

Mecánica de los Sólidos – Unidad 2B

Formulación Matemática de la Elasticidad Lineal

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2021



Contenido

3 Tensión (*cont.*)

- 3.1 Estado plano de tensiones
- 3.2 Componentes de tensión en tensión plana asociados con caras orientadas arbitrariamente
- 3.3 Círculo de Mohr en tensión plana
- 3.4 Círculo de Mohr de un estado de tensión 3D

3.1 Estado plano de tensiones



- En mecánica de sólidos deformables, se dice que un material está bajo tensión plana si el vector de tensión es cero en un plano particular, Figure 1.
- Cuando esa situación ocurre sobre un elemento completo de una estructura, como suele ser el caso de placas delgadas, el análisis de tensión se simplifica considerablemente, ya que el estado de tensión puede representarse mediante un tensor de dimensión 2.
- La tensión en el plano generalmente ocurre en placas planas delgadas sobre las que solo actúan fuerzas de carga paralelas a ellas.

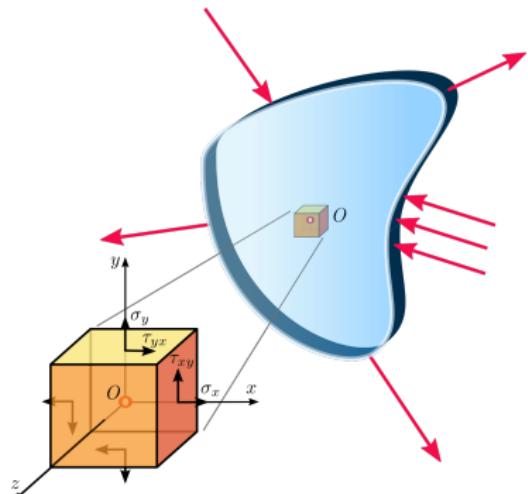


Figura 1: Estado plano de tensiones.

- En ciertas situaciones, se puede suponer que una placa delgada suavemente curvada tiene tensión plana para realizar un análisis de tensión.
- Por ejemplo, un cilindro de pared delgada se tira y tuerce mientras se encuentra lleno de un fluido a presión. Es decir, los componentes de tensión perpendiculares a la pared son insignificantes en comparación con aquellos paralelos a ella. Ver Figura 2.
- Como se verá más adelante, en ciertas situaciones, el esfuerzo de flexión de una placa delgada no puede ser obviado. Si bien el análisis se puede simplificar, utilizando un dominio 2D, el tensor de tensión plana deberá complementarse con términos de flexión.

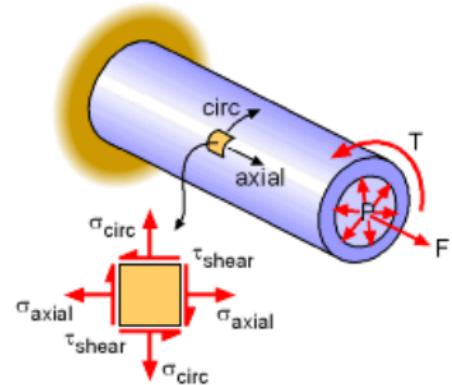


Figura 2: Tubería que se tira, presuriza y tuerce.

- En términos más generales, si uno elige los dos primeros ejes de coordenadas de forma arbitraria pero perpendicular a la dirección de tensión cero, el tensor tensión tendrá la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

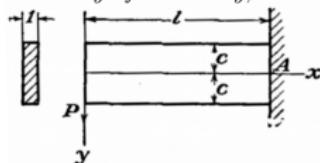
y por lo tanto puede ser representado por una matriz 2×2 ,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}.$$

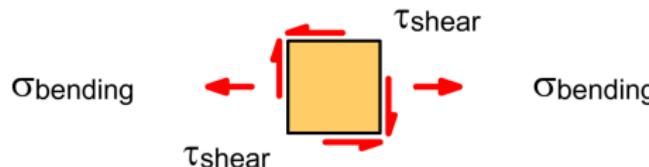
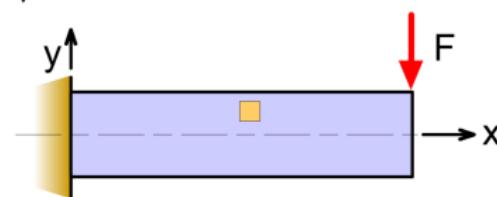
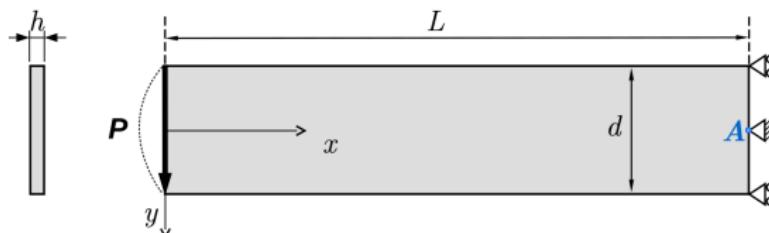
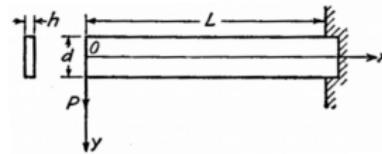
- Se dice que se tiene un estado plano de tensiones cuando las componentes sobre planos normales al eje z : $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$, son nulas, las tensiones están siempre contenidas en el plano xy .
- El estado tensional queda completamente definido por las componentes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Conocidas estas componentes del tensor de tensiones en cualquier punto O , es posible determinar la tensión sobre una superficie arbitraria, si se conocen los cosenos directores de la misma.

• Ejemplo: Timoshenko's beam – bending of a cantilever.

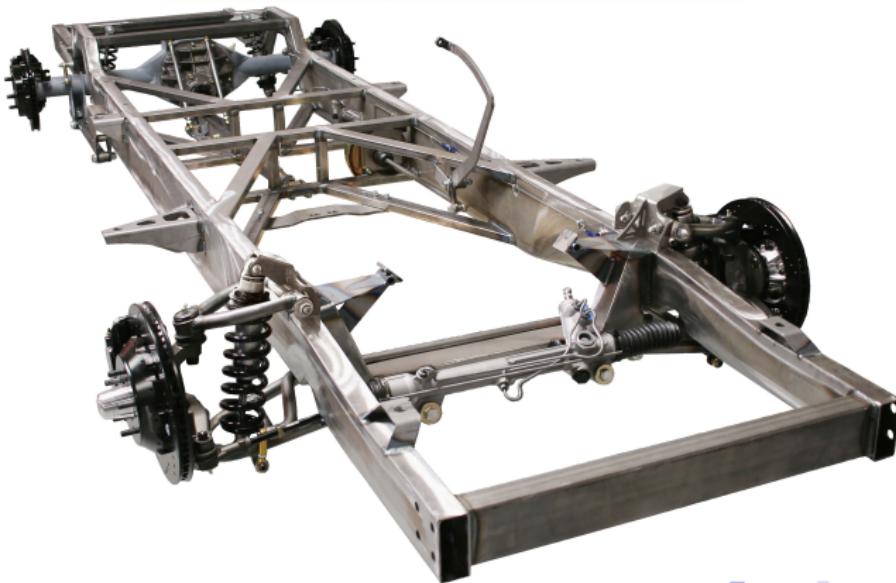
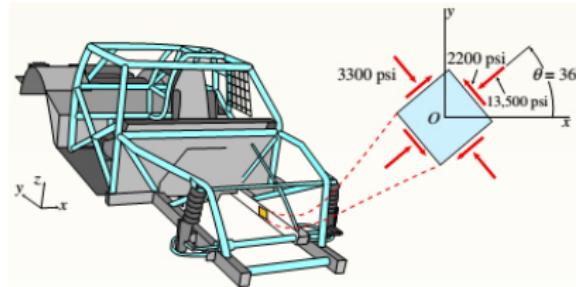
Timoshenko & Goodier,
Theory of Elasticity, 1951



Wang, Applied Elasticity, 1953

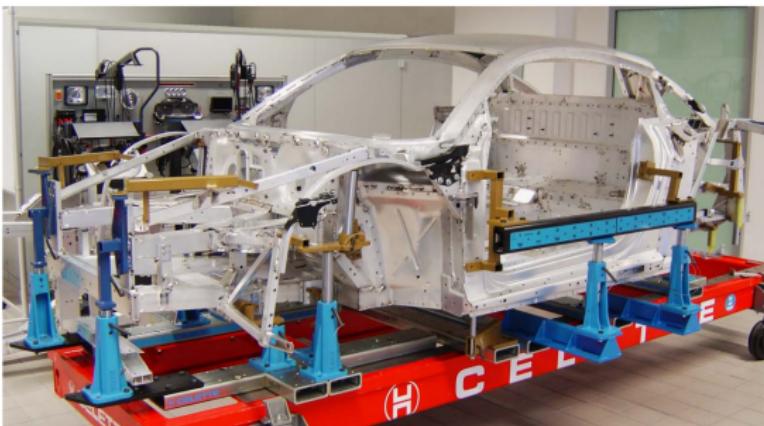


- **Ejemplo:** normal and shear stresses of an inclined frame element from a racing car.



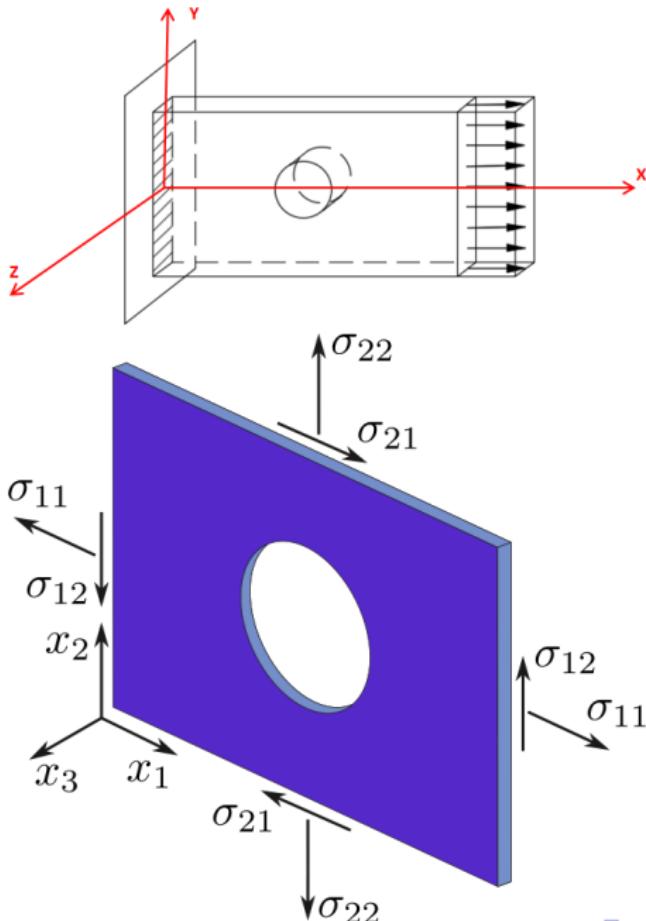
- **Ejemplo:** Análisis de choque en carrocerías, Audi R8.

