $i(d) = d, \forall\, d \in D_i$. Nesse caso, há sempre uma imagem de $i$ tal que $R_i = D_i$, permitindo concluir $i = i^{-1}$, uma vez que a função identidade é sempre inversível.

## 2.4 Mapeamentos

Há um outro tipo de relação algébrica na qual ambos os objetos envolvidos são elementos de conjuntos e a entidade relacional é uma função. A intenção final é relacionar conjuntos, dispondo para isso de atributos tipicamente funcionais. Assim, diz-se de um conjunto-origem $U$, sobre o qual uma função $f$ "atua" e um conjunto-destino $V$, ao qual os valores de $f$ pertencem. A essa relação denominamos *mapeamento* quando o domínio $D_f = U$ e a imagem $R_f \subseteq V$. Em termos matemáticos, o mapeamento é uma tripla $(U, V, f)$ onde se diz que $f$ mapeia $U$ para $V$ ou que

$$u \mapsto f(u) \in V\,, \forall u \in U\,. \tag{2.17}$$

A fim de enfatizar o caráter de correspondência origem-destino entre elementos de conjuntos, preferimos utilizar a notação $f : U \mapsto V$ ao invés da tripla $(U, V, f)$.

Se a imagem $R_f$ for igual ao conjunto-destino $V$, o mapeamento é chamado *sobrejetor* e a função $f$ uma *sobrejeção*, pela qual fica implícita a existência de uma imagem. Agora, quando a função $f$ é inversível, dizemos de um mapeamento *injetor* e denominamos $f$ uma *injeção*. Admitindo a existência de uma imagem para a injeção $f$, é possível definir o mapeamento $f^{-1} : R_f \mapsto U$, onde a imagem $R_f$, domínio de $f^{-1}$, é subconjunto impróprio de $V$. A função $f$ pode ser, cumulativamente, uma sobrejeção e uma injeção, quando recebe o nome de *bijeção* e o mapeamento respectivo é dito *bijetor*. A bijeção $f$ implica invariavelmente a existência do mapeamento $f^{-1} : V \mapsto U$, que também é bijetor.

Dizemos que o mapeamento $f : U \mapsto V$ é uma *operação* e sua função um *operador* se o domínio $U = V^n$. Nesse caso, quando $n$ assume os valores 1, 2, 3 e 4, operação e operador são classificados *unários*, *binários*, *ternários* e *quaternários* respectivamente; quando $n > 4$, eles são chamados *n-ários*. Os argumentos do operador são denominados *operandos* e o inteiro $n$ define a quantidade deles.

Interessante notar que o mapeamento injetor unário $f : V \mapsto V$ é sempre sobrejetor, pois a condição de inversibilidade (2.14) garante que um par qualquer de elementos distintos de $V$ corresponde a um par de elementos distintos de $V$ pela ação de $f$; assim, a imagem $R_f = V$. Por conta disso, podemos afirmar que toda injeção unária é uma bijeção.

No final da seção anterior, consideramos superficialmente uma tal "sobreposição" de funções; algo relativo a uma função que tem como argumento o valor de uma outra função. Esse importante conceito, em termos mais precisos, pode ser apresentado como se segue. Sejam os três mapeamentos $g : U \mapsto V$, $f : V \mapsto W$ e $h : U \mapsto W$ onde $h(u) = f(g(u)), \forall\, u \in U$. Nessas condições, diz-se que $h$ é a função *composta* de $f$ e $g$, representada $f \circ g$. Notar que a composição de funções só é comutativa numa situação particular onde as regras e os domínios envolvidos permitem. Além disso, temos as seguintes propriedades:

i. Dado $k : W \mapsto L$, tem-se $k \circ (f \circ g) = (k \circ f) \circ g$ ;

ii. Se $f$ e $g$ forem bijeções,

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1}, \\ f \circ f^{-1} &= i_W, \\ f^{-1} \circ f &= i_V ; \end{aligned}$$

iii. $f \circ i_V = i_W \circ f = f$.

**Demonstração**. Utilizando a definição de função composta em cada par de funções alternadamente, fica demonstrado o primeiro item. No item ii, para quaisquer $u$, $v$ e $w$ pertencentes a $U$, $V$ e $W$ respectivamente, a primeira igualdade é comprovada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1}(w) &= u \\ &= g^{-1}(v) \\ &= g^{-1}\left(f^{-1}(w)\right) = g^{-1} \circ f^{-1}(w) ; \end{aligned}$$

as demais são consequências triviais das definições de função composta e identidade. □

## 2.5 Grupos

A entidade algébrica mais fundamental que congrega os conceitos de coleção e relação chama-se grupo, definido por um conjunto e um mapeamento. Os elementos que constituem o conjunto estão todos inter-relacionados pelo mapeamento, expresso por uma operação binária cujo operador deve obedecer a algumas restrições. O conceito subjacente se apoia na "conciliação" de dois elementos quaisquer do conjunto, de tal forma que ela se relacione funcionalmente com um elemento desse mesmo conjunto.

Adição e multiplicação de números reais, composição de funções, subtração de inteiros são exemplos de ações matemáticas que o conceito de grupo pretende generalizar: todas elas são associativas, admitem um elemento identidade e um elemento inverso. Assim, podemos definir em termos rigorosos o conceito até agora exposto de forma intuitiva. Sejam um conjunto não vazio $G$ e uma operação binária $* : G \times G \mapsto G$, abreviada de $*(g_1, g_2)$ para $g_1 * g_2$, onde $g_1, g_2 \in G$. Denomina-se grupo o par ordenado $(G, *)$ se forem respeitados os axiomas

i. Associatividade: $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3\,, \forall\, g_1, g_2, g_3 \in G$;

ii. Elemento identidade: $\exists!\, e \in G$ tal que $g_1 * e = e * g_1 = g_1\,, \forall\, g_1 \in G$;

iii. Elemento inverso: $\exists!\, b \in G$ tal que $g_1 * b = b * g_1 = e$, $\forall g_1 \neq e$.

Quando for importante explicitar o operador, utilizaremos a notação $(G, *)$ para grupos, caso contrário falaremos simplesmente do grupo $G$.

Considerando então o grupo $G$, há operações $*$, como a adição e a multiplicação de números reais, que obedecem também ao axioma da

i. Comutatividade: $g_1 * g_2 = g_2 * g_1\,, \forall\, g_1, g_2 \in G$;

característica que torna $G$ um grupo *abeliano* ou *comutativo*. Em contrapartida, os grupos onde a ordem dos operandos afeta o valor de seu operador são denominados *não-abelianos* ou *não-comutativos*. O grupo abeliano que implementa o conceito genérico da adição é denominado *aditivo* e aquele que implementa o da multiplicação é *multiplicativo*, ambos representados respectivamente por $(G, +)$ e $(G, \cdot)$. Adotamos as notações $g_1^{-1}$ e $-g_1$ como elementos inversos de $g_1 \in G$ no contexto das operações de multiplicação e adição respectivamente.

O fato de conjuntos constituirem grupos não impede que a partir deles sejam definidos mapeamentos. Quando isso ocorre, fica claro que o argumento da função envolvida deve admitir qualquer valor da operação atrelada ao domínio, pois o agrupamento de todos esses valores constitui o próprio domínio. Em outras palavras, dado o mapeamento $h : G \mapsto W$, onde os conjuntos envolvidos definem os grupos $(G, *)$ e $(W, \rtimes)$, tem-se no domínio $G$ que qualquer elemento $g$ é valor de um $g_1 * g_2$; e assim fica evidente que o valor $h(g) = h(g_1 * g_2)$.

Pode ocorrer que a operação do grupo $W$ entre os valores $h(g_1)$ e $h(g_2)$, ou seja $h(g_1) \rtimes h(g_2)$, resulte igual ao valor $h(g_1 * g_2)$. Além disso, se $h$ mapear o elemento identidade de $G$ para o de $W$, diz-se que esses grupos são, no contexto operacional, estruturalmente similares ou *homomórficos* em $h$. Numa linguagem mais matemática, a função $h$ em $h : G \mapsto W$ é um *homomorfismo de grupo* se fizer os grupos $G$ e $W$ homomórficos, ou seja se

i. $h(g_1 * g_2) = h(g_1) \rtimes h(g_2)$, $\forall\, g_1, g_2 \in G$ e

ii. $h(e_G) = e_W$, onde $e_G \in G$ e $e_W \in W$ são elementos identidade.

Um homomorfismo-bijeção é dito um *isomorfismo* e os grupos envolvidos são *isomórficos* em $h$. Se a função $f$ no mapeamento $f : G \mapsto G$ for um isomorfismo, então ela é denominada um *automorfismo*.

Vamos considerar agora o mapeamento $k : G^{\times n} \mapsto W$, onde o domínio é um produto cartesiano de $n$ conjuntos que definem cada qual um grupo. Nesse caso, diz-se que $k$ é homomorfismo de grupo se, para todo grupo $G_i$ e quaisquer elementos $g_{i_1}, g_{i_2} \in G_i$,

$$k\left(g_1, \cdots, g_{i_1} * g_{i_2}, \cdots, g_n\right) = k\left(g_1, \cdots, g_{i_1}, \cdots, g_n\right) \rtimes k\left(g_1, \cdots, g_{i_2}, \cdots, g_n\right) \tag{2.18}$$

e também

$$k\left(e_{G_1}, \cdots, e_{G_n}\right) = e_W \,. \tag{2.19}$$

Da mesma forma, $k$ é um isomorfismo se for um homomorfismo-bijeção.

## Ação de Grupo

Sejam o grupo $\boldsymbol{G}_{G*}$ e um conjunto não vazio $B$. Diz-se que grupo $\boldsymbol{G}_{G*}$ *age* em $B$ se existe um mapeamento $\varphi : G \times B \mapsto B$ tal que a função $\varphi$ respeita os axiomas

i. Elemento identidade: $\varphi(e, b) = b, \forall\, b \in B$;

ii. Associatividade: $\varphi(g_1, \varphi(g_2, b)) = \varphi(g_1 * g_2, b), \forall\, b \in B, \forall\, g_1, g_2 \in G$.

Diz-se que o conjunto $B$, sobre o qual define-se a ação[4] $\varphi$ do grupo $\boldsymbol{G}_{G*}$, é um G-conjunto.

[4]Em termos mais precisos, diz-se que $\varphi$ é uma ação de grupo *à esquerda*, já que se pode definir uma outra ação *à direita* $\tilde{\varphi}$ onde $\tilde{\varphi} : B \times G \mapsto B$. Neste trabalho, este termo adicional é suprimido, pois as ações consideradas são sempre à esquerda.

### Ação Simplesmente Transitiva

Seja $B$ um G-conjunto de $\boldsymbol{G}_{G*}$. A ação de grupo $\varphi$ em $\varphi : G \times B \mapsto B$ é dita simplesmente transitiva[5] se, dados dois elementos quaisquer $b_1, b_2 \in B$, existir um *único* $g \in G$ tal que $\varphi(g, b_1) = b_2$.

[5] Além da ação simplesmente transitiva, a Teoria de Grupos define outros tipos não apresentados no texto.Ver MILNE[22].

Capítulo 3

# Fundamentos da Álgebra Linear

## 3.1 Espaços Métricos

### Espaço Métrico

Seja um conjunto $M$ e um mapeamento $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}$. O par ordenado $(M, \rho)$ é denominado espaço métrico se a função $\rho$, chamada *métrica*, respeitar os axiomas

i. Positividade: $\rho(m_1, m_2) \geqslant 0, \forall\, m_1, m_2 \in M$;

ii. Definição: $\rho(m_1, m_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2, \forall\, m_1, m_2 \in M$;

iii. Simetria: $\rho(m_1, m_2) = \rho(m_2, m_1), \forall\, m_1, m_2 \in M$;

iv. Desigualdade triangular:

$$\rho(m_1, m_2) \leq \rho(m_1, m_3) + \rho(m_3, m_2), \forall\, m_1, m_2, m_3 \in M.$$

Os axiomas da métrica induzem intuitivamente o conceito de *distância* entre os elementos de um espaço métrico.

### Bolas e Esferas

Seja o espaço métrico $(M,\rho)$. O conjunto $B_{a,r}$ é dito uma *bola aberta* com centro em $a \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$ se

$$B_{a,r} = \{x \in M \,|\, \rho(x,a) < r\} \,. \tag{3.1}$$

Uma *bola fechada* $\overline{B}_{a,r}$ com centro em $a$ e raio $r$ é definida por

$$\overline{B}_{a,r} = \{x \in M \,:\, \rho(x,a) \leqslant r\} \,. \tag{3.2}$$

O conjunto $\partial B_{a,r}$ é uma esfera com centro em $a$ e raio $r$ se

$$\partial B_{a,r} = \{x \in M \,:\, \rho(x,a) = r\} \,. \tag{3.3}$$

### Fechamento de Conjunto

Seja o espaço métrico $(M,\rho)$ e o conjunto $A \subset M$. Diz-se que o conjunto

$$\overline{A} := \left\{x \in M \,:\, A \cap B_{x,r} \neq \emptyset, \,\forall\, r \in \mathbb{R}\right\} \tag{3.4}$$

é o fechamento de $A$. Caso $A = \overline{A}$, o conjunto $A$ é denominado *fechado*.

### Interior de Conjunto

Dado o espaço métrico $(M,\rho)$, o interior do conjunto $A \subset M$ é o conjunto

$$\widehat{A} := \left\{x \in A \,:\, \exists\, r \in \mathbb{R},\, B_{x,r} \subset A\right\} . \tag{3.5}$$

Caso $A = \widehat{A}$, diz-se que o conjunto $A$ é *aberto*.

### Contorno de Conjunto

Dado o espaço métrico $(M,\rho)$, o contorno do conjunto $A \subset M$ é o conjunto

$$\partial A := \overline{A}/\widehat{A} . \tag{3.6}$$

Fica óbvio então que $\overline{A} = \partial A \cup \widehat{A}$.

### Conjunto Desconexo

Dado o espaço métrico $(M,\rho)$, o conjunto $M$ é dito desconexo se existirem os subconjuntos próprios abertos disjuntos $M_1,\cdots,M_n$ de $M$, $2 \leqslant n \leqslant \infty$, tais que

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i\,. \tag{3.7}$$

Caso não existam tais subconjuntos, o conjunto $M$ é denominado *conexo*.

### Seqüência de Cauchy

Seja um espaço métrico $(M,\rho)$ e uma seqüência qualquer $m_1, m_2, \cdots \in M$. Diz-se que $m_1, m_2, \cdots$ é uma seqüência de Cauchy se

$$\lim_{\min(i,j)\to\infty} \rho\left(m_i, m_j\right) = 0. \tag{3.8}$$

Em outras palavras, ao se percorrer uma seqüência de Cauchy os elementos aproximam-se uns dos outros.

Seja uma outra seqüência $u_1, u_2, \cdots \in M$ *convergente* para $w \in M$. Diz-se então que

$$\lim_{i\to\infty} \rho\,(u_i, w) = 0. \tag{3.9}$$

Pela desigualdade triangular é certo dizer que

$$\rho\left(u_i, u_j\right) \leq \rho\,(u_i, w) + \rho\left(w, u_j\right). \tag{3.10}$$

Fazendo $\min(i,j) \to \infty$, tem-se que o lado direito tende a zero, pois $u_1$,$u_2$,$\cdots$ converge para $w$. Devido à condição da desigualdade, o lado esquerdo também tende a zero. Conclui-se, genericamente, que toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy. A recíproca, entretanto, não é verdadeira.

### Espaço Métrico Completo

Diz-se que um espaço métrico $(M,\rho)$ é completo se toda seqüência de Cauchy em $M$ convergir para um elemento de $M$. Em outras palavras, para toda seqüência de Cauchy $m_1, m_2, \cdots \in M$ sempre existe um certo $w \in M$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \rho\,(m_i, w) = 0. \tag{3.11}$$

Intuitivamente, em um espaço métrico completo não há "buracos". O conjunto $M$, neste caso, está "completamente preenchido". Costuma-se denominar um espaço métrico completo com o substantivo *contínuo*.

O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, por exemplo, não é um contínuo, visto que pode existir uma seqüência de Cauchy de número racionais convergindo para um número irracional. Exemplificando, a seqüência de Cauchy

$$0.14, 0.141, 0.1414, 0.14142, 0.141421, \cdots \to \sqrt{2}\,. \tag{3.12}$$

### Vizinhança

Seja o espaço métrico completo $(M, \varrho)$ e o conjunto não vazio $A \subset M$. Denomina-se *vizinhança aberta* de $A$ qualquer bola aberta que contenha $A$. Um conjunto $A_{vz}$ contendo a vizinhança aberta de $A$ é dita uma vizinhança de $A$. Se $A = \{a\}$, diz-se que a vizinhança de $A$ é a vizinhança do elemento $a$, representada por $\{a\}_{vz}$.

## Função Contínua

Sejam os espaços métricos completos $M$ e $W$. Considerando um elemento $m \in M$, a função no mapeamento

$$f : M \mapsto W \tag{3.13}$$

é dita contínua em $m$ se o conjunto

$$\{f(x) : x \in \{m\}_{vz}\} \subset \{f(m)\}_{vz}\,. \tag{3.14}$$

Em outras palavras, a vizinhança de $m$, sob ação de $f$, é mapeada para a vizinhança de $f(m)$. Uma condição necessária e suficiente para que $f$ seja contínua em $m$ é que o

$$\lim_{x \to m} f(x) = f(m)\,, \forall\, x \in M. \tag{3.15}$$

Em outras palavras, quando $x \to m$, $f(x) \to f(m)$. Se a função for contínua em qualquer $m$, diz-se que ela é contínua em $M$.

### Função Contínua de Lipschitz

Considerando as condições anteriores, dada uma constante escalar $\Lambda$, se a função $f$ obedece a desigualdade

$$\rho\left(f(x), f(m)\right) \leq \Lambda \rho(x, m), \forall x \in M, \tag{3.16}$$

chamada *condição de Lipschitz*, então ela é contínua em $m$. A continuidade fica assegurada pois quando o elemento $x \to m$ na condição anterior, a métrica garante que o valor $f(x) \to f(m)$. Uma função que respeita a condição de Lipschitz em $m$ é dita contínua de Lipschitz em $m$. Se $m$ for um elemento qualquer, então tal função é dita contínua de Lipschitz em $M$.

### Homeomorfismo

Ainda considerando as condições anteriores, diz-se que a função $f$ é um homeomorfismo[1] se ela e sua função inversa forem bijeções contínuas em seus domínios respectivos.

## 3.2 Espaços Vetoriais

### Espaço Vetorial

Sejam um grupo abeliano aditivo $\overline{\boldsymbol{G}}_{V+}$, um campo $\mathcal{F}_F$ e um mapeamento $\diamond : F \times V \mapsto V$. Tradicionalmente, adota-se a notação $\boldsymbol{x}$ para o elemento $x \in V$. Conforme prática anterior, abrevia-se $\diamond(a, \boldsymbol{x})$ para $a\boldsymbol{x}$, onde $a \in F$ e $\boldsymbol{x} \in V$. Denomina-se espaço vetorial[2] à tripla ordenada $\left(\overline{\boldsymbol{G}}_{V+}, \mathcal{F}_F, \diamond\right)$ que obedece aos seguintes axiomas:

i. $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}, \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\, a \in F;$

ii. $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}, \forall\, \boldsymbol{x} \in V,\, a, b \in F;$

iii. $(ab)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x}), \forall\, \boldsymbol{x} \in V,\, a, b \in F;$

[1] Atenção para não confundir com homomorfismo (sem o "e").

[2] Pode-se interpretar o conceito de espaço vetorial como uma conseqüência da junção, na forma de tupla ordenada, de um grupo com um anel. Na verdade, espaço vetorial é uma particularização de um conceito mais geral chamado Módulo de Anel ou R-Módulo. Ver Connel[7].

iv. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \forall\, \boldsymbol{x} \in V$, onde 1 é a identidade multiplicativa de $F$;

v. $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}0 = \boldsymbol{0}, \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, onde $\boldsymbol{0}$ é o elemento nulo de $V$.

Chama-se *vetor* um elemento de $V$. A notação abreviada para o espaço vetorial $\left(\overline{\boldsymbol{G}}_{V+}, \mathcal{F}_F, \diamond\right)$ é $\boldsymbol{V}_V^F$, onde os conjuntos $V$ e $F$ definem um grupo e um campo respectivamente.

**Exemplos**

- Espaço dos Racionais: $\boldsymbol{V}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}} = \left((\mathbb{Q}, +), \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, \diamond\right)$;
- Espaço Vetorial Real: $\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}} = ((V, +), \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \diamond)$;
- Espaço Vetorial Complexo: $\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{C}} = ((V, +), \mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \diamond)$.

## Combinação Linear

Sejam o espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$, um subconjunto finito $\tilde{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \subset V$ e uma seqüência $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$. Diz-se que o vetor $\sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i$ é uma combinação linear de $\tilde{V}$ em $F$.

O subconjunto $\tilde{V}$ é *linearmente dependente* se existir uma seqüência específica $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$, com pelo menos um dos elementos $\alpha_i \neq 0$, que promova

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}. \tag{3.17}$$

Se não existir esta seqüência , o subconjunto $\tilde{V}$ é dito *linearmente independente*. Como conseqüência, não é possível que os vetores de um conjunto linearmente independente sejam combinações lineares uns dos outros; fato que não ocorre no caso de conjuntos linearmente dependentes.

## Subespaço Vetorial

Sejam o espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ e um subconjunto $U \subseteq V$. Denomina-se subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}_V^F$ o espaço vetorial $\left(\overline{\boldsymbol{G}}_{U+}, \mathcal{F}_F, \tilde{\diamond}\right)$, tal que $\tilde{\diamond} : F \times U \mapsto U$.

Se $U = V$ ou $U = \emptyset$, diz-se que $\boldsymbol{V}_U^F$ é *subespaço impróprio* de $\boldsymbol{V}_V^F$, caso contrário ele é *subespaço próprio* de $\boldsymbol{V}_V^F$. Descrevendo mais detalhadamente o mapeamento $\tilde{\diamond} : F \times U \mapsto U$, tem-se que

$$(a, \boldsymbol{v}) \mapsto \tilde{\diamond}(a, \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v} \in U, \forall\, a \in F, \boldsymbol{v} \in U. \tag{3.18}$$

Escolhendo $a = 0$, obtém-se que $\mathbf{0} \in U$. Notar que isto sempre é válido para qualquer subespaço de $\boldsymbol{V}_V^F$.

### Subespaço Gerado

Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ e um subconjunto não vazio $U$ de $V$. Denomina-se *span* de $U$ ou $spU$ o conjunto formado por todas as combinações lineares dos subconjuntos finitos de $U$.

Seja um subconjunto qualquer $\tilde{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \subset U$ e duas combinações lineares de $\tilde{V}$ em $F$ que são os vetores $\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \in spU$ e $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{v}_i \in spU$, tal que $\alpha_i, \beta_i \in F$. Observa-se que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\alpha_i + \beta_i)}_{\in F} \boldsymbol{v}_i \in spU, \tag{3.19}$$

onde se comprova uma operação aditiva $+ : spU \times spU \mapsto spU$. A partir daí, é facilmente observável que $spU$ define um grupo abeliano aditivo $\overline{\boldsymbol{G}}_{spU+}$. Adotando-se um $k \in F$, tem-se que

$$k \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(k\alpha_i)}_{\in F} \boldsymbol{v}_i \in spU, \tag{3.20}$$

onde se comprova o mapeamento multiplicativo $\tilde{\diamond} : F \times spU \mapsto spU$. Juntamente com a definição de $\overline{\boldsymbol{G}}_{spU+}$, pode-se obter, através das validações dos axiomas de espaço vetorial, que $spU$ define $\boldsymbol{V}_{spU}^F$, subespaço de $\boldsymbol{V}_V^F$. Diz-se que $\boldsymbol{V}_{spU}^F$ é gerado por $U$.

Em particular, se $U$ for finito e subconjunto próprio de $V$, $U \subset V$, tal que $U$ gere $\boldsymbol{V}_V^F$, isto é $V = spU$, diz-se que $\boldsymbol{V}_V^F$ é *dimensionalmente finito*.

### Base

Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ e um subconjunto não vazio $U$ de $V$. Diz-se que $U$ é uma base de $\boldsymbol{V}_V^F$ se ele for linearmente independente e gerar $\boldsymbol{V}_V^F$, isto é $V = spU$.

Caso $\boldsymbol{V}_V^F$ seja dimensionalmente finito, então pode-se ter a base $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ e a seqüência $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ de $F$ tal que

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \forall\, \boldsymbol{w} \in V. \tag{3.21}$$

Seja uma outra seqüência $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, tal que, por hipótese,

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{v}_i, \; \forall\, \boldsymbol{w} \in V. \tag{3.22}$$

Subtraindo as duas expressões, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\, \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}. \tag{3.23}$$

Conclui-se que $\alpha_i = \beta_i$ já que $U$, formado pelos vetores $\boldsymbol{v}_i$, é linearmente independente. Desta forma, a tupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, geradora de $\boldsymbol{w}$ na base $U$, é *única*. Os escalares $\alpha_i$ da tupla são então chamados *coordenadas* de $\boldsymbol{w}$ na base $U$. É importante observar que a seqüência dos escalares na tupla corresponde à seqüência previamente definida para os vetores da base. Portanto, para se trabalhar com coordenadas, deve-se definir primeiramente a base e sua ordenação.

## Dimensão

Seja um espaço vetorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{V}_V^F$. Por hipótese, sejam duas bases deste espaço: $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ e $W = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$, tal que $m \geqslant n$. Pode-se afirmar, então, que

$$V = sp\,\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_1\}, \tag{3.24}$$

onde o conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_1\}$ é linearmente dependente. A retirada de um vetor $\boldsymbol{v}_i$ que seja combinação linear dos demais implica

$$V = sp\,\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{w}_1\}. \tag{3.25}$$

Realizando inserções distintas sucessivas de membros de $W$ e retiradas sucessivas de membros de $U$, tem-se no penúltimo passo,

$$V = sp\,\{\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_{n-1}\}. \tag{3.26}$$

Finalmente, após a retirada do último vetor $\boldsymbol{v}_i$ e inclusão de um dos $\boldsymbol{w}_i$ restantes, obtém-se

$$V = sp\,\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}. \tag{3.27}$$

Observa-se que a hipótese preliminar para a base $W$ só é confirmada para $m = n$. Genericamente, conclui-se que qualquer base de $\boldsymbol{V}_V^F$ tem sempre a mesma quantidade de termos, chamada dimensão. A dimensão de $\boldsymbol{V}_V^F$ é representada por $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right)$. Quando $V = \{\mathbf{0}\}$, convencionou-se que $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = 0$.

Através do procedimento desenvolvido, pode-se concluir também que todo subconjunto de $V$ linearmente independente com $n$ termos é uma base de $\boldsymbol{V}_V^F$. Além disso, caso $W = sp\left\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_q\right\}$, $q \leqslant n$, então $W \subseteq V$, logo $\dim\left(\boldsymbol{V}_W^F\right) \leqslant \dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right)$.

### Espaço Vetorial Normado

Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ e um mapeamento $\eta : V \mapsto F$. Um espaço vetorial normado é definido pelo par ordenado $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \eta\right)$, tal que a função $\eta$, chamada *norma*, deve respeitar os axiomas

i. Positividade: $\eta(\boldsymbol{v}) \geqslant 0, \forall\, \boldsymbol{v} \in V$;

ii. Definição: $\eta(\boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$;

iii. Homogeneidade: $\eta(a\boldsymbol{v}) = |a|\eta(\boldsymbol{v})$, tal que $|a|$ indica o valor positivo de $a, \forall\, \boldsymbol{v} \in V, a \in F$;

iv. Desigualdade Triangular: $\eta(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \leq \eta(\boldsymbol{v}) + \eta(\boldsymbol{w}), \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$.

Para a norma de $\boldsymbol{v}$, costuma-se abreviar a notação $\eta(\boldsymbol{v})$ com $\|\boldsymbol{v}\|$.

### Espaço Vetorial Métrico

Seja um espaço métrico $(M, \rho)$ tal que $M$ define o espaço vetorial $\boldsymbol{V}_M^F$. Denomina-se o par ordenado $\left(\boldsymbol{V}_M^F, \rho\right)$ espaço vetorial métrico. É conveniente lembrar que, neste caso, o mapeamento $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ define a distância entre dois vetores quaisquer. Caso o espaço métrico $(M, \rho)$ seja completo, então o espaço vetorial métrico $\left(\boldsymbol{V}_M^F, \rho\right)$ também é dito completo.

### Espaço de Banach

Seja um espaço vetorial métrico completo $\left(\boldsymbol{V}_M^F, \rho\right)$ sobre o qual define-se a norma $\eta$ que mapeia $M$ para $F$. O par ordenado $\left(\left(\boldsymbol{V}_M^F, \rho\right), \eta\right)$ é chamado espaço de Banach. Em outras palavras, um espaço de Banach é um espaço métrico completo e normado, cuja notação é aqui abreviada para $\boldsymbol{B}_M^F$.

### Espaços Vetoriais Produto Interno

Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ e um mapeamento $\xi : V \times V \mapsto F$. Denomina-se o par ordenado $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \xi\right)$ de espaço vetorial produto interno generalizado se a função $\xi$, chamada *produto interno generalizado*, respeitar os axiomas

i. Definição: $\xi\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \forall\, \boldsymbol{v} \in V$;

ii. Simetria: $\xi\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right) = \xi\left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\right), \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$;

iii. Bilinearidade[3]: dados $a_1, a_2, a_3 \in F$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ quaisquer,

$$\xi\left(a_1 \boldsymbol{u}, \left(a_2 \boldsymbol{v} + a_3 \boldsymbol{w}\right)\right) = a_1 a_2 \xi\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) + a_1 a_3 \xi\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right).$$

O produto interno generalizado é classificado como *produto interno positivo-definido* ou simplesmente produto interno, representado $\xi^+$, quando

$$\xi^+\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right) \geqslant 0, \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.28}$$

Abrevia-se a notação do produto interno $\xi^+\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right)$ para $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$. O produto interno $\xi^-$ onde

$$\xi^-\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right) \leqslant 0, \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.29}$$

é denominado *produto interno negativo-definido*.

### Espaço de Hilbert

Seja um espaço de Banach $\boldsymbol{B}_V^F$ sobre o qual define-se um produto interno positivo-definido $\xi^+$. Denomina-se espaço de Hilbert o par ordenado $\left(\boldsymbol{B}_V^F, \xi^+\right)$, tal que a norma em $\boldsymbol{B}_V^F$ é *induzida* ou definida pelo produto interno, sendo respeitado o axioma da

i. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2| \leqslant \|\boldsymbol{v}_1\| \|\boldsymbol{v}_2\|, \forall\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$.

Seja uma operação $f : F \mapsto F$ e o mapeamento $\xi^+ : V \times V \mapsto F$. No espaço de Hilbert, a norma

$$\eta\left(\boldsymbol{v}\right) := f \circ \xi^+\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right) \text{ ou } \|\boldsymbol{v}\| := f\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\right), \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.30}$$

A notação $\left(\boldsymbol{B}_V^F, \xi^+\right)$ para espaço de Hilbert é abreviada com $\boldsymbol{H}_V^F$.

[3]Ver seção 3.4.

### Espaço Vetorial Euclidiano

Trata-se de um espaço de Hilbert no campo real, $\boldsymbol{H}_V^{\mathbb{R}}$, onde o espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}}$ nele definido é dimensionalmente finito, a norma

$$\eta(\boldsymbol{v}) := \sqrt{\xi^+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \text{ ou } \|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}},\ \forall\, \boldsymbol{v} \in V \tag{3.31}$$

e a métrica

$$\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|,\ \forall\, \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V\,. \tag{3.32}$$

Abrevia-se um espaço vetorial Euclidiano $n$-dimensional $\boldsymbol{H}_V^{\mathbb{R}}$ com $\boldsymbol{E}_V^n$.

## Ortogonalidade

Seja um espaço vetorial produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F,\xi^+\right)$ e os vetores $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in V$. Diz-se que $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ são ortogonais, $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2$, se $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0$.

Sejam os subconjuntos $P \subseteq V$ e $Q \subseteq V$. Se $\boldsymbol{u} \in V$ é ortogonal a qualquer elemento de $P$, diz-se que $\boldsymbol{u} \perp P$. Se qualquer elemento de $P$ for ortogonal a qualquer elemento de $Q$ então $P \perp Q$.

**Teorema 1** *Seja um espaço vetorial produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F,\xi^+\right)$ e um vetor não nulo $\boldsymbol{u} \in V$, onde são válidas as seguintes afirmações:*

i. *Todo vetor $\boldsymbol{v} \in V$ pode ser decomposto na forma $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ tal que $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{w}$ e $a \in F$;*

ii. *Seja um subconjunto $P \subseteq V$ tal que $\boldsymbol{u} \perp P$. Se $\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m\}$ é uma base de $\boldsymbol{V}_P^F$, então $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m\}$ é uma base de $\boldsymbol{V}_V^F$;*

iii. *Seja um subconjunto $P \subseteq V$ tal que $\boldsymbol{u} \perp P$. Se $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = n$ e $\dim\left(\boldsymbol{V}_P^F\right) = m$, então $m = n-1$.*

**Demonstração.**

i. Supondo, por hipótese, que haja mais de uma decomposição para $\boldsymbol{v}$, pode-se dizer que $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}_2$. Subtraindo a segunda igualdade da primeira, tem-se [1] $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2 = (\beta-\alpha)\boldsymbol{u}$. Por definição, $\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{u} = 0$ e $\boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{u} = 0$. Logo [2] $(\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2)\cdot\boldsymbol{u} = 0$. Combinando [1] e [2] obtém-se $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0$, que é impossível.

ii. Avaliando os axiomas de espaço vetorial, pode-se demonstrar facilmente que $\boldsymbol{V}_P^F$ é subespaço de $\boldsymbol{V}_V^F$. O conjunto $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m\}$ é linearmente independente, pois nenhum elemento pode ser combinação linear dos demais: a parcela $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ é uma base e se, por hipótese, $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{w}_i$, obtém-se que

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left( \boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{u} \right) = 0,$$

que é impossível. Seja um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$ e um $\boldsymbol{z} \in P$ ortogonal a $\boldsymbol{u}$. Através de *i.*, pode-se afirmar que

$$\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{u} + \left( \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m \right),$$

mostrando que $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$.

iii. Seja $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = n$ e $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$ base de $\boldsymbol{V}_P^F$. Devido à *ii.*, tem-se que $V = sp\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$. Logo, $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = m + 1 = n$.

□

## Ortonormalidade

Seja um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$, onde $\boldsymbol{V}_V^F$ é $n$-dimensional, e $U = \{\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \cdots\}$ subconjunto próprio de $V$, cujos elementos são *unitários*, $\|\hat{\boldsymbol{v}}_i\| = 1$, e ortogonais entre si. Denomina-se o subconjunto $U$ ortonormal. Um subconjunto ortonormal é linearmente independente, já que não é possível que um vetor $\hat{\boldsymbol{v}}_i \in U$ seja combinação linear dos demais vetores de $U$.

Se for exigido que $V = spU$, então $U$ torna-se uma *base ortonormal* do espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ em $\boldsymbol{H}_V^F$, tal que $U = \{\hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_n\}$.

**Teorema 2** *Todo espaço vetorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{V}_V^F$, sobre o qual define-se um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$, tem base ortonormal.*

**Demonstração**. Primeiramente, admitamos que $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = 1$. Nesta condição, qualquer conjunto com um único elemento é base de $\boldsymbol{V}_V^F$. Portanto, pode-se dizer que $\{\hat{\boldsymbol{v}}\} \subset V$ é uma base ortonormal. Agora, admitamos que $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = n$, $n > 1$ e o espaço de dimensão $n-1$ possui base ortonormal. Seja um vetor unitário $\hat{\boldsymbol{u}} \in V$. Segundo o teorema 1, o conjunto $V = sp\{\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{w}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{w}}_{n-1}\}$, onde $\{\hat{\boldsymbol{w}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{w}}_{n-1}\} \perp \hat{\boldsymbol{u}}$ é base ortonormal de um espaço de dimensão $n-1$. Conclui-se, por indução, que independente do valor de $n$, o espaço $\boldsymbol{V}_V^F$ sempre possui uma base ortonormal. □

## Conjuntos Recíprocos

Seja um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$, definido por $\boldsymbol{V}_V^F$ $n$-dimensional, e os subconjuntos ordenados $U = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $W = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ de $V$. Estes conjuntos são ditos recíprocos se

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{w}_j = \delta_{ij}. \tag{3.33}$$

**Demonstração**. A fim de legitimar esta definição, deve-se verificar a existência de pelo menos um par de conjuntos recíprocos. Considerando que $Z = \{\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n\}$ é uma base ortogonal de $\boldsymbol{V}_V^F$ e os vetores $\boldsymbol{g}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(k)} \boldsymbol{z}_j$, se $Z$ e $\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ forem recíprocos, então os $k$ sistemas lineares a seguir devem ter soluções determinadas:

$$\left[\boldsymbol{z}_i \cdot \boldsymbol{z}_j\right]\left[\beta_j^{(k)}\right] = [\delta_{ik}], \tag{3.34}$$

onde $[\bullet]$ é a representação matricial contendo os escalares envolvidos. Em cada um dos sistemas lineares, $\det\left[\boldsymbol{z}_i \cdot \boldsymbol{z}_j\right]$ deve ser não nulo. Isto é sempre garantido, pois pode-se verificar facilmente que a matriz $\left[\boldsymbol{z}_i \cdot \boldsymbol{z}_j\right]$ é positiva-definida.

Agora, supondo que existam outros vetores $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n \in V$ tais que os produtos internos $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{h}_j = \delta_{ij}$, tem-se, a partir de (3.33), que $\boldsymbol{u}_i \cdot (\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{h}_j) = 0$. Como os vetores $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{w}_j$ e $\boldsymbol{h}_j$ não podem ser nulos, então $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{h}_j$, garantido a unicidade do par de conjuntos recíprocos $U$ e $W$. □

Considerando que o conjunto $U$ é uma base de $\boldsymbol{V}_V^F$ recíproca ao conjunto $W$, seja então um vetor $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \boldsymbol{w}_i \in V$. Caso $\boldsymbol{u}$ seja nulo, então

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \boldsymbol{w}_i) \cdot \boldsymbol{u}_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \gamma_i \delta_{ij} &= 0 \\ \gamma_j &= 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Tem-se portanto o conjunto $W$ linearmente independente, revelando-se, portanto, uma base de $\boldsymbol{V}_V^F$, pois $U$ e $W$ têm o mesmo número de elementos e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \gamma_i = 0$. É interessante notar que caso $\boldsymbol{H}_V^F$ seja um espaço vetorial Euclidiano, toda base ortonormal é recíproca à ela própria.[4]

## 3.3 Espaços Vetoriais de Funções

### Espaço Vetorial de Funções

Sejam os espaços vetoriais $\boldsymbol{V}_{U_1}^F, \cdots, \boldsymbol{V}_{U_p}^F$ e $\boldsymbol{V}_W^F$. Seja $M_{U^{\times p} \mapsto W}$ o conjunto de todas as funções que mapeiam $U^{\times p}$ para $W$. Genericamente, uma função[5]

[4] Ver a seção 3.2 e a definição (3.31).

[5] Costuma-se qualificar de vetoriais as funções cuja imagem pode definir um espaço vetorial. Tal denominação ficará subentendida, já que as funções não vetoriais tratadas

$h$ que define $h : U^{\times p} \mapsto W$ é um elemento do conjunto $M_{U^{\times p} \mapsto W}$.

