

Mecánica de los Sólidos – Unidad 6B

Flexión y corte en vigas

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, octubre de 2020



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

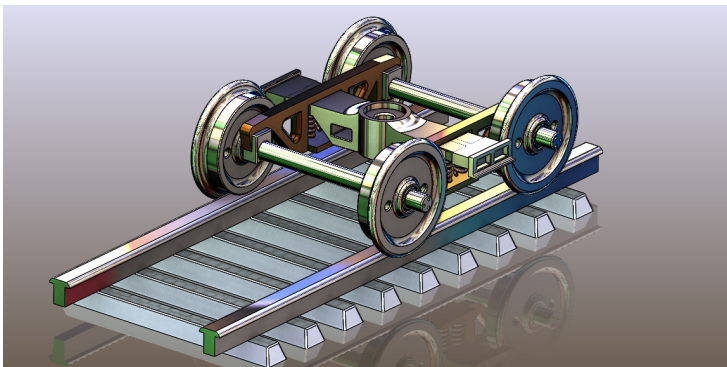


Contenido

- 3 3. Flexión simple
 - 3.1 Tensiones en vigas simétricas bajo fuerza de corte y momento flector
 - 3.2 Tensión de corte en una viga rectangular
 - 3.3 Tensión de corte en una viga I
 - 3.4 Magnitud comparativa de tensiones de flexión y de corte
- 4 4. Tensiones combinadas en flexión
- 5 5. Energía elástica en flexión
- 6 6. Inicio de fluencia en flexión
 - ⊙ Bibliografía

3. Flexión simple

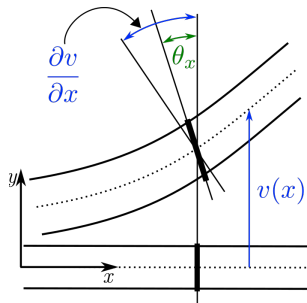
- Flexión simple, vigas sometidas a fuerza de corte y momento flector.
- La presencia de una fuerza de corte implica que el momento flector varía a lo largo de la viga y, por lo tanto, muchos de los argumentos de simetría ya no son aplicables.



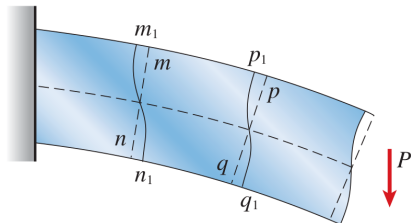
- Los inicios de la teoría de vigas se remontan al siglo XVIII, en trabajos iniciados por Leonhard Euler y Daniel Bernoulli.
- Las soluciones exactas, dentro de la teoría de la elasticidad, están disponibles para ciertos tipos de variaciones de carga aplicadas a lo largo de cierto tipo de vigas, empleando funciones de estrés¹.
- En esta sección describiremos lo que con frecuencia se conoce en Ingeniería como la *teoría de vigas de Euler-Bernoulli* (*a.k.a. engineer's beam theory or classical beam theory*), para distinguirla de la teoría de elasticidad mencionada anteriormente.
- Para el estudio de vigas se considera un sistema de coordenadas en que el eje x es siempre tangente al eje baricéntrico de la viga, y los ejes y y z coincidan con los ejes principales de inercia.

¹S. Timoshenko and J. N. Goodier, “Theory of Elasticity”, 2nd ed., chap. 12, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

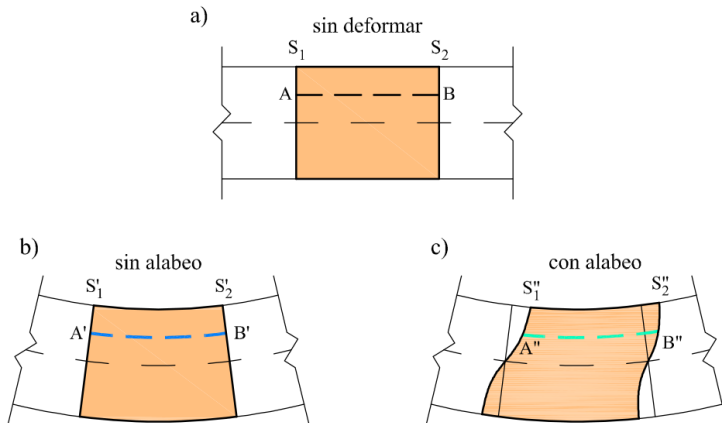
- Los supuestos básicos de la teoría de vigas para la flexión simple de una viga que flecte en el plano xy son:
 - (1) Hipótesis de comportamiento elástico. El material de la viga es elástico lineal, con módulo de Young E y coeficiente de Poisson despreciable.
 - (2) Hipótesis de la flecha vertical. En cada punto el desplazamiento vertical solo depende de x .
 - (3) Hipótesis de la fibra neutra. Los puntos de la fibra neutra solo sufren desplazamiento vertical y giro: $u(x, 0) = 0$.
 - (4) La tensión perpendicular a la fibra neutra se anula: $\sigma_y = 0$.
 - (5) **Hipótesis de Bernoulli**. Las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares al eje de la viga una vez curvado.
- Las hipótesis (1)–(4) juntas definen la **teoría de vigas de Timoshenko-Ehrenfest**.
- La **teoría de Euler-Bernoulli**, (1)–(5), es una simplificación de la teoría anterior, al aceptarse la última hipótesis como exacta (cuando en vigas reales es solo aproximadamente cierta).



- Cabe preguntarnos si es posible aplicar la ley de Navier al cálculo de la distribución de tensiones normales en la sección recta de un prisma mecánico sometido a flexión simple.
- La existencia del esfuerzo cortante produce cierto alabeo de las secciones rectas, como más adelante estudiaremos con detenimiento.
- En otras palabras, dado que los resultados obtenidos para la flexión pura se basan en la hipótesis de que las secciones permanecen planas, es decir, sin alabeo, cabe hacerse la pregunta de si estos resultados pueden aplicarse en el caso de que éste se produzca.
- Para los casos de flexión simple, admitiremos la *hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier*: “dos secciones rectas infinitamente próximas experimentan alabeo en la deformación, pero cualquiera de ellas puede superponerse a la otra mediante una traslación y un giro”.
- Alabeo de las secciones transversales de una viga debido a deformaciones unitarias por cortante.

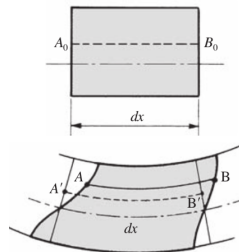


- En la figura se muestra la elongación de las fibras en flexión simple: (a) sin deformar, (b) sin alabeo y (c) con alabeo.



- Para piezas esbeltas el efecto del alabeo es despreciable, mientras que para vigas de espesor moderado o grande éste puede tener cierta importancia.

- La hipótesis generalizada admite el alabeo de las secciones rectas, pero desprecia el alabeo relativo entre dos secciones próximas.
- Esta aproximación, es admisible porque, en general, las deformaciones longitudinales producidas por el esfuerzo cortante son mucho menores que las producidas por el momento flector.
- La aproximación es tanto mejor cuanto menor sea la relación canto/luz de la pieza, es decir, cuanto más esbelta sea ésta.
- Si se admite la hipótesis generalizada, entonces, según se muestra en la figura, puede considerarse que la elongación de una fibra tal como la A_0B_0 ; que se deforma realmente en AB (con alabeo), es idéntica a la elongación que se produciría si la deformación fuese como $A'B'$ (sin alabeo).
- Dado que todas las expresiones obtenidas para la flexión pura se basan en la magnitud de las elongaciones longitudinales de las fibras, es obvio que si se admite la hipótesis generalizada de deformación de Bernoulli-Navier, la totalidad de las expresiones halladas para el caso de la flexión pura recta pueden extenderse al caso más general de la flexión simple.