- *Unibody*– Frame and body is one piece. Additional strength is added by some of the outer panels.
- *Space Frame*– Frame and body is one piece. No additional strength is added by outer panels.
- The primary difference between space frames and unibody structures is that space frames are:
 - lighter weight, either made from lightweight metal or a metal and composite structure combination.
 - less dependent on outer body panels for strength.
 - similar to the inner structure common on race car designs.

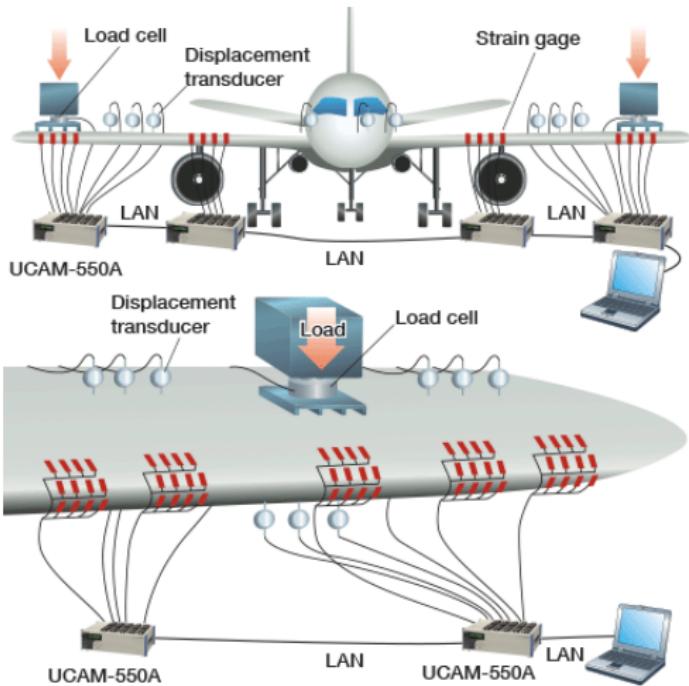
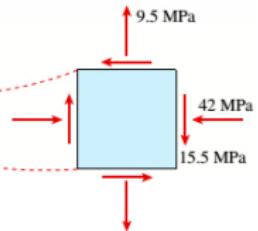


Steel Structure Damage Analysis, Inter-Industry Conference on Auto Collision Repair, 2013

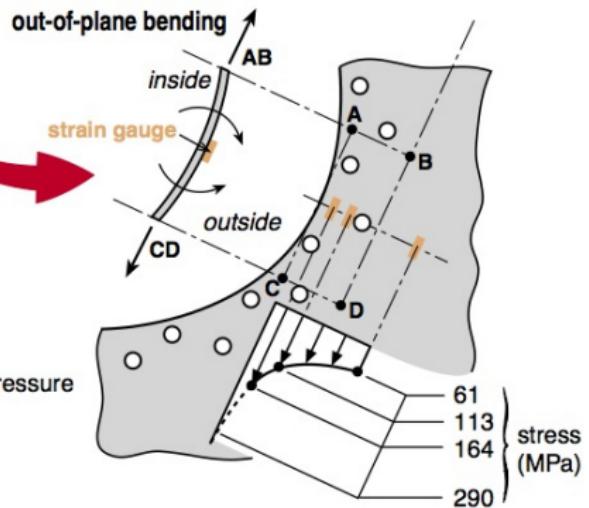
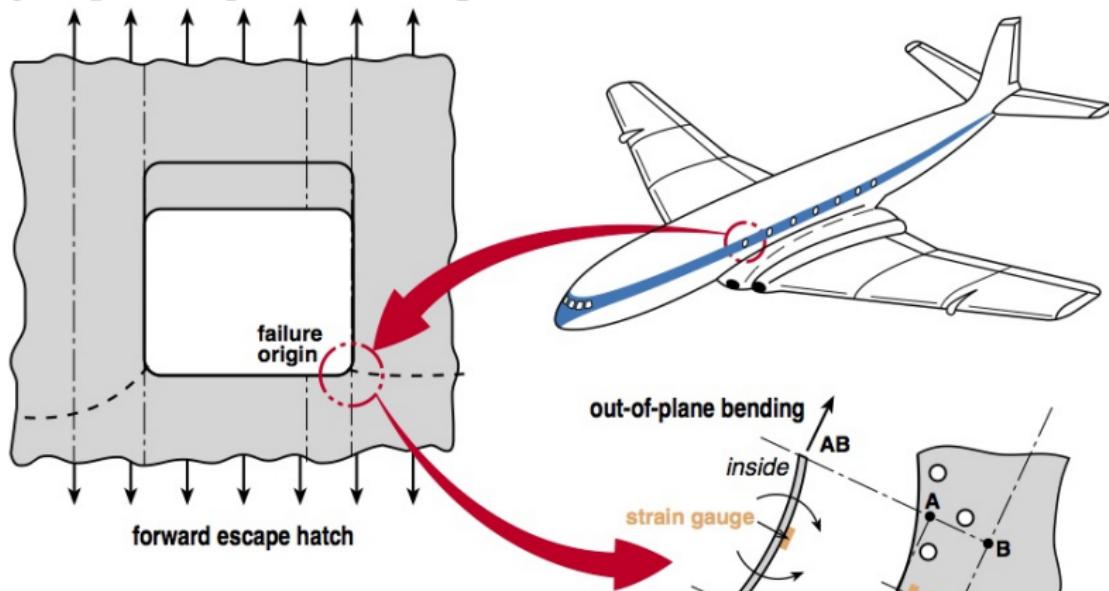
- **Ejemplo:** placa esbelta con un orificio.



- **Ejemplo:** airplane fuselage ...



- **Ejemplo:** airplane fuselage ... and their holes.

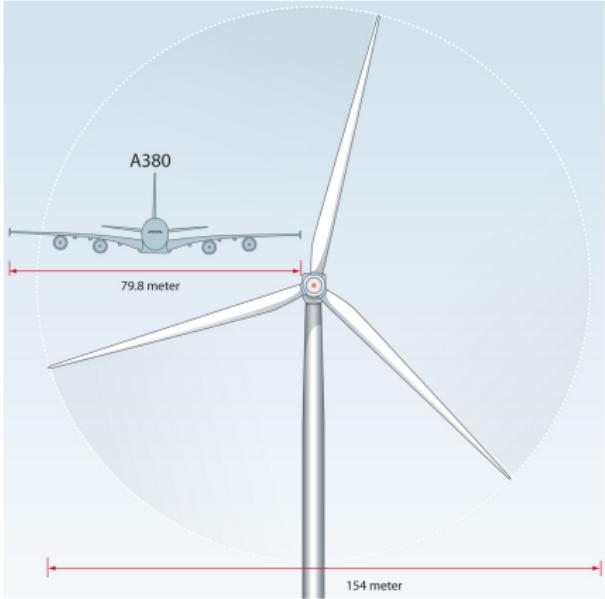


Stress distribution at 56.9 kPa cabin pressure
and 1.3 g inertia loading

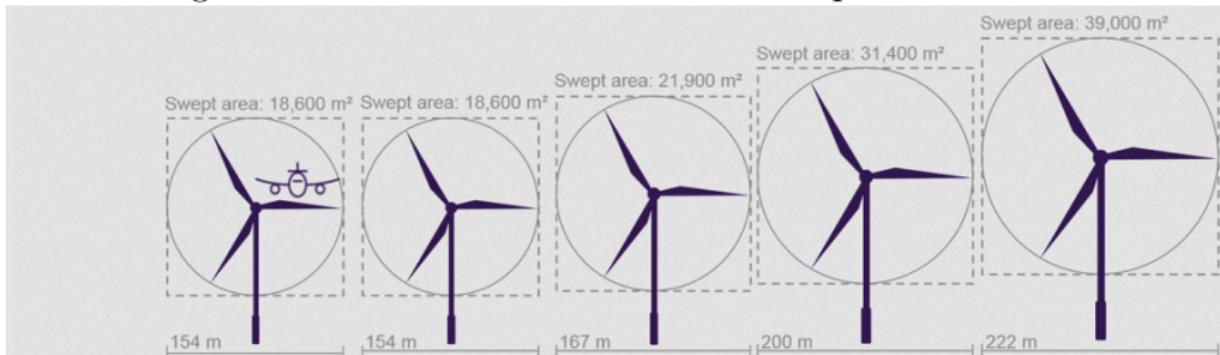
- **Ejemplo:** airplane fuselage ... and their holes.



- **Ejemplo:** Turbina eólica gigante. La pala Siemens B75 es uno de los componentes de fibra de vidrio más grande del mundo fundido en una sola pieza, 6-7MW, 154 m de diámetro.



- **Ejemplo:** La pala SiemensGamesa B108 es el componente de fibra de vidrio más grande del mundo fundido en una sola pieza.



| | SWT-6.0-154 DD | SWT-7.0-154 DD | SG 8.0-167 DD | SG 11.0-200 DD | SG 14-222 DD |
|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|--------------|
| IEC Class | I, S | I, S | I, S | I, S | I, S |
| Nominal Power | 6,000 kW | 7,000 kW | 8,000 kW | 11,000 kW | 14,000 kW |
| Blade length | 75 m | 75 m | 81.4 m | 97 m | 108 m |

- Pala de 108 m, 222 m de diámetro, 14-15MW≈18000 hogares europeos.
- Velocidad máxima de aproximadamente 90 m/s - ¡324 km/h!
- Vida útil proyectada de más de 25 años.
- Una unidad evitará 1.4 millones de Tn de CO₂ vs generación a carbón.
- Palas de una pieza pesan un 3-4 % menos que las palas pegadas.
- *high – tech* entre máxima velocidad de rotación vs mínima erosión vs mínima pérdida debida a la protección adicional de vanguardia que protege la pala contra la erosión agresiva a altas velocidades de la punta.