Adotando o vetor $\mathbf{0}$ como uma função que define mapeamentos do tipo $U^{\times p} \mapsto \{\mathbf{0}\}$, pode-se definir o espaço vetorial de funções $\boldsymbol{V}^F_{M_{U^{\times p} \mapsto W}}$, convenientemente representado por $\boldsymbol{M}^F_{U^{\times p} \mapsto W}$. A fim de identificar a função $m \in M_{U^{\times p} \mapsto W}$ como um vetor, sua notação é modificada para $\boldsymbol{m}$. A descrição dos mapeamentos em questão fica da seguinte forma:

$$\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right) \mapsto \boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right) \in W, \forall\, \boldsymbol{u}_i \in V_i, \boldsymbol{m} \in M_{U \mapsto W}. \tag{3.36}$$

Uma vez que se define o espaço vetorial $\boldsymbol{M}^F_{U^{\times p} \mapsto W}$, é necessário definir como as operações - adição e multiplicação por escalar - entre suas funções interagem com os respectivos argumentos. Para tal, as seguintes igualdades são definidas para quaisquer $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in M_{U^{\times p} \mapsto W}$ e $a \in F$:

i. $(\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2)\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right) = \boldsymbol{m}_1\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right) + \boldsymbol{m}_2\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right)$;

ii. $(a\boldsymbol{m})\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right) = a\boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p\right)$.

Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{M}^F_{U^{\times p} \mapsto U^{\times p}}$. Pode-se dizer que uma função identidade $i_{U^{\times p}}$ é elemento que define o vetor $\boldsymbol{i}_{U^{\times p}} \in M_{U^{\times p} \mapsto U^{\times p}}$.

### Funcional

Sejam o espaços vetoriais $\boldsymbol{V}^F_{V_1}, \cdots, \boldsymbol{V}^F_{V_p}$, $\boldsymbol{V}^F_F$ e $\boldsymbol{M}^F_{V^{\times p} \mapsto F}$. Uma função qualquer $\boldsymbol{f} \in M_{V^{\times p} \mapsto F}$, onde se associa um elemento de $V^{\times p}$ a um escalar, é chamada funcional.

### Função Transposta

Sejam os espaços vetoriais produto interno $\left(\boldsymbol{V}^F_V, \xi^+\right)$, $\left(\boldsymbol{V}^F_W, \xi^+\right)$ e os espaços vetoriais de funções $\boldsymbol{M}^F_{V \mapsto W}$ e $\boldsymbol{M}^F_{W \mapsto V}$. Existe uma única função $\boldsymbol{g}^T \in M_{W \mapsto V}$, chamada função transposta de $\boldsymbol{g} \in M_{V \mapsto W}$, tal que

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w}), \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W. \tag{3.37}$$

A partir desta igualdade, pode-se demonstrar facilmente que existe somente uma única função $\boldsymbol{g}^T$.

terão qualificação específica.

### Operador Simétrico

Seja um espaço vetorial de funções $\boldsymbol{M}^F_{V\mapsto V}$. Uma função $\boldsymbol{s} \in M_{V\mapsto V}$ é denominada operador simétrico se

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^T. \tag{3.38}$$

Um operador $\boldsymbol{g} \in M_{V\mapsto V}$ é *anti-simétrico* se $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{g}^T$.

## 3.4 Funções Lineares

### Homomorfismo de Espaço Vetorial

Sejam os espaços vetoriais $\boldsymbol{V}^F_W$ e $\boldsymbol{V}^F_V$, definidos sobre os grupos abelianos aditivos $\overline{\boldsymbol{G}}_{W+}$ e $\overline{\boldsymbol{G}}_{V+}$ respectivamente. Diz-se que o homomorfismo de grupo $h$ em $h : W \mapsto V$ é um homomorfismo de espaço vetorial se, no caso de multiplicação por escalar, for válida a seguinte propriedade:

$$h(a\boldsymbol{w}) = ah(\boldsymbol{w}), \forall\, a \in F, \boldsymbol{w} \in W. \tag{3.39}$$

Nestas condições, costuma-se dizer que $h : W \mapsto V$ é uma *transformação linear*. Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{M}^F_{W\mapsto V}$, tal que as funções de $M_{W\mapsto V}$ definam transformações lineares. Adota-se para estes espaços vetoriais a notação $\boldsymbol{L}^F_{W\mapsto V}$, tal que seu conjunto, agora representado $L_{W\mapsto V}$, contém vetores chamados *funções lineares*[6]. O mapeamento $\boldsymbol{k} : W^{\times n} \mapsto V$, onde $\boldsymbol{k}$ é um homomorfismo e $W_i$ define um espaço vetorial, torna-se uma *transformação multilinear* se

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}_1, \cdots, a\boldsymbol{w}_i, \cdots, \boldsymbol{w}_n) = a\boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_i, \cdots, \boldsymbol{w}_n), \forall\, a \in F, \boldsymbol{w}_i \in W_i. \tag{3.40}$$

Especificamente, se uma função $\boldsymbol{h}$ for elemento de $L_{V\mapsto V}$, ela é chamada *operador linear* em $V$ e $\boldsymbol{h} : V \mapsto V$ é uma *operação linear*. Um mapeamento $\boldsymbol{k} : V^n \mapsto V$ é uma *operação multilinear*.

[6]Já que uma função linear é um homomorfismo de grupo (seção **??**), não é correto denominar linear a função em $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ com regra $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, porque $f(0) \neq 0$ quando $\beta \neq 0$. Em termos geométricos, tal função descreve uma reta cujo termo linear é $\alpha x$.

### Funcionais Coordenados

Seja $\boldsymbol{V}_V^F$ um espaço vetorial dimensionalmente finito, onde o subconjunto $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ é uma base ordenada de $V$ e $\boldsymbol{v} \in V$ um vetor qualquer. As coordenadas $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de $\boldsymbol{v}$ na base $U$ podem ser reescritas como uma seqüência de valores dos seguintes funcionais lineares associados à base $U$:

$$\boldsymbol{f}_1^U, \cdots, \boldsymbol{f}_n^U \in L_{V \mapsto F}, \tag{3.41}$$

tais que $\boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v}) := \alpha_i$. A combinação linear que define $\boldsymbol{v}$ pode então ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}_i\,. \tag{3.42}$$

Diz-se que os funcionais desta igualdade são os funcionais coordenados da base $U$, cujos valores em $\boldsymbol{v}$ são as coordenadas de $\boldsymbol{v}$. Em particular, para um vetor $\boldsymbol{v}_j$ da base $U$, a decomposição em funcionais coordenados gera o seguinte:

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U\left(\boldsymbol{v}_j\right) \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \boldsymbol{v}_i\,. \tag{3.43}$$

### Produto Interno

Considerando que $\boldsymbol{V}_V^F$ define um espaço vetorial produto interno, dado um vetor $\boldsymbol{w} \in V$, o produto interno

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j\,. \tag{3.44}$$

Caso $U$ seja uma base ortonormal e $\boldsymbol{V}_V^F$ seja um espaço vetorial Euclidiano, esta igualdade se transforma em

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{w})\,. \tag{3.45}$$

Nesta situação, devido ao teorema 2, o produto interno pode sempre ser expresso por um somatório deste tipo. Seja, então, o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{v}_i)\,\boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{x})\,. \end{aligned}$$

Desta forma, os funcionais coordenados assumem a seguinte regra[7]:

$$\boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{x}\,. \tag{3.46}$$

### Operador Linear Positivo-Semidefinido

Seja o espaço vetorial produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \xi^+\right)$ e o espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$. Um operador linear $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$ é dito positivo-semidefinido se

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) \geqslant 0, \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.47}$$

Impondo que $\boldsymbol{v}$ seja não nulo, o operador positivo-semidefinido torna-se um operador *positivo-definido*, onde $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) > 0$.

### Funções Lineares Transpostas

Sejam os espaços vetoriais produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \xi^+\right)$, $\left(\boldsymbol{V}_W^F, \xi^+\right)$ e os espaços vetoriais de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto W}^F$ e $\boldsymbol{M}_{W\mapsto V}^F$. Seja uma função $\boldsymbol{g} \in L_{V\mapsto W}$ que admite a transposta $\boldsymbol{g}^T \in M_{W\mapsto V}$. Utilizando a definição de função transposta e aplicando multiplicação pelo escalar $a \in F$ no argumento de $\boldsymbol{g}^T$, tem-se que

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}^T(a\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) \cdot (a\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot a\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})\ \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W. \tag{3.48}$$

Para os vetores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$, observa-se que

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w}_1) + \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w}_2)\right) \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.49}$$

Conclui-se que $\boldsymbol{g}^T$ também é uma função linear e portanto $M_{W\mapsto V} = L_{W\mapsto V}$. Nesta situação, pode-se obter as seguintes propriedades:

[7] Uma regra geral para funcionais coordenados definidos sobre uma base qualquer (ortonormal ou não) será apresentada na seção 4.1.

i. $(a\boldsymbol{g})^T = a\boldsymbol{g}^T, \forall\, a \in F, \boldsymbol{g}^T \in L_{W\mapsto V}, \boldsymbol{g} \in L_{V\mapsto W}$;

ii. $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{m})^T = \boldsymbol{m}^T \circ \boldsymbol{g}^T, \forall\, \boldsymbol{g},\boldsymbol{m} \in L_{V\mapsto W}, \boldsymbol{g}^T, \boldsymbol{m}^T \in L_{W\mapsto V}$;

iii. Se $\boldsymbol{g}$ for uma bijeção, $\left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^T = \left(\boldsymbol{g}^T\right)^{-1}, \forall\, \boldsymbol{g}^T, \boldsymbol{g}^{-1} \in L_{W\mapsto V}$.

**Demonstração.**

i. Desenvolvendo a definição de função transposta, temos as seguintes igualdades: $(a\boldsymbol{g})^T(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\cdot a\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$ e $a\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\cdot a\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$. A partir delas, conclui-se que, para qualquer $\boldsymbol{v}$, $(a\boldsymbol{g})^T(\boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})$.

ii. Aplicando o mesmo procedimento do item anterior, temos as igualdades

$$\begin{array}{rcl} (\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{m})^T(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} & = & \boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{m})(\boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{m})(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} & = & \boldsymbol{m}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{m}^T\circ\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} & = & \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{m}(\boldsymbol{v}) \end{array}$$

Combinando estas igualdades, chega-se a $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{m})^T(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{m}^T\circ\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})$, para qualquer $\boldsymbol{w}$.

iii. Dado que $\boldsymbol{i}_W \in M_{W\mapsto W}$, pode-se demonstrar facilmente que $\boldsymbol{i}_W^T = \boldsymbol{i}_W$. Com base nesta igualdade e aplicando a transposta nos dois lados de $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{i}_W$ chega-se à $(\boldsymbol{g}^{-1})^T\circ\boldsymbol{g}^T = \boldsymbol{i}_W$. No entanto, sabemos que $(\boldsymbol{g}^T)^{-1}\circ\boldsymbol{g}^T = \boldsymbol{i}_W$. Logo, conclui-se que $(\boldsymbol{g}^{-1})^T = (\boldsymbol{g}^T)^{-1}$.

□

### Função Ortogonal

Sejam os espaços vetoriais produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \xi^+\right)$, $\left(\boldsymbol{V}_W^F, \xi^+\right)$ e o espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto W}^F$. Sejam as funções $\boldsymbol{g} \in L_{V\mapsto W}$ e $\boldsymbol{g}^T \in L_{W\mapsto V}$. Se $\boldsymbol{g}$ for uma bijeção e $\boldsymbol{g}^T = \boldsymbol{g}^{-1}$, diz-se que $\boldsymbol{g}$ é uma função ortogonal. Para $V = W$, a função $\boldsymbol{g}$ torna-se um *operador ortogonal*. Neste caso, dados os vetores quaisquer $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$ e aplicando a definição de função transposta, pode-se concluir do desenvolvimento

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}) & = & \boldsymbol{g}^T\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \\ & = & \boldsymbol{g}^{-1}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \\ & = & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \end{array} \tag{3.50}$$

que todo operador ortogonal preserva a operação produto interno, ou seja,

$$\xi^+(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})) = \xi^+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \tag{3.51}$$

**Grupo Ortogonal.** Considerando as condições anteriores, seja $O_V$ subconjunto de $L_{V\mapsto V}$, formado por todos os operadores ortogonais que mapeiam $V$ para $V$. Pode-se verificar que tal subconjunto não define grupo aditivo, fato que impede a geração de um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}_V^F$. Nos termos da seção **??**, para quaisquer $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2 \in O_V$, as igualdades

$$(\boldsymbol{g}_1 \circ \boldsymbol{g}_2)^{-1} = \boldsymbol{g}_2^{-1} \circ \boldsymbol{g}_1^{-1} = \boldsymbol{g}_2^T \circ \boldsymbol{g}_1^T = (\boldsymbol{g}_1 \circ \boldsymbol{g}_2)^T \tag{3.52}$$

revelam que $\boldsymbol{g}_1 \circ \boldsymbol{g}_2 \in O_V$. Logo o conjunto $O_V$ define o grupo de operadores $\boldsymbol{GP}_{O_V}$, chamado grupo ortogonal em $V$, cuja notação é abreviada para $\boldsymbol{GO}_V$.

## Isometria

Seja um espaço vetorial métrico $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \rho\right)$ e o espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$. O operador linear $\boldsymbol{k} \in L_{V\mapsto V}$ é chamado isometria se ele for uma bijeção e

$$\rho(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \rho(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}_2)),\ \forall\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V. \tag{3.53}$$

Em termos gerais, uma isometria é um operador cujo mapeamento preserva a distância entre o par de elementos de um espaço métrico. Pode-se demonstrar que toda isometria $\boldsymbol{k}$ possui $\det \boldsymbol{k} = \pm 1$. Em particular, nos espaços vetoriais Euclidianos pode-se obter que todo operador ortogonal é uma isometria e vice-versa.

**Demonstração**. Para verificar a última afirmação, sejam os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ e o operador ortogonal $\boldsymbol{g} \in L_{V\mapsto V}$. No caso de espaços vetoriais Euclidianos, constata-se que $\boldsymbol{g}$ é uma isometria através do seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_2))^2 &= \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_1) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_2)\|^2 \\
&= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_1)\cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_1) - 2\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_1)\cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_2)\cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_2) \\
&= \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 \\
&= (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \\
&= \rho(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)^2 .
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $\rho(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ com base nas definições de métrica e da norma Euclidianas, a igualdade a seguir pode ser facilmente encontrada.

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\rho(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{0})^2 + \rho(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{0})^2 - \rho(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)^2\right)}_{\alpha}.$$

Como o lado direito desta igualdade mostra que o escalar $\alpha$ é invariante para isometrias, então com certeza o produto interno no lado esquerdo também. □

**Teorema 3 (Mudança de Base)** *Sejam os espaços vetoriais $\boldsymbol{V}_V^F$, $\boldsymbol{V}_W^F$ e o espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto W}^F$. Seja o subconjunto finito $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base de $\boldsymbol{V}_V^F$. Seja um subconjunto qualquer $Z = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\} \subset W$. Neste contexto, são válidas as seguintes afirmações:*

*i. Sempre existe uma única função $\boldsymbol{q} \in L_{V\mapsto W}$ tal que $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Se $Z$ for uma base de $\boldsymbol{V}_W^F$, então $\boldsymbol{q}$ é uma bijeção linear que promove uma mudança de base.*

*ii. Sejam $\boldsymbol{V}_V^F$ e $\boldsymbol{V}_W^F$ definidores de espaços vetoriais Euclidianos e $Z$ uma base de $\boldsymbol{V}_W^F$. Caso os vetores das bases $U$ e $Z$ forem unitários, a função $\boldsymbol{q}$ promotora de mudança de base é ortogonal.*

**Demonstração**. Demonstrando cada um dos itens, tem-se:

i. Seja um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$, sobre o qual $\boldsymbol{q}$ atua. Temos então que

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}_i\,.$$

A combinação linear à direita da igualdade revela a condição de existência de $\boldsymbol{q}$, pois é sempre possível realizá-la. A unicidade de $\boldsymbol{q}$ é imediata, já que qualquer outra função $\boldsymbol{h} \in L_{V\mapsto W}$, onde $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_i)$, gera $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_i)$. Agora, sejam vetores quaisquer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ e $Z$ uma base de $\boldsymbol{V}_W^F$. Novamente, desenvolvendo os vetores em funcionais coordenados e aplicando as propriedades de funções lineares, obtém-se que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{w}_i\,;\\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{w}_i\,.\end{aligned}$$

A partir destas duas igualdades, conclui-se que caso $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, é impossível obter $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y})$, já que o conjunto das coordenadas de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são diferentes e os elementos de $Z$ são linearmente independentes. Nesta condição, $\boldsymbol{q}$ é uma injeção. Para que $\boldsymbol{q}$ seja uma bijeção, é necessário que ele também defina um mapeamento sobrejetor, ou seja, que sempre exista um $\boldsymbol{v} \in V$ mapeando um $\boldsymbol{w} \in W$ qualquer. Isto é obtido a partir do seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{w}_i\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}_i)\\ &= \boldsymbol{q}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v}_i\right)\\ &= \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v})\,.\end{aligned}$$

ii. Para demonstrar que esta função é ortogonal, sejam os vetores quaisquer $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in W$. Desenvolvendo os escalares $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{w})$, a partir de (3.44), temos respectivamente:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^W(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}))\, \boldsymbol{f}_i^W(\boldsymbol{w}) \|\boldsymbol{w}_i\|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_i^W(\boldsymbol{w})\,; \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_i^U\left(\boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{w})\right) \|\boldsymbol{v}_i\|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_i^W(\boldsymbol{w})\,. \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que a igualdade

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{w})$$

ao ser comparada à definição de transposta permite concluir que $\boldsymbol{q}^T = \boldsymbol{q}^{-1}$. Notar que esta propriedade torna $\boldsymbol{q}$ uma isometria.

□

## Matrizes Associadas

A fim de viabilizar manipulação algébrica de valores, é possível estabelecer uma estreita relação dos conceitos envolvendo matriz com aqueles envolvendo função linear. Convém que os espaços vetoriais envolvidos sejam dimensionalmente finitos, tais que seus vetores são definidos através dos valores de funcionais coordenados. A representação matricial de vetores e funções lineares envolve estes funcionais, que por sua vez necessitam do estabelecimento de uma base. Em termos práticos, isto ocorre segundo os conceitos apresentados a seguir.

### Vetor e Matriz

Seja um espaço vetorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{V}_V^F$ e $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base deste espaço. Em termos de funcionais coordenados, um vetor $\boldsymbol{v} \in V$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}_i\,. \tag{3.54}$$

Com base nesta decomposição, pode-se associar ao vetor $\boldsymbol{v}$ uma matriz $[\boldsymbol{v}]^U$ de dimensão $n \times 1$, cujos escalares

$$[\boldsymbol{v}]_{i1}^U = \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\,. \tag{3.55}$$

Diz-se que $[\boldsymbol{v}]^U$ é a *matriz associada* a $\boldsymbol{v}$, formada pelas coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base $U$. É fácil verificar que a matriz associada a $\mathbf{0}$ é sempre uma matriz de escalares nulos $[0]$, qualquer que seja a base.

### Função Linear e Matriz

Sejam os espaços vetoriais dimensionalmente finitos $\boldsymbol{V}_V^F$, $\boldsymbol{V}_W^F$ e suas bases respectivas $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $Z = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$. Seja um espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V \mapsto W}^F$ e uma função $\boldsymbol{l} \in L_{V \mapsto W}$. Sejam vetores quaisquer $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in W$ tal que $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Utilizando as propriedades de funções lineares, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}))\, \boldsymbol{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{f}_i^Z\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{l}\left(\boldsymbol{v}_j\right)\right) \boldsymbol{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\boldsymbol{f}_i^Z\left(\boldsymbol{l}\left(\boldsymbol{v}_j\right)\right)}_{[\boldsymbol{l}_U]_{ij}^Z} \underbrace{\boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{v})}_{[\boldsymbol{v}]_{j1}^U} \boldsymbol{w}_i . \end{aligned} \tag{3.56}$$

É interessante observar que a decomposição de $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v})$ em seus funcionais coordenados mostra que a função $\boldsymbol{l}$ pode ser representada através de uma matriz de dimensão $m \times n$, cujos escalares $[\boldsymbol{l}_U]_{ij}^Z$ estão indicados na expressão final. Esta matriz multiplica a matriz $n \times 1$ associada a $\boldsymbol{v}$ na base $U$, tal que

$$[\boldsymbol{w}]^Z = [\boldsymbol{l}_U]^Z [\boldsymbol{v}]^U . \tag{3.57}$$

De forma semelhante ao caso de vetores, diz-se que $[\boldsymbol{l}_U]^Z$ é a matriz associada à função $\boldsymbol{l}$ atuando nos vetores da base $U$, cujos escalares são as coordenadas na base $Z$. Em termos gerais, uma matriz $[\bullet_A]^B$ multiplica matrizes de coordenadas descritas na base $A$, gerando matrizes de coordenadas na base $B$.

Utilizando o mesmo procedimento anterior, dados um $a \in F$ e uma função $a\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h} \in L_{V \mapsto W}$, onde $(a\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, é fácil obter que

$$[\boldsymbol{w}]^Z = \left(a[\boldsymbol{g}_U]^Z + [\boldsymbol{h}_U]^Z\right)[\boldsymbol{v}]^U . \tag{3.58}$$

**Função Linear Composta.** Considerando as condições anteriores, acrescentemos um espaço vetorial $\boldsymbol{L}_{W \mapsto V}^F$ e uma função $\boldsymbol{h} \in L_{W \mapsto V}$, tal que

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$. De forma similar à decomposição de $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v})$, pode-se obter

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}_i))}_{[\boldsymbol{h}_Z]_{ji}^U} \underbrace{\boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{w})}_{[\boldsymbol{w}]_{i1}^Z} \boldsymbol{v}_j. \tag{3.59}$$

Sabendo que $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, é possível inserir a decomposição de $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v})$ em $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$. Desta forma,

$$\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{f}_j^U(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}_i))}_{[\boldsymbol{h}_Z]_{ji}^U} \underbrace{\boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}_k))}_{[\boldsymbol{l}_U]_{ik}^Z}}_{[(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{l})_U]_{jk}^U} \underbrace{\boldsymbol{f}_k^U(\boldsymbol{v})}_{[\boldsymbol{v}]_{k1}^U} \underbrace{\boldsymbol{f}_j^Z\left(\boldsymbol{w}_j\right)}_{\delta_{jj}} \boldsymbol{v}_j. \tag{3.60}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{v}]^U &= [(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{l})_U]^U [\boldsymbol{v}]^U \\
&= [\boldsymbol{h}_Z]^U [\boldsymbol{l}_U]^Z [\boldsymbol{v}]^U .
\end{aligned} \tag{3.61}$$

É interessante notar na igualdade

$$[(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{l})_U]^U = [\boldsymbol{h}_Z]^U [\boldsymbol{l}_U]^Z \tag{3.62}$$

que o efeito do termo à direita independe da base $Z$. Neste caso particular, $[\boldsymbol{h}_Z]^U [\boldsymbol{l}_U]^Z = \mathrm{I}$. Para dizer que $[\boldsymbol{h}_Z]^U = [\boldsymbol{l}_U]^{Z\,-1}$, a condição de inversão a ser obedecida $\det[\boldsymbol{l}_U]^Z \neq 0$ requer que a matriz $[\boldsymbol{l}_U]^Z$ seja quadrada. Para tal, impõe-se que $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = \dim\left(\boldsymbol{V}_W^F\right)$, ou seja, $m = n$. Neste contexto, caso $\boldsymbol{l}$ seja um isomorfismo, então seja $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{l}^{-1}$. Logo, é válida a seguinte igualdade:

$$\left[\boldsymbol{l}_Z^{-1}\right]^U = [\boldsymbol{l}_U]^{Z\,-1}. \tag{3.63}$$

### Função Linear e Matriz Transposta

Sejam os espaços vetoriais Euclidianos $\boldsymbol{E}_V^n$, $\boldsymbol{E}_W^n$ e suas bases unitárias respectivas $U = \{\hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_n\}$, $Z = \{\hat{\boldsymbol{w}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{w}}_m\}$. Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{L}_{V\mapsto W}^{\mathbb{R}}$

e uma função $\boldsymbol{g} \in L_{V\mapsto W}$ que admite transposta. Dados $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in W$ quaisquer, a partir da definição de função transposta, pode-se chegar a

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U\left(\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{w})\right) \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\,. \tag{3.64}$$

Em termos matriciais, pode-se reescrever esta igualdade da seguinte forma:

$$\left([\boldsymbol{w}]^{Z\,T}[\boldsymbol{g}_U]^Z[\boldsymbol{v}]^U\right)_{11} = \left([\boldsymbol{w}]^{Z\,T}\left[\boldsymbol{g}_Z^T\right]^{U\,T}[\boldsymbol{v}]^U\right)_{11}, \tag{3.65}$$

de onde se diz que

$$[\boldsymbol{g}_U]^{Z\,T} = \left[\boldsymbol{g}_Z^T\right]^U. \tag{3.66}$$

**Operador Linear e Matrizes Similares**

Sejam os espaços vetoriais $\boldsymbol{V}_V^F$, $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$, as bases $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $Z = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\} \subset V$ e um operador qualquer $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$. Nestas condições, pelo teorema 3, existe a bijeção linear $\boldsymbol{q} \in L_{V\mapsto V}$ promotora da mudança de base $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Logo, para qualquer função de $L_{V\mapsto V}$, existem quatro matrizes quadradas associadas: $[\bullet_U]^U$, $[\bullet_U]^Z$, $[\bullet_Z]^U$, $[\bullet_Z]^Z$.

Baseando-se nos escalares das matrizes associadas à mudança de base $\boldsymbol{q}$ e assumindo $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_V$, são válidas as quatro igualdades a seguir:

$$\begin{array}{rcccl} [\boldsymbol{q}_U]^Z & = & \left[\left(\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{q}^{-1}\right)_Z\right]^Z & = & \mathrm{I}; \\ [\boldsymbol{q}_U]^U & = & \left[\left(\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{q}^{-1}\right)_Z\right]^U & = & [\boldsymbol{i}_Z]^U; \\ [\boldsymbol{q}_Z]^U & = & [(\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{q})_U]^U & = & [\boldsymbol{i}_Z]^U[\boldsymbol{i}_Z]^U; \\ [\boldsymbol{q}_Z]^Z & = & [(\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{q})_U]^Z & = & [\boldsymbol{i}_Z]^U[\boldsymbol{i}_Z]^U. \end{array} \tag{3.67}$$

A partir desta lista de igualdades e de (3.61), pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{l}_U]^Z &= [(\boldsymbol{i}\circ\boldsymbol{l}\circ\boldsymbol{i})_U]^Z \\ &= [\boldsymbol{i}_Z]^U[\boldsymbol{l}_Z]^U[\boldsymbol{i}_U]^Z \\ &= [\boldsymbol{i}_U]^{Z\,-1}[\boldsymbol{l}_Z]^U[\boldsymbol{i}_U]^Z\,. \end{aligned} \tag{3.68}$$

A igualdade evidencia que as matrizes $[\boldsymbol{l}_U]^Z$ e $[\boldsymbol{l}_Z]^U$ são similares e que a matriz $[\boldsymbol{l}_Z]^U$ é *convertida* para $[\boldsymbol{l}_U]^Z$ através da mudança de base $\boldsymbol{q}$. Convertendo as funções compostas $\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{q}^{-1}$, obtém-se os resultados

$$\begin{aligned}
\left[(\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{q})_U\right]^Z &= \left[\boldsymbol{i}_U\right]^{Z\,-1} \left[(\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{q})_Z\right]^U \left[\boldsymbol{i}_U\right]^Z \\
\left[\boldsymbol{l}_Z\right]^Z &= \left[\boldsymbol{i}_U\right]^{Z\,-1} \left[\boldsymbol{l}_U\right]^Z \left[\boldsymbol{i}_Z\right]^U \left[\boldsymbol{i}_Z\right]^U \left[\boldsymbol{i}_U\right]^Z \\
&= \left[\boldsymbol{i}_U\right]^{Z\,-1} \left[\boldsymbol{l}_U\right]^Z \left[\boldsymbol{i}_U\right]^Z
\end{aligned} \tag{3.69}$$

e também

$$\begin{aligned}
\left[\left(\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{q}^{-1}\right)_Z\right]^U &= \left[\boldsymbol{i}_U\right]^Z \left[\left(\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{q}^{-1}\right)_U\right]^Z \left[\boldsymbol{i}_U\right]^{Z\,-1} \\
\left[\boldsymbol{l}_U\right]^U &= \left[\boldsymbol{i}_Z\right]^{U\,-1} \left[\boldsymbol{l}_Z\right]^U \left[\boldsymbol{i}_U\right]^Z \left[\boldsymbol{i}_U\right]^Z \left[\boldsymbol{i}_Z\right]^U \\
&= \left[\boldsymbol{i}_Z\right]^{U\,-1} \left[\boldsymbol{l}_Z\right]^U \left[\boldsymbol{i}_Z\right]^U .
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Estes desenvolvimentos mostram que as quatro matrizes associadas a $\boldsymbol{l}$ são similares. Para as condições assumidas, pode-se concluir que as matrizes associadas a um operador linear são sempre similares.

### Operador Linear e Matriz Simétricos

Seja um espaço vetorial produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \xi^+\right)$, um espaço vetorial de operadores lineares $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$, uma base $U \subset V$ e um operador simétrico qualquer $\boldsymbol{s} \in L_{V\mapsto V}$. Aplicando a definição de função transposta e desenvolvendo-a em termos matriciais, é possível concluir que

$$\left[\boldsymbol{s}_U\right]^U = \left[\boldsymbol{s}_U\right]^{U\,T} . \tag{3.71}$$

### Operador Linear e Matriz Positivos-Semidefinidos

Seja um espaço vetorial produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \xi^+\right)$, um espaço vetorial de operadores lineares $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$, uma base qualquer $Z = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\} \subset V$ e um operador positivo-semidefinido $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$. Dado um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$ é possível afirmar que

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_i^Z(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}))\, \underbrace{\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{w}_i}_{>0} \geqslant 0 . \tag{3.72}$$

A partir desta desigualdade pode-se escrever que

$$\left(\left[\boldsymbol{v}\right]^{Z\,T} \left[\boldsymbol{l}_Z\right]^Z \left[\boldsymbol{v}\right]^Z\right)_{11} \geqslant 0 , \tag{3.73}$$

de onde se conclui que $[\boldsymbol{l}_Z]^Z$ é matriz positiva-semidefinida. Nestas condições, diz-se que a matriz associada a um operador positivo-semidefinido, descrita numa base qualquer, é positiva-semidefinida. Considerando vetores não nulos, esta generalização também é aplicável a operadores e matrizes positivos-definidos.

### Determinante de Operador Linear

Seja um espaço vetorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{V}_V^F$, um espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$ e um operador $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$. Como as matrizes associadas a $\boldsymbol{l}$ são similares, é possível escrever que[8]

$$\det \boldsymbol{l} := \det \mathrm{L}\,, \tag{3.74}$$

onde L é a matriz que representa uma matriz quadrada qualquer associada a $\boldsymbol{l}$. Em outras palavras, o determinante de um operador linear independe das bases pelas quais suas matrizes associadas são descritas. Com base nisso, se $\boldsymbol{l}$ for um automorfismo, então

$$\det \boldsymbol{l}^{-1} = \det \mathrm{L}^{-1} = (\det \mathrm{L})^{-1}\,. \tag{3.75}$$

Logo, $\det \boldsymbol{l} \neq 0$ é condição necessária e suficiente para que $\boldsymbol{l}$ seja inversível. Considerando que $\boldsymbol{V}_V^F$ define um espaço vetorial produto interno, caso $\boldsymbol{l}$ seja ortogonal, então se $\det \boldsymbol{l} = 1$ ele é dito *ortogonal próprio* e se $\det \boldsymbol{l} = -1$ ele é *impróprio*.

Caso $\boldsymbol{l}$ seja positivo-semidefinido, tem-se $\det \boldsymbol{l} \geqslant 0$. Nos termos e condições das igualdades (3.67), fica fácil concluir que

$$\det \boldsymbol{q} = \det \boldsymbol{i}_V = \det \mathrm{I} = 1\,. \tag{3.76}$$

### Traço de Operador Linear

Seja um espaço vetorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{V}_V^F$, um espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$ e um operador $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$. Pelas mesmas razões que

[8] Uma definição mais apropriada e abrangente para determinante de operadores lineares, incluindo demonstrações de suas propriedades mais importantes, será apresentada mais à frente na seção 4.4.

baseiam a definição de determinante de operador linear, pode-se afirmar que[9]

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{l} := \operatorname{tr} \mathrm{L}\,. \tag{3.77}$$

## Autovalores e Autovetores

Seja um espaço vetorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{V}_V^F$, um espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^F$ e um operador $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$. Um escalar $\lambda \in F$ é dito um autovalor de $\boldsymbol{l}$ se existir um vetor $\boldsymbol{v} \in V$ não nulo, chamado autovetor de $\boldsymbol{l}$, tal que

$$\boldsymbol{l}\,(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\,. \tag{3.78}$$

A partir da regra de adição entre as funções de $L_{V\mapsto V}$, é possível reescrever esta igualdade na forma

$$(\lambda \boldsymbol{i} - \boldsymbol{l})\,(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{3.79}$$

Considerando uma base qualquer $U$ de $\boldsymbol{V}_V^F$, a igualdade, em termos de matrizes associadas, se torna o seguinte sistema linear de equações:

$$\left[(\lambda \boldsymbol{i} - \boldsymbol{l})_U\right]^U [\boldsymbol{v}]^U = [\boldsymbol{0}]\,. \tag{3.80}$$

Para que $\boldsymbol{v}$ seja realmente não nulo (solução não-trivial), é necessário que

$$\det(\lambda \boldsymbol{i} - \boldsymbol{l}) = \det[\lambda \boldsymbol{i} - \boldsymbol{l}] = 0\,, \tag{3.81}$$

onde não há dependência de base. Em termos genéricos, a igualdade anterior fica

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{L}) = 0\,. \tag{3.82}$$

O termo à esquerda desta condição é o polinômio característico[10] de L na variável $\lambda$, cujas raízes são os autovalores de $\boldsymbol{l}$. O conjunto formado por estes autovalores é dito *espectro* do operador em questão. Os coeficientes do polinômio característico são denominados *invariantes principais* de $\boldsymbol{l}$, porque seus valores são funções do traço ou do determinante de L. Desta forma, costuma-se dizer que $\det(\lambda \boldsymbol{i} - \boldsymbol{l}) = 0$ é a *equação característica* do operador $\boldsymbol{l}$.

---

[9] Uma definição mais adequada para traço de funções lineares em geral será apresentada na seção 4.4.

[10] Ver a definição de polinômio característico na seção **??**.

**Operadores Simétricos e Decomposição Espectral**

Seja um espaço vetorial produto interno $\left(\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}}, \xi^+\right)$, onde $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}}\right) = n$, um espaço vetorial de operadores lineares $\boldsymbol{L}_{V \mapsto V}^{\mathbb{R}}$ e um operador simétrico qualquer $\boldsymbol{s} \in L_{V \mapsto V}$. Sejam $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ e $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ os autovalores e os autovetores de $\boldsymbol{s}$ respectivamente. Genericamente, pode-se escrever que

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i . \tag{3.83}$$

Fazendo produto interno dos vetores nos dois lados da igualdade por $\boldsymbol{v}_j$, tem-se

$$\boldsymbol{v}_j \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j . \tag{3.84}$$

Aplicando procedimento semelhante,

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{v}_j\right) = \lambda_j \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j . \tag{3.85}$$

Da definição de função transposta para operadores simétricos, pode-se concluir que

$$\left(\lambda_i - \lambda_j\right) \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0 . \tag{3.86}$$

Se para qualquer par de índices $ij$, os autovalores $\lambda_i$ e $\lambda_j$ forem iguais, os autovetores $\boldsymbol{v}_i$ e $\boldsymbol{v}_j$ podem ser escolhidos arbitrariamente de tal forma que sejam ortogonais e unitários. Caso $\lambda_i \neq \lambda_j$, os autovetores são sempre ortogonais. Desta forma, segundo o teorema 1, item *ii.*, o conjunto dos autovetores de $\boldsymbol{s}$ é uma base de $\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}}$.

Seja a base ortonormal dos autovetores $U = \{\hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_n\}$. A matriz simétrica S associada ao operador $\boldsymbol{s}$ é normal, pois seus escalares são reais. Pelo teorema **??**, tem-se que

$$\mathrm{S} = \mathrm{U}^{-1} \tilde{\mathrm{S}} \mathrm{U}. \tag{3.87}$$

Avaliando a matriz diagonal $\tilde{\mathrm{S}}$, é possível desenvolver o seguinte:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{S}}_{ij} &= \lambda_i \delta_{ij} \\ &= \boldsymbol{f}_j^U (\lambda_i \hat{\boldsymbol{v}}_i) \\ &= \boldsymbol{f}_j^U (\boldsymbol{s}(\hat{\boldsymbol{v}}_i)) \\ &= [\boldsymbol{s}_U]_{ij}^U . \end{aligned} \tag{3.88}$$

Diz-se então que $[\boldsymbol{s}_U]^U$ é a *representação espectral* de $\boldsymbol{s}$. Seja uma base qualquer $Z = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\} \subset V$, tal que um automorfismo $\boldsymbol{q}$ mude $U$ para $Z$.

Combinando (3.87) e a igualdade (3.70), obtém-se

$$[\boldsymbol{s}_U]^U = \mathrm{USU}^{-1} = [\boldsymbol{i}_Z]^{U\,-1}\,[\boldsymbol{s}_Z]^U\,[\boldsymbol{i}_Z]^U\,. \tag{3.89}$$

Admitindo que $\mathrm{U} = [\boldsymbol{i}_U]^Z$ e $\mathrm{S} = [\boldsymbol{s}_Z]^U$, a igualdade que descreve a conversão de $[\boldsymbol{s}_U]^U$ para $[\boldsymbol{s}_Z]^U$, ou seja,

$$[\boldsymbol{s}_Z]^U = [\boldsymbol{i}_U]^{Z\,-1}\,[\boldsymbol{s}_U]^U\,[\boldsymbol{i}_U]^Z\,, \tag{3.90}$$

torna-se a decomposição espectral de $[\boldsymbol{s}_Z]^U$.

Considerando que $\boldsymbol{s}$ seja positivo-semidefinido, é possível afirmar, a partir da desigualdade

$$\hat{\boldsymbol{v}}_i \cdot \boldsymbol{s}\,(\hat{\boldsymbol{v}}_i) = \lambda_i\,(\hat{\boldsymbol{v}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_i) \geqslant 0, \tag{3.91}$$

que os autovalores de $\boldsymbol{s}$ são todos não negativos, já que o produto interno $\hat{\boldsymbol{v}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_i$ é não negativo por definição. Para o caso de $\boldsymbol{s}$ positivo-definido, seus autovalores são sempre positivos.

