

Mecánica de los Sólidos – Unidad 4C

Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

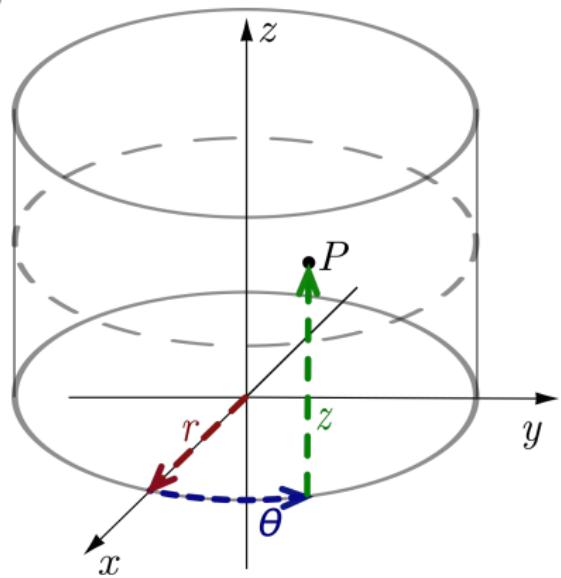
San Rafael–Argentina, septiembre de 2021



- 5 5. Estados planos en coordenadas polares
 - 5.1 Distribuciones de tensión axisimétricas
 - 5.2 Cilindro de pared gruesa sometido a presión uniforme
 - 5.3 Pequeños agujeros circulares en placas tensionadas
 - 5.4 Tensiones en discos y cilindros rotantes
 - 5.5 Discos rotantes de espesor variable

5. Estados planos en coordenadas polares

- Al discutir problemas con límites circulares, es más conveniente usar las coordenadas cilíndricas r, θ, z .
- En el caso de problemas de tensión plana o deformación plana, tenemos $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$ y los otros componentes de tensión como funciones de r y θ únicamente.



- Por ende, en este caso, las *coordenadas cilíndricas* se reducen a las *coordenadas polares*.
- Entonces, se tiene, de una descripción cartesiana a polar:

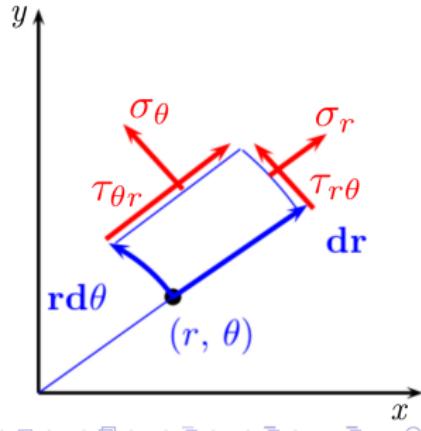
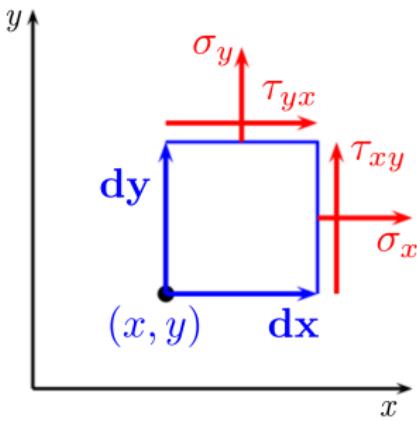
$$x, y \rightarrow r, \theta$$

$$u, v \rightarrow u, v$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \rightarrow \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rightarrow \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$$

- Detalle de las componentes de tensión en un elemento de área en coordenadas cartesianas y polares.



- *Operador biarmónico en coordenadas polares*
- En coordenadas cartesianas: $\phi = \phi(x, y)$.

$$\begin{aligned}\nabla^4 \phi &= \nabla^2 \nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ &= \phi_{,xxxx} + 2\phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy}\end{aligned}$$

- Buscamos expresar ϕ como una función de r, θ , es decir $\phi = \phi(r, \theta)$ y su correspondiente $\nabla^4 \phi(r, \theta)$ tras una transformación a coordenadas polares:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right),$$

por lo tanto, las derivadas parciales $(\cdot)_{,x}$ y $(\cdot)_{,y}$ se expresan como

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

- **Ejemplo 5.1:** Encontrar las expresiones de $\phi_{,xx}$ y $\phi_{,yy}$ expresadas en coordenadas polares. Probar que:
 - El Laplaciano puede entonces escribirse como:

$$\nabla^2 \phi = \phi_{,xx} + \phi_{,yy} = \phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} \quad (5.1)$$

- Esto nos permite escribir el operador biarmónico como:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= \nabla^2(\nabla^2 \phi) \\ &= \left[(\phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta}) \right] \left[\phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

- En general, no es necesario ampliar la expresión (5.2).
- Notar que

$$\phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} = \frac{1}{r}(r\phi_{,r}),_r,$$

expresión que será útil en problemas en los cuales $\phi = \phi(r)$.

- *Expresiones para las componentes polares de tensión: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$.*

- Éstas se pueden obtener observando que cualquier punto puede considerarse como el origen del eje x , de modo que:

$$\sigma_r = \sigma_x \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \rightarrow \boxed{\sigma_r = \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta}} \quad (5.3)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_y \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \rightarrow \boxed{\sigma_\theta = \phi_{,rr}} \quad (5.4)$$

- Para obtener $\tau_{r\theta} = \tau_{xy} \Big|_{\theta=0} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{\theta=0}$, necesitamos evaluar $\phi_{,xy}$ en coordenadas polares:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right],$$

- Entonces

$$\boxed{\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{,r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)} \quad (5.5)$$

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio en coordenadas polares en ausencia de fuerzas volumétricas, están dadas como:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta,\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta} + \tau_{r\theta,r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0.\end{aligned}\quad (5.6)$$

- Las relaciones deformación-desplazamiento en coordenadas polares

$$\varepsilon_r = u_{,r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}v_{,\theta} \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{v}{r}. \quad (5.7)$$

- Consideremos ahora el caso de tensión plana. Las relaciones tensión-deformación en coordenadas polares son

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

5.1 Distribuciones de tensión axisimétricas

- Ahora consideramos los problemas de simetría con respecto al eje z .
- En este caso, no puede haber ninguna dependencia de las variables del campo de tensiones en θ y todas las derivadas con respecto a θ deberían desaparecer.
- Además, $\tau_{r\theta} = 0$ por simetría. Es decir, debido a la independencia en θ , $\tau_{r\theta}$ solo podría ser constante, pero eso violaría el equilibrio.
- Entonces, la segunda ecuación de equilibrio de (5.6) es idénticamente 0.
- Mientras, la primera ecuación de (5.6) se convierte en (se ignoran fuerzas volumétricas):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (5.9)$$

- **Ejemplo 5.2:** Muestre que la ecuación biarmónica (5.2) en el caso axisimétrico está dada por

$$\boxed{\phi^{IV} + \frac{2}{r}\phi''' - \frac{1}{r^2}\phi'' + \frac{1}{r^3}\phi' = 0} \quad (5.10)$$

$$\left[(),_{rr} + \frac{1}{r}(),_r + \frac{1}{r^2}(),_{\theta\theta}\right] \left[\phi,_{rr} + \frac{1}{r}\phi,_{r} + \frac{1}{r^2}\phi,_{\theta\theta}\right] = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right) = 0$$

$$\phi^{IV} + \left(-\frac{1}{r^2}\phi' + \frac{1}{r}\phi''\right)' + \frac{1}{r}\phi''' + \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\phi' + \frac{1}{r}\phi''\right) = 0$$

$$\phi^{IV} + \frac{2}{r^3}\phi' - \frac{1}{r^2}\phi'' - \frac{1}{r^2}\phi'' + \frac{1}{r}\phi''' + \frac{1}{r}\phi''' - \frac{1}{r^3}\phi' + \frac{1}{r^2}\phi'' = 0$$