3.1 Tensiones en vigas simétricas bajo fuerza de corte y momento flector

- Por lo tanto, como se discutido previamente, es plausible *suponer que la distribución de la tensión de flexión (2.10)*

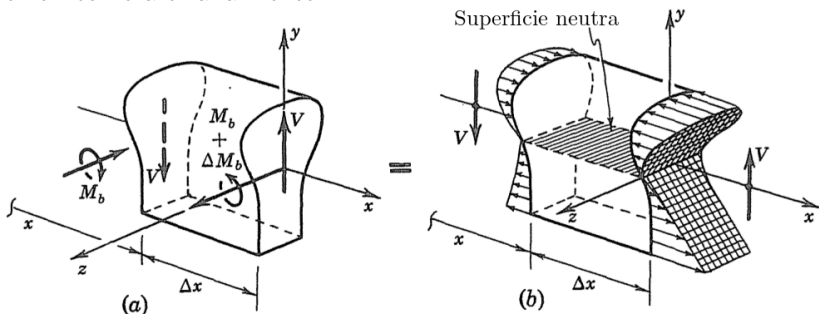
$$\sigma_x = -\frac{M_b}{I_{zz}}y, \quad (2.10)$$

es válida incluso cuando M_b varía a lo largo de la viga, es decir, cuando existe una fuerza de corte.

- Por lo tanto, en ingeniería, la teoría vigas supone que la distribución de tensiones longitudinales o de flexión en una ubicación x viene dada por (2.10).
- Cabe señalar, sin embargo, que en flexión simple la deformada de la directriz no es un arco de circunferencia, ya que la curvatura variará de sección a sección, al variar el momento flector actuante.
- En flexión simple recta, la deformada de la línea media es necesariamente una curva plana, pero no de curvatura constante.

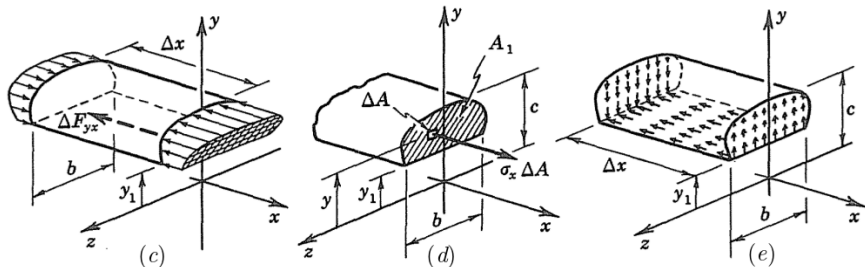
- Al exigir que se satisfaga el equilibrio para ciertos cuerpos libres bien seleccionados, podemos estimar la distribución de tensiones que tiene como resultado la fuerza de corte.
- Como no se exige que se satisfagan la compatibilidad geométrica como las relaciones de tensión-deformación en el análisis, *a priori* no existe certeza de que los resultados sean precisos.
- Evidencia experimental y la comparación con algunas de las soluciones, antes mencionadas de la teoría de la elasticidad, muestran que las estimaciones de la distribución de tensiones son satisfactorias para la mayoría de los propósitos de ingeniería.
- A continuación procedemos al cálculo de la tensión de corte τ_{xy} en una viga simétrica a partir del equilibrio de un segmento de la viga.

- En la figura se muestra un tramo Δx de una viga que está sujeta tanto a flexión como a cizallamiento.



- Dado que no hay una carga transversal externa que actúe sobre el elemento, la fuerza de corte transversal V es independiente de x .
- Una variación de M_b en x está representado por el incremento ΔM_b .
- Suponemos que los esfuerzos de flexión están dados por (2.10).
- Como se indica esquemáticamente en la figura (b), debido al aumento de ΔM_b en el momento flector sobre la longitud Δx , las tensiones de flexión que actúan sobre la cara $+x$ del elemento de la viga serán algo mayores que las de la cara $-x$.

- Consideramos el equilibrio del segmento que se muestra en la figura (c), que obtenemos de aislar de la figura (b) el plano definido por $y = y_1$.



- Debido al desequilibrio de las tensiones de flexión en los extremos de este segmento, debe haber una fuerza ΔF_{yx} que actúe sobre la cara $-y$ para mantener el equilibrio de la fuerza en la dirección x .
- Mostramos esta fuerza de corte positiva ΔF_{yx} en la dirección $-x$ consistente con el hecho de que la cara sobre la que actúa es una cara $-y$.

- Expresando este requisito de equilibrio en forma cuantitativa, tenemos

$$\sum F_x = \left[\int_{A_1} \sigma_x dA \right]_{x+\Delta x} - \Delta F_{yx} - \left[\int_{A_1} \sigma_x dA \right]_x = 0, \quad (3.1)$$

donde las integrales deben calcularse sobre el área sombreada A_1 .

- Sustituyendo (2.10) en (3.1), encontramos

$$\Delta F_{yx} = - \int_{A_1} \frac{M_b + \Delta M_b}{I_{zz}} y dA + \int_{A_1} \frac{M_b}{I_{zz}} y dA = - \frac{\Delta M_b}{I_{zz}} \int_{A_1} y dA$$

- Dividiendo la expresión anterior por Δx en ambos lados y tomando el límite, obtenemos

$$\frac{dF_{yx}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{yx}}{\Delta x} = -\frac{dM_b}{dx} \frac{1}{I_{zz}} \int_{A_1} y dA.$$

- Sustituyendo la condición de equilibrio de momento para el elemento de viga, $dM_b/dx = -V$ se tiene

$$\frac{dF_{yx}}{dx} = \frac{V}{I_{zz}} \int_{A_1} y dA.$$

- Este resultado puede escribirse de manera más concisa introduciendo las siguientes abreviaturas

$$q_{yx} = \frac{dF_{yx}}{dx}, \quad Q = \int_{A_1} y dA.$$

donde q_{yx} es el *flujo de corte*, es la fuerza de corte por unidad de longitud a lo largo de la viga transmitida a través del plano definido por $y = y_1$.

- Siendo el flujo de corte en el mismo sentido en el que dicho término se usa en la discusión de la torsión de ejes huecos de paredes delgadas (Unidad 5D, [Crandall, 1999]– Sección 6.14).
- Mientras que la integral Q es simplemente el primer momento del área sombreada A_1 en la figura (d) alrededor de la superficie neutra.
- Combinando las expresiones anteriores obtenemos la relación para el flujo de corte debido a la flexión

$$q_{yx} = \frac{VQ}{I_{zz}}. \quad (3.2)$$

- Si en presencia de una fuerza de corte, la tensión de flexión está dada por (2.10), entonces (3.2) es una expresión exacta para el flujo de corte.
- El flujo de corte q_{yx} es el resultado de un esfuerzo de corte τ_{yx} distribuido a lo ancho de la viga, b .