**Teorema 4 (Raiz Quadrada)** *Seja um espaço vetorial produto interno sobre o campo real $\left(\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}}, \xi^+\right)$, um espaço vetorial de funções $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^{\mathbb{R}}$ e um operador simétrico positivo-semidefinido $\boldsymbol{s} \in L_{V\mapsto V}$. Nestas condições, existe um e somente um operador simétrico positivo-semidefinido $\boldsymbol{s}^{1/2} \in L_{V\mapsto V}$ tal que*

$$\boldsymbol{s}^{1/2} \circ \boldsymbol{s}^{1/2} = \boldsymbol{s}\,. \tag{3.92}$$

*Caso $\boldsymbol{s}$ seja positivo-definido, então $\boldsymbol{s}^{1/2}$ também é positivo-definido.*

**Demonstração.**[11] Seja uma base $U \in V$ dos autovetores de $\boldsymbol{s}$. Pela decomposição espectral, a matriz $[\boldsymbol{s}_U]^U$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $\boldsymbol{s}$. Admitindo que

$$\left([\boldsymbol{s}_U]^{U\,1/2}\right)_{ii} = \sqrt{\lambda_i}\,,$$

onde $\lambda_i$ é sempre não negativo, tem-se que $[\boldsymbol{s}_U]^{U\,1/2}[\boldsymbol{s}_U]^{U\,1/2} = [\boldsymbol{s}_U]^U$. Desta forma, podemos afirmar que existe uma matriz

$$\left[\boldsymbol{s}_U^{1/2}\right]^U := [\boldsymbol{s}_U]^{U\,1/2}.$$

[11] Adaptada de Gurtin[11], pp. 13-14.

Para demonstrar a unicidade de $\boldsymbol{s}^{1/2}$, por hipótese, seja $\boldsymbol{c}^{1/2} \circ \boldsymbol{c}^{1/2} = \boldsymbol{s}$. Adotando uma base qualquer $Z$, um vetor $\boldsymbol{u} \in V$ e a igualdade (3.79), pode-se fazer o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{0}] &= \left(\lambda_1 \mathrm{I} - \left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z \left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z\right) [\boldsymbol{v}_1]^Z \\
&= \left(\sqrt{\lambda_1}\, \mathrm{I} + \left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z\right) \underbrace{\left(\sqrt{\lambda_1}\, \mathrm{I} - \left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z\right) [\boldsymbol{v}_1]^Z}_{[\boldsymbol{u}]^Z},
\end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$-\sqrt{\lambda_1}\, [\boldsymbol{u}]^Z = \left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z [\boldsymbol{u}]^Z .$$

A matriz $[\boldsymbol{u}]^Z$, que abrevia o termo destacado, é nula. Caso contrário, ocorreria uma situação impossível na qual um autovalor negativo está associado ao operador simétrico positivo-semidefinido $\boldsymbol{s}^{1/2}$. No caso de $\lambda_1 = 0$, não há restrição para a matriz $[\boldsymbol{u}]^Z$, podendo ser nula, por exemplo. Então, o termo destacado fica assim:

$$\sqrt{\lambda_1}\, [\boldsymbol{v}_1]^Z = \left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z [\boldsymbol{v}_1]^Z .$$

Este mesmo procedimento pode ser aplicado ao operador $\boldsymbol{c}^{1/2}$, de onde se conclui que

$$\left[\boldsymbol{s}_Z^{1/2}\right]^Z [\boldsymbol{v}_i]^Z = \left[\boldsymbol{c}_Z^{1/2}\right]^Z [\boldsymbol{v}_i]^Z$$

para qualquer um dos autovetores de $\boldsymbol{s}$. Já que eles são não nulos, $\boldsymbol{s}^{1/2}$ é único. □

**Teorema 5 (Decomposição Polar)** *Seja um espaço vetorial produto interno sobre o campo real* $\left(\boldsymbol{V}_V^{\mathbb{R}}, \xi^+\right)$*, um espaço vetorial de funções* $\boldsymbol{L}_{V\mapsto V}^{\mathbb{R}}$ *e um operador linear* $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$*, onde* $\det \boldsymbol{l} > 0$*. Existem somente dois operadores simétricos positivos-definidos* $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in L_{V\mapsto V}$ *e um operador ortogonal próprio* $\boldsymbol{o} \in L_{V\mapsto V}$ *tais que*

$$\boldsymbol{l} = \underbrace{\left[\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{l}^T\right]^{1/2}}_{\boldsymbol{p}_1} \circ \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \circ \underbrace{\left[\boldsymbol{l}^T \circ \boldsymbol{l}\right]^{1/2}}_{\boldsymbol{p}_2} .$$

*O operador* $\boldsymbol{p}_1 \circ \boldsymbol{o}$ *é dito uma decomposição polar de* $\boldsymbol{l}$ *à esquerda, enquanto* $\boldsymbol{o} \circ \boldsymbol{p}_2$ *uma decomposição polar de* $\boldsymbol{l}$ *à direita.*

**Demonstração**. A fim de provar a existência destes operadores, vamos admitir os operadores lineares simétricos positivos-definidos $\boldsymbol{g}_1 := \boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{l}^T$ e $\boldsymbol{g}_2 := \boldsymbol{l}^T \circ \boldsymbol{l}$. Pelo teorema 4, é possível decompô-los da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{l}^T &= \boldsymbol{g}_1^{1/2} \circ \boldsymbol{g}_1^{1/2}, \\
\boldsymbol{l}^T \circ \boldsymbol{l} &= \boldsymbol{g}_2^{1/2} \circ \boldsymbol{g}_2^{1/2},
\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{g}_1^{1/2}$ e $\boldsymbol{g}_2^{1/2}$ são operadores simétricos positivos-semidefinidos. A primeira decomposição pode ser reescrita assim:

$$\underbrace{\boldsymbol{g}_1^{-1/2} \circ \boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{o}_1} \circ \underbrace{\boldsymbol{l}^T \circ \boldsymbol{g}_1^{-1/2}}_{\boldsymbol{o}_1^T} = \boldsymbol{i}$$

onde $\boldsymbol{g}_1^{-1/2}$ é a inversa de $\boldsymbol{g}_1^{1/2}$ e $\boldsymbol{o}_1$ é claramente ortogonal. Adotando o mesmo procedimento para a decomposição de $\boldsymbol{l}^T \circ \boldsymbol{l}$, é possível chegar a

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{g}_1^{1/2} \circ \boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_2 \circ \boldsymbol{g}_2^{1/2},$$

onde $\boldsymbol{o}_2 := \boldsymbol{l} \circ \boldsymbol{g}_2^{-1/2}$. A unicidade é obtida pelo teorema 4, onde os operadores $\boldsymbol{g}_1$ e $\boldsymbol{g}_2$ são únicos. Como $\boldsymbol{o}_1$ e $\boldsymbol{o}_2$ são definidos a partir $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{g}_1$ e $\boldsymbol{g}_2$, eles também são únicos. Vamos provar agora que $\boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_2$. Para tal, temos que mostrar que $\boldsymbol{u}$ em

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{g}_1^{1/2} \circ \boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_1 \circ \underbrace{\boldsymbol{o}_1^{-1} \circ \boldsymbol{g}_1^{1/2} \circ \boldsymbol{o}_1}_{\boldsymbol{u}}$$

é simétrico positivo-definido. Se isto ocorrer, como a decomposição $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{o}_2 \circ \boldsymbol{g}_2^{1/2}$ é única, tem-se $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_2^{1/2}$ e $\boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_2$. A simetria de $\boldsymbol{u}$ é facilmente obtida desenvolvendo $\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{u}$. Sua positividade é constatada considerando primeiramente um vetor qualquer não nulo $\boldsymbol{v} \in V$. Como $\boldsymbol{o}_1$ é linear, então o vetor $\boldsymbol{o}_1(\boldsymbol{v})$ é também não nulo. Relembrando a definição de função transposta (3.37), pode-se então realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o}_1(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{g}_1^{1/2} \circ \boldsymbol{o}_1(\boldsymbol{v}) &> 0 \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{o}_1^{-1} \circ \boldsymbol{g}_1^{1/2} \circ \boldsymbol{o}_1(\boldsymbol{v}) &> 0 \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}) &> 0. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 4

# Álgebra Tensorial

Existe um grande número de fenômenos físicos que podem ser descritos por quantidades que se relacionam matematicamente de maneira linear. Tal relacionamento pode ser representado por uma função multilinear cujo domínio inclui as quantidades físicas envolvidas. Para alguns problemas estudados, é conveniente que a imagem desta função seja formada por escalares. Eles quantificam, de uma forma simples, a linearidade entre os elementos do domínio.

A modelagem da característica linear entre variáveis através de funcionais multilineares é o principal objetivo do estudo da teoria de tensores. Atualmente, existem duas abordagens para a apresentação desta teoria, descritas a seguir.

a) Abordagem baseada em coordenadas: considera um tensor como um array multidimensional. As coordenadas do tensor são os escalares deste array, obtidos a partir da definição de uma base. Vetores são tratados como arrays unidimensionais.

b) Abordagem intrínseca: um tensor é visto simplesmente como uma função multilinear, cuja definição independe do estabelecimento de uma base. As coordenadas do tensor são os valores definidos por seus funcionais coordenados. Neste caso, vetores são tensores que possuem apenas um argumento (função linear).

Será utilizada, ao longo do texto, a abordagem intrínseca para o estudo de tensores. Consideramos que tal abordagem facilita o entendimento por serem mais mais simples seus conceitos e mais agradável sua manipulação.

## 4.1 Vetores e Funcionais Lineares

### Espaço Dual

Seja um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$. O espaço vetorial de funcionais lineares $\boldsymbol{L}_{V\mapsto F}^F$ é denominado espaço dual de $\boldsymbol{H}_V^F$, representado por $\boldsymbol{D}_{V^*}^F$, onde $V^* := L_{V\mapsto F}$. Na presença de um espaço dual, os vetores dos conjuntos $V$ e $V^*$ são chamados *contravariantes* e *covariantes* respectivamente.

Considerando o espaço de Hilbert dimensionalmente finito, seja $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base de $\boldsymbol{H}_V^F$. Seja um funcional qualquer $\boldsymbol{g}$ de $V^*$ e um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$. O desenvolvimento a seguir mostra que o espaço dual é também $n$-dimensional:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{g}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^U(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_i\right) \\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{f}_i^U\right](\boldsymbol{v}) \\
\boldsymbol{g} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{f}_i^U . \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Observa-se que os funcionais coordenados $\boldsymbol{f}_i^U$ constituem uma base em $\boldsymbol{D}_{V^*}^F$.

### A Relação Vetor e Funcional Linear

Seja um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$ e seu espaço dual $\boldsymbol{D}_{V^*}^F$. Existe uma relação linear bijetora, descrita no teorema apresentado a seguir, entre os vetores de $V$ e os funcionais de $V^*$, de tal forma que, dado um vetor qualquer $\boldsymbol{u} \in V$ e seu funcional linear correspondente $\boldsymbol{u} \in V^*$, é possível definir

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}), \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \qquad (4.2)$$

**Teorema 6 (Representação de Riesz)** *Seja um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$ e seu espaço dual $\boldsymbol{D}_{V^*}^F$. Considerando um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$, seja uma transformação linear $\vartheta_{\boldsymbol{v}} : V \mapsto F$ onde o funcional $\vartheta_{\boldsymbol{v}} \in V^*$ é descrito pela regra*

$$\vartheta_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}.$$

*Desta forma, o mapeamento $\Theta : V \mapsto V^*$ é sempre uma transformação linear bijetora se $\Theta(\boldsymbol{v}) = \vartheta_{\boldsymbol{v}}$.*

**Demonstração**. Primeiramente, vamos mostrar que $\Theta$ é uma função linear. Dados os vetores quaisquer $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x}$ de $V$ e os escalares quaisquer $\alpha, \beta \in F$, a transformação linear é constatada a partir do seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) &= (\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{x} \\
&= \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) \\
&= \alpha\vartheta_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \beta\vartheta_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \\
&= [\alpha\vartheta_{\boldsymbol{u}} + \beta\vartheta_{\boldsymbol{v}}](\boldsymbol{x}) \\
\vartheta_{\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}} &= \alpha\vartheta_{\boldsymbol{u}} + \beta\vartheta_{\boldsymbol{v}} \\
\Theta(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) &= \alpha\Theta(\boldsymbol{u}) + \beta\Theta(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

Agora, para mostrar que $\Theta$ define um mapeamento injetor, se

$$\begin{aligned}
[\Theta(\boldsymbol{u})](\boldsymbol{x}) &= [\Theta(\boldsymbol{v})](\boldsymbol{x}) \\
\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

logo $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{x} = 0$. Como esta igualdade deve ser válida para qualquer $\boldsymbol{x}$, se $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, então $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Para provar que o mapeamento de $\Theta$ é sobrejetor, consideremos uma base $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ de $\boldsymbol{H}_V^F$, sua base recíproca $W = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ e um funcional qualquer $\vartheta \in V^*$. Dado um vetor $\boldsymbol{v} \in V$ definido por $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{w}_i$ e um vetor qualquer $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\boldsymbol{v}_i$, tem-se o desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \vartheta(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{w}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vartheta(\boldsymbol{v}_i)\alpha_j\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vartheta(\boldsymbol{v}_i) \\
&= \vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\boldsymbol{v}_i\right) \\
&= \vartheta(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Desta forma, tem-se que $\vartheta_{\boldsymbol{v}} = \vartheta$, de onde se conclui que o funcional $\vartheta$ é definido por $\Theta(\boldsymbol{v})$.
$\square$

## Coordenadas de Vetores

Seja um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$ e $\boldsymbol{D}_{V^*}^F$ seu espaço dual. Seja $U = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base de $\boldsymbol{H}_V^F$ e $f_1^U, \cdots, f_n^U \in V^*$ os funcionais coordenados por ela definidos. A partir do teorema 6, sejam os vetores $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n \in V$ respectivamente associados aos funcionais $f_1^U, \cdots, f_n^U$. Desta forma, dado um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$, tem-se que

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} f_i^U(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_{\boldsymbol{f}_i}(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}_i\,. \tag{4.3}$$

Apesar da conclusão desta igualdade, a regra para os funcionais coordenados $f_i^U$ fica indeterminada já que os vetores $\boldsymbol{f}_i$ são desconhecidos. Para resolver o problema de uma forma simples, pode-se definir que $\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ e $U$ são conjuntos recíprocos, ou seja, que

$$\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}\,. \tag{4.4}$$

Como o par de conjuntos recíprocos $U$ e $\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ é único[1], o conjunto ordenado $\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ pode ser representado por $U_* = \left\{\boldsymbol{v}_1^*, \cdots, \boldsymbol{v}_n^*\right\}$ e a regra para os funcionais coordenados na base $U$ resulta na igualdade

$$f_i^U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_i^* \cdot \boldsymbol{x}\,. \tag{4.5}$$

A unicidade no par de bases recíprocas torna $\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ uma base e permite dizer também que $(U_*)_* = U$. Desta forma, os funcionais coordenados na base $U_*$ possuem a regra

$$f_i^{U_*}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{x}\,. \tag{4.6}$$

Os valores $f_i^{U_*}(\boldsymbol{x})$ e $f_i^U(\boldsymbol{x})$ são denominados as coordenadas covariantes e contravariantes do vetor $\boldsymbol{x}$ respectivamente. Para que estas coordenadas sejam determinadas relativas somente à base $U$, considera-se que

$$f_i^{*U} := f_i^{U_*}\,. \tag{4.7}$$

[1] Ver seção 3.2.

### Produto Interno

Considerando as condições anteriores, dados dois vetores quaisquer $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{U}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_j^{*U}(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{v}_j^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{U}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_j^{*U}(\boldsymbol{w})\, \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{U}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{f}_i^{*U}(\boldsymbol{w}) . \end{aligned} \tag{4.8}$$

É interessante observar que se o espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$ for Euclidiano e $U$ base ortonormal[2], obtém-se (3.45).

## 4.2 Tensores

### Espaço Tensorial

Sejam os espaços de Hilbert $\boldsymbol{H}_{V_1}^F, \cdots, \boldsymbol{H}_{V_n}^F$. O espaço vetorial de funcionais multilineares $\boldsymbol{L}_{V^{\times n} \mapsto F}^F$ é denominado espaço tensorial, representado por $\boldsymbol{T}_{V^{\times n}}^F$. Um funcional $\boldsymbol{t}$ do conjunto $L_{V^{\times n} \mapsto F}$, agora representado[3] por $T_{V^{\times n} \mapsto F}$, é dito um *tensor* de ordem $n$, cuja notação é alterada para $\boldsymbol{T}$. Em particular, dado o conjunto $V$, diz-se que $\boldsymbol{T} \in T_{V^n \mapsto F}$ é um tensor de ordem $n$ em $V$.

**Proposição 1** *O espaço tensorial $\boldsymbol{T}_V^F$ é o espaço dual $\boldsymbol{D}_{V^*}^F$.*

**Demonstração**. No teorema 6, a transformação linear bijetora provoca $T_{V \mapsto F} = V^*$. □

### Tipos

Seja o conjunto $V^{(p,q)} := V^p \times (V^*)^q$. Todo espaço tensorial de ordem $p+q$ na forma $\boldsymbol{T}_{V^{(p,q)}}^F$ é classificado como sendo do tipo $(p,q)$ em $V$. Tais espaços são ditos possuir *ordem contravariante* $p$ e *ordem covariante* $q$.

[2] Toda base ortonormal é recíproca a ela própria, segundo a seção 3.2.

[3] Alguns autores costumam denominar o conjunto $L_{V^{\times n} \mapsto F}$ de *produto tensorial* entre os conjuntos $V_1, \cdots, V_n$ e representá-lo por $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Agora, seja um espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{U^{(p,q)}}^{F}$. Se este espaço for do tipo $(0,0)$, os tensores do conjunto $T_{U^{(0,0)} \mapsto F}$ são, por definição, escalares. Caso o espaço tensorial for do tipo $(1,0)$, segundo a igualdade (4.2) e a proposição 1, pode-se considerar que os tensores em questão são os vetores de $U$. A partir desta consideração, um conjunto $V^{(p,q)}$, cuja tupla ordenada contem um misto de $p$ vetores e $q$ funcionais lineares, pode ser convenientemente interpretado como um conjunto $V^{p+q}$, dotado com tuplas de $p$ vetores *contravariantes* e $q$ vetores *covariantes*.

## Permutação de Tensor

A bijeção que define $\pi : \{1, \cdots, n\} \mapsto \{1, \cdots, n\}$ é denominada *permutação de ordem n*. Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{V^n}^{F}$. Define-se que a permutação de um tensor qualquer $\boldsymbol{T} \in T_{V^n \mapsto F}$ é o tensor $\boldsymbol{T}_\pi \in T_{V^n \mapsto F}$, onde

$$\boldsymbol{T}_\pi (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{T} \left(\boldsymbol{v}_{\pi(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\pi(n)}\right), \forall\, \boldsymbol{v}_i \in V\,. \tag{4.9}$$

### Transposição de Tensor

Um caso particular da permutação considerada anteriormente é a transposição de tensor, onde, para qualquer $\boldsymbol{v}_i \in V$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{(\alpha,\beta)}&\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{\alpha-1}, \boldsymbol{v}_\alpha, \boldsymbol{v}_{\alpha+1} \cdots, \boldsymbol{v}_{\beta-1}, \boldsymbol{v}_\beta, \boldsymbol{v}_{\beta+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\right) = \\ &\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{\alpha-1}, \boldsymbol{v}_\beta, \boldsymbol{v}_{\alpha+1} \cdots, \boldsymbol{v}_{\beta-1}, \boldsymbol{v}_\alpha, \boldsymbol{v}_{\beta+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

No caso de $p \leqslant n$ transposições sucessivas do tensor $\boldsymbol{T}$, utiliza-se

$$\boldsymbol{T}_{(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_p,\beta_p)} := \left[\cdots\left[\boldsymbol{T}_{(\alpha_1,\beta_1)}\right]_{(\alpha_2,\beta_2)} \cdots\right]_{(\alpha_p,\beta_p)}. \tag{4.11}$$

### Simetria de Tensor

Seja $R_n$ o conjunto de todas as permutações de ordem $n$. Considerando o espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{V^n}^{F}$, um tensor $\boldsymbol{S} \in T_{V^n \mapsto F}$ é *simétrico* se

$$\boldsymbol{S}_\pi = \boldsymbol{S}, \forall\, \pi \in R_n\,. \tag{4.12}$$

Um tensor $\boldsymbol{P} \in T_{V^n \mapsto F}$ é *alternante* ou *anti-simétrico* se

$$\boldsymbol{P}_\pi = \epsilon_{\pi(1)\cdots\pi(n)} \boldsymbol{P}, \forall\, \pi \in R_n\,. \tag{4.13}$$

Pode-se obter que os subconjuntos $TS_{V^n \mapsto F}$ e $TA_{V^n \mapsto F}$ de $T_{V^n \mapsto F}$, formados por todos os tensores simétricos e todos os anti-simétricos respectivamente, definem os subespaços tensoriais $\boldsymbol{TS}^F_{V^n}$ e $\boldsymbol{TA}^F_{V^n}$ de $\boldsymbol{T}^F_{V^n}$.

**Proposição 2** *Seja um espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^n}$ e seu subespaço de tensores anti-simétricos $\boldsymbol{TA}^F_{V^n}$. Neste contexto, sempre é válido que*

$$\dim\left(\boldsymbol{TA}^F_{V^n}\right) = 1\,.$$

**Demonstração.**[4] Primeiramente, seja um tensor $\boldsymbol{A} \in T_{V^n \mapsto F}$ e $U = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ uma base qualquer de $\boldsymbol{H}^F_V$ tais que

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \left(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_1}\right) \cdots \left(\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_n}\right) \epsilon_{i_1 \cdots i_n}\,, \forall\, \boldsymbol{x}_i \in V\,.$$

Com base nesta regra, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{(\alpha,\beta)}\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_\alpha, \cdots, \boldsymbol{x}_\beta, \cdots, \boldsymbol{x}_n\right) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \left(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_1}\right) \cdots \left(\boldsymbol{x}_\beta \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_\alpha}\right) \cdots \\
&\qquad \cdots (\boldsymbol{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_\beta}) \cdots \left(\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_n}\right) \epsilon_{i_1 \cdots i_\alpha \cdots i_\beta \cdots i_n} \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \left(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_1}\right) \cdots (\boldsymbol{x}_\beta \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_\beta}) \cdots \\
&\qquad \cdots (\boldsymbol{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_\alpha}) \cdots \left(\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_n}\right) \epsilon_{i_1 \cdots i_\beta \cdots i_\alpha \cdots i_n} \\
&= -\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \left(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_1}\right) \cdots (\boldsymbol{x}_\beta \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_\beta}) \cdots \\
&\qquad \cdots (\boldsymbol{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_\alpha}) \cdots \left(\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{u}^*_{i_n}\right) \epsilon_{i_1 \cdots i_\alpha \cdots i_\beta \cdots i_n} \\
&= -\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_\alpha, \cdots, \boldsymbol{x}_\beta, \cdots, \boldsymbol{x}_n\right), \forall\, \alpha, \beta \in \{1, \cdots, n\}\,,
\end{aligned}$$

de onde se conclui que $\boldsymbol{A} \in TA_{V^n \mapsto F}$. Consideremos agora um outro tensor anti-simétrico $\boldsymbol{P} \in TA_{V^n \mapsto F}$, a partir do qual o desenvolvimento a seguir é realizado.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) &= \boldsymbol{P}\left(\sum_{i_1=1}^{n} \boldsymbol{f}^{U_*}_{i_1}(\boldsymbol{x}_1)\, \boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} \boldsymbol{f}^{U_*}_{i_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \boldsymbol{u}_{i_n}\right) \\
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \boldsymbol{f}^{U_*}_{i_1}(\boldsymbol{x}_1) \cdots \boldsymbol{f}^{U_*}_{i_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_n}\right).
\end{aligned}$$

[4] Adaptada de Backus[2], pp. 15-17.

De acordo com (4.10) e (4.13), podemos continuar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n) &= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} f_{i_1}^{U_*}(\boldsymbol{x}_1)\cdots f_{i_n}^{U_*}(\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{P}_\pi(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)\\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} f_{i_1}^{U_*}(\boldsymbol{x}_1)\cdots f_{i_n}^{U_*}(\boldsymbol{x}_n)\epsilon_{i_{i_1}\cdots i_{i_n}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)\\
&= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\left(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{u}_{i_1}^*\right)\cdots\left(\boldsymbol{x}_n\cdot\boldsymbol{u}_{i_n}^*\right)\epsilon_{i_1\cdots i_n}\\
&= \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)}_{\in F}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\,,\ \forall\,\boldsymbol{P}\in TA_{V^n\mapsto F}.
\end{aligned}$$

Podemos concluir da última igualdade que o conjunto de tensores anti-simétricos $TA_{V^n\mapsto F} = sp\{\boldsymbol{A}\}$. □

**Espaço Orientado de Hilbert.** Sejam um espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$ $n$-dimensional e um espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{V^n}^F$. Sejam $\hat{U} = \{\hat{\boldsymbol{u}}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{u}}_n\}$ uma base ortonormal qualquer de $\boldsymbol{H}_V^F$ e um tensor anti-simétrico qualquer $\hat{\boldsymbol{P}}\in TA_{V^n\mapsto F}$ tal que

$$\hat{\boldsymbol{P}}(\hat{\boldsymbol{u}}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{u}}_n) = \pm 1\,. \tag{4.14}$$

Neste contexto, o par ordenado $(\boldsymbol{H}_V^F,\hat{\boldsymbol{P}})$ é dito um espaço orientado de Hilbert. Se o resultado da igualdade anterior seja positivo, diz-se que a base $\hat{U}$ está *positivamente orientada*, caso contrário ela está *negativamente orientada*.

## Produto Tensorial

Sejam os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^F$ , $\boldsymbol{T}_{U^{\times q}}^F$ e $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}\times U^{\times q}}^F$. Um dado mapeamento $\otimes : T_{V^{\times p}\mapsto F}\times T_{U^{\times q}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\times U^{\times q}\mapsto F}$ é denominado produto tensorial se, a partir dos tensores quaisquer $\boldsymbol{V}\in T_{V^{\times p}\mapsto F}$ e $\boldsymbol{U}\in T_{U^{\times q}\mapsto F}$, for válida, para qualquer $\left(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_q\right)\in V^{\times p}\times U^{\times q}$, a seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_q\right) = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\right)\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_q\right). \tag{4.15}$$

Fica evidente que um produto tensorial gera um tensor cuja ordem é a soma das ordens dos tensores que o definem. Caso $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{U}$ sejam tensores do tipo $(p,m)$ e $(q,n)$ respectivamente, então $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{U}$ é do tipo $(p+q,m+n)$.

A partir da igualdade (4.15), as propriedades a seguir podem ser facilmente obtidas para quaisquer $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\in T_{V^{\times p}\mapsto F}$, $\boldsymbol{U}\in T_{U^{\times q}\mapsto F}$ e $\boldsymbol{W}\in T_{W^{\times r}\mapsto F}$:

i. $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{W} = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{U} = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{W} = \mathbf{0}$ ;

ii. Associatividade: $(\boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{U}) \otimes \boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_1 \otimes (\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{W})$;

iii. Distributividade à direita: $(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) \otimes \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}_2 \otimes \boldsymbol{U}$ ;

iv. Distributividade à esquerda: $\boldsymbol{U} \otimes (\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) = \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}_2$ .

## Tensor Poliádico

Considerando os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}^F_{V_1}, \cdots, \boldsymbol{T}^F_{V_n}$, um tensor $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_n \in T_{V^{\times n} \mapsto F}$, onde $\boldsymbol{v}_i$ é um vetor qualquer de $V_i$, é qualificado como poliádico de ordem $n$. Se $n = 2$, o tensor é *diádico*; para $n = 3$, o tensor é *triádico* e assim por diante. Cada vetor que compõe o tensor poliádico é uma *políade*. Os vetores de um tensor diádico são *díades*; os do tensor triádico são *tríades*, etc... A partir do teorema 6 e utilizando (4.15), tem-se para qualquer $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \in V^{\times n}$ que

$$\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_n (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{x}_i \,. \tag{4.16}$$

**Proposição 3** *Sejam os espaços de Hilbert $\boldsymbol{H}^F_{V_1}, \cdots, \boldsymbol{H}^F_{V_p}$ dimensionalmente finitos e o conjunto genérico $U_i = \{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_i}{}^{(i)}\}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, representando uma base ordenada qualquer de um destes espaços. Considerando tensores quaisquer $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ e uma tupla qualquer $\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p\right) \in V^{\times p}$, tem-se o seguinte:*

*i. É sempre válido que*

$$\boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}_{j_1}^{U_1}(\boldsymbol{x}_1) \cdots \boldsymbol{f}_{j_p}^{U_p}\left(\boldsymbol{x}_p\right) \boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right).$$

*ii. Se as igualdades*

$$\boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right) = \boldsymbol{T}_2\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right)$$

*forem verificadas, então $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_2$.*

**Demonstração**. A verificação da igualdade no ítem i. depende fundamentalmente das propriedades de multilinearidade. Daí, seja o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p\right) \\ = \boldsymbol{T}_1\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \boldsymbol{f}_{j_1}^{U_1}\left(\boldsymbol{x}_1\right)\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)},\cdots,\sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}_{j_p}^{U_p}\left(\boldsymbol{x}_p\right)\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right) \\ = \sum_{j_1=1}^{n_1} \boldsymbol{f}_{j_1}^{U_1}\left(\boldsymbol{x}_1\right)\boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)},\cdots,\sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}_{j_p}^{U_p}\left(\boldsymbol{x}_p\right)\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right) \\ = \sum_{j_1=1}^{n_1} \boldsymbol{f}_{j_1}^{U_1}\left(\boldsymbol{x}_1\right)\sum_{j_2=1}^{n_2} \boldsymbol{f}_{j_2}^{U_2}\left(\boldsymbol{x}_2\right)\boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)},\boldsymbol{v}_{j_2}{}^{(2)},\cdots,\sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}_{j_p}^{U_p}\left(\boldsymbol{x}_p\right)\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right), \end{gathered}$$

e assim sucessivamente. No caso do ítem ii. se

$$\boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right) = \boldsymbol{T}_2\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right),$$

é óbvio que

$$\begin{gathered} \boldsymbol{T}_1\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p\right) \\ = \sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}_{j_1}^{U_1}\left(\boldsymbol{x}_1\right)\cdots\boldsymbol{f}_{j_p}^{U_p}\left(\boldsymbol{x}_p\right)\boldsymbol{T}_2\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right) \\ = \boldsymbol{T}_2\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p\right). \end{gathered}$$

□

**Teorema 7** *Sejam os espaços de Hilbert* $\boldsymbol{H}_{V_1}^F,\cdots,\boldsymbol{H}_{V_p}^F$ *dimensionalmente finitos e o conjunto genérico* $\{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_i}{}^{(i)}\} \subset V_i$ *representando uma base ordenada qualquer de um destes espaços. O conjunto* $T_{V^{\times p}}^{\otimes} \subset T_{V^{\times p}\mapsto F}$ *formado por todos os tensores poliádicos de ordem p construídos na forma* $\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\boldsymbol{v}_{j_2}{}^{(2)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}$*, onde* $j_i = 1,\cdots,n_i$ *, é uma base do espaço tensorial* $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^F$*.*

**Demonstração**. Em primeiro lugar, devemos verificar se os tensores $\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}$ são linearmente independentes. Para tal, seja um tensor

$$\boldsymbol{T} := \sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{n_p} \alpha_{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)},$$

onde $\alpha_{j_1\cdots j_p} \in F$. Para que os tensores poliádicos sejam linearmente independentes, se $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$, então $\alpha_{j_1\cdots j_p} = 0$. Isto é comprovado da seguinte forma: seja $(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p)$ uma tupla ordenada qualquer de $V^{\times p}$. Para $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$, tem-se que cada um dos termos

$$\begin{aligned} \alpha_{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p\right) &= 0 \\ \alpha_{j_1\cdots j_p}\prod_{k=1}^{p}\boldsymbol{v}_{j_k}{}^{(k)}\cdot\boldsymbol{x}_k &= 0. \end{aligned}$$

Em particular, caso os vetores de $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p)$ sejam não nulos, então

$$\begin{aligned} \alpha_{j_1 \cdots j_p} \prod_{k=1}^{p} \underbrace{\overbrace{\boldsymbol{v}_{j_k}{}^{(k)}}^{\neq \boldsymbol{0}} \cdot \overbrace{\boldsymbol{x}_k}^{\neq \boldsymbol{0}}}_{\neq 0} &= 0 \\ \alpha_{j_1 \cdots j_p} &= 0 . \end{aligned}$$

Em segundo lugar, devemos mostrar que os tensores poliádicos geram $T_{V^{\times p} \mapsto F}$. Para tal, seja um tensor qualquer $\boldsymbol{T}_1 \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ onde

$$\beta_{j_1 \cdots j_p} := \boldsymbol{T}_1 \left( \boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)} \right)$$

e um tensor

$$\boldsymbol{T}_2 := \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \beta_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)} .$$

Seja, agora, o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_2 \left( \boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)} \right) &= \beta_{j_1 \cdots j_p} \underbrace{\prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{v}_{j_k}{}^{(k)} \cdot \boldsymbol{v}_{j_k}{}^{(k)}}_{\gamma_{j_1 \cdots j_p}} \\ &= \boldsymbol{T}_1 \left( \boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)} \right) \gamma_{j_1 \cdots j_p} , \end{aligned}$$

de onde, a partir do ítem ii. da proposição 3, tem-se

$$\boldsymbol{T}_1 = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \frac{\beta_{j_1 \cdots j_p}}{\gamma_{j_1 \cdots j_p}} \boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)} .$$

Conclui-se que o tensor qualquer $\boldsymbol{T}_1$ é uma combinação linear dos tensores poliádicos em questão. □

**Proposição 4** *Sejam os espaços de Hilbert* $\boldsymbol{H}_{V_1}^F, \cdots, \boldsymbol{H}_{V_p}^F$ *dimensionalmente finitos e um espaço tensorial* $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^F$. *Sempre é válido que*

$$\dim \left( \boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^F \right) = \prod_{i=1}^{p} \dim \left( \boldsymbol{H}_{V_i}^F \right) .$$

**Demonstração**. A construção da base de tensores poliádicos descrita no teorema 7 permite constatar que existem $n_1 n_2 \cdots n_p$ tensores na forma $\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}$, onde $j_i = 1, \cdots, n_i$ e cujos vetores pertencem à $\{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_i}{}^{(i)}\}$, base de $\boldsymbol{H}_{V_i}^F$. □

### Coordenadas de Tensores

Seja o espaço tensorial dimensionalmente finito $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, o conjunto $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ sua base de tensores poliádicos construída a partir do subconjunto genérico $U_i = \{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_i}{}^{(i)}\}$, base de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$. Segundo o teorema 7, um tensor qualquer $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \beta_{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)}, \tag{4.17}$$

onde $\beta_{i_1 \cdots i_p} \in F$ são as coordenadas de $\boldsymbol{T}$ na base $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$. Como ocorre no caso de vetores, a partir de transformações lineares do tipo

$$\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p} : T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto F, \tag{4.18}$$

pode-se considerar que os escalares

$$\beta_{i_1 \cdots i_p} := \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p} (\boldsymbol{T}), \tag{4.19}$$

onde cada função é o funcional coordenado de $\boldsymbol{T}$ na base $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$. A regra de cada um destes funcionais é definida por

$$\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p} (\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{v}^{*}_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}^{*}_{i_p}{}^{(p)}\right), \tag{4.20}$$

cujos valores são as coordenadas contravariantes de $\boldsymbol{X}$ na base $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$. Nesta mesma base, suas coordenadas covariantes são os valores

$$\boldsymbol{f}^{*\,T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p} (\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)}\right). \tag{4.21}$$

Caso $p = 1$, as regras destes funcionais abrangem o caso de funcionais coordenados para vetores (4.5) e (4.6).

Conclui-se, então, que dada uma base de tensores poliádicos, um tensor qualquer $\boldsymbol{X}$ de $T_{V^{\times p} \mapsto F}$ pode ser caracterizado por dois arrays de dimensão $n_1 \times \cdots \times n_p$, onde $n_i = \dim\left(\boldsymbol{H}^F_{V_i}\right)$, representados por

$$[\boldsymbol{X}]^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}} \quad \text{e} \quad [\boldsymbol{X}]^{*\,T^{\otimes}_{V^{\times p}}}. \tag{4.22}$$

### Transformação de Coordenadas

Com base nas condições anteriores, seja o conjunto $W_i = \{\boldsymbol{w}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{w}_{n_i}{}^{(i)}\}$ uma outra base qualquer de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$, a partir da qual constrói-se a base de tensores poliádicos $\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$. Nos termos do teorema 3, seja o espaço vetorial $\boldsymbol{L}^F_{V_i \mapsto W_i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, e a bijeção linear $\boldsymbol{q}^{(i)} \in L_{V_i \mapsto W_i}$ promotora da mudança de base

$$\boldsymbol{q}^{(i)}\left(\boldsymbol{v}_j^{(i)}\right) = \boldsymbol{w}_j^{(i)}, j = 1, \cdots, n_i\,. \tag{4.23}$$

Admitindo conhecidas as coordenadas do tensor $\boldsymbol{T}$ na base $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$, utilizando (3.56) e (4.5) , pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{T}) &= \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{w}^*_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{w}^*_{i_p}{}^{(p)}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{j_1 \cdots j_p}(\boldsymbol{T})\, \boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\left(\boldsymbol{w}^*_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{w}^*_{i_p}{}^{(p)}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{j_1 \cdots j_p}(\boldsymbol{T}) \prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{v}_{j_k}{}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^*_{i_k}{}^{(k)} \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{j_1 \cdots j_p}(\boldsymbol{T}) \prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{f}^{W_k}_{i_k}\left(\boldsymbol{v}^{(k)}_{j_k}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{j_1 \cdots j_p}(\boldsymbol{T}) \prod_{k=1}^{p} \left[\boldsymbol{i}_{U_k}\right]^{W_k}_{i_k j_k}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Pode-se observar que a última igualdade revela uma transformação nas coordenadas de $\boldsymbol{T}$ da base $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ para a base $\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$. Em termos gerais, conhecendo-se, a priori, as coordenadas de um dado tensor descritas em uma determinada base, é possível obtê-las descritas em qualquer outra.