– Es decir

$$\phi^{IV} + \frac{2}{r}\phi''' - \frac{1}{r^2}\phi'' + \frac{1}{r^3}\phi' = 0$$

- Observamos que hemos obtenido una única ecuación diferencial ordinaria para $\phi(r)$ con coeficientes variables.
- La solución general de (5.10) puede obtenerse reduciendo primero la ecuación a una con coeficientes constantes haciendo la sustitución

$$r = e^t, \quad r'(t) = e^t,$$

por lo que se tiene

$$t = \log r, \quad t'(r) = \frac{1}{r} = e^{-t}.$$

- Por lo tanto se tienen las siguientes relaciones $((\phi')'(r) = (\phi')(t) e^{-t})$

$$\phi'(r) = \phi'(t) \quad t'(r) = \phi'(t) e^{-t},$$

$$\phi''(r) = (\phi'(t)e^{-t})' e^{-t} = e^{-2t} (-\phi'(t) + \phi''(t))$$

$$\phi'''(r) = e^{-3t} (2\phi'(t) - 3\phi''(t) + \phi'''(t))$$

$$\phi^{IV}(r) = e^{-4t} (-6\phi'(t) + 11\phi''(t) - 6\phi'''(t) + \phi^{IV}(t))$$

- Ahora, multiplique la Ec. (5.10) por r^4

$$r^4 \phi^{IV} + 2r^3 \phi''' - r^2 \phi'' + r\phi = 0, \quad (5.11)$$

reemplace los resultados previos de $\phi'(r)$, $\phi''(r)$, $\phi'''(r)$ y $\phi^{IV}(r)$

$$\phi^{IV}(t) - 4\phi'''(t) + 4\phi''(t) = 0$$

(5.12)

- Para resolver la expresión anterior, asuma

$$\phi = e^{st}, \quad \phi' = se^{st} = s\phi, \quad \phi'' = s^2\phi, \quad \phi''' = s^3\phi, \quad \phi^{IV} = s^4\phi.$$

- Entonces

$$(s^4 - 4s^3 + 4s^2)e^{st} = 0 \iff s^2(s^2 - 4s + 4) = 0.$$

- Las raíces de la expresión anterior están dadas por

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 2.$$

- **Ejemplo 5.3:** Obtenga la función de tensiones de Airy resolviendo la ecuación biarmónica en el caso axisimétrico para un caso general.
- Primero, usamos el resultado anterior, tal que ϕ viene dado por

$$\phi(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}$$

- Reemplazamos $t = \log r$

$$\boxed{\phi(r) = C_1 + C_2 \log r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \log r} \quad (5.13)$$

- Por lo tanto, las tensiones se derivan como:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \phi_{,r}, \quad \sigma_\theta = \phi_{,rr}.$$

Es decir

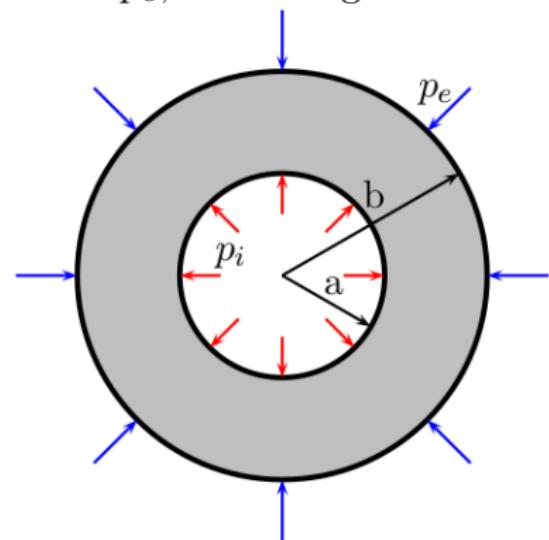
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \log r + 1), \\ \sigma_\theta &= -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \log r + 3). \end{aligned} \quad (5.14)$$

- Éste constituye el campo de tensiones más general para los problemas axisimétricos.

- Ahora consideraremos ejemplos de aplicación de esta solución general a problemas específicos.
- Esto implica aplicar las condiciones de contorno particulares del caso considerado en términos de cargas de contorno aplicadas en ubicaciones específicas (radios), incluidos los límites libres de carga.

5.1 Cilindro de pared gruesa sometido a presión uniforme

- Consideré el caso de un cilindro de radio interno a y radio externo b sujeto a presión interna p_i como externa p_e , vea la Figura.



- Las condiciones de contorno para este caso están dadas por

$$\sigma_r(r = a) = -p_i,$$

$$\sigma_r(r = b) = -p_e.$$

- La solución de este problema se debe a Lamè, “Leçons sur la théorie de l’élasticité”, Paris, 1852.

- **Ejemplo 5.4:** Obtenga la distribución de los esfuerzos radiales y circulares aplicando las condiciones de contorno para particularizar la solución general en la Ec. (5.14) a este problema.
- Consideramos un estado plano de tensiones, tal que

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= u_{,r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r).\end{aligned}\tag{a}$$

- Empleando la solución general para σ_r y σ_θ , Ec. (5.14), en (a)
- $E \frac{du}{dr} = +\frac{C_2}{r^2}(1 + \nu) + 2C_3(1 - \nu) + 2C_4(1 - \nu) \ln r + C_4(1 - 3\nu)$,
 $E \frac{u}{r} = -\frac{C_2}{r^2}(1 + \nu) + 2C_3(1 - \nu) + 2C_4(1 - \nu) \ln r + C_4(3 - \nu)$.
- Integraremos la primer expresión de (b) y dividimos por r

$$\frac{E}{r} \int du = -\frac{C_2}{r^2}(1 + \nu) + 2C_3(1 - \nu) + 2C_4(1 - \nu) \ln r - C_4(1 + \nu)\tag{c}$$

- Dado que la segunda igualdad en (b) debe ser idéntica a (c)

$$C_4(3 - \nu) = -C_4(1 + \nu), \quad \Rightarrow C_4 = 0.$$

- **Ejemplo 5.4 (cont):**

- Por lo cual en un estado plano de tensiones,

$$u = \frac{2(1-\nu)}{E} C_3 r - \frac{(1+\nu)}{E} \frac{C_2}{r},$$

- Luego de aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$C_2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_e - p_i), \quad \text{y} \quad C_3 = \frac{1}{2} \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}.$$

- Entonces

$$\boxed{\sigma_r(r) = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)}}$$

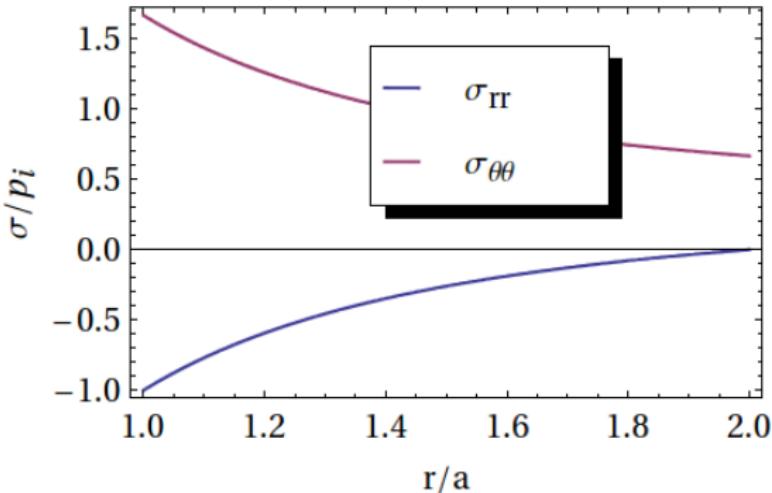
$$\boxed{\sigma_\theta(r) = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)}}$$