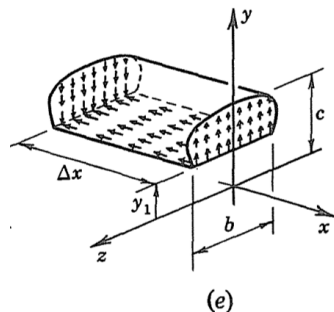
- La derivación realizada no proporciona información sobre la naturaleza de τ_{yx} , pero si *suponemos* que el esfuerzo cortante es uniforme a través de la viga, es posible estimar el esfuerzo cortante τ_{yx} en $y = y_1$ como

$$\tau_{yx} = \frac{q_{yx}}{b} = \frac{VQ}{bI_{zz}}. \quad (3.3)$$

- La expresión (3.3) llamada *fórmula de Colignon*, nos permite calcular la distribución de tensiones tangenciales en las secciones rectas.
- Finalmente, haciendo uso del requisito de equilibrio de momento, estimamos que el esfuerzo cortante en las caras x de la viga sea uniforme en todo el ancho de la viga y de magnitud

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q_{yx}}{b} = \frac{VQ}{bI_{zz}}. \quad (3.4)$$

- En la figura (e) se muestra la naturaleza de la distribución de τ_{yx} dada por (3.4).
- El esfuerzo tiene un valor constante a lo largo de la cara $-y$, y en las caras x varía desde este valor constante en la parte inferior a cero en la parte superior.



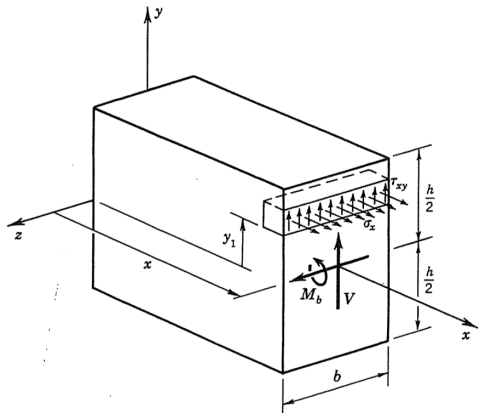
- Puede demostrarse que la teoría anterior es internamente consistente en que ésta define que la resultante de la distribución de tensiones (3.4) sobre la sección transversal es, para una viga de sección transversal arbitraria, la fuerza de corte V (véase el problema 7.43 [Crandall, 1999]).

- En resumen:
 - Hemos asumido que las tensiones de flexión en una viga con una distribución de momento variable están dados por (2.10).
 - Sobre la base de este supuesto y de la consideración del equilibrio, encontramos la distribución del flujo de corte q_{yx} (fuerza por unidad de longitud), dada por (3.2).
 - Finalmente, supusimos que la tensión de corte τ_{yx} es uniforme en todo el ancho del borde b , la cual está dada por (3.4) sobre la cara x (donde Q y b son funciones de y_1).

3.2 Tensión de corte en una viga rectangular

- Un procedimiento alternativo para obtener la distribución de esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular es posible si asumimos desde el principio que los esfuerzos cortantes se distribuyen uniformemente a lo ancho.
- La distribución de esfuerzos en la figura es entonces un caso de **tensión plana** y se aplican las ecuaciones de equilibrio (Unidad 4A, Sección 3.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (3.5)$$



- Si nos ocupamos del caso en el que la fuerza cortante no varía con x , la tensión cortante también será independiente de x , y dado que la segunda expresión de (3.5) se satisface automáticamente ya que se ha supuesto que la tensión normal σ_y es cero².
- Por lo tanto, sustituyendo (2.10) en la primer expresión de (3.5) y usando $dM_b/dx = -V$, obtenemos

$$-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{M_b y}{I_{zz}} \right) = \frac{V}{I_{zz}} y. \quad (3.6)$$

- Ahora integramos (3.6) con respecto a y desde $y = y_1$, donde se va a evaluar τ_{xy} , hasta $y = h/2$, que define la superficie superior de la viga. Obteniendo

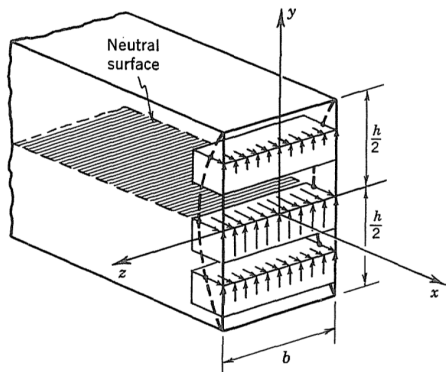
$$\begin{aligned} -\int_{y_1}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy &= \frac{V}{I_{zz}} \int_{y_1}^{h/2} y dy, \\ -[\tau_{xy}]_{y_1}^{h/2} &= \frac{V}{I_{zz}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{h/2}. \end{aligned}$$

²Unidad 6A, Sección 2.4.

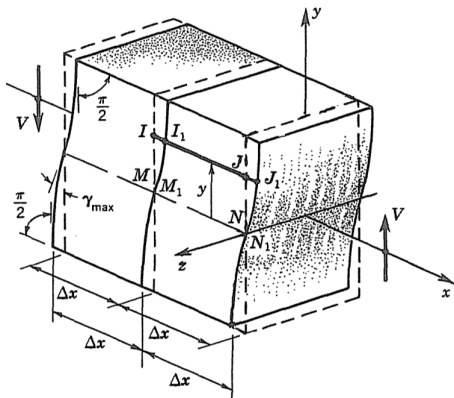
- Debido a que no hay esfuerzo cortante en la superficie superior expuesta de la viga, τ_{xy} es cero en $y = h/2$.
- Así, cuando se sustituyen los límites de integración, obtenemos el siguiente resultado para el esfuerzo cortante en $y = y_1$

$$-(0 - \tau_{xy}(y_1)) = \tau_{xy}(y_1) = \frac{V}{2I_{zz}} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y_1^2 \right). \quad (3.7)$$

- Es decir, *el esfuerzo cortante es máximo en la superficie neutra* y decae en forma parabólica, como se ilustra en la figura.
- ♣ El lector debería verificar que, en el caso de una sección transversal rectangular, la expresión (3.4) se reduce a la misma distribución que (3.7).

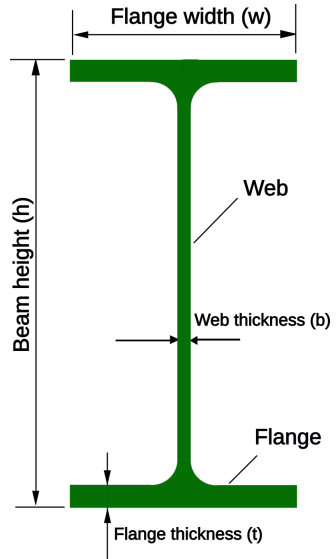
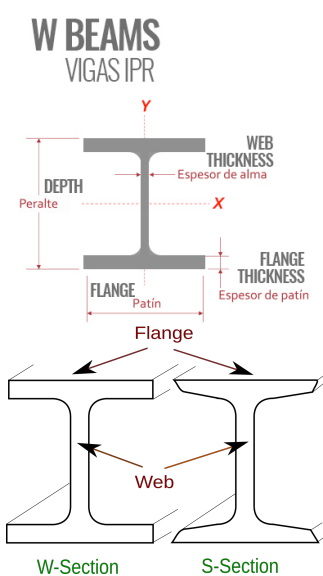


- Si calculamos la deformación cortante en una viga rectangular sustituyendo la distribución de esfuerzos (3.7) en la ley de Hooke, encontramos que la deformación cortante γ_{xy} también varía parabólicamente a través de la sección, desde un máximo en la superficie neutra hasta cero en la arriba y abajo.
- Esto implica que las secciones transversales originalmente planas se distorsionan de la manera ilustrada en la figura.
- Como hemos observado al inicio de esta Sección, si la fuerza cortante es constante a lo largo de la viga, cualquier línea longitudinal IJ no cambia su longitud ya que se deforma en la posición I_1J_1 .