**Proposição 5** *Dado um espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ dimensionalmente finito, um tensor qualquer $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ pode sempre ser decomposto numa soma de tensores poliádicos, ou seja,*

$$\boldsymbol{T} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{pk}\,, m \geq 1,$$

*onde $\boldsymbol{v}_{ik} \in V_i$ é a i-ésima políade do k-ésimo tensor poliádico.*

**Demonstração**. Segundo o teorema 7, considerando uma base $\{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_i}{}^{(i)}\}$ de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$, um tensor qualquer

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_q=1}^{n_q}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p}\beta_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{i_q}{}^{(q)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)}\\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_q=1}^{n_q}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p}\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\underbrace{\left(\beta_{i_1\cdots i_p}\right)\boldsymbol{v}_{i_q}{}^{(q)}}_{\boldsymbol{u}_{i_1\cdots i_p}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)},\end{aligned}$$

onde o vetor destacado define $\boldsymbol{T}$ como uma soma de $n_1\cdots n_q\cdots n_p$ tensores poliádicos, cada um com $p$ políades. □

**Proposição 6** *Seja um espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $U_i$ uma base de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$. Dado que $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ é construído a partir dos vetores de $U_1, \cdots, U_p$, considerando os vetores quaisquer $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, as coordenadas*

$$\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{j_1\cdots j_p}\left(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p\right) = \prod_{k=1}^{p}\boldsymbol{f}^{U_k}_{j_k}\left(\boldsymbol{v}_k\right)$$

*e*

$$\boldsymbol{f}^{*T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{j_1\cdots j_p}\left(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p\right) = \prod_{k=1}^{p}\boldsymbol{f}^{*U_k}_{j_k}\left(\boldsymbol{v}_k\right).$$

**Demonstração**. Tomando (4.20) e (4.21), as igualdades são conseqüências de (4.5), (4.6), (4.16). □

## Tensor Identidade

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}\times V^{\times p}}$. Um tensor $\boldsymbol{I} \in T_{V^{\times p}\times V^{\times p}\mapsto F}$ é dito identidade se

$$\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_p\right) = \prod_{i=1}^{p}\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{y}_i, \forall\, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in V_i. \tag{4.25}$$

Considerando $U_i = \{\boldsymbol{u}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{n_i}{}^{(i)}\}$ uma base de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$, a partir de (4.8), a igualdade (4.25) pode ser reescrita na forma

$$\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_p\right) = \prod_{i=1}^{p}\sum_{j_i}^{n_i}\boldsymbol{f}^{U_i}_{j_i}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\boldsymbol{f}^{*U_i}_{j_i}\left(\boldsymbol{y}_i\right) \tag{4.26}$$

ou na forma

$$\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_p\right)=\prod_{i=1}^{p}\sum_{j_i}^{n_i}\boldsymbol{f}_{j_i}^{*U_i}(\boldsymbol{x}_i)\,\boldsymbol{f}_{j_i}^{U_i}(\boldsymbol{y}_i)\,. \tag{4.27}$$

Nestas circunstâncias, a fim de obter as igualdades anteriores respectivas, o tensor

$$\boldsymbol{I}=\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{n_p}\boldsymbol{u}_{j_1}^{*\,(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{j_p}^{*\,(p)}\otimes\boldsymbol{u}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{j_p}{}^{(p)} \tag{4.28}$$

ou

$$\boldsymbol{I}=\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{n_p}\boldsymbol{u}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{j_p}{}^{(p)}\otimes\boldsymbol{u}_{j_1}^{*\,(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{j_p}^{*\,(p)}. \tag{4.29}$$

## 4.3 Funções Tensoriais

A função cujos elementos do domínio são tensores e os elementos da imagem também são tensores é chamada função tensorial. Dados os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^{F}$ e $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^{F}$, se um determinado mapeamento $\psi : T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}$ for uma transformação linear, então $\psi$ é uma *função tensorial linear*.

### Arrays Associados

Sejam os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^{F}$, $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^{F}$ e o espaço vetorial de funções tensoriais

$$\boldsymbol{L}^{F}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}\,.$$

Sejam os tensores $\boldsymbol{T}\in T_{V^{\times p}\mapsto F}$ e $\boldsymbol{Z}\in T_{W^{\times q}\mapsto F}$, tais que $\boldsymbol{Z}=\psi(\boldsymbol{T})$, onde

$$\psi\in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}\,.$$

Sejam $\{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_p}{}^{(i)}\}$ e $\{\boldsymbol{w}_1{}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{w}_{n_q}{}^{(i)}\}$ bases de $\boldsymbol{H}_{V_i}^{F}$ e $\boldsymbol{H}_{W_i}^{F}$ respectivamente, geradoras das bases de tensores poliádicos poliádicos $T_{V^{\times p}}^{\otimes}$ e $T_{W^{\times q}}^{\otimes}$.

De maneira similar ao desenvolvimento que gera (3.56), tem-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &= \sum_{i_1}^{n_1}\cdots\sum_{i_q}^{n_q} \boldsymbol{f}_{i_1\cdots i_q}^{T_{W\times q}^{\otimes}}\left(\psi\left(\boldsymbol{T}\right)\right)\boldsymbol{w}_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{i_q}{}^{(q)} \\
&= \sum_{i_1}^{n_1}\cdots\sum_{i_p}^{n_q} \boldsymbol{f}_{i_1\cdots i_q}^{T_{W\times q}^{\otimes}}\left(\sum_{j_1}^{n_1}\cdots\sum_{j_p}^{n_p}\boldsymbol{f}_{j_1\cdots j_p}^{T_{V\times p}^{\otimes}}\left(\boldsymbol{T}\right)\psi\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right)\right) \\
&\quad\ \boldsymbol{w}_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{i_q}{}^{(q)} \\
&= \sum_{i_1}^{n_1}\cdots\sum_{i_p}^{n_q}\sum_{j_1}^{n_1}\cdots\sum_{j_p}^{n_p}\underbrace{\boldsymbol{f}_{j_1\cdots j_p}^{T_{V\times p}^{\otimes}}\left(\boldsymbol{T}\right)}_{\mathrm{B}_{j_1\cdots j_p}}\underbrace{\boldsymbol{f}_{i_1\cdots i_q}^{T_{W\times q}^{\otimes}}\left(\psi\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right)\right)}_{\mathrm{A}_{i_1\cdots i_q j_1\cdots j_p}} \\
&\quad\ \boldsymbol{w}_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{i_q}{}^{(q)},
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

tal que

$$
\left[\psi_{T_{V\times p}^{\otimes}}\right]^{T_{W\times q}^{\otimes}} := \mathrm{A} \quad \text{e} \quad \mathrm{B} = \left[\boldsymbol{T}\right]^{T_{V\times p}^{\otimes}} .
$$

Desta forma,

$$
\left[\boldsymbol{Z}\right]^{T_{W\times q}^{\otimes}} = \left[\psi_{T_{V\times p}^{\otimes}}\right]^{T_{W\times q}^{\otimes}}\left[\boldsymbol{T}\right]^{T_{V\times p}^{\otimes}} . \tag{4.31}
$$

### Arrays e Funções Tensoriais Compostas

Considerando as condições anteriores e o espaço vetorial

$$
\boldsymbol{L}_{T_{W\times q_{\mapsto F}}\mapsto T_{V\times p_{\mapsto F}}}^{F},
$$

sejam as funções

$$
\psi_1 \in L_{T_{V\times p_{\mapsto F}}\mapsto T_{W\times q_{\mapsto F}}}
$$

e

$$
\psi_2 \in L_{T_{W\times q_{\mapsto F}}\mapsto T_{V\times p_{\mapsto F}}} .
$$

Dado o tensor $\boldsymbol{G} \in T_{V\times p_{\mapsto F}}$, onde $\boldsymbol{G} = \psi_2 \circ \psi_1\left(\boldsymbol{T}\right)$, pode-se obter, de maneira semelhante a (3.60), a igualdade

$$
\left[\boldsymbol{G}\right]^{T_{V\times p}^{\otimes}} = \left[\left(\psi_2\circ\psi_1\right)_{T_{V\times p}^{\otimes}}\right]^{T_{V\times q}^{\otimes}}\left[\boldsymbol{T}\right]^{T_{V\times p}^{\otimes}} , \tag{4.32}
$$

onde

$$
\left[\left(\psi_2\circ\psi_1\right)_{T_{V\times p}^{\otimes}}\right]^{T_{V\times q}^{\otimes}} = \left[\psi_{2\,T_{W\times q}^{\otimes}}\right]^{T_{V\times p}^{\otimes}}\left[\psi_{1\,T_{V\times p}^{\otimes}}\right]^{T_{W\times q}^{\otimes}} . \tag{4.33}
$$

## Elevação

A uma função multilinear qualquer $\boldsymbol{g}$, cujos argumentos são vetores, é sempre possível associar uma função linear $\boldsymbol{g}^{\otimes}$ que tem um tensor como argumento. Diz-se que $\boldsymbol{g}$ é "elevada" à $\boldsymbol{g}^{\otimes}$. Esta elevação[5] estabelece uma conveniente e importante relação, descrita no teorema a seguir, entre uma seqüência qualquer de vetores e um tensor. Fica implícito que este teorema fundamenta questões de existência e unicidade para os diversos tipos de funções tensoriais lineares a serem apresentados nas seções subseqüentes.

**Teorema 8 (Elevação)** *Sejam os espaços de Hilbert $\boldsymbol{H}^F_{V_1}, \cdots, \boldsymbol{H}^F_{V_p}$ e o espaço vetorial $\boldsymbol{V}^F_W$. Seja o espaço vetorial $\boldsymbol{L}^F_{V^{\times p} \mapsto W}$ de funções multilineares que mapeiam uma tupla ordenada de vetores para um vetor de $W$ e $\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto W}$ o espaço vetorial das funções lineares que mapeiam um tensor para um vetor de $W$. Dada uma função qualquer $\boldsymbol{g} \in L_{V^{\times p} \mapsto W}$ e uma tupla qualquer $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p) \in V^{\times p}$, existe uma única função $\boldsymbol{g}^{\otimes} \in L_{T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto W}$, chamada função elevada de $\boldsymbol{g}$, onde o vetor*

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) = \boldsymbol{g}^{\otimes}\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p\right).$$

**Demonstração.**[6] Seja um tensor qualquer $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ e sua decomposição

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{T})\, \boldsymbol{u}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{i_p}{}^{(p)},$$

onde se considera $U_i = \{\boldsymbol{u}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{n_i}{}^{(i)}\}$ uma base de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$. A partir da igualdade deste teorema, pode-se dizer que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^{\otimes}(\boldsymbol{T}) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{T})\, \boldsymbol{g}^{\otimes}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{i_p}{}^{(p)}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \underbrace{\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{T})}\, \underbrace{\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_p}{}^{(p)}\right)}.
\end{aligned}$$

Os termos destacados são unicamente determinados para qualquer tensor $\boldsymbol{T}$, logo $\boldsymbol{g}^{\otimes}$ existe e fica unicamente determinado. A fim de constatar a igualdade do teorema, seja

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p.$$

[5] O termo em inglês é "lifting".

[6] Adaptada de Backus[2], pp. 43-45.

Do resultado do desenvolvimento anterior, considerando as propriedades de funções multilineares e a proposição 6, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^{\otimes}\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p\right) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{f}_{i_k}^{U_k}(\boldsymbol{v}_k)\, \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_p}{}^{(p)}\right) \\
&= \boldsymbol{g}\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \boldsymbol{f}_{i_1}^{U_1}(\boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{u}_{i_1}{}^{(1)}, \cdots, \sum_{i_p=1}^{n_p} \boldsymbol{f}_{i_p}^{U_p}\left(\boldsymbol{v}_p\right) \boldsymbol{u}_{i_p}{}^{(p)}\right) \\
&= \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right).
\end{aligned}
$$

□

## Contração

Seja um espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V_{(p)}}$, onde $V_{(p)} := V^{\times p}$, e o conjunto $V_{(p-n)}$, formado a partir da retirada de $n$ conjuntos quaisquer de $V_{(p)}$. Considerando o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V_{(p-n)}}$ e o espaço vetorial $\boldsymbol{L}^F_{V_{(p)} \mapsto T_{V_{(p-n)} \mapsto F}}$, a função elevada de $\boldsymbol{c}_n \in L_{V_{(p)} \mapsto T_{V_{(p-n)} \mapsto F}}$, representada $\boldsymbol{c}_n^{\otimes}$, é uma função tensorial linear denominada contração de ordem $n$. A partir do teorema 8, dado um tensor qualquer $\boldsymbol{T} \in T_{V_{(p)} \mapsto F}$ com decomposição

$$\boldsymbol{T} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{pk}\,, m \geq 1, \tag{4.34}$$

tem-se que o tensor

$$\boldsymbol{c}_n^{\otimes}(\boldsymbol{T}) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{c}_n\left(\boldsymbol{v}_{1k}, \cdots, \boldsymbol{v}_{pk}\right) \tag{4.35}$$

e sua ordem é $p - n$.

### Traço de Tensor

Seja o conjunto $V_{(p)} := V^{\times p}$, onde $p \geq 2$, cujo produto cartesiano contem pelo menos um par de conjuntos iguais. Dado que $V_r = V_s$, $1 \leq r < s \leq p$, seja o conjunto

$$V_{(p-2)} := V_1 \times \cdots \times V_{r-1} \times V_{r+1} \times \cdots \times V_{s-1} \times V_{s+1} \times \cdots \times V_p\,. \tag{4.36}$$

Com base nos espaços $\boldsymbol{T}^F_{V_{(p)}}$, $\boldsymbol{T}^F_{V_{(p-2)}}$ e $\boldsymbol{L}^F_{V_{(p)}\mapsto T_{V_{(p-2)}\mapsto F}}$, diz-se que a contração $\boldsymbol{c}_2^{\otimes}$, cujo valor

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}_2\left(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_p\right) :=\\ &\qquad (\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{u}_s)\,\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{r-1}\otimes\boldsymbol{u}_{r+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{s-1}\otimes\boldsymbol{u}_{s+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_p\,,\ \forall\,\boldsymbol{u}_i\in V_i\,,\end{aligned} \tag{4.37}$$

é o traço em $r,s$, representada $\mathrm{tr}^{r,s}$. Nas condições da igualdade (4.35), tem-se que

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}^{r,s}(\boldsymbol{T}) =\\ &\quad\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{v}_{rk}\cdot\boldsymbol{v}_{sk})\,\boldsymbol{v}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{r-1k}\otimes\boldsymbol{v}_{r+1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{s-1k}\otimes\boldsymbol{v}_{s+1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{pk}\,.\end{aligned} \tag{4.38}$$

**Produto Contrativo**

Sejam os produtos cartesianos $W = W^{\times t}\times V^{\times s}$ e $Z = V^{\times s}\times Z^{\times m}$, a partir dos quais se estabelece que $V_{(p)} := W\times Z$, $p = t+2s+m$. Seja, então, o conjunto

$$\begin{aligned}&V_{(p-2q)} :=\\ &\qquad W_1\times\cdots W_t\times V_{q+1}\times\cdots\times V_s\times V_{q+1}\times\cdots\times V_s\times Z_1\times\cdots\times Z_m\,,\end{aligned} \tag{4.39}$$

resultante da retirada dos primeiros $q$ pares de conjuntos iguais em $V_{(p)}$. Seja a contração $\boldsymbol{c}_{2q}^{\otimes}$ tal que

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}_{2q}(\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_t,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s,\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_m) :=\\ &\qquad (\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}_1)\cdots\left(\boldsymbol{x}_q\cdot\boldsymbol{y}_q\right)\boldsymbol{w}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_t\otimes\boldsymbol{x}_{q+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_s\otimes\\ &\qquad \boldsymbol{y}_{q+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_s\otimes\boldsymbol{z}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{z}_m\,,\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde $\boldsymbol{w}_i\in W_i$, $\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j\in V_j$, $\boldsymbol{z}_k\in W_k$. Considerando os tensores quaisquer $\boldsymbol{W}\in T_{W\mapsto F}$ e $\boldsymbol{Z}\in T_{Z\mapsto F}$ com decomposições

$$\boldsymbol{W} = \sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{w}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{tk}\otimes\boldsymbol{x}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{qk},\ \boldsymbol{w}_{ik}\in W_i,\ \boldsymbol{x}_{jk}\in V_j, \tag{4.41}$$

e

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{y}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{y}_{tk} \otimes \boldsymbol{z}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{z}_{qk},\ \boldsymbol{y}_{ik} \in V_i,\ \boldsymbol{z}_{jk} \in Z_j, \tag{4.42}$$

tem-se, segundo (4.35), o tensor de ordem $p - 2q$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^{\otimes}_{2q}(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{Z}) = \\ &\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{x}_{1i} \cdot \boldsymbol{y}_{1j}\right)\cdots\left(\boldsymbol{x}_{qi} \cdot \boldsymbol{y}_{qj}\right)\boldsymbol{w}_{1i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_{ti} \otimes \boldsymbol{x}_{q+1i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{si} \otimes \\ &\quad \boldsymbol{y}_{q+1j} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{y}_{sj} \otimes \boldsymbol{z}_{1j} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{z}_{mj}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

A função no mapeamento $\odot_q : T_{W \mapsto F} \times T_{Z \mapsto F} \mapsto T_{V_{(p-2q)} \mapsto F}$, onde

$$\boldsymbol{W} \odot_q \boldsymbol{Z} := \boldsymbol{c}^{\otimes}_{2q}(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{Z}), \tag{4.44}$$

é denominada produto contrativo de ordem $q$. Para este produto, são válidas as igualdades:

i. $\boldsymbol{W} \odot_0 \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{Z}$;

ii. Bilinearidade: dados $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2 \in T_{Z \mapsto F}$ e $a, b_1, b_2 \in F$ quaisquer,

$$(a\boldsymbol{W}) \odot_q (b_1\boldsymbol{Z}_1 + b_2\boldsymbol{Z}_2) = ab_1\left(\boldsymbol{W} \odot_q \boldsymbol{Z}_1\right) + ab_2\left(\boldsymbol{W} \odot_q \boldsymbol{Z}_2\right).$$

Além destas propriedades, o produto contrativo pode ser associativo. Sejam os tensores $\boldsymbol{Y} \in T_{Y \mapsto F}$ e $\boldsymbol{K} \in T_{K \mapsto F}$, onde

$$\begin{aligned} Y &= V_1 \times \cdots V_s \times Y_1 \times \cdots \times Y_u \times W_1 \times \cdots \times W_m, \\ K &= W_1 \times \cdots W_m \times K_1 \times \cdots \times K_n. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Nestas condições, tem-se associatividade:

iii. $\boldsymbol{W} \odot_q (\boldsymbol{Y} \odot_r \boldsymbol{K}) = \left(\boldsymbol{W} \odot_q \boldsymbol{Y}\right) \odot_r \boldsymbol{K}$, onde $q \leqslant s$ e $r \leqslant m$.

**Produto Interno.** Considerando o produto cartesiano $V^{\times s}$, o produto contrativo $\boldsymbol{T}_1 \odot_s \boldsymbol{T}_2$, onde $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in T_{V^{\times s} \mapsto F}$, representado na forma $\boldsymbol{T}_1 \odot \boldsymbol{T}_2$, torna-se o produto interno positivo-definido entre $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$, pois a função $\odot$ define o mapeamento $\odot : V^{\times s} \times V^{\times s} \mapsto F$, obedecendo as propriedades apresentadas na seção 3.2. Na prática, a notação é alterada para $\boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_2$ se $s = 1$, para $\boldsymbol{T}_1 : \boldsymbol{T}_2$ se $s = 2$, para $\boldsymbol{T}_1 \cdot\!: \boldsymbol{T}_2$ se $s = 3$, para $\boldsymbol{T}_1 :: \boldsymbol{T}_2$ se $s = 4$, etc...

Diz-se então que $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times s}}$ é um *espaço tensorial produto interno*. Caso sejam definidas uma métrica e uma norma para este espaço, pode-se ter, de forma similar ao caso de espaços vetoriais, *espaços tensoriais de Banach e Hilbert*.

### Operador Tensorial Identidade

Seja um espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e o espaço vetorial $\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$. O operador tensorial

$$\boldsymbol{i}_{V^{\times p}} \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$$

é identidade se sua regra for descrita por

$$\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\,. \tag{4.46}$$

Desta forma, fica evidente que $\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}$ define um mapeamento bijetor.

Seja uma base qualquer de tensores poliádicos $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ de $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, gerada pela base $U_i = \{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_p}{}^{(i)}\}$ de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$. Tomando o array associado a $\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}$ na base $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ e utilizando a proposição 6, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\right)_{T^{\otimes}_{V^p}}\right]^{T^{\otimes}_{V^p}}_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_p} &= \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1\cdots i_p}\left(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right)\right)\\
&= \prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{f}^{U_k}_{i_k}\left(\boldsymbol{v}_{j_k}{}^{(k)}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{p} \left[\left(\boldsymbol{i}_{V_k}\right)_{U_k}\right]^{U_k}_{i_k j_k}\,.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

É possível obter que

$$\operatorname{Det}\left[\left(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\right)_{T^{\otimes}_{V^p}}\right]^{T^{\otimes}_{V^p}} = \prod_{k=1}^{p} \det\left[\left(\boldsymbol{i}_{V_k}\right)_{U_k}\right]^{U_k} = 1\,. \tag{4.48}$$

### Função Tensorial Inversa

Sejam os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$. Sejam os espaços vetoriais de funções tensoriais $\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}$, $\boldsymbol{L}^F_{T_{W^{\times q}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ e $\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$. Dada a função tensorial identidade

$$\boldsymbol{i}_{V^{\times p}} \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}\,,$$

denomina-se a função

$$\psi^{-1} \in L_{T_{W^{\times q}\mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$$

de função inversa de

$$\psi \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}$$

se

$$\psi \circ \psi^{-1} = \boldsymbol{i}_{V^{\times p}} \,. \tag{4.49}$$

## Mudança de Base

Considerando o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, sejam duas bases quaisquer $U_i = \{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_p}{}^{(i)}\}$ e $Z_i = \{\boldsymbol{w}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{w}_{n_q}{}^{(i)}\}$ de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$, geradoras das bases de tensores poliádicos $\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$ e $\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$ respectivamente. Dado o espaço vetorial de funções tensoriais lineares $\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, diz-se que o operador tensorial $\varsigma \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, onde

$$\varsigma\left(\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)}\right) = \boldsymbol{w}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_{i_p}{}^{(p)}, \tag{4.50}$$

é uma função linear que promove uma mudança de base de $\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$ para $\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$. Com base no desenvolvimento que resulta (4.31) e na proposição 6, pode-se realizar o seguinte:

$$\begin{aligned}
\left[\varsigma_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_p} &= \boldsymbol{f}^{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1\cdots i_p}\left(\varsigma\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right)\right) \\
&= \prod_{k=1}^{p} \boldsymbol{f}^{Z_k}_{i_k}\left(\boldsymbol{w}_{j_k}{}^{(k)}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{p} \left[\left(\boldsymbol{i}_{V_k}\right)_{Z_k}\right]^{Z_k}_{i_k j_k} .
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Logo

$$\left[\varsigma_{\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}} = \left[\left(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\right)_{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}} . \tag{4.52}$$

Utilizando procedimento semelhante, obtém-se as igualdades:

$$\left[\varsigma_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} = \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} ; \tag{4.53}$$

$$\left[\varsigma^{-1}{}_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} = \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} ; \tag{4.54}$$

$$\left[\varsigma^{-1}{}_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} = \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} . \tag{4.55}$$

Dado um operador tensorial qualquer $\psi \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, a partir dos arrays associados à $\varsigma$ e a funções tensoriais compostas, pode-se deduzir facilmente as seguintes conversões:

$$\begin{aligned}
\left[\psi_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} &= \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[\psi_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} \\
\left[\psi_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} &= \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[\psi_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} \\
\left[\psi_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} &= \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[\psi_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}} \\
\left[\psi_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} &= \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[\psi_{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}} \left[(\boldsymbol{i}_{V^{\times p}})_{\hat{T}^{\otimes}_{V\times p}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V\times p}}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Seguindo procedimento semelhante, as demais conversões entre os arrays associados a $\psi$ podem ser construídas alternando-se convenientemente as bases dos termos à direita da igualdade.

### Função Tensorial Transposta

Sejam os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p}}$, $\boldsymbol{T}^{F}_{W^{\times q}}$ e os tensores quaisquer $\boldsymbol{X} \in T_{V^{\times p}\mapsto F}$, $\boldsymbol{Y} \in T_{W^{\times q}\mapsto F}$. Dados os espaços vetoriais de funções tensoriais

$$\boldsymbol{L}^{F}_{T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{L}^{F}_{T_{W^{\times q}\mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}},$$

denomina-se função tensorial transposta de

$$\psi \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}$$

à única função tensorial

$$\psi^{T} \in L_{T_{W^{\times q}\mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$$

que promove

$$\psi(\boldsymbol{X}) \odot \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \odot \psi^{T}(\boldsymbol{Y}) . \tag{4.57}$$

Se $V^{\times p} = W^{\times q}$ e $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ for uma base de $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p}}$, pode-se demonstrar facilmente que

$$\left[\psi_{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}\right]^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}\,T} = \left[\psi_{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}\right]^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}} . \tag{4.58}$$

Caso os espaços tensoriais considerados forem de Euclidianos, dadas duas bases $\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times\times p}}$ e $\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times\times q}}$ de $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times q}}$ e $\boldsymbol{T}^{F}_{W^{\times q}}$ respectivamente, pode-se demonstrar por processo similar à obtenção do resultado (3.66) que

$$\left[\psi_{\tilde{T}^{\otimes}_{W^{\times q}}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}\,T} = \left[\psi^{T}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{W^{\times q}}} . \tag{4.59}$$

**Operador Tensorial Simétrico**

Considerando as condições anteriores, tendo $W^{\times q} = V^{\times p}$, um operador tensorial $\psi$ é simétrico se $\psi = \psi^{T}$. Ele é *anti-simétrico* se $\psi = -\psi^{T}$.

**Operador Tensorial Ortogonal**

Para $W^{\times q} = V^{\times p}$, a função $\psi$ é um operador tensorial ortogonal se

$$\psi^{-1} = \psi^{T} . \tag{4.60}$$

A partir de (4.57), similarmente ao desenvolvimento (3.50), pode-se demonstrar que funções tensoriais ortogonais preservam a operação produto interno $\odot$.

Com base na definição de grupo ortogonal apresentada na seção 3.4, pode-se dizer que o subconjunto $O_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ de $L_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, formado somente por operadores tensoriais ortogonais, define $\boldsymbol{GO}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$. Os subconjuntos $O^{+}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ e $O^{-}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ de $O_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, compostos por operadores ortogonais próprios e impróprios respectivamente, geram os grupos ortogonais $\boldsymbol{GO}^{+}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ e $\boldsymbol{GO}^{-}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$.

## 4.4 A Relação Tensor e Função Tensorial Linear

Conforme o teorema apresentado a seguir, pode-se estabelecer uma relação bijetora entre um tensor e uma função tensorial linear, generalizando a relação descrita no teorema 6.

**Teorema 9 (Riesz Generalizado)** *Sejam os espaços tensoriais* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, $\boldsymbol{T}^F_{U_e}$, $\boldsymbol{T}^F_{W_e}$, $\boldsymbol{T}^F_{U_d}$ *e* $\boldsymbol{T}^F_{W_d}$, *tais que* $V^{\times p} = U_e \times W_e = W_d \times U_d$. *Desta forma, dado um escalar* $q$, $1 \leqslant q \leqslant p$, *sejam os produtos cartesianos*

$$U_e := V^{\times q}, \qquad W_e := V_{q+1} \times \cdots \times V_p,$$
$$U_d := V_{p-q+1} \times \cdots \times V_p, \qquad W_d := V^{\times p-q}.$$

*Sejam os espaços vetoriais*

$$\boldsymbol{L}^F_{T_{U_e \mapsto F} \mapsto T_{W_e \mapsto F}} \quad e \quad \boldsymbol{L}^F_{T_{U_d \mapsto F} \mapsto T_{W_d \mapsto F}}.$$

*Dado um tensor qualquer* $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$, *sejam as funções tensoriais lineares*

$$\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}} \in L_{T_{U_e \mapsto F} \mapsto T_{W_e \mapsto F}} \quad e \quad \overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}} \in L_{T_{U_d \mapsto F} \mapsto T_{W_d \mapsto F}}$$

*definidas pelas regras*

$$\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} \odot_q \boldsymbol{T} \quad e \quad \overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{T} \odot_q \boldsymbol{Y}.$$

*Os mapeamentos*

$$\overrightarrow{\Psi}\colon T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto L_{T_{U_e \mapsto F} \mapsto T_{W_e \mapsto F}} \quad e \quad \overleftarrow{\Psi}\colon T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto L_{T_{U_d \mapsto F} \mapsto T_{W_d \mapsto F}}$$

*são transformações lineares bijetoras se, respectivamente,*

$$\overrightarrow{\Psi}\,(\boldsymbol{T}) = \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}} \quad e \quad \overleftarrow{\Psi}\,(\boldsymbol{T}) = \overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}.$$

**Demonstração**. A demonstração deste teorema se processa de maneira similar à do teorema 6, ou seja, dados $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ e $\alpha, \beta \in F$ quaisquer, constata-se que

i. $\overrightarrow{\Psi}$ é uma função linear:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\psi}_{\alpha \boldsymbol{T}_1 + \beta \boldsymbol{T}_2}\,(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{X} \odot_q (\alpha \boldsymbol{T}_1 + \beta \boldsymbol{T}_2) \\
&= \alpha \big(\boldsymbol{X} \odot_q \boldsymbol{T}_1\big) + \beta \big(\boldsymbol{X} \odot_q \boldsymbol{T}_2\big) \\
&= \alpha\, \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}_1}\,(\boldsymbol{X}) + \beta\, \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}_2}\,(\boldsymbol{X}) \\
&= \Big[\alpha\, \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}_1} + \beta\, \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}_2}\Big](\boldsymbol{X}) \\
\overrightarrow{\psi}_{\alpha \boldsymbol{T}_1 + \beta \boldsymbol{T}_2} &= \alpha\, \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}_1} + \beta\, \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}_2} \\
\overrightarrow{\Psi}\,(\alpha \boldsymbol{T}_1 + \beta \boldsymbol{T}_2) &= \alpha\, \overrightarrow{\Psi}\,(\boldsymbol{T}_1) + \beta\, \overrightarrow{\Psi}\,(\boldsymbol{T}_2).
\end{aligned}$$

ii. $\overrightarrow{\Psi}$ define um mapeamento injetor:

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{\Psi}\left(\boldsymbol{T}_1\right)\right](\boldsymbol{X}) &= \left[\overrightarrow{\Psi}\left(\boldsymbol{T}_2\right)\right](\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{X}\odot_q \boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{X}\odot_q \boldsymbol{T}_2 \\ \boldsymbol{X}\odot_q\left(\boldsymbol{T}_1-\boldsymbol{T}_2\right) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{T}_2\,.\end{aligned}$$

iii. $\overrightarrow{\Psi}$ define um mapeamento sobrejetor: dada uma função $\overrightarrow{\psi}\in L_{T_{U_{e}\mapsto F}\mapsto T_{W_{e}\mapsto F}}$ qualquer, uma base $T^{\otimes}_{V^{\times q}}$ formada pelos conjuntos $\{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_i}{}^{(i)}\}$ e um tensor

$$\boldsymbol{Z}=\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_q=1}^{n_q}\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{i_q}{}^{(q)}\otimes\overrightarrow{\psi}\left(\boldsymbol{v}^*_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^*_{i_q}{}^{(q)}\right),$$

pode-se dizer que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{X}\odot_q\boldsymbol{Z} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_q}\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times q}}}_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{v}^*_{i_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^*_{i_q}{}^{(q)}\right)\odot_q \\ &\quad\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_q=1}^{n_q}\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{j_q}{}^{(q)}\otimes\overrightarrow{\psi}\left(\boldsymbol{v}^*_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^*_{j_q}{}^{(q)}\right)\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_q}\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_q=1}^{n_q}\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times q}}}_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{X})\,\delta_{i_1j_1}\cdots\delta_{i_qj_q}\,\overrightarrow{\psi}\left(\boldsymbol{v}^*_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^*_{j_q}{}^{(q)}\right) \\ &= \overrightarrow{\psi}\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_q=1}^{n_q}\boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times q}}}_{j_1\cdots j_p}(\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{v}^*_{j_1}{}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^*_{j_q}{}^{(q)}\right) \\ &= \overrightarrow{\psi}(\boldsymbol{X}) \\ \overrightarrow{\Psi}(\boldsymbol{Z}) &= \overrightarrow{\psi}\,.\end{aligned}$$

A demonstração para a função $\overleftarrow{\Psi}$ segue esta mesma metodologia. □

**Proposição 7** *Considerando as condições do teorema 9,*

*i. se $q=p$, então $\overrightarrow{\Psi}=\overleftarrow{\Psi}$;*

*ii. se $2q=p$, os tensores $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ e $\overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})$ possuem ordens iguais;*

*iii. se $2q=p$ e $V_1=\cdots=V_p$, as funções $\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}$ e $\overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}$ são operadores lineares;*

iv. *Dada uma tupla qualquer* $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p) \in V^{\times p}$*, é sempre válido que*

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) = \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_q\right) \odot \left(\boldsymbol{v}_{q+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p\right)$$

*e*

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) = \left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{p-q}\right) \odot \overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{v}_{p-q+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p\right).$$

**Demonstração**.

i. Se $q = p$, então $\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}) = \overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}), \forall \boldsymbol{X}$;
ii. Facilmente comprovada pelas condições do teorema 9.
iii. Facilmente comprovada pelas condições do teorema 9.
iv. Considerando

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{u}_{1i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{pi}, \, m \geq 1$$

e a igualdade (4.16), fica evidente que

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) = \boldsymbol{T} \odot \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p.$$

Pode-se fazer, então, o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) &= \left[\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{u}_{1i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{pi}\right]\left(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{u}_{1i} \cdot \boldsymbol{v}_1) \cdots \left(\boldsymbol{u}_{qi} \cdot \boldsymbol{v}_q\right) \boldsymbol{u}_{q+1i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{pi}\right]\left(\boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) \\
&= \left[\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_q\right) \odot_q \boldsymbol{T}\right]\left(\boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_p\right) \\
&= \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_q\right) \odot \left(\boldsymbol{v}_{q+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_p\right).
\end{aligned}$$

Utiliza-se o procedimento semelhante para a igualdade com $\overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}$.

□

**Proposição 8** *Sejam os espaços tensoriais* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$ *e*

$$\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}}.$$

*Dados os espaços tensoriais* $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q} \times V^{\times p}}$ *e* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p} \times W^{\times q}}$*, uma função qualquer*

$$\psi \in L_{T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}},$$

*nos termos do teorema 9, está sempre associada a um e somente um tensor de* $T_{W^{\times q} \times V^{\times p} \mapsto F}$ *e de* $T_{V^{\times p} \times W^{\times q} \mapsto F}$ *respectivamente.*

**Demonstração**. Com base no teorema 9, há um único tensor $\boldsymbol{T}_1 \in T_{W^{\times q} \times V^{\times p} \mapsto F}$ associado à função $\psi$, devido a igualdade $\overleftarrow{\Psi}(\boldsymbol{T}_1) = \psi$, onde $\overleftarrow{\Psi}$ é uma bijeção. Da mesma forma, segundo este mesmo teorema, existe um único $\boldsymbol{T}_2 \in T_{V^{\times p} \times W^{\times q} \mapsto F}$ associado a $\psi$, via $\overrightarrow{\Psi}(\boldsymbol{T}_2) = \psi$. □

### Funções Representantes

A relação entre funções lineares e vetores descrita no teorema 6 permite substituir a notação da função $\vartheta_{\boldsymbol{v}}$ para simplesmente $\boldsymbol{v}$, de onde se diz que um vetor pode também ser considerado um funcional linear, conforme (4.2).

No caso de tensores, segundo o teorema 9, as funções $\overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}$ e $\overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}}$ têm, cada uma, relação bijetora com o tensor $\boldsymbol{T}$. Com base nisso, as funções

$$\boldsymbol{T}_{\overleftarrow{\odot} q} := \overleftarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}_{\overrightarrow{\odot} q} := \overrightarrow{\psi}_{\boldsymbol{T}} \tag{4.61}$$

são chamadas funções representantes do tensor $\boldsymbol{T}$ com contração $q$ à direita e à esquerda, respectivamente. Se o tensor $\boldsymbol{T}$ tiver ordem $p$, $\boldsymbol{T}_{\overleftarrow{\odot} q}$ e $\boldsymbol{T}_{\overrightarrow{\odot} q}$ são funções tensoriais lineares associadas a $\boldsymbol{T}$, segundo (4.61), cujas imagens são constituídas por tensores de ordem $p-q$. Pode-se concluir, então, que $\vartheta_{\boldsymbol{v}}$ é uma função representante de $\boldsymbol{v}$ com contração 1 à direita ou à esquerda.

O teorema 9 é de fundamental importância, já que ele torna possível apresentar o estudo de tensores como o estudo de uma de suas funções representantes. A livre escolha de uma delas, no entanto, determina qual das duas igualdades do ítem iv da proposição 7 é considerada[7].

De agora em diante, toda vez que conceitos baseados em funções representantes forem independentes da abordagem de representação previamente escolhida (com contração à direita ou à esquerda), será utilizada a notação sem seta $\boldsymbol{T}_{\odot q}$.

### Função Representante Identidade

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p} \times V^{\times p}}$. A partir da igualdade (4.25) que define o tensor identidade de $T_{V^{\times p} \times V^{\times p} \mapsto F}$, para quaisquer $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in V_i$, pode-se reali-

[7]Grande parte dos trabalhos em Mecânica do Contínuo que tratam de Teoria de Tensores não mostra, de forma explícita, qual das funções representantes é utilizada para substituir o conceito de tensor. No caso de tensores de segunda ordem, por exemplo, a clássica apresentação do produto tensorial $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ como sendo uma função que mapeia o vetor $\boldsymbol{x}$ para o vetor $(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ revela, implicitamente, a opção pela função representante com contração 1 à direita.

zar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_p\right) &= \left(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_p\right)\odot\left(\boldsymbol{y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_p\right)\\
&= \left(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_p\right)\odot\left[\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\left(\boldsymbol{y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_p\right)\right]\\
&= \left[\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\left(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_p\right)\right]\odot\left(\boldsymbol{y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_p\right).
\end{aligned}$$

Com base no ítem iv da proposição 7, pode-se concluir então que a função representante identidade

$$\boldsymbol{I}_{\overleftarrow{\odot} p} = \boldsymbol{I}_{\overrightarrow{\odot} p} = \boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\,. \tag{4.62}$$

### Funções Representantes e Tensor Identidade

Sejam os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}\times V^{\times p}}$, $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}\times V^{\times p}\times W^{\times q}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}\times V^{\times p}\times V^{\times p}}$. Considerando um base genérica qualquer $U_i=\{\boldsymbol{u}_1{}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{u}_{n_i}{}^{(i)}\}$ de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$, todo tensor identidade assume uma das formas (4.28) ou (4.29). Neste contexto, se $\boldsymbol{I}\in T_{V^{\times p}\times V^{\times p}\mapsto F}$, $\boldsymbol{A}\in T_{V^{\times p}\times V^{\times p}\times W^{\times q}\mapsto F}$ e $\boldsymbol{B}\in T_{W^{\times q}\times V^{\times p}\times V^{\times p}\mapsto F}$, onde

$$\boldsymbol{A}=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{pk}\otimes\boldsymbol{y}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_{pk}\otimes\boldsymbol{w}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{qk} \tag{4.63}$$

e

$$\boldsymbol{B}=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{w}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{qk}\otimes\boldsymbol{x}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{pk}\otimes\boldsymbol{y}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_{qk}\,, \tag{4.64}$$

$m\geq 1$, então

$$\boldsymbol{A}_{\overrightarrow{\odot} 2p}(\boldsymbol{I})=\boldsymbol{B}_{\overleftarrow{\odot} 2p}(\boldsymbol{I})=\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{p}\boldsymbol{x}_{ik}\cdot\boldsymbol{y}_{ik}\boldsymbol{w}_{1k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_{qk}\,. \tag{4.65}$$

### Função Representante Composta

Dado o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e os tensores quaisquer $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in T_{V^{\times p}\mapsto F}$, onde $p\geqslant s+q$, tal que $s$ e $q$ são escalares positivos não nulos. Das definições (4.61), dado um tensor qualquer $\boldsymbol{X}\in T_{V^{\times q}\mapsto F}$, fica evidente que

$$\boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot} s}\left(\boldsymbol{B}_{\overleftarrow{\odot} q}(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{A}\odot_s\left(\boldsymbol{B}\odot_q\boldsymbol{X}\right) \tag{4.66}$$

e

$$\boldsymbol{A}_{\overrightarrow{\odot} s}\left(\boldsymbol{B}_{\overrightarrow{\odot} q}(\boldsymbol{X})\right)=\left(\boldsymbol{X}\odot_q\boldsymbol{B}\right)\odot_s\boldsymbol{A}\,. \tag{4.67}$$

Nestas condições, o produto contrativo é associativo, logo

$$\boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot}s} \circ \boldsymbol{B}_{\overleftarrow{\odot}q} = (\boldsymbol{A} \odot_s \boldsymbol{B})_{\overleftarrow{\odot}q} \tag{4.68}$$

e

$$\boldsymbol{A}_{\overrightarrow{\odot}s} \circ \boldsymbol{B}_{\overrightarrow{\odot}q} = (\boldsymbol{B} \odot_s \boldsymbol{A})_{\overrightarrow{\odot}q} \,. \tag{4.69}$$

Nos casos onde $q = s$, costuma-se utilizar as seguintes representações:

$$\boldsymbol{AB}_{\overleftarrow{\odot}q} \quad := \quad \left(\boldsymbol{A} \odot_q \boldsymbol{B}\right)_{\overleftarrow{\odot}q} \,, \tag{4.70}$$

$$\boldsymbol{AB}_{\overrightarrow{\odot}q} \quad := \quad \left(\boldsymbol{B} \odot_q \boldsymbol{A}\right)_{\overrightarrow{\odot}q} \,, \tag{4.71}$$

onde $\boldsymbol{AB}$ é o tensor resultante dos produtos contrativos em cada caso. Nota-se que a manipulação de funções representantes compostas com contração à direita é mais simples, já que não é necessário inverter a seqüência dos tensores envolvidos[8].