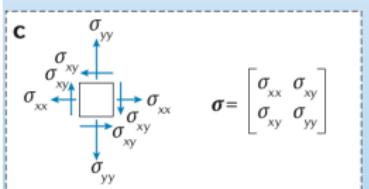
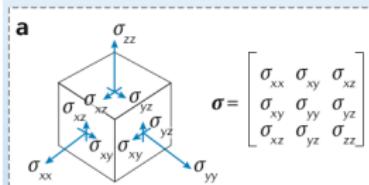
- **Ejemplo:** Gómez-González et al. (May-28-2021). Measuring mechanical stress in living tissues. *Nature Reviews Physics*.
sci-hub.tw/10.1038/s42254-020-0184-6

- Las tensiones mecánicas generadas por las células determinan el destino, la forma y la función de los tejidos vivos.
- Al presente se han desarrollado diversas técnicas para medir el estrés en los tejidos con resolución subcelular.
- Las tecnologías de vanguardia permiten el mapeo de alta resolución de campos de estrés variable en el tiempo en cultivos celulares 2D y 3D.
- La medición de tensiones *in vivo* sigue siendo un reto que se aborda actualmente mediante la combinación de modelos computacionales basados en imágenes y la inserción de inclusiones blandas en tejidos de interés.

[Video] Active superelasticity in 3D epithelia of controlled shape.

- **Ejemplo:** Gómez-González et al. (May-28-2021). Measuring mechanical stress in living tissues. *Nature Reviews Physics*.
sci-hub.tw/10.1038/s42254-020-0184-6

Lumen of uterus

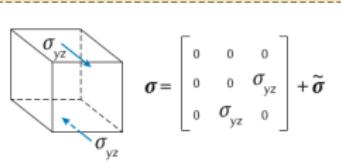
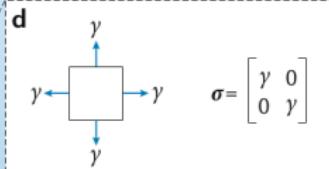
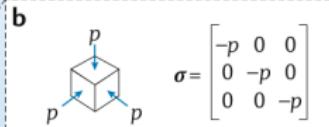
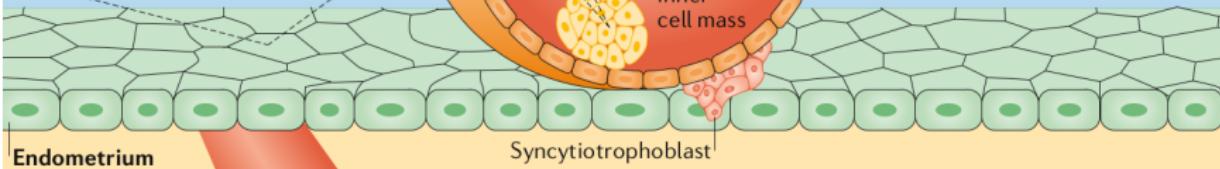


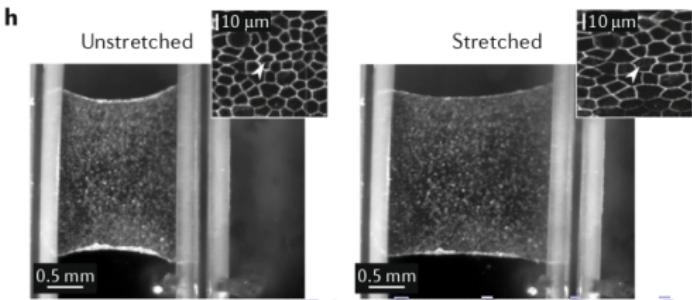
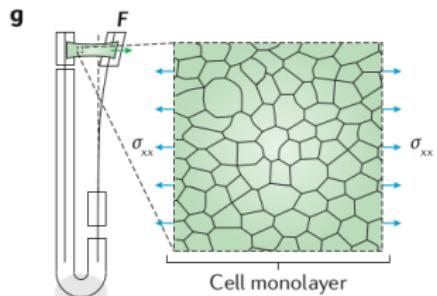
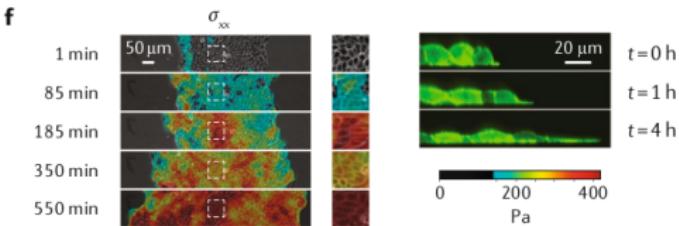
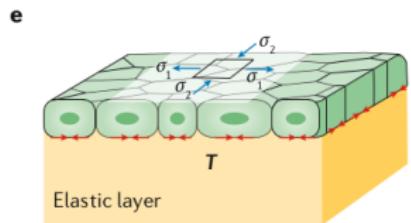
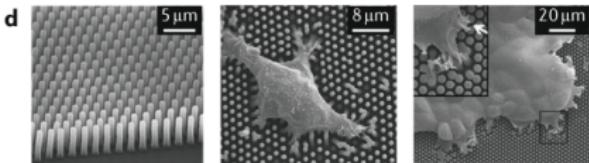
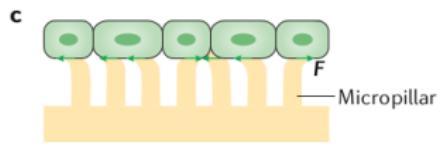
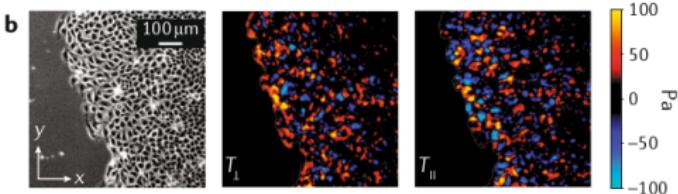
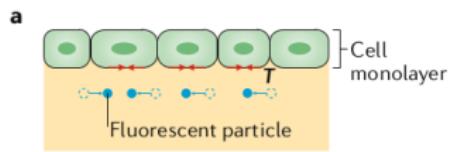
Blastocyst

Trophectoderm

Blastocoel

Inner cell mass





- Supongamos ahora que además del plano mm (empleado en la Unidad 2-A) pasamos otro plano a través del cuerpo (ver Figuras 1-7), este plano es paralelo a mm pero separado de él una pequeña distancia Δx .
- De manera similar pasamos planos paralelos a los planos xz y xy , finalmente cortamos un paralelepípedo de Δx por Δy por Δz .
- Los componentes de tensión en la Figura 3 deben considerarse como valores promedio sobre las caras respectivas del paralelepípedo.
- Las primas se usan para indicar que los componentes de tensión en caras opuestas no tienen necesariamente las mismas magnitudes, ya que las caras están separadas por pequeñas distancias.
- Por ejemplo, el componente de tensión τ_{xy} es uniforme sobre la cara x -negativa, pero cuando nos movemos una distancia Δx a la cara x -positiva, el componente de tensión en la dirección y tiene un nuevo valor τ'_{xy} que es uniforme sobre esta cara x -positiva.

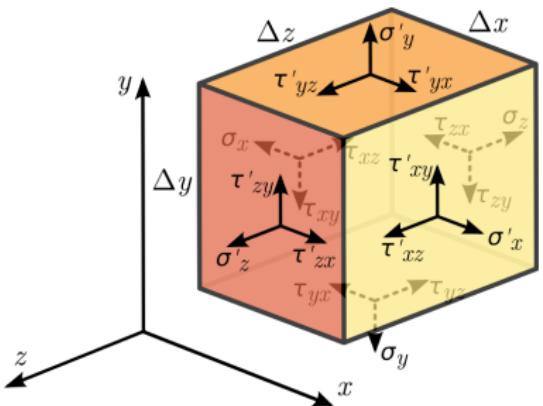


Figura 3: Componentes cartesianas del tensor de tensiones.

- **Equilibrio de un elemento diferencial en tensión plana**
- Si un cuerpo continuo está en equilibrio, cualquier parte aislada del cuerpo debe estar sometida a un conjunto de fuerzas en equilibrio (y viceversa, ver Figura 4).
- Los requisitos de equilibrio establecen ciertas condiciones que deben existir entre los componentes de tensión.
- Primero expresaremos los componentes de tensión $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, \tau'_{yx}$ en una forma más conveniente, relacionándolos con los componentes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$.

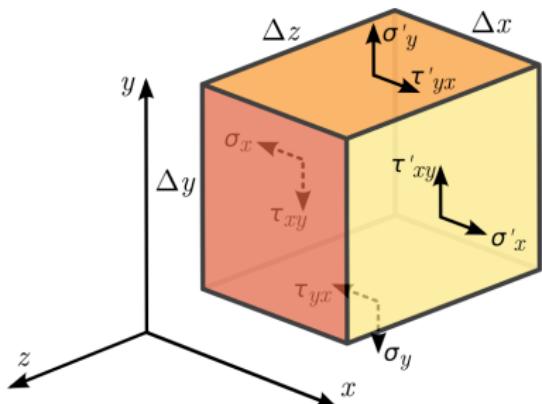


Figura 4: Componentes cartesianas del tensor de tensiones en un estado de tensiones planas.

- Usando el concepto de la derivada parcial, podemos aproximar la cantidad que cambia un componente de tensión entre dos puntos separados por una pequeña distancia Δx , como

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \Delta x,$$

y de forma similar σ'_x , σ'_y y τ'_{yx} , ver Figura 5.

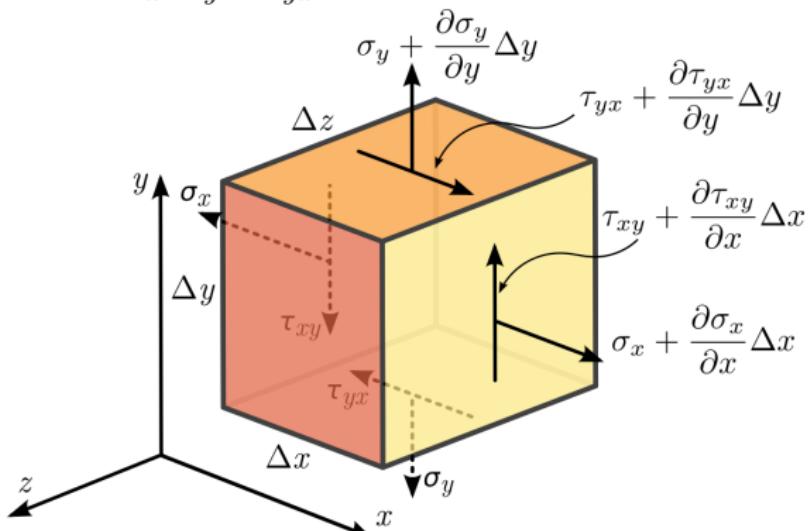


Figura 5: Componentes cartesianas del tensor de tensiones en un estado de tensiones planas, expresados de forma diferencial.

