

Mecánica de los Sólidos – Hackathon 1

Método matricial de la rigidez

Estructuras Hiperestáticas 2D/3D

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2020



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

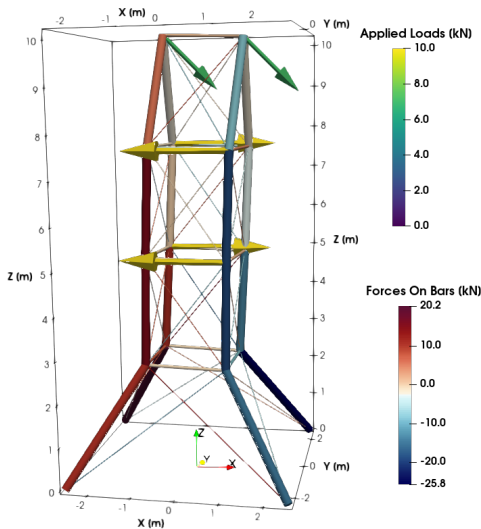


Contenido

- 1 1. Historia y motivación
- 2 2. Método matricial de la rigidez
- 3 3. Pasos del análisis estructural
 - 3.1 Preproceso
 - 3.2 Procesado
 - 3.3 Posproceso
- 4 4. Implementación en un código
- 5 5. Código en Octave/Matlab
- 6 6. Ejemplos

Primer ‘Hackathon de Estructuras’!

- En el vídeo del enlace se muestran los principales resultados que trabajaremos en este **Hackathon**, como ser el campo de desplazamientos, fuerzas de reacción y fuerzas actuantes en cada barra, etc.
- Los resultados que se muestran en la figura se han obtenido empleando el método matricial de rigidez, mediante un código desarrollado en Octave **[HOY AQUÍ!]**.
- Además trabajaremos en el posproceso, en Paraview!



[Vídeo estructura 3D MoCCAI]

1. Historia y motivación [wiki]

- El método matricial de la rigidez (método directo de la rigidez) se originó en el campo de la aeronáutica.
- Los investigadores consiguieron aproximar el comportamiento estructural de las partes de un avión mediante ecuaciones simples pero que requerían grandes tiempos de cálculo.
- Con la llegada de los ordenadores estas ecuaciones se empezaron a resolver de forma rápida y sencilla.

1. Historia y motivación [Felippa 2001¹]

Las principales contribuciones se agrupan en tres hitos que abarcan desde 1930 a 1970.

♣ *Creation* :

- Los orígenes del análisis estructural matricial (MSA) se remontan al grupo de aeroelasticidad del Laboratorio Nacional de Física (NPL) en Teddington, una ciudad que ahora se ha convertido en un suburbio del gran Londres.
- Entre 1934 y 1938 A. R. Collar y W. J. Duncan publicaron los primeros artículos con la representación y terminología para sistemas matriciales que se utilizan en la actualidad.
- La investigación aeroelástica continuó durante la Segunda Guerra Mundial, pero las restricciones en las publicaciones de 1938 a 1947 han hecho que estos trabajos sean difíciles de rastrear.

¹Felippa, Carlos A. (2001), “A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts”, *Computers & Structures*, 79 (14): 1313–1324.

♣ *Unification* :

- El segundo gran avance en el análisis estructural de matrices ocurrió entre 1954 y 1955, en una serie de artículos científicos el profesor John H. Argyris presentó una unificación formal de métodos de fuerza y desplazamiento (FDM) utilizando teoremas de energía dual.
- Aunque las aplicaciones prácticas de la dualidad resultaron efímeras, este trabajo sistematizó el concepto de ensamblaje de ecuaciones de sistemas estructurales a partir de componentes elementales.
- En suma, Argyris sistematizó el concepto de “ensamblar componentes elementales de una estructura en un sistema de ecuaciones”.

♣ *FEMinization* :

- Finalmente, en noviembre de 1959, M. J. Turner, jefe de la Unidad de Dinámica Estructural de Boeing, publicó un artículo que describe el método directo de la rigidez (DSM) como una implementación informática general y eficiente del método de elementos finitos (FEM), entonces embrionario y aún sin nombre).
- Para 1970, DSM había provocado la desaparición del método de fuerza clásico (CFM) y se convirtió en la implementación dominante en los programas de FEM a nivel de producción.

