

Mecánica de los Sólidos – Unidad 5C

Torsión

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, octubre de 2021



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



- ③ 3. Torsión de ejes prismáticos sin simetría de revolución
 - 3.2 Analogía de la membrana de Prandtl
 - 3.3 Soluciones de torsión derivadas de la ecuación de contorno
- ⊙ Bibliografía

3.2 Analogía de la membrana de Prandtl

- De forma alternativa a la resolución del problema elástico de torsión uniforme mediante métodos analíticos o numéricos, la solución del mismo puede abordarse mediante la analogía de la membrana de Prandtl.
- Es decir, para secciones macizas de gran rigidez torsional la distribución de las tensiones asociadas a la torsión guarda una analogía mecánica con la deformación de una membrana elástica cuasiplana.
- Concretamente Prandtl probó en 1903 que la forma que adopta la membrana puede relacionarse con una función de tensiones cuyas derivadas dan las tensiones tangenciales en cada dirección.
- Dicho de otra manera, las tangentes de las curvas de nivel de una membrana deformada coinciden con las tensiones tangenciales de torsión de un prisma mecánico cuya sección transversal tenga la misma forma que la membrana.

- Imaginemos una membrana elástica homogénea cuyos bordes se mantienen fijos sobre un contorno igual a la sección recta de la pieza que se desea estudiar, sometida a una tracción uniforme en sus bordes y a una presión normal también uniforme (ver Figura 1a)).

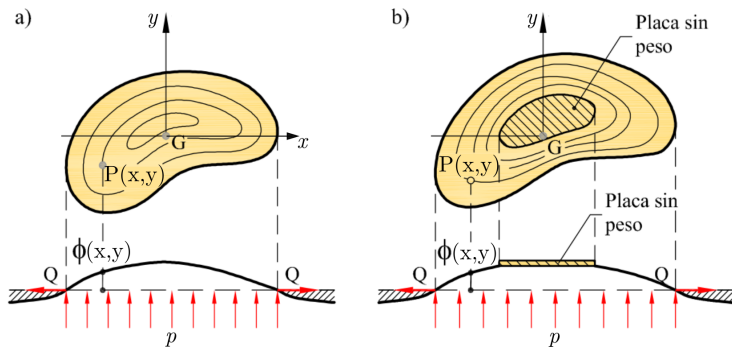


Figura 1: Analogía de la membrana: a) dominio conexo b) dominio con “hueco”.

- Si la sección posee huecos internos (múltiplemente conexa), éstos se cubren con placas rígidas de peso despreciable, ver Fig. 1b) y Sección 5.
- Sea p la presión normal por unidad de superficie de la membrana y Q la tracción uniforme por unidad de longitud del contorno de la misma.

- El problema de deformación de la membrana y el problema elástico de torsión uniforme tienen una formulación analítica análoga.
- La representación de la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel permite obtener, por analogía, varias conclusiones importantes de la distribución de tensiones tangenciales en el problema de la torsión:
 - a) La tensión tangencial en un punto genérico de la sección tiene la dirección de la tangente a la curva de nivel que pasa por dicho punto.
 - b) La magnitud de la tensión tangencial en un punto genérico de la sección es proporcional a la magnitud del gradiente de la membrana en dicho punto. La tensión tangencial será mayor cuanto más cercanas estén las curvas de nivel entre sí.
 - c) El momento torsor que actúa sobre la sección es igual al doble del volumen encerrado por la membrana deformada.

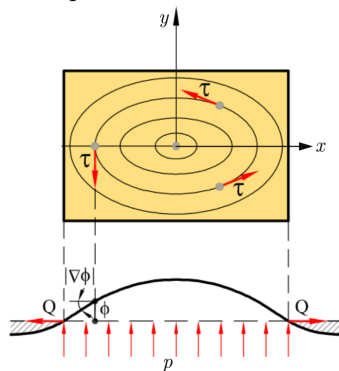
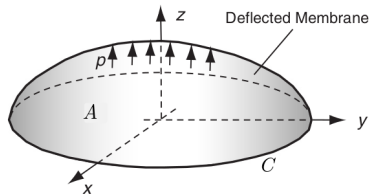


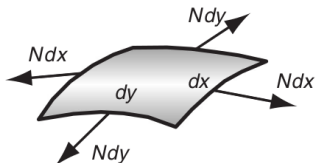
Figura 2: Analogía de la membrana, la magnitud de la pendiente de la función de tensión indica la magnitud de la tensión tangencial.