Ejercicio 3.1: Muestre que imponiendo las condiciones de equilibrio $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ al elemento de la figura respecto al centro, y aplicando el límite cuando se toma un paralelepípedo infinitesimal (Figura 5), se obtiene en ausencia de fuerzas volumétricas que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},$$

y

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

- Es posible demostrar en el caso más general de tensión en un punto, que, para satisfacer el requisito de $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$, los componentes de la tensión de corte que actúan sobre caras perpendiculares y en direcciones perpendiculares a la línea de intersección de las caras deben ser iguales en magnitud y estar orientadas entre sí.
- Es decir

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

- Para un caso de tensión 3D, el equilibrio de momento reducirá los nueve componentes originales de la tensión a seis:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}.$$

- Mientras que, en ausencia de fuerzas volumétricas, la condición de $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para un estado de tensión 3D requerirá de tres ecuaciones, las cuales pueden escribirse en notación indicial como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3. \tag{3.1}$$

- **Ejemplo 3.3** La matriz de tensiones en los puntos de un sólido elástico es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 4x + 3z & -6(x + y + z) & y + z \\ -6(x + y + z) & 10(y - z) & 3x \\ y + z & 3x & 5z \end{bmatrix},$$

siendo las tensiones expresadas en kp/mm^2 cuando las coordenadas se expresan en metros.

- Calcular las fuerzas de volumen en el S.I.
- Hallar la matriz de tensiones esférica y desviadora en el punto $P = (0, 1, -1)$.

• **Ejemplo 3.4 – Problem 4.33 Crandal et al.**: en la Unidad 1C (sección 3.4) se mostró que las ecuaciones de equilibrio, para un elemento diferencial de una viga delgada, se expresan como

$$\frac{dV}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM_b}{dx} + V = 0. \quad (1)$$

a) Muestre que la integración de las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

a través del espesor de una viga, en el plano la tensión, se reduce a las ecuaciones anteriores, donde

$$\begin{aligned} V &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy, & M_b &= - \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_x dy, \\ q &= \sigma_y \left(y = \frac{h}{2} \right) - \sigma_y \left(y = -\frac{h}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

• **Ejemplo 3.4 (cont.)**

- Recordamos que

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad (\text{a})$$

y

$$d\sigma_{(.)} = \frac{\partial \sigma_{(.)}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{(.)}}{\partial y} dy. \quad (\text{b})$$

- Ahora realizamos la $\sum F_y = 0$ para un elemento de área diferencial $dx dy$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{c})$$

- Si realizamos la integral de la Ec. (c),

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\text{c}) dy = \underbrace{\frac{d}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy}_{V} + \underbrace{\sigma_y \Big|_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}}}_{q} + \mathcal{O}(dx) \xrightarrow{0} 0 \quad (\text{d})$$

donde se ha empleado la Ec. (b) en pasos intermedios.

Ejemplo 3.4 (cont.)

- En el caso de $\sum M_O = 0$, ver Figura 6, tenemos que de las 8 fuerzas solo 6 contribuyen en la sumatoria de momentos respecto al punto O .

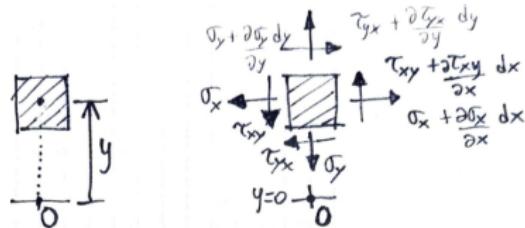


Figura 6: Componentes del tensor tensión actuando sobre las caras del elemento diferencial $dx dy$.

- Resultando finalmente

$$\sum M_O = 0 \longrightarrow -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}y - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}y = 0. \quad (\text{e})$$

- Nuevamente, realizamos la integral de la Ec. (e),

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\text{e}) dy = \frac{d}{dx} \left\{ - \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} y dy}_{M_b} \right\} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} y dy. \quad (\text{f})$$

• Ejemplo 3.4 (cont.)

- Continuando con la resolución de Ec. (e), aplicando la regla de la cadena y considerando una región de integración $[x, x + dx] \times [-h/2, h/2]$ obtenemos

$$\begin{aligned} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} y \, dy &= - \int_{-h/2}^{h/2} y \, d\tau_{xy} + y \cancel{\mathcal{O}(dx)} \rightarrow 0 \\ &= - \int_{-h/2}^{h/2} d(y\tau_{xy}) + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dy}_{V}. \end{aligned} \quad (\text{f})$$

- Donde, finalmente tenemos que

$$-(y\tau_{xy}) \Big|_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} = -\frac{h}{2} \left[\underbrace{\tau_{xy} \Big|_{y=\frac{h}{2}}}_{=0} + \underbrace{\tau_{xy} \Big|_{y=-\frac{h}{2}}}_{=0} \right] = 0, \quad (\text{g})$$

dado que, según la hipótesis empleada para determinar las expresiones en la Ec. (1), “no existen fuerzas tangenciales (corte) externas actuando sobre el elemento bajo análisis”.

- **Ejemplo 3.4 (cont.)** por lo tanto, hemos mostrado que:

- (i) integrando la ecuación diferencial de equilibrio en la dirección y , a través del espesor de la viga, obtenemos

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy = \frac{dV}{dx} + q = 0; \quad (4)$$

- (ii) integrando el primer momento en y de la ecuación diferencial de equilibrio en la dirección x , a través del espesor de la viga, obtenemos

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) y dy = \frac{dM_b}{dx} + V = 0, \quad (5)$$

donde q , V y M_b se definen como en la Ec. (3).

3.2 Componentes de tensión en tensión plana asociados con caras orientadas arbitrariamente

- En esta sección retomaremos y examinamos más a fondo el problema del estado tensional en un punto, con el objeto de determinar las relaciones que deben existir entre los componentes de tensión asociados con caras que no son perpendiculares entre sí.
- Además, encontraremos cómo expresar los componentes del vector tensión en un plano que pasa por un punto O que no es paralelo a uno de los planos de coordenadas cartesianos.
- También obtendremos los componentes de tensión en un conjunto de ejes rotados con respecto a los ejes originales en términos de los componentes de tensión referidos a los ejes de coordenadas originales.

- Supongamos que conocemos las componentes de tensión σ_x, σ_y y τ_{xy} en algún punto O de un cuerpo sometido un estado de tensión plano, ver Figura 7.

Nos interesa responder la siguiente pregunta:

- ¿Los componentes de tensión en las caras x e y determinan las componentes del vector tensión $\mathbf{T}^{(n)}$ que actúa sobre una cara que pasa a través del punto O y cuya normal \mathbf{n} se encuentra en el plano xy y forma un ángulo arbitrario θ con el eje x ?
- En otras palabras ¿El equilibrio determina unívocamente los componentes $T_x^{(n)}, T_y^{(n)}$, del vector tensión $\mathbf{T}^{(n)}$ en términos de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ y el ángulo θ ?

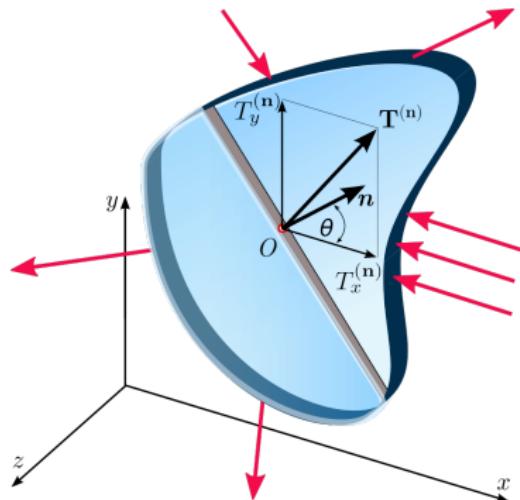


Figura 7: Componentes del vector tensión en algún punto O de un cuerpo sometido un estado de tensión plano.

- **Ejemplo 3.5:** Responda la pregunta considerando el equilibrio ($\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$) de una pequeña cuña centrada en el punto O , como se muestra en la Figura 8.

- Para una cuña suficientemente pequeña, podemos considerar que los componentes de tensión son uniformes sobre cada cara.
- Las condiciones de equilibrio que debemos analizar son

$$\sum M_z = 0,$$

$$\sum F_x = 0,$$

$$\sum F_y = 0,$$

siendo $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T$.

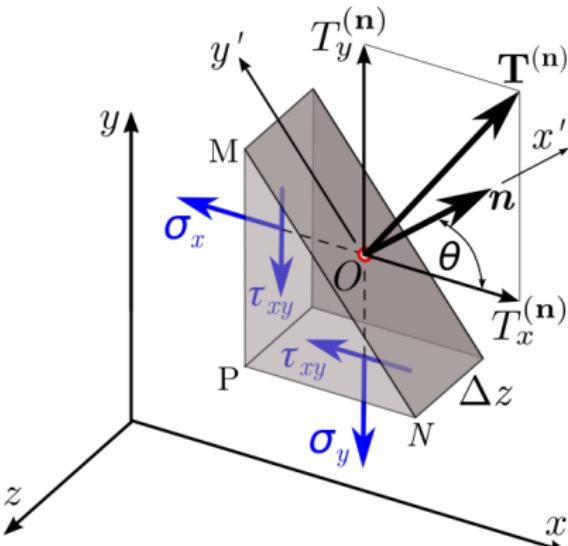


Figura 8: Vector tensión actuando sobre una pequeña cuña.

• Ejemplo 3.5 (cont.)

- Analizando los requerimientos de equilibrio en la Figura 8

$$\begin{aligned}\sum M_z &= (\tau_{xy} \Delta z \overline{MP}) \frac{\overline{NP}}{2} - (\tau_{xy} \Delta z \overline{NP}) \frac{\overline{MP}}{2} = 0, \\ \sum F_x &= T_x^{(\mathbf{n})} \Delta z \overline{MN} - \sigma_x \Delta z \overline{MN} \cos \theta - \tau_{xy} \Delta z \overline{MN} \sin \theta = 0, \\ \sum F_y &= T_y^{(\mathbf{n})} \Delta z \overline{MN} - \tau_{xy} \Delta z \overline{MN} \cos \theta - \sigma_y \Delta z \overline{MN} \sin \theta = 0,\end{aligned}\quad (\text{a})$$

- Eliminando \overline{MN} y Δz de las relaciones de equilibrio de fuerza en (a) obtenemos la respuesta a la pregunta planteada, es decir, para un estado plano de tensión, el vector tensión se expresa como

$$\begin{aligned}T_x^{(\mathbf{n})} &= \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta, \\ T_y^{(\mathbf{n})} &= \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta.\end{aligned}\quad (\text{b})$$

- Mientras que el equilibrio de momentos no permite obtener ninguna información adicional.

