Mecánica de los Sólidos
Unidad 0
Vectores y espacios vectoriales

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo

dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2020

Ernesto Sábato. “Divulgación”, Uno y el Universo, 1945

- ♣ *Alguien me pide una explicación de la teoría de Einstein. Con mucho entusiasmo, le hablo de tensores y geodésicas en* $\mathbb{R}^4$.
- – *No he entendido una sola palabra –me dice, estupefacto.*
- ♣ *Reflexiono unos instantes y luego, con menos entusiasmo, le doy una explicación menos técnica, conservando algunas geodésicas, pero haciendo intervenir aviadores y disparos de revólver.*
- – *Ya entiendo casi todo –me dice mi amigo, con bastante alegría–. Pero hay algo que todavía no entiendo: esas geodésicas, esas coordenadas...*

- ♣ *Deprimido, me sumo en una larga concentración mental y termino por abandonar para siempre las geodésicas y las coordenadas; con verdadera ferocidad, me dedico exclusivamente a aviadores que fuman mientras viajan con la velocidad de la luz, jefes de estación que disparan un revólver con la mano derecha y verifican tiempos con un cronómetro que tienen en la mano izquierda, trenes y campanas.*
- – *¡Ahora sí, ahora entiendo la relatividad! –exclama mi amigo con alegría.*
- ♣ *Sí –le respondo amargamente–, pero ahora no es más la relatividad.*

Contenido

1.1 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

- Definamos un n-vector como la n-ada o n-tupla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en donde cada x_j es un número real.
- El número x_j se llama la j-ésima componente de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Denotamos $\mathbb{R}^n$ a la totalidad de n-vectores.
- Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$, su suma se realiza como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

- La multiplicación de un n-vector por un escalar es

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Teorema (1.1.1)

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *y* $\mathbf{z}$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$, *y sea* α *cualquier escalar. Entonces*

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
3. $\mathbf{x} + (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{x}$.
4. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
5. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$.
6. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
7. $\alpha(0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0)$.

- Debido a estas propiedades, suma de n-vectores y multiplicación por un escalar, $\mathbb{R}^n$ se llama *n–espacio vectorial* (n–dimensional). Más adelante utilizaremos algunas de estas propiedades para dar una definición general del espacio vectorial, del cual $\mathbb{R}^n$ será un caso especial.

- El vector $(0, 0, \ldots, 0)$ cuyas componentes son todas iguales a cero, se llama el vector cero de $\mathbb{R}^n$ y se denota por $\mathbf{0}$.
- Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, el vector $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ se llama el *negativo* de $\mathbf{x}$ y se denota mediante $-\mathbf{x}$. Entonces $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Además, sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y} \quad &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n). \end{aligned}$$

- El <u>*producto escalar*</u> de dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ se denota por "$\cdot$" y se define como la suma de los productos de sus componentes

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

- En notación indicial o de Einstein, el producto escalar se escribe obviando la sumatoria, que se supone implícita en caso de haber dos índices iguales.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x_j y_j, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Teorema (1.1.2)

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *y* $\mathbf{z}$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$, *y sea* α *cualquier escalar. Entonces*

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.
3. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.
4. $\alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y})$.
5. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$
6. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- El espacio $\mathbb{R}^n$ junto con las operaciones anteriores de suma de vectores, multiplicación por un escalar y producto escalar comúnmente se denomina *espacio Euclídeo n–dimensional*.

- La *longitud o norma* de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se define como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Entonces $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Teorema (1.1.3)

Sean $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *en* $\mathbb{R}^n$*, y sean* α *y* β *escalares cualesquiera. Entonces*

$$\|\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha\beta\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \beta^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Teorema (1.1.4 Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Sean $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vectores cualesquiera en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|.$$

- En clase ... Q.E.D. (*quod erat demonstrandum*).

Teorema (1.1.5 Desigualdad triangular o desigualdad de Minkowski)

Sean $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vectores cualesquiera en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

- En clase ... Q.E.D.

