

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 3 B

## Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcrai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcrai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, setiembre de 2019



- 4 4. Estados planos en coordenadas polares
  - 4.1 Distribuciones de tensión axisimétricas
  - 4.2 Cilindro de pared gruesa sometido a presión uniforme
  - 4.3 Pequeños agujeros circulares en placas tensionadas
  - 4.4 Tensiones en discos y cilindros rotantes
  - 4.5 Discos rotantes de espesor variable

## 4. Estados planos en coordenadas polares

- In discussing problems with circular boundaries, it is more convenient to use the cylindrical coordinates  $r, \theta, z$ . In the case of plane-stress or plane-strain problems, we have  $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$  and the other stress components as functions of  $r$  and  $\theta$  only. Hence the *cylindrical coordinates* reduce to the *polar coordinates* in this case.
- From a cartesian to a polar description:

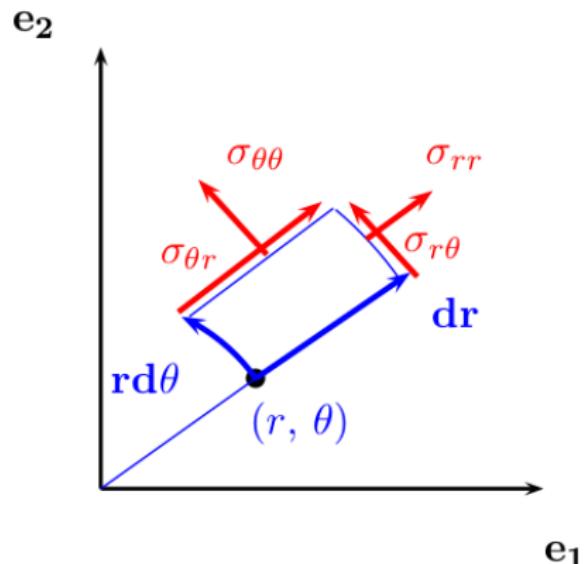
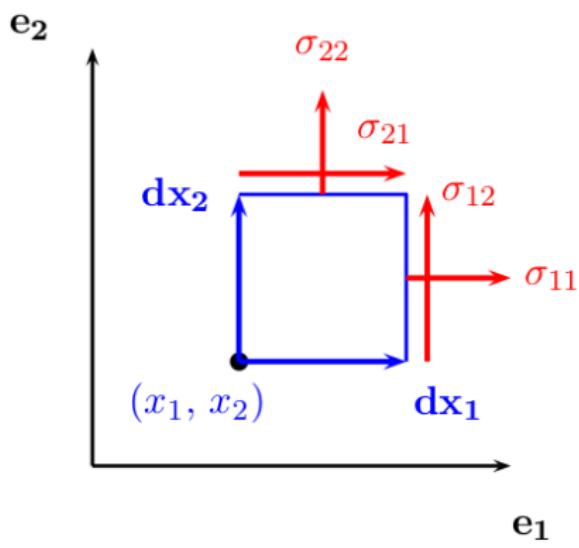
$$x_1, x_2 \rightarrow r, \theta$$

$$u_1, u_2 \rightarrow u_r, u_\theta$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \rightarrow \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$$

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \rightarrow \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$$

- Stress components on an area element in cartesian and in polar coordinates.



- *Biharmonic operator in polar coordinates*

In cartesian coordinates:  $\phi = \phi(x, y)$ .

$$\begin{aligned}\nabla^4 \phi &= \nabla^2 \nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ &= \phi_{,xxxx} + 2\phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy}\end{aligned}$$

We seek to express  $\phi$  as a function of  $r, \theta$ , i.e.  $\phi = \phi(r, \theta)$  and its corresponding  $\nabla^4 \phi(r, \theta)$  upon a transformation to polar coordinates:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right).$$

The Laplacian can then be written as:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = \phi_{,xx} + \phi_{,yy} = \phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta}}$$

This allows us to write the biharmonic operator as:

$$\boxed{\nabla^4 \phi = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = \left[ (\cdot)_{,rr} + \frac{1}{r} (\cdot)_{,r} + \frac{1}{r^2} (\cdot)_{,\theta\theta} \right] \left[ \phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \right]}$$

- Expressions for the polar stress components:  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  can be obtained by noticing that any point can be considered as the origin of the  $x$ -axis, so that:

$$\sigma_r = \sigma_x \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \rightarrow \boxed{\sigma_r = \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta}}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_y \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \rightarrow \boxed{\sigma_\theta = \phi_{,rr}}$$

- To obtain  $\tau_{r\theta} = \tau_{xy} \Big|_{\theta=0} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{\theta=0}$ , we need to evaluate  $\phi_{,xy}$  in polar coordinates:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \left[ \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right],$$

Then

$$\boxed{\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{,r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)}$$

- The differential equations of stress equilibrium in polar coordinates are:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta,\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ , \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta} + \tau_{r\theta,r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0.\end{aligned}$$

- The strain-displacement relations in polar coordinates are

$$\varepsilon_r = u_{,r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}v_{,\theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{v}{r}$$

- Let us now consider the case of plane stress. The stress-strain relations in polar coordinates are

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta}.\end{aligned}\tag{1}$$

## 4.1 Distribuciones de tensión axisimétricas

- We now consider problems with symmetry with respect to the  $z$ -axis.
- In this case, there cannot be any dependence of the field variables on  $\theta$  and all derivatives with respect to  $\theta$  should vanish. In addition,  $\sigma_{r\theta} = 0$  by symmetry (i.e. because of the independence on  $\theta$   $\sigma_{r\theta}$  could only be constant, but that would violate equilibrium). Then the second equilibrium equation is identically 0.
- The first equation becomes (body forces ignored):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2)$$

