Mecánica de los Sólidos – Hackathon 1

Método matricial de la rigidez

Estructuras Hiperestáticas 2D/3D

Análisis Modal

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2020

Contenido

3. Pasos del análisis estructural

- Principales pasos que se deben realizar para llevar a cabo el cálculo y análisis mediante el método matricial de la rigidez, en el caso de solo emplear *truss elements*.
- Estos pasos son similares a los que se realizan en el caso de emplear elementos de marco o elementos como placas o láminas.
- Podemos decir sin pérdida de generaliadad que éstos son:
  1. Preproceso: geometría, cargas externas y condiciones de borde.
  2. Proceso: cálculo y resolución.
  3. Postproceso: visualización cualitativa y análisis cuantitativo.

3.3 Posproceso – Análisis dinámico

- El objetivo del análisis modal en la mecánica estructural es determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar de un objeto o estructura.
- Es común utilizar el Método de los Elementos Finitos (MEF, o FEM por sus siglas en inglés) para desarrollar el análisis porque, como en otros cálculos usando el MEF, el objeto que se analiza puede tener formas arbitrarias.
- Los tipos de ecuaciones que surgen del análisis modal son vistas en Sistemas Propios. La interpretación física de los valores propios y vectores propios, los cuales vienen de resolver el sistema, representan las frecuencias y las formas o modos de vibrar correspondientes (*shape modes*).
- A menudo, los únicos modos deseados son los correspondientes a las menores frecuencias porque pueden ser los modos predominantes en la vibración del objeto.

- También es posible determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar de un objeto mediante ensayos experimentales. En este caso, el procedimiento se denomina análisis modal experimental.
- Los resultados de las pruebas experimentales pueden usarse para calibrar un modelo de FEM para determinar si las hipótesis subyacentes hechas fueron correctas.
- Por ejemplo, para determinar o verificar las propiedades efectivas de los materiales empleados y las condiciones de borde consideradas en el modelo.

- Para los problemas más básicos que consideran un material linealmente elástico el cual obedece la Ley de elasticidad de Hooke, las ecuaciones se movimiento se pueden expresar de manera matricial.
- Toman la forma de un **sistema de masa-resorte 3D dinámico**.
- La ecuación generalizada de movimiento es dada como:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}, \tag{3.1}$$

donde:

- $\boldsymbol{U}$ es el desplazamiento,
- $\dot{\boldsymbol{U}}$ es la velocidad (derivada de la posición respecto al tiempo, qué tan rápido se desplaza),
- $\ddot{\boldsymbol{U}}$ es la aceleración, que tan rápido cambia la velocidad respecto al tiempo (2^{da} derivada del desplazamiento respecto al tiempo),
- $\boldsymbol{M}$ es la matriz de masa,
- $\boldsymbol{C}$ es la matriz de amortiguación,
- $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez, y
- $\boldsymbol{F}$ es el vector fuerza.

- El problema general, con la amortiguación diferente de cero, es un problema de valor propio cuadrático. Sin embargo, para el análisis modal de vibraciones, la amortiguación es generalmente ignorada, dejando solo el primer y tercer término en el lado izquierdo:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

- Para la resolución de este tipo de problemas se formula una solución del tipo

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{a}\exp(\jmath\omega t), \qquad \ddot{\boldsymbol{U}} = -\mathbf{a}\omega^2\exp(\jmath\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{U},$$

donde $\jmath = \sqrt{-1}$, obteniendo finalmente

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{U} = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

- Resolviendo el problema generalizado de autovalores es posible determinar los desplazamientos característicos de los modos $\boldsymbol{V}_i$, *shape modes*, relacionados a cada frecuencia del sistema ω_i.
- Donde se tiene que los *shape modes* son los autovectores $\boldsymbol{V}_i$ y los $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ los autovalores del problema presentado en la Ec. (3.3). Comúnmente se normaliza a los *shape modes* tal que cumplan

$$\boldsymbol{V}_i \cdot \boldsymbol{V}_j = \delta_{ij}.$$

- La solución genérica para el desplazamiento del i-ésimo grado de libertad viene dada como

$$\boldsymbol{U}_i(t) = (a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t))\boldsymbol{V}_i,$$

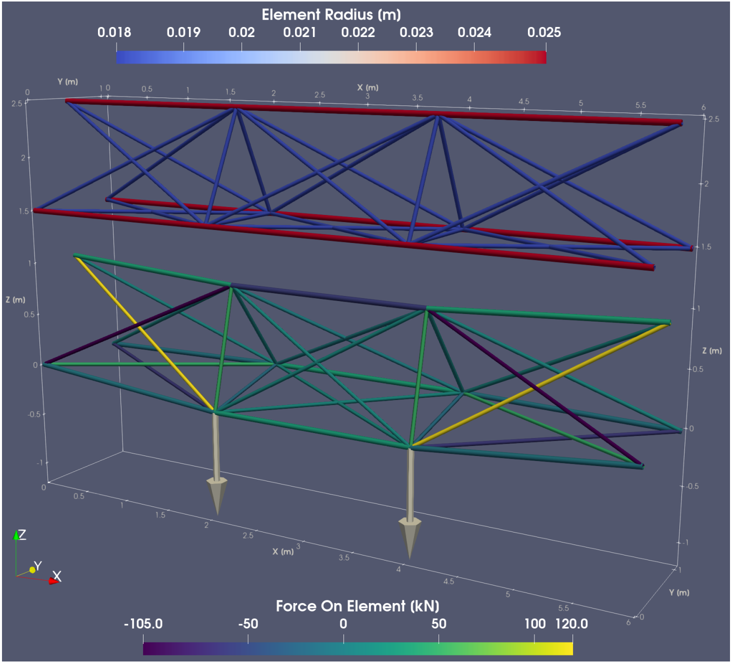
donde los coeficientes a_i y b_i se determinan de acuerdo a las condiciones iniciales ($\boldsymbol{U}(0)$ y $\dot{\boldsymbol{U}}(0)$).

Resumen

- **Análisis dinámico**, permite encontrar la respuesta dinámica de una estructura. Para ello se require representar el comportamiento inercial de la estructura mediante una matriz de masa $\boldsymbol{M}$.
- La solución del sistema algebraico, que representa el comportamiento elastodinámico de la estructura, conciste en un cálculo de las frecuencias propias y de los modos propios (*shape modes*).
- Admitiendo que las fuerzas disipativas son poco importantes las frecuencias propias se pueden determinar resolviendo la siguiente ecuación polinómica en ω^2

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) = 0.$$

- Esas magnitudes permiten realizar un análisis modal que reproduce el comportamiento de la estructura bajo diferentes tipos de situaciones.


Element Radius (m)
0.018 0.019 0.02 0.021 0.022 0.023 0.024 0.025
Y (m)
X (m)
Z (m)
Force On Element (kN)
-105.0 -50 0 50 100 120.0

Bibliografía

Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.

Allan F. Bower (2009).
Applied Mechanics of Solids [web visitada 2020], 1st Ed., CRC Press, 2009.

Fin