- **Ejemplo 5.4 (cont.):**

- La solución de las tensiones no depende de las propiedades elásticas del material.
- Las tensiones en el plano no cambian si estamos en tensión o deformación plana.
- Sin embargo, la tensión fuera del plano σ_z es, por supuesto, cero en tensión plana, mientras que en deformación plana está dada como

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} = \text{constante!!}$$

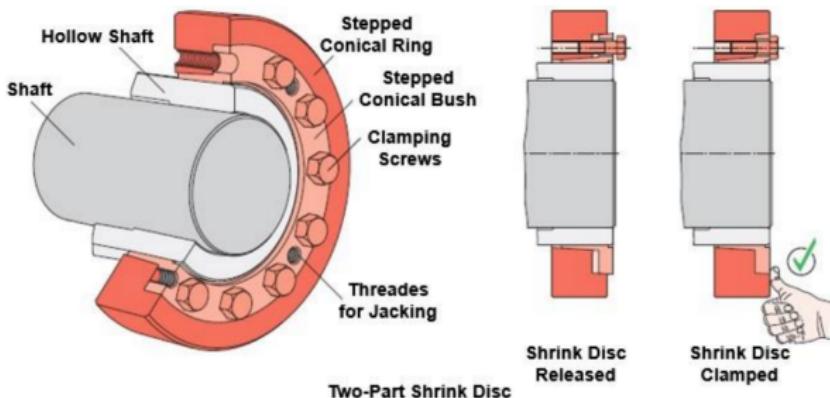
- Dibuje la solución $\sigma_r(r)$ y $\sigma_\theta(r)$ normalizada con p_i para $p_e = 0$ y $b/a = 2/1$, puede verificar su intuición sobre la distribución del campo de tensión



- Como se puede ver en la figura, las tensiones máximas ocurren en el radio interior y disminuyen hacia el límite.
- El componente radial desaparece en el límite exterior como debería, pero la tensión circular no.

- La solución del problema del cilindro presurizado se puede utilizar para estudiar las tensiones en el caso de *ajuste por contracción/shrink fit* o *ajuste por fuerza/force fit*.
- Hay muchos casos prácticos en los que es deseable forzar o contraer un miembro externo en un eje o rueda.
- El diámetro interno del miembro externo generalmente se hace un poco menor que el diámetro externo del eje o rueda.
- Si el cilindro externo se expande por calentamiento, se desliza sobre el eje o la rueda y luego se deja enfriar, obtenemos un *ajuste por contracción*. Los neumáticos de acero para locomotoras se encogen sobre las ruedas.

- Los *ajustes de fuerza* se obtienen presionando el cubo sobre el eje. En cualquier caso, una vez que las dos partes se unen, ejercen una sobre la otra una presión suficiente para evitar cualquier movimiento relativo, y a menudo es necesario encontrar la presión que implicará una determinada diferencia de diámetro o *interferencia*



Se muestra un conjunto de disco de contracción de dos partes con control de distancia. Consiste en un anillo cónico escalonado exterior, un casquillo cónico escalonado interior y una cantidad de tornillos de sujeción/bloqueo. Las superficies cónicas generan una fuerza de sujeción radial que es independiente de los coeficientes de fricción en los tornillos y superficies cónicas cuando los tornillos de sujeción se aprietan hasta que se alcanza el estado de montaje.

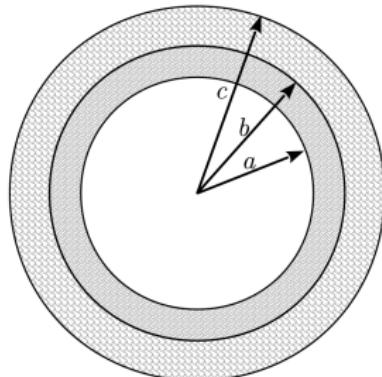
[Información adicional]

- **Ejemplo 5.5:** Suponga que dos cilindros se acoplan mediante *ajuste por contracción* o *ajuste forzado* de modo que, después del montaje, el cilindro interior tiene radios a y b y el cilindro exterior tiene radios b y c .

- Por lo tanto, el cilindro interno, después del desacoplamiento, tendrá un radio externo $b + u_1$, mientras que el cilindro externo tendrá un radio interno $b + u_2$.
- Cuando $a = 0$, esto nos da el caso de un cilindro encogido sobre un eje sólido.
- Muestre que la diferencia de diámetro correspondiente a una presión radial p , después del desenganche viene dada por

$$\delta = 2(u_1 - u_2) = \frac{4b^3(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \frac{p}{E},$$

cuando ambos cilindros están hechos del mismo material!



• **Ejemplo 5.5 (cont.):**

- Sea p la presión radial entre los dos cilindros. Si estos cilindros estuvieran desacoplados, el cilindro interno evidentemente se expandiría y el cilindro externo se contraería.
- Por el principio de superposición, el problema es equivalente a la imposición de una presión $p_e = -p$ en la superficie exterior del cilindro interior y $p_i = -p$ en la superficie interior del cilindro exterior.
- Así, si dejamos $p_i = 0$, $p_e = -p$, y $r = b$, obtenemos el aumento $u_1 = u(r = b)$ en el radio externo b del cilindro interno

$$u_1 = \frac{2(1-\nu)}{E} C_{31} b - \frac{(1+\nu)}{E} \frac{C_{21}}{b}.$$

- Luego de aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$C_{21} = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} p, \quad \text{y} \quad C_{31} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{b^2 - a^2} p.$$

- Obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b}{b^2 - a^2} p + \frac{1-\nu}{E} \frac{b^3}{b^2 - a^2} p \\ &= \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu \right) \frac{b p}{E}. \end{aligned}$$

• **Ejemplo 5.5 (cont.):**

- De manera similar, el desplazamiento radial de la superficie interna del cilindro externo se puede encontrar sustituyendo $p_i = -p$, $p_e = 0$, $r = b$ y cambiando los símbolos a y b por b y c , respectivamente.

$$u_2 = \frac{2(1-\nu)}{E} C_{32} b - \frac{(1+\nu)}{E} \frac{C_{22}}{b}.$$

- Luego de aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$C_{22} = \frac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} p, \quad \text{y} \quad C_{32} = -\frac{1}{2} \frac{b^2}{c^2 - b^2} p.$$

- Obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{bc^2}{c^2 - b^2} p - \frac{1-\nu}{E} \frac{b^3}{c^2 - b^2} p \\ &= -\left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu\right) \frac{bp}{E}. \end{aligned}$$