- Considerando el Teorema (0.1.4) podemos afirmar que

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1,$$

para cualquier par de vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintos de cero en $\mathbb{R}^n$.

- Por lo tanto podemos definir el ángulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el único número en $[0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

- Se dice que dos vectores en $\mathbb{R}^n$ son *ortogonales* o *perpendiculares* cuando $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. El vector cero es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^n$.
- **Ejercicio**: Probar la definición de $\cos(\theta)$.

- Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, la *distancia* entre ellos se define como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

- La *proyección* (perpendicular) de un vector $\mathbf{x}$ sobre un vector no nulo $\mathbf{y}$ es el vector definido como

$$\mathrm{proj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}\mathbf{y}.$$

- **Ejercicio**: Probar la definición anterior.

- En $\mathbb{R}^n$ es posible desarrollar una *representación canónica*.
- Definimos

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

- Cada $\mathbf{e}_j$ es un vector unitario, $\|\mathbf{e}_j\| = 1$, y cualquier par de estos vectores son ortogonales entre sí, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $i \neq j$.
- Además, es posible escribir

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n,$$

es decir, la *representación canónica* de $\mathbf{x}$.

- De lo visto, se tiene que una suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ está en $\mathbb{R}^n$ y que un múltiplo escalar de un vector en $\mathbb{R}^n$ está en $\mathbb{R}^n$.
- Algunas veces se debe tratar con conjuntos S de vectores en $\mathbb{R}^n$, en donde las dos propiedades anteriores pueden no valer.
- Por ejemplo, si S consiste de todos los vectores en $\mathbb{R}^5$ que tienen la primera componente igual a 1, es decir S consiste de todos los vectores $(1, x, y, z, w)$. Observamos
  - *i.* que la suma de dos vectores de S no está en S,
  - *i.* el múltiplo escalar de un vector de S en general no está en S.
- Entonces, si un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de que la suma de los vectores de S está en S y cualquier múltiplo escalar de cualquier vector de S está en S, decimos que S *es un subespacio de* $\mathbb{R}^n$.
- **Ejercicio**: Sea S el conjunto que consiste de todos los vectores en $\mathbb{R}^6$ que tienen cero en la primera, tercera y quinta componente. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^6$.

1.2 Vectores en $\mathbb{R}^3$

- Los vectores en $\mathbb{R}^3$ (vectores espaciales) aparecen en una gran cantidad de aplicaciones, especialmente en física e ingeniería.
- En $\mathbb{R}^3$, es conveniente expresar a los vectores en términos de vectores unitarios (versores) mutuamente ortogonales $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

- Es decir, dado un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ este puede ser expresado únibocamente como

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k},$$

además, se tiene que estos versores son mutuamente ortogonales y constituyen la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

- El *producto cruz* (producto vectorial de Gibbs) es una operación especial para vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ no definida en $\mathbb{R}^n$, $n \neq 3$.
- El producto cruz entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denota como $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
- Suponga que $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}_{\text{abuso de notación}} &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&=(x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

- El triplete $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ posee permutación cíclica

$$
\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.
$$

- Sean dos vectores no nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$, la *norma del producto cruz* es igual al área del paralelogramo que forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, y está dada por

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin\theta.$$

Teorema (1.2.1)

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *vectores no nulos en* $\mathbb{R}^3$

a) *El vector* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *es ortogonal tanto a* $\mathbf{u}$ *como a* $\mathbf{v}$.

b) *El valor abosoluto del "triple producto"*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

representa el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$,

$$Vol_{par} = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| = \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cos\theta.^{a}$$

[a] Note que los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ forman un sistema dextrógiro.

