

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 4D

## Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, octubre de 2021



# Contenido

## 6. Tensiones térmicas

- 6.1 Discos delgados con temperatura no uniforme
- 6.2 Cilindros largos con temperatura no uniforme
- Bibliografía

## 6. Tensiones térmicas

- En general, la mayoría de los sólidos exhiben un cambio volumétrico con la variación de temperatura, es decir que un cuerpo se expande a medida que aumenta la temperatura.
- Si se permite que el cuerpo se expanda libremente, este se deformará pero no habrá ningún estrés debido a dicha expansión.
- La presencia de una distribución de temperatura generalmente induce tensiones creadas por restricciones internas o de contorno.
- Se generan tensiones en un cuerpo elástico e isotrópico por el calentamiento desigual de diferentes partes del cuerpo.
- En otras palabras, si el aumento de temperatura en el cuerpo no es uniforme y el cuerpo es continuo, **la expansión heterogénea produce tensiones térmicas**.

- Si la variación de temperatura es suficientemente grande, estas tensiones pueden alcanzar niveles que pueden conducir a fallas estructurales, especialmente para materiales frágiles.
- Por lo tanto, para muchos problemas que involucran grandes variaciones de temperatura, el conocimiento del análisis de estrés térmico puede ser muy importante.
- El propósito de esta sección es proporcionar una introducción a la termoelasticidad; es decir, elasticidad con efectos térmicos.
- El problema de determinar las *tensiones térmicas* en un cuerpo elástico debido a una distribución de temperatura encuentra muchas aplicaciones prácticas.

- Por ejemplo en el diseño de máquinas, como en el diseño de turbinas de vapor y gas y motores de combustión interna. *¿Otras situaciones que considere importantes? [wiki]*



La **junta de expansión o de movimiento** es un conjunto diseñado para mantener las piezas juntas mientras se absorbe de manera segura la expansión y contracción inducida por temperatura, vibración, o para permitir el movimiento debido al asentamiento del suelo o la actividad sísmica. Se encuentran comúnmente entre secciones de edificios, puentes, aceras, vías férreas, sistemas de tuberías, barcos y otras estructuras. [https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal\\_expansion](https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_expansion)

Juntas de expansión o de dilatación en puentes de carretera utilizadas para evitar daños por dilatación térmica.

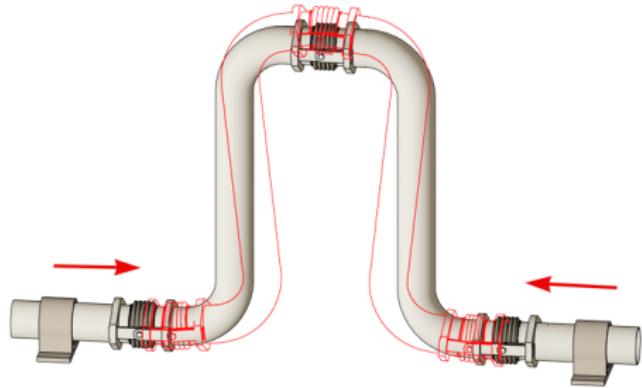


Las juntas de expansión metálicas (también llamadas *compensadores*) son elementos de compensación para la expansión térmica y el movimiento relativo en tuberías, contenedores y máquinas. Constan de uno o más fuelles metálicos, conectores en ambos extremos y tirantes que dependen de la aplicación. Se diferencian según tres tipos básicos de movimiento: juntas de dilatación axiales, angulares y laterales. Las juntas de expansión se utilizan en varios sectores, como la producción de energía, la industria del papel, la industria química, el tratamiento de aguas, el petróleo y el gas. En cualquier lugar donde existan tuberías y se produzcan movimientos térmicos o vibraciones, se pueden utilizar juntas de expansión.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Metal\\_expansion\\_joint](https://en.wikipedia.org/wiki/Metal_expansion_joint)