- **Ejercicio:** Shows that the biharmonic equation in the axisymmetric case is given by

$$\phi^{IV} + \frac{2}{r}\phi''' - \frac{1}{r^2}\phi'' + \frac{1}{r^3}\phi' = 0 \quad (3)$$

- We obtain a single ordinary differential equation for  $\phi(r)$  with variable coefficients.
- The general solution may be obtained by first reducing the equation to one with constant coefficients by making the substitution  $r = e^t$ ,  $r'(t) = e^t$ ,  $t = \log r$ ,  $t'(r) = \frac{1}{r} = e^{-t}$

$$\phi'(r) = \phi'(t)t'(r) = \phi'(t)e^{-t}, \quad (\phi'(r))' = (\phi'(t))'e^{-t}$$

$$\phi''(r) = (\phi'(t)e^{-t})'(t)e^{-t} = e^{-2t}(-\phi'(t) + \phi''(t))$$

$$\phi'''(r) = e^{-3t}(2\phi'(t) - 3\phi''(t) + \phi'''(t))$$

$$\phi^{IV}(r) = e^{-4t}(-6\phi'(t) + 11\phi''(t) - 6\phi'''(t) + \phi^{IV}(t))$$

Multiply equation (3) by  $r^4$  and replace these results to obtain:

$$r^4\phi^{IV} + 2r^3\phi''' - r^2\phi'' + r\phi = \boxed{\phi^{IV}(t) - 4\phi'''(t) + 4\phi''(t) = 0} \quad (4)$$

To solve this, assume

$$\phi = e^{st}, \quad \phi' = se^{st} = s\phi, \quad \phi'' = s^2\phi, \quad \phi''' = s^3\phi, \quad \phi^{IV} = s^4\phi.$$

Then:  $(s^4 - 4s^3 + 4s^2)e^{st} = 0 \iff s^2(s^2 - 4s + 4) = 0$ .

- **Ejercicio:** Obtain the stress Airy function by solving the biharmonic equation in the axisymmetric case for a general case. First, we use the previous result, such that  $\phi$  is given by

$$\phi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}$$

Replace  $t = \log r$

$$\boxed{\phi(r) = C_1 + C_2 \log r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \log r} \quad (5)$$

The stresses follow from:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \phi_{,r} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \log r + 1), \\ \sigma_\theta &= \phi_{,rr} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \log r + 3). \end{aligned} \quad (6)$$

This constitutes the most general stress field for axisymmetric problems. We will now consider examples of application of this general solution to specific problems. This involves applying the particular boundary conditions of the case under consideration in terms of applied boundary loadings at specific locations (radii) including load free boundaries.



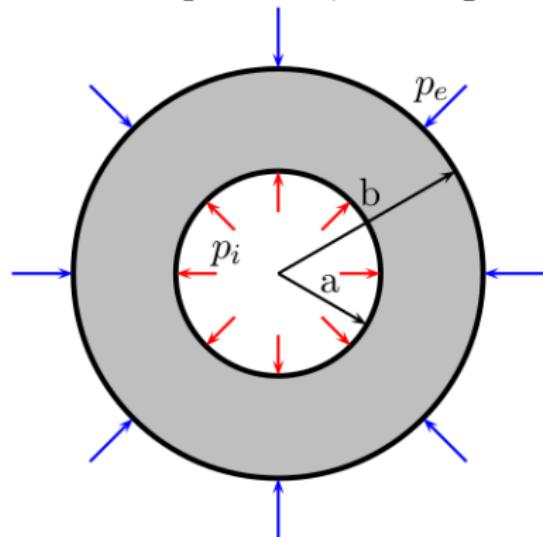
## 4.1 Cilindro de pared gruesa sometido a presión uniforme

- Consider the case of a cylinder of internal radius  $a$  and external radius  $b$  subject to both internal and external pressure, see Figure.

The boundary conditions for this case are

$$\sigma_r(r = a) = -p_i,$$

$$\sigma_r(r = b) = -p_e.$$



- The solution of this problem is due to Lamé, “Leçons sur la théorie de l’élasticité”, Paris, 1852.

- **Ejercicio:** Obtain the distribution of radial and hoop stresses by applying the boundary conditions to specialize the general solution in equation (6) to this problem.

Consider plain stress state, such that  $u = \frac{2(1-\nu)}{E} C_3 r - \frac{(1+\nu)}{E} \frac{C_2}{r}$ , whit  $C_4 = 0$ , then

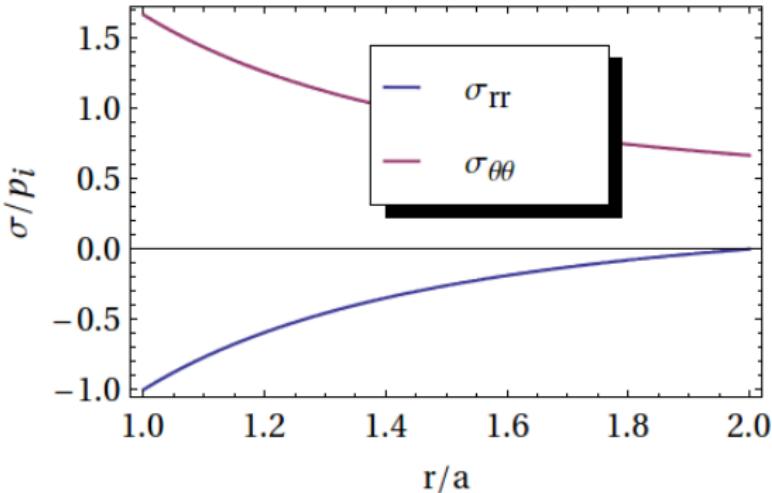
$$\sigma_r(r) = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

- The solution for the stresses do not depend on the elastic properties of the material.
- The stresses in the plane do not change whether we are in plane stress or strain. However, the out-of-plane stress  $\sigma_z$  is of course zero in plane stress and in plane strain it would be