Neste contexto, se for possível $n-1$ composições de uma mesma função representante $\boldsymbol{A}_{\odot q}$, tem-se

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\odot q} := (\underbrace{\boldsymbol{A} \odot_q \cdots \odot_q \boldsymbol{A}}_{n \text{ vezes}})_{\odot q} \,. \tag{4.72}$$

### Função Representante Inversa

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p} \times V^{\times p}}$, onde $2p \geqslant s + q$, tal que $s$ e $q$ são positivos não nulos. Dado um tensor qualquer $\boldsymbol{A} \in T_{V^{\times p} \times V^{\times p} \mapsto F}$, uma função $\boldsymbol{B}_{\odot q}$, onde $\boldsymbol{B} \in T_{V^{\times p} \times V^{\times p} \mapsto F}$, é dita inversa de $\boldsymbol{A}_{\odot s}$ se

$$\boldsymbol{A}_{\odot s} \circ \boldsymbol{B}_{\odot q} = \boldsymbol{I}_{\odot q} \,. \tag{4.73}$$

Desta forma, com base nos conceitos de função representante composta, tem-se o seguinte:

i. Para contração à direita, $\boldsymbol{A} \odot_s \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$;

ii. Para contração à esquerda, $\boldsymbol{B} \odot_s \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

[8]Esta é a principal razão pela qual a maioria dos textos introdutórios optam por funções representantes com contração à direita para substituir o conceito de tensor.

Pode-se realizar a tradicional representação da função inversa $\boldsymbol{B}_{\odot q}$ com $(\boldsymbol{A}_{\odot s})^{-1}$. No entanto, tal notação só faz sentido se for explicitado o valor de $q$. Quando $q = s$, utiliza-se a função

$$\boldsymbol{A}_{\odot q}^{-1} := \left(\boldsymbol{A}_{\odot q}\right)^{-1} . \tag{4.74}$$

Em termos de notação, tal definição não gera ambigüidade, já que inexiste o conceito de "tensor inverso".

**Função Representante Transposta**

Sejam os quatro espaços tensoriais $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^{F}$, $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^{F}$, $\boldsymbol{T}_{U^{\times s}}^{F}$ e $\boldsymbol{T}_{Z^{\times s}}^{F}$, onde $s = p + q$. Dados os tensores quaisquer $\boldsymbol{X} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$, $\boldsymbol{Y} \in T_{W^{\times q} \mapsto F}$ e $\boldsymbol{A} \in T_{U^{\times s} \mapsto F}$, seja

$$\boldsymbol{A}_{\odot p}(\boldsymbol{X}) \odot_q \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \odot_p \boldsymbol{B}_{\odot q}(\boldsymbol{Y}) , \tag{4.75}$$

onde $\boldsymbol{B} \in T_{Z^{\times s} \mapsto F}$. A partir da definição de função tensorial transposta, $\boldsymbol{B}_{\odot q}$ é denominada função representante transposta de $\boldsymbol{A}_{\odot p}$. Nestas circunstâncias, pode-se afirmar o seguinte:

i. Para contração à direita, $U^{\times s} = W^{\times q} \times V^{\times p}$ e $Z^{\times s} = V^{\times p} \times W^{\times q}$;

ii. Para contração à esquerda, $U^{\times s} = V^{\times p} \times W^{\times q}$ e $Z^{\times s} = W^{\times q} \times V^{\times p}$.

Nota-se que a ordem dos produtos cartesianos $V^{\times p}$ e $W^{\times q}$ que definem $U^{\times s}$ e $Z^{\times s}$ está sempre invertida. Desta forma, se

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{w}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_{qk} \otimes \boldsymbol{v}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{pk} , \tag{4.76}$$

onde $\boldsymbol{w}_{ik} \in W_i$ e $\boldsymbol{v}_{ik} \in V_i$, então obrigatoriamente

$$\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{pk} \otimes \boldsymbol{w}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_{qk} . \tag{4.77}$$

Se nas igualdades anteriores $p = q$, segundo a definição (4.11), o tensor

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{(1,1+p)(p,2p)} . \tag{4.78}$$

Como ocorre no caso de função tensorial inversa, a representação tradicional $(\boldsymbol{A}_{\odot p})^{T}$ para a transposta de $\boldsymbol{A}_{\odot p}$ deve vir acompanhada com o valor de $q$. Numa situação onde $W^{\times q} = V^{\times p}$, não há este problema e pode-se ter uma função

$$\boldsymbol{A}_{\odot p}^{\boldsymbol{T}} := \left(\boldsymbol{A}_{\odot p}\right)^{T} . \tag{4.79}$$

Neste caso, vale salientar que as igualdades (4.76), (4.77) e (4.78) permanecem inalteradas, exceto pelo fato de que agora $\boldsymbol{w}_{ik} \in V_i$. Particularmente, se $\boldsymbol{w}_{ik} = \boldsymbol{v}_{ik}$, a função tensorial $\boldsymbol{A}_{\odot p}$ é simétrica.

**Traço de Função Representante**

Sejam os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}_{V_{(p)}}^{F}$ e $\boldsymbol{T}_{V_{(p-2)}}^{F}$ tais que $V_{(p)} = V^{\times p}$, $V_r = V_s$ e

$$V_{(p-2)} := V_1 \times \cdots \times V_{r-1} \times V_{r+1} \times \cdots \times V_{s-1} \times V_{s+1} \times \cdots \times V_p . \tag{4.80}$$

Nestas condições, utilizando (4.38), diz-se que a função

$$\operatorname{tr}^{r,s}\left(\boldsymbol{T}_{\odot q_1}\right) := \left(\operatorname{tr}^{r,s}(\boldsymbol{T})\right)_{\odot_{q_2}} , \tag{4.81}$$

onde $q_1 \leqslant p$ e $q_2 \leqslant p-2$, é denominada traço da função representante $\boldsymbol{T}_{\odot q_1}$ em $r, s$. Com base nesta definição, considerando o caso particular de tensores de segunda ordem, cujo espaço tensorial é definido por $V_{(2)} = V^2$, tem-se que o traço $\operatorname{tr}^{1,2}\left(\boldsymbol{T}_{\odot q_1}\right)$, onde $q_1 \leqslant 2$, resulta uma função escalar, pois

$$\operatorname{tr}^{1,2}(\boldsymbol{T}) \in F. \tag{4.82}$$

Ainda neste contexto, se $V$ definir um espaço vetorial de Hilbert com dimensão $n$, seja $T_{V2}^{\otimes}$ base de $\boldsymbol{T}_{V^2}^{F}$, gerada pelos tensores poliádicos $\boldsymbol{u}_{i_1} \otimes \boldsymbol{u}_{i_2}^{*}$, $i_j = 1, \cdots, n$. Dado um tensor qualquer $\boldsymbol{A} \in T_{V^2 \mapsto F}$, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}^{1,2}\left(\boldsymbol{A}_{\odot q_1}\right) &:= \operatorname{tr}^{1,2}\left(\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \boldsymbol{f}_{i_1 i_2}^{T_{V^2}^{\otimes}}(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{u}_{i_1}\otimes\boldsymbol{u}_{i_2}^{*}\right) \\
&:= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \boldsymbol{f}_{i_1 i_2}^{T_{V^2}^{\otimes}}(\boldsymbol{A})\operatorname{tr}^{1,2}\left(\boldsymbol{u}_{i_1}\otimes\boldsymbol{u}_{i_2}^{*}\right) \\
&:= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \boldsymbol{f}_{i_1 i_2}^{T_{V^2}^{\otimes}}(\boldsymbol{A})\,\delta_{i_1 i_2} \\
&:= \sum_{i_1=1}^{n} \boldsymbol{f}_{i_1 i_1}^{T_{V^2}^{\otimes}}(\boldsymbol{A}) \\
&:= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{A}\right]^{T_{V^2}^{\otimes}}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

### Hiperdeterminante de Operador Tensorial Linear

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^{F}$, gerado por espaços de Hilbert $m$-dimensionais, e o espaço vetorial de funções tensoriais lineares $\boldsymbol{L}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}^{F}$. Dado o operador tensorial $\psi \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, sejam os tensores anti-simétricos não nulos $\boldsymbol{P}^{\psi}, \boldsymbol{P} \in TA_{(V^{\times p})^{n}\mapsto F}$ e o inteiro $q = p.n$, tais que

$$\boldsymbol{P}_{\odot_q}^{\psi}\left(\boldsymbol{X}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{X}_n\right) := \boldsymbol{P}_{\odot_q}\left(\psi\left(\boldsymbol{X}_1\right)\otimes\cdots\otimes\psi\left(\boldsymbol{X}_n\right)\right),\ \forall\,\boldsymbol{X}_i \in T_{V^{\times p}\mapsto F}. \tag{4.84}$$

Com base na proposição 2, seja $\{\boldsymbol{P}\}$ uma base do subespaço $\boldsymbol{TA}_{(V^{\times p})^{n}}^{F}$ de $\boldsymbol{T}_{(V^{\times p})^{n}}^{F}$, tal que

$$\boldsymbol{P}^{\psi} = \alpha\boldsymbol{P}, \tag{4.85}$$

onde $\alpha \in F$. Nestas condições, diz-se que o escalar $\alpha$ é o hiperdeterminante do operador tensorial linear $\psi$, representado $\operatorname{Det}\psi$. Para que tal definição seja plausível, deve ser mostrado que o valor do escalar $\alpha$ em (4.85) é o mesmo para qualquer tensor do conjunto $TA_{(V^{\times p})^{n}\mapsto F}$. Para tal, dado um outro tensor qualquer $\beta\boldsymbol{P}$ deste conjunto, considerando (4.84) e (4.85), pode-se dizer que

$$(\beta\boldsymbol{P})^{\psi} = \beta\boldsymbol{P}^{\psi} = \beta\alpha\boldsymbol{P} = \alpha\left(\beta\boldsymbol{P}\right),\ \forall\,\beta \in F; \tag{4.86}$$

de onde se conclui que $\alpha$ depende somente de $\psi$. Nos termos do Teorema 9, como a função $\psi$ pode ser representante de um tensor $\boldsymbol{S} \in T_{(V^{\times p})^{n}\mapsto F}$, então o escalar

$$\operatorname{Det} \boldsymbol{S} := \operatorname{Det} \psi \tag{4.87}$$

é dito o *hiperdeterminante do tensor* $\boldsymbol{S}$.

Com base na definição (4.84), é possível escrever que

$$\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\psi(\boldsymbol{X}_1) \otimes \cdots \otimes \psi(\boldsymbol{X}_n)) = (\operatorname{Det} \psi)\, \boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_n)\,, \tag{4.88}$$

para quaisquer $\boldsymbol{X}_i \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ e $\boldsymbol{T} \in TA_{(V^{\times p})^n \mapsto F}$. A partir desta igualdade, dados os operadores lineares $\psi_1, \psi_2 \in L_{T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{V^{\times p} \mapsto F}}$, utilizando duas bases quaisquer $\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$ e $\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$ de $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, tem-se as seguintes propriedades:

i. $\operatorname{Det} \psi_1 \circ \psi_2 = \operatorname{Det} \psi_1 \operatorname{Det} \psi_2$ ;

ii. $\operatorname{Det} \boldsymbol{i}_{V^{\times p}} = 1$;

iii. $\psi_1$ automórfico $\implies \operatorname{Det} \psi_1^{-1} = (\operatorname{Det} \psi_1)^{-1}$ ;

iv. $\psi_1$ automórfico $\iff \operatorname{Det} \psi_1 \neq 0$;

v. $\operatorname{Det} \psi_1 = \operatorname{Det} \left[\psi_{1\,\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}\right]^{\tilde{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}}$ ;

vi. $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times q}}$ Euclidiano $\implies \operatorname{Det} \psi_1^T = \operatorname{Det} \psi_1$ ;

vii. $\psi_1$ ortogonal e $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times q}}$ Euclidiano $\implies \operatorname{Det} \psi_1 = \pm 1$ .

Considerando o último ítem, caso seu hiperdeterminante seja positivo, $\psi_1$ é chamado operador ortogonal *próprio*, senão, ele é *impróprio*.

**Demonstração**. Vamos demonstrar as propriedades citadas com os itens respectivos apresentados a seguir.

i. Seja o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Det} \psi_1 \circ \psi_2)\, \boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_n) &= \boldsymbol{T}_{\odot_q}(\psi_1 \circ \psi_2(\boldsymbol{X}_1) \otimes \cdots \otimes \psi_1 \circ \psi_2(\boldsymbol{X}_n)) \\
&= (\operatorname{Det} \psi_1)\, \boldsymbol{T}_{\odot_q}(\psi_2(\boldsymbol{X}_1) \otimes \cdots \otimes \psi_2(\boldsymbol{X}_n)) \\
&= (\operatorname{Det} \psi_1)(\operatorname{Det} \psi_2)\, \boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_n)
\end{aligned}$$

ii. De (4.88), a obtenção da igualdade deste ítem é imediata.

iii. Utilizando o resultado dos dois itens anteriores, tem-se que

$$(\operatorname{Det} \psi_1)(\operatorname{Det} \psi_1^{-1}) = \operatorname{Det} \psi_1 \circ \psi_1^{-1} = \operatorname{Det} \boldsymbol{i}_{V^{\times p}} = 1\,.$$

iv. A constatação de que $\psi_1$ bijeção $\Rightarrow$ $\operatorname{Det}\psi_1 \neq 0$ é conseqüência imediata da demonstração do item iii. Agora vejamos se $\operatorname{Det}\psi_1 \neq 0 \Rightarrow \psi_1$ bijeção. Vamos mostrar primeiramente que, dado um tensor qualquer $\boldsymbol{T} \in TA_{(V^{\times p})^n \mapsto F}$ e um tensor $\boldsymbol{X} := \boldsymbol{X}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_\alpha \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_\beta \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_n$, onde $\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{X}_\beta$,

$$\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X}) = 0.$$

Para tal, sabemos que $\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{T}_{(\alpha,\beta)}$ e $\boldsymbol{X}_{(\alpha,\beta)} = \boldsymbol{X}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_\beta \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_\alpha \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_n$. Desta forma,

$$\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{T}_{(\alpha,\beta)_{\odot_q}}(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left(\boldsymbol{X}_{(\alpha,\beta)}\right).$$

Mas como $\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{X}_\beta$, então $\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{X})$, c.q.d. Com base neste resultado, vamos demonstrar agora que se o conjunto $Y = \{\boldsymbol{Y}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_n\}$ for linearmente dependente, então

$$\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Y}_n) = 0.$$

Para tal, vamos dizer que um tensor $\boldsymbol{Y}_\alpha$ de $Y$ é combinação linear dos demais elementos do conjunto. Pode-se realizar então o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Y}_\alpha \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Y}_n) &= \\
\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left(\boldsymbol{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (1-\delta_{i\alpha}) \boldsymbol{Y}_i \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Y}_n\right) &= \\
\sum_{i=1}^{n} \gamma_i (1-\delta_{i\alpha}) \boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Y}_i \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Y}_n) &= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade ocorre porque para cada valor do índice $i \neq \alpha$, o produto tensorial, argumento de $\boldsymbol{T}_{\odot_q}$, sempre possui dois tensores iguais, c.q.d. Tomando este resultado e (4.88), se $\operatorname{Det}\psi_1 \neq 0$, então

$$\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\psi_1(\boldsymbol{Z}_1) \otimes \cdots \otimes \psi_1(\boldsymbol{Z}_n)) \neq 0$$

e

$$\boldsymbol{T}_{\odot_q}(\boldsymbol{Z}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{Z}_n) \neq 0.$$

Como conseqüência os conjuntos $\{\boldsymbol{Z}_1, \cdots, \boldsymbol{Z}_n\}$ e $\{\psi_1(\boldsymbol{Z}_1), \cdots, \psi_1(\boldsymbol{Z}_n)\}$ são linearmente independentes. Desta conclusão, como $\boldsymbol{Z}_i$ são tensores quaisquer, dada uma base de tensores poliádicos $T^{\otimes}_{V^{\times p}}$ de $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, construída a partir de $U_i = \{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_m{}^{(i)}\}$, onde $n_i$ é a dimensão de $\boldsymbol{H}^F_{V_i}$, pode-se afirmar que o conjunto

$$\left\{\psi_1\left(\boldsymbol{v}_{j_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{j_p}{}^{(p)}\right), \cdots\right\}, j_i = 1, \cdots, m$$

é linearmente independente. Desta forma, considerando dois tensores distintos quaisquer $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2 \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$, pode-se dizer então que os valores

$$\psi_1(\boldsymbol{K}_1) = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_p=1}^{m} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{K}_1)\, \psi_1\left(\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)}\right)$$

e

$$\psi_1(\boldsymbol{K}_2) = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_p=1}^{m} \boldsymbol{f}^{T^{\otimes}_{V^{\times p}}}_{i_1 \cdots i_p}(\boldsymbol{K}_2)\, \psi_1\left(\boldsymbol{v}_{i_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_p}{}^{(p)}\right)$$

também são distintos. Se é assim, então o operador $\psi_1$ é uma injeção. Nos termos da proposição **??**, $\psi_1$ é também uma bijeção.

v. Dada uma base qualquer de tensores poliádicos $\hat{T}^{\otimes}_{V^{\times p}}$ de $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p}}$, construída a partir de $U_i = \{\boldsymbol{v}_1{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{v}_m{}^{(i)}\}$ e um tensor anti-simétrico qualquer $\boldsymbol{T} \in TA_{(V^{\times p})^n \mapsto F}$, onde $n = m^p$. Dado $i_j = 1, \cdots, m$ e sabendo que

$$\psi_1\left(\boldsymbol{v}_{(i_1)_l}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(i_p)_l}{}^{(p)}\right) = \sum_{(j_1)_l=1}^{m} \cdots \sum_{(j_p)_l=1}^{m} \left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_l \cdots (i_p)_1 (j_1)_l \cdots (j_p)_l} \boldsymbol{v}_{(j_1)_l}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(j_p)_l}{}^{(p)},$$

pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left(\psi_1\left(\boldsymbol{v}_{(i_1)_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(i_p)_1}{}^{(p)}\right) \otimes \cdots \otimes \psi_1\left(\boldsymbol{v}_{(i_1)_n}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(i_p)_n}{}^{(p)}\right)\right) &= \\
\sum_{(j_1)_1=1}^{m} \cdots \sum_{(j_p)_1=1}^{m} \left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_1 \cdots (i_p)_1 (j_1)_1 \cdots (j_p)_1} \cdots \\
\cdots \sum_{(j_1)_n=1}^{m} \cdots \sum_{(j_p)_n=1}^{m} \left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_n \cdots (i_p)_n (j_1)_n \cdots (j_p)_n} \\
\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left(\boldsymbol{v}_{(j_1)_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(j_p)_1}{}^{(p)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(j_1)_n}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(j_p)_n}{}^{(p)}\right).
\end{aligned}$$

Por meio de (**??**), (4.13) e (4.10), podemos continuar assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\Bigg[\sum_{(k_1)_1=1}^{m} \cdots \sum_{(k_p)_1=1}^{m} \left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_1 \cdots (i_p)_1 (k_1)_1 \cdots (k_p)_1} \cdots \\
\cdots \sum_{(k_1)_n=1}^{m} \cdots \sum_{(k_p)_n=1}^{m} \left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_n \cdots (i_p)_n (k_1)_n \cdots (k_p)_n} \epsilon_{(k_1)_1 \cdots (k_p)_1} \cdots \epsilon_{(k_1)_n \cdots (k_p)_n}\Bigg] \\
\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left(\boldsymbol{v}_{(i_1)_1}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(i_p)_1}{}^{(p)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(i_1)_n}{}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{(i_p)_n}{}^{(p)}\right)
\end{aligned}$$

porque o último termo foi colocado em evidência já que o tensor $\boldsymbol{T}$ é anti-simétrico. É importante observar que este resultado fica inalterado se fossem adotadas duas bases diferentes de tensores poliádicos. Comparando esta igualdade com (**??**) e com (4.88), conclui-se a igualdade do ítem.

vi. A última igualdade da demonstração do ítem anterior, escrita para $\psi_1^T$, pode ser apresentada na forma:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left(\psi_1^T\left({\boldsymbol{v}_{(i_1)_1}}^{(1)}\otimes\cdots\otimes{\boldsymbol{v}_{(i_p)_1}}^{(p)}\right)\otimes\cdots\otimes\psi_1^T\left({\boldsymbol{v}_{(i_1)_n}}^{(1)}\otimes\cdots\otimes{\boldsymbol{v}_{(i_p)_n}}^{(p)}\right)\right) = \\
&\frac{1}{n!}\left[\sum_{(k_1)_1=1}^{m}\cdots\sum_{(k_p)_1=1}^{m}\cdots\sum_{(k_1)_n=1}^{m}\cdots\sum_{(k_p)_n=1}^{m}\epsilon_{(k_1)_1\cdots(k_p)_1}\cdots\epsilon_{(k_1)_n\cdots(k_p)_n}\right. \\
&\left.\underbrace{\left[\psi_1^T{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_1\cdots(i_p)_1(k_1)_1\cdots(k_p)_1}\cdots\left[\psi_1^T{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(i_1)_n\cdots(i_p)_n(k_1)_n\cdots(k_p)_n}}\right] \\
&\boldsymbol{T}_{\odot_q}\left({\boldsymbol{v}_{(i_1)_1}}^{(1)}\otimes\cdots\otimes{\boldsymbol{v}_{(i_p)_1}}^{(p)}\otimes\cdots\otimes{\boldsymbol{v}_{(i_1)_n}}^{(1)}\otimes\cdots\otimes{\boldsymbol{v}_{(i_p)_n}}^{(p)}\right).
\end{aligned}
$$

Combinando (4.59) com o fato de que

$$
\left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}\,T}_{(i_1)_l\cdots(i_p)_l(k_1)_l\cdots(k_p)_l} = \left[\psi_1{}_{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}\right]^{\hat{T}^{\otimes}_{V^p}}_{(k_1)_l\cdots(k_p)_l(i_1)_l\cdots(i_p)_l},
$$

tem-se que o termo destacado na primeira igualdade é igual ao da última igualdade do ítem anterior. Isto ocorre porque os fatores da soma global, promovida pelo diversos somatórios envolvidos, sofrem apenas alteração de posição.

vii. Se $\psi_1^T = \psi_1^{-1}$ então

$$
\operatorname{Det}\psi_1\operatorname{Det}\psi_1^{-1} = \operatorname{Det}\psi_1\operatorname{Det}\psi_1^T = (\operatorname{Det}\psi_1)^2 = 1\,.
$$

□

## 4.5 Isotropia e Anti-Isotropia

O conceito de isotropia possui estreita relação com o de invariância. A grosso modo, diz-se que uma quantidade ou medida é isotrópica se seu valor independe do efeito de qualquer função ortogonal que eventualmente aja no seu domínio de atuação. Se esta independência se restringir somente a funções ortogonais próprias, a medida é anti-isotrópica. Medidas que não apresentam nenhuma destas características são chamadas *anisotrópicas*.

Considerando um espaço vetorial Euclidiano, medidas isotrópicas, representadas por grandezas de segunda ordem (matrizes), por exemplo, são *indiferentes* a rotações e reflexões. Ocorrendo reflexões, medidas anti-isotrópicas podem sofrer alteração.

## Tensores Invariantes

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e o grupo de operadores tensoriais $\boldsymbol{GP}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$. Considerando que o conjunto $\tilde{P}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \subseteq P_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$ define o grupo de operadores $\boldsymbol{GP}^{\frown}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$, um tensor $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ é invariante à atuação do grupo $\boldsymbol{GP}^{\frown}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$ se

$$\psi(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}\,, \forall\, \psi \in \tilde{P}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}\,. \tag{4.89}$$

Caso a igualdade anterior seja válida para qualquer tensor $\boldsymbol{T}$ de $T_{V^{\times p} \mapsto F}$, diz-se que o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ é invariante ao grupo $\boldsymbol{GP}^{\frown}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$. Como exemplo, pode-se observar que $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ é invariante ao grupo definido pelo conjunto $\{\boldsymbol{i}_{V^{\times p}}\}$.

### Tensor Isotrópico

Um tensor é dito isotrópico se ele for invariante ao grupo ortogonal como um todo. Em outras palavras, se o grupo de operadores tensoriais considerado for $\boldsymbol{GO}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$, um tensor $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ é isotrópico se

$$\psi(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}\,, \forall\, \psi \in O_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}\,. \tag{4.90}$$

### Tensor Anti-Isotrópico

Um tensor é anti-isotrópico se ele for invariante ao grupo ortogonal próprio. Desta forma, com base no conjunto $O^+_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$ formado por operadores ortogonais próprios, para um tensor anti-isotrópico $\boldsymbol{T} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$ ,

$$\psi(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}\,, \forall\, \psi \in O^+_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}\,, \tag{4.91}$$

onde o conjunto considerado define o grupo ortogonal $\boldsymbol{GO}^+_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$. Com isso, conclui-se que um tensor isotrópico é sempre anti-isotrópico.

## Conjuntos de Tensores Invariantes

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e o grupo de operadores tensoriais $\boldsymbol{GP}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$. Considerando o grupo $\boldsymbol{GP}^{\frown}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$ definido por $\tilde{P}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \subseteq P_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}$, diz-se que $TI_{V^{\times p} \mapsto F} \subseteq T_{V^{\times p} \mapsto F}$ é conjunto de tensores invariantes ao grupo considerado se

$$\psi(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}\,, \forall\, \psi \in \tilde{P}_{T_{V^{\times p} \mapsto F}}\,, \boldsymbol{T} \in TI_{V^{\times p} \mapsto F}\,. \tag{4.92}$$

Se $\tilde{P}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}} = O_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, então o conjunto $TI_{V^{\times p}\mapsto F}$ é formado por tensores isotrópicos, sendo representado por $T\hat{I}_{V^{\times p}\mapsto F}$. Para $\tilde{P}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}} = O^{+}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$, o conjunto de tensores anti-isotrópicos é representado $T\hat{I}^{+}{}_{V^{\times p}\mapsto F}$.

### Exemplos de Tensores Isotrópicos e Anti-Isotrópicos

Seja o espaço vetorial $\boldsymbol{H}_V^F$, o espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{V^p}^F$ , o tensor identidade $\boldsymbol{I} \in T_{V^2\mapsto F}$ e o tensor anti-simétrico não nulo $\boldsymbol{A} \in TA_{V^2\mapsto F}$. Nestas condições particulares, Backus[2], citando Weyl[33], afirma que os conjuntos de tensores isotrópicos não vazios são gerados (span) pela permutação de tensores identidade. Segundo ele, conjuntos de tensores anti-isotrópicos não vazios são gerados pela permutação de tensores identidade e\ou de tensores anti-simétricos não nulos e\ou dos tensores $\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}$, etc... Em termos específicos, para espaços tensoriais de ordem 0 a 4, Backus[2] demonstra cada um dos resultados apresentados na tabela 4.1 a seguir.

## Operadores Tensoriais de Invariância

Seja o espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^F$ e o grupo de operadores tensoriais $\boldsymbol{GP}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$. Seja o conjunto de tensores $TI_{V^{\times p}\mapsto F}$, invariantes ao grupo $\boldsymbol{GP}_{\widetilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}}$ definido por $\tilde{P}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}} \subseteq P_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$. Um operador tensorial $\psi \in P_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ é dito de invariância em $TI_{V^{\times p}\mapsto F}$ se ele definir o mapeamento

$$\psi : TI_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto TI_{V^{\times p}\mapsto F}\,. \tag{4.93}$$

O conjunto $I_{T_{V^{\times p}\mapsto F}} \subseteq P_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ de todos os operadores de invariância que atuam em $TI_{V^{\times p}\mapsto F}$ define o grupo de invariância $\boldsymbol{GI}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$.

### Operadores Tensoriais de Isotropia

Dadas as condições anteriores, o operador tensorial de isotropia é um operador de invariância em $T\hat{I}_{V^{\times p}\mapsto F}$. Com isso, tem-se o grupo de isotropia $\boldsymbol{G\hat{I}}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ definido pelo conjunto $\hat{I}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}} \subseteq I_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ .

### Operadores Tensoriais de Anti-Isotropia

Neste caso, são operadores de invariância em $T\hat{I}^{+}{}_{V^{\times p}\mapsto F}$, elementos do conjunto $\hat{I}^{+}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}} \subseteq I_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$ que define o grupo $\boldsymbol{G\hat{I}^{+}}_{T_{V^{\times p}\mapsto F}}$.

| **Ordem de** $\boldsymbol{T}^F_{V^p}$ | **Valor de** $\dim(\boldsymbol{H}^F_V)$ | **Conjunto** $T\hat{I}_{V^p\mapsto F}$ | **Conjunto** $T\hat{I}^{+}{}_{V^p\mapsto F}$ | **Elementos de Pós-condição** |
|---|---|---|---|---|
| $p=0$ | $>0$ | $F$ | $F$ | - |
| $p=1$ | $\geqslant 2$ | $\{\boldsymbol{0}\}$ | $\{\boldsymbol{0}\}$ | - |
| $p=2$ | $>0$ | $sp\{\boldsymbol{I}\}$ | $\emptyset$ | $\boldsymbol{I}\in T_{V^p\mapsto F}$, $\forall\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\in TA_{V^p\mapsto F}$ |
| | $=2$ | | $sp\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}\}$ | |
| | $\geqslant 3$ | | $sp\{\boldsymbol{I}\}$ | |
| $p=3$ | $>0$ | $\{\boldsymbol{0}\}$ | $\emptyset$ | |
| | $=3$ | | $sp\{\boldsymbol{A}\}$ | |
| | $\neq 3$ | | $\{\boldsymbol{0}\}$ | |
| $p=4$ | $>0$ | $sp\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}_{(2,3)},\boldsymbol{I}_{(2,4)}\}$ | $\emptyset$ | |
| | $\in\{2,4\}$ | | $sp\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}_{(2,3)},\boldsymbol{I}_{(2,4)}\}$ | |
| | $=4$ | | $sp\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}_{(2,3)},\boldsymbol{I}_{(2,4)},\boldsymbol{A}\}$ | |
| | $=2$ | $sp\{\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I},(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})_{(2,3)},(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})_{(2,4)}\}$ | $sp\{\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I},(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})_{(2,3)},(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})_{(2,4)},\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A},(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A})_{(2,3)},(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A})_{(2,4)},\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I},(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I})_{(2,3)},(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I})_{(2,4)}\}$ | $\boldsymbol{I}\in T_{V^2\mapsto F}$, $\forall\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\in TA_{V^2\mapsto F}$ |

Tabela 4.1: Tensores Isotrópicos e Anti-Isotrópicos em $\boldsymbol{T}^F_{V^p}$. Fonte: Backus[2].

## 4.6 Campo Tensorial

Seja o espaço métrico completo $(A,\rho)$ e o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$. Dado o subconjunto $B\subset A$, que também define um espaço métrico completo, a função no mapeamento

$$F : B \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F} \tag{4.94}$$

é dita um campo tensorial. Caso $q = 1$, tem-se então um *campo vetorial*. Se $q = 0$, o campo é dito *escalar*.

## A Relação Campo Tensorial e Função Tensorial

Seja $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ um subespaço afim do espaço métrico completo $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ e um sistema de coordenadas $(o, \tilde{U})$ deste subespaço. Considerando o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$ e o espaço vetorial $\boldsymbol{V}^F_U$ (ou $\boldsymbol{T}^F_U$), dado um mapeamento

$$\mathsf{F} : \mathscr{S}_a \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}, \tag{4.95}$$

e a igualdade $a = \boldsymbol{a} \oplus o$, existe uma única uma função tensorial que define

$$\psi : U \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}, \tag{4.96}$$

cuja regra é

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \mathsf{F}(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{a} \oplus o) . \tag{4.97}$$

Como o domínio $\mathscr{S}_a = \{\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{a} \oplus o : \boldsymbol{x} \in U\}$, onde $\boldsymbol{a} \oplus o$ é um ponto fixo, pode-se dizer que $\psi$ é a função tensorial associada ao campo tensorial $\mathsf{F}$. Desta forma, o estudo de campos tensoriais pode ser substituído pelo estudo de funções tensoriais.

### Campo Característico

Seja um espaço afim métrico completo $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ com dimensão maior que 2 e dois de seus subespaços $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$, tais que $\mathscr{S}_b \subset \mathscr{S}_a$. Dado um sistema de coordenadas $(o, \tilde{U})$ de $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ pelo qual o ponto $b = \boldsymbol{b} \oplus o$, seja o mapeamento bijetor

$$\mathsf{F} : \mathscr{S}_b \mapsto W, \tag{4.98}$$

onde a função identidade $i_W$ está associada ao campo $\mathsf{F}$. Logo,

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{w} \oplus \boldsymbol{b} \oplus o) = \boldsymbol{w}, \forall\, \boldsymbol{w} \in W. \tag{4.99}$$

Nestas condições, diz-se que $\mathsf{F}$ é um campo característico de $\mathscr{S}_b$ em $W$, representado $\mathsf{F}^W_{\mathscr{S}_b}$.

Capítulo 5

# Tópicos de Geometria Afim

Os assuntos da Álgebra Linear são de natureza puramente abstrata. A caracterização de grande parte dos fenômenos físicos, entretanto, exige um arcabouço geométrico que um espaço vetorial, por si só, é incapaz de fornecer.

Em geral, não existe, por exemplo, um elemento no espaço destinado a descrever fenômenos mecânicos correspondente ao vetor nulo **0**, necessário na definição de espaço vetorial. Certas definições e operações necessárias à Física advém fundamentalmente de conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo, coplanaridade, colinearidade, etc...

A abordagem de criação da geometria que é descrita nesta seção trata os axiomas eminentemente geométricos como simples conseqüências de axiomas algébricos. Neste contexto, um espaço vetorial gera uma geometria quando age sobre um conjunto. Vejamos, a seguir, como isto ocorre.

## 5.1 Espaços Afins

### Espaço Afim

Seja um espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F := \left(\overline{\boldsymbol{G}}_{V+}, \mathcal{F}_F, \diamond\right)$ e o conjunto $A$ um G-conjunto de $\overline{\boldsymbol{G}}_{V+}$ através de uma ação de grupo simplesmente transitiva $\oplus$. Nestas condições, o conjunto $A$ é conhecido como *espaço puntual*, representado por $\mathscr{A}$, e seus elementos são chamados *pontos*. A tripla ordenada $\left(\boldsymbol{V}_V^F, \mathscr{A}, \oplus\right)$ é dominada espaço afim, cuja notação é abreviada para $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F$.

Reescrevendo as propriedades da ação de grupo simplesmente transitiva aplicadas no contexto de $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F$, tem-se o seguinte:

i. $\exists 1\, \boldsymbol{v} \in V$ tal que $\boldsymbol{v} \oplus a_1 = a_2,\, a_1, a_2 \in \mathscr{A}$;

ii. $\boldsymbol{0} \oplus a = a, \forall\, a \in \mathscr{A}$;

iii. $\boldsymbol{v}_1 \oplus (\boldsymbol{v}_2 \oplus a) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \oplus a, \forall\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V,\, a \in \mathscr{A}$.

## Subespaço Afim

Seja o espaço afim $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F$ e o subespaço vetorial $\boldsymbol{V}_U^F$, onde $U \subset V$. Seja um ponto $a \in \mathscr{A}$ e um subconjunto $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ tal que $\mathscr{S} := \{\boldsymbol{u} \oplus a : \boldsymbol{u} \in U\}$. A tripla ordenada $\left(\boldsymbol{V}_U^F, \mathscr{S}, \oplus\right)$ é denominada subespaço afim de $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F$. É importante observar que o ponto $a$ também pertence ao subespaço puntual $\mathscr{S}$, pois o vetor nulo é elemento de todo o conjunto que define um subespaço vetorial. Desta forma, é conveniente representar o subespaço puntual $\mathscr{S}$ gerado a partir de $a$ com $\mathscr{S}_a$.

Se $\boldsymbol{V}_V^F$ for dimensionalmente finito, diz-se que o espaço afim $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F$, por ele definido, também é dimensionalmente finito. Além disso, considera-se que se $\dim\left(\boldsymbol{V}_V^F\right) = n$ então $\dim\left(\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F\right) = n$. Caso o subespaço afim $\boldsymbol{A}_{U,\mathscr{S}a}^F$ seja unidimensional ele é denominado *reta*, se for bidimensional ele é chamado *plano*. Todo subespaço afim $n-1$ dimensional é dito um *hiperplano*.

## Sistema de Coordenadas Afim

Seja um subespaço $\boldsymbol{A}_{U,\mathscr{S}a}^F$ do espaço afim $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^F$ dimensionalmente finito. Seja $\tilde{U}$ uma base de $\boldsymbol{V}_U^F$ e um ponto qualquer $o \in \mathscr{S}_a$ sobre o qual os vetores de $\tilde{U}$ agem. Diz-se que o par ordenado $(o, \tilde{U})$ é um sistema de coordenadas afim do subespaço $\boldsymbol{A}_{U,\mathscr{S}a}^F$. O ponto $o$ é conhecido como *ponto de referência* ou *origem* do sistema de coordenadas.

Considerando um ponto $x \in \mathscr{S}_a$ e um vetor $\boldsymbol{x} \in U$, onde $x = \boldsymbol{x} \oplus o$, diz-se que as coordenadas do ponto $x$ no sistema de coordenadas $(o, \tilde{U})$ são as coordenadas do vetor $\boldsymbol{x}$ na base $\tilde{U}$. Numericamente, os escalares da matriz $[\boldsymbol{x}]^{\tilde{U}}$ são as coordenadas de $x$. Dado um segundo vetor $\boldsymbol{u} \in U$, é fácil concluir que as coordenadas do ponto $\boldsymbol{u} \oplus x$ em $(o, \tilde{U})$ são as coordenadas do vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}$ em $\tilde{U}$.