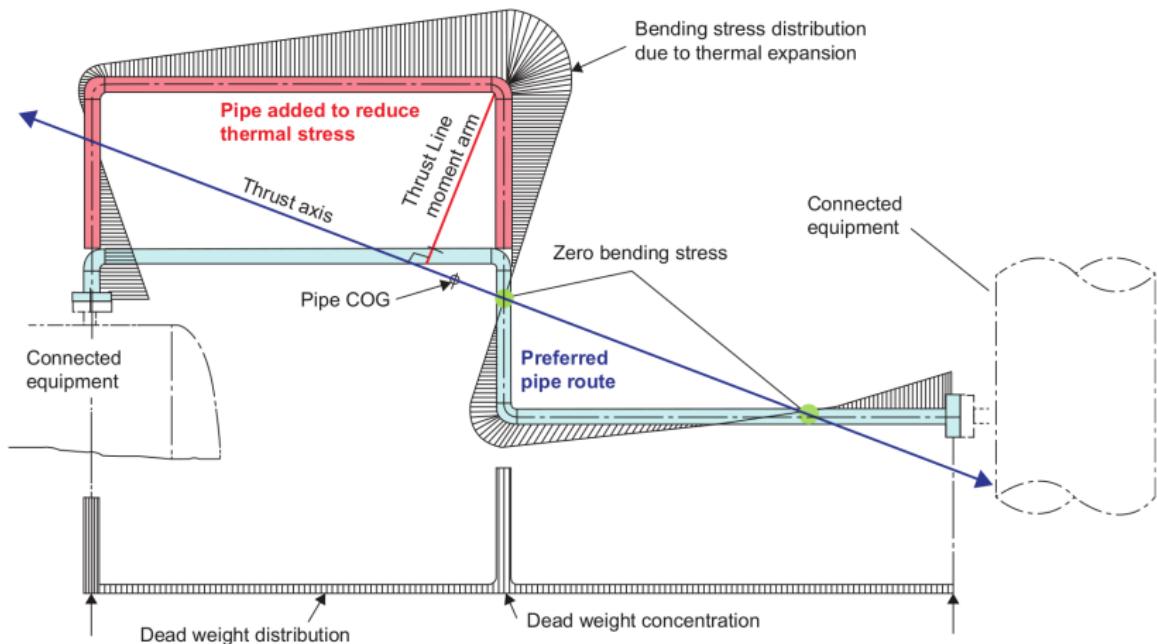


Buces de expansión de tuberías proporcionan el tramo de tubería necesario en una dirección perpendicular para absorber la expansión térmica. Son seguras en comparación con las juntas de expansión, pero ocupan más espacio.



<https://whatispiping.com/expansion-loop-on-piping-system/>

Cuando la tensión se convierte en un problema, las tensiones pueden reducirse haciendo que la ruta de la tubería sea menos simple y compacta mediante la introducción de codos y longitudes de tubo adicionales, ver figura.



Efecto de la tensión térmica en la ruta de la tubería.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128033555000354>

Ayuda: <https://sci-hub.se>

Buces de expansión de tuberías empleados en una central eléctrica geotérmica en Wairakei, cerca de Taupo en la isla norte, Nueva Zelanda [google]. La tubería adicional y las curvas tienen el efecto de aumentar la flexibilidad general de la tubería sin afectar la expansión neta en las conexiones finales.



- En esta Sección desarrollaremos las ecuaciones de gobierno básicas para materiales isotrópicos lineales e investigamos varias soluciones a problemas de interés de ingeniería.
- Consideramos un sólido elástico que inicialmente está libre de tensiones a una temperatura uniforme  $T_0$  cuando todas las fuerzas externas son cero.
- Suponga que el cuerpo se calienta a una temperatura  $T > T_0$ . Por lo tanto, el cuerpo estará estresado si  $T$  varía de un punto a otro del cuerpo.

- La deformación de un elemento bajo un estado de tensión mecánica puede considerarse que consta de dos partes. Una parte se debe a las cargas aplicadas, mientras que la otra se debe a la expansión del elemento debido al cambio de temperatura.
- El *coeficiente de expansión o dilatación térmica lineal* del material,  $\alpha$ , se define como el cambio relativo de longitud por grado de aumento de temperatura, la deformación longitudinal será  $\alpha\Delta T \approx \frac{\Delta L}{L}$
- No se producirán deformaciones por cizallamiento, porque la expansión de un elemento pequeño, debido al cambio de temperatura, no producirá una distorsión angular en un material isotrópico.
- Por lo tanto, si se permite que el elemento se expanda libremente, la deformación debida al cambio de temperatura es el único componente de deformación y el elemento no se estresará.
- Ahora, si no se permite que el elemento se expanda libremente, se producirán tensiones y la deformación total del elemento debe ser la suma de la parte debida a las tensiones y la debida al cambio de temperatura.