- Los esquemas generales de la simulación basada en modelos (MBS) por computadora se muestran en el diagrama de flujo de la Fig. 1.

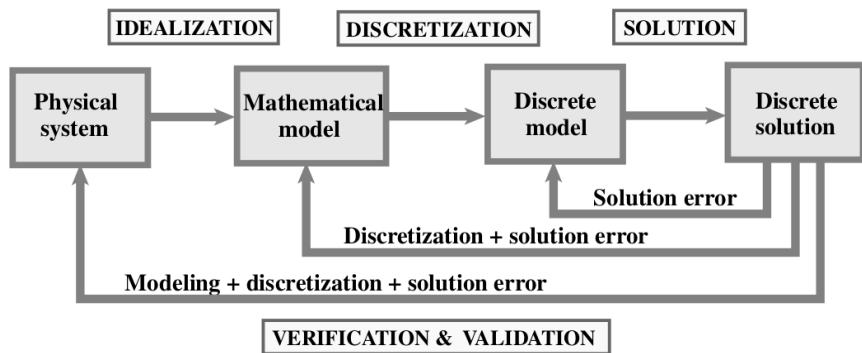


Figura: Flowchart of model-based simulation (MBS) by computer.

- Para sistemas mecánicos como estructuras, FEM es la técnica de discretización y resolución más utilizada.

- Históricamente, el antepasado de FEM (*finite element method*) es MSA (*matrix structural analysis*), Fig. 2.

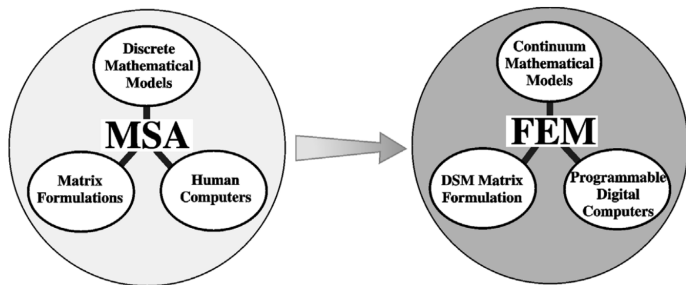


Figura: Transformación del MSA anterior a la computadora (antes de 1950) en el FEM actual, la cual se estableció a mediados de la década de 1960.

- La transformación de MSA desde la era anterior a las computadoras en las primeras computadoras programables tuvo lugar, en giros tambaleantes, durante un período de transición entre 1947-1956.
- FEM comienza a asentarse, a principios de la década de 1960, similar a la configuración que se muestra en la figura. Sus componentes básicos no han cambiado desde 1970.

En suma...

- El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable a estructuras hiperestáticas (indeterminadas) de barras que se comportan de forma elástica y lineal.
- El método matricial se basa en estimar los componentes de las relaciones de rigidez para resolver las fuerzas o los desplazamientos mediante un ordenador.
- El método directo de la rigidez es la implementación más común del método de los elementos finitos (FEM).
- Las propiedades de rigidez del material son compilados en una única ecuación matricial que gobierna el comportamiento interno de la estructura idealizada.
- Los datos que se desconocen de la estructura son las fuerzas y los desplazamientos que pueden ser determinados resolviendo esta ecuación.
- El método directo de la rigidez es el más común en los programas de cálculo de estructuras (tanto comerciales como de fuente libre).

Método matricial de la rigidez [wiki]

- El método consiste en asignar a la estructura de barras un objeto matemático, llamado matriz de rigidez denotada por \mathbf{K} .
- La matriz de rigidez relaciona los desplazamientos \mathbf{U} de un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^d de la estructura, llamados nodos, con las fuerzas exteriores $\mathbf{F} + \mathbf{R}$ que es necesario aplicar para lograr esos desplazamientos, siendo \mathbf{F} las cargas externas y \mathbf{R} las reacciones.
- Las dimensiones de las variables que intervienen son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &\in \mathbb{R}^{nd \times nd}, \\
 \mathbf{U} &\in \mathbb{R}^{nd \times 1}, \\
 \mathbf{F} &\in \mathbb{R}^{nd \times 1}, \\
 \mathbf{R} &\in \mathbb{R}^{nd \times 1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

- Las componentes K_{ij} , $i, j = 1, \dots, nd$, de esta matriz son fuerzas generalizadas asociadas a desplazamientos generalizados.