- Sea una membrana elástica delgada estirada sobre un marco con forma C , que encierra la región A en el plano x, y , ver figura (a).
- La membrana se estira con tensión uniforme N y se somete a una presión uniforme p , que produce una deflexión transversal de la membrana $z(x, y)$.
- En la teoría de pequeñas deformaciones, se supone que la carga de presión no alterará la tensión de la membrana.

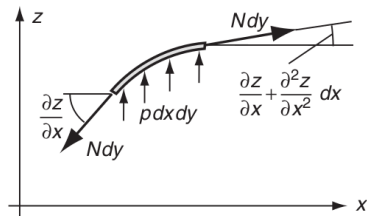


(a) Static Deflection of Stretched Membrane

- La ecuación de desplazamiento de la membrana que gobierna se obtiene aplicando el equilibrio a un elemento diferencial, figura (b).



(b) Membrane Element



(c) Equilibrium of Membrane Element

- Una vista lateral de este elemento a lo largo del eje- y , figura (c), ilustra las fuerzas de tensión en cada borde y la carga de presión.
- El equilibrio de fuerzas en la dirección z , que incluye las fuerzas de tensión en las direcciones x e y , nos permite determinar la relación

$$p dxdy + Ndy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) + Ndx \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) = Ndy \frac{\partial z}{\partial x} + Ndx \frac{\partial z}{\partial y},$$

lo cual se simplifica a

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{N}.$$

- Debido a que la membrana se estira sobre el borde C en el plano x, y , la condición de frontera para la deflexión se expresa por

$$z = 0 \quad \text{en} \quad C.$$

- El volumen encerrado por la membrana desviada (en el eje z) y el plano x, y está dado por

$$V = \int_A z \, dx \, dy.$$

- Ahora es posible reconocer la analogía porque las relaciones anteriores coinciden con los resultados correspondientes de la formulación de torsión proporcionando

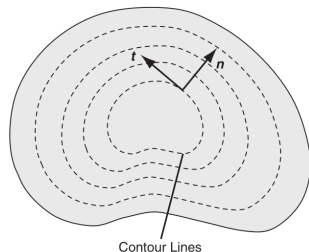
$$\Phi = z,$$

$$\frac{p}{N} = 2G\theta,$$

$$M_t = 2V.$$

- El esfuerzo cortante máximo parece estar ubicado en el límite donde ocurre la pendiente más grande de la membrana.

- La visualización de membranas dan una imagen cualitativa útil de la distribución de Φ .



- Sin embargo, realizar mediciones de la pendiente de una membrana presurizada real no proporcionaría un método preciso para determinar las tensiones en una barra sometida a torsión.

3.3 Soluciones derivadas de la ecuación de contorno

- Para secciones simplemente conectadas, la formulación de la función de tensión requiere que la función satisfaga la ecuación de Poisson (3.8),

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\Phi = -2G\theta & \forall (x, y) \in A, \\ \Phi = 0 & \forall (x, y) \in \partial A. \end{cases}} \quad (3.8)$$

siendo cero en el borde $C = \partial A$.

- Si la frontera se expresa mediante la relación $f(x, y) = 0$, esto sugiere un posible esquema sencillo para expresar la función de tensión en términos de $\Phi = K f(x, y)$ donde K es una constante arbitraria.
- Esta forma satisface la condición de contorno en C , y para algunas formas geométricas simples también cumplirá la Ec. (3.8) con una elección apropiada de K .
- Desafortunadamente, este no es un método general, sino más bien un esquema *ad hoc* que funciona solo para secciones de geometría simple.
- No obstante, proporciona varias soluciones a problemas de interés, veremos algunas soluciones particulares utilizando este esquema.