- Como hemos visto en la Unidad-3B, Ec. (2.3), las relaciones **Tensión-Deformación-Temperatura** de un material elástico isotrópico lineal se expresan mediante la Ley de Hooke generalizada:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha(T - T_0), \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G},
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $T_0$  se denomina temperatura de referencia y corresponder al estado libre de tensión, el cual se denomina estado de referencia.

- **Ejemplo 6.1:** A partir de la Ec. (6.1) muestre que las relaciones entre tensión y deformación unitaria vienden dadas como

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_0), \\ \sigma_y &= \lambda e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_0), \\ \sigma_z &= \lambda e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_0),\end{aligned}\tag{6.2}$$

donde  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  y  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ .

- La solución se obtiene sumando las expresiones  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  de la Ec. (6.1), obteniendo

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \Theta + 3\alpha(T - T_0),\tag{a}$$

donde  $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ .

- Ahora obtenemos  $\sigma_x$  de la primer ecuación de (6.1)

$$\sigma_x = E\varepsilon_x - E\alpha(T - T_0) + \nu(\sigma_y + \sigma_z).\tag{b}$$

• **Ejemplo 6.1 (cont):**

- Sumamos  $\nu\sigma_x$  en ambos miembros de (b)

$$(1 + \nu)\sigma_x = E\varepsilon_x - E\alpha(T - T_0) + \nu\Theta. \quad (\text{c})$$

- Reemplazamos  $\Theta$  de (a) en (c)

$$(1 + \nu)\sigma_x = E\varepsilon_x - E\alpha(T - T_0) + \nu \left( \frac{E}{1 - 2\nu}e - \frac{3\alpha E}{1 - 2\nu}(T - T_0) \right). \quad (\text{c})$$

- Finalmente, reordenamos y simplificamos términos obteniendo

$$\sigma_x = \lambda e + \frac{E}{1 + \nu}\varepsilon_x - \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}(T - T_0). \quad (\text{c})$$

- Puede ser de utilidad tener presente que el factor

$$\frac{E}{1 - 2\nu} = 3\lambda + 2\mu.$$

- En el caso más general el estrés se deriva de la relación constitutiva de *Duhamel-Neumann* dada en notación indicial como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \beta_{ij}(T - T_0),$$

que para el caso isotrópico se reduce a

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij},\end{aligned}$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica.

- La ecuación de la conservación de la energía en este caso está dada por

$$kT_{,ii} = \rho c \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \dot{\varepsilon}_{ii} - \rho h,$$

donde  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica,  $\rho$  es la densidad de masa del material,  $c$  es la capacidad calorífica específica a volumen constante y  $h$  es un término de fuente de energía conocido.

- En la mayoría de los materiales bajo condiciones de cargas estáticas o cuasiestáticas, el término de acoplamiento  $(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \dot{\varepsilon}_{ii}$  es pequeño y puede despreciarse.

- Para este caso, establecemos la denominada ecuación de conducción desacoplada

$$kT_{,ii} = \rho c \dot{T} - \rho h.$$

- Para nuestras aplicaciones, consideramos solo la teoría desacoplada y normalmente sin fuentes.
- Otra simplificación es considerar solo las condiciones de estado estacionario, y para este caso la ecuación de conducción se reduce a la ecuación de Laplace

$$T_{,ii} = \Delta T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0.$$

- Cabe señalar que para el caso sin fuente desacoplado, la ecuación de energía se reduce a una única EDP parabólica, mientras que para el caso de estado estacionario la reducción conduce a una EDP elíptica para el distribución de temperatura.
- En cualquier caso, con las condiciones de contorno térmico adecuadas, el campo de temperatura se puede determinar independientemente de los cálculos del campo de tensión.
- Por lo cual, una vez que se obtiene la temperatura, se pueden emplear procedimientos de análisis de tensión elástica para completar la solución del problema.

- Las **ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales** pueden expresarse de forma general como:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0,$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son funciones de  $x$  y de  $y$ , y  $D$  es una función de  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $u_{,x}$  y  $u_{,y}$ . Es decir, asumimos que esta ecuación es lineal.