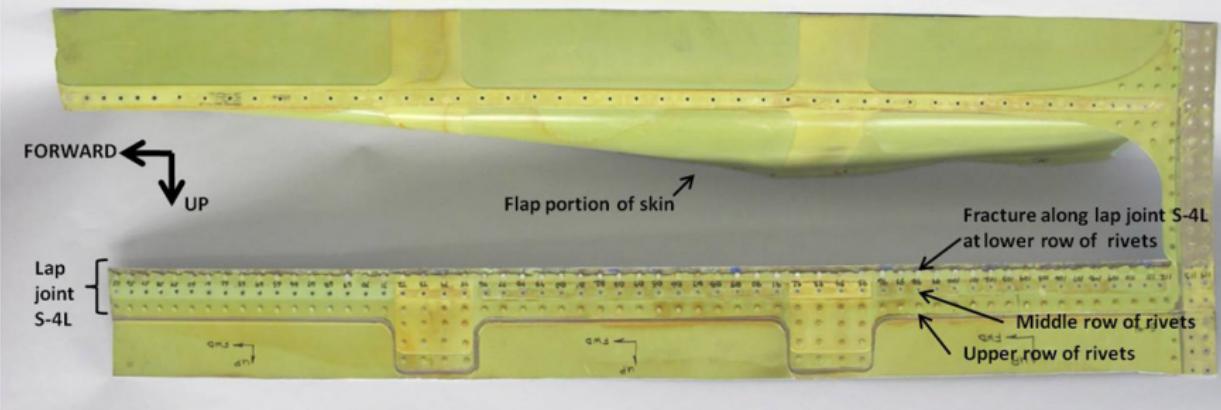
5.3 Pequeños agujeros circulares en placas tensionadas

- El 1 de abril de 2011, el vuelo 812 de Southwest Airlines (SWA812, WN812), un Boeing 737-300, sufrió una rápida despresurización a 34400 pies (10485 m) cerca de Yuma, Arizona, lo que provocó un aterrizaje de emergencia en el Aeropuerto Internacional de Yuma.

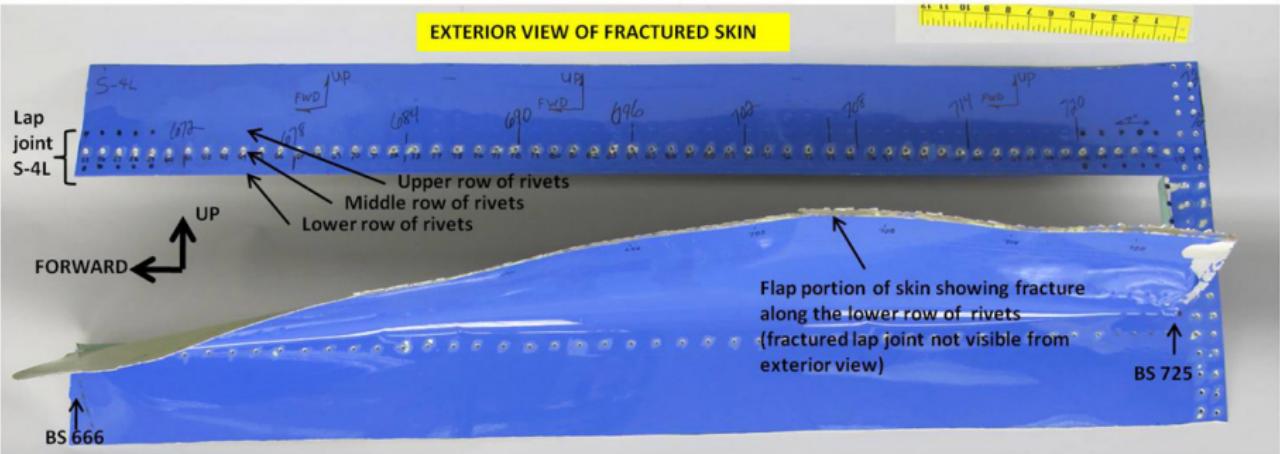


- La Junta Nacional de Transporte de EEUU informó, luego de una investigación exhaustiva, “indicios de grietas en nueve orificios de remaches en la fila inferior de remaches de la junta de solape”.

INTERIOR VIEW OF FRACTURED SKIN

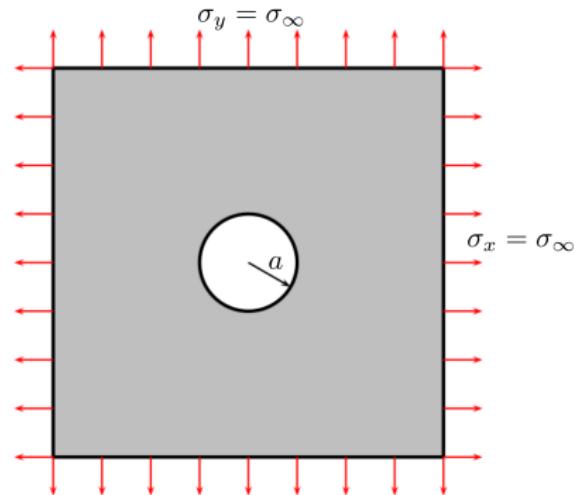


EXTERIOR VIEW OF FRACTURED SKIN



- Ahora, haremos nuestra primera incursión en el análisis de tensiones alrededor de un agujero de remache (de ninguna manera debe interpretarse que este sería un análisis relevante para el incidente mencionado).

- Como primer paso, calcularemos el *campo de tensión alrededor de un agujero libre de tensión de radio a sujeto a un estado de tensión plana hidrostático*, a una gran distancia en comparación con el radio del agujero $r \gg a$.



- Las condiciones de contorno para este caso son

$$\sigma_r(r \rightarrow \infty) = \sigma_\infty,$$

$$\sigma_r(r = a) = 0.$$

- **Ejemplo 5.6:** Obtenga la distribución de los esfuerzos radial y circular aplicando las condiciones de contorno mencionadas para particularizar la solución general de la Ec. (5.14) a este problema.
- La solución general admite tensiones finitas en $r \rightarrow \infty$, es decir $C_4 = 0$.
- Aplicando la primera condición de contorno:

$$\sigma_r(r \rightarrow \infty) = \sigma_\infty = 2C_3, \rightarrow C_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty$$

- Aplicando la segunda condición de contorno:

$$0 = \frac{C_2}{a^2} + \sigma_\infty, \rightarrow C_2 = -a^2\sigma_\infty$$

- Siendo la solución

$$\boxed{\sigma_r = \sigma_\infty \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]} \quad \text{y} \quad \boxed{\sigma_\theta = \sigma_\infty \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right].}$$

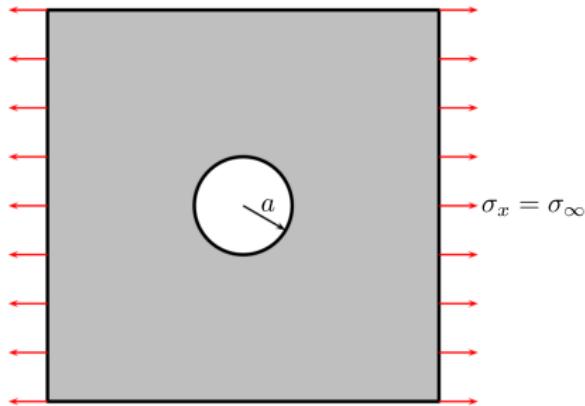
- El factor de concentración de tensión para este tipo de carga remota en el orificio, la tensión máxima circular tiene lugar en $r = a$ y su valor es:

$$\boxed{\sigma_\theta^{max} = 2\sigma_\infty}.$$

- *Placa infinita con un agujero central bajo tensión uniaxial.*

- El siguiente paso es mirar el caso de carga asimétrica, p. ej. carga uniforme remota en una dirección, digamos $\sigma_x(r \rightarrow \infty) = \sigma_\infty$.