## 5.2 Afinidades

Seja um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ e um espaço vetorial de operadores lineares $\boldsymbol{L}^F_{V\mapsto V}$. Dado a operação bijetora $\mathsf{A} : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}$, se existir uma única bijeção $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$, associada à A, tal que

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{A}(a), \forall a \in \mathscr{A}, \boldsymbol{v} \in V, \tag{5.1}$$

então a função A é dita uma afinidade e o mapeamento por ela definido uma *transformação afim*. Dado o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{V^2}$, nos termos do teorema 9, o operador linear $\boldsymbol{l}$ representa um tensor $\boldsymbol{A} \in T_{V^2\mapsto F}$, chamado *tensor de afinidade*. Pode-se então reescrever (5.1) na forma

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{v} \oplus a) = (\boldsymbol{A} \odot_1 \boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{A}(a), \forall a \in \mathscr{A}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{5.2}$$

Uma afinidade A é dita *centrada* no ponto $a$, representada $\mathsf{A}_a$, se em termos genéricos,

$$\mathsf{A}_a(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) \oplus a, \forall a \in \mathscr{A}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{5.3}$$

Pode-se demonstrar que, nas operações de composição, as afinidades possuem as propriedades de associatividade, elemento identidade e elemento inverso. Portanto, o conjunto $L$ de todas as afinidades de $\mathscr{A}$ define o grupo $\boldsymbol{GP}_L$.

### Translação

Seja um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$, uma transformação afim $\mathsf{T} : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}$ e $\boldsymbol{v}$ um vetor qualquer de $V$. Diz-se que T é a translação de $\mathscr{A}$ associada com $\boldsymbol{v}$ se a regra desta afinidade for descrita por

$$\mathsf{T}(x) = \boldsymbol{v} \oplus x. \tag{5.4}$$

Como o par de pontos $(x, \mathsf{T}(x))$ determina um único vetor[1] $\boldsymbol{v}$, pode-se afirmar que este vetor determina uma e apenas uma translação. Desta forma, é conveniente identificar o vetor na translação T com $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}}$.

Sejam os pontos $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ onde $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}}(a_1) = a_2$. No contexto de espaço afim, devido à unicidade do vetor na ação simplesmente transitiva, uma

[1] Ver ítem i. da seção 5.1.

translação é sempre uma bijeção. Desta forma, a função $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}}$ em questão possui uma inversa, obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_2 &= \boldsymbol{v} \oplus a_1 \\ -\boldsymbol{v} \oplus a_2 &= -\boldsymbol{v} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus a_1) \\ (-\boldsymbol{v}) \oplus a_2 &= \boldsymbol{0} \oplus a_1 \\ \mathsf{T}_{-\boldsymbol{v}}(a_2) &= a_1, \end{aligned} \tag{5.5}$$

de onde se pode definir que

$$\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}}^{-1} = \mathsf{T}_{-\boldsymbol{v}}. \tag{5.6}$$

Considerando um terceiro ponto $a_3 \in \mathscr{A}$ e um segundo vetor $\boldsymbol{w} \in V$ tal que $\mathsf{T}_{\boldsymbol{w}}(a_2) = a_3$, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} a_3 &= \mathsf{T}_{\boldsymbol{w}}(a_2) \\ &= \mathsf{T}_{\boldsymbol{w}}(\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}}(a_1)) \\ &= \boldsymbol{w} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus a_1) \\ &= \mathsf{T}_{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}}(a_1), \end{aligned} \tag{5.7}$$

de onde se conclui que

$$\mathsf{T}_{\boldsymbol{w}} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}} = \mathsf{T}_{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}}. \tag{5.8}$$

Desta forma, se $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$ forem não nulos, $\mathsf{T}_{\boldsymbol{w}} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}}(a_1) = a_1$ se e somente se $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$. Pode-se demonstrar que a operação de composição de translações, envolvendo quaisquer vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$, possui as propriedades

i. Associatividade: $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1} \circ \left(\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_3}\right) = \left(\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2}\right) \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_3}$;

ii. Comutatividade: $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2} = \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1}$;

iii. Elemento Identidade: $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{0}} = \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1}$;

iv. Elemento Inverso: $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1}^{-1} = \mathsf{T}_{\boldsymbol{0}}$.

Desta forma, o conjunto $T$ de todas as translações que agem em $\mathscr{A}$ define o grupo abeliano de operadores $\overline{\boldsymbol{GP}}_T$, nos termos da seção **??**.

**Representações**

Seja um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ $n$-dimensional e uma translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$, onde $\boldsymbol{x} \in V$. Sejam dois pontos quaisquer $o, x \in \mathscr{A}$ tal que $x$ é o valor da função $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$ em $o$. Pode-se representar, como na figura 5.1, que $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$ mapeia ou translada o ponto $o$ para o ponto $x$.

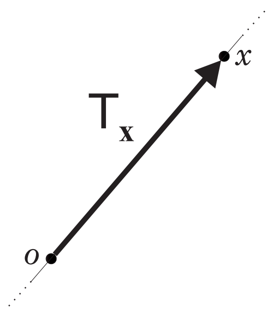


Figura 5.1: Representação da translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$.

A representação na figura é propositalmente tendenciosa quando utiliza um segmento de linha retilínea com ponta em seta indicando o *sentido* do mapeamento. Na verdade, qualquer elemento figurativo, retilíneo ou não, que descrevesse este sentido poderia ser utilizado. Como, tradicionalmente, retas são desenhadas como linhas retilíneas infinitas, a representação de $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$ na figura também mostra uma *direção* pois os pontos $o$ e $x$ pertencem à reta $\boldsymbol{A}^F_{X,\mathscr{X}o}$, onde $X = sp\{\boldsymbol{x}\}$. Por isso, é possível suprimir da figura 5.1 o desenho desta reta.

Considerando uma segunda translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{y}}$ que mapeia $o$ para um terceiro ponto $y$ não pertencente à reta $\boldsymbol{A}^F_{X,\mathscr{X}o}$, tem-se a nova reta $\boldsymbol{A}^F_{Y,\mathscr{Y}o}$, onde $Y = sp\{\boldsymbol{y}\}$. Como se tratam de duas retas distintas, pode-se dizer então que um eventual conjunto $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ é linearmente independente. Desta forma, o subespaço afim $\boldsymbol{A}^F_{P,\mathscr{P}o}$, onde $P = sp\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, é um plano, tradicionalmente representado como na figura 5.2. O desenho do plano também pode ser suprimido devido à representação das duas translações $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$ e $\mathsf{T}_{\boldsymbol{y}}$ atuando no ponto $o$.

Ao se considerar um quarto ponto $z$ não pertencente ao plano $\boldsymbol{A}^F_{P,\mathscr{P}o}$, resultado da atuação de uma translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{z}}$ no ponto $o$, tem-se uma terceira reta $\boldsymbol{A}^F_{Z,\mathscr{Z}o}$, onde $Z = sp\{\boldsymbol{z}\}$. De maneira similar aos casos anteriores, na figura 5.3 as representações das três translações $\mathsf{T}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathsf{T}_{\boldsymbol{y}}$ e $\mathsf{T}_{\boldsymbol{z}}$ atuando no

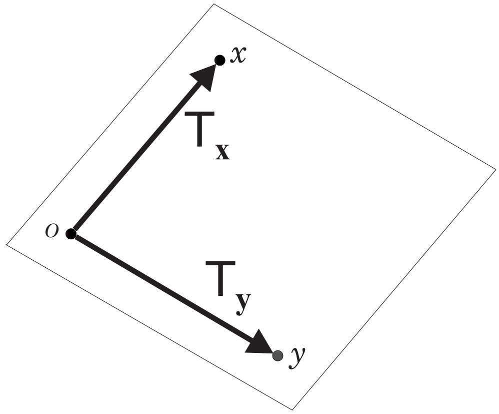


Figura 5.2: Representação do plano $\boldsymbol{A}^F_{P,\mathscr{P}o}$, onde $P = sp\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$.

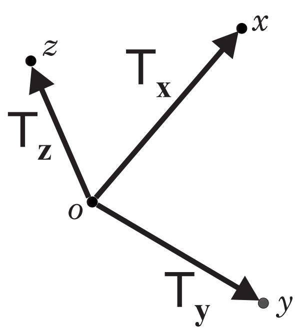


Figura 5.3: Representação do subespaço $\boldsymbol{A}^F_{K,\mathscr{H}o}$, onde $K = sp\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$.

mesmo ponto $o$ indicam um subespaço afim tridimensional $\boldsymbol{A}^F_{H,\mathscr{H}o}$, onde $H = sp\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$.

**Translações Compostas.** Seja o ponto $a_1$ do espaço puntual $\mathscr{A}$ e os vetores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. A partir dos pontos $a_2 := \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1}(a_1)$ e $a_3 := \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2}(a_2)$, fica evidente que $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1}(a_1) = a_3$. Tais pontos e translações estão representados na figura 5.4. Já foi demonstrado que a translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1}$ é o resultado da composição $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1}$. Como a composição de translações é comutativa, a atuação de $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2}$ seguida por $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1}$, ou seja $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_1} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2}$, também deve definir a representação de $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1}$.

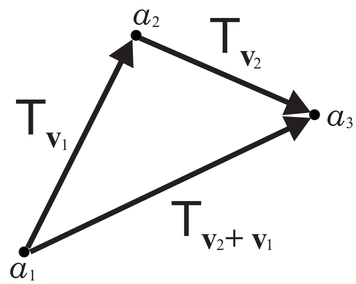


Figura 5.4: Representação da translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1}$.

## Paralelismo

Sejam o espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ com dimensão $n \geqslant 2$ e dois de seus subespaços $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$. Diz-se que estes subespaços são paralelos, ou seja $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a} \parallel \boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$, se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$. Tem-se, então, as seguintes propriedades:

i. $\dim\left(\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}\right) = \dim\left(\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}\right) \implies U = W$;

ii. $a \in \mathscr{S}_b$ ou $b \in \mathscr{S}_a \implies \mathscr{S}_a \subseteq \mathscr{S}_b$ ou $\mathscr{S}_b \subseteq \mathscr{S}_a$;

iii. $a \notin \mathscr{S}_b$ ou $b \notin \mathscr{S}_a \implies \mathscr{S}_a \cap \mathscr{S}_b = \emptyset$.

**Demonstração**.

i. Se $\dim\left(\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}\right) = \dim\left(\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}\right)$ então $\dim\left(\boldsymbol{V}^F_U\right) = \dim\left(\boldsymbol{V}^F_W\right)$. Como $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$, então $U = W$ ;

ii. Seja $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base de $U$ e $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ uma base de $W$, onde $U \subseteq W$. Se o ponto $x \in \mathscr{S}_a$, então $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \oplus a$. Como $a = \sum_{i=1}^m \beta_i \boldsymbol{v}_i \oplus b$, então

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \boldsymbol{v}_i \oplus b$$

onde $\theta_i = \alpha_i + \beta_i$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, e $\theta_i = \beta_i$, para $n < i \leqslant m$.

iii. Considerando as condições da demonstração do ítem ii., seja $a \notin \mathscr{S}_b$. Tem-se então que $a = \boldsymbol{k} \oplus b$, onde $\boldsymbol{k} \notin W$. Logo, $x = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{k}) \oplus b$. Vamos admitir, por hipótese, que o ponto $x$ também pertença a $\mathscr{S}_b$. Para tal, deve-se ter obrigatoriamente $\alpha_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{k} = \theta_i \boldsymbol{v}_i$; o que é inconsistente com $\boldsymbol{k} \notin W$.

□

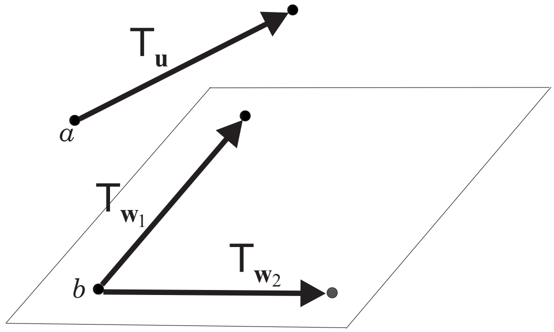


Figura 5.5: Paralelismo onde o plano não contém a reta.

### Representações

Considerando os subespaços paralelos $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ uma linha e $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$ um plano, sejam os pares $(a,\{\boldsymbol{u}\})$ e $(b,\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\})$ seus respectivos sistemas de coordenadas. Admitindo a condição da propriedade iii, pode-se observar o paralelismo entre uma reta e um plano na figura 5.5.

Agora, admitindo a condição da propriedade ii, tem-se a figura 5.6. Notar que os planos foram desenhados para dar maior clareza às representações.

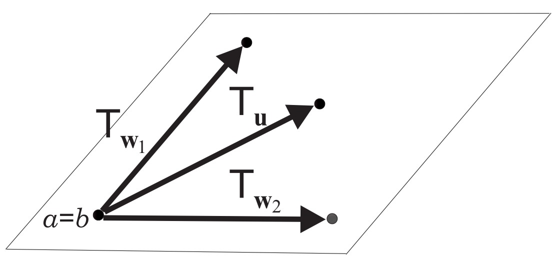


Figura 5.6: Paralelismo onde a reta é subespaço do plano.

**Proposição 9 (Quinto Postulado de Euclides)** [2] *Sejam um subespaço m-dimensional $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ de um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ n-dimensional, $n \geqslant 2$, e um ponto*

[2] Sobre este postulado, Snapper e Troyer[27], p. 29, dizem o seguinte:"*[...] Observe que o Quinto Postulado de Euclides pertence à geometria afim antes da geometria Euclidiana. Geometria Euclidiana é uma geometria afim[...] sobre a qual um arcabouço métrico muito especial foi construído. Este arcabouço métrico não afeta a estrutura afim [do espaço puntual considerado...] O mesmo é válido para todos os outros espaços [puntuais]*

*qualquer $x \in \mathscr{A}$, tal que $x \notin \mathscr{S}_a$. Existe então um e somente um subespaço $m$-dimensional $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$ de $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$, paralelo a $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$, onde $x \in \mathscr{S}_b$.*

**Demonstração**. Para demonstrar existência, se $W = sp\{\boldsymbol{u}\}$, onde $\boldsymbol{u} \in U$, e $\mathscr{S}_b := \{\boldsymbol{w} \oplus b : \boldsymbol{w} \in W\}$, então tem-se uma reta $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$ paralela a $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$. A fim de demonstrar unicidade, tem-se o seguinte: como $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$ são paralelos de mesma dimensão, tem-se que $W = U$. Considerando, por hipótese, um terceiro subespaço $m$-dimensional $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}c} \parallel \boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ contento o ponto $x$, tem-se obrigatoriamente $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}c} \parallel \boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}b}$. Com base nas propriedades do paralelismo, caso $c = b$, tem-se que $\mathscr{S}_c = \mathscr{S}_b$. Se $c \neq b$, obtém-se a inconsistência $\mathscr{S}_b \cap \mathscr{S}_c = \emptyset$ já que, por hipótese, $x$ pertence simultaneamente aos espaços $\mathscr{S}_b$ e $\mathscr{S}_c$. □

**Afinidades e Retas Paralelas.** Sejam o espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ com dimensão $n \geqslant 2$ e duas de suas retas paralelas quaisquer $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}b}$, onde $U = sp\{\boldsymbol{v}\}$. Considerando uma transformação afim $\mathsf{A} : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}$ e um escalar qualquer $\alpha \in F$, tem-se os pontos $\mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{v} \oplus a) = \alpha\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{A}(a)$ e $\mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{v} \oplus b) = \alpha\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{A}(b)$. Com base nestas duas igualdades, pode-se concluir que a ação de $\mathsf{A}$ nas retas $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}b}$ gera as retas paralelas $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}\mathsf{A}(a)}$ e $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}\mathsf{A}(b)}$, onde $W = sp\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v})\}$. Desta forma, costuma-se dizer que uma afinidade preserva o paralelismo, conforme mostrado na figura 5.7.

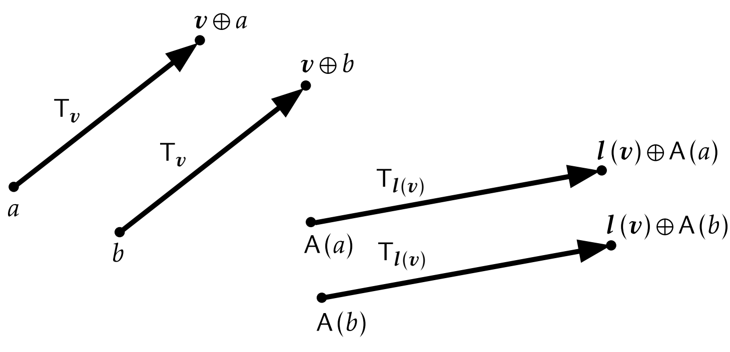


Figura 5.7: A atuação da afinidade $\mathsf{L}$.

*métricos[...] O único modo de se destruir o Quinto Postulado de Euclides é considerar um espaço que não é afim, como, por exemplo, um espaço projetivo. ".*

## Dilação

Seja um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ de dimensão $n \geqslant 1$, o conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ uma base qualquer de $\boldsymbol{V}^F_V$. Diz-se que a afinidade no mapeamento $\mathsf{D} : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}$ é uma dilação[3] de $\mathscr{A}$ se

$$\mathsf{D}(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{D}(a)\,, \forall\, a \in \mathscr{A}, \boldsymbol{v} \in V\,, \tag{5.9}$$

onde operador $\boldsymbol{s} \in L_{V\mapsto V}$, chamado *estiramento*, é simétrico e positivo-definido. O estiramento $\boldsymbol{s}$ é representante de um tensor de afinidade simétrico positivo-definido $\boldsymbol{S} \in T_{V^2\mapsto F}$, chamado *tensor de estiramento*. Considerando $T^{\otimes}_{V^2}$ uma base de $\boldsymbol{T}^F_{V^2}$, gerada pelos tensores diádicos $\boldsymbol{u}_{i_1} \otimes \boldsymbol{u}_{i_2}$, onde $i_j = 1, \cdots, n$ e $\boldsymbol{u}_{i_j}$ são os autovetores[4] de $\boldsymbol{S}$, é possível escrever

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_{ii}^{T^{\otimes}_{V^2}}(\boldsymbol{S})\, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i. \tag{5.10}$$

Os escalares positivos $\alpha_{ii} := \boldsymbol{f}_{ii}^{T^{\otimes}_{V^2}}(\boldsymbol{S})$ são os autovalores de $\boldsymbol{S}$, denominados *coeficientes de estiramento*. Um coeficiente $\alpha_{ii}$ pode ser classificado como uma *contração*, se $\alpha_{ii} < 1$, ou como uma *expansão*, se $\alpha_{ii} > 1$. No caso de *estiramento proporcional*, ou seja $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{nn}$, tais classificações são aplicáveis ao tensor de estiramento como um todo.

Pode-se demonstrar facilmente que as dilações, em relação à composição, possuem as propriedades de

i. Associatividade: $\mathsf{D}_1 \circ (\mathsf{D}_2 \circ \mathsf{D}_3) = (\mathsf{D}_1 \circ \mathsf{D}_2) \circ \mathsf{D}_3$;

ii. Elemento Identidade: $\mathsf{D}_1 \circ \mathsf{D}_2 = \mathsf{D}_2$ se $\mathsf{D}_1 = i_{\mathscr{A}}$;

iii. Elemento Inverso: $\mathsf{D}_1 \circ \mathsf{D}_1^{-1} = i_{\mathscr{A}}$.

As propriedades ii e iii baseiam-se no fato de que a função identidade $i_{\mathscr{A}}$ também é uma dilação (com coeficientes unitários) e que $\det \boldsymbol{S} \neq 0$. Desta forma, o conjunto $D$ de todas as dilações de $\mathscr{A}$ define o grupo $\boldsymbol{GP}_D$.

[3] Alguns autores adotam o termo "dilatação" no lugar de dilação. Este livro entende dilação conforme Houaiss e Villar[15] que, dentre outros significados, apresenta o termo como o "ato ou efeito de expandir-se, ampliar-se".

[4] Ver seção 3.4 e o Teorema 7.

Agora, considerando uma translação qualquer $\mathsf{T}_w$, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\mathsf{T}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{w} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{v} \oplus (\boldsymbol{w} \oplus a) = \boldsymbol{v} \oplus \mathsf{T}_{\boldsymbol{w}}(a), \tag{5.11}$$

de onde se pode afirmar, comparando com a igualdade (5.9), que $\mathsf{T}_{\boldsymbol{w}}$ é uma dilação de coeficientes unitários. No entanto, nem toda dilação é uma translação já que é possível ocorrer simultaneamente $\mathsf{D}(a) = a$ e $\mathsf{D}(\boldsymbol{v} \oplus a) \neq \boldsymbol{v} \oplus a$, fato que é impossível no caso de translações: se $\mathsf{T}(a) = a$ então obrigatoriamente $\mathsf{T}(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{v} \oplus a$.

### Dilação Centrada

A dilação que não é uma translação é dita dilação centrada, representada por $\mathsf{U}_a$, onde o ponto $a$ é considerado o *centro da dilação*. Desta forma,

$$\mathsf{U}_a(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus a, \forall a \in \mathscr{A}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{5.12}$$

### Representações

Tomando o ponto $a$ e o subconjunto $U = sp\{\boldsymbol{v}\}$, pode-se definir a reta $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$. Considerando a dilação $\mathsf{D}_1$, obtém-se, da mesma forma, que $\mathsf{D}_1(a)$ e $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{v})$ definem a reta $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}\mathsf{D}_1(a)}$. Considerando que a dilação não é centrada, ou seja $a \neq \mathsf{D}_1(a)$, as retas em questão são representadas segundo a figura 5.8.

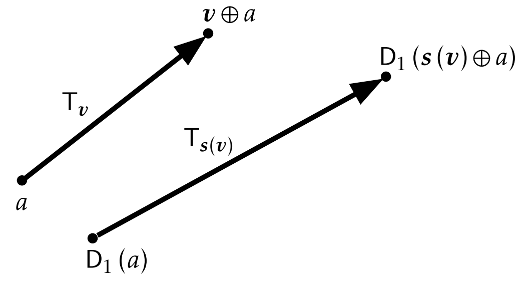


Figura 5.8: A dilação não centrada $\mathsf{D}_1$.

Esta figura mostra uma importante característica representativa das translações: como os valores das coordenadas de $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{v})$ são múltiplos das coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base de autovetores de $\boldsymbol{s}$, o tamanho das linhas retilíneas

$\overline{a, \boldsymbol{v} \oplus a}$ e $\overline{\mathsf{D}_1(a), \mathsf{D}_1(\boldsymbol{v} \oplus a)}$ refletem esta multiplicidade. Em outras palavras, além de evidenciar aspectos envolvendo direção e sentido, convém que a representação de uma translação também informe aspectos relacionados a *magnitude*[5]. A figura 5.9 mostra a dilação centrada $\mathsf{D}_2$ definida por $\boldsymbol{s}$.

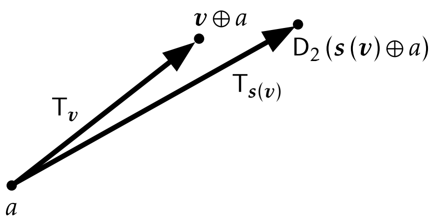


Figura 5.9: A dilação $\mathsf{D}_2$ com centro em $a$.

**Proposição 10** *Sejam um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ e uma dilação $\mathsf{D}$ de $\mathscr{A}$ com coeficientes $\alpha_{ii}$. Considerando em $\mathscr{A}$ um ponto "a" qualquer, as dilações centrais $\mathsf{U}_a$, $\mathsf{U}_{\mathsf{D}(a)}$ com coeficientes $\alpha_{ii}$ e a translação $\mathsf{T}_{\boldsymbol{u}}$, onde $\mathsf{D}(a) = \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}}(a)$, é sempre possível realizar as seguintes decomposições:*

$$\mathsf{D} = \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathsf{U}_a = \mathsf{U}_{\mathsf{D}(a)} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}},$$

*onde cada uma delas é única.*

**Demonstração**. A unicidade das decomposições é diretamente verificada já que as funções $\mathsf{T}_{\boldsymbol{u}}$, $\mathsf{U}_a$ e $\mathsf{U}_{\mathsf{D}(a)}$ são únicas. Dado um vetor $\boldsymbol{v}$ e considerando a definição de dilação, é possível realizar os seguintes desenvolvimentos:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(\boldsymbol{v} \oplus a) &= \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{D}(a) \\
&= \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{u} \oplus a \\
&= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus a \\
&= \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathsf{U}_a(\boldsymbol{v} \oplus a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(\boldsymbol{v} \oplus a) &= \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{D}(a) \\
&= -\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{v} \oplus \mathsf{D}(a) \\
&= -\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{s}(\boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{v} \oplus \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}}(a) \\
&= \mathsf{U}_{\mathsf{D}(a)}(\boldsymbol{v} \oplus \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}}(a)) \\
&= \mathsf{U}_{\mathsf{D}(a)} \circ \mathsf{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v} \oplus a).
\end{aligned}$$

[5] Uma das formas para mensurar esta magnitude utiliza o conceito de métrica.

□

## 5.3 Espaços Afins Métricos

### Espaço Afim Métrico

Seja $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ subespaço afim qualquer de $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$, tal que o espaço vetorial $\boldsymbol{V}^F_U$ é métrico. Dado um sistema de coordenadas $(o,\tilde{U})$ do subespaço afim em questão, se o espaço puntual $\mathscr{S}_a$ for métrico devido à igualdade

$$d\,(\boldsymbol{v}_1 \oplus o, \boldsymbol{v}_2 \oplus o) = \rho\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\,,\ \forall\,\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U\,, \tag{5.13}$$

diz-se então que espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ é métrico. Seguindo o mesmo padrão desta definição, os diversos tipos de espaços vetoriais métricos qualificam com a mesma nomenclatura seus respectivos espaços puntual e afim relacionados. Um *espaço afim de Banach* é definido por um espaço de Banach se, em seu espaço puntual,

$$\|\boldsymbol{v}_1 \oplus o\| := \|\boldsymbol{v}_1\|,\ \forall\,\boldsymbol{v}_1 \in U\,. \tag{5.14}$$

De maneira similar, um espaço de Hilbert define um *espaço afim de Hilbert* caso seu espaço puntual for de Hilbert segundo

$$(\boldsymbol{v}_1 \oplus o)\cdot(\boldsymbol{v}_2 \oplus o) := \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2\,,\ \forall\,\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U\,. \tag{5.15}$$

### Afinidades Isométricas

Seja $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ um espaço afim métrico e um espaço vetorial $\boldsymbol{L}^F_{V\mapsto V}$. Uma afinidade $\mathsf{K}$ de $\mathscr{A}$ é dita isométrica se o operador linear $\boldsymbol{k} \in L_{V\mapsto V}$ em

$$\mathsf{K}\,(\boldsymbol{v} \oplus a) = \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{K}\,(a),\ \forall a \in \mathscr{A}, \boldsymbol{v} \in V, \tag{5.16}$$

for uma isometria. Em particular, se $\mathsf{K}(a) = a$, diz-se que a afinidade isométrica, com representação $\mathsf{K}_a$, está centrada em $a$. Neste caso,

i. se $\det \boldsymbol{k} = +1$, $\mathsf{K}$ é uma *rotação* e $\mathsf{K}_a$ uma rotação centrada em $a$;

ii. se $\det \boldsymbol{k} = -1$, $\mathsf{K}$ é uma *reflexão* e $\mathsf{K}_a$ uma reflexão centrada em $a$.

Para o caso de $\det \boldsymbol{k} = 1$, diz-se que o operador linear $\boldsymbol{k}$ representa o tensor de afinidade $\boldsymbol{R} \in T_{V^2\mapsto F}$, chamado *tensor de rotação*. Nas reflexões, por sua vez, $\boldsymbol{k}$ representa o *tensor de reflexão* $\overline{\boldsymbol{R}} \in T_{V^2\mapsto F}$.

**Representações**

Sejam os sistema de coordenadas $(o, U)$ do espaço afim $n$-dimensional $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$, onde $U = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$. Dado um plano $\boldsymbol{A}^F_{V_{pq},\mathscr{S}o}$, onde o subconjunto $V_{pq} = sp\left\{\boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{u}_q\right\}$, seja $\theta_{pq}$ o menor ângulo definido entre as linhas $\overline{o, \boldsymbol{u}_p \oplus o}$ e $\overline{o, \boldsymbol{u}_q \oplus o}$. Desta forma, é evidente que $0 < \theta_{pq} < \pi$.

Considerando um espaço vetorial $\boldsymbol{L}^F_{V\mapsto V}$, seja um operador linear $\boldsymbol{l} \in L_{V\mapsto V}$. Aplicando este operador nos vetores da base $U$, os ângulos $\theta_{pq}$ se modificam para $\tilde{\theta}_{pq}$ na base $\tilde{U} = \{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}_1), \cdots, \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}_n)\}$. Diz-se que $\boldsymbol{l}$ *preserva orientação* se $0 < \tilde{\theta}_{pq} < \pi$ for válido para qualquer ângulo $\tilde{\theta}_{pq}$. Neste caso, pode-se obter que $\det \boldsymbol{l} > 0$. Se pelo menos um dos ângulos $\tilde{\theta}_{pq}$ não obedecer a desigualdade anterior, obtém-se que $\det \boldsymbol{l} < 0$.

Considerando, agora, que $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ é bidimensional, seja uma afinidade isométrica centrada cuja regra é

$$\mathsf{K}_x(\boldsymbol{v} \oplus x) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}) \oplus x, \tag{5.17}$$

onde $x \in \mathscr{A}$, $\boldsymbol{k} \in L_{V\mapsto V}$ e $\boldsymbol{v} \in V$. Se $\boldsymbol{k}$ preservar orientação, então tem-se na figura 5.10 a representação de rotações centradas.

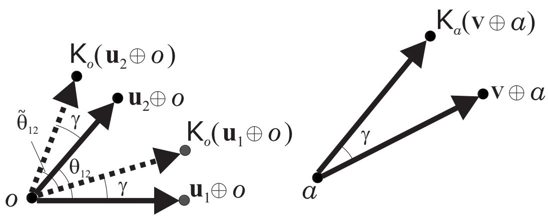


Figura 5.10: Rotações centradas.

Caso $\boldsymbol{k}$ não preserve orientação realizando sobre $\boldsymbol{u}_2$ o efeito combinado de uma rotação com uma mudança de sinal de suas coordenadas, por exemplo, tem-se as reflexões conforme a figura 5.11. Embora não esteja representado, uma reflexão também pode realizar este efeito combinado em ambos os vetores $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$.

**Proposição 11** *Seja um espaço afim $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$, uma afinidade isométrica centrada $\mathsf{K}_a$ e $\mathsf{D}$ uma dilação qualquer de $\mathscr{A}$. É sempre válido que a afinidade*

$$\mathsf{D} \circ \mathsf{K}_a = \mathsf{K}_{\mathsf{D}(a)} \circ \mathsf{D}.$$

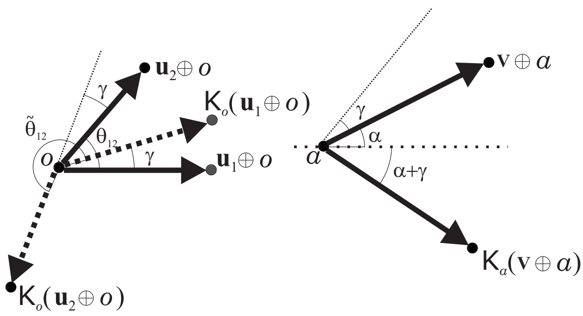


Figura 5.11: Reflexões centradas.

**Demonstração**. Considerando $\mathsf{D}$ de coeficiente $r$, um vetor qualquer $\boldsymbol{v} \in V$ e um ponto qualquer $a \in \mathscr{A}$, podemos realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D} \circ \mathsf{K}_a(\boldsymbol{v} \oplus a) &= \mathsf{D}(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}) \oplus a) \\
&= \boldsymbol{k}(r\boldsymbol{v}) \oplus \mathsf{D}(a) \\
&= \mathsf{K}_{\mathsf{D}(a)}(r\boldsymbol{v} \oplus \mathsf{D}(a)) \\
&= \mathsf{K}_{\mathsf{D}(a)} \circ \mathsf{D}(\boldsymbol{v} \oplus a)\,.
\end{aligned}$$

□

## Perpendicularidade

Sejam o espaço afim produto interno $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$ com dimensão $n \geqslant 2$ e dois de seus subespaços $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$. Diz-se que $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ é perpendicular a $\boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$, ou $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a} \perp \boldsymbol{A}^F_{W,\mathscr{S}b}$, se $U \perp W$.

### Representação

Seja $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{V,\mathscr{A}}$ um espaço afim de Hilbert com dimensão $n \geqslant 2$, dois de seus subespaços $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{U,\mathscr{S}a}$, $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{W,\mathscr{S}a}$ e os vetores quaisquer $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$. Considerando que os subespaços não são paralelos, a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz[6], é possível quantificar o valor do menor ângulo $\theta$ formado pelas linhas $\overline{a, \boldsymbol{u} \oplus a}$ e $\overline{a, \boldsymbol{w} \oplus a}$ especificando que

$$\cos\theta := \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{w}\|}\,,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,. \tag{5.18}$$

[6]Ver seção 3.2.

Agora, seja $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{U,\mathscr{S}a}$ uma reta onde $U = sp\{\boldsymbol{u}_1\}$ e $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{W,\mathscr{S}a}$ um plano cujo conjunto $W = sp\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$. Se estes dois subespaços afins forem perpendiculares, pela definição anterior, tem-se a representação da figura 5.12. Através

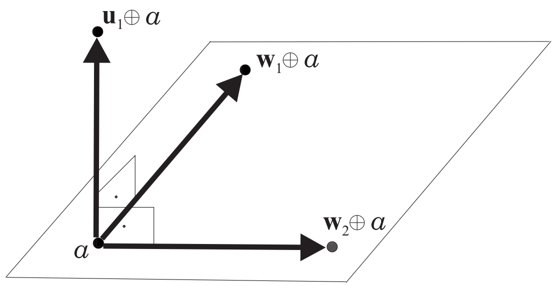


Figura 5.12: Perpendicularidade de uma reta com um plano.

da definição de perpendicularidade, a linha $\overline{a, \boldsymbol{u}_1 \oplus a}$ forma um ângulo de valor $\pi/2$ com todas as linhas do tipo $\overline{a, \boldsymbol{w} \oplus a}$. Diz-se então que a reta $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{U,\mathscr{S}a}$ "encontra" o plano $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{W,\mathscr{S}a}$ segundo um ângulo reto. Procedimento idêntico pode ser aplicado ao caso de dois planos não paralelos.

## Vetores Axiais

Sejam um espaço afim $\boldsymbol{A}^{F}_{V,\mathscr{A}}$, um espaço vetorial $\boldsymbol{L}^{F}_{V\mapsto V}$ e uma reflexão qualquer $\boldsymbol{m} \in L_{V\mapsto V}$. Um vetor não nulo $\boldsymbol{r} \in V$ é dito axial se sempre existir pelo menos uma rotação $\boldsymbol{r} \in L_{V\mapsto V}$ tal que

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}). \tag{5.19}$$

Pode-se concluir então que vetores axiais são invariantes à mudança de sinal de suas coordenadas provocada pela reflexão. Vetores que não obedecem (5.19) são denominados *polares*.

Os vetores axiais são geralmente utilizados para representar quantidades de natureza não vetorial, mas que, eventualmente, precisam ser orientadas, como, por exemplo, áreas, volumes e hiper-volumes. É comum construir vetores axiais a partir de vetores polares utilizando o conceito de produto externo, apresentado a seguir.

## Produto Externo

Seja o espaço vetorial $\boldsymbol{V}_V^F$ e o conjunto $P \subseteq V$ formado por vetores axiais. Uma transformação binária $\overline{\wedge} : V \times V \mapsto P$ é denominada produto externo se os seguintes axiomas forem obedecidos:

i. $\boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, \boldsymbol{v}_3\,,\ \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$;

ii. $a_1 \boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, a_2 \boldsymbol{v}_2 = a_1 a_2 (\boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, \boldsymbol{v}_2)\,,\ \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V, a_1, a_2 \in F$;

iii. $\boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, \boldsymbol{v}_2 = -(\boldsymbol{v}_2 \,\overline{\wedge}\, \boldsymbol{v}_1)\,,\ \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$;

iv. $\boldsymbol{v}_1 \,\overline{\wedge}\, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$, se $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ forem linearmente dependentes.

### Produto Vetorial

Seja o par ordenado $(\boldsymbol{H}_V^{\mathbb{R}}, \hat{\boldsymbol{P}})$ um espaço orientado de Hilbert tridimensional. Um produto externo $\wedge : V \times V \mapsto V$ é denominado produto vetorial se, para quaisquer $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})\,. \tag{5.20}$$

Desta definição, dado um vetor $\boldsymbol{u} \in V$ qualquer, o escalar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \odot_1 \left[\hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{P}} \odot_3 (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

A partir desta igualdade, a anti-simetria de $\hat{\boldsymbol{P}}$ promove

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \tag{5.22}$$

e

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u})\,. \tag{5.23}$$

**Demonstração**. Para que a definição (5.20) seja aceitável, ela deve respeitar os axiomas apresentados na seção anterior. Vamos ver se isto ocorre para cada um deles nos itens respectivos a seguir, considerando $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ quaisquer.

i. Seja o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) &= \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)) \\ &= \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_3) \\ &= \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) + \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_3)\,. \end{aligned}$$

ii. Seja o seguinte desenvolvimento para $a_1, a_2 \in F$:

$$\begin{aligned} a_1 \boldsymbol{v}_1 \wedge a_2 \boldsymbol{v}_2 &= \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (a_1 \boldsymbol{v}_1 \otimes a_2 \boldsymbol{v}_2) \\ &= a_1 a_2 \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) \,. \end{aligned}$$

iii. Tem-se o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 &= \hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) \\ &= -\hat{\boldsymbol{P}}_{(2,3)} \odot_2 (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) \\ &= -\hat{\boldsymbol{P}} \odot_2 (\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_1) \,. \end{aligned}$$

iv. A demonstração do ítem iv. das propriedades apresentadas na seção 4.4 mostrou que um tensor anti-simétrico com argumento formado por elementos linearmente dependentes resulta zero. Logo, seja um vetor não nulo $\boldsymbol{u} \in V$ e dois vetores $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ linearmente dependentes. Com base em (5.21), tem-se

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) = \hat{\boldsymbol{P}} \odot_3 (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) = 0 \,.$$

Já que $\boldsymbol{u}$ é não nulo, então obtém-se o resultado do ítem.