**Categorías en las que pueden clasificarse las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden en dos variables.**

$B^2 - 4AC$	Categoría	Ejemplo
$< 0$	Elíptica	Ecuación de Laplace (en estado estable con dos dimensiones espaciales) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabólica	Ecuación de conducción del calor (variable de tiempo con una dimensión espacial) $\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
$> 0$	Hiperbólica	Ecuación de onda (variable de tiempo con una dimensión espacial) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

- La clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales presentada es útil por:
  - 1) Cada grupo está asociado a diferentes problemas específicos de ingeniería.
  - 2) Cada grupo requiere técnicas de solución especiales.
- La terminología utilizada para clasificar a las ecuaciones surge por analogía con la utilizada en la clasificación de ecuaciones generales de segundo orden en la geometría analítica.
- Es importante notar que para los casos donde  $A, B$  y  $C$  dependen de  $x$  y de  $y$ , la ecuación puede estar en una categoría diferente, dependiendo del dominio para el cual se quiere calcular dicha ecuación.
- Más información en [wikipedia](#) y en los links debajo.

<https://www.ugr.es/~prodelas/ftp/ETSIICCP/Resoluci%F3nNum%E9ricaEDPs.pdf>  
<https://www2.uned.es/ing-fluidos/IntroMF/node86.html>

## 6.1 Discos delgados con temperatura no uniforme

- Consideremos un disco circular delgado con distribución de temperatura desigual.
- Suponga que la temperatura  $T$  es una función de la distancia radial  $r$  solamente. Esto implica un caso de tensión plana con simetría rotacional.
- En términos de coordenadas cilíndricas, encontramos, de la relación tensión-deformación-temperatura

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha T.$$

- La ecuación de equilibrio

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

se satisface si se introduce la función de estrés  $\phi$  tal que

$$\sigma_r = \frac{\phi}{r} \quad \text{y} \quad \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr}.$$

- Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de compatabilidad

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0,$$

y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} &= -\alpha E \frac{dT}{dr}, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right) &= -\alpha E \frac{dT}{dr}. \end{aligned}$$

- La ecuación anterior puede ser fácilmente integrada siendo la solución

$$\phi = -\frac{\alpha E}{r} \int_a^r Tr dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r},$$

donde el límite inferior  $a$  puede ser elegido de forma arbitraria. Para un disco sólido  $a = 0$ , mientras que para un disco con un orificio circular en el centro,  $a$  es el radio interior.

- De la función de estrés es posible determinar las tensiones

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r Tr dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[ -T + \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}.$$

- Para un **disco sólido**, se tiene que la tensión debe tener un valor finito en el centro por lo cual  $C_2 = 0$ , mientras que si no se aplican fuerzas externas en el borde  $\sigma_r = 0$  en  $r = b$ . Por lo tanto

$$\sigma_r = \alpha E \left[ \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[ -T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right],$$

$$u = \frac{\alpha r}{b^2} (1 - \nu) \int_0^b Tr dr + \frac{\alpha}{r} (1 + \nu) \int_0^r Tr dr.$$

- Para un **disco con orificio circular centrado** de radio  $a$ , sin fuerzas externas en los bordes  $\sigma_r = 0$  en  $r = a$  y  $r = b$ , se tiene

$$\sigma_r = \alpha E \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - \int_a^r Tr dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr - T r^2 \right],$$

$$u = \frac{\alpha}{r} \left( \frac{r^2(1-\nu) + a^2(1+\nu)}{b^2 - a^2} \right) \int_a^b Tr dr + \frac{\alpha}{r}(1+\nu) \int_a^r Tr dr.$$

## 6.2 Cilindros largos con temperatura no uniforme

- Consideremos las tensiones térmicas en un cilindro circular largo con una distribución de temperatura simétrica alrededor de su eje.
- Si los extremos del cilindro están restringidos de tal manera que  $\varepsilon_z = 0$ , tenemos un estado de deformación plana, es decir

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET.$$

- En términos de coordenadas cilíndricas, las relaciones tensión-deformación a lo largo del eje son

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta \right] + \alpha(1+\nu)T, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r \right] + \alpha(1+\nu)T.\end{aligned}$$

- La ecuación de compatibilidad resultante es

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{dT}{dr}.$$

- Comparando la ecuación de compatibilidad para los casos de deformación plana y tensión plana observamos que son similares, excepto por el coeficiente de  $dT/dr$ . Por lo tanto se tiene que su solución es

$$\phi = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_a^r Tr dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}.$$

- De la función de estrés es posible determinar las tensiones

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[ -T + \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}.$$

