

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 5C

## Torsión

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, octubre de 2020



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO

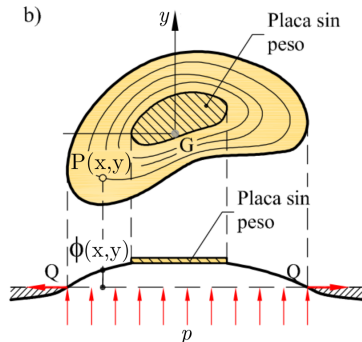
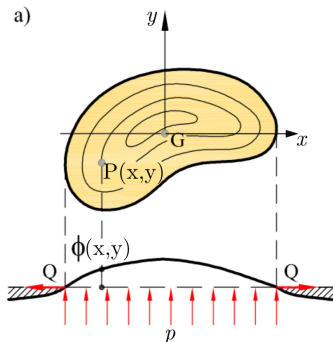


- ③ 3. Torsión de ejes prismáticos sin simetría de revolución
  - 3.2 Analogía de la membrana de Prandtl
  - 3.3 Soluciones de torsión derivadas de la ecuación de contorno
- ⊙ Bibliografía

## 3.2 Analogía de la membrana de Prandtl

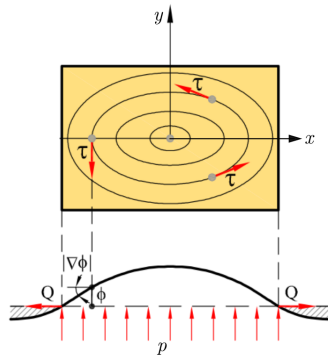
- De forma alternativa a la resolución del problema elástico de torsión uniforme mediante métodos analíticos o numéricos, la solución del mismo puede abordarse mediante la analogía de la membrana de Prandtl.
- Es decir, para secciones macizas de gran rigidez torsional la distribución de las tensiones asociadas a la torsión guarda una analogía mecánica con la deformación de una membrana elástica cuasiplana.
- Concretamente Prandtl probó en 1903 que la forma que adopta la membrana puede relacionarse con una función de tensiones cuyas derivadas dan las tensiones tangenciales en cada dirección.
- Dicho de otra manera, las tangentes de las curvas de nivel de una membrana deformada coinciden con las tensiones tangenciales de torsión de un prisma mecánico cuya sección transversal tenga la misma forma que la membrana.

- Imaginemos una membrana elástica homogénea cuyos bordes se mantienen fijos sobre un contorno igual a la sección recta de la pieza que se desea estudiar, sometida a una tracción uniforme en sus bordes y a una presión normal también uniforme (ver Fig. (a)).

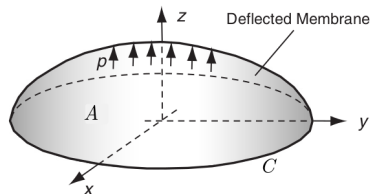


- Si la sección posee huecos interiores (es múltiplemente conexa), éstos se cubren con placas rígidas de peso despreciable, ver Fig. (b) y Sección 5.
- Sea  $p$  la presión normal por unidad de superficie de la membrana y  $Q$  la tracción uniforme por unidad de longitud del contorno de la misma.

- El problema de deformación de la membrana y el problema elástico de torsión uniforme tienen una formulación analítica análoga.
- La representación de la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel permite obtener, por analogía, varias conclusiones importantes de la distribución de tensiones tangenciales en el problema de la torsión:
  - a) La tensión tangencial en un punto genérico de la sección tiene la dirección de la tangente a la curva de nivel que pasa por dicho punto.
  - b) La magnitud de la tensión tangencial en un punto genérico de la sección es proporcional a la magnitud del gradiente de la membrana en dicho punto. La tensión tangencial será mayor cuanto más cercanas estén las curvas de nivel entre sí.
  - c) El momento torsor que actúa sobre la sección es igual al doble del volumen encerrado por la membrana deformada.