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} = \text{constant!!}$$

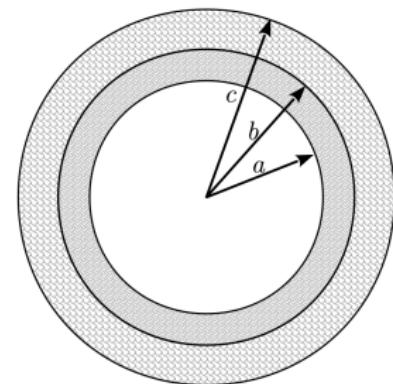
- Sketch the solution  $\sigma_r(r)$  and  $\sigma_\theta(r)$  normalized with  $p_i$  for  $p_e = 0$  and  $b/a = 2/1$  and verify your intuition on the stress field distribution



- As can be seen from the figure, the maximum stresses happen at the inner radius and decrease toward the boundary. The radial component vanishes at the outer boundary as it should, but the hoop stress does not.

- The pressurized cylinder problem solution can be used to study the stresses in the case of *shrink fit* or *force fit*. There are many practical cases where it is desirable to force or shrink an external member on a shaft or wheel.
- The inner diameter of the external member is usually made slightly less than the external diameter of the shaft or wheel. If the external cylinder is expanded by heating, slipped over the shaft or wheel, and then allowed to cool, we obtain a *shrink fit*. Steel tires for locomotives are shrunk onto the wheels.
- *Force fits* are obtained by pressing the hub onto the shaft. In either case, once the two parts are fitted together, they exert on one another a pressure sufficient to prevent any relative movement, and it is often required to find the pressure which will be entailed by a given difference in diameter, or *interference*.

- **Ejercicio:** Suppose that two cylinders are engaged by *shrink fit* or *force fit* so that, after assembly, the inner cylinder has radii  $a$  and  $b$  and the outer cylinder has radii  $b$  and  $c$  (Figure).
- Thus, the inner cylinder, after disengagement, will therefore have an external radius  $b + u_1$ , while the outer cylinder will have an internal radius  $b + u_2$ .
- When  $a = 0$ , this gives us the case of a cylinder shrunk on a solid shaft.
- Shows that the difference in diameter corresponding to a radial pressure  $p$ , after disengagement is given by



$$\delta = 2(u_1 - u_2) = \frac{4b^3(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \frac{p}{E},$$

when both cylinders are made of the same material.

- **Ejercicio (cont.):** Two cylinders engaged by *shrink fit* or *force fit*.

- *Solution*

- Let  $p$  be the radial pressure between the two cylinders. If these cylinders were disengaged, the inner cylinder would evidently expand and the external cylinder would contract.
- By the principle of superposition, the removal of the pressure  $p$  is equivalent to the imposition of a negative  $p$  on the outer surface of the inner cylinder and on the inner surface of the outer cylinder.
- Thus, if we let  $p_i = 0$ ,  $p_e = -p$ , and  $r = b$ , we obtain the increase  $u_1$  in the external radius  $b$  of the inner cylinder

$$u_1 = \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu \right) \frac{bp}{E}.$$

- Similarly, the radial displacement of the inner surface of the outer cylinder can be found by substituting  $p_i = -p$ ,  $p_e = 0$ ,  $r = b$  and changing the symbols  $a$  and  $b$  to  $b$  and  $c$ , respectively, then

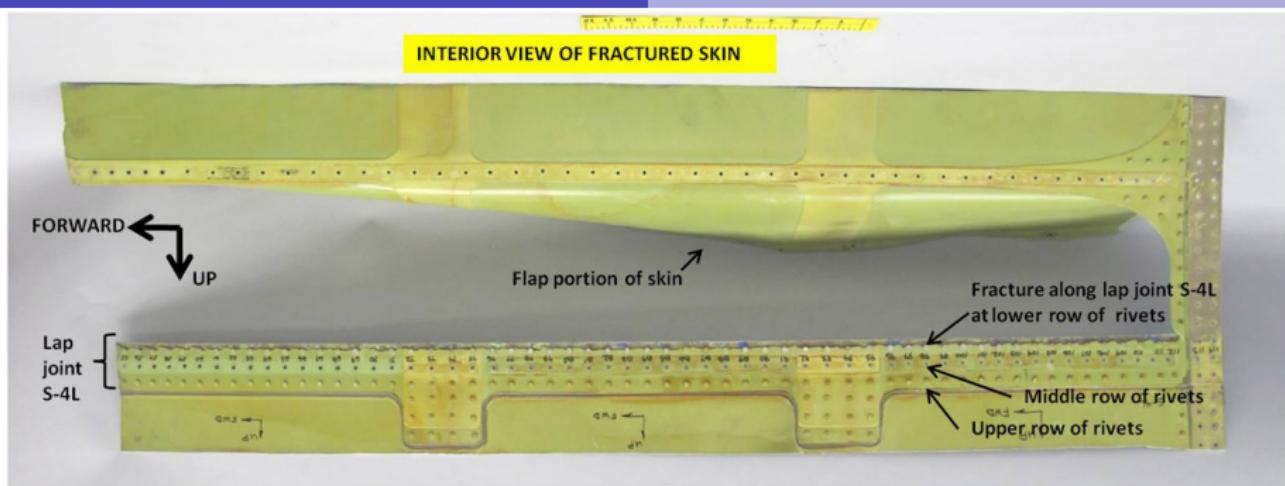
$$u_2 = - \left( \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu \right) \frac{bp}{E}.$$