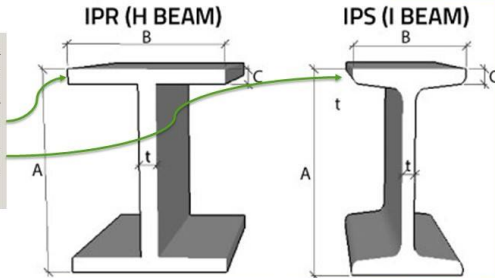
- Debido a las características del alabeo flexional, es de esperar que la presencia de una fuerza cortante constante tenga poco efecto sobre la distribución del esfuerzo de flexión (2.10).
- De hecho, es así. La solución exacta de la teoría de la elasticidad muestra que las expresiones para la curvatura $d\phi/ds$ (2.8) y la tensión normal σ_x (2.10) siguen siendo correctas si $\frac{dV}{dx} = 0$.
- Como se indicó, la expresión (3.2) para el flujo cortante también es exacta en el caso de actuar una fuerza cortante constante.
- Tanto (2.8) como (2.10) poseen un error cuando la fuerza de corte *varía* a lo largo de la viga, no obstante la magnitud del error es pequeña para vigas largas y delgadas y, en consecuencia, (3.2) representa una buena estimación incluso en presencia de una *fuerza de corte variable*.
- Por lo tanto, en cada sección de una viga en la *teoría clásica de vigas*, tomamos los esfuerzos de flexión para distribuirlos de acuerdo con (2.10) y los esfuerzos cortantes transversales para distribuirlos de acuerdo con (3.4) independientemente de cómo varían $M_b(x)$ y $V(x)$ a lo largo de la viga.

3.3 Tensión de corte en una viga I



Las Vigas IPS y las Vigas IPR se disponen horizontalmente con el objetivo de vincular columnas entre ellas. se encargan de soportar las cargas de las losas o los elementos planos colocados sobre ellas además de llevar dichas cargas hacia las columnas, de ésta hacia sus bases y de éstas hacia el suelo.

Las vigas IPS tiene la misma función que las IPR, la diferencia se encuentra en los patines de la viga, ésta tiene los patines redondeados.



La Viga IPR presenta un patín rectangular uniforme y son tres piezas de acero soldado.

La Viga IPS presenta un patín de espesor variable y es compuesta por una sola pieza de acero sólido.

<http://northern-weldarc.com/different-types-uses-steel-beams>

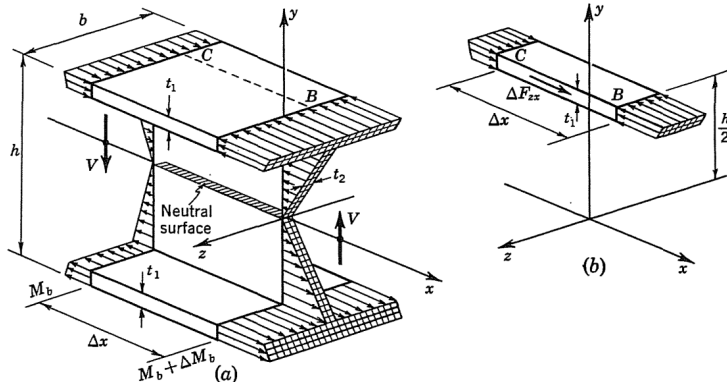
<https://en.wikipedia.org/wiki/I-beam>

- Un perfil doble **T** (o perfil **I** o **H**) es un perfil laminado o armado cuya sección transversal está formada por dos alas y un alma de unión.
- Se usan como vigas de flexión, bajo esfuerzos de torsión pequeños.
- Comportamiento general

https://es.wikipedia.org/wiki/Perfil_doble_T

- Todos los perfiles doble T presentan un buen comportamiento para la flexión provocada por un momento flector cuya dirección vectorial sea perpendicular al alma central.
- Bajo esa solicitud estos perfiles son una solución muy económica.
- Por esa razón los perfiles doble T se usan para vigas en flexión recta.
- Sin embargo, los perfiles doble T no tienen tan buen desempeño ante un momento flector perpendicular a las alas o en casos de flexión esviada.
- Su principal problema es su escasa resistencia frente a torsión.
- En casos de torsión grande emplear perfiles cerrados huecos.
- Otro hecho que debe tenerse en cuenta es que cuando un perfil doble T se somete a torsión sufre alabeo seccional, por lo que a la hora de calcular las tensiones es importante tener en cuenta el módulo de alabeo y el bimomento que sufre el perfil.

- Si examinamos la viga I en la figura, obtendremos una mejor comprensión de la distribución del esfuerzo cortante en este tipo de vigas.



- En la figura (b) se muestra un pequeño segmento que ha sido cortado desde el ala superior por un plano vertical a través de BC .

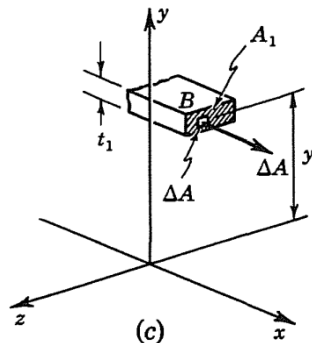
- Vemos que en el corte BC debe haber una fuerza cortante ΔF_{zx} en la cara z positiva para mantener el equilibrio en la dirección x .
- Si realizamos un análisis similar al que condujo a (3.2), obtenemos para el flujo cortante en la cara z positiva el resultado

$$q_{zx} = -\frac{VQ}{I_{zz}}, \quad (3.8)$$

donde Q es el primer momento del área sombreada A_1 en la figura (c) alrededor del eje z .

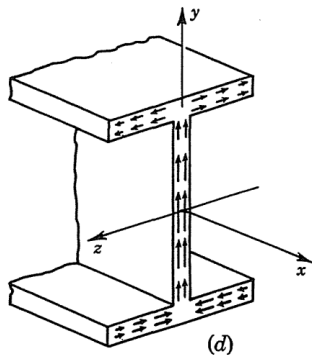
- Si asumimos que el esfuerzo cortante es uniforme en todo el espesor t_1 de la figura (b) (que se una mejor aproximación a medida que la sección es más delgada), podemos estimar que el esfuerzo cortante en el punto B del ala es

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{q_{zx}}{t_1} = -\frac{VQ}{t_1 I_{zz}}. \quad (3.9)$$



- El esfuerzo cortante τ_{xy} en el alma de la viga se puede estimar a partir de (3.4).