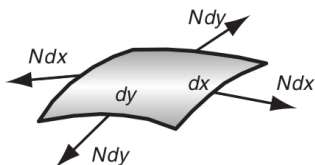


- Sea una membrana elástica delgada estirada sobre un marco con forma  $C$ , que encierra la región  $A$  en el plano  $x, y$ , ver figura (a).
- La membrana se estira con tensión uniforme  $N$  y se somete a una presión uniforme  $p$ , que produce una deflexión transversal de la membrana  $z(x, y)$ .
- En la teoría de pequeñas deformaciones, se supone que la carga de presión no alterará la tensión de la membrana.

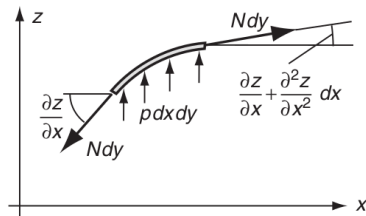


(a) Static Deflection of Stretched Membrane

- La ecuación de desplazamiento de la membrana que gobierna se obtiene aplicando el equilibrio a un elemento diferencial, figura (b).



(b) Membrane Element



(c) Equilibrium of Membrane Element

- Una vista lateral de este elemento a lo largo del eje- $y$ , figura (c), ilustra las fuerzas de tensión en cada borde y la carga de presión.
- El equilibrio de fuerzas en la dirección  $z$ , que incluye las fuerzas de tensión en las direcciones  $x$  e  $y$ , nos permite determinar la relación

$$p dxdy + Ndy \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) + Ndx \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) = Ndy \frac{\partial z}{\partial x} + Ndx \frac{\partial z}{\partial y},$$

lo cual se simplifica a

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{N}.$$

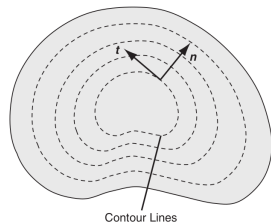
- Debido a que la membrana se estira sobre el borde  $C$  en el plano  $x, y$ , la condición de frontera para la deflexión se expresa por

$$z = 0 \quad \text{en } C.$$

- El volumen encerrado por la membrana desviada (en el eje  $z$ ) y el plano  $x, y$  está dado por

$$V = \int_A z \, dx \, dy.$$

- Ahora es posible reconocer la analogía porque las relaciones anteriores coinciden con los resultados correspondientes de la formulación de torsión proporcionando  $\Phi = z$ ,  $p/N = 2G\theta$ ,  $M_t = 2V$ .
- El esfuerzo cortante máximo parece estar ubicado en el límite donde ocurre la pendiente más grande de la membrana.
- La visualización de membranas dan una imagen cualitativa útil de la distribución de  $\Phi$ .
- Sin embargo, realizar mediciones de la pendiente de una membrana presurizada real no proporcionaría un método preciso para determinar las tensiones en una barra sometida a torsión.





## 3.3 Soluciones derivadas de la ecuación de contorno

- Para secciones simplemente conectadas, la formulación de la función de tensión requiere que la función satisfaga la ecuación de Poisson (3.8),

$$\begin{cases} \Delta\Phi = -2G\theta & \forall (x, y) \in A, \\ \Phi = 0 & \forall (x, y) \in \partial A. \end{cases}$$

siendo cero en el borde  $C = \partial A$ .

- Si la frontera se expresa mediante la relación  $f(x, y) = 0$ , esto sugiere un posible esquema sencillo para expresar la función de tensión en términos de  $\Phi = K f(x, y)$  donde  $K$  es una constante arbitraria.
- Esta forma satisface la condición de contorno en  $C$ , y para algunas formas geométricas simples también cumplirá la Ec. (3.8) con una elección apropiada de  $K$ .
- Desafortunadamente, este no es un método general, sino más bien un esquema *ad hoc* que funciona solo para secciones de geometría simple.
- No obstante, proporciona varias soluciones a problemas de interés, veremos algunas soluciones particulares utilizando este esquema.