- **Ejemplo 3.5 (cont.)**

- En notación matricial podemos expresar (b), Teorema de Tensión de Cauchy, Ec. (2.6), de la siguiente forma

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n},$$

donde \mathbf{n} es un vector columna.

- Este resultado permite determinar los componentes del vector tensión $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$, en términos de las componentes del tensor tensión $\boldsymbol{\sigma}$ actuando en las caras de coordenadas.
- Este cálculo a menudo se requiere realizar en la frontera de un cuerpo delgado para imponer condiciones de contorno apropiadas.

- De forma similar, nos interesa responder la siguiente pregunta:

- ¿Los componentes de tensión en las caras x e y determinan las componentes de tensión en una cara que pasa a través del punto O y cuya normal \mathbf{n} se encuentra en el plano xy y forma un ángulo arbitrario θ con el eje x ?
- La pregunta se ilustra en la figura. Es decir: ¿Las condiciones de equilibrio determinan de manera única los componentes de tensión $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'}$ en términos de σ_x , σ_y , τ_{xy} y el ángulo θ ?

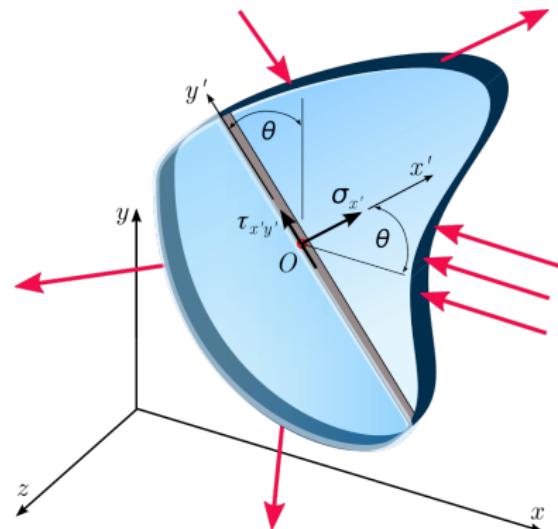


Figura 9: Componentes de tensión actuando sobre un plano arbitrario.

- **Ejemplo 3.6:** Responda la pregunta considerando el equilibrio ($\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$) de una pequeña cuña centrada en el punto O , como se muestra en la Figura 10.

- Para una cuña suficientemente pequeña, podemos considerar que los componentes de tensión son uniformes sobre cada cara.
- Como vimos en el ejercicio anterior solo interesa analizar las condiciones de equilibrio

$$\sum F_{x'} = 0,$$

$$\sum F_{y'} = 0,$$

siendo $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T$.

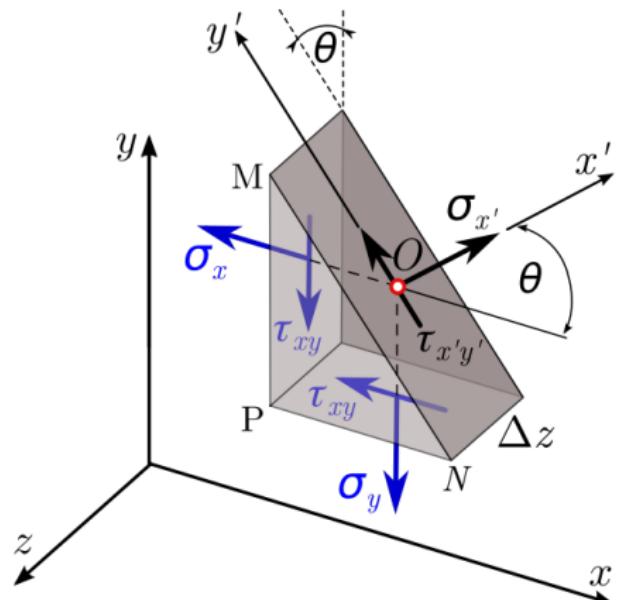


Figura 10: Componentes de tensión actuando sobre una pequeña cuña.

• Ejemplo 3.6 (cont.)

- Analizando los requerimientos de equilibrio en la Figura 10

$$\begin{aligned} \sum F_{x'} &= \sigma_{x'} \Delta z \overline{MN} - (\sigma_x \Delta z \overline{MP}) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta z \overline{MP}) \sin \theta \\ &\quad - (\sigma_y \Delta z \overline{NP}) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta z \overline{NP}) \cos \theta = 0, \\ \sum F_{y'} &= \tau_{x'y'} \Delta z \overline{MN} + (\sigma_x \Delta z \overline{MP}) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta z \overline{MP}) \cos \theta \\ &\quad - (\sigma_y \Delta z \overline{NP}) \cos \theta + (\tau_{xy} \Delta z \overline{NP}) \sin \theta = 0. \end{aligned} \tag{a}$$

- Además tenemos que $\overline{MP} = \overline{MN} \cos \theta$ y $\overline{NP} = \overline{MN} \sin \theta$, reemplazando estas relaciones en (a), reordenamos y eliminamos \overline{MN} y Δz

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{x'y'} &= -\sigma_x \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \sin^2 \theta. \end{aligned} \tag{b}$$

- **Ejemplo 3.6 (cont.)** Es decir que la respuesta a la pregunta planteada, para un estado plano de tensión, se expresa como

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}\tag{c}$$

- En tensión plana si conocemos los componentes de tensión en dos caras perpendiculares, conocemos los componentes de tensión en todas las caras cuyas normales se encuentran en el plano.
- En particular, si sustituimos θ por $\theta + \pi/2$, podemos obtener $\sigma_{y'}$, la tensión que actúa sobre una cara perpendicular al eje y' ,

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta.\tag{d}$$

- **Nota:** alternativamente se emplea la notación $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$.

- Si conocemos los componentes de tensión para todas las orientaciones posibles de un plano que pasa a través del punto en cuestión, decimos que conocemos el *estado de tensión en el punto*.
- La especificación de un estado de tensión en tensión plana implica, por lo tanto, el conocimiento de tres componentes de tensión, tomados más convenientemente como componentes normales y de corte en dos caras perpendiculares.
- Se debe tener cuidado de no confundir un solo componente de tensión con el estado de tensión en ese punto.
- En el caso general de tensión en 3D, la especificación del estado de tensión en un punto requiere seis piezas de información, lo más conveniente es emplear componentes de tensión normal y cortante asociados con tres caras perpendiculares entre sí.

- **Transformación del sistema de referencia, ver Figura 11.**
- Como hemos visto las componentes del tensor de tensiones varían según el sistema de referencia en el que se expresan.
- Si el estado de tensiones es plano, las tensiones referidas al sistema x', y' variarán respecto a las correspondientes al sistema x, y . Nos interesa expresar tanto vectores de fuerza como el tensor tensión en el sistema x', y' .

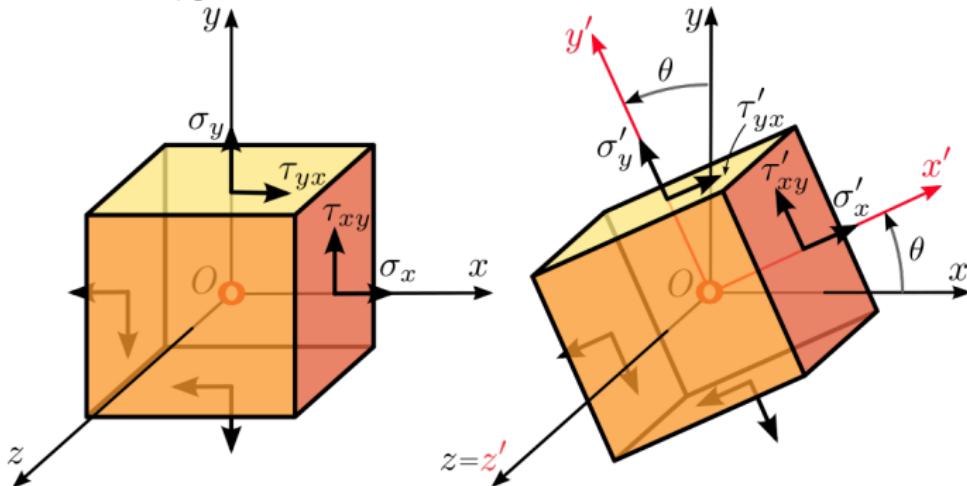


Figura 11: Transformación del sistema de referencia en tensión plana.

- Comencemos con la transformación de vectores en 2D, para ello definamos \mathbf{A} como la matriz de cosenos directores de los ejes x', y' respecto de los ejes x, y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

- Por lo tanto un vector \mathbf{t} se expresará en el sistema rotado como

$$\mathbf{t}' = \mathbf{At},$$

es decir transforma como

$$t_{x'} = t_x \cos \theta + t_y \sin \theta,$$

$$t_{y'} = -t_x \sin \theta + t_y \cos \theta,$$

Ejercicio 3.2: Mostrar que las componentes del tensor tensión σ' en el nuevo sistema de referencia x', y' se obtienen como

$$\sigma'_{ij} = a_{im} a_{jn} \sigma_{mn} \quad \text{ó} \quad \sigma' = \mathbf{A} \sigma \mathbf{A}^T,$$

donde \mathbf{A} es una matriz de rotación (ortogonal).

3.3 Círculo de Mohr en tensión plana

- Las transformaciones del tensor de tensión parecen abstractas al principio, por lo que es preciso una herramienta para ayudar a visualizarlas. Pues resulta que las ecuaciones de transformación tienen una famosa interpretación gráfica (“**entre ingenieros**”) conocida como el *círculo de Mohr*¹.
- El círculo de Mohr es simplemente una herramienta matemática o procedimiento sistematizado para visualizar cómo cambian las tensiones (y otros tensores de segundo rango) cuando se giran los ejes.
- El procedimiento de Mohr emplea las relaciones trigonométricas de ángulo doble para mostrar que las ecuaciones de tensión vistas previamente tienen una representación circular.

¹Presentado en 1900 por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835–1918).

- Las expresiones del tensor tensión obtenidas previamente en un sistema rotado un ángulo θ se expresan como

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\quad (3.2)$$

- Mohr empleó las relaciones trigonométricas de ángulo doble

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta, \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \\ 1 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Es decir $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ y $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$.