- Propiedades del producto cruz

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w},$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall\mathbf{u}, \qquad (\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u},$$
$$(k\mathbf{u})\times\mathbf{v} = k(\mathbf{u}\times\mathbf{v}), \qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}.$$

Teorema (1.2.2)

Los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ son los siguientes

1. $\mathbb{R}^3$.
2. *El subespacio trivial que consiste solamente del vector cero* $(0,0,0)$.
3. *Todos los vectores paralelos a una recta dada que pasa por el origen.*
4. *Todos los vectores que están en un plano dado que pasa por el origen.*

0.3 Independencia lineal y dimensión

- Sean m vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ de $\mathbb{R}^n$.
- Una <u>*combinación lineal*</u> de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ es una suma de múltiplos escalares de estos vectores

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m,$$

  en donde cada α_j es un escalar.
- Llamamos a un vector $\mathbf{y}$ una combinación lineal de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ si puede escribirse como

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m.$$

- Dada una colección de vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ en $\mathbb{R}^n$, se llama *linealmente dependiente* si al menos uno de estos vectores puede escribirse como una combinación lineal de los otros.
- Si los vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente independientes*. Por ejemplo, los vectores de la base canónica $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Teorema

[0.3.1] Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces

1. *$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ son linealmente pendientes si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos cero tales que $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$.*
2. *$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ son linealmente independientes si y sólo si la ecuación*

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0},$$

es válida sólo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$

- **Ejercicio**: En el plano, dos vectores son linealmente dependientes si son paralelos. En $\mathbb{R}^3$, tres vectores son linealmente dependientes si todos están en el mismo plano o si los tres vectores son paralelos.

Lema

[0.3.1] Supongamos que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ *son vectores de* $\mathbb{R}^n$ *que satisfacen la siguiente condición: la primera componente distinta de cero de cada vector es igual a 1, y si la primera componente distinta de cero de* x_j *es la k-ésima componente, entonces los otros vectores tienen su k-ésima componente igual a cero. Entonces los vectores* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ *son linealmente independientes.*

- Este resultado nos permite en la práctica decir a ojo si ciertos vectores son linealmente independientes.
- **Ejercicio**: Consideremos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^6$

$$(0,1,0,-2,0,0), \quad (0,0,1,4,0,0), \quad (0,0,0,0,1,0), \quad (0,0,0,0,0,1).$$

Observar que para estos vectores el *Lema* (0.3.1) nos dice que son linealmente independientes, probaremos por que ésto es así.

- Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Los vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ en S forman una *base* para S si las siguientes condiciones se cumplen
  1. $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ son linealmente independientes.
  2. Todo vector de S es combinación lineal de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$.
- Por lo tanto, todo vector de S puede escribirse en la forma $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m$ para ciertos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.
- Observar que si sólo conocemos a los vectores de la base $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, entonces podemos describir a cualquier vector de S, ya que todo vector de S es combinación lineal de estos m vectores.
- **Ejercicio**: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$.
- **Ejercicio**: En $\mathbb{R}^3$, sea S el subespacio que consta de todos los vectores del plano $x + y + z = 0$. Un vector (x, y, z) está en S si y sólo si $x + y + z = 0$, o sea $z = -x - y$. Por lo tanto, S consta de todos los vectores de la forma $(x, y, -x - y)$.
  - Los vectores $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, -1)$ forman una base de S. Dado cualquier vector de S es posible escribirlo como combinación lineal de esta base $(x, y, -x - y) = x\ (1, 0, -1) + y\ (0, 1, -1)$.

- **Ejercicio**: Sea S el conjunto consistente de todos los 6-vectores de la forma $(x, y, 0, x-y, x+y, z)$. Entonces S forma un subespacio de $\mathbb{R}^6$. Encontrar una base de S.
  - Examine un vector típico de S e intente escribirlo como una combinación lineal de vectores específicos linealmente independientes de S.
  - Escribimos

$$\begin{aligned}(x, y, 0, x-y, x+y, z) = x\ (1,0,0,1,1,0) + \\ y\ (0,1,0,-1,1,0) + z\ (0,0,0,0,0,1).\end{aligned}$$

  - Por el *Lema* (0.3.1), $(1,0,0,1,1,0)$, $(0,1,0,-1,1,0)$, y $(0,0,0,0,0,1)$ son linealmente independientes.
  - Como todo vector de S es una combinación lineal de estos tres vectores, éstos forman una base de S.