- La matriz de rigidez relaciona las fuerzas nodales equivalentes y desplazamientos sobre los nodos de la estructura, mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{U}, \quad (2.2)$$

donde

- F_i son las las fuerzas nodales equivalentes asociadas a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la estructura;
- R_i son las reacciones hiperestáticas inicialmente desconocidas sobre la estructura;
- U_i los desplazamientos nodales incógnita de la estructura y n , el número de grados de libertad de la estructura.

Energía de deformación [wiki]

- La energía de deformación es el aumento de energía interna acumulada en el interior de un sólido deformable como resultado del trabajo realizado por las fuerzas que provocan la deformación.
- La energía de deformación elástica también puede expresarse en términos de la matriz de rigidez mediante la relación:

$$E_{def} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nd} \sum_{j=1}^{nd} K_{ij} U_i U_j. \quad (2.3)$$

Theorem (Teorema de reciprocidad Maxwell-Betti)

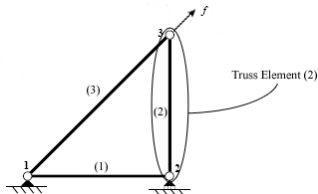
En un sólido elástico y lineal, siendo P_i y Q_j dos sistemas de cargas independientes, se establece que el “trabajo interno” realizado por el sistema de cargas P_i sobre el campo de desplazamientos producido por el sistema Q_j es igual al “trabajo interno” realizado por el sistema Q_j sobre los desplazamientos producidos por el sistema P_i .

- Del teorema de Maxwell-Betti se deduce que la matriz de rigidez debe ser simétrica y por tanto:

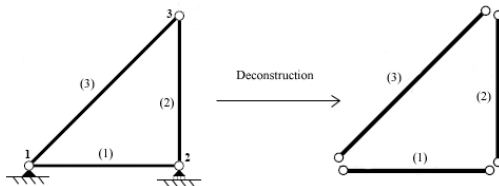
$$K_{ij} = K_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, nd. \quad (2.4)$$

Desglose

- El primer paso cuando se utiliza el método directo de la rigidez es identificar los elementos individuales que componen la estructura.



- Una vez que se identifican los elementos, la estructura se desconecta en los nodos, es decir aquellos puntos que conectan los diferentes elementos entre sí.



- Luego, cada elemento se analiza individualmente para desarrollar ecuaciones de rigidez de los miembros.
- Las fuerzas y los desplazamientos se relacionan a través de la matriz de rigidez del elemento, que depende de la geometría y propiedades del elemento.
- Un elemento “*truss*” solo puede transmitir fuerzas en compresión o tensión.
- Esto significa que en dos dimensiones, cada nodo tiene dos grados de libertad (DOF): desplazamiento horizontal y vertical.
- La ecuación resultante contiene una matriz de rigidez de cuatro por cuatro.

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- Un elemento “*frame*” (marco) es capaz de soportar momentos de flexión además de compresión y tensión.
- Esto da como resultado tres grados de libertad en 2D: desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y rotación en el plano.
- La matriz de rigidez en este caso es de seis por seis.

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ m_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ m_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

- También se pueden incorporar otros elementos como placas (*plates*) y láminas (*shells*) en el método de rigidez directa, en tal caso se deben desarrollar ecuaciones similares.

3. Pasos del análisis estructural

- Ahora daremos los principales pasos que se deben realizar para llevar a cabo el cálculo y análisis mediante el método de la rigidez en el caso de solo emplear *truss elements*.
- Estos pasos son similares a los que se realizan en el caso de emplear elementos de marco u elementos como placas o láminas. Podemos decir sin pérdida de generaliadad que éstos son:
 - ➊ Preproceso: geometría, cargas externas y condiciones de borde.
 - ➋ Proceso: cálculo y resolución.
 - ➌ Postproceso: visualización cualitativa y análisis cuantitativo.