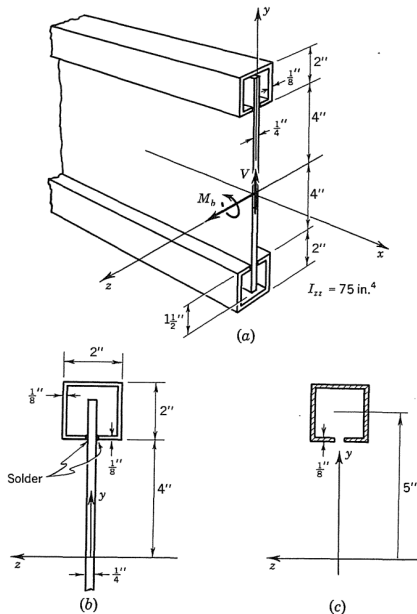
- En la figura (d) mostramos la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección transversal de la viga; en cada ala el esfuerzo τ_{xz} varía linealmente desde un máximo en la unión con el alma hasta cero en el borde, mientras que en el alma el esfuerzo τ_{xy} tiene una distribución parabólica.



- También hay tensiones τ_{xy} en los patines, pero son pequeñas en comparación con las tensiones τ_{xz} ilustradas en el dibujo.
- La distribución de la tensión en la unión del alma y el patín o ala es bastante complicada. Las vigas en I laminadas estándar están provistas de generosos filetes en estos puntos para reducir la concentración de esfuerzos.

- ♠ En la teoría de vigas de Euler–Bernoulli o de ingeniería, *los flujos cortantes en flexión* se obtienen simplemente a partir del *requisito de equilibrio del balance de fuerzas a lo largo del eje de la viga*.
- En el siguiente ejemplo se ofrece otra ilustración de este cálculo.

- **Ejemplo 3.1:** Al hacer la viga de latón de la figura (a), las secciones de caja se sueldan a la placa de 1/4 de pulgada, como se indica en la figura (b).
- Si el esfuerzo cortante en la soldadura no debe exceder los 1500 psi, ¿cuál es la fuerza cortante máxima que puede soportar la viga?
- La soldadura tiene que soportar la tensión de flexión no balanceada que actúa sobre el área de la sección transversal de la caja que se muestra en la (c).



● **Ejemplo 3.1 (cont.):**

- Suponiendo que el flujo de corte es igual en cada unión de soldadura, el flujo de corte q_{zx} en cada unión está dado por (3.8)

$$2q_{zx} = \frac{VQ}{I_{zz}}, \quad (\text{a})$$

donde Q es el primer momento del área sombreada en la figura (c) alrededor del eje z .

- Si aproximamos esta área por el anillo cuadrado completo, tenemos

$$Q = 5in.[(2in.)^2 - (1.75in.)^2] = 4.7in.^3$$

- Suponiendo que el esfuerzo cortante tiene el valor constante de 1500 psi a través de cada junta de soldadura, el flujo cortante en cada junta es

$$q_{zx} = (1500psi)\left(\frac{1}{8}in.\right) = 188lb/in.$$

- Sustituyendo estos valores en (a), obtenemos

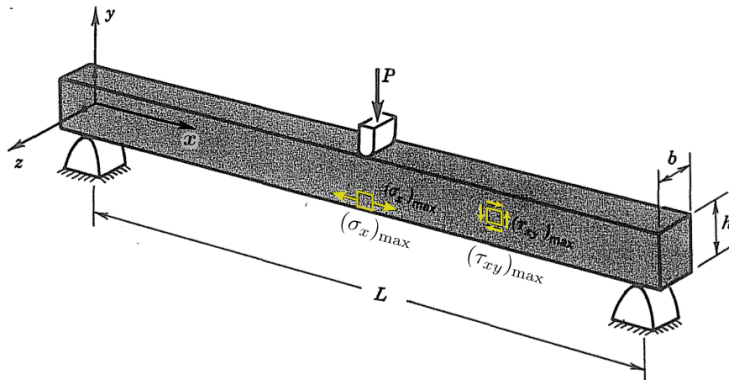
$$V = \frac{2q_{zx}I_{zz}}{Q} = \frac{2(188lb/in.)(75in.^4)}{4.7in.^3} = 6000lb,$$

como la fuerza cortante máxima que la viga puede soportar sin exceder un esfuerzo cortante promedio de 1500 psi en las juntas de soldadura.

3.4 Magnitud comparativa de tensiones de flexión y de corte

- Es de interés investigar las magnitudes comparativas de los esfuerzos de flexión y los esfuerzos cortantes en las vigas.
- La relación entre los valores máximos de estos esfuerzos será diferente para diferentes vigas y para diferentes tipos de cargas sobre la misma viga.
- Para formar una idea de los factores importantes que afectan esta relación investigaremos a continuación un ejemplo específico, una viga rectangular simplemente soportada en los extremos y cargada en el centro.

- **Ejemplo 3.2:** Una viga rectangular se lleva sobre soportes simples y se sujeta a una carga central, como se ilustra en la figura.



- Deseamos encontrar la relación entre el esfuerzo cortante máximo $(\tau_{xy})_{\max}$ y el esfuerzo de flexión máximo $(\sigma_x)_{\max}$.
- Los esfuerzos de flexión son de igual magnitud en la parte superior e inferior de la viga, compresión en la parte superior y tensión en la parte inferior.

● **Ejemplo 3.2 (cont.):**

- El esfuerzo de flexión máximo se produce en la mitad del tramo donde el momento de flexión tiene su valor máximo de

$$M_b = \frac{PL}{4}. \quad (\text{a})$$

- Del Ejemplo 2.1 tenemos

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12}. \quad (\text{b})$$

- Sustituyendo (a) y (b) en (2.10), encontramos que el esfuerzo de flexión en la parte inferior ($y = -h/2$) es

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{-(PL/4)(-h/2)}{bh^3/12} = \frac{3}{2} \frac{PL}{bh^2}. \quad (\text{c})$$

- La fuerza cortante tiene la magnitud constante $P/2$ entre la carga y cada soporte. El esfuerzo cortante es un máximo en la superficie neutra, es decir, en la altura media de la viga, como se ilustra en la figura. Sustituyendo $y_1 = 0$ en (3.7), encontramos

$$(\tau_{xy})_{\text{máx}} = \frac{(P/2)}{2(bh^3/12)} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - 0^2 \right] = \frac{3}{4} \frac{P}{bh}. \quad (\text{d})$$

Ejemplo 3.2 (cont.):

- Observamos que (d) establece que el esfuerzo cortante máximo en una viga rectangular es una vez y media el esfuerzo cortante promedio.
- Combinando (c) y (d), obtenemos la relación entre el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo flector máximo en la viga de la figura,

$$\frac{(\tau_{xy})_{\text{máx}}}{(\sigma_x)_{\text{máx}}} = \frac{1}{2} \frac{h}{L}. \quad (\text{d})$$

- Por tanto, los esfuerzos de flexión y cortante son de magnitud comparable sólo cuando L y h son de la misma magnitud.
- Dado que L es mucho mayor que h en la mayoría de las vigas (digamos, $L > 10h$), se puede ver en (e) que los esfuerzos cortantes τ_{xy} generalmente serán un orden de magnitud menor que los esfuerzos de flexión σ_x .