- Considere una placa infinita con un pequeño orificio de radio a como se muestra en la Figura.
- El principal problema que tenemos es que **este caso no corresponde a la carga axisimétrica**.
- No obstante, la formulación en coordenadas polares todavía resulta ventajosa en este caso.
- El objetivo es determinar el campo de estrés alrededor del agujero.



- Las condiciones de contorno lejos del agujero en coordenadas cartesianas

$$\sigma_x(x \rightarrow \infty, y) = \sigma_\infty,$$

$$\sigma_y(x \rightarrow \infty, y) = 0,$$

$$\tau_{xy}(x \rightarrow \infty, y) = 0.$$

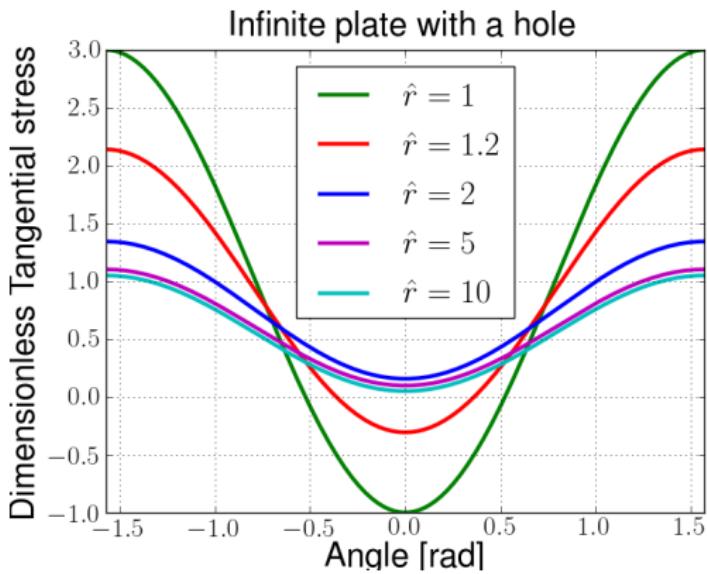
- La solución al campo de tensión completo:

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right],$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right],$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[-1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right] \sin 2\theta.$$

- Ahora dibujamos el factor de concentración de tensión de la tensión tangencial alrededor del agujero central bajo tensión uniaxial.
- La tensión circular adimensional ($\sigma_\theta/\sigma_\infty$) para varios valores de $\hat{r} = r/a$ se ilustra en la Figura siguiente.



5.4 Tensiones en discos y cilindros rotantes

- La tensión producida en un disco que gira a alta velocidad es importante en muchos casos prácticos, entre los cuales se encuentra el diseño de ruedas de disco en turbinas de vapor y gas.
- Las tensiones debidas a las fuerzas tangenciales que se transmiten suelen ser pequeñas en estos casos, y las grandes tensiones se deben a las fuerzas centrífugas del disco giratorio.
- Consideraremos primero el caso de un disco delgado con espesor constante. La fuerza del cuerpo es ahora la fuerza centrífuga,

$$F_r = \rho\omega^2 r,$$

donde ρ es la densidad de masa del material del disco y ω es la velocidad angular.

- Es evidente que la distribución de tensiones en el disco debe ser simétrica con respecto al eje de rotación.

- La ecuación de equilibrio es por lo tanto

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \longrightarrow r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0. \quad (5.15)$$

- Debido a la simetría axial, $\tau_{r\theta} = 0$ en todas partes y la ecuación de equilibrio en la dirección circunferencial queda $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$.
- Dado que la ecuación de equilibrio radial involucra dos incógnitas, el problema no puede resolverse exclusivamente a partir de consideraciones de equilibrio (estáticamente indeterminado).
- El enfoque buscado es obtener una ecuación de Navier–Cauchy¹ que implique el desplazamiento radial como el único desconocido. Para esto, tendremos que considerar el desplazamiento de tensión y las relaciones constitutivas.
- Las relaciones de deformación-desplazamiento en este caso se reducen a:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

¹ $(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0$.

- Asumiremos condiciones de tensión plana para cada disco. En este caso, la ley constitutiva se puede escribir como:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right),$$

que reemplazado en la ecuación de equilibrio da la siguiente ecuación diferencial ordinaria para el desplazamiento radial:

$$r^2 u_{,rr} + r u_{,r} - u + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3 = 0.$$

- O escribiendo esto en una forma diferente

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r.$$

- La solución general de la ecuación diferencial es

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1 - \nu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3. \quad (5.16)$$

- Las tensiones siguen como:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu} C_1 - \frac{E}{1 + \nu} \frac{C_2}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \nu} C_1 + \frac{E}{1 + \nu} \frac{C_2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2.\end{aligned} \quad (5.17)$$

- Note que las Ecs. (5.16) y (5.17) constituyen las soluciones genéricas del desplazamiento radial y de las tensiones de un disco delgado que gira a velocidad angular constante.
- Los constantes C_1 y C_2 se determinarán en función de las condiciones de contorno impuestas en cada caso particular.

- **Disco sólido de radio b sin fuerzas externas aplicadas**

- Dado que el desplazamiento en $r = 0$ no puede ir a ∞ (de hecho, esperamos que sea cero), esto implica $C_2 = 0$.
- Mientras que las tensiones en $r = b$ deberían ir a cero:

$$\sigma_r(r = b) = 0 = \frac{E}{1 - \nu} C_1 - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2,$$

por lo que

$$C_1 = \frac{(1 - \nu)(3 + \nu)}{8E} \rho \omega^2 b^2.$$

- Por lo tanto, el desplazamiento radial es dado por

$$u(r) = \frac{1-\nu}{8E} \rho \omega^2 r [(3+\nu)b^2 - (1+\nu)r^2] \quad (5.18)$$

- Las tensiones radiales y tangenciales (*hoop*) adimensionales son:

$$\frac{\sigma_r}{\rho \omega^2 b^2} = \frac{3+\nu}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right], \quad (5.19)$$

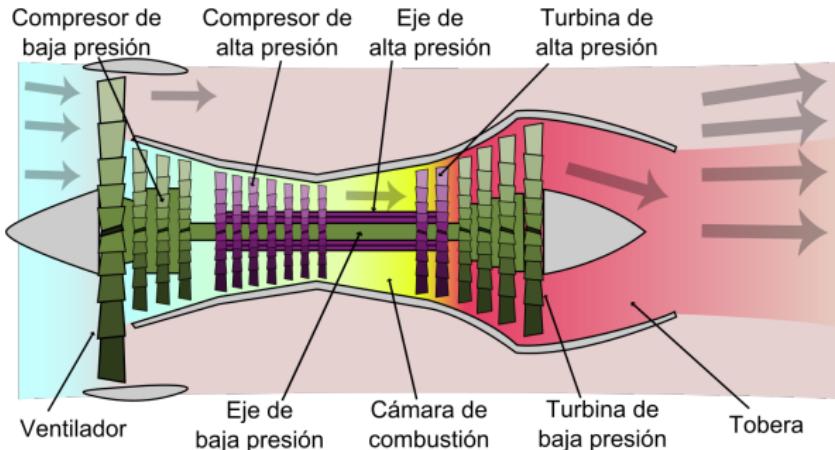
$$\frac{\sigma_\theta}{\rho \omega^2 b^2} = \frac{3+\nu}{8} \left[1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right].$$

- Observe que ambos componentes de la tensión son máximos en el centro del disco sólido, es decir para $r = 0$,

$$\sigma_r^{\max} = \sigma_\theta^{\max} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2.$$

- Motores de aviación tipo turbofan o turbofán.
- Los motores turbofán o turboventilador son una generación de motores de reacción que ha reemplazado a los turborreactores o turbojet. También se suelen llamar turborreactores de doble flujo.