- Para un **cilindro sólido**, se tiene que la tensión debe tener un valor finito en el centro por lo cual  $C_2 = 0$ , mientras que si no se aplican fuerzas externas en el borde  $\sigma_r = 0$  en  $r = b$ . Obteniendo

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr - T \right].$$

- Por lo tanto para un *cilindro cuyos extremos están fijos* ( $\varepsilon_z = 0$ )

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{2\nu}{b^2} \int_0^b Tr dr - T \right],$$

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{(1 - 2\nu)r^2}{b^2} \int_0^b Tr dr + \int_0^r Tr dr \right].$$

**Ejercicio 6.1:** Muestre que  $\varepsilon_z = 0$ .

- Si el cilindro posee extremos libres, podemos superponer un esfuerzo axial uniforme  $C_3$  para que la fuerza resultante en los extremos sea cero,

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{2\nu}{b^2} \int_0^b Tr dr - T \right] + C_3$$

- Integrando, encontramos que la condición

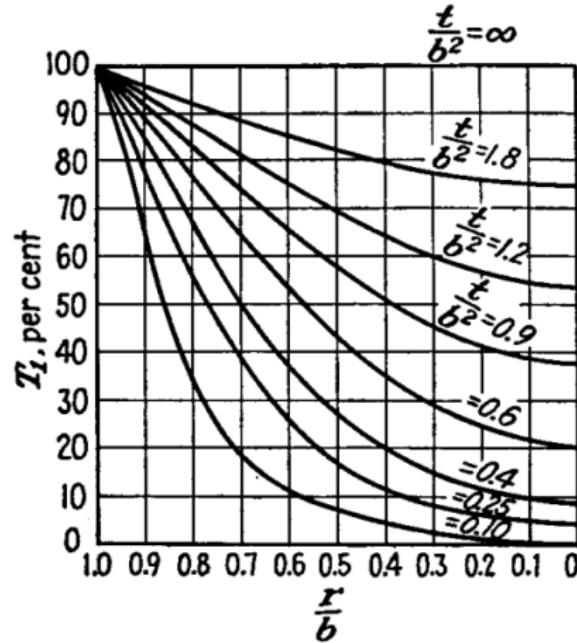
$$\int_0^b \sigma_z 2\pi r dr = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{2\alpha E}{b^2} \int_0^b Tr dr.$$

- En tal caso

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{2}{b^2} \int_0^b Tr dr - T \right], \\ u &= \frac{1}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{(1 - 3\nu)r^2}{b^2} \int_0^b Tr dr + (1 + \nu) \int_0^r Tr dr \right]. \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.2:** Muestre que  $\varepsilon_z = \frac{2\alpha}{b^2} \int_0^b Tr dr$ .

- La figura representa la distribución de temperatura en un cilindro de acero. Se supone que el cilindro tiene una temperatura inicial uniforme igual a cero y que a partir de un instante  $t = 0$ , la superficie del cilindro se mantiene a una temperatura  $T_1$ .



- Las distribuciones de temperatura a lo largo del radio, para varios valores de  $t/b^2$  [ $\text{s}/\text{cm}^2$ ], están representadas por curvas. Es posible determinar (no en este curso) que la distribución de temperatura para cilindros de diferentes radios es la misma si el tiempo de calentamiento es proporcional al cuadrado del radio,  $t \propto b^2$ .

- A partir de la figura, se puede calcular la temperatura promedio de todo el cilindro y también de una porción interna del cilindro de radio  $r$ .
- Teniendo estas temperaturas, encontramos las tensiones térmicas para un cilindro sólido. Si tomamos un valor muy pequeño para  $t$ , las temperaturas promedio, mencionadas anteriormente, se acercan a cero por lo que encontramos en la superficie

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_z = -\frac{\alpha ET_1}{1-\nu},$$

este valor es el *máximo esfuerzo térmico producido en un cilindro elástico isotrópico por calentamiento*.

- El máximo esfuerzo térmico calculado es el esfuerzo necesario para la supresión total de la expansión térmica en la superficie. En otras palabras, es el estrés de compresión requerido durante el calentamiento, y de tracción durante el enfriamiento.
- Para reducir las tensiones máximas, es una práctica habitual comenzar el calentamiento de ejes y rotores con una temperatura algo menor que la temperatura final  $T_1$ , y aumentar el tiempo de calentamiento en proporción al cuadrado del radio,  $t \propto b^2$ .