- Observamos que en general un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ puede tener bases distintas. Por ejemplo $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, así como lo es $\{\alpha\mathbf{e}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ para algún escalar $\alpha \neq 0$.
- Todas las bases de un subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$ tienen el mismo *número* de vectores. Este número se llama la *dimensión* del subespacio S. Por ejemplo $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n, una base es $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.
    - Una base de S es el conjunto mínimo que posee la información necesaria para especificar a S.
    - La base determina el subespacio ya que todo vector del subespacio es una combinación lineal de los vectores de la base.
    - Un menor número de vectores que aquel que forma la base no puede especificar el subespacio.
    - Si dejamos fuera uno de los vectores de la base, ese vector se pierde del subespacio ya que ningún vector de la base es una combinación lineal de los otros.

1.4 Espacios vectoriales abstractos

- Supongamos que V es una colección de objetos, que pueden ser vectores de $\mathbb{R}^n$, funciones u otros objetos.
- Supongamos que existen dos operaciones algebraicas llamadas *suma* y *multiplicación por un escalar* y que se denotan de la siguiente manera
  - la suma de objetos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de V se denota por $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
  - el producto de un escalar α por un objeto $\mathbf{a}$ de V se denota por $\alpha\mathbf{a}$.

- Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ objetos que están en V y sean α y β escalares. Entonces decimos que V es un espacio vectorial respecto a las operaciones de suma y multiplicación por un escalar si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ está en V.
  2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
  3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
  4. Existe algún objeto $\boldsymbol{\theta}$ en V tal que $\mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{a} \; \forall \; \mathbf{a} \in V$.
  5. Existe algún objeto $\mathbf{d}$ en V tal que $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \boldsymbol{\theta}$.
  6. $\alpha\mathbf{a}$ está en V.
  7. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.
  8. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$.
  9. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.
  10. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- El adjetivo “abstracto” sólo se utiliza para distinguir el espacio vectorial “concreto” $\mathbb{R}^n$ que tiene n-adas de números reales como vectores, del concepto general en donde V podrá contener diferentes tipos de objetos.
- Los objetos en un espacio vectorial se llaman vectores.

- **Ejercicio**: Sea V el conjunto de todas las funciones reales definidas y continuas en [0,1]. Si f y g están en V identificamos las operaciones de suma como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y multiplicación por un escalar α definida por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Verificar que se satisfacen todas las condiciones de (1) hasta (10).
- **Ejercicio**: Sea V el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 2xy' + x^2y = 0$. Con la suma de funciones y la multiplicación por escalares, usuales, V es un espacio vectorial. Por ejemplo:
  - la suma de soluciones es una solución (1),
  - un escalar por una solución es nuevamente una solución (6), y
  - la función cero es una solución de esta ecuación diferencial y así obtenemos el vector θ requerido en la condición (4).

- Observamos que los conceptos discutidos en $\mathbb{R}^n$ (vector cero, negativo, combinación lineal, etc) se extienden de manera natural en el contexto de un espacio vectorial.
- Por ejemplo:
  - $\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)$ y $\cos(2x)$ son linealmente dependientes en el espacio vectorial de funciones reales continuas definidas para todo x, ya que

    $$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).$$

  - En el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales, los polinomios $1, x, x^2, \dots, x^n$ son linealmente independientes para cualquier n. Esto se debe que no es posible escribir una de estas funciones como una combinación lineal de las otras que sea válida para todo x. Además, no es posible encontrar constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ no todas nulas, tales que

    $$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \quad \forall\ x.$$

    Un polinomio de grado n posee a lo sumo n raíces.