Ejercicio 3.1: Determine y muestre que el esfuerzo cortante promedio $(\tau_{xy})_{\text{avg}}$ en una viga rectangular es

$$(\tau_{xy})_{\text{avg}} = \frac{3}{2} (\tau_{xy})_{\text{máx}}.$$

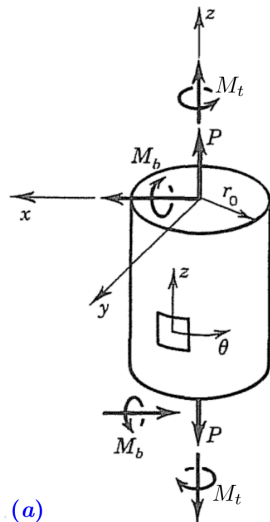
- Si se coloca una carga diferente en la viga en la figura del Ejemplo 3.2, se encontrará nuevamente que la relación de los esfuerzos máximos depende de la relación entre la profundidad y la longitud de la viga, aunque, por supuesto, el factor de proporcionalidad será diferente de que acaba de encontrar (vea el problema 7.44 [Crandall, 1999]).
- Si se investigan vigas de otra forma de sección transversal. se obtienen resultados similares.
- Sin embargo, el factor de proporcionalidad depende de manera importante de la forma de la sección. Por ejemplo, el factor de $\frac{1}{2}$ en la expresión (e) puede ser tan grande como 3 ó 4 para vigas en I con almas delgadas (vea el problema 7.45 [Crandall, 1999]).

4. Tensiones combinadas en flexión

- Si uno está interesado en la posibilidad de cedencia, fractura o pandeo localizado de una viga, es necesario examinar la distribución de esfuerzos en detalle y determinar el estado de esfuerzos en puntos críticos de la viga.
- Para ilustrar el tipo de análisis involucrado cuando una viga transmite tanto fuerza cortante como momento flector, consideramos el siguiente ejemplo.

- Cuando hay una fuerza longitudinal además de cortante y flexión, el análisis es similar al descrito en el Ejemplo 4.1, con la adición de un esfuerzo axial uniforme debido a la fuerza longitudinal.
- Un tipo frecuente de carga es aquella en la que una viga transmite una fuerza longitudinal y/o un momento de torsión además de una fuerza cortante y un momento flector, *flexo-torsión*.
- En el siguiente ejemplo, consideramos la combinación de momento flector, momento de torsión y fuerza longitudinal.

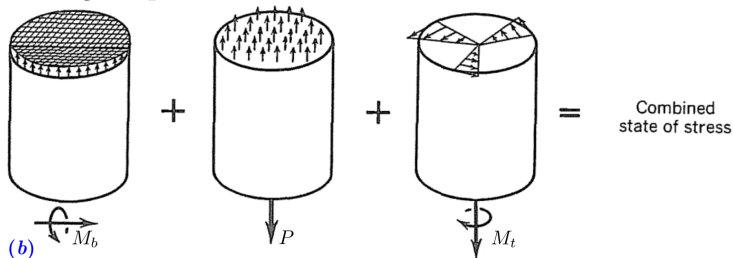
- **Ejemplo 4.2:** Un eje circular elástico transmite simultáneamente un momento flector M_b , una fuerza de tracción axial P y un momento de torsión M_t . Deseamos estudiar el estado del estrés combinado.
- En la figura (a) se muestran los esfuerzos combinados en un eje circular sólido debido a flexión, tensión y torsión.
- Este problema representa la adición de un momento flector a la condición de carga considerada en el [Unidad 5A, Ejemplo 2.6](#), siendo nuestro método de abordaje similar el empleado en ese caso.
- Es decir haciendo uso del principio de superposición.
- Observe en la figura que M_b es tal que causa tensión cuando y es positivo.



◀ ◻ ▶ (a)

● **Ejemplo 4.2 (cont.):**

- En la figura (b) se esbozan las distribuciones de esfuerzos individuales para las cargas separadas.



- Debido al momento flector, tenemos la distribución dada por (2.10)

$$\sigma_{z1} = + \frac{M_b y}{I_{xx}}.$$

- Debido a la fuerza de tracción axial P la tensión axial es uniforme

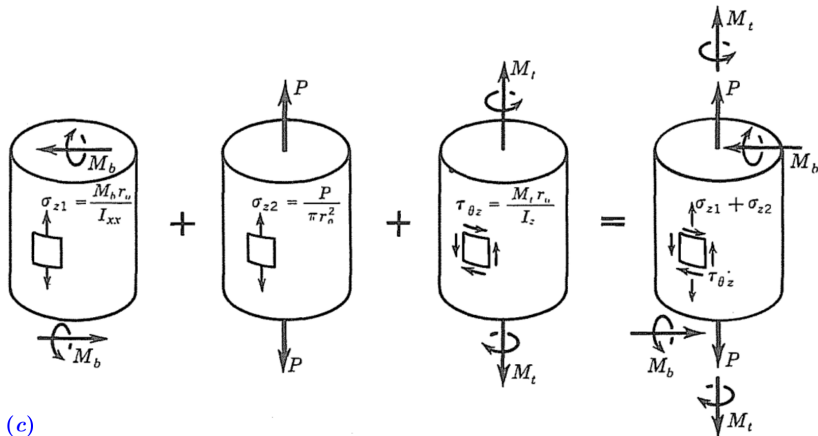
$$\sigma_{z2} = \frac{P}{\pi r_0^2}.$$

- Finalmente, la distribución debido al momento de torsión es dada por

$$\tau_{\theta z} = \frac{M_t r}{I_z}.$$

● Ejemplo 4.2 (cont.):

- En la figura (c) se muestran las tensiones individuales que actúan sobre un elemento en $y = r_0$. Estos se superponen para dar el estado de esfuerzo combinado resultante a la derecha.

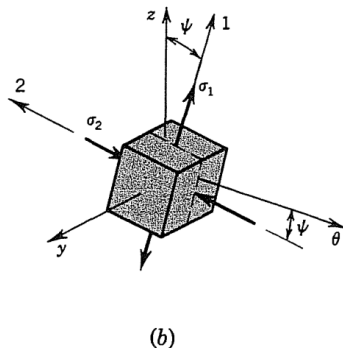
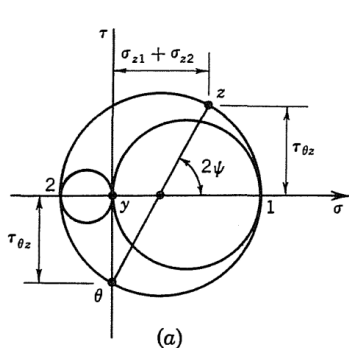


(c)

- En este elemento, las distribuciones σ_{z1} y $\tau_{\theta z}$ tienen su mayor magnitud.

● Ejemplo 4.2 (cont.):

- El diagrama circular de Mohr muestra las direcciones principales y tensiones principales en el punto más crítico, $y = r_0$, el cual se esboza en la figura (a), mientras que las direcciones principales de tensión se indican en la figura (b).



- Se debe tener en cuenta que este elemento tiene una superficie libre de cargas y, por lo tanto, el estado es de tensión plana.

5. Energía elástica en flexión

- La energía de deformación en un cuerpo linealmente elástico sometido a una distribución arbitraria de esfuerzos y deformaciones viene dada por la [fórmula de Clapeyron](#)³.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV, \quad (5.1)$$

donde la integración es sobre todo el volumen de la viga V .