## 4.3 Pequeños agujeros circulares en placas tensionadas

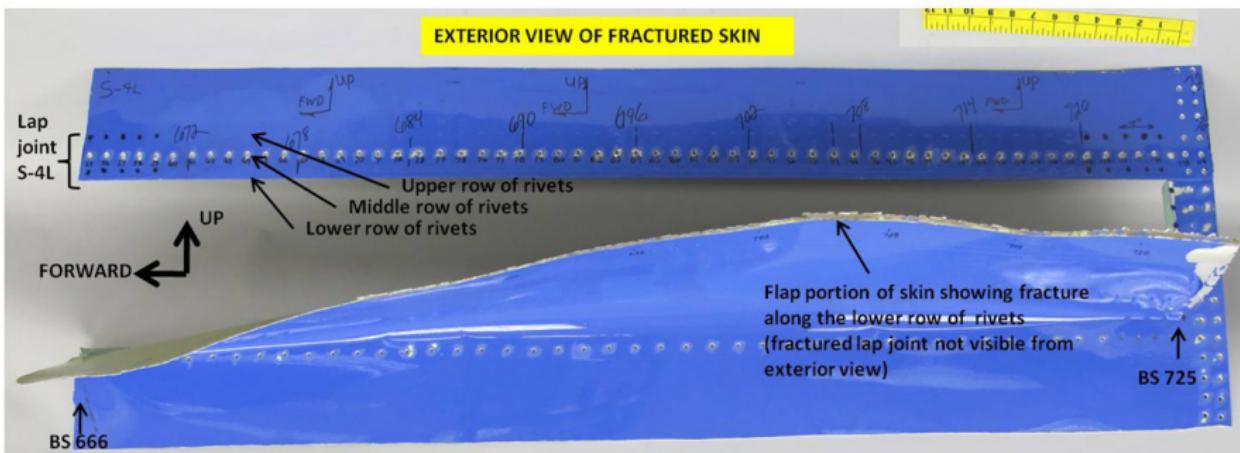
- On April 1, 2011, Southwest Airlines Flight 812 (SWA812, WN812), a Boeing 737-300, suffered rapid depressurization at 34,400 ft (10,485 m) near Yuma, Arizona, leading to an emergency landing at Yuma International Airport. The National Transportation Board reported that a thorough investigation “revealed crack indications at nine rivet holes in the lower rivet row of the lap joint”.



## INTERIOR VIEW OF FRACTURED SKIN

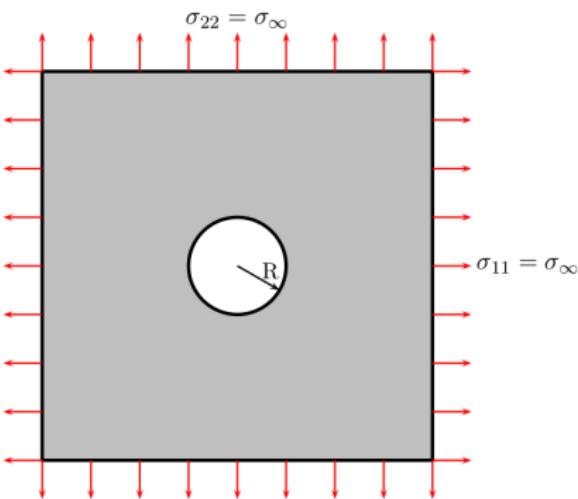


## **EXTERIOR VIEW OF FRACTURED SKIN**



- Now, we will take our first incursion into the analysis of stresses around a rivet hole (in no way should it be construed that this would be an analysis relevant to the incident mentioned).
- As a first step, we will attempt to compute the stress field around a stress-free hole of radius  $R$  subject to a hydrostatic plane stress state at a large distance compared to the radius of the hole  $r \gg R$ .
- The boundary conditions for this case are

$$\begin{aligned}\sigma_r(r \rightarrow \infty) &= \sigma_\infty, \\ \sigma_r(r = R) &= 0.\end{aligned}$$



- Ejercicio:** Obtain the distribution of radial and hoop stresses by applying the boundary conditions to specialize the general solution in equation (6) to this problem.

- **Ejercicio (cont.):** *Solution.* The general solution supports finite stresses at  $r \rightarrow \infty$  for  $C_4 = 0$  and  $C_2, C_3 \neq 0$ . Applying the first boundary condition:

$$\sigma_r(r \rightarrow \infty) = \sigma_\infty = 2C_3, \rightarrow C_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty$$

Applying the second boundary condition:

$$0 = \frac{C_2}{R^2} + \sigma_\infty, \rightarrow C_2 = -R^2\sigma_\infty$$

and the solution is:

$$\boxed{\sigma_r = \sigma_\infty \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right]}$$

$$\text{and } \boxed{\sigma_\theta = \sigma_\infty \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right].}$$

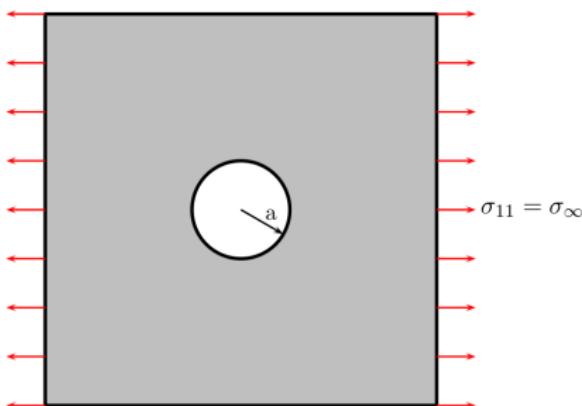
The stress concentration factor for this type of remote loading on the hole, the maximum hoop stress take place at  $r = R$  and its value is:

$$\boxed{\sigma_\theta^{max} = 2\sigma_\infty}.$$

- *Infinite plate with a central hole under uniaxial stress.*

- The next step is to look at the case of asymmetric loading, e.g. remote uniform loading in one direction, say  $\sigma_{11}(r \rightarrow \infty) = \sigma_\infty$ .
  - The main issue we have is that this case does not correspond to axisymmetric loading. It turns out, the formulation in polar coordinates still proves advantageous in this case.