Ejercicio 3.3: Empleando las expresiones anteriores obtenga la representación circular de las ecuaciones de tensión formulada por Otto Mohr en 1900,

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta, \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (3.3)$$

- En el círculo de Mohr, un esfuerzo cortante que actúa en sentido horario es positivo y en sentido antihorario negativo.
- Los esfuerzos cortantes en las caras x e y deben tener signos opuestos.
- Las tensiones normales son positivas en tensión y negativas en compresión, como de costumbre.

- Para construir el círculo de Mohr, procedemos de la siguiente manera dados los componentes de tensión $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$:

- (1) Construya un gráfico con τ como ordenada (eje y) y σ como abscisa, y trace los esfuerzos en las caras x e y del cuadrado de tensiones como dos puntos en este gráfico. Usando la convención de signos para los componentes de tensión que acabamos de dar, ubicamos el punto $\mathbf{x} = (\sigma_x, -\tau_{xy})$ y $\mathbf{y} = (\sigma_y, \tau_{xy})$.
- (2) Una los puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} con una línea recta que intersecta el eje σ en el punto C , que será el centro del círculo de Mohr. La abscisa del centro es

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (3.4)$$

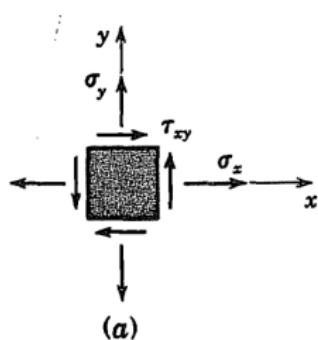
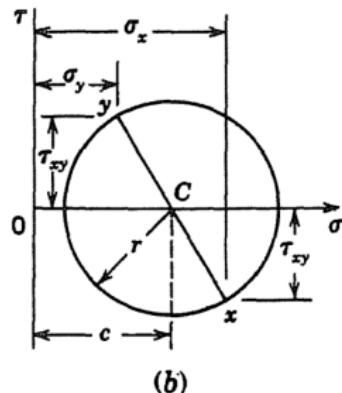


Figura 12: Los componentes de tensión en (a) se utilizan para construir el círculo de Mohr (b).

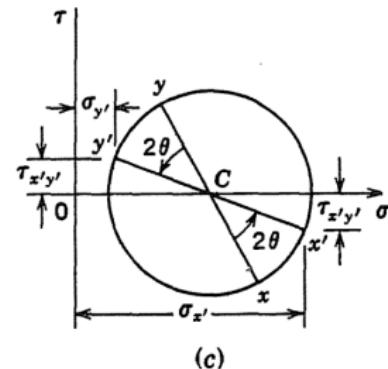
• (cont.)

- (3) Con C como centro y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ como diámetro dibujamos el círculo, cuyo radio es

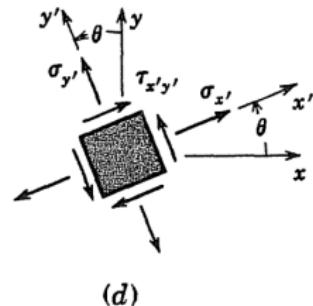
$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.5)$$

Una vez que se ha construido el círculo, se puede usar para determinar los componentes de tensión $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ que se muestran en la Figura 13.

Estos componentes de tensión se aplican al mismo punto físico O en el cuerpo pero son con respecto a los ejes $x'y'$ que forman un ángulo θ con los ejes xy originales.



(c)



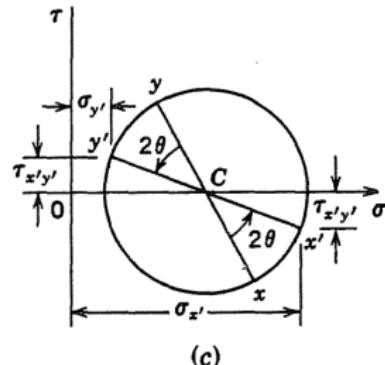
(d)

Figura 13: La rotación del diámetro mediante un ángulo doble en (c) proporciona componentes de tensión para el elemento inclinado (d).

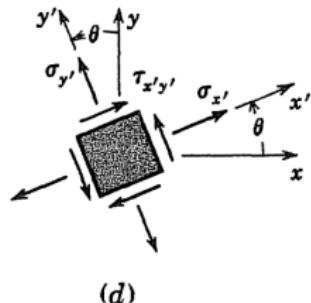
- (cont.)

- (4) Localizamos el diámetro $x'y'$ con respecto al diámetro xy en el círculo de Mohr empleando el ángulo 2θ en la figura, girando en el mismo sentido que la rotación θ que lleva los ejes xy a los ejes $x'y'$ del cuadrado de tensiones en la Figura 13(d).

- (5) Usando la convención de signos para componentes de tensión en el círculo de Mohr, leemos los valores de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ como las coordenadas del punto x' y los valores de $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ como las coordenadas del punto y' .



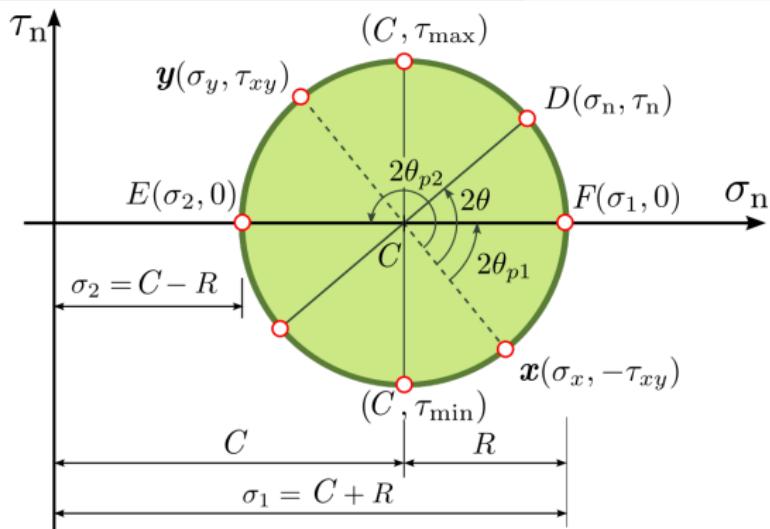
(c)



(d)

Figura 13 (cont).

- El círculo de Mohr proporciona una descripción gráfica del estado de tensión plana en un punto.
- Cada posible combinación de componente de tensión $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ está representada por un diámetro del círculo.
- Una combinación particularmente importante es la representada por el diámetro que está alineado con el eje horizontal de tensión normal σ .
- Hay tensiones normales σ_1 y σ_2 , tensiones principales, pero no hay un componente de esfuerzo cortante. Además, σ_1 es el componente de tensión normal máximo posible, y σ_2 es el componente de tensión normal mínimo posible en el punto del cuerpo bajo estudio.
- Otra combinación de componentes de tensión que es de especial interés es la representada por el diámetro vertical del círculo de Mohr. Aquí las tensiones normales son iguales, y la magnitud del esfuerzo cortante es la máxima posible en esta ubicación, τ_{max} .
- Los ejes se denominan ejes de corte máximo. Se dice que las caras de elementos correspondientes, perpendiculares a estos ejes, definen los planos de corte máximo en esta ubicación en el cuerpo.
- Los ejes de corte máximo están inclinados a 45° con respecto a los ejes principales.
- En la Figura 14 se resumen estos puntos... (cont.)



$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

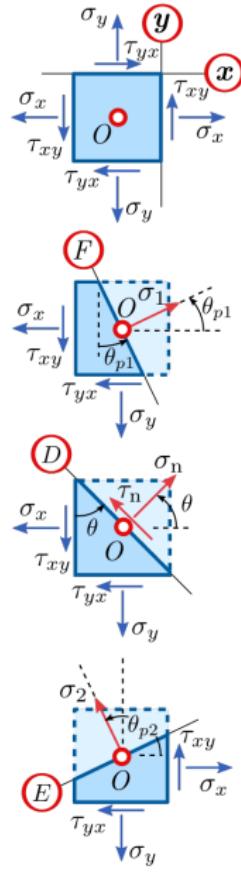


Figura 14: Círculo de Mohr para condiciones de tensión plana y deformación plana.

• **Ejemplo 3.7:** Consideremos una hoja delgada estirada en su propio plano de modo que los componentes de la tensión con respecto a los ejes xy sean los que se muestran en la Figura 15(a).

- Deseamos encontrar los componentes de la tensión con respecto a los ejes ab que están inclinados a 45° con respecto a los ejes xy .
- Usando los pasos anteriores, trazamos los puntos x e y y construimos el círculo de Mohr, como se muestra en la Figura 15(b).
- El diámetro ab se encuentra a $2 \cdot (45^\circ) = 90^\circ$ del diámetro xy .
- En la Figura 15(c) se muestran los componentes de tensión actuando en sus direcciones correctas en las caras del elemento inclinado.

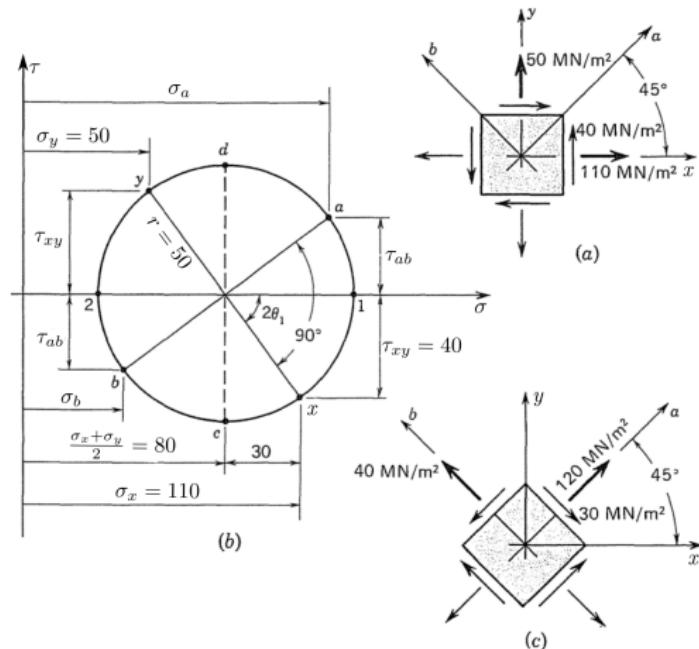


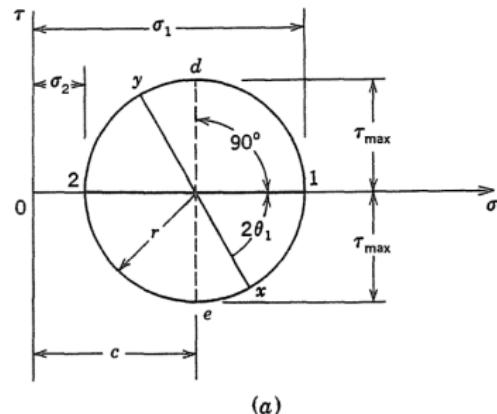
Figura 15: Diagrama de Mohr para un estado de tensión 2D.