- En este apartado nos especializamos en ese resultado a vigas sometidas a flexión.
- Consideramos primero el [caso de flexión pura](#) donde el único componente de tensión que no desaparece es la tensión longitudinal (2.10).
- La energía de deformación total (5.1) se reduce así a

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_V \frac{\sigma_x}{2E} dV. \quad (5.2)$$

³Unidad 3B, Sección 2.4.

- Sustituyendo σ_x de (2.10), encontramos

$$U = \int_V \frac{1}{2E} \left(\frac{M_b y}{I_{zz}} \right)^2 dV = \int_L \frac{1}{2E} \left(\frac{M_b}{I_{zz}} \right)^2 dx \int_A y^2 dA,$$

donde las integraciones están sobre la longitud L y el área de la sección transversal A de la viga.

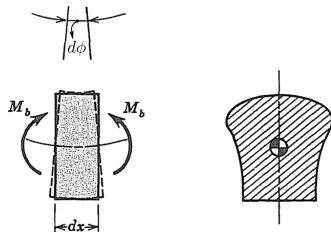
- Dado que la última integral es solo el segundo momento del área I_{zz} , la energía de deformación por flexión es

$$U = \int_L \frac{M_b^2}{2EI_{zz}} dx, \quad (5.3)$$

es decir, en el caso de flexión pura.

- La expresión anterior, Ec. (5.3), también puede derivarse considerando cada elemento diferencial de longitud dx para actuar como un resorte de flexión.

- En la figura se muestra un elemento diferencial de la viga el cual se dobla a través del ángulo $d\phi$ bajo la acción del momento flector M_b .



- Si, en la figura, los valores finales del momento flector y del ángulo flector son M_b y $d\phi$, respectivamente, el trabajo realizado durante un proceso de carga en el que estos crecen en proporción es

$$dU = \frac{1}{2} M_b d\phi = \frac{1}{2} M_b \frac{d\phi}{dx} dx.$$

- Cuando (2.8) se sustituye por $d\phi/dx$ y el resultado se integra sobre la longitud de la viga, obtenemos (5.3) nuevamente.

- Como hemos visto previamente, cuando una viga se somete a cortante transversal además de flexión, existen, en general, componentes de esfuerzo cortante transversal τ_{xy} y τ_{xz} además del esfuerzo de flexión σ_x .
- La energía de deformación total (5.1) se convierte en

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \\
 &= \int_V \frac{\sigma_x}{2E} dV + \int_V \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} dV,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

- La primera integral de (5.4) es idéntica en forma a la energía de deformación (5.3) en flexión pura.
- La segunda integral de (5.4) es la contribución a la energía de deformación debida a los esfuerzos cortantes transversales.
- Para miembros delgados, la contribución debida a los esfuerzos cortantes transversales τ_{xy} y τ_{xz} , es casi siempre insignificante en comparación con la acción de la tensión longitudinal σ_x .

- La afirmación precedente puede inferirse de la discusión en la [Sección 4](#) sobre las magnitudes comparativas de los esfuerzos de flexión y cortante.
- Si σ_x es un orden de magnitud mayor que τ_{xy} y τ_{xz} , entonces, dado que las integrales en (5.4) dependen de los cuadrados de las tensiones, vemos que la primera integral es *dos* órdenes de magnitud mayor que la segunda.
- Como consecuencia, es común ignorar la contribución a la energía de deformación debida a los esfuerzos cortantes transversales.
- La fórmula de flexión pura (5.3) se usa frecuentemente para representar la energía de deformación total en una viga, ya sea que haya cortante transversal o no.
- En cualquier caso particular, la magnitud de la segunda integral en (5.4) es posible de ser estimada, siempre que se pueda determinar una distribución aproximada de τ_{xy} y τ_{xz} .

Ejercicio 6.1: Considere la viga rectangular del Ejemplo 3.2, calcule la energía de deformación total y muestre que las magnitudes relativas de las contribuciones a la flexión y al corte está dada como

$$\frac{U_s}{U_b} = \frac{6}{5} \frac{E}{G} \left(\frac{h}{L} \right)^2 = \frac{12}{5} (1 + \nu) \left(\frac{h}{L} \right)^2,$$

donde U_b es la contribución de flexión a la energía de deformación, y U_s es la contribución de corte transversal a la energía.

- Por lo tanto, una viga con $L > 10h$ y con una relación de Poisson $\nu = 0.28$, la contribución por corte es menos del 3 % de la contribución de flexión.
- Para propósitos de ingeniería, es permisible ignorar la contribución de cortante transversal al evaluar la energía de deformación de la viga considerada.
- Para vigas con otras cargas y otras formas de sección transversal, la relación de U_s a U_b es siempre proporcional al cuadrado de la relación entre la profundidad de la viga y la longitud de apoyo.
- Sin embargo, el factor de proporcionalidad depende del patrón de carga y de la forma de la sección transversal. Por ejemplo, el factor numérico de 6/5 puede ser tan grande como 12 para vigas **I**.

6. Inicio de fluencia en flexión

- Cuando una viga se somete a flexión pura, el estado de tensión es uno en el que las tensiones principales vienen dadas por

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

que es el estado de estrés que existe en una prueba de tensión (o compresión).

- Por tanto, si el material tiene un límite de fluencia σ_Y en tensión simple, el criterio de fluencia en flexión pura es simplemente que la fluencia ocurrirá cuando

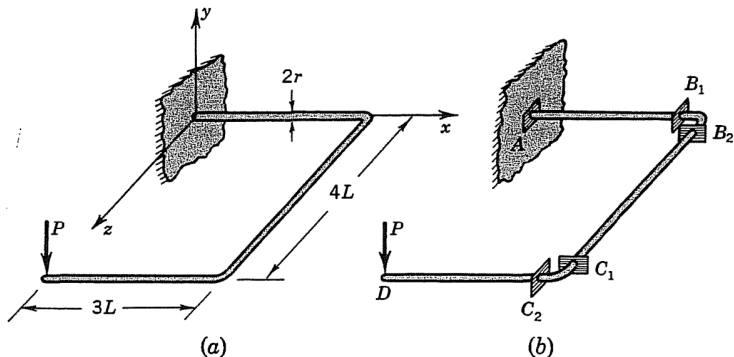
$$\sigma_x = \sigma_Y.$$

- Tan pronto como el estado de tensión se vuelve más complejo (p. ej. mediante la adición de fuerzas cortantes o de torsión o fuerzas longitudinales), el inicio de la fluencia por deformación incluye el tipo de análisis de tensión combinado descrito en la [Sección 4](#).

- Hay dos criterios disponibles para señalar el inicio del rendimiento: el criterio de Mises y el criterio de esfuerzo cortante máximo⁴.
- La determinación del punto crítico donde la estructura cede y las condiciones de carga que lo producen, incluso en estructuras relativamente simples, puede no ser obvio.
- Por lo cual en la práctica ingenieril es preciso realizar cálculos para más de un punto bajo sospecha, como se ilustra en el siguiente ejemplo.
- En la práctica profesional de ingeniería mecánica es común que los efectos del alabeo de las secciones transversales deban ser considerados.