- Consider an infinite plate with a small hole of radius  $a$  as shown in Figure.
  - The goal is to determine the stress field around the hole.



- *Infinite plate with a central hole under uniaxial stress.*
  - The boundary conditions far from the hole in cartesian coordinates

$$\sigma_{11}(x_1 \rightarrow \infty, x_2) = \sigma_\infty,$$

$$\sigma_{22}(x_1 \rightarrow \infty, x_2) = 0,$$

$$\sigma_{12}(x_1 \rightarrow \infty, x_2) = 0.$$

- The solution to the complete stress field:

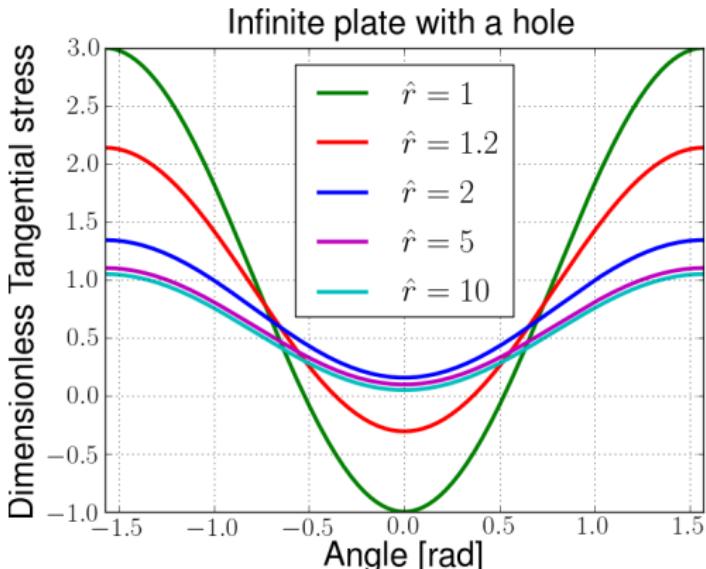
$$\boxed{\sigma_r(r, \theta) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[ \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right]},$$

$$\boxed{\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right]},$$

$$\boxed{\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[ -1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right] \sin 2\theta}.$$

- *Infinite plate with a central hole under uniaxial stress.*

- Now we sketch the stress concentration factor of the hoop stress around the hole.
- The dimensionless hoop stress ( $\sigma_\theta/\sigma_\infty$ ) for several values of  $\hat{r} = r/a$  is illustrated in the Figure below.



## 4.4 Tensiones en discos y cilindros rotantes

- La tensión producida en un disco que gira a alta velocidad es importante en muchos casos prácticos, entre los cuales se encuentra el diseño de ruedas de disco en turbinas de vapor y gas.
- Las tensiones debidas a las fuerzas tangenciales que se transmiten suelen ser pequeñas en estos casos, y las grandes tensiones se deben a las fuerzas centrífugas del disco giratorio.
- Consideraremos primero el caso de un disco delgado con espesor constante. La fuerza del cuerpo es ahora la fuerza centrífuga, que es

$$F_r = \rho\omega^2 r,$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del material del disco y  $\omega$  es la velocidad angular.

- Es evidente que la distribución de tensiones en el disco debe ser simétrica con respecto al eje de rotación.

- La ecuación de equilibrio es por lo tanto

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \longrightarrow r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0.$$

- Debido a la simetría axial,  $\tau_{r\theta} = 0$  en todas partes y la ecuación de equilibrio en la dirección circunferencial da que  $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$ .
- Dado que la ecuación de equilibrio radial involucra dos incógnitas, el problema no puede resolverse exclusivamente a partir de consideraciones de equilibrio (estáticamente indeterminado).
- El enfoque buscado es obtener una ecuación de Navier–Cauchy<sup>1</sup> que implique el desplazamiento radial como el único desconocido. Para esto, tendremos que considerar el desplazamiento de tensión y las relaciones constitutivas.
- Las relaciones de deformación-desplazamiento en este caso se reducen a:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

---

<sup>1</sup>  $(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0$ .

- Asumiremos condiciones de tensión plana para cada disco. En este caso, la ley constitutiva se puede escribir como:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right),$$

que reemplazado en la ecuación de equilibrio da la siguiente ecuación diferencial ordinaria para el desplazamiento radial:

$$r^2 u_{,rr} + ru_{,r} - u + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3 = 0.$$

- O escribiendo esto en una forma diferente

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r.$$

- La solución general de esta ecuación es

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3. \quad (7)$$

- Las tensiones siguen como:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} C_1 - \frac{E}{1+\nu} \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu} C_1 + \frac{E}{1+\nu} \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

- **Aplicación de condiciones de contorno:**

Dado que el desplazamiento en  $r = 0$  no puede ir a  $\infty$  (de hecho, esperamos que sea cero), esto implica  $C_2 = 0$ .

Mientras que las tensiones en  $r = R$  deberían ir a cero:

$$\sigma_r(r = R) = 0 = \frac{E}{1-\nu} C_1 - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R^2,$$

por lo que

$$C_1 = \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{8E} \rho \omega^2 R^2.$$