● *Torsión de una barra elíptica.*

- El borde se describe mediante la ecuación implícita

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

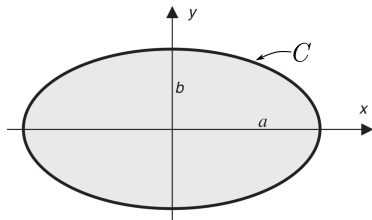
- Por lo tanto, buscamos una función de estrés de la forma

$$\Phi(x, y) = K \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

- Esta función de tensión satisface la condición de frontera al hacerse cero en C , y también cumple la ecuación gobernante (3.8) si la constante se elige como

$$K \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2G\theta,$$

$$K = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta.$$



- *Torsión de una barra elíptica.*

- El ángulo de torsión en términos de la carga aplicada

$$\theta = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G}$$

- Los esfuerzos cortantes resultantes de esta solución están dados por

$$\tau_{xz} = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} G\theta y = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3},$$

$$\tau_{yz} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} G\theta x = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b},$$

- Siendo el esfuerzo de corte resultante dado como

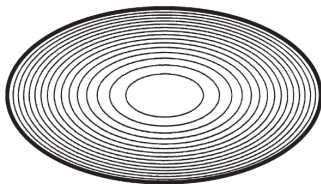
$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2M_t}{\pi ab} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}.$$

- Para el caso $a > b$, el valor máximo de τ ocurre en $x = 0$ y $y = \pm b$ y está dado por

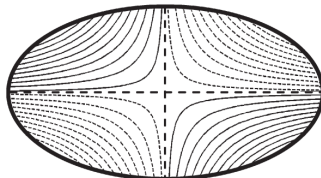
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}.$$

- *Torsión de una barra elíptica.*

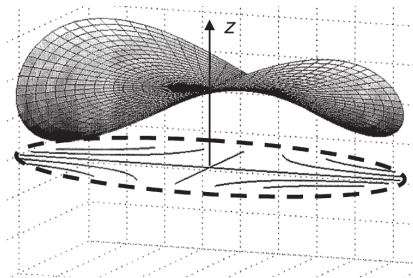
Ejercicio 3.1: Empleando los *scripts* de Matlab/Octave dados en [Sadd, 2021], pág. 567-568, obtenga las curvas de nivel para la función de tensión de Prandtl $\Phi(x, y)$ y del desplazamiento. Además se muestra la superficie alabeada del desplazamiento $w(x, y)$ para la sección elíptica, ver [Sadd, 2021].



(Stress Function Contours)



(Displacement Contours)



(Warping Displacement Surface)

$$w = -\frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} xy$$

- *Torsión de una barra triangular equilátera.*

- La función de estrés posee la forma

$$\Phi(x, y) = K(x - \sqrt{3}y + 2a)(x + \sqrt{3}y + 2a)(x - a).$$

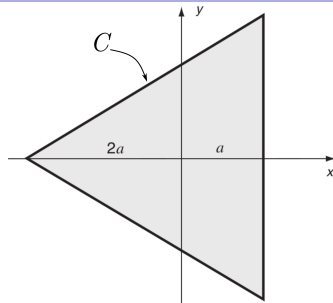
- Esta función de tensión satisface la condición de frontera al hacerse cero en C , y también cumple la ecuación gobernante (3.8) si la constante se elige como

$$K = -\frac{G\theta}{6a}.$$

- El ángulo de giro por unidad de longitud queda dado por

$$\theta = \frac{5}{3I_0} \frac{M_t}{G},$$

donde $I_0 = 3\sqrt{3}a^4$ es el momento polar de inercia de la sección transversal respecto al centroide.



- *Torsión de una barra triangular equilátera.*

- Las tensiones no nulas vienen dadas por las expresiones

$$\tau_{xz} = \frac{G\theta}{a}(x - a)y,$$
$$\tau_{yz} = \frac{G\theta}{2a}(x^2 + 2ax - y^2).$$

Tenga en cuenta que el componente τ_{xz} desaparece a lo largo del borde $x = a$ como lo requieren las condiciones de contorno del problema.