<https://es.wikipedia.org/wiki/Turbofan>.



- Diagrama de funcionamiento de un *turbofan de alto índice de derivación (ID > 5)*. Sistema de baja presión en verde y sistema de alta presión en púrpura. La mayor parte del empuje, $\approx 80\%$, proviene del primer compresor o ventilador, situado en la parte delantera del motor. El restante 20% de la fuerza impulsora proviene de los gases de escape de la tobera. El Boeing 787 o el Airbus 380 tienen un $ID \approx 10$.

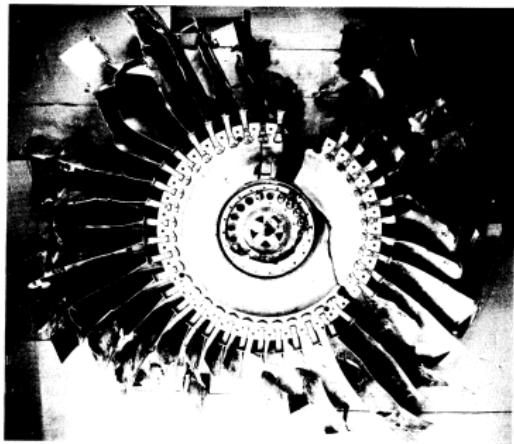
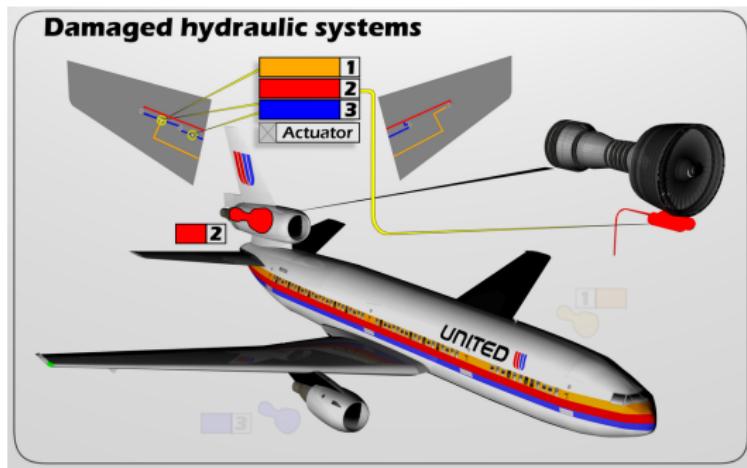
Esquema de funcionamiento de un turbofán de alto índice de derivación.

- ① Nacelle
- ② Fan
- ③ Low pressure compressor
- ④ High pressure compressor
- ⑤ Combustion chamber
- ⑥ High pressure turbine
- ⑦ Low pressure turbine
- ⑧ Core nozzle
- ⑨ Fan nozzle

- Los motores turbofan modernos constan de dos secciones básicas: baja y alta presión. Ambos constan de componentes del compresor y de la turbina.
- La sección de baja presión tiene una parte adicional que posiblemente sea la parte más importante de todas, el ventilador de derivación, que es el gran ventilador de múltiples palas, ostentosamente visible cuando se ve un motor a reacción de frente.
- El ventilador de derivación es una de las partes más críticas y un contribuyente importante a la capacidad de empuje del motor.
- Por impresionante que sea el ventilador de derivación, su componente individual más importante es bastante pequeño y rara vez, o nunca, se ve. Este es un eje de aspecto bastante modesto en el centro del conjunto de aspas del ventilador. Conocido como el **disco del ventilador**, el cual cumple varias funciones vitales en el funcionamiento general del motor.
- La primera es la de soportar las enormes aspas del ventilador. Estas aspas están sometidas a intensas tensiones mecánicas durante el funcionamiento; a menudo sujeta al impacto de objetos extraños sueltos en la pista, hielo o incluso choques con aves. El disco debe soportar las aspas del ventilador de tal manera que puedan absorber estos impactos sin romperse y destruir el motor.

- La segunda función importante del disco del ventilador es la transferencia de rotación del ventilador al compresor de baja presión y la turbina. Esto se facilita mediante un eje que pasa desde el disco del ventilador hasta la parte trasera del núcleo del motor. El compresor de baja presión está montado en este eje justo detrás del ventilador y la turbina de baja presión en la parte trasera del motor.
- Hay varios otros componentes periféricos montados en el disco, incluido el rotor o el cono de nariz. Esta es la pieza central cónica del ventilador que asegura un flujo aerodinámico de aire hacia el interior del ventilador.
- Todos estos elementos dependientes implica que una falla en el disco del ventilador constituye uno de los problemas de motor más serios que pueden encontrar los pilotos.
- *La mayoría de los discos de ventilador están hechos de piezas forjadas de aleación de titanio de una pieza especialmente perfilada para distribuir cargas y tensiones de manera uniforme* (ver Sección 5.5).

- El 19 de julio de 1989 el vuelo 232 de *United Airlines* se estrelló después de que el **disco del ventilador** en su motor de cola sufrió una falla catastrófica que dañó todos los sistemas hidráulicos, lo que llevó a la pérdida de la mayoría de los controles de vuelo /**296/111/185**/.



(left) Aircraft type: McDonnell Douglas DC-10-10. (right) Failed **fan disk** recovered from the center engine of UAL 232. A fatigue crack originating from a previously undetected metallurgical defect located in a critical area of the titanium-alloy stage-1 fan disk that was manufactured by General Electric Aircraft Engines. [wiki/UAL232](#).

- **Ejemplo 5.7:** Considere los discos del compresor en un *turbofan* de tres ejes, Rolls-Royce RB211-535E4 usado en los B-757.





- **Ejemplo 5.7 (cont.):** Rolls-Royce RB211-535E4 usado en los B-757.
- Los discos del compresor en un *turbofan* de tres ejes, tienen un diámetro $D = 0.7 \text{ m}$ y están hechos de una aleación metálica con densidad de masa $\rho = 6500 \text{ kg/m}^3$, módulo de Young $E = 500 \text{ GPa}$, relación de Poisson $\nu = 0.3$ y límite elástico $\sigma_Y = 600 \text{ MPa}$.
 - 1) Calcule la velocidad máxima de rotación de la turbina a la que el material cede plásticamente (ignore el efecto de las aspas).
 - 2) Estime el espacio libre mínimo que debe existir entre las puntas de las cuchillas y la carcaza requerido para evitar el contacto.
- De acuerdo con el criterio de von Mises, el material “fluirá” cuando la siguiente combinación de componentes de tensión o tensión efectiva σ^{eff} alcance la tensión de fluencia:

$$\sigma^{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2}$$

$$\sigma^{eff} = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \leq \sigma_Y$$

- La tensión efectiva máxima se alcanza en $r = 0$ siendo su valor, Ec. (5.19), dado por:

$$\sigma_{\max}^{eff} = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \leq \sigma_Y.$$

- **Ejemplo 5.7 (cont.):** Rolls-Royce RB211-535E4 usado en los B-757.
- De esta expresión obtenemos la máxima velocidad angular:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{8\sigma_Y}{(3+\nu)\rho b^2}}.$$

- De cara a estimar el espacio libre necesario, necesitamos calcular el desplazamiento radial en $r = b$ para ω_{\max} :

$$u_{\max}(r = b) = 2 \frac{1 - \nu}{\nu + 3} \frac{\sigma_Y}{E} b.$$

- Reemplazando los valores para este problema obtenemos:

$$\omega_{\max} = 675 \cdot s^{-1} \sim 6450 \text{ rpm}.$$

- El desplazamiento en $r = b$ es:

$$u_{\max} = 0.35 \cdot 10^{-3} m$$

alrededor de un tercio de milímetro.