3.1 Preproceso

- Se debe construir el modelo geométrico de la estructura bajo análisis.
- La geometría se describe mediante:
 - un arreglo de tamaño $(n \times d)$ especificando las coordenadas de los nodos;
 - la conectividad entre nodos que indican los elementos, $(N_e \times d - 1)$, donde n_e indica el número de elementos;
 - el módulo elástico de Young, E , para cada elemento;
 - el área de la sección transversal de cada barra, S .
- Adicionalmente, en este primer paso es práctica habitual especificar las cargas externas y las condiciones de borde que se considerarán (apoyos, desplazamientos impuestos).

3.2 Procesado

- (1) *Assembly* (*ℰ filling*), ensamblado de la matriz del sistema \mathbf{K} .

$$\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_{ij}^e, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{K}_{ij}^e es la matriz de rigidez del e -elemento *truss* que une los nodos i y j .

- (2) Calcular las cargas externas que actúan sobre el sistema \mathbf{F} .
 (3) Aplicar condiciones de contorno (B.C.), en este tipo de problemas solo son del tipo de Dirichlet, es decir se fijan ciertos desplazamientos. Es decir:

- a* fijar desplazamientos en los apoyos,
- b* imponer ciertos desplazamientos sobre puntos de la estructura.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\xrightarrow{B.C.} \widehat{\mathbf{K}}, \\ \mathbf{F} + \mathbf{R} &\xrightarrow{B.C.} \widehat{\mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

- (4) Resolver el sistema lineal resultante:

$$\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \widehat{\mathbf{F}}. \quad (3.3)$$

- (5) Determinar las reacciones resultantes:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez obtenida de (3.1).

3.3 Posproceso

- Graficar configuración deformada, determinar máximos desplazamientos.
- Cálculo de las fuerzas sobre cada elemento (barra).
- Visualizar fuerzas de reacción.
- **Cálculo de esfuerzos** se realiza examinando en coordenadas locales de las barras el esfuerzo axial, los esfuerzos cortantes, los momentos flectores y el momento torsor generados en cada una de las barras, conocidos los desplazamientos de todos los nodos de la estructura.
- Esto puede hacerse usando las matrices de rigidez expresadas en coordenadas locales y los desplazamientos nodales expresados también en coordenadas locales.

- **Análisis dinámico**, permite encontrar la respuesta dinámica de una estructura. Para ello se requiere representar el comportamiento inercial de la estructura mediante una matriz de masa \mathbf{M} .
- La solución del sistema anterior pasa por un cálculo de las frecuencias propias y los modos propios. Admitiendo que las fuerzas disipativas son poco importantes las frecuencias propias se pueden determinar resolviendo la siguiente ecuación polinómica en ω^2

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0.$$

- Esas magnitudes permiten realizar un análisis modal que reproduce el comportamiento de la estructura bajo diferentes tipos de situaciones.

4. Implementación en un código

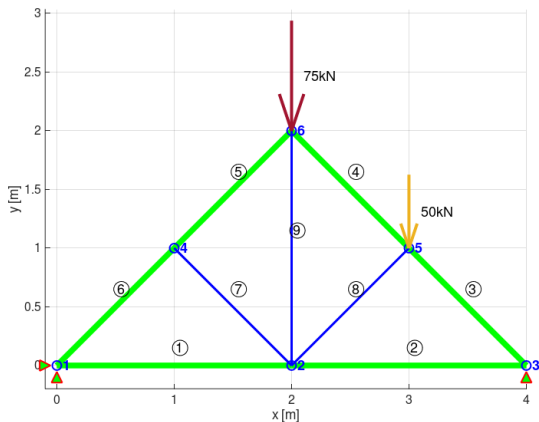
- Posibilidades: ver este tema en wikipedia, el método de la matriz de rigidez está muy completo.
 - En la Duke University, USA, pueden encontrar implementado en C un código basado en este método, incluso te da todo para que puedas realizar análisis de los modos o frecuencias naturales de vibración, considera modelos geoméricamente no lineales, efectos de temperatura, y muchas cosas más.
 - Se puede correr desde línea de comandos o mediante una interface en Octave/MATLAB, llama por debajo al código en C .
 - Lo he probado y anda bien, lo complicado es introducir la .estructura” que deseas analizar. Que suele ser lo más laborioso.
<http://frame3dd.sourceforge.net>
- **¿Qué no hacer?!** Nunca realizar el *assembly* a mano!