- El esfuerzo máximo siempre ocurre en el borde y la simetría de la sección implica que cada lado del borde tiene una distribución de esfuerzo resultante idéntica.
- Por conveniencia, elegimos el lado $x = a$, y como $\tau_{xz} = 0$ en este borde, la tensión resultante viene dada por

$$\tau = \tau_{yz}(a, y) = \frac{G\theta}{2a}(3a^2 - y^2).$$

El valor máximo de esta expresión da

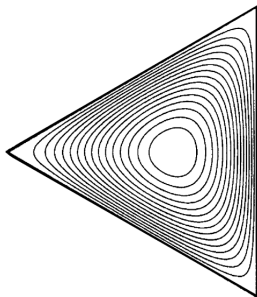
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{yz}(a, 0) = \frac{3G\theta}{2} = \frac{5\sqrt{3}M_t}{18a^3}.$$

- *Torsión de una barra triangular equilátera.*

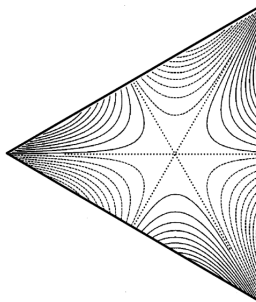
- El desplazamiento de alabeo se expresa como

$$w = \frac{\theta}{6a}y(3x^2 - y^2).$$

- Las líneas de contorno de este campo de desplazamiento se muestran a continuación, para el caso de un torque positivo en sentido antihorario aplicado a la sección. De nuevo, las líneas continuas corresponden a valores positivos, mientras que las líneas punteadas indican desplazamientos negativos, ver [Sadd, 2021].



(Stress Function Contours)



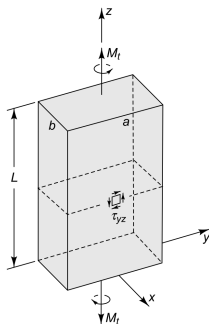
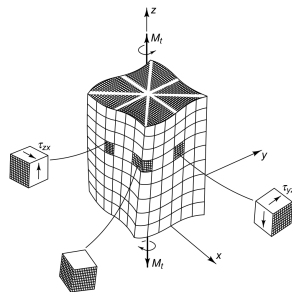
(Displacement Contours)

● *Torsión de una barra rectangular.*

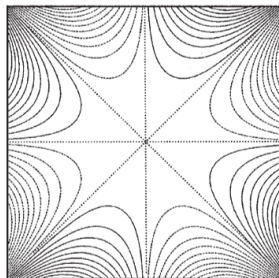
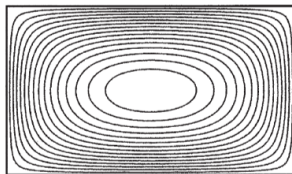
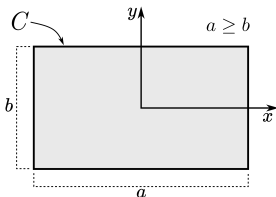
- Se encuentran disponibles soluciones exactas para la torsión de ejes rectangulares usando las ecuaciones de elasticidad lineal, pero se requieren técnicas matemáticas relativamente sofisticadas, en particular el método de Fourier funciona especialmente bien en este caso [Sadd, 2021].
- En este curso simplemente enumeraremos algunos de los resultados del análisis elástico
- Para un eje largo, rectangular con dimensiones de sección transversal a y b con $b \leq a$, el esfuerzo cortante máximo cuando se ignoran los efectos finales ocurre en el medio del lado a , como se muestra en la Figura y tiene la magnitud

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{yz}(a, 0) = \frac{M_t}{\alpha ab^2}, \quad \text{siendo} \quad \theta = \frac{M_t}{\beta ab^3 G}$$

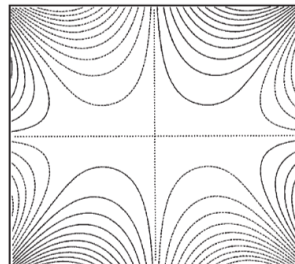
donde α y β se dan en el Cuadro de la pág. 19 como una función de la razón a/b .