⁴También conocido como criterio de rendimiento de Tresca

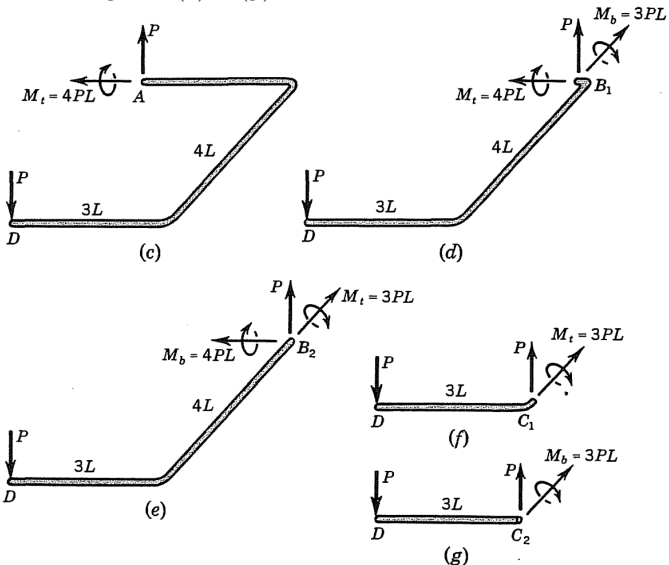
- **Ejemplo 6.1:** Una varilla circular de radio r se dobla en forma de U para formar la estructura que se muestra en la figura (a).



- El material de la varilla tiene un límite elástico σ_Y en tensión simple.
- Deseamos determinar la carga P que hará que la fluencia comience en algún punto de la estructura.
- Como se indica en la figura (b), hay 5 ubicaciones posibles para el punto con mayor tensión crítica.

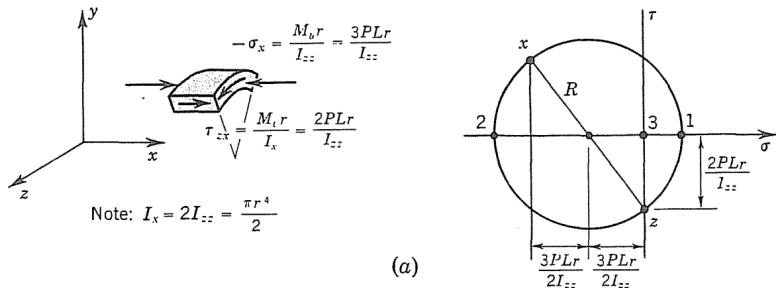
● **Ejemplo 6.1 (cont.):**

- Los momentos de flexión y torsión que actúan en estas ubicaciones se muestran en la figuras (c) a (g).



● Ejemplo 6.1 (cont.):

- De considerar los 5 puntos de mayor tensión crítica, la elección se reduce a la ubicación B_1 o B_2 ; pero no es obvio cuál de estos es el más crítico.
- Los esfuerzos cortantes por flexión y torsión que actúan sobre un elemento en la parte superior de la viga en la ubicación B_1 se indican en la figura (a).



- Aunque existe una fuerza cortante P en esta ubicación, el esfuerzo cortante correspondiente τ_{xy} es cero en la parte superior e inferior de la viga donde los esfuerzos cortantes por flexión y torsión son máximos.

● **Ejemplo 6.1** (*cont.*):

- El radio del círculo de Mohr para el elemento en B_1 , que se muestra en la figura (a), es

$$R = \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{PLr}{I_{zz}}\right)^2 + \left(2 \frac{PLr}{I_{zz}}\right)^2} = \frac{5}{2} \frac{PLr}{I_{zz}}. \quad (\text{a})$$

- Usando (a), encontramos que las tensiones principales en el punto son

$$\sigma_1 = +\frac{PLr}{I_{zz}}, \quad \sigma_2 = -4\frac{PLr}{I_{zz}}, \quad \sigma_3 = 0. \quad (\text{b})$$

● **Ejemplo 6.1 (cont.):**

- Sustituyendo (b) en el criterio de cedencia de Mises,

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{PLr}{I_{zz}} + 4 \frac{PLr}{I_{zz}} \right)^2 + \left(-4 \frac{PLr}{I_{zz}} - 0 \right)^2 + \left(0 - \frac{PLr}{I_{zz}} \right)^2 \right]} = \sigma_Y,$$

obtenemos el resultado de que la fluencia comienza cuando

$$P = 0.218 \frac{I_{zz} \sigma_Y}{Lr}.$$

- Sustituyendo (b) en el criterio de esfuerzo cortante máximo,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{PLr}{I_{zz}} + 4 \frac{PLr}{I_{zz}} \right) = \frac{\sigma_Y}{2},$$

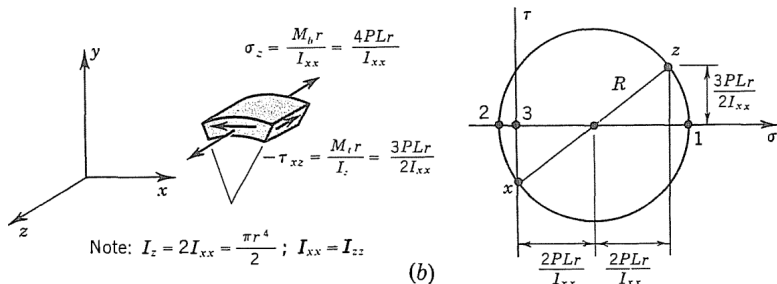
encontramos que la cedencia se predice cuando

$$P = 0.200 \frac{I_{zz} \sigma_Y}{Lr}.$$

- Note la discrepancia del 9 % entre las cargas predichas por los dos criterios.

● Ejemplo 6.1 (cont.):

- Los esfuerzos cortantes por flexión y torsión que actúan sobre un elemento en la parte superior de la viga en la ubicación B_2 se indican en la figura (b).



- Repetiendo los cálculos anteriores para el elemento en la parte superior de la viga en la ubicación B_2 , encontramos que los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = +\frac{9 PLr}{2 I_{xx}}, \quad \sigma_2 = -\frac{1 PLr}{2 I_{xx}}, \quad \sigma_3 = 0.$$

● Ejemplo 6.1 (cont.):

- Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de Mises, el rendimiento ocurre cuando

$$P = 0.210 \frac{I_{xx} \sigma_Y}{Lr},$$

mientras que de acuerdo con el criterio de esfuerzo cortante máximo, la fluencia ocurre cuando

$$P = 0.200 \frac{I_{xx} \sigma_Y}{Lr}.$$

- El criterio de esfuerzo cortante máximo predice el rendimiento en las ubicaciones B_1 y B_2 con la misma carga, lo que indica que los círculos de Mohr en la figura (a) y (b) son del mismo tamaño.
- El criterio de Mises identifica B_2 como la ubicación crítica y predice el rendimiento allí con una carga un 5 % mayor que la carga para el rendimiento de acuerdo con el criterio de esfuerzo cortante máximo.

Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units.
McGraw-Hill, New York, EEUU, 1999.



Stephen Timoshenko (1957).
Resistencia de materiales, I, Teoría elemental y problemas. Espasa-Calpe,
Madrid, España, 1957.



Luis Ortiz Berrocal (2007).
Resistencia de materiales, 3ra Ed., McGraw-Hill, Madrid, España 2007.



Russel C. Hibbeler (2011).
Mecánica de Materiales. 8va Ed. Pearson, México, 2011.



Sadd, Martin H. (2014).
Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Academic Press, Boston,
EEUU, 2014.

Fin