5. Código en Octave

- Expondremos el método de forma teórica y práctica.
- 1) Explicaremos en detalle como se ha implementado este método en un código de Octave desarrollado por el Dr. Dorian Depriester de la Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, France.
https://www.researchgate.net/publication/337680114_Truss_analysis_the_stiffness_method
 - 2) Código en Octave (ver Classroom) generado a partir del código realizado por el Dr. Depriester obtenido de
<https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/73486-truss-stiffness-calculator>.

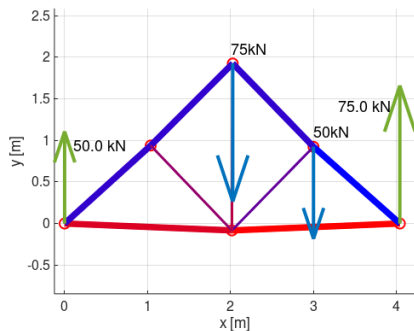
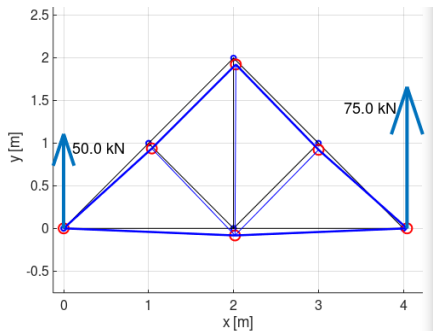
Ejemplos en Octave

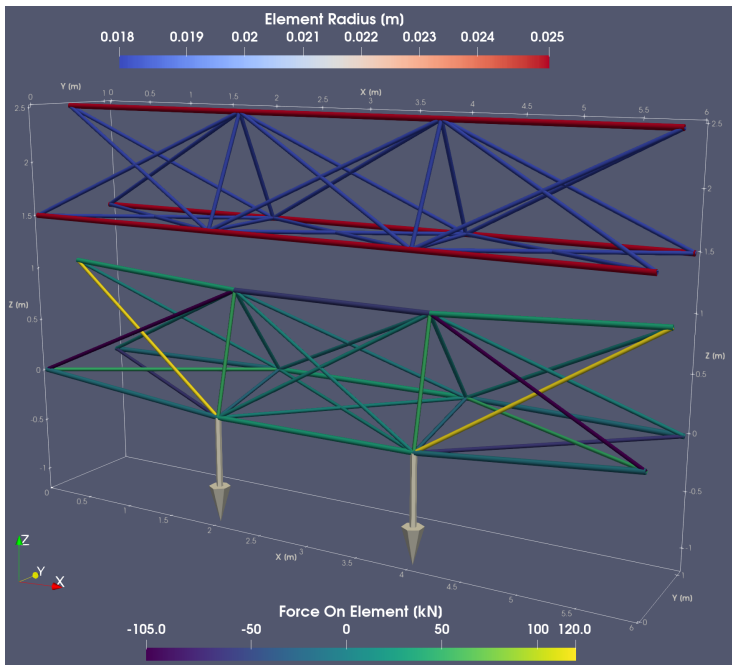
- **Ejemplo 1:** ejemplos 1.4, 2.5 and 2.13 de Crandall et al, 3er Ed 2012. Material es aluminio. Todas las unidades en SI. Empleando el código explicado anteriormente se procede a resolver la siguiente estructura.



● Ejemplo 1 (cont.)

- Deformada y fuerzas de reacción.





Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Russel C. Hibbeler (2011).

Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

Fin