- *Torsión de una barra elíptica.*

- El borde se describe mediante la ecuación implícita

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

- Por lo tanto, buscamos una función de estrés de la forma

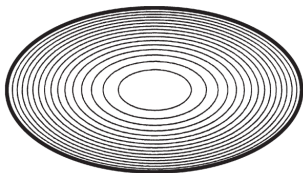
$$\Phi(x, y) = K \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

- Esta función de tensión satisface la condición de frontera al hacerse cero en  $C$ , y también cumple la ecuación gobernante (3.8) si la constante se elige como

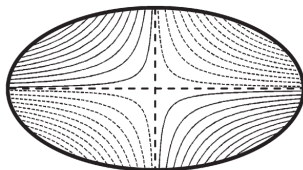
$$K \left( \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2G\theta,$$
$$K = -\frac{G\theta a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

- *Torsión de una barra elíptica.*

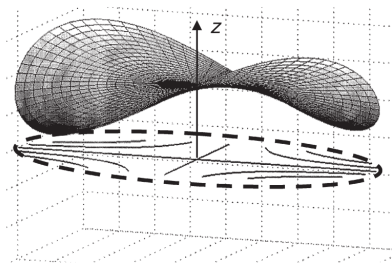
**Ejercicio 3.1:** Empleando los *scripts* de Matlab/Octave dados en [Sadd, 2014], pág. 548-549, obtenga las curvas de nivel para la función de tensión de Prandtl  $\Phi(x, y)$  y del desplazamiento. Además se muestra la superficie alabeada del desplazamiento  $w(x, y)$  para la sección elíptica, ver [Sadd, 2014].



(Stress Function Contours)

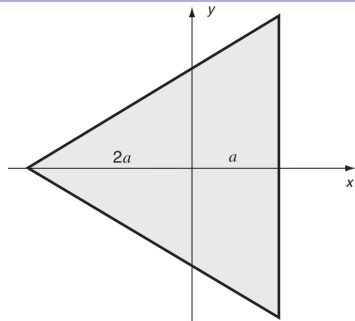


(Displacement Contours)



(Warping Displacement Surface)

- *Torsión de una barra triangular equilátera.*



- La función de estrés posee la forma

$$\Phi(x, y) = K(x - \sqrt{3}y + 2a)(x + \sqrt{3}y + 2a)(x - a).$$

- Esta función de tensión satisface la condición de frontera al hacerse cero en  $C$ , y también cumple la ecuación gobernante (3.8) si la constante se elige como

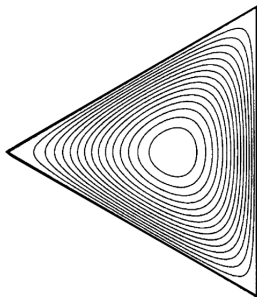
$$K = -\frac{G\theta}{6a}.$$

- *Torsión de una barra triangular equilátera.*

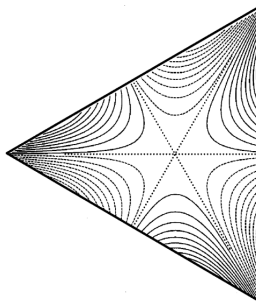
- El desplazamiento de alabeo se expresa como

$$w = \frac{\theta}{6a}y(3x^2 - y^2).$$

- Las líneas de contorno de este campo de desplazamiento se muestran a continuación, para el caso de un torque positivo en sentido antihorario aplicado a la sección. De nuevo, las líneas continuas corresponden a valores positivos, mientras que las líneas punteadas indican desplazamientos negativos, ver [Sadd, 2014].