□

Agora, seja o subconjunto $U = \{\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \hat{\boldsymbol{u}}_3\}$ de $V$ uma base ortonormal de $\boldsymbol{H}_V^{\mathbb{R}}$. Dados os vetores quaisquer $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ de $V$, tem-se que

$$(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_k^U \tag{5.24}$$

para $U$ positivamente orientada e

$$(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} -\epsilon_{ijk} [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_k^U \tag{5.25}$$

quando tal base for negativamente orientada. Neste contexto, para $U$ positivamente orientada e utilizando a igualdade (**??**), pode-se realizar o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}]_i^U &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} [\boldsymbol{u}]_j^U [\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}]_k^U \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} [\boldsymbol{u}]_j^U [\boldsymbol{v}]_l^U [\boldsymbol{w}]_m^U \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) [\boldsymbol{u}]_j^U [\boldsymbol{v}]_l^U [\boldsymbol{w}]_m^U \\
&= \sum_{j=1}^{3} [\boldsymbol{u}]_j^U [\boldsymbol{w}]_j^U [\boldsymbol{v}]_i^U - \sum_{j=1}^{3} [\boldsymbol{u}]_j^U [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_i^U \\
&= [(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v}]_i^U - [(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}]_i^U \,. \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

Em termos gerais, pode-se concluir desta última igualdade que

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}\,,\ \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\,. \qquad (5.27)$$

**Demonstração**. Considerando $T_{V3}^{\otimes}$ uma base de $\boldsymbol{T}_{V^3}^{\mathbb{R}}$, formada pelos vetores de $U$, vamos provar as igualdades (5.24) e (5.25). Utilizando (4.14), (4.20) e (5.20),

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})_i &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \left[\hat{\boldsymbol{P}}\right]_{ijk}^{T_{V3}^{\otimes}} [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_k^U \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \hat{\boldsymbol{P}}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_i^* \otimes \hat{\boldsymbol{u}}_j^* \otimes \hat{\boldsymbol{u}}_k^*\right) [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_k^U
\end{aligned}$$

Para o ítem iv. das propriedades apresentadas na seção 4.4, foi demonstrado que um tensor anti-simétrico com argumento formado por elementos iguais resulta zero. Neste contexto, continuando o desenvolvimento anterior:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})_i &= \hat{\boldsymbol{P}}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_1^* \otimes \hat{\boldsymbol{u}}_2^* \otimes \hat{\boldsymbol{u}}_3^*\right) \left( \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_k^U \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \pm\epsilon_{ijk} [\boldsymbol{v}]_j^U [\boldsymbol{w}]_k^U \,.
\end{aligned}$$

□

Uma outra propriedade importante de qualquer produto vetorial $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$ é a ortogonalidade entre o vetor resultante e seus operandos. Ou seja, $(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{v}$ e $(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{w}$. Desta forma, o plano gerado pelo conjunto $sp\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ é perpendicular à reta gerada por $sp\{\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}\}$.

**Demonstração**. Vamos demonstrar as ortogonalidades $(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{v}$ e $(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{w}$. Sabendo que $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = -(\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v})$, podemos concluir que $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = 0$. Com base neste resultado, tomando a primeira igualdade de (5.22) e fazendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, concluimos que $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = 0$. Da mesma forma, se fizermos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ no primeiro e último termos de (5.22), obteremos $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = 0$. □

**Proposição 12** *Sejam o par ordenado* $(\boldsymbol{H}_V^{\mathbb{R}}, \hat{\boldsymbol{P}})$ *um espaço orientado de Hilbert tridimensional e um espaço tensorial* $\boldsymbol{T}_{V^2}^{\mathbb{R}}$. *Dado um conjunto qualquer* $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\} \subset V$ *linearmente independente, sempre é válida a igualdade*[7]

$$\operatorname{Det} \boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{T}_{\odot 1}(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{T}_{\odot 1}(\boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{T}_{\odot 1}(\boldsymbol{w}))}{\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})}, \forall\, \boldsymbol{T} \in T_{V^2 \mapsto \mathbb{R}}.$$

**Demonstração**. Ao combinarmos a definição (4.88) com a igualdade (5.21), a igualdade da proposição fica evidente. □

**Representações.** Seja $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^{\mathbb{R}}$ um espaço afim de Hilbert tridimensional e $(o, U)$ um sistema de coordenadas deste espaço, onde $U = \{\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \hat{\boldsymbol{u}}_3\}$ é uma base ortonormal ordenada. Dados dois vetores quaisquer $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, a reta $\boldsymbol{A}_{sp\{v \wedge w\}, \mathscr{S}a}^{\mathbb{R}}$ é perpendicular ao plano $\boldsymbol{A}_{sp\{v,w\}, \mathscr{S}a}^{\mathbb{R}}$. O sentido do vetor $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$, no entanto, depende da orientação do sistema de coordenadas: a representação da tripla ordenada $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$ obedecerá a regra da mão direita[8] se a base $U$ estiver positivamente orientada, conforme figura 5.13. Da mesma forma, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$ obedece a regra da mão esquerda se $\{\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \hat{\boldsymbol{u}}_3\}$ estiver negativamente orientada.

Considerando $\boldsymbol{A}_{V,\mathscr{A}}^{\mathbb{R}}$ um espaço afim Euclidiano, seja $U$ positivamente orientada e o conjunto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ linearmente independente. Utilizando a definição (5.18), com base nas propriedades (5.22) e (5.27), pode-se reali-

[7] A expressão apresentada nesta proposição é apenas um igualdade. O hiperdeterminante de operador linear é definido, em termos genéricos, na seção 4.4.

[8] Regra da mão direita: estende-se o dedo indicador da mão direita no sentido do primeiro vetor e o dedo médio na direção do segundo. O terceiro vetor deve estar no mesmo sentido do polegar a fim de que a regra seja obedecida. Feito este procedimento com a mão esquerda, tem-se a regra da mão esquerda.

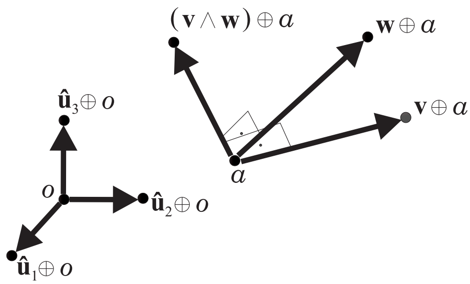


Figura 5.13: Produto vetorial na regra da mão direita.

zar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) &= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}\| \cos\theta_1 \\
&= \|\boldsymbol{u}\| \sqrt{(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})} \cos\theta_1 \\
&= \|\boldsymbol{u}\| \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})} \cos\theta_1 \\
&= \|\boldsymbol{u}\| \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot [(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}]} \cos\theta_1 \\
&= \|\boldsymbol{u}\| \sqrt{\left[\|\boldsymbol{w}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v})^2\right]} \cos\theta_1 \\
&= \|\boldsymbol{u}\| \sqrt{\|\boldsymbol{w}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta_2)} \cos\theta_1 \\
&= \underbrace{\|\boldsymbol{u}\| \cos\theta_1}_{\mathrm{I}} \underbrace{\|\boldsymbol{w}\|\|\boldsymbol{v}\| \sin\theta_2}_{\mathrm{II}} .
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Em termos geométricos, esta última igualdade revela que o termo destacado II é a área de um paralelogramo definido pelas linhas $\overline{a, \boldsymbol{w} \oplus a}$ e $\overline{a, \boldsymbol{v} \oplus a}$. O termo I, por sua vez, é o valor da distância entre o ponto $\boldsymbol{u} \oplus a$ e o plano $\boldsymbol{A}^{\mathbb{R}}_{sp\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\},\mathscr{S}a}$. O escalar $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$ é, portanto, o volume do paralelepípedo definido pelas linhas $\overline{a, \boldsymbol{w} \oplus a}$, $\overline{a, \boldsymbol{v} \oplus a}$ e $\overline{a, \boldsymbol{u} \oplus a}$, conforme mostrado na figura 5.14. Pelos termos da proposição 12, aplicados neste contexto, pode-se dizer que o determinante de um tensor de segunda ordem é igual à razão do volume de um paralelepípedo por ele modificado e o volume deste mesmo paralelepípedo na situação não modificada.

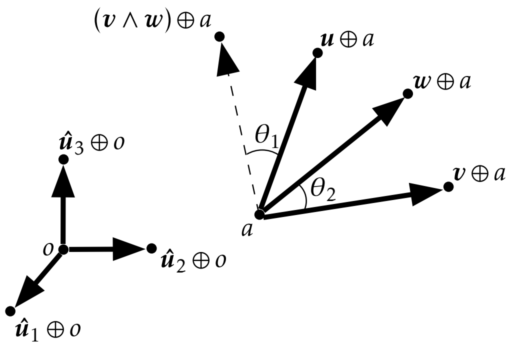


Figura 5.14: O paralelepípedo gerado por $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$.

Capítulo 6

# Diferenciação de Funções Tensoriais

## 6.1 Diferenciabilidade de Funções Tensoriais

### Função Tensorial Limitada

Sejam os espaços tensoriais normados $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$ com as respectivas normas $\|\bullet\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}$ e $\|\bullet\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}$. A função no mapeamento

$$\psi : T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F} \tag{6.1}$$

é dita limitada em $T_{V^{\times p} \mapsto F}$ se existir uma constante $\Lambda \in F$ tal que

$$\|\psi(\boldsymbol{X})\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}} \leqslant \Lambda \|\boldsymbol{X}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}, \forall \boldsymbol{X} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}. \tag{6.2}$$

Das possíveis constantes $\Lambda$ que obedecem a desigualdade anterior, seja $\lambda$ a menor delas. Nesta situação, para a função $\psi$, é possível definir que

$$\|\psi\| = \lambda. \tag{6.3}$$

O conjunto de funções limitadas é portanto normado. Além disso, se os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$ forem de Banach, toda função limitada linear é contínua.

**Demonstração**. Vamos demonstrar agora se a última afirmação é verídica. Para tal, suponhamos uma seqüência de Cauchy qualquer $\lim_{i\to\infty}\varrho(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{T}_0)=0$ em $T_{V^{\times p}\mapsto F}$. Isto indica que $\boldsymbol{X}_i\to\boldsymbol{T}_0$, quando $i\to\infty$. Então, pode-se dizer que $\lim_{i\to\infty}\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{T}_0\|=0$. Com base nisso e considerando a função em (6.1) limitada linear, a desigualdade

$$\|\psi(\boldsymbol{X}_i)-\psi(\boldsymbol{T}_0)\|=\|\psi(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{T}_0)\|\leqslant\|\psi\|\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{T}_0\|$$

quando $i\to\infty$, permite concluir que $\psi(\boldsymbol{X}_i)\to\psi(\boldsymbol{T}_0)$. □

## Funções Tensoriais Tangentes

Dados os espaços tensoriais de Banach $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$ com as respectivas normas $\|\bullet\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}$ e $\|\bullet\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}$, seja $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ um subconjunto aberto de $T_{V^{\times p}\mapsto F}$ e o mapeamento

$$\psi:\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}\,. \tag{6.4}$$

Considerando um tensor $\boldsymbol{T}_0\in\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$, toda e qualquer função $\kappa$, tal que

$$\kappa:\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}\,, \tag{6.5}$$

é dita tangente à $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$ e vice-versa se, dados o escalar $\alpha\in F$ e um tensor qualquer não nulo $\boldsymbol{H}\in\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ ,

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\|\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\kappa(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\alpha\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}}=0\,. \tag{6.6}$$

Em outras palavras, o valor no numerador aproxima-se de zero de forma mais rápida do que no denominador quando o tensor $\alpha\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{0}$, segundo a "direção" definida por $\boldsymbol{H}$. Nestas condições, fica evidente que, no limite, $\psi(\boldsymbol{T}_0)=\kappa(\boldsymbol{T}_0)$. Além disso, se duas funções são tangentes a $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$, então elas são tangentes entre si.

**Demonstração**. Para provar a afirmação anterior, sejam duas funções $\kappa_1$ e $\kappa_2$ tangentes a $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. Como a soma dos limites é o limite da soma, tem-se que

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\|\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\kappa_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}+\|\kappa_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\alpha\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}}=0\,.$$

A partir da desigualdade triangular, é certo dizer que o valor do numerador

$$\begin{aligned}&\|\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\kappa_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}+\\&\qquad\|\kappa_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}\geqslant\|\kappa_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\kappa_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}\,.\end{aligned}$$

Tal desigualdade permite concluir que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\|\kappa_2(\alpha \boldsymbol{H} + \boldsymbol{T}_0) - \kappa_1(\alpha \boldsymbol{H} + \boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\alpha \boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} = 0\,.$$

□

### Abordagens Forte e Fraca

Considerando as condições anteriores, seja o conjunto $TG_{\boldsymbol{T}_0}$ formado por pares ordenados de funções tangentes entre si em $\boldsymbol{T}_0$, cujo domínio é um subconjunto aberto de $T_{V^{\times p} \mapsto F}$ que contém $\boldsymbol{T}_0$. Pode ocorrer que exista um conjunto $\overline{TG}_{\boldsymbol{T}_0} \subseteq TG_{\boldsymbol{T}_0}$, tal que seus pares de funções sejam tangentes em $\boldsymbol{T}_0$ independente da forma como o tensor $\alpha \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{0}$ em (6.6). Em outras palavras, considerando $\boldsymbol{Y} := \alpha \boldsymbol{H}$, para que $(\psi, \kappa) \in \overline{TG}_{\boldsymbol{T}_0}$, deve ser válida a igualdade:

$$\lim_{\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{0}} \frac{\|\psi(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{T}_0) - \kappa(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{T}_0)\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\boldsymbol{Y}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} = 0\,. \tag{6.7}$$

Pode-se observar que esta condição é mais restritiva ou mais *forte* do que a condição (6.6). A primeira é então denominada abordagem forte para funções tensoriais tangentes enquanto a segunda é denominada abordagem fraca. É importante enfatizar a diferença entre as duas abordagens: utilizando uma terminologia geométrica, na abordagem fraca, o "caminho" trilhado pela variável no domínio $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$ é definido pelo tensor $\boldsymbol{H}$ arbitrado; na abordagem forte, arbitra-se o próprio "caminho" a ser trilhado. Para fins didáticos, os "caminhos" em ambas as abordagens estão representados na figura a seguir.

Cabe ressaltar que se o domínio tensorial das funções tangentes for unidimensional (independente da ordem), as abordagens forte e fraca ficam idênticas. Desta forma,

$$\dim\left(\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{TG}_{\boldsymbol{T}_0} = TG_{\boldsymbol{T}_0}\,.$$

**Demonstração.** Para o caso do espaço tensorial unidimensional $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, seja o conjunto $\{\boldsymbol{H}\}$ uma de suas bases. Neste contexto, o tensor $\boldsymbol{Y}$ em (6.7) pode sempre ser escrito como a combinação linear $\alpha \boldsymbol{H}$, resultando assim a expressão (6.6). □

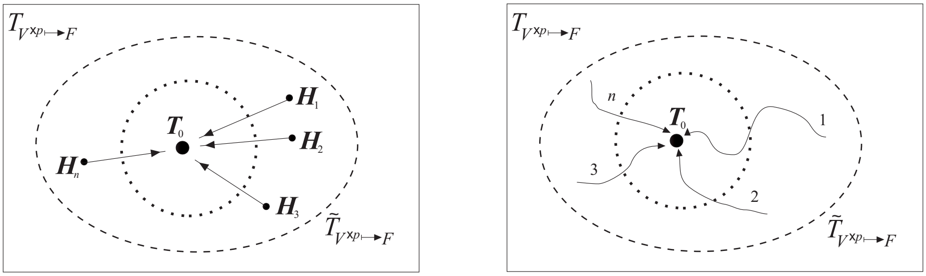

Figura 6.1: À esquerda, abordagem fraca com tensores arbitrários e "caminhos" radiais. À direita, abordagem forte com "caminhos" arbitrários.

## Diferenciabilidade de Gâteaux

Sejam os espaços tensoriais de Banach $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$ e o espaço vetorial de funções tensoriais lineares

$$\boldsymbol{L}^F_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}\,.$$

Considerando $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ um subconjunto aberto de $T_{V^{\times p}\mapsto F}$, seja um tensor $\boldsymbol{T}_0 \in \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ e o conjunto dos pares ordenados de funções tensoriais tangentes $TG_{\boldsymbol{T}_0}$. Dado o mapeamento

$$\psi : \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}\,, \tag{6.8}$$

se existir o par de funções tangentes $(\psi, \psi_D) \in TG_{\boldsymbol{T}_0}$, onde

$$\psi_D(\boldsymbol{X}) = \psi(\boldsymbol{T}_0) + [\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{X} - \boldsymbol{T}_0)\,, \tag{6.9}$$

tal que a função

$$[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)] \in L_{T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}} \tag{6.10}$$

é limitada, então este par é único. Nestas condições, a função $\psi$ é dita *diferenciável de Gâteaux* ou *G-diferenciável* em $\boldsymbol{T}_0$. Combinando (6.9) com (6.6), obtém-se que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\|\psi(\alpha\boldsymbol{H} + \boldsymbol{T}_0) - \psi(\boldsymbol{T}_0) - \alpha\,[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{H})\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\alpha\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} = 0\,. \tag{6.11}$$

O termo $\alpha\,[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{H})$ é denominado o *diferencial de Gâteaux* ou o *G-diferencial* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$ na direção $\boldsymbol{H}$. Chama-se o tensor $[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{H})$ de *derivada direcional* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$ na direção $\boldsymbol{H}$. A função tensorial linear limitada $[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)]$ é chamada *derivada fraca* ou *derivada de Gâteaux* ou *G-derivada* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. A função $\mathrm{D}\psi$ é denominada simplesmente a derivada de Gâteaux ou a G-derivada de $\psi$. Além disso, se a função $\psi$ for G-diferenciável em qualquer tensor $\boldsymbol{T}_0$ do seu domínio, diz-se que ela é G-diferenciável em $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$.

**Demonstração**. Vamos mostrar que a função $\psi_D$ é única. Para tal, admitamos, por hipótese, que existam duas funções $\psi_{D1}$ e $\psi_{D2}$ tangentes à $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$, tais que

$$\psi_{D1}(\boldsymbol{X}) = \psi(\boldsymbol{T}_0) + [\mathrm{D}\psi_1(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{X} - \boldsymbol{T}_0)$$

e

$$\psi_{D2}(\boldsymbol{X}) = \psi(\boldsymbol{T}_0) + [\mathrm{D}\psi_2(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{X} - \boldsymbol{T}_0)\,.$$

Desta forma, $\psi_{D1}$ e $\psi_{D2}$ são tangentes entre si em $\boldsymbol{T}_0$. Aplicando a abordagem fraca de funções tangentes, obtém-se que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\|[\mathrm{D}\psi_1(\boldsymbol{T}_0)](\alpha\boldsymbol{H}) - [\mathrm{D}\psi_2(\boldsymbol{T}_0)](\alpha\boldsymbol{H})\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\alpha\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} \quad = \quad 0\,.$$

Elimina-se, pelas propriedades de funções lineares e normas, o escalar $\alpha$. Logo,

$$\frac{\|[\mathrm{D}\psi_1(\boldsymbol{T}_0) - \mathrm{D}\psi_2(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{H})\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} = 0\,.$$

Como $\boldsymbol{H}$, por definição, é não nulo, a igualdade anterior é válida se o numerador for zero. Logo, é possível dizer que para qualquer $\boldsymbol{H} \in \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ não nulo,

$$[\mathrm{D}\psi_1(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{H}) = [\mathrm{D}\psi_2(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{H})\,.$$

□

## Diferenciabilidade de Ordem Arbitrária

Considerando as condições anteriores, sejam o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^F_{(V^{\times p})^{k+1}}$ e o espaço tensorial de funções lineares

$$\boldsymbol{L}^F_{T_{(V^{\times p})^{k+1}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}}\,,$$

onde $k \geqslant 0$. Considerando $\mathrm{D}^0\psi(\boldsymbol{T}_0) := \psi$, se existir o par ordenado de funções tensoriais $\left(\mathrm{D}^k\psi(\boldsymbol{T}_0), \psi_{D^{k+1}}\right) \in TG_{\boldsymbol{T}_0}$, tal que

$$\begin{aligned}\psi_{D^{k+1}}(\boldsymbol{X}) = &\left[\mathrm{D}^k\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_{k-1} \otimes \boldsymbol{T}_0) + \\ &\left[\mathrm{D}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_k \otimes (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{T}_0))\,,\end{aligned} \tag{6.12}$$

onde $\boldsymbol{H}_i \in \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$ e a função

$$\left[\mathrm{D}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right] \in L_{T_{\left(V^{\times p}\right)^{k+1} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}} \tag{6.13}$$

é limitada, então este par é único.

Neste contexto, diz-se que $\psi$ é G-diferenciável de ordem $k+1$ em $\boldsymbol{T}_0$. A função linear $\mathrm{D}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)$ é a G-derivada de ordem $k+1$ de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. Em termos genéricos, a igualdade (6.11) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0} \tfrac{1}{\|\alpha \boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} \Big\| \left[\mathrm{D}^k\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_{k-1} \otimes (\alpha \boldsymbol{H} + \boldsymbol{T}_0)) - \\ \left[\mathrm{D}^k\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_{k-1} \otimes \boldsymbol{T}_0) - \\ \alpha\left[\mathrm{D}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_k \otimes \boldsymbol{H}) \Big\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}} = 0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

**Diferenciabilidade de Fréchet**

Considerando as condições anteriores, se agora existir o par de funções tangentes $(\psi, \psi_D) \in \overline{TG}_{\boldsymbol{T}_0}$, então a função $\psi$ é dita *diferenciável de Fréchet* ou *F-diferenciável* em $\boldsymbol{T}_0$. Combinando (6.9) e (6.7), obtém-se

$$\lim_{\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\psi(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{T}_0) - \psi(\boldsymbol{T}_0) - [\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{Y})\|_{\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}}}{\|\boldsymbol{Y}\|_{\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}}} = 0. \tag{6.15}$$

O tensor $[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)](\boldsymbol{Y})$ é denominado o *diferencial de Fréchet* ou o *F-diferencial* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. A função tensorial limitada linear $[\mathrm{D}\psi(\boldsymbol{T}_0)]$ é chamada *derivada forte* ou *derivada de Fréchet* ou *F-derivada*[1] de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. A função $\mathrm{D}\psi$ é a derivada de Fréchet ou a F-derivada de $\psi$.

Convém enfatizar que uma função F-diferenciável é sempre G-diferenciável[2] e suas derivadas respectivas são iguais. Apesar disso, é conveniente utilizar notações diferentes para cada uma das derivadas: as derivadas $\mathrm{D}_{\mathrm{F}}\psi(\boldsymbol{T}_0)$ e $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\psi(\boldsymbol{T}_0)$ indicam, respectivamente, que $\psi$ é F-diferenciável e G-diferenciável em $\boldsymbol{T}_0$. Caso $\psi$ seja F ou G-diferenciável no seu domínio, então as notações respectivas para as derivadas são $\mathrm{D}_{\mathrm{F}}\psi(\boldsymbol{X})$ e $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\psi(\boldsymbol{X})$.

O conceito de derivadas de ordens superiores também é extensível à abordagem forte de funções tangentes. Desta forma, diz-se que $\mathrm{D}^k_{\mathrm{G}}\psi(\boldsymbol{T}_0)$ e

[1] A demonstração de que a F-derivada é única pode ser feita utilizando a mesma metodologia aplicada à G-derivada, substituindo as ocorrências de $\boldsymbol{Y}$ por $\alpha\boldsymbol{H}$ em (6.7).

[2] Uma função G-diferenciável é sempre F-diferenciável em condições especiais. Ver Wouk[34], pp. 268-270.

$\mathrm{D}_\mathrm{F}^k\psi(\boldsymbol{T}_0)$ são respectivamente a G-derivada e a F-derivada de ordem $k$ de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$.

### Calculando a Derivada Direcional

Ainda sob as condições anteriores, a igualdade (6.11) revela que o numerador aproxima-se mais rápido de 0 do que o denominador. Desta forma, é possível concluir que

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\psi(\boldsymbol{T}_0)-\alpha\left[\mathrm{D}_\mathrm{G}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H})\right]=\boldsymbol{0}. \tag{6.16}$$

Já que $\alpha$ nunca é 0, o termo entre colchetes nesta expressão nunca é zero, ou seja, sempre há um *resíduo*. Tal resíduo pode ser definido pela função tensorial no mapeamento

$$r_\psi : \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}\,, \tag{6.17}$$

onde

$$\lim_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{0}} r_\psi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}. \tag{6.18}$$

Com base nisso, pode-se entender a expressão (6.16) segundo a igualdade

$$\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\psi(\boldsymbol{T}_0)-\alpha\left[\mathrm{D}_\mathrm{G}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H})=r_\psi(\boldsymbol{H})\,, \tag{6.19}$$

onde $r_\psi$ é dita a *função resíduo* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. Neste contexto, isolando o termo da derivada direcional na igualdade anterior e em seguida aplicando $\lim_{\alpha\to 0}$ em ambos os lados da expressão resultante, obtém-se que

$$\left[\mathrm{D}_\mathrm{G}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H})=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\psi(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{T}_0)-\psi(\boldsymbol{T}_0)}{\alpha}. \tag{6.20}$$

Vale ressaltar que para qualquer $\boldsymbol{H}$, esta igualdade fornece uma regra para a derivada $\mathrm{D}_\mathrm{G}\psi(\boldsymbol{T}_0)$. Além disso, se $\boldsymbol{T}_0$ também for um tensor qualquer, ou seja, se $\psi$ for G-diferenciável no seu domínio, tem-se a regra para a derivada direcional de $\psi$.

COLOCAR UMA PROPOSIÇÂO QUE MOSTRE A DERIVADA DIRECIONAL DE UMA FUNÇÂO ESCALAR

**Derivadas Direcionais de Ordem Arbitrária.** O cálculo da derivada direcional de ordem $k+1$, $k \geqslant 0$, é feito a partir de (6.14), generalizando a igualdade (6.20). Desta forma,

$$\left[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_k \otimes \boldsymbol{H}) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}$$
$$\left[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{k}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_{k-1} \otimes (\alpha\boldsymbol{H} + \boldsymbol{T}_0)) -$$
$$\left[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{k}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{H}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}_{k-1} \otimes \boldsymbol{T}_0)\,, \tag{6.21}$$

onde $\boldsymbol{H}_i \in \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ e $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{0}\psi(\boldsymbol{T}_0) := \psi$. Para tensores $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}_1, \cdots, \boldsymbol{H}_k$ quaisquer, obtém-se a regra da G-derivada $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)$ e por conseqüência da F-derivada $\mathrm{D}_{\mathrm{F}}^{k+1}\psi(\boldsymbol{T}_0)$.

**Derivadas Parciais.** Considerando as condições anteriores, seja o inteiro $m \geqslant 1$ e o conjunto

$$P = T_{V^{\times p_1}\mapsto F} \times \cdots \times T_{V^{\times p_m}\mapsto F} \tag{6.22}$$

definidor de um espaço vetorial de Banach. Seja o mapeamento

$$\omega : \tilde{P} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}\,. \tag{6.23}$$

onde $\tilde{P}$ é subconjunto aberto de $P$.

Com base na proposição 5, a condição de existência da função no mapeamento anterior é garantida se, por exemplo,

$$\omega(\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_m) = \psi\left(\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\boldsymbol{x}_{1k} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{pk}}_{\boldsymbol{X}_k}\right), \tag{6.24}$$

onde $p = p_1 = \cdots = p_m$. A derivada direcional (6.20) toma então a seguinte forma genérica:

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)](\boldsymbol{H}_1, \cdots, \boldsymbol{H}_m) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}$$
$$\omega(\alpha\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{T}_1, \cdots, \alpha\boldsymbol{H}_m + \boldsymbol{T}_m) - \omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)\,. \tag{6.25}$$

A partir daí, diz-se que a função no lado esquerdo da igualdade

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)](\boldsymbol{H}_r) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}$$
$$\omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \alpha\boldsymbol{H}_r + \boldsymbol{T}_r, \cdots, \boldsymbol{T}_m) - \omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m) \tag{6.26}$$

é a G-derivada parcial de $\omega$ em $\boldsymbol{T}_r$. Neste caso, a função $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega$ fica representada por $\partial r_{\mathrm{G}}\omega$, onde r é o índice do elemento da tupla sobre o qual a derivada parcial é definida. Vale lembrar que os conceitos aqui apresentadas também são válidos no contexto da função $\psi$ F-diferenciável.

**Proposição 13** *Sejam os espaços de Banach $\boldsymbol{B}_P^F$ e $\boldsymbol{T}_{V^{\times p_i}}^F$ tais que o conjunto*

$$P := T_{V^{\times p_1}\mapsto F} \times \cdots \times T_{V^{\times p_m}\mapsto F}\,,$$

*onde $m \geqslant 1$. Dados um espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^F$ e $\tilde{P}$ um subconjunto aberto de $P$, seja a função em $\omega : \tilde{P} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}$ G-diferenciável na tupla ordenada $(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)$. Nestas condições, para qualquer elemento $(\boldsymbol{H}_1, \cdots, \boldsymbol{H}_m) \in \tilde{P}$, a derivada direcional*

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)](\boldsymbol{H}_1, \cdots, \boldsymbol{H}_m) = \sum_{r=1}^{m} [\partial r_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)](\boldsymbol{H}_r)\,.$$

**Demonstração.**[3] O processo mostrado a seguir, que utiliza $m = 2$, pode ser generalizado para valores maiores. Tomando as definições (6.25) e (6.26), concluimos facilmente as igualdades

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)](\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{0}) = [\partial 1_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)](\boldsymbol{H}_1)$$

e

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)](\boldsymbol{0}, \boldsymbol{H}_2) = [\partial 2_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)](\boldsymbol{H}_2)\,,$$

rotuladas respectivamente por (i) e (ii). Somando estas duas expressões, chegamos à igualdade (iii)

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)]((\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{H}_2)) = [\partial 1_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)](\boldsymbol{H}_1) + [\partial 2_{\mathrm{G}}\omega(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)](\boldsymbol{H}_2)\,,$$

válida para quaisquer $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2 \in \tilde{P}$. Como estamos tratando com espaços vetoriais, fica claro que a tupla ordenada $(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) := (\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{H}_2)$ é elemento de $P$. Fazendo $\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{0}$ em (iii), obtemos de (i) que $(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) = (\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{0})$. Da mesma forma, se $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{0}$, obtemos de (ii) e (iii) que $(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{H}_2)$. Como estas duas situações confirmam-se mutuamente, fica óbvio que $(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) = (\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ para quaisquer $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2 \in \tilde{P}$. □

## Funções Tensoriais Suaves

Sejam os espaços tensoriais de Banach $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^F$ e $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^F$ e o subconjunto aberto $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \subset T_{V^{\times p}\mapsto F}$. Sejam os conjuntos $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^0$, formado por todas as funções contínuas em seu domínio, e $\mathcal{D}_{\mathrm{G}}^1$, formado por todas as funções G-diferenciáveis

[3] Adaptada de Zeidler[35], pp. 232-233.

de ordem 1 em seu domínio. Considerando uma função qualquer $\psi \in \mathcal{D}_{\mathrm{G}}^{1}$ que mapeia $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}$, a G-derivada $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\psi$ define o mapeamento

$$\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\psi : \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto LB_{\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}}, \tag{6.27}$$

onde o conjunto

$$LB_{\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}} \subset L_{T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}} \tag{6.28}$$

é, por definição, normado. Neste contexto, caso as funções $\psi$ e $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\psi$ sejam elementos de $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{0}$, diz-se que $\psi$ também é elemento do conjunto $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{1} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{G}}^{1}$, formado por todas as funções contínuas cuja G-derivada é contínua. É comum dizer também que $\psi$ é de classe $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{1}$ ou que é G-suave de ordem 1. Da mesma forma, para o caso de funções F-diferenciáveis, define-se o conjunto $\mathcal{C}_{\mathrm{F}}^{1} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{F}}$ das funções cuja *F-derivada* é contínua.

Em termos gerais, para que a função $\psi$ seja G-suave de ordem $k+1$, ou da classe $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{k+1}$, ela e sua G-derivada $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{k}\psi$ devem ser G-suaves de ordem $k$. Em outras palavras,

$$\psi \in \mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{k} \text{ e } \mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{k}\psi \in \mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{k} \Longleftrightarrow \psi \in \mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{k+1},\ k \geqslant 0. \tag{6.29}$$

### Difeomorfismo

Considerando as condições anteriores, dado um tensor $\boldsymbol{T}_0 \in \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$, a função tensorial $\psi$ é um difeomorfismo em $\boldsymbol{T}_0$ se ela for uma bijeção G-diferenciável em $\boldsymbol{T}_0$ e sua função inversa for G-diferenciável em $\psi(\boldsymbol{T}_0)$. Se a bijeção $\psi$ e sua inversa forem G-suaves de ordem $n$, então diz-se que $\psi$ é um $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{n}$*-difeomorfismo*.

**Teorema 10 (Função Inversa Local)** *Sejam os espaços tensoriais de Banach* $\boldsymbol{T}_{V^{\times p}}^{F}$ *e* $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^{F}$. *Seja o subconjunto aberto* $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \subset T_{V^{\times p} \mapsto F}$ *e um tensor* $\boldsymbol{T}_0 \in \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$. *Uma função tensorial* $\psi$ *é um* $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}^{n}$*-difeomorfismo em* $\boldsymbol{T}_0$ *se e somente se sua derivada* $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}\psi(\boldsymbol{T}_0)$ *for uma bijeção.*

**Demonstração**. Este teorema é uma aplicação do Teorema da Função Implícita[4]. □

[4]Ver Zeidler[35], pp. 259-260.

## Regras Fundamentais Para Derivadas

São apresentadas a seguir algumas regras aqui consideradas fundamentais nos procedimentos de obtenção de derivadas. A abordagem aplicada para se conseguir tais regras faz uso do cálculo da derivada direcional, considerando o argumento de direção um tensor qualquer.

**Teorema 11 (Regra da Soma)** *Sejam os espaços tensoriais de Banach* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ *e* $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$*. Seja o subconjunto aberto* $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \subset T_{V^{\times p}\mapsto F}$*. Sejam as funções* $\psi$*,* $\psi_1$ *e* $\psi_2$ *que mapeiam* $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}$*. Se* $\psi$ *for G-diferenciável no seu domínio com regra*

$$\psi(\boldsymbol{X}) = \psi_1(\boldsymbol{X}) + \psi_2(\boldsymbol{X}),$$

*então a função*

$$\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X}) = \mathrm{D_G}\psi_1(\boldsymbol{X}) + \mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X}).$$

**Demonstração**. Considerando o tensor $\boldsymbol{H} \in \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ uma direção qualquer, seja o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) + \psi_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_1(\boldsymbol{X}) - \psi_2(\boldsymbol{X})}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_1(\boldsymbol{X})}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{\psi_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_2(\boldsymbol{X})}{\alpha} \\
&= [\mathrm{D_G}\psi_1(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) + [\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) \\
&= [\mathrm{D_G}\psi_1(\boldsymbol{X}) + \mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}).
\end{aligned}$$

A última igualdade é obtida porque as derivadas $\mathrm{D_G}\psi_1(\boldsymbol{X})$ e $\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})$ são elementos de um espaço vetorial de funções lineares. □

**Teorema 12 (Regra do Produto)** *Sejam os quatro espaços tensoriais de Banach* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$*,* $\boldsymbol{T}^F_{K^{\times r}\times Z^{\times s}}$*,* $\boldsymbol{T}^F_{K^{\times r}\times W^{\times q}}$ *e* $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}\times Z^{\times s}}$*. Sejam o subconjunto aberto* $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \subset T_{V^{\times p}\mapsto F}$ *e os mapeamentos:*

$$\begin{aligned}
\psi &: \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{K^{\times r}\times Z^{\times s}\mapsto F}, \\
\psi_1 &: \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{K^{\times r}\times W^{\times q}\mapsto F}, \\
\psi_2 &: \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q}\times Z^{\times s}\mapsto F}.
\end{aligned}$$

*Se* $\psi$ *for G-diferenciável no seu domínio com regra*

$$\psi(\boldsymbol{X}) = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}),$$

*então*

$$[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q [\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) + \\ [\mathrm{D_G}\psi_1(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}), \forall \boldsymbol{H} \in \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}.$$

**Demonstração**. A igualdade anterior é o resultado do seguinte desenvolvimento:

$$[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\, \psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}),$$

adicionando e subtraindo o termo $\psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X})$, tem-se

$$\begin{aligned}[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\, \psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}) +\\ \psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}) - \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}) =\\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\, \psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q (\psi_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_2(\boldsymbol{X})) +\\ (\psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_1(\boldsymbol{X})) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}) =\\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\, \psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \odot_q (\psi_2(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_2(\boldsymbol{X})) +\\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\, (\psi_1(\alpha\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) - \psi_1(\boldsymbol{X})) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}).\end{aligned}$$

□

**Teorema 13 (Regra da Cadeia)** *Sejam os espaços tensoriais de Banach* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$*,* $\boldsymbol{T}^F_{K^{\times s}}$ *e* $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$*. Sejam os subconjunto abertos* $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \subset T_{V^{\times p} \mapsto F}$ *e* $\tilde{T}_{K^{\times s} \mapsto F} \subset T_{K^{\times s} \mapsto F}$ *sobre os quais definem-se mapeamentos:*

$$\begin{aligned}\psi &: \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F},\\ \psi_2 &: \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto \tilde{T}_{K^{\times s} \mapsto F},\\ \psi_1 &: \tilde{T}_{K^{\times s} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}.\end{aligned}$$

*Se* $\psi$ *for G-diferenciável no seu domínio com regra*

$$\psi(\boldsymbol{X}) = \psi_1 \circ \psi_2(\boldsymbol{X}),$$

*então*

$$\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X}) = \mathrm{D_G}\psi_1(\psi_2(\boldsymbol{X})) \circ \mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X}).$$

**Demonstração.**[5] Segundo a igualdade (6.19), tem-se que

$$\alpha[\mathrm{D_G}\psi_1(\boldsymbol{Y})](\boldsymbol{Z}) = \psi_1(\alpha\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Y}) - \psi_1(\boldsymbol{Y}) - r_{\psi_1}(\boldsymbol{Z}).$$

[5] Adaptada de Zeidler[35], pg. 248.