- Por lo tanto, el desplazamiento radial es dado por

$$u(r) = \frac{1-\nu}{8E} \rho \omega^2 r [(3+\nu)R^2 - (1+\nu)r^2]$$

y las tensiones radiales y tangenciales (*hoop*) adimensionales son:

$$\frac{\sigma_r}{\rho \omega^2 R^2} = \frac{3+\nu}{8} [1 - \hat{r}^2]$$

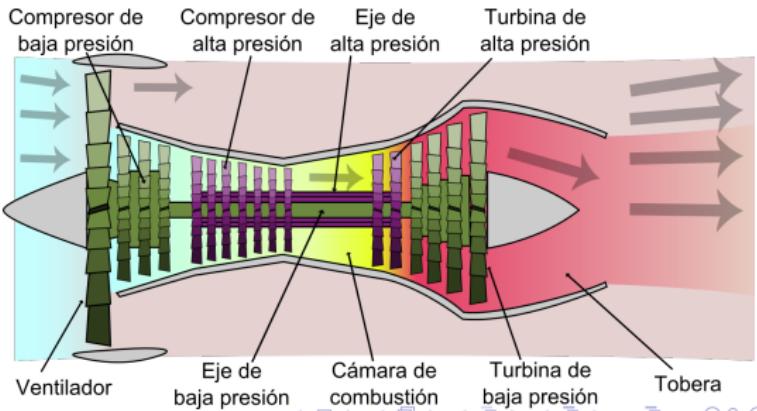
$$\frac{\sigma_\theta}{\rho \omega^2 R^2} = \frac{3+\nu}{8} \left[ 1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \hat{r}^2 \right]$$

donde  $\hat{r} = r/R$ .

- Observe que ambos componentes de la tensión son máximos en  $r = 0$ .

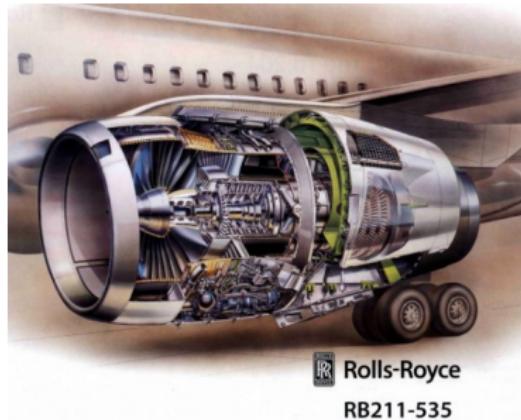
- **Ejercicio:** Considere los discos del compresor en un *turbofan* de tres ejes, Rolls-Royce RB211-535E4 usado en B-757.

- 1) Calcule la velocidad máxima de rotación de la turbina a la que el material cede plásticamente (ignore el efecto de las aspas).
  - 2) Estime el espacio libre mínimo que debe existir entre las puntas de las cuchillas y la carcaza requerido para evitar el contacto.
- Los motores de aviación tipo turbofan, turbofán o turboventilador son una generación de motores de reacción que ha reemplazado a los turborreactores o turbojet. También se suelen llamar turborreactores de doble flujo. <https://es.wikipedia.org/wiki/Turbofan>.



- En la Figura se muestra el diagrama de funcionamiento de un turbofan de alto índice de derivación. Sistema de baja presión en verde y sistema de alta presión en púrpura.

- **Ejercicio (cont.):** Rolls-Royce RB211-535E4 usado en B-757.





- **Ejercicio (cont.):** Los discos del compresor en un *turbofan* de tres ejes, Rolls-Royce RB211-535E4 usado en B-757, tienen un diámetro  $D = 0.7$  m y están hechos de una aleación metálica con densidad de masa  $\rho = 6500$  kg/m<sup>3</sup>, módulo de Young  $E = 500$  GPa, relación de Poisson  $\nu = 0.3$  y límite elástico  $\sigma_y = 600$  MPa.
- De acuerdo con el criterio de von Mises (que se discutirá más adelante en la clase), el material “fluirá” cuando la siguiente combinación de componentes de tensión o tensión efectiva  $\sigma^{eff}$  alcance la tensión de fluencia:

$$\sigma^{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z z)^2}$$

$$\sigma^{eff} = \frac{\rho \omega^2 R^2}{8} \sqrt{(7\nu^2 + 2\nu + 7)\hat{r}^4 - 4(1+\nu)(3+\nu)\hat{r}^2 + (3+\nu)^2} \leq \sigma_y$$

- La tensión efectiva máxima se alcanza en  $\hat{r} = 0$  siendo su valor:

$$\sigma_{max}^{eff} = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 R^2$$

el cual debe ser menos que la tensión de fluencia.

- De esta expresión obtenemos la máxima velocidad angular:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{8\sigma_y}{(3 + \nu)\rho R^2}}$$

- De cara a estimar el espacio libre necesario, necesitamos calcular el desplazamiento radial en  $r = R$  para  $\omega_{max}$ :

$$u_{max}(r = R) = 2 \frac{(1 - \nu)}{\nu + 3} \frac{\sigma_y}{E} R.$$

- Reemplazando los valores para este problema obtenemos:

$$\omega_{max} = 675 \cdot s^{-1} \sim 6450 \text{ rpm.}$$

- La velocidad de turbinas modernas  $\approx 10000 \text{ rpm}$ . Evalúe su resultado. ¿Qué estrategia consideraría emplear para resolver este problema?
- El desplazamiento en  $r = R$  es:

$$u_{max} = 0.35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

alrededor de un tercio de milímetro.

A fan disk is the part of a turbofan jet engine that secures the bypass fan assembly and connects it to the low pressure compressor and turbine via the low pressure shaft. The fan disk is one of the critical parts of any turbofan engine and serves several vital functions. The most important of these is securing the blades of the primary or bypass fan. The disk also serves to connect the bypass fan to the low pressure shaft which is, in turn, connected to the rest of the low pressure components of the engine. All peripheral fan components such as the nose cone or spinner are also supported by the fan disk.

Modern turbofan jet engines consist of two basic sections: low and high pressure. These both consist of compressor and turbine components. The low pressure section has one additional part that is possibly the most important part of all. This is the bypass fan which is the large, multi-bladed fan so prominently visible when a jet engine is viewed straight on. This fan is one of the most critical parts of the engine and a major contributor to the engine's thrust capacity.