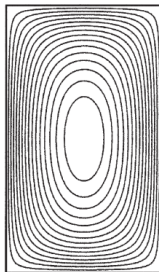
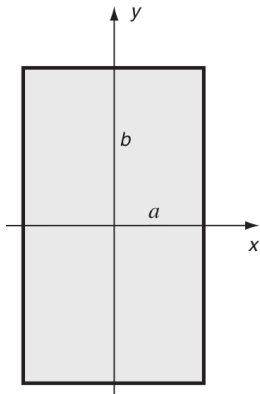


(Stress Function Contours)

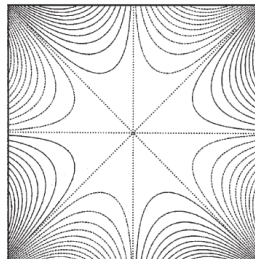


(Displacement Contours)

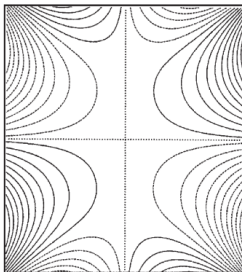
- *Torsión de una barra rectangular.*



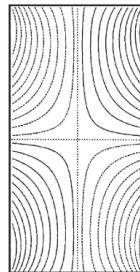
(Stress Function Contours)



(Displacement Contours,  $a/b = 1.0$ )



(Displacement Contours,  $a/b = 0.9$ )



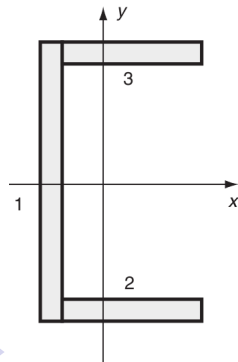
(Displacement Contours,  $a/b = 0.5$ )

● *Torsión de una barra de sección compuesta.*

- El resultado obtenido por el método de Fourier se suele analizar para caso especial de un rectángulo muy delgado con un  $a \ll b$ .
- Bajo estas condiciones es posible encontrar que la función de esfuerzo, el esfuerzo cortante máximo y las relaciones de torque se reducen a

$$\begin{aligned}\Phi &= G\theta(a^2 - x^2), \\ \tau_{\text{máx}} &= 2G\theta a, \\ M_t &= \frac{16}{3}G\theta a^3 b.\end{aligned}\tag{a}$$

- Para este caso límite, se observa que la función de estrés se reduce a una distribución parabólica, y esto sería predecible a partir de la analogía de la membrana.
- Estos resultados se pueden aplicar a la torsión de secciones compuestas por varios rectángulos delgados, como el ejemplo que se muestra en la figura con tres rectángulos.



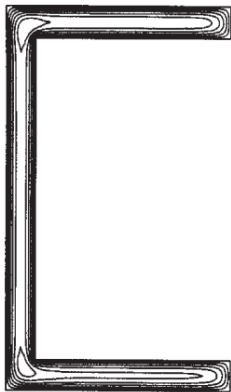
- *Torsión de una barra de sección compuesta.*

- Tenga en cuenta que estas formas pueden aproximarse a muchas vigas estructurales comunes con secciones en ángulo, canal y en I.
- Sin tener en cuenta las regiones locales donde se unen los rectángulos y los bordes cortos libres, se puede suponer que la membrana tiene la distribución parabólica sobre cada rectángulo.
- Por tanto, el par de carga para una sección compuesta de este tipo viene dado por

$$M_t = \frac{16}{3} G \theta \sum_{i=1}^N a_i^3 b_i,$$

donde  $a_i$  y  $b_i$  ( $b_i \gg a_i$ ) son las dimensiones de los diversos  $N$  rectángulos.

- Sin tener en cuenta los esfuerzos localizados altos en las esquinas reentrantes, el esfuerzo cortante máximo se puede estimar utilizando la relación para el rectángulo más estrecho, Ec. (a).





# Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).  
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units.  
McGraw-Hill, New York, 1999.



Ortiz Berrocal, L. (2005).  
Elasticidad. 2da Ed., McGraw-Hill, New York, 2005.



Russel C. Hibbeler (2011).  
Mecánica de Materiales. 8va Ed. Pearson, México, 2011.



Sadd, Martin H. (2014).  
Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Boston, Academic Press, 2014.



Den Hartog, Jacob P. (1987).  
Advanced Strength of Materials. Dover Publications, New York, 1987.

# Fin