- La velocidad de turbinas modernas $\approx 10000 \text{ rpm}$. Evalúe su resultado.
¿Qué estrategia consideraría emplear para resolver este problema?

Ejercicio 5.1: Considere un disco sólido de densidad ρ , rotando a velocidad angular constante ω .

- Verifique que la ecuación $r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0$, se cumple si introducimos una función de estrés ϕ tal que

$$r\sigma_r = \phi, \quad \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr} + \rho \omega^2 r^2.$$

- Además, obtenga la expresión general para ϕ dada por

$$\phi = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^3 + \frac{C_1}{2}r + \frac{C_2}{r}.$$

- Derive finalmente las expresiones σ_r y σ_θ de la función de tensión ϕ .

Surgerencia: lea con atención el Capítulo 4 del libro [Wang, 1953].

Ejercicio 5.2: Considere un disco hueco de radio interno a y externo b , la condición de que no se poseen fuerzas externas en los bordes implica que $\sigma_r = 0$ en $r = b$ y $r = a$.

- Muestre que los componentes del estrés son

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right).$$

- La tensión máxima ocurre en el borde interior y está dada por

$$\sigma_\theta^{\max} = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \frac{a^2}{b^2} \right).$$

- Verifique que si el agujero circular es muy pequeño, $(a/b)^2 \ll 1$, el valor máximo de la tensión tangencial es ahora el doble que para un disco sólido ($a = 0$). Es decir, al hacer un pequeño orificio circular en el centro de un disco giratorio, duplicaremos la tensión máxima en el disco.

- **Ejemplo 5.8:** Un disco delgado de radio externo b se contrae sobre un eje incompresible de radio a , de modo que la presión normal entre el eje y el disco es p .

- Demuestre que la velocidad angular ω que hará que el disco se suelte del eje está dada por

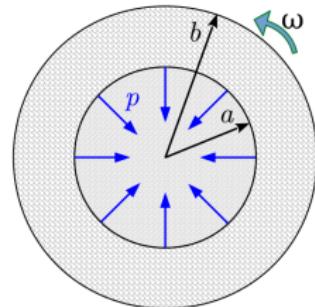
$$\omega^2 = \frac{4p}{\rho(b^2 - a^2)} \frac{(1 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2}{(3 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2}.$$

- En este caso se posee una carga externa dada por la presión p entre el eje y el disco, por lo tanto se deben determinar las constantes C_1 y C_2 de las Ecs. (5.17) aplicando las condiciones de contorno

$$\sigma_r(r = a) = p, \quad \sigma_r(r = b) = 0. \quad (\text{a})$$

- Además, se tiene que la condición para que el disco de suelte del eje implica $u(r = a) = 0$, por lo tanto empleando la relación entre deformación-desplazamiento (5.7) y la ley de Hooke Ec. (5.8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta(r = a) &= \frac{u(r = a)}{a} = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \\ \sigma_\theta(r = a) &= \nu\sigma_r(r = a). \end{aligned} \quad (\text{b})$$



- **Ejemplo 5.8 (cont.):** ahora procedemos a determinar C_1 y C_2 de (a) y obtener la relación requerida para ω^2 de (b)
- De aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1-\nu}{E} \left[-\frac{a^2}{b^2-a^2} p + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2+a^2) \right], \\ C_2 &= \frac{1+\nu}{E} \left[-\frac{a^2 b^2}{b^2-a^2} p + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

- Reemplazando (c) en las Ecs. (5.17) obtenemos la solución particular de las componentes de tensión para este problema

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p \frac{a^2}{r^2} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\theta &= -p \frac{a^2}{r^2} \frac{b^2 + r^2}{b^2 - a^2} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{d})$$

- Finalmente reemplazando las expresiones de las componentes del estrés de (d) en (b) y realizando manipulaciones algebraicas es posible obtener la expresión para ω^2 .

• Eje o cilindro circular largo que gira

- El problema se considera como uno con *deformación plana*.
- Las expresiones para ϕ , σ_r , σ_θ y u son posibles de obtener de las relaciones dadas para tensión plana mediante el cambio

$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}, \quad E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}.$$

- La ley de Hooke está dada en este caso como

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E} \left((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta \right),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E} \left((1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r \right),$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}.$$

- Por el momento supondremos que la tensión en el eje σ_z está dada de tal forma que no hay extensión longitudinal, $\varepsilon_z = 0$.

- Por lo tanto, en el caso de un eje sólido de radio b

$$\sigma_r = \frac{1}{8} \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \rho \omega^2 (b^2 - r^2),$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \rho \omega^2 \left(b^2 - \frac{1 + 2\nu}{3 - 2\nu} r^2 \right),$$

donde la tensión máxima $\sigma_r^{\text{máx}} = \sigma_\theta^{\text{máx}}$ ocurre en el centro, $r = 0$.

- Mientras que para un eje hueco de radio interno a y externo b , la condición de que no se poseen fuerzas externas en los bordes implica que $\sigma_r = 0$ en $r = b$ y $r = a$. Siendo

$$\sigma_r = \frac{1}{8} \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 2\nu}{3 - 2\nu} r^2 \right),$$

donde la tensión máxima $\sigma_\theta^{\text{máx}}$ se observa en la superficie interior.

- Nuevamente, es posible mostrar que la tensión máxima se duplica cuando un eje sólido tiene un pequeño orificio perforado en su centro.



Ejercicio 5.3: En deformación plana $\varepsilon_z = 0$, muestre que la tensión $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ en el caso de un eje sólido de radio b está dada por

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} ((3-2\nu)b^2 - 2r^2).$$

- Mientras que en un eje tubular de radio interno a y radio externo b está dada por

$$\sigma_z = \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \nu \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{2r^2}{3-2\nu} \right).$$

Ejercicio 5.4: Determine la expresión de $u(r)$ para el caso de un eje hueco de radio interno a y radio externo b que gira a velocidad angular ω constante, en ausencia de fuerzas externas.

• Deformación plana generalizada.

- A continuación, examinemos el caso en que los extremos del cilindro son libres de expandirse. En tal caso, podemos suponer que la deformación longitudinal ε_z es una constante.
- De la ley de Hooke generalizada se tiene

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\varepsilon_z, \quad (5.20)$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y \right) - \nu\varepsilon_z, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x \right) - \nu\varepsilon_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy},\end{aligned}$$

donde ε_z es una constante.

Ejercicio 5.5: Muestre que sustituyendo las expresiones de ε_x , ε_y y γ_{xy} , para un estado de deformación plana generalizada, en la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant y simplificando, nuevamente obtenemos la *ecuación biarmónica* como la ecuación diferencial de gobierno.

- Con ε_x y ε_y determinados, el valor constante de ε_z se puede encontrar a partir de la condición de que la fuerza resultante en la dirección z , que actúa sobre los extremos del cilindro, es cero,

$$\int \int \sigma_z \, dx \, dy = 0,$$

o en coordenadas polares

$$\int \int \sigma_z r \, dr \, d\theta = 0.$$

- Por lo tanto, si se permite que el eje se expanda libremente en la dirección longitudinal, entonces hay una extensión uniforme ε_z en el eje.
- La deformación longitudinal uniforme ε_z puede determinarse a partir de la condición dada anteriormente, es decir, no hay fuerza longitudinal resultante en los extremos.
- De esta forma

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \sigma_z r dr d\theta = 0,$$

donde el límite inferior a es cero en el caso de un eje sólido y es igual al radio interno para un eje tubular.