As large and impressive as this fan may be, its most important single component is fairly small and rarely, if ever, seen. This is a rather unassuming looking hub at the center of the fan blade assembly. Known as the fan disk, this part of the bypass fan serves several vital functions in the overall operation of the engine.



wiseGEEK

The first is the critical task of supporting the huge fan blades. These blades are subject to intense mechanical stresses during operation; as the most exposed part of the engine, they are often subjected to impact from foreign objects. These unforeseen stresses can be caused by ingestion of loose objects on the runway, ice, or even bird strikes. The disk has to support the fan blades in such a way that they can absorb these impacts without breaking off and destroying the engine.

The second important function of the fan disk is the transfer of rotation from the fan to the low pressure compressor and turbine. This is facilitated by a shaft which passes from the fan disk through to the rear of the engine core. The low pressure compressor is mounted on this shaft right behind the fan and the low pressure turbine at the rear of the engine.

There are several other peripheral components mounted on the disk including the spinner or nose cone. This is the conical center piece on the fan which ensures an aerodynamic flow of air into the fan. All of these reliant elements mean that a fan disk failure constitutes one of the most serious engine problems pilots can encounter. For this reason, most fan disks are made from one piece titanium alloy forgings specially profiled to spread loads and stress effectively

- **Ejercicio:** Verifique que para un disco sólido de densidad  $\rho$ , rotando a velocidad angular constante  $\omega$  la ecuación  $r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0$ , se cumple si introducimos una función de estrés  $\phi$  tal que

$$r\sigma_r = \phi, \quad \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr} + \rho \omega^2 r^2.$$

- Obtenga la expresión general para  $\phi$ ,  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ .
- **Ejercicio:** Considere un disco de radio  $b$ , el cual posee un orificio circular de radio  $a$  en el centro, la condición de que no se poseen fuerzas externas en los bordes implica que  $\sigma_r = 0$  en  $r = b$  y  $r = a$ .
- Muestre que los componentes del estrés son

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left( a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left( a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right).$$

- Si  $a/b \ll 1$  obtenga la tensión circumferencial máxima  $\sigma_\theta^{\max}$  ¿Qué relación observa con la de un disco sólido ( $a = 0$ )?

- En el caso de un **eje o cilindro circular largo que gira**, podemos considerar que el problema es uno con *deformación plana*.
- Las expresiones para  $\phi$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $u$  son posibles de obtener de las relaciones dadas para tensión plana mediante el cambio de  $\nu$  por  $\frac{\nu}{1-\nu}$ .
- **Ejercicio:** En deformación plana  $\varepsilon_z = 0$ , muestre que la tensión  $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$  en el caso de un eje sólido de radio  $b$  está dada por

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} ((3 - 2\nu)b^2 - 2r^2).$$

- Mientras que en un eje tubular de radios interno  $a$  y externo  $b$  está dada por

$$\sigma_z = \frac{3 - 2\nu}{4(1-\nu)} \nu \rho \omega^2 \left( a^2 + b^2 - \frac{2r^2}{3 - 2\nu} \right).$$

- A continuación, examinemos el caso en que los extremos del cilindro son libres de expandirse. En tal caso, podemos suponer que la deformación longitudinal  $\varepsilon_z$  es una constante. Tal estado puede llamarse de **deformación plana generalizada**.
- De la ley de Hooke generalizada se tiene

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\varepsilon_z,$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \left( (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y \right) - \nu\varepsilon_z, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \left( (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x \right) - \nu\varepsilon_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy},\end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_z$  es una constante.

- **Ejercicio:** Muestre que sustituyendo las expresiones de  $\varepsilon$ , para un estado de deformación plana generalizada, en la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant y simplificando, nuevamente obtenemos la *ecuación biarmónica* como nuestra ecuación diferencial de gobierno.
- Con  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$  determinados, el valor constante de  $\varepsilon_z$  se puede encontrar a partir de la condición de que la fuerza resultante en la dirección  $z$ , que actúa sobre los extremos del cilindro, es cero,

$$\int \int \sigma_z \, dx \, dy = 0,$$

o en coordenadas polares

$$\int \int \sigma_z r \, dr \, d\theta = 0.$$

- Por lo tanto, si se permite que el eje se expanda libremente en la dirección longitudinal, entonces hay una extensión uniforme  $\varepsilon_z$  en el eje.
- La deformación longitudinal uniforme  $\varepsilon_z$  puede determinarse a partir de la condición dada anteriormente, es decir, no hay fuerza longitudinal resultante en los extremos.
- De esta forma

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \sigma_z r dr d\theta = 0,$$

donde el límite inferior a es cero en el caso de un eje sólido y es igual al radio interno para un eje tubular.

- Además, como  $\sigma_z$  es independiente de  $\theta$ , la condición anterior se puede escribir finalmente como

$$\int_a^b \sigma_z r dr = \int_a^b \nu(\sigma_x + \sigma_y)r dr + \int_a^b E \varepsilon_z r dr.$$

- En el caso de un eje sólido ( $a = 0$ ) se obtienen las relaciones

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \rho \omega^2}{2E} b^2,$$

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} (b^2 - 2r^2).$$

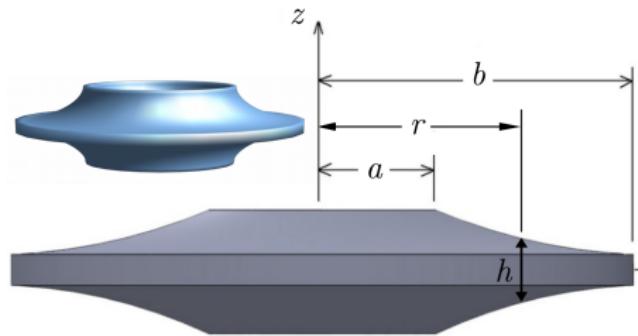
- Mientras que en el caso de un eje tubular ( $0 < a < b$ )

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \rho \omega^2}{2E} (a^2 + b^2),$$