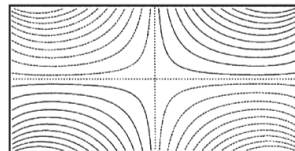
● *Torsión de una barra rectangular.*



Contornos del desplazamiento, $a/b=1$









Contornos del desplazamiento, $a/b=1.1$



Contornos del desplazamiento, $a/b=2$

- *Esfuerzo cortante máximo y ángulo de torsión por unidad de longitud de varios miembros en torsión [Ugural, 2020].*
 - En una sección rectangular los valores de los coeficientes α y β dependen de la relación entre la longitud del lado largo a y del lado corto b . Para secciones delgadas, donde a es mucho mayor que b , sus valores se acercan a 1/3.
 - En todos los casos se observa que $\tau_{\text{máx}}$ ocurre en un punto del borde medio de la sección transversal más cercana al eje.
 - *Notar que un eje circular es el más eficiente!* Está sometido tanto al menor esfuerzo cortante máximo como a un ángulo de giro θ más pequeño que el eje no circular correspondiente de la misma área de sección transversal y que está sometido al mismo par.

Cross section	Maximum shearing stress	Angle of twist per unit length																													
 For circular bar: $a = b$	$\tau_A = \frac{2T}{\pi ab^2}$	$\theta = \frac{(a^2 + b^2)T}{\pi a^3 b^3 G}$																													
 Equilateral triangle	$\tau_A = \frac{20T}{a^3}$	$\theta = \frac{46.2T}{a^4 G}$																													
	$\tau_A = \frac{T}{\alpha ab^2}$	$\theta = \frac{T}{\beta ab^3 G}$																													
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/b</th><th>β</th><th>α</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.0</td><td>0.141</td><td>0.208</td></tr> <tr><td>1.5</td><td>0.196</td><td>0.231</td></tr> <tr><td>2.0</td><td>0.229</td><td>0.246</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.249</td><td>0.256</td></tr> <tr><td>3.0</td><td>0.263</td><td>0.267</td></tr> <tr><td>4.0</td><td>0.281</td><td>0.282</td></tr> <tr><td>5.0</td><td>0.291</td><td>0.292</td></tr> <tr><td>10.0</td><td>0.312</td><td>0.312</td></tr> <tr><td>∞</td><td>0.333</td><td>0.333</td></tr> </tbody> </table>	a/b	β	α	1.0	0.141	0.208	1.5	0.196	0.231	2.0	0.229	0.246	2.5	0.249	0.256	3.0	0.263	0.267	4.0	0.281	0.282	5.0	0.291	0.292	10.0	0.312	0.312	∞	0.333	0.333
a/b	β	α																													
1.0	0.141	0.208																													
1.5	0.196	0.231																													
2.0	0.229	0.246																													
2.5	0.249	0.256																													
3.0	0.263	0.267																													
4.0	0.281	0.282																													
5.0	0.291	0.292																													
10.0	0.312	0.312																													
∞	0.333	0.333																													
	$\tau_A = \frac{T}{2abt_1}$ $\tau_B = \frac{T}{2abt}$	$\theta = \frac{(at + bt_1)T}{2t_1 a^2 b^2 G}$																													
 For circular tube: $a = b$	$\tau_A = \frac{T}{2\pi abt}$	$\theta = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}T}{4\pi a^2 b^2 t G}$																													
 Hexagon	$\tau_A = \frac{5.7T}{a^3}$	$\theta = \frac{8.8T}{a^4 G}$																													

- **Ejemplo 3.3:** Se consideran tres barras prismáticas del mismo material, de secciones respectivas: circular, triangular equilátera y cuadrada, siendo iguales las áreas de sus secciones rectas. Todas las barras están sometidas a torsión mediante pares torsores M_t aplicados a sus secciones extremas.
- ◆ Comparar en las tres barras los valores de las tensiones tangenciales máximas $\tau_{\text{máx}}$, así como las rigideces torsionales correspondientes $GJ = \frac{M_t}{\theta}$.
- Si r es el radio de la sección circular, a la longitud del lado de la sección triangular equilátera y l el lado de la sección cuadrada, entre r , a y l , al ser las áreas iguales, existirán las siguientes relaciones

$$A = \pi r^2 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = l^2.$$

● **Ejemplo 3.3** (*cont.*):