- No siempre es posible encontrar una base para un espacio vectorial que consista de un número finito de funciones.
- Por ejemplo, consideremos el espacio de funciones reales y continuas en [0,1].
    - Es posible probar que este espacio vectorial tiene una base. Sin embargo, no tiene una base finita.
    - Non es posible listar un número finito de funciones continuas de manera que toda función continua sea una combinación lineal de ellas.
    - Consideremos los polinimos $1, x, \ldots, x^n$, son funciones continuas para n tan grande como se desee, siempre se omitirá x^{n+1} que no es una combinación lineal de $1, x, \ldots, x^n$.
- Decimos que un espacio vectorial sin una base finita es de *dimensión infinita*.

- Dado un espacio vectorial abstracto es posible definir en ciertas situaciones el producto punto o escalar y la longitud.
- Por ejemplo, consideremos el espacio vectorial V de todas las funciones reales, definidas y continuas en $[0,1]$.
  - Se define el producto escalar de dos funciones f y g de V como
$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)\ g(x)\ dx.$$
  - Esta integral refleja las propiedades que hemos visto para el producto punto en $\mathbb{R}^3$. Es decir,
$$\begin{aligned}(f+g)\cdot h &= \int_0^1 [f(x)+g(x)]h(x)\ dx \\ &= \int_0^1 f(x)\ h(x)\ dx + \int_0^1 g(x)\ h(x)\ dx = f\cdot h + g\cdot h.\end{aligned}$$
  - Por lo tanto, la longitud o norma de un vector f de V se puede definir por
$$\|f\| = (f\cdot f)^{1/2} = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\ dx}.$$

- Como hemos visto los los resultados establecidos para espacios vectoriales en general pueden aplicarse a una gran variedad de objetos.
- Por ejemplo, consideremos la desigualdad del triángulo o de Minkowski

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|,$$

que ha sido probada para vectores en $\mathbb{R}^n$.

  - La desigualdad del triángulo es válida para vectores en cualquier espacio vectorial abstracto que posea norma.
  - Veremos lo que esto significa para el espacio vectorial de funciones reales y continuas en [0,1]. Utilizando la definición de norma de una función dada previamente, esta desigualdad se traduce a

$$\sqrt{\int_0^1 [f(x)+g(x)]^2\ dx} \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\ dx} + \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2\ dx}.$$

- Otro ejemplo, consideremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \; \|\mathbf{y}\|.$$

  - La desigualdad de Cauchy-Schwarz es válida para vectores en cualquier espacio vectorial abstracto que posea norma.
  - Para el espacio vectorial de funciones reales y continuas definidas sobre [0,1] tenemos nuevamente una desigualdad con integrales

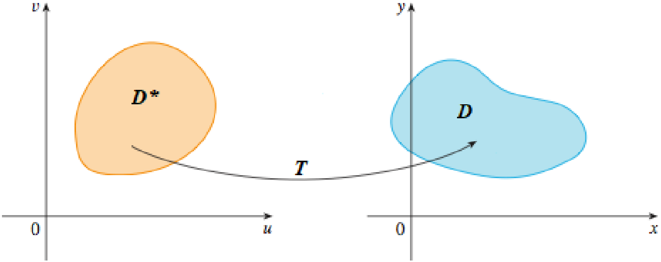
$$\left| \int_0^1 f(x)\; g(x)\; dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 \; dx} \; \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 \; dx}.$$

- Los ejemplos presentados en esta sección constituyen una *muy breve* introducción al concepto de espacio vectorial.
- El poder de dicho concepto radica en que nos permite considerar muchas ideas aprantemente no relacionadas y que resultan ser casos particulares de otras más generales.
- Además, el resultado más general es algunas veces más fácil de establecer que el particular.
    - Considere la desigualdad de Cauchy-Schwarz, probada fácilmente para vectores de $\mathbb{R}^n$. Una prueba directa de la última desigualdad con integrales (empleando solo resultados de integrales) pero sin el poder del concepto de espacio vectorial, puede ser bastante difícil.