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} (a^2 + b^2 - 2r^2).$$

## 4.5 Discos rotantes de espesor variable

- El método de la sección anterior puede usarse para tratar el problema de un disco giratorio cuyo grosor es función de la distancia  $r$  desde el eje (ver Figura).
- Si dejamos que  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  denoten las tensiones radiales y tangenciales medias a una distancia  $r$  y  $h = h(r)$  el espesor variable, la ecuación de equilibrio de dicho elemento es



$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + \rho\omega^2 h r^2 = 0. \quad (8)$$

Lectura complementaria:

[Y. Zheng et al., Displacement and Stress Fields in a Functionally Graded Fiber-Reinforced Rotating Disk With Nonuniform Thickness and Variable Angular Velocity, J. Eng. Mater. Technol., 139\(3\):031010, 2017.](#)

- La ecuación de equilibrio se satisface mediante el empleo de la función de estrés  $\phi$ , tal que

$$h r \sigma_r = \phi, \quad h \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr} + \rho \omega^2 h r^2.$$

- Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad se expresa como

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + \left(1 - \frac{\tau}{h} \frac{dh}{dr}\right) r \frac{d\phi}{dr} + \left(\nu \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} - 1\right) \phi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 h r^3,$$

de la cual se puede obtener  $\phi$  en el caso de que  $h$  sea dado.

- Si el espesor del disco varía de acuerdo a la expresión  $h = cr^{-\beta}$ , siendo  $c$  y  $\beta$  constantes. En este caso, la ecuación anterior queda dada por

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + (1 + \beta) r \frac{d\phi}{dr} - (1 + \nu\beta) \phi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 c r^{3-\beta}.$$

- Mediante la sustitución  $\xi = \ln r$  la ecuación anterior puede reducirse a una EDO con coeficientes constantes

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \beta \frac{d\phi}{d\xi} - (1 + \nu\beta) \phi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 c e^{(3-\beta)\xi}.$$

- La solución general de la EDO a coeficientes constantes la obtenemos ensayando una solución del tipo  $\phi = Ce^{q\xi}$ , siendo finalmente

$$\phi = C_1 e^{q_1 \xi} + C_2 e^{q_2 \xi} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} c \rho \omega^2 e^{(3-\beta)\xi},$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son las raíces de la ecuación  $q^2 + \beta q - (1 + \nu\beta) = 0$ , es decir

$$q = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1 + \nu\beta}.$$

- Sustituyendo nuevamente  $\xi = \ln r$  obtenemos la función de estrés de Airy y las correspondientes componentes de tensión radial y circunferencial

$$\phi = C_1 r^{q_1} + C_2 r^{q_2} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} c \rho \omega^2 r^{3-\beta},$$

$$\sigma_r = \frac{C_1}{c} r^{q_1 + \beta - 1} + \frac{C_2}{c} r^{q_2 + \beta - 1} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2,$$

$$\sigma_\theta = \frac{C_1}{c} q_1 r^{q_1 + \beta - 1} + \frac{C_2}{c} q_2 r^{q_2 + \beta - 1} - \frac{1 + 3\nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2.$$

- **Ejercicio:** Muestre que en el caso de un disco sólido y  $\beta > 0$ , se debe tener  $C_2 = 0$ . ¿Por qué esto debe pasar?
- **Ejercicio:** Muestre que para el caso de un disco sólido, sin fuerzas actuando en los bordes la condición  $\sigma_r = 0$  en  $r = b$  implica

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2 \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^{q_1 + \beta - 3} - 1 \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2 \left[ q_1 \left( \frac{r}{b} \right)^{q_1 + \beta - 3} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \right].$$

- **Ejercicio:** Muestre que si el espesor del disco sólido es uniforme, es decir  $\beta = 0$ , se tiene  $q = 1$ . Además, se obtienen expresiones de las tensiones  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  idénticas a las derivadas en la sección anterior, pág. 28.
- **Ejercicio:** Obtenga las expresiones de las tensiones  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  en el caso de un disco con un orificio circular central de radio  $a$ . Las constantes de integración se pueden obtener como en los problemas anteriores, siendo las condiciones de borde  $\sigma_r = 0$  tanto en  $r = a$  como en  $r = b$ .
  - Verifique que las expresiones obtenidas se reducen a las halladas previamente para un disco uniforme, pág. 36.

- Para concluir se considera el diseño de un disco, tal que posea un estado de “estrés uniforme”. En otras palabras, es posible determinar un espesor  $h(r)$  que defina un estado de tensiones donde  $\sigma_r = \sigma_\theta$  para cada punto del disco.
- Sustituyendo la condición  $\sigma_r = \sigma_\theta$  en la ley de Hooke para un estado de deformaciones planas en coordenadas polares (1), se tiene

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta.$$

- Por lo que la ecuación de compatibilidad se expresa

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_\theta = \text{cte.}$$

- De lo que se deduce que las tensiones radial y tangencial no solo son iguales, sino que además son constantes a lo largo del disco.

- La ecuación de equilibrio (8), en este caso se reduce a

$$\sigma \frac{d(hr)}{dr} - \sigma h + \rho \omega^2 h r^2 = 0,$$

donde  $\sigma$  es el valor constante para la tensión.

- Llevando a cabo la diferenciación y reacomodando términos, se obtiene

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = -\frac{\rho \omega^2}{\sigma} r,$$

lo cual, luego de realizar la integración y despejar  $h$ , nos permite encontrar la forma en la que debe variar el espesor de un disco sólido tal que el estado de tensiones sea constante para cada punto

$$h = C e^{-\frac{\rho \omega^2 r^2}{2\sigma}},$$

donde  $C$  es una constante de integración a determinar de las condiciones de borde que debe cumplir  $h$ .

# Bibliografía

-  Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).  
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.
-  Russel C. Hibbeler (2011).  
Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.
-  Timoshenko, Stephen; J N. Goodier (1951).  
Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.
-  Wang, Chi-Teh. (1953).  
Applied Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1953.

# Fin