● **Ejemplo 3.7 (cont.):** Figura 16.

- En términos de la abscisa c del centro del círculo, y el radio r , tenemos

$$\sigma_d = \sigma_e = c, \quad \tau_{\max} = r.$$

- Los ejes se denominan ejes de cortante máxima.
- Se dice que las caras de los elementos correspondientes, perpendiculares a estos ejes, definen los planos de cortante máximo en esta ubicación del cuerpo.
- Note que los ejes de máxima cortante están inclinados a 45° con respecto a los ejes principales.



(a)

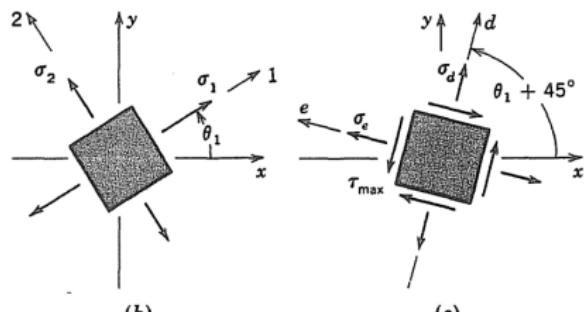


Figura 16: Ejemplo 3.7.

Figura 16: (a) Esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y esfuerzo cortante máximo τ_{\max} indicado en el círculo de Mohr. (b) Elemento orientado a lo largo de ejes principales. (c) Elemento orientado a lo largo de ejes de máxima cortante.

3.4 Círculo de Mohr de un estado de tensión 3D

- Para construir el círculo de Mohr para un caso general 3D de tensiones en un punto, se deben evaluar los valores de las tensiones principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) y sus direcciones principales (n_1, n_2, n_3), siendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.
- Expresiones para los círculos de Mohr:

$$\tau_n^2 + [\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)]^2 \geq (\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3))^2,$$

$$\tau_n^2 + [\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)]^2 \leq (\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3))^2,$$

$$\tau_n^2 + [\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)]^2 \geq (\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2))^2.$$
- Estas ecuaciones para los círculos de Mohr muestran que todos los puntos de tensión admisibles (σ_n, τ_n) se encuentran sobre estos círculos o dentro del área sombreada encerrada por ellos (ver Figura 17).
- Mientras que los radios de los círculos de tensión C_i están dados como
 $R_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$, $R_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, y
 $R_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, ver Figura 17.

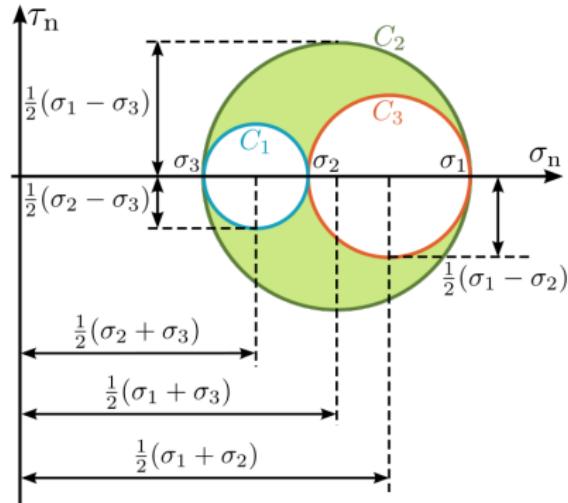


Figura 17: Círculos fundamentales de Mohr para representar un estado de tensión tridimensional en un punto.

- Los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos que pasan por un punto son susceptibles de una representación gráfica plana por medio de sus componentes intrínsecas.

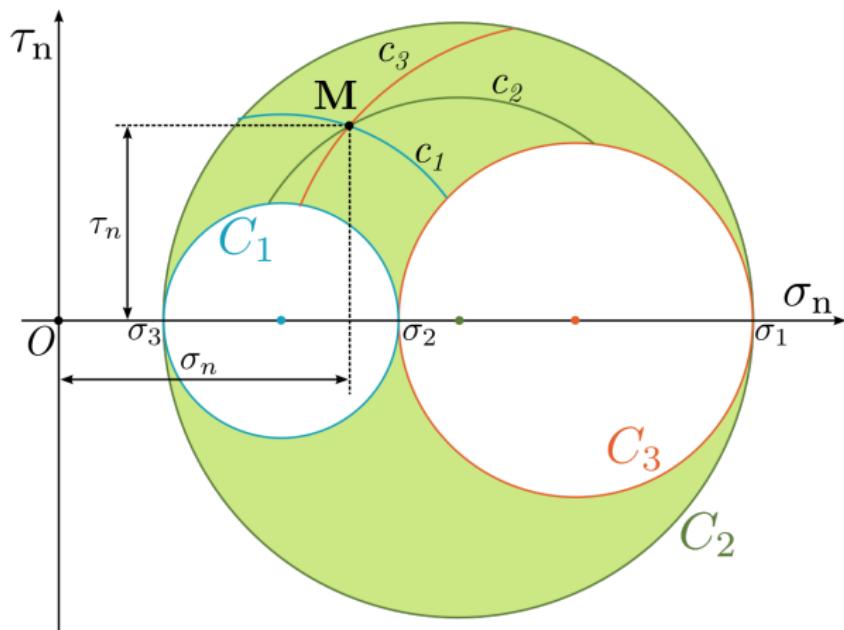


Figura 18: Círculos fundamentales de Mohr, $C_i (i = 1, 2, 3)$. En esta gráfica el punto M indica el estado de tensiones en 3D para una determinada orientación, de las infinitas que se pueden considerar, pertenece al área sombreada. Se supone $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

- Sea un punto en un sólido elástico. Tomaremos un triedro de referencia con origen en dicho punto y ejes coincidentes con las direcciones principales, tal que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.
- Como hemos visto el vector tensión sobre un plano definido por el vector $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ referida a las direcciones principales de esfuerzo es

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \sigma_1 n_1 \mathbf{i} + \sigma_2 n_2 \mathbf{j} + \sigma_3 n_3 \mathbf{k}.$$

- De esta expresión se deduce

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \|\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}\|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2,$$

y según sabemos

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 n_1^2 & + & \sigma_2 n_2^2 & + & \sigma_3 n_3^2 & = & \sigma_n^2, \\ n_1^2 & + & n_2^2 & + & n_3^2 & = & 1. \end{array}$$

- Este sistema de 3 ecuaciones nos permite estudiar la variación de las componentes normal y tangencial del vector tensión.

- En efecto, si hacemos $n_1 = \text{constante}$, lo que equivale a hacer variar la normal \mathbf{n} según generatrices de conos de revolución de eje axial x podemos eliminar n_2 y n_3 en el sistema de ecuaciones anterior.
- Por lo tanto, aplicando la condición de compatibilidad según el teorema de Rouché-Frobenius

$$\begin{vmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_1^2 n_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n - \sigma_1 n_1^2 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 - n_1^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Desarrollando el determinante, reagrupando y simplificando se obtiene

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - R_1^2 = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2),$$

en donde el miembro izquierdo representa la diferencia de cuadrados de la distancia de M al centro de C_1 y de su radio R_1 . Es decir, la *potencia de M respecto a C_1* , la cual designaremos como P_1 .

- Como hemos supuesto $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$P_1 = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2) > 0,$$

siendo M exterior a C_1 .

- De forma análoga se obtiene que

$$P_2 = -n_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0,$$

la potencia de M respecto de C_2 es negativa y, por tanto, M es interior a C_2 .

- Finalmente, de la misma forma

$$P_3 = n_3^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) > 0,$$

la potencia de M respecto de C_3 es positiva, lo que indica que M es exterior a C_3 .

- Por lo tanto, hemos demostrado que el punto M tiene que pertenecer al área sombreada de la Figura 18.

- Fijado un punto M que pertenece al área sombreada es posible determinar empleando el diagrama de Mohr los parámetros que definen la orientación del plano π correspondiente a la normal \mathbf{n} .

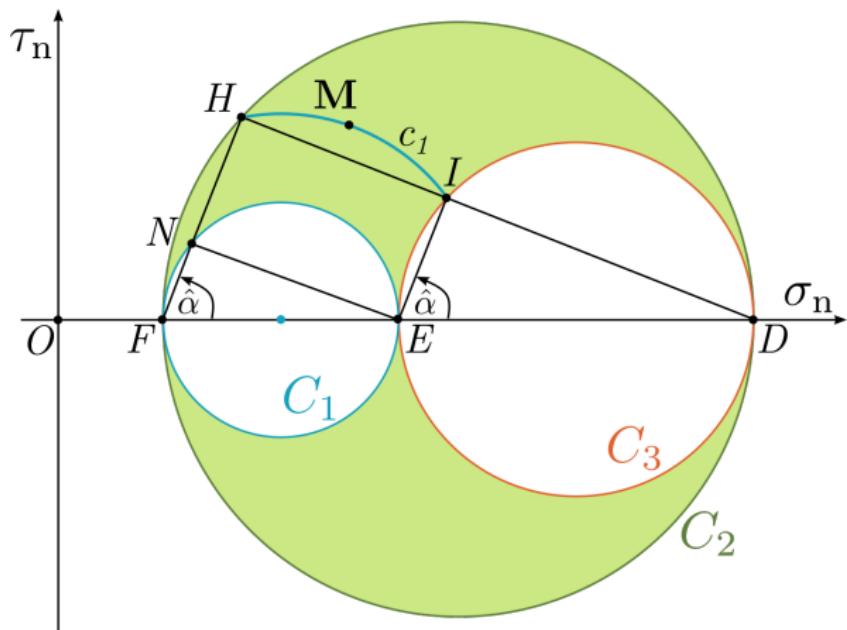


Figura 19: El punto H representa la intersección de la circunferencia c_1 que pasa por M con C_2 , pertenece a una circunferencia concéntrica con C_1 . Es posible mostrar que $\hat{\alpha}$ es el ángulo que forma \mathbf{n} con σ_1 .