- En el caso de un **cilindro con orificio circular centrado**, de radio  $a$ , las constantes de integración se pueden obtener de las condiciones de borde  $\sigma_r = 0$  en  $r = a$  y  $r = b$ , es decir no existen fuerzas externas en los bordes. Se tiene

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - \int_a^r Tr dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr - Tr^2 \right].$$

- Nuevamente, obtenemos en el caso de restringir las deformaciones axiales

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{2\nu}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - T \right],$$

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{(1 - 2\nu)r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr \right].$$

- Es decir  $\varepsilon_z = 0$ .

- Sumando el esfuerzo axial

$$C_3 = \frac{2\alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr,$$

requerido para hacer que la fuerza axial resultante sea cero, obtenemos

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[ \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - T \right],$$

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{\frac{1-3\nu}{1+\nu} r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr \right].$$

- Mientras que  $\varepsilon_z = \frac{2\alpha}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr$ .

**Ejercicio 6.3:** Muestre que la diferencia del desplazamiento radial en un cilindro hueco cuyos extremos se dejan libres, con respecto a uno cuya deformación axial es nula está dado por

$$\delta = u_{\text{Libre}} - u_{\text{Fijo}} = \frac{2\alpha\nu}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr = \nu \varepsilon_z^{\text{Libre}}.$$

- **Ejemplo 6.2:** Si  $T_1$  es la temperatura en la superficie interna del cilindro y  $T_0$  es la temperatura en la superficie externa, en el caso de un flujo de calor constante, el aumento de temperatura  $T$  a cualquier distancia  $r$  del centro es

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\ln(b/a)} \ln \frac{b}{r}.$$

- Muestre que para el caso en que no se restringen las deformaciones axiales las tensiones térmicas se expresan como

$$\sigma_r = \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1-\nu) \ln(b/a)} \left[ -\ln \frac{b}{r} + \frac{a^2}{r^2} \frac{(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1-\nu) \ln(b/a)} \left[ 1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{r^2} \frac{(b^2 + r^2)}{(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right],$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1-\nu) \ln(b/a)} \left[ 1 - 2 \ln \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right].$$

- Obtenga el desplazamiento  $u(r)$ .

• **Ejemplo 6.2 (cont):**

- Para realizar lo solicitado es preciso resolver la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int Tr dr &= \frac{T_1 - T_0}{\ln \frac{b}{a}} \int (\ln b - \ln r) r dr, \\ &= \frac{T_1 - T_0}{\ln \frac{b}{a}} \left( \frac{r^2}{2} \ln b - \int r \ln r dr \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

- Es decir que precisamos resolver

$$\int r \ln r dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4}.$$

- Por lo tanto

$$\int Tr dr = \frac{T_1 - T_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{r^2}{2} \left( \ln \frac{b}{r} + \frac{1}{2} \right).$$

## • Ejemplo 6.2 (cont):

- Si  $T_1 > T_0$ , las tensiones son compresivas en la superficie interna y de tracción en la superficie externa. En el caso de materiales tales como piedra, ladrillo u hormigón los cuales son frágiles bajo tracción, es probable que se inicien grietas en la superficie externa del cilindro en las condiciones anteriores.
- (a) ¿El esfuerzo radial es compresivo en todos los puntos y se convierte en cero en las superficies interna y externa del cilindro?
- (b) ¿Los componentes de tensión  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_z$  tienen sus valores numéricos más grandes en las superficies interna y externa del cilindro?
- (c) Determine los valores de  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_z$  para  $r = a$  y  $r = b$ . ¿Cuál es la relación entre estos valores?
- (d) Si el espesor  $h = b - a$  de la pared es pequeño en comparación con el radio exterior del cilindro. Muestre que es posible simplificar las expresiones de las tensiones  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_z$  para  $r = a$  y  $r = b$ , tal que

$$\sigma_\theta(a) = \sigma_z(a) = -\frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu)} \left(1 + \frac{h}{3a}\right),$$

$$\sigma_\theta(b) = \sigma_z(b) = \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu)} \left(1 - \frac{h}{3a}\right).$$

# Bibliografía



Timoshenko, Stephen; J N. Goodier (1951).

Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.



Wang, Chi-Teh. (1953).

Applied Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1953.



Sadd, Martin H. (2014).

Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Boston, Academic Press, 2014.

# Fin