- Además, como σ_z es independiente de θ , la condición anterior se puede escribir finalmente como

$$\int_a^b \sigma_z r dr = \int_a^b \nu(\sigma_x + \sigma_y)r dr + \int_a^b E \varepsilon_z r dr.$$

- En el caso de un eje sólido ($a = 0$) se obtienen las relaciones

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\rho\omega^2}{2E}b^2,$$

$$\sigma_z = \frac{\nu\rho\omega^2}{4(1-\nu)}(b^2 - 2r^2).$$

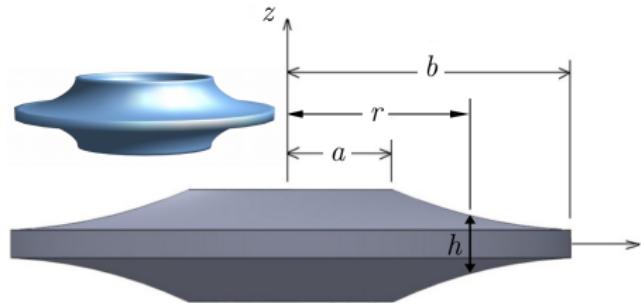
- Mientras que en el caso de un eje tubular ($0 < a < b$)

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\rho\omega^2}{2E}(a^2 + b^2),$$

$$\sigma_z = \frac{\nu\rho\omega^2}{4(1-\nu)}(a^2 + b^2 - 2r^2).$$

5.5 Discos rotantes de espesor variable

- El método de la sección anterior puede usarse para tratar el problema de un disco giratorio cuyo grosor es función de la distancia r desde el eje (ver Figura).
- Sean σ_r y σ_θ las tensiones radiales y tangenciales medias a una distancia r y $h = h(r)$ el espesor variable, la ecuación de equilibrio (5.15) se transforma para dicho elemento en



$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr}(h\sigma_r) + h \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 h r &= 0 \\ \frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + \rho \omega^2 h r^2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Lectura complementaria:

Y. Zheng *et al.*, Displacement and Stress Fields in a Functionally Graded Fiber-Reinforced Rotating Disk With Nonuniform Thickness and Variable Angular Velocity, *J. Eng. Mater. Technol.*, 139(3):031010, 2017.

- La ecuación de equilibrio se satisface mediante el empleo de la función de estrés ϕ , tal que

$$h r \sigma_r = \phi, \quad h \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr} + \rho \omega^2 h r^2.$$

- Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad se expresa como

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + \left(1 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr}\right) r \frac{d\phi}{dr} + \left(\nu \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} - 1\right) \phi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 h r^3,$$

de la cual se puede obtener ϕ en el caso de que h sea dado.

- Si el espesor del disco varía de acuerdo a la expresión $h = cr^{-\beta}$, siendo c y β constantes. En este caso, la ecuación anterior queda dada por

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + (1 + \beta) r \frac{d\phi}{dr} - (1 + \nu\beta) \phi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 c r^{3-\beta}.$$

- Mediante la sustitución $\xi = \ln r$ la ecuación anterior puede reducirse a una EDO con coeficientes constantes

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \beta \frac{d\phi}{d\xi} - (1 + \nu\beta) \phi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 c e^{(3-\beta)\xi}.$$

- La solución general de la EDO a coeficientes constantes la obtenemos ensayando una solución del tipo $\phi = Ce^{q\xi}$, siendo finalmente

$$\phi = C_1 e^{q_1 \xi} + C_2 e^{q_2 \xi} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} c \rho \omega^2 e^{(3-\beta)\xi},$$

donde q_1 y q_2 son las raíces de la ecuación $q^2 + \beta q - (1 + \nu\beta) = 0$, es decir

$$q = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1 + \nu\beta}.$$

- Sustituyendo nuevamente $\xi = \ln r$ obtenemos la función de estrés de Airy y las correspondientes componentes de tensión radial y circunferencial

$$\phi = C_1 r^{q_1} + C_2 r^{q_2} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} c \rho \omega^2 r^{3-\beta},$$

$$\sigma_r = \frac{C_1}{c} r^{q_1 + \beta - 1} + \frac{C_2}{c} r^{q_2 + \beta - 1} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2,$$

$$\sigma_\theta = \frac{C_1}{c} q_1 r^{q_1 + \beta - 1} + \frac{C_2}{c} q_2 r^{q_2 + \beta - 1} - \frac{1 + 3\nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2.$$

Ejercicio 5.6: Muestre que en el caso de un disco sólido y $\beta > 0$, se debe tener $C_2 = 0$. ¿Por qué esto debe pasar?

Ejercicio 5.7: Muestre que para el caso de un disco sólido, sin fuerzas actuando en los bordes la condición $\sigma_r = 0$ en $r = b$ implica

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2 \left[\left(\frac{r}{b} \right)^{q_1 + \beta - 3} - 1 \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2 \left[q_1 \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1 + \beta - 3} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \right].$$

Ejercicio 5.8: Muestre que si el espesor del disco sólido es uniforme, es decir $\beta = 0$, se tiene $q = 1$. Además, se obtienen expresiones de las tensiones σ_r y σ_θ idénticas a las derivadas en la sección anterior, pág. 37.

Ejercicio 5.9: Obtenga las expresiones de las tensiones σ_r y σ_θ en el caso de un disco con un orificio circular central de radio a . Las constantes de integración se pueden obtener como en los problemas anteriores, siendo las condiciones de borde $\sigma_r = 0$ tanto en $r = a$ como en $r = b$.

Ejercicio 5.10: Verifique que las expresiones obtenidas se reducen a las halladas previamente para un disco uniforme, pág. 48.

- Para concluir se considera el diseño de un disco, tal que posea un estado de “estrés uniforme”. En otras palabras, es posible determinar un espesor $h(r)$ que defina un estado de tensiones donde $\sigma_r = \sigma_\theta$ para cada punto del disco.
- Sustituyendo la condición $\sigma_r = \sigma_\theta$ en la ley de Hooke para un estado de deformaciones planas en coordenadas polares (5.8), se tiene

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta.$$

- Por lo que la ecuación de compatibilidad se expresa

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_\theta = \text{cte.}$$

- De lo que se deduce que las tensiones radial y tangencial no solo son iguales, sino que además son constantes a lo largo del disco.

- La ecuación de equilibrio (5.21), en este caso se reduce a

$$\sigma \frac{d(hr)}{dr} - \sigma h + \rho \omega^2 h r^2 = 0,$$

donde σ es el valor constante para la tensión.

- Llevando a cabo la diferenciación y reacomodando términos, se obtiene

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = -\frac{\rho \omega^2}{\sigma} r.$$

- Luego de realizar la integración y despejar h , nos permite encontrar la forma en la que debe variar el espesor de un disco sólido tal que el estado de tensiones sea constante para cada punto

$$h = C e^{-\frac{\rho \omega^2 r^2}{2\sigma}},$$

donde C es una constante de integración a determinar de las condiciones de borde que debe cumplir h .

Bibliografía

-  Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.
-  Russel C. Hibbeler (2011).
Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.
-  Timoshenko, Stephen; J N. Goodier (1951).
Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.
-  Wang, Chi-Teh. (1953).
Applied Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1953.
-  Sadd, Martin H. (2014).
Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Boston, Academic Press, 2014.

Fin