♣ En lo que resta del curso emplearemos ampliamente vectores y sus propiedades, espacios vectoriales así como notación indicial.

2. Teorema del Cambio de Variables

- Sea D^* un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Consideramos una función continuamente diferenciable $T : D^* \to \mathbb{R}^2$, de modo que T lleva puntos en D^* a puntos en $\mathbb{R}^2$.
- $D = T(D^*)$ es el conjunto de todos los puntos imagen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x, y) = T(u, v)$ para algún $(u, v) \in D^*$.
- Si dos puntos no poseen la misma imagen entonces T es llamada una función uno a uno.



- Dadas dos regiones D y D^* del tipo 1 o 2 en $\mathbb{R}^2$, una función diferenciable T en D^* con imagen D y cualquier función integrable con valores reales, $f : D \to \mathbb{R}$, quisiéramos expresar $\iint_D f(x,y)dA$ como una integral sobre D^* de la función compuesta $f \circ T$.
- Suponer que la región $D^* \subset \mathbb{R}^2$ del tipo 1 con coordenadas variables designadas por (u,v), y $D \subset \mathbb{R}^2$ del tipo l. La función T está dada por dos funciones coordenadas:
  $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ para $(u,v) \in D^*$.
- Como primera conjetura podríamos tener que

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\ du\ dv,$$

  donde $f \circ T(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ es la función compuesta definida en D^*. Ver que para $f(x,y) = 1$ esta conjetura falla ya que por lo general $A(D) \neq A(D^*)$.
- Lo que se necesita es una medida de cómo la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ distorsiona el área de la región. Esto está dado por el *determinante jacobiano*, *jacobiano* o J.

2.1 Cambio de variables para integrales dobles

- **Definición**: Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación C^1 dada por $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$. El *jacobiano* de T, que se escribe $\partial(x,y)/\partial(u,v)$, es el determinante de la matriz derivada $\boldsymbol{D}T(x,y)$ de T:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

- Donde $\boldsymbol{D}T$ se conoce como la *matriz jacobiana*, también representada como $\boldsymbol{J}$.
- **Ejercicio**: La función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas está dada por $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y su jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Theorem (2.1.1 – Cambio de variables para integrales dobles)

Sean D y D^* regiones elementales en el plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1; suponer que T es uno a uno en D, y que $D = T(D^*)$. Entonces, para cualquier función integrable f: $D \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|\ du\ dv.$$

- Este teorema proporciona un método mediante el cual es posible simplificar algunas integrales dobles mediante una adecuada elección de T de modo que la integral sea fácil de evaluar con el nuevo integrando $f \circ T$ o con la nueva región D^*.
- **Ejercicio**: Evaluar $\iint_D \log(x^2 + y^2)\ dx\ dy$, donde D es la región en el primer cuadrante que está entre los arcos de los círculos $a \leq x^2 + y^2 \leq b$ $(0 < a < b)$.

2.2Cambio de variables para integrales triples

- **Definición**: Sea $T : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función C^1 definida por $x = x(u, v, w)$ y $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Entonces el jacobiano de T, es el determinante de $\boldsymbol{D}T(x, y, z)$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

- Fórmula del cambio de variable para integrales de volumen

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\, dv\, dw,$$

donde D^* es una región elemental en el espacio uvw correspondiente a D en el espacio xyz, bajo un cambio de coordenadas $T : (u, v, w) \to (x, y, z)$, siempre que T sea C^1 y uno a uno.

Bibliografía

Peter O'Neil (1994)
Matemáticas avanzadas para ingeniería. CECSA Vol I, 1994.

Erwin Kreyszig (2009)
Matemáticas avanzadas para ingeniería. Limusa Wiley Vol. I, 2009.

Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba (1991)
Cálculo vectorial. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Fin