Como $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{Z}$ são tensores quaisquer, então seja $\boldsymbol{Y} = \psi_2(\boldsymbol{X})$ , onde

$$\psi_2(\boldsymbol{X}) = \psi_2(\beta\boldsymbol{H} + \boldsymbol{X}) - \beta\left[\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H}) - r_{\psi_2}(\boldsymbol{H}),$$

e $\boldsymbol{Z} = \frac{\beta}{\alpha}\left[\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H})$. Desenvolvendo a primeira igualdade, chega-se a

$$\begin{aligned}\left[\left[\mathrm{D_G}\psi_1\right] \circ \psi_2(\boldsymbol{X})\right]\left(\left[\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H})\right) = \psi_1\left(\psi_2(\beta\boldsymbol{H} + \boldsymbol{X}) - r_{\psi_2}(\boldsymbol{H})\right) - \\ \psi_1 \circ \psi_2(\boldsymbol{X}) - r_{\psi_1}\left(\left[\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H})\right).\end{aligned}$$

Fazendo $\beta \to 0$, utilizando o teorema 9 e aplicando o conceito de funções representantes, pode-se realizar o seguinte desenvolvimento, para qualquer $\boldsymbol{H} \in \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$:

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H}) &= \left[\left[\mathrm{D_G}\psi_1\right] \circ \psi_2(\boldsymbol{X})\right]\left(\left[\mathrm{D_G}\psi_2(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H})\right) \\ \left[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})\right](\boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{A}_{\odot s} \circ \boldsymbol{B}_{\odot p}(\boldsymbol{H}) \\ \mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{A}_{\odot s} \circ \boldsymbol{B}_{\odot p}.\end{aligned}$$

□

## Gradiente e Divergente

Sejam os espaços tensoriais de Banach $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$. Seja o subconjunto aberto $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \subset T_{V^{\times p} \mapsto F}$ e a função em

$$\psi : \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F} \tag{6.30}$$

G-diferenciável em $\boldsymbol{T}_0 \in \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$. Segundo o teorema 9, pode-se interpretar a G-derivada de $\psi$ nas formas

$$\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{T}_0) = \bar{\boldsymbol{G}}_{\overleftarrow{\odot} p} \quad \text{ou} \quad \mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{T}_0) = \hat{\boldsymbol{G}}_{\overrightarrow{\odot} p}. \tag{6.31}$$

Os tensores $\bar{\boldsymbol{G}} \in T_{W^{\times q} \times V^{\times p} \mapsto F}$ e $\hat{\boldsymbol{G}} \in T_{V^{\times p} \times W^{\times q} \mapsto F}$, presentes nas funções representantes, com notações alteradas para $\mathrm{Grad}_r\psi(\boldsymbol{T}_0)$ e $\mathrm{Grad}_e\psi(\boldsymbol{T}_0)$ respectivamente, são denominados gradiente *à direita* e *à esquerda* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$. Neste contexto, a regra da G-derivada de $\psi$, para qualquer tensor $\boldsymbol{T}_0 \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$, pode ser escrita nas seguintes formas:

$$\left[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{X}) = \mathrm{Grad}_r\psi(\boldsymbol{T}_0) \odot_p \boldsymbol{X} \tag{6.32}$$

ou

$$\left[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{T}_0)\right](\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} \odot_p \mathrm{Grad}_e\psi(\boldsymbol{T}_0). \tag{6.33}$$

As funções $\mathrm{Grad}_r\psi$ e $\mathrm{Grad}_e\psi$ são chamadas os gradientes à direita e à esquerda de $\psi$ respectivamente. Além disso, se eventuais conceitos posteriores independem das abordagens à direita ou à esquerda, será utilizada a notação $\mathrm{Grad}\,\psi$.

Para os casos onde $q \geqslant p$, dado o tensor identidade $\boldsymbol{I} \in T_{V^{\times p} \times V^{\times p} \mapsto F}$, diz-se que o tensor

$$\mathrm{Div}_r \psi(\boldsymbol{T}_0) := \mathrm{Grad}_r \psi(\boldsymbol{T}_0) \odot_{2p} \boldsymbol{I} \tag{6.34}$$

de ordem $q-p$ é o divergente *à direita* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$ se $W^{\times q} = Z^{\times q-p} \times V^{\times p}$. Da mesma forma, o tensor de ordem $q-p$

$$\mathrm{Div}_e \psi(\boldsymbol{T}_0) := \boldsymbol{I} \odot_{2p} \mathrm{Grad}_e \psi(\boldsymbol{T}_0) \tag{6.35}$$

é o divergente *à esquerda* de $\psi$ em $\boldsymbol{T}_0$ se $W^{\times q} = V^{\times p} \times U^{\times q-p}$. As funções $\mathrm{Div}_r \psi$ e $\mathrm{Div}_e \psi$ são os divergentes à direita e à esquerda de $\psi$ respectivamente. Além disso, se os conceitos à direita e à esquerda forem irrelevantes, utiliza-se a notação $\mathrm{Div}\psi$.

**Proposição 14** *Sejam os quatro espaços tensoriais de Banach* $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$, $\boldsymbol{T}^F_{K^{\times r} \times Z^{\times s}}$, $\boldsymbol{T}^F_{K^{\times r} \times W^{\times q}}$ *e* $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q} \times Z^{\times s}}$. *Sejam o subconjunto aberto* $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \subset T_{V^{\times p} \mapsto F}$ *e os mapeamentos:*

$$\begin{aligned}
\psi &: \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{K^{\times r} \times Z^{\times s} \mapsto F}\,,\\
\psi_1 &: \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{K^{\times r} \times W^{\times q} \mapsto F}\,,\\
\psi_2 &: \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \times Z^{\times s} \mapsto F}\,.
\end{aligned}$$

*Se $\psi$ for G-diferenciável no seu domínio com regra*

$$\psi(\boldsymbol{X}) = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X})\,,$$

*então são válidos os seguintes itens:*

*i. para qualquer* $\boldsymbol{H} \in T_{V^{\times p} \mapsto F}$,

$$\begin{gathered}
\mathrm{Grad}_r \psi(\boldsymbol{X}) \odot_p \boldsymbol{H} = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \mathrm{Grad}_r \psi_2(\boldsymbol{X}) \odot_p \boldsymbol{H} + \\
\boldsymbol{H} \odot_p \mathrm{Grad}_e \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{H} \odot_p \mathrm{Grad}_e \psi(\boldsymbol{X})\,;
\end{gathered}$$

*ii. se* $p = q = r = s$ ,

$$\begin{gathered}
\mathrm{Grad}_r \psi(\boldsymbol{X}) = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_p \mathrm{Grad}_r \psi_2(\boldsymbol{X}) + \\
[\psi_2(\boldsymbol{X})]_{(1,p+1)(p,2p)} \odot_p [\mathrm{Grad}_e \psi_1(\boldsymbol{X})]_{(1,2p+1)(p,3p)}
\end{gathered}$$

*e*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Grad}_e \psi(\boldsymbol{X}) = [\mathrm{Grad}_r \psi_2(\boldsymbol{X})]_{(1,2p+1)(p,3p)} \odot_p [\psi_1(\boldsymbol{X})]_{(1,p+1)(p,2p)} + \\
\mathrm{Grad}_e \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \psi_2(\boldsymbol{X})\,.
\end{aligned}$$

*iii. se $p = q = r = s$ e $V_i = K_i = Z_i$ ,*

$$\mathrm{Div}_r \psi(\boldsymbol{X}) = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_p \mathrm{Div}_r \psi_2(\boldsymbol{X}) + [\psi_2(\boldsymbol{X})]_{(1,p+1)(p,2p)} \odot_p \mathrm{Div}_r \psi_1(\boldsymbol{X})$$

*e*

$$\mathrm{Div}_e \psi(\boldsymbol{X}) = \mathrm{Div}_e \psi_2(\boldsymbol{X}) \odot_p [\psi_1(\boldsymbol{X})]_{(1,p+1)(p,2p)} + \mathrm{Div}_e \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_p \psi_2(\boldsymbol{X}) .$$

**Demonstração**. Os itens a seguir referem-se aos itens respectivos do teorema.

i. É uma conseqüência direta da aplicação da regra do produto com a definição de gradiente.

ii. Dadas as condições do ítem, o tensor $\mathrm{Grad}_e \psi_1(\boldsymbol{X}) \in T_{V^{\times p} \times K^{\times p} \times W^{\times p} \mapsto F}$ no ítem i. pode ser transposto para $[\mathrm{Grad}_e \psi_1(\boldsymbol{X})]_{(1,2p+1)(p,3p)} \in T_{W^{\times p} \times K^{\times p} \times V^{\times p} \mapsto F}$. Desta forma, o produto contrativo com o tensor $\boldsymbol{H}$ na igualdade

$$\mathrm{Grad}_r \psi(\boldsymbol{X}) \odot_p \boldsymbol{H} = \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_p \mathrm{Grad}_r \psi_2(\boldsymbol{X}) \odot_p \boldsymbol{H} + \\ [\psi_2(\boldsymbol{X})]_{(1,p+1)(p,2p)} \odot_p [\mathrm{Grad}_r \psi_1(\boldsymbol{X})]_{(1,2p+1)(p,3p)} \odot_p \boldsymbol{H} , \forall \boldsymbol{H} \in V^{\times p} .$$

pode ser eliminado. A igualdade para o gradiente à esquerda é obtida da mesma forma.

iii. Pelas condições do ítem, pode-se verificar facilmente que

$$[\mathrm{Grad}_e \psi_1(\boldsymbol{X})]_{(1,2p+1)(p,3p)} = \mathrm{Grad}_r \psi_1(\boldsymbol{X}) .$$

Tomando a igualdade do gradiente à direita no ítem ii, tem-se, para um tensor identidade $\boldsymbol{I} \in T_{V^{\times p} \times V^{\times p} \mapsto F}$, que

$$\begin{aligned} \mathrm{Grad}_r \psi(\boldsymbol{X}) \odot_{2p} \boldsymbol{I} &= \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_q \mathrm{Grad}_r \psi_2(\boldsymbol{X}) \odot_{2p} \boldsymbol{I} + \\ &\quad [\psi_2(\boldsymbol{X})]_{(1,p+1)(p,2p)} \odot_q \mathrm{Grad}_r \psi_1(\boldsymbol{X}) \odot_{2p} \boldsymbol{I} . \end{aligned}$$

Tal desenvolvimento também pode ser realizado para a igualdade do gradiente à esquerda.

□

**Proposição 15** *Sejam os espaços tensoriais de Banach $\boldsymbol{T}^F_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^F_{W^{\times q}}$. Seja o subconjunto aberto $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \subset T_{V^{\times p} \mapsto F}$ e a função no mapeamento*

$$\psi : \tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}$$

*G-diferenciável no seu domínio. Considerando os gradientes $\mathrm{Grad}_r \psi$ e $\mathrm{Grad}_e \psi$ constantes em $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$ com regras respectivas $\mathrm{Grad}_r \psi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{G}_r$ e $\mathrm{Grad}_e \psi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{G}_e$, então*

$$\boldsymbol{G}_r \odot_p (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \odot_p \boldsymbol{G}_e = \psi(\boldsymbol{H}_1) - \psi(\boldsymbol{H}_2) ,$$

*onde $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{H}_2$ são tensores quaisquer de $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$ .*

**Demonstração**. Consideremos, primeiramente, uma regra qualquer para $\psi$ tal que sua G-derivada, com regra $\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{G}$, é constante. Desta forma, seja a regra $\psi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{G}\odot_p \boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}$, onde $\boldsymbol{C} \in \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$ é também constante. Aplicando (6.20), tem-se que

$$[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}) = \psi(\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{C}\,, \forall\, \boldsymbol{H} \in \tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}\,.$$

Tomando os tensores $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{H}_2$ quaisquer, tem-se duas igualdades no formato na igualdade anterior. Quando tais igualdades são subtraídas uma da outra obtém-se

$$[\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}_1) - [\mathrm{D_G}\psi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{H}_2) = \psi(\boldsymbol{H}_1) - \psi(\boldsymbol{H}_2)\,.$$

A partir daí, com base na definição de gradiente, obtém-se as últimas igualdades da proposição. □

## Contornos Regulares

Sejam os subespaços afins $\boldsymbol{A}^F_{U,\mathscr{S}a}$ e $\boldsymbol{A}^F_{\partial U,\partial\mathscr{S}b}$ do espaço afim de Hilbert $\boldsymbol{A}^F_{V,\mathscr{A}}$, cuja dimensão é maior que 2, onde $\partial U$ e $\partial\mathscr{S}_b$ são os contornos dos conjuntos $U$ e $\mathscr{S}_a$ respectivamente. Seja $\boldsymbol{H}^F_W$ subespaço bidimensional de $\boldsymbol{H}^F_V$. O contorno $\partial\mathscr{S}_b$ é dito regular se para cada $u \in \partial\mathscr{S}_b$ existir um mapeamento bijetor

$$\zeta : Z \mapsto \{u\}_{vz} \cap \partial\mathscr{S}_b\,, \tag{6.36}$$

onde

i. o conjunto $Z \subset W$ é aberto;

ii. o conjunto $\{u\}_{vz} \subset \mathscr{A}$;

iii. a bijeção $\zeta$ é G-suave de ordem 1 em $Z$;

iv. a função $\zeta^{-1}$ é contínua em $\{u\}_{vz} \cap \partial\mathscr{S}_b$;

v. a derivada $\mathrm{D_G}\zeta\left(\zeta^{-1}(u)\right)$ é inversível.

### Função Normal Unitária

Considerando as condições do ítem anterior, seja o campo característico $\mathsf{F}^{\partial U}_{\partial\mathscr{S}_b}$, tal que os pontos de $\partial\mathscr{S}_b$ são relacionados, de forma biunívoca, aos vetores de $\partial U$. Seja $\{\hat{\boldsymbol{w}}_1, \hat{\boldsymbol{w}}_2\}$ uma das bases ortonormais de $\boldsymbol{H}^F_W$. Adotando

$$\overline{\zeta} := \mathsf{F}^{\partial U}_{\partial\mathscr{S}_b} \circ \zeta\,, \tag{6.37}$$

dado $\boldsymbol{z_u} = \overline{\zeta}^{-1}(\boldsymbol{u})$, onde $\boldsymbol{u} = \digamma_{\partial\mathscr{S}_b}^{\partial U}(u)$, o vetor polar

$$\boldsymbol{n_u} := \frac{\left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}(\boldsymbol{z_u})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_1) \,\overline{\wedge}\, \left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}(\boldsymbol{z_u})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_2)}{\|\left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}(\boldsymbol{z_u})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_1) \,\overline{\wedge}\, \left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}(\boldsymbol{z_u})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_2)\|_{\boldsymbol{H}_V^F}} \tag{6.38}$$

é denominado *vetor normal unitário* ao conjunto $\{\boldsymbol{u}\}_{vz} \cap \partial U$. Se existir pelo menos mais uma função $\overline{\zeta}' \neq \overline{\zeta}$ definida a partir de $\boldsymbol{u}$ e $Z' \subset W$ e

$$\boldsymbol{n}'_{\boldsymbol{u}} := \frac{\left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}'(\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{u}})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_1) \,\overline{\wedge}\, \left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}'(\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{u}})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_2)}{\|\left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}'(\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{u}})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_1) \,\overline{\wedge}\, \left[\mathrm{D_G}\overline{\zeta}'(\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{u}})\right](\hat{\boldsymbol{w}}_2)\|_{\boldsymbol{H}_V^F}} = \boldsymbol{n_u}\,, \forall\, \boldsymbol{u} \in \partial U\,, \tag{6.39}$$

diz-se que o contorno regular $\partial U$ é *orientável*. Neste contexto, é possível definir o mapeamento

$$\Omega_{\partial U} : \partial U \mapsto V\,, \tag{6.40}$$

com regra $\Omega_{\partial U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n_x}$. A função $\Omega_{\partial U}$ é denominada normal unitária ao contorno orientável $\partial U$. Se o vetor $\Omega_{\partial U}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \notin U$ para todo $\boldsymbol{u} \in \partial U$, tem-se a representação $\Omega^+$ e o contorno orientável $\partial U$ é dito estar *positivamente orientado*. Caso $\Omega_{\partial U}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \in U$ para todo $\boldsymbol{u} \in \partial U$, tem-se $\Omega^-$ e o contorno $\partial U$ está *negativamente orientado*.

Capítulo 7

# Teoria Básica da Medida

## 7.1 Espaço Mensurável

### Classe

Trata-se de um conjunto cujos elementos são conjuntos. Se o conjunto $A$ é elemento da classe $\mathfrak{M}$, então $A \in \mathfrak{M}$ e sua representação se torna $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Se os conjuntos de $\mathfrak{M}$ são disjuntos então tal classe é dita *disjunta*. Se $\mathfrak{M}$ é formada por subconjuntos do conjunto $M$ diz-se que $\mathfrak{M}$ é classe de $M$. Neste caso, a representação de $M$ muda para $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

#### Classe Contável

Uma classe é contável se existir uma bijeção entre seus elementos e o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$.

### Anel de Conjunto

Seja uma classe $\mathfrak{M}$ do conjunto não vazio $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Tal classe é dita um anel do conjunto $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ se

i. o conjunto $\emptyset \in \mathfrak{M}$,

ii. dada uma classe contável $\{\boldsymbol{\mathcal{M}}_1, \cdots, \boldsymbol{\mathcal{M}}_n\} \subseteq \mathfrak{M}$, a união $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{M}}_i \in \mathfrak{M}$ e

iii. dados $\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \mathfrak{M}$, o conjunto diferença $\boldsymbol{\mathcal{A}}/\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \mathfrak{M}$.

### Anel Sigma

Um anel $\mathfrak{M}$ do conjunto $\mathcal{M}$ é dito um anel sigma ou *$\sigma$-anel* ou *$\sigma$-álgebra* do conjunto considerado se, dada a classe contável $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \cdots\} \subseteq \mathfrak{M}$, a união $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \in \mathfrak{M}$.

### Espaço Mensurável

O par ordenado $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, onde $\mathfrak{M}$ é um $\sigma$-anel de $\mathcal{M}$, é denominado espaço mensurável. Se o conjunto $\mathcal{M}$ define um campo, então o espaço mensurável é dito um *campo mensurável*.

## 7.2 Espaço Medida

### Função de Conjunto

Denomina-se função de conjunto o par ordenado $(\mathfrak{M}_\mathsf{f}, \mathsf{f})$, onde a classe $\mathfrak{M}_\mathsf{f}$ é o domínio da regra $\mathsf{f}$. Em outras palavras, uma função de conjunto é aquela que possui um conjunto como argumento.

#### Função de Conjunto Aditiva

Dada uma classe $\mathfrak{M}$ do conjunto $\mathcal{M}$, seja o mapeamento $\mathsf{m} : \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}$. A função de conjunto $\mathsf{m}$ é chamada aditiva em $\mathfrak{M}$ se, dada a classe disjunta $\{\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n\} \subseteq \mathfrak{M}$, tem-se a igualdade

$$\mathsf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{m}(\mathcal{M}_i)\,. \tag{7.1}$$

Vale ressaltar que $\mathsf{m}(\emptyset) = 0$, pois $\mathsf{m}(\emptyset) = \mathsf{m}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathsf{m}(\emptyset) + \mathsf{m}(\emptyset)$.

**Conteúdo.** A função de conjunto aditiva $\mathsf{m}$ no anel $\mathfrak{M}$ do conjunto $\mathcal{M}$ é dita um conteúdo neste anel se

$$\mathsf{m}(\mathcal{A}) \geqslant 0\,,\ \forall\, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\,. \tag{7.2}$$

**Medida.** O conteúdo $\mathsf{m}$ no $\sigma$-anel $\mathfrak{M}$ do conjunto $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ é denominado uma medida ou um *$\sigma$-conteúdo* neste anel. Em outras palavras, dada a classe disjunta $\{\boldsymbol{\mathcal{M}}_1, \boldsymbol{\mathcal{M}}_2, \cdots\} \subseteq \mathfrak{M}$,

$$\mathsf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\mathcal{M}}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{m}\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_i\right). \tag{7.3}$$

### Espaço Medida

Dado o espaço mensurável $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathfrak{M})$ e uma medida $\mathsf{m}$ em $\mathfrak{M}$, chama-se o par ordenado $((\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathfrak{M}), \mathsf{m})$ de espaço medida, cuja representação é abreviada para $S^{\mathfrak{M}}_{\boldsymbol{\mathcal{M}},\mathsf{m}}$.

## 7.3 Funções Mensuráveis

### Função Mensurável

Sejam o espaço mensurável $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathfrak{M})$ e o campo mensurável $(F, \mathfrak{F})$. A função no mapeamento $f : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto F$ é dita mensurável se a preimagem

$$R^{-1}_{E,f} \in \mathfrak{M}, \; \forall\, E \in \mathfrak{F}. \tag{7.4}$$

### Função Simples

Sejam o espaço mensurável $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathfrak{M})$ e o campo mensurável $(F, \mathfrak{F})$. Considerando a classe disjunta $\{\boldsymbol{\mathcal{M}}_1, \cdots, \boldsymbol{\mathcal{M}}_n\} \subseteq \mathfrak{M}$, a função mensurável no mapeamento $s : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto F$ é dita simples se sua regra for

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_i}(x), \tag{7.5}$$

onde $\alpha_i \in F$ e a regra

$$\delta_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_i \\ 0 & \text{se } x \notin \boldsymbol{\mathcal{M}}_i \end{cases}. \tag{7.6}$$

A função $\delta_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_i}$ é conhecida como *função característica* de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_i$.

### Convergência de Funções Mensuráveis

Sejam o espaço medida $S^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e o campo mensurável $(F,\mathfrak{F})$. Seja o mapeamento $f : \mathcal{M} \mapsto F$, onde $f$ é mensurável. Uma seqüencia de funções mensuráveis $f_1, f_2, \cdots$ que também fazem $\mathcal{M} \mapsto F$ é dita convergente na medida para $f$ se, dado um número real $\epsilon > 0$,

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{m}\left(\{x : |f_i(x) - f(x)| \leqslant \epsilon\}\right) = 0\,. \tag{7.7}$$

### Integração de Função Simples

Sejam o espaço medida $S^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e o campo mensurável $(F,\mathfrak{F})$. Seja o mapeamento $s : \mathcal{M} \mapsto F$, onde $s$ é função simples com regra

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\mathcal{M}_i}(x)\,. \tag{7.8}$$

A função $s$ é dita integrável em um conjunto $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}$ se

$$\mathsf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{E} \cap \mathcal{M}_i\right) < \infty\,. \tag{7.9}$$

Se $s$ é integrável, diz-se então que o escalar

$$\int_{\mathcal{E}} s := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathsf{m}(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_i) \tag{7.10}$$

é a *integral* de $s$ em $\mathcal{E}$.

### Seqüência Fundamental Média

Dados o espaço medida $S^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e o campo mensurável $(F,\mathfrak{F})$, seja a seqüência de funções simples $s_1, s_2, \cdots$ que mapeiam $\mathcal{M}$ para $F$. Tal seqüência é dita fundamental média em $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}$ se suas funções forem integráveis em $\mathcal{E}$ e

$$\lim_{\min(i,j)\to\infty} \int_{\mathcal{E}} s_i - \int_{\mathcal{E}} s_j = 0\,. \tag{7.11}$$

Em outras palavras, ao se percorrer as funções de uma seqüência fundamental média, as integrais dos termos $s_i$ e $s_j$ tendem à igualdade.

### Integração de Função Mensurável

A partir do espaço medida $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e do campo mensurável $(F,\mathsf{F})$, seja a função em $f : \mathcal{M} \mapsto F$ mensurável. Se existir uma seqüência fundamental média $s_1, s_2, \cdots$, convergente na medida para $f$, tal que suas funções simples são todas integráveis em $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}$, então a função $f$ é dita integrável em $\mathcal{E}$. Caso isto ocorra, o valor

$$\int_{\mathcal{E}} f := \lim_{i\to\infty} \int_{\mathcal{E}} s_i \tag{7.12}$$

é a *integral* de $f$ em $\mathcal{E}$.

### Propriedades Fundamentais de Integrais

Os teoremas a seguir apresentam as principais propriedades[1] de integrais de funções mensuráveis.

**Teorema 14** *Dados o espaço medida $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e o campo mensurável $(F,\mathsf{F})$, seja a função em $f : M \mapsto F$ mensurável e integrável em cada conjunto da classe disjunta $\{\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n\} \subseteq \mathfrak{M}$. Nestas condições,*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{M}_i} f\,.$$

**Teorema 15** *Sejam o espaço medida $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e o campo mensurável $(F,\mathsf{F})$. Sejam os mapeamentos $f : \mathcal{M} \mapsto F$ e $g : \mathcal{M} \mapsto F$, onde $f$ e $g$ são elementos de espaços vetoriais de funções mensuráveis e integráveis em $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}$. Dados $\alpha, \beta \in F$, a função $\alpha f + \beta g$ também é integrável em $\mathcal{E}$ e*

$$\int_{\mathcal{E}} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\mathcal{E}} f + \beta \int_{\mathcal{E}} g\,.$$

**Teorema 16** *Sejam o espaço medida $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{M},\mathsf{m}}$ e o campo mensurável $(F,\mathsf{F})$. Dada a função em $f : \mathcal{M} \mapsto F$ mensurável e integrável em $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}$, se $\mathsf{m}(\mathcal{E}) = 0$, então*

$$\int_{\mathcal{E}} f = 0\,.$$

[1] Demonstrações destas propriedades são encontradas em Munroe[23], pp. 127-129.

**Teorema 17** *Sejam o espaço medida* $\boldsymbol{S}^{\mathfrak{M}}_{\boldsymbol{\mathcal{M}},\mathsf{m}}$ *e o campo mensurável* $(F,\mathfrak{F})$*. Sejam os mapeamentos* $f:\boldsymbol{\mathcal{M}}\mapsto F$ *e* $g:\boldsymbol{\mathcal{M}}\mapsto F$*, onde* $f$ *e* $g$ *são mensuráveis e integráveis em* $\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathfrak{M}$*. Dado o conjunto* $\boldsymbol{\mathcal{A}}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{E}}$*, onde* $\mathsf{m}(\boldsymbol{\mathcal{A}})=0$*, se*

$$f(x)\geqslant g(x)\,,\ \forall\, x\in\boldsymbol{\mathcal{A}}'\,,$$

*então*

$$\int_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} f \geqslant \int_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} g\,.$$

## 7.4 Integração de Funções Tensoriais

### Função Tensorial Mensurável

Dado o espaço tensorial $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p}}$, sejam o espaço mensurável $(T_{V^{\times p}\mapsto F},\mathfrak{V})$ e o campo mensurável $(F,\mathfrak{F})$. Nestas condições, a função tensorial em

$$\nu : T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto F \tag{7.13}$$

é dita mensurável. Desta forma, dado um tensor qualquer $\boldsymbol{T}\in T_{V^{\times p}\mapsto F}$, a função representante $\boldsymbol{T}_{\odot p}$ é mensurável.

### Função Tensorial Integrável

Dados os espaços tensoriais $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p}}$ e $\boldsymbol{T}^{F}_{W^{\times q}}$, seja o mapeamento

$$\psi : T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto T_{W^{\times q}\mapsto F}\,. \tag{7.14}$$

Dado um tensor qualquer $\boldsymbol{X}\in T_{W^{\times q}\mapsto F}$, a função $\psi$ é dita integrável em $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}\subseteq T_{V^{\times p}\mapsto F}$ se a função no mapeamento

$$\boldsymbol{X}_{\odot q}\circ\psi : T_{V^{\times p}\mapsto F}\mapsto F \tag{7.15}$$

for mensurável e também integrável em $\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}$. Nestas condições, com base no teorema 15, conclui-se que a função tensorial $\mathcal{I}_{\psi}$ com regra

$$\mathcal{I}_{\psi}(\boldsymbol{X}) = \int_{\tilde{T}_{V^{\times p}\mapsto F}} \boldsymbol{X}_{\odot q}\circ\psi\,, \tag{7.16}$$

é linear. Em outras palavras, dado o espaço vetorial $\boldsymbol{L}^{F}_{T_{W^{\times q}\mapsto F}\mapsto F}$,

$$\mathcal{I}_{\psi}\in L_{T_{W^{\times q}\mapsto F}\mapsto F}\,. \tag{7.17}$$

O teorema 9 permite afirmar que existe um único tensor $\boldsymbol{E} \in T_{W^{\times q} \mapsto F}$ tal que

$$\boldsymbol{E}_{\odot q}(\boldsymbol{T}) = \mathcal{I}_{\psi}(\boldsymbol{T}) \, , \forall \, \boldsymbol{T} \in T_{W^{\times q} \mapsto F} \, . \tag{7.18}$$

Tal tensor é denominado a *integral* de $\psi$ em $\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}$, representado por

$$\int_{\tilde{T}_{V^{\times p} \mapsto F}} \psi \, . \tag{7.19}$$

**Proposição 16** *Dados os espaços tensoriais* $\boldsymbol{T}^{F}_{V^{\times p}}$ *e* $\boldsymbol{T}^{F}_{U^{\times r} \times W^{\times s}}$*, seja o mapeamento*

$$\psi : T_{V^{\times p} \mapsto F} \mapsto T_{U^{\times r} \times W^{\times s} \mapsto F} \, .$$

*Considerando os tensores* $\boldsymbol{A} \in T_{U^{\times r} \mapsto F}$ *e* $\boldsymbol{B} \in T_{W^{\times s} \mapsto F}$*, são válidas as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \odot_r \int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \psi &= \int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot} r} \circ \psi \, ; \\ \left[ \int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \psi \right] \odot_s \boldsymbol{B} &= \int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \boldsymbol{B}_{\overrightarrow{\odot} s} \circ \psi \, . \end{aligned}$$

**Demonstração**. A partir da regra (7.16), tem-se o desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\left[\boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot} r} \circ \psi\right]}(\boldsymbol{X}) &= \int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \boldsymbol{X}_{\odot s} \circ \left[\boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot} r} \circ \psi\right] \\ &= \int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} [\boldsymbol{X} \odot_s \boldsymbol{A}]_{\overleftarrow{\odot} r} \circ \psi \\ &= \mathcal{I}_{\psi}(\boldsymbol{X} \odot_s \boldsymbol{A}) \, . \end{aligned}$$

Associadas às funções lineares $\mathcal{I}_{\left[\boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot} r} \circ \psi\right]}(\boldsymbol{X})$ e $\mathcal{I}_{\psi}(\boldsymbol{X} \odot_s \boldsymbol{A})$, sejam respectivamente as integrais $\boldsymbol{E_1} \in T_{W^{\times s} \mapsto F}$ e $\boldsymbol{E_2} \in T_{U^{\times r} \mapsto F}$ abreviações de $\int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \boldsymbol{A}_{\overleftarrow{\odot} r} \circ \psi$ e $\int_{T_{V^{\times p} \mapsto F}} \psi$. Da igualdade anterior, é possível concluir que

$$\boldsymbol{E_1}_{\overrightarrow{\odot} s}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E_2}_{\overrightarrow{\odot} r}(\boldsymbol{X} \odot_s \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{X} \odot_s \boldsymbol{A}) \odot_r \boldsymbol{E_2} = [\boldsymbol{A} \odot_r \boldsymbol{E_2}]_{\overrightarrow{\odot} s}(\boldsymbol{X}) \, , \forall \boldsymbol{X} \in T_{W^{\times s} \mapsto F} \, .$$

A partir da notação adotada (7.19), conclui-se a primeira igualdade do teorema. A demonstração da segunda igualdade é feita de forma similar. □

## Identidades de Green

A partir de um conjunto fechado $A$, tal que seu contorno é orientável, as identidades de Green são igualdades que apresentam uma importante relação entre integrais definidas sobre o interior $\widehat{A}$ e integrais definidas sobre o contorno $\partial A$.

Dentre as identidades de Green, a mais geral é aquela que resulta do chamado Teorema de Green. De um corolário deste teorema, denominado Teorema de Gauss-Ostrogradsky ou *Teorema da Divergência*, resulta uma outra identidade de Green, fundamental no estudo da Dinâmica de corpos contínuos. Estes dois teoremas são apresentados a seguir.

**Teorema 18 (Green)** *Seja o espaço de Hilbert $\boldsymbol{H}_V^F$ com dimensão maior que 2 e um conjunto fechado $U \subset V$, tal que seu contorno $\partial U$ é orientável. Dado o espaço tensorial $\boldsymbol{T}_{W^{\times q}}^F$, seja o mapeamento*

$$\psi : V \mapsto T_{W^{\times q} \mapsto F}\,,$$

*onde a função $\psi$ é contínua em $U$ e G-suave de ordem 1 no interior $\widehat{U}$. Considerando o contorno $\partial U$ positivamente orientado, sejam os mapeamentos*

$$\psi_e^{\otimes} : \partial U \mapsto T_{V \times W^{\times q} \mapsto F} \quad e \quad \psi_r^{\otimes} : \partial U \mapsto T_{W^{\times q} \times V \mapsto F}\,,$$

*onde*

$$\psi_e^{\otimes}(\boldsymbol{x}) = \Omega_{\partial U}^{+}(\boldsymbol{x}) \otimes \psi(\boldsymbol{x}) \quad e \quad \psi_r^{\otimes}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) \otimes \Omega_{\partial U}^{+}(\boldsymbol{x})\,.$$

*Neste contexto, são válidas as igualdades*

$$\int_{\widehat{U}} \mathrm{Grad}_e \psi = \int_{\partial U} \psi_e^{\otimes} \quad e \quad \int_{\widehat{U}} \mathrm{Grad}_r \psi = \int_{\partial U} \psi_r^{\otimes}\,.$$

**Teorema 19 (Gauss-Ostrogradsky)** *Considerando as condições do teorema 18, seja $W^{\times q} = V \times Z^{\times p} \times V$. Sejam os mapeamentos*

$$\psi_e^{\odot} : \partial U \mapsto T_{Z^{\times p} \times V \mapsto F} \quad e \quad \psi_r^{\odot} : \partial U \mapsto T_{V \times Z^{\times p} \mapsto F}\,,$$

*onde*

$$\psi_e^{\odot}(\boldsymbol{x}) = \Omega_{\partial U}^{+}(\boldsymbol{x}) \odot \psi(\boldsymbol{x}) \quad e \quad \psi_r^{\odot}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) \odot \Omega_{\partial U}^{+}(\boldsymbol{x})\,.$$

*Desta forma, tem-se que*

$$\int_{\widehat{U}} \mathrm{Div}_e \psi = \int_{\partial U} \psi_e^{\odot} \quad e \quad \int_{\widehat{U}} \mathrm{Div}_r \psi = \int_{\partial U} \psi_r^{\odot}\,.$$

**Demonstração**. Dado o tensor identidade $\boldsymbol{I} \in T_{V^2 \mapsto F}$, a partir da identidade de Green $\int_{\widehat{U}} \mathrm{Grad}_e \psi = \int_{\partial U} \psi_e^{\otimes}$, pode-se dizer que o produto contrativo

$$\boldsymbol{I} \odot_2 \int_{\widehat{U}} \mathrm{Grad}_e \psi = \boldsymbol{I} \odot_2 \int_{\partial U} \psi_e^{\otimes}.$$

Com base na proposição 16, é possível dizer que

$$\int_{\widehat{U}} \boldsymbol{I}_{\overleftarrow{\odot} 2} \circ \mathrm{Grad}_e \psi = \int_{\partial U} \boldsymbol{I}_{\overleftarrow{\odot} 2} \circ \psi_e^{\otimes}.$$

A partir da igualdade (4.65), para quaisquer vetores $\boldsymbol{x} \in \widehat{U}$ e $\boldsymbol{y} \in \partial U$,

$$\boldsymbol{I}_{\overleftarrow{\odot} 2} \circ \mathrm{Grad}_e \psi (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} \odot_2 \mathrm{Grad}_e \psi (\boldsymbol{x}) = \mathrm{Div}_e \psi (\boldsymbol{x})$$

e

$$\boldsymbol{I}_{\overleftarrow{\odot} 2} \circ \psi_e^{\otimes} (\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{I} \odot_2 \left[ \Omega_{\partial U}^{+} (\boldsymbol{y}) \otimes \psi (\boldsymbol{y}) \right] = \Omega_{\partial U}^{+} (\boldsymbol{y}) \odot \psi (\boldsymbol{y}) .$$

A demonstração para $\int_{\widehat{U}} \mathrm{Div}_r \psi = \int_{\partial U} \psi_r^{\odot}$ segue a mesma metodologia. □

# Bibliografia


[1] Artzy, R. **Linear Geometry.** 1 ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

[2] Backus, G. **Continuum Mechanics.** Disponível em: <http://samizdat.mines.edu/backus/>, Acesso em: fev 2004.

[3] Barthold, F.; Stieghan, J. **Introduction to Continuum Mechanics: Vector and Tensor Calculus.** Disponível em: <http://schubert.cse.bau.tu-bs.de/~apache/download/course-material/introduction-to-continuum-mechnics>, Acesso em: dez 2004.

[4] Cameron, P. J. **Sets, Logic and Categories.** 1 ed. Londres: Springer-Verlag, 1999.

[5] Cervantes, M. **Don Quijote De La Mancha** 1 ed. Madri: Castalia, 2010.

[6] Ciarlet, P. G. **Mathematical Elasticity - Volume 1: Three Dimensional Elasticity.** 1 ed. Amsterdã: Elsevier Science Publishers BV, 1988.

[7] Connel, E. H. **Elements of Abstract and Linear Algebra.** Disponível em: <http://www.math.miami.edu/~ec/book/>, Acesso em: fev 2004.

[8] Derbyshire, J. **Unknown Quantity: a Real and Imaginary History of Algebra.** 1 ed. Washington,D.C.: Joseph Henry Press, 2006.

[9] Dieudonné, J. **Foundations Of Modern Analysis.** 1 ed. Nova Iorque: Academic Press, 1969.

[10] Dodson, C.T.J.; Poston, T. **Tensor Geomery: The Geometric Viewpoint and its Uses.** 1 ed. Berlim: Springer-Verlag Inc., 1991.

[11] Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics.** 1. ed. San Diego: Academic Press, 1981.

[12] Halmos, P. R. **Measure Theory.** 1 ed. Nova Iorque: Springer-Verlag Inc., 1974.

[13] Halmos, P. R. **Naive Set Theory.** 1 ed. Nova Iorque: Springer-Verlag Inc., 1974.

[14] Hermes, H.; Markwald, W. *Foundations of Mathematics* in **Fundamentals of Mathematics: Volume I.** 1 ed. Massachusetts: MIT Press, 1987, pp. 1-86.

[15] Houaiss, A.; Villar, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Objetiva Ltda, 2001.

[16] Jacobs, K. D. **Measure and Integral.** 1 ed. Nova Iorque: Academic Press Inc., 1978.

[17] Leithold, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 1 ed. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil, 1982.

[18] Luque, J.; Thibon, J. **Hyperdeterminantal Calculations of Selberg's And Aomoto's Integrals.** Disponível em: <`http://www-igm.univ-mlv.fr/~jyt/ARTICLES/`>, Acesso em: nov 2004.

[19] Malament, D. B. **Notes on Geometry and Spacetime.** Disponível em: <`http://www.lps.uci.edu/home/fac-staff/faculty/malament/geometryspacetimedocs/`>, Acesso em: ago 2006.

[20] Malvern, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.** 1. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969.

[21] Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity.** 1. ed. Mineola: Dover Publications, 1994.

[22] Milne J. S. **Group Theory.** Disponível em: <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/>, Acesso em: fev 2004.

[23] Munroe, M. E. **Measure and Integration** 1 ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

[24] Ogden, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations.** 1. ed. Mineola: Dover Publications, 1997.

[25] Segel, L. **Mathematics Applied to Continuum Mechanics.** 1 ed. Nova Iorque: Macmillan Publishing Co., 1977.

[26] Shen, A.; Vereshchagin, N. K. **Basic Set Theory** 1 ed. Providence: American Mathematical Society, 2002.

[27] Snapper, E.; Troyer, R. J. **Metric Affine Geometry.** 1 ed. Nova Iorque: Academic Press, 1971.

[28] Sokolnikoff, I. S. **Mathematical Theory of Elasticity.** 1 ed. Malabar: Robert Krieger Publishing Company, 1983.

[29] Soutas-Little, R. W. **Elasticity.** 1 ed. Mineola: Dover Publications, 1999.

[30] Vaisman, I. **Foundations of Three Dimensional Euclidean Geometry.** Nova Iorque: Marcel Dekker Inc., 1980.

[31] Waerden, B. **A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether** 1 ed. Berlim: Springer-Verlag Inc., 1985.

[32] Waleffe, F. **Tensor Product and Tensors.** Disponível em: <http://www.math.wisc.edu/~milewski/>, Acesso em: out 2004.

[33] Weyl, H. **The Classical Groups.** 1 ed. Princeton: Princeton University Press, 1997.

[34] Wouk, A. **A Course of Applied Functional Analysis.** 1 ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons Inc., 1979.

[35] Zeidler, E. **Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications.** 1 ed. Nova Iorque: Springer-Verlag Inc., 1995.

# Índice