- Consideremos el punto H de intersección de la circunferencia C_1 que pasa por M con C_2 , ver Figura 19.
- El punto H tiene la misma potencia que M respecto a C_1 , por pertenecer ambos a una circunferencia concéntrica a C_1 .
- Recordamos que la potencia de M respecto a C_1 tiene por expresión

$$P_1 = n_1^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2).$$

- Por otra parte, podemos expresar esta potencia en la forma siguiente

$$P_1 = \overline{HN} \cdot \overline{HF} = \overline{IE} \cdot \overline{HF},$$

es decir

$$P_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \hat{\alpha} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \hat{\alpha},$$

donde α es el ángulo indicado en la Figura 19.

- Comparando las expresiones anteriores para P_1 se deduce que

$$\cos \hat{\alpha} = \pm n_1,$$

es decir, $\hat{\alpha}$ es el ángulo que forma la dirección principal correspondiente a la tensión σ_1 la normal \mathbf{n} al plano π , cuya tensión viene representada por el punto M en el diagrama de Mohr 3D.

- Fijado un punto M que pertenece al área sombreada es posible determinar empleando el diagrama de Mohr los parámetros que definen la orientación del plano π correspondiente a la normal \mathbf{n} .

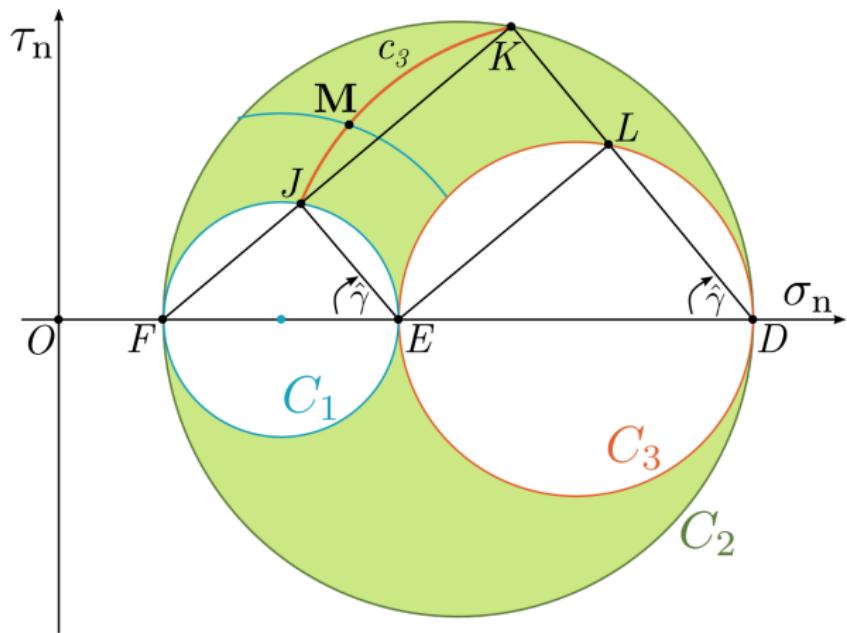


Figura 20: El punto K representa la intersección de la circunferencia c_3 que pasa por M con C_2 , pertenece a una circunferencia concéntrica con C_3 . Es posible mostrar que $\hat{\gamma}$ es el ángulo que forma \mathbf{n} con σ_3 .

- **Ejemplo 3.8:** En un punto P de un sólido elástico se tiene un estado plano de tensiones, del que se conocen las tensiones principales,

$$\sigma_1 = 300 \text{ kgf/cm}^2, \quad \sigma_2 = 100 \text{ kgf/cm}^2.$$

- Estimar gráficamente el valor de la tensión tangencial máxima y mínima que aparece:
 - En planos en los que el vector tensión forma un ángulo de 80° con la normal.
 - En planos cuya normal forma 80° con la dirección principal correspondiente a la tensión σ_1 .
 - En planos en los que $\|T^{(n)}\| = 200 \text{ kgf/cm}^2$.
 - En planos en los que $\sigma_n = 200 \text{ kgf/cm}^2$.

- Ejemplo 3.8 (cont.):

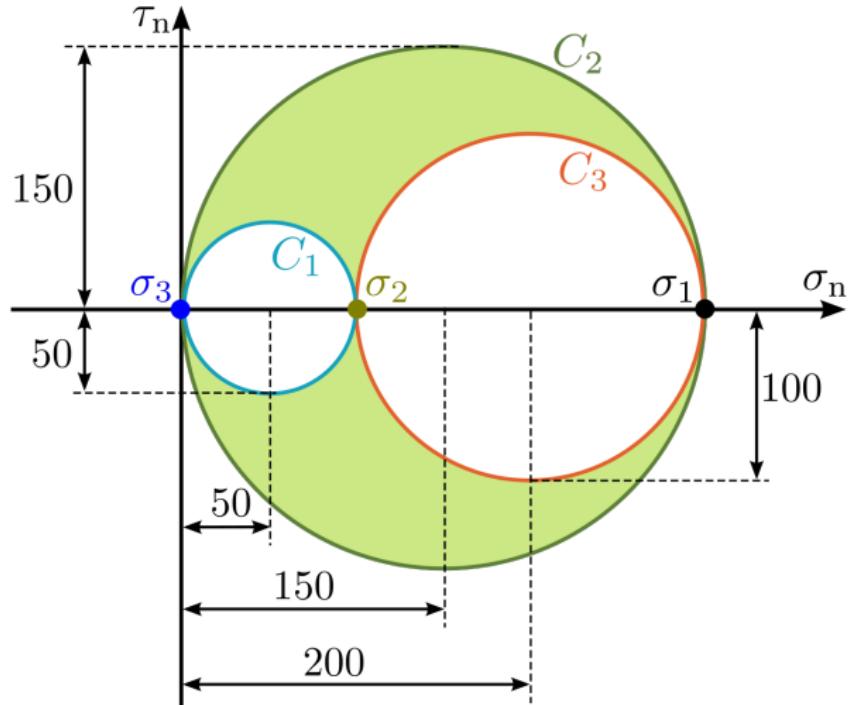


Figura 21: Círculos de Mohr, empleado para representar un estado de tensión plana en 3D en un punto.

- **Ejemplo 3.8 (cont.)**: ver detalles de ítems a), b) en Figura 22.

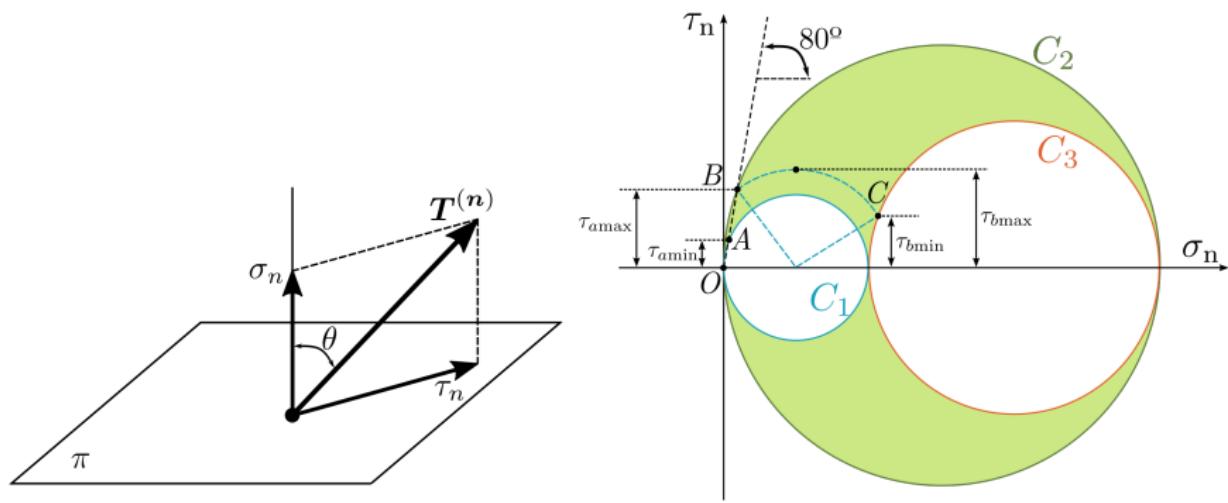


Figura 22: (izq.) El vector tensión forma un ángulo θ con el plano π . (der.) Círculos de Mohr. La semirecta \overline{AB} forma un ángulo de $\theta = 80^\circ$ con el eje σ_n , es decir, el vector tensión de cualquier plano que corresponda al segmento \overline{AB} forma un ángulo de 80° con su normal.

- **Ejemplo 3.8 (cont.)**: ver detalles de ítems c), d) en Figura 23.

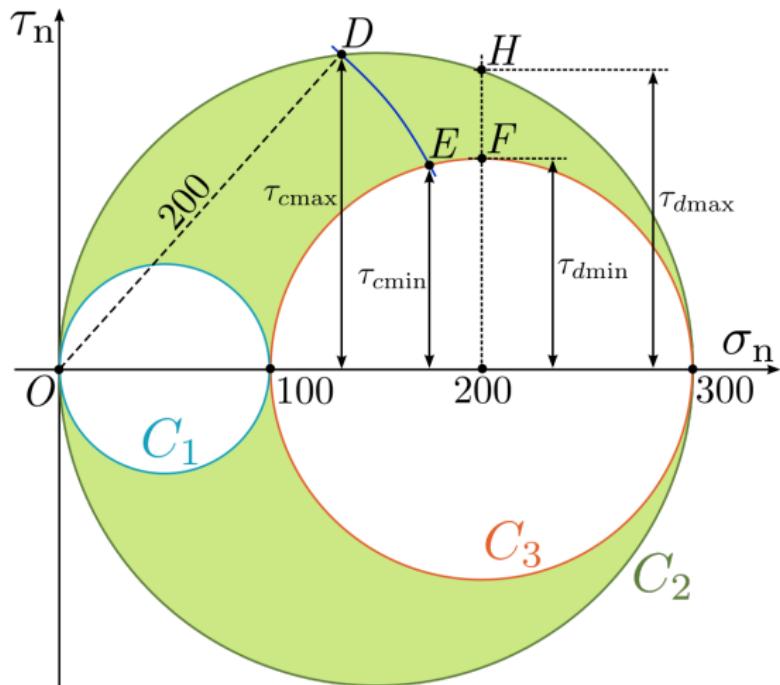


Figura 23: Los puntos correspondientes a los planos cuyo vector tensión tiene módulo 200 kgf/cm^2 son los del arco \widehat{DE} , tales que $\overline{OD} = \overline{OE} = 200$. Por otra parte, los puntos correspondientes a los planos en que $\sigma_n = 200 \text{ kgf/cm}^2$ son los del segmento \overline{FH} .

Bibliografía

-  Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units.
McGraw-Hill, New York, US, 1999.
-  Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).
Resistencia de Materiales. CIMNE, Barcelona, España, 2015.

Fin