- La tensión tangencial máxima y la rigidez torsional, en cada uno de las secciones consideradas son:

	circular	triangular	cuadrada
$\tau_{\text{máx}}$	$\frac{2M_t}{\pi r^3}$	$\frac{20M_t}{a^3}$	$\frac{M_t}{0.208l^3}$
GJ	$G \frac{\pi r^4}{2}$	$G \frac{\sqrt{3}a^4}{80}$	$0.141Gl^4$

- Por lo tanto las relaciones entre los parámetros geométricos, tensiones de corte máximas y las rigideces torsionales son:

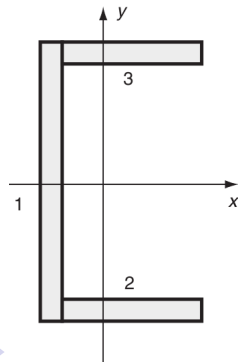
	circular	triangular	cuadrada
	$r = r$	$a = 2.69r$	$l = 1.77r$
$\frac{r^3 \tau_{\text{máx}}}{M_t}$	0.64	1.03	0.86
$\frac{GJ}{r^4}$	1.57	1.13	1.38

● *Torsión de una barra de sección compuesta.*

- El resultado obtenido por el método de Fourier se suele analizar para caso especial de un rectángulo muy delgado con un $b \ll a$.
- Bajo estas condiciones es posible encontrar que la función de esfuerzo, el esfuerzo cortante máximo y las relaciones de torque se reducen a

$$\begin{aligned}\Phi &= G\theta(a^2 - x^2), \\ \tau_{\text{máx}} &= G\theta b, \\ M_t &= \frac{1}{3}G\theta b^3 a.\end{aligned}\tag{a}$$

- Para este caso límite, se observa que la función de estrés se reduce a una distribución parabólica, y esto sería predecible a partir de la analogía de la membrana.
- Estos resultados se pueden aplicar a la torsión de secciones compuestas por varios rectángulos delgados, como el ejemplo que se muestra en la figura con tres rectángulos.



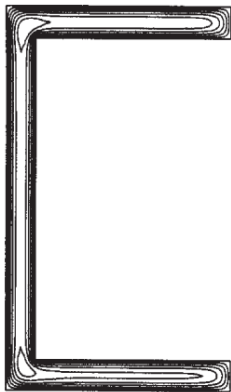
- *Torsión de una barra de sección compuesta.*

- Tenga en cuenta que estas formas pueden aproximarse a muchas vigas estructurales comunes con secciones en ángulo, canal y en I.
- Sin tener en cuenta las regiones locales donde se unen los rectángulos y los bordes cortos libres, se puede suponer que la membrana tiene la distribución parabólica sobre cada rectángulo.
- Por tanto, el par de carga para una sección compuesta de este tipo viene dado por

$$M_t = \frac{G\theta}{3} \sum_{i=1}^N a_i b_i^3,$$

donde a_i y b_i ($a_i \gg b_i$) son las dimensiones de los diversos N rectángulos.

- Sin tener en cuenta los esfuerzos localizados altos en las esquinas reentrantes, el esfuerzo cortante máximo se puede estimar utilizando la relación para el rectángulo más estrecho, Ec. (a).



Bibliografía



Martin H. Sadd (2021).

Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. 4th Ed., Academic Press, London, UK, 2021.



Ansel C. Ugural, Saul K. Fenster (2020).

Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity. 6th Ed., Academic Press, London, UK, 2020.



Luis Ortiz Berrocal (2005).

Elasticidad. 2da Ed., McGraw-Hill, New York, 2005.



James M. Gere, Barry J. Goodno (2016).

Mecánica de Materiales. 8va Ed., Cengage Learning, México, 2016.



Russel C. Hibbeler (2017).

Mecánica de Materiales. 9na Ed., Pearson, México, 2017.

Fin

