

Mecánica de los Sólidos – Unidad 4A

Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, septiembre de 2021



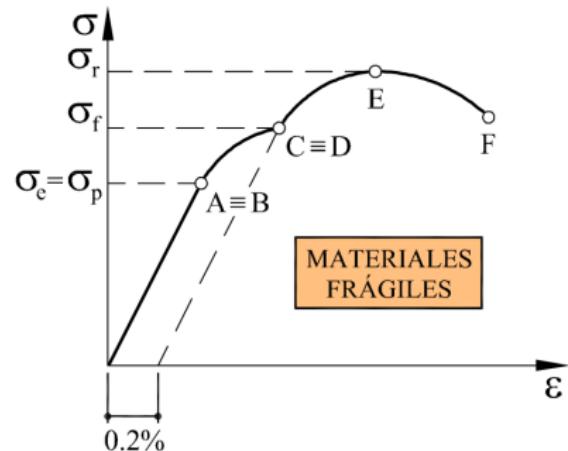
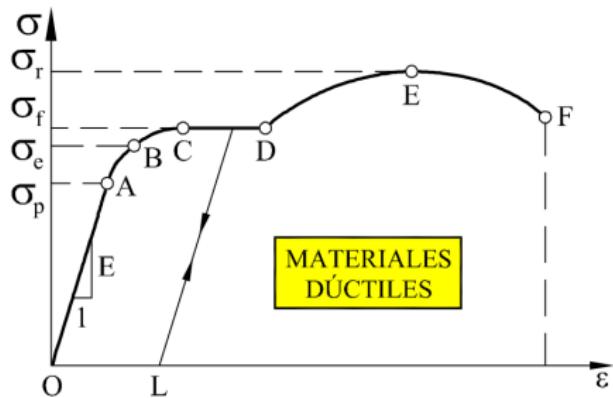
Contenido

- 1 1. Coeficiente de seguridad
 - 1.1 Introducción
 - 1.2 Fluencia
 - 1.3 Tensión límite
 - 1.4 Tensión admisible
 - 1.5 Coeficiente de seguridad
- 2 2. Principios de la Resistencia de Materiales
 - 2.1 Principio de Rigidez
 - 2.2 Principio de Superposición
 - 2.3 Principio de Saint-Venant
 - 2.4 Restricciones geométricas
- 3 3. Estados planos de tensión y deformación
 - 3.1 Estados planos en coordenadas cartesianas
 - 3.2 Función de Airy
 - 3.3 Soluciones de la función de Airy

1.1 Introducción

- A lo largo de su vida útil, las estructuras se ven sometidas a acciones y cargas permanentes, variables o excepcionales que pueden producir fallos estructurales totales o parciales.
- El requisito de seguridad exigible a las estructuras que se proyectan y se construyen conlleva la definición de un valor superior de la tensión que el material puede alcanzar sin que exista riesgo de que se produzca un fallo estructural.
- En ingeniería, arquitectura y en ciencias aplicadas, es común, y en algunos casos imprescindible, que el dimensionado de elementos o componentes de maquinaria, estructuras constructivas, instalaciones o dispositivos en general, incluyan un *coeficiente de seguridad*.
- El coeficiente de seguridad debe garantizar que bajo desviaciones aleatorias de los requerimientos previstos, exista un margen extra de prestaciones por encima de las mínimas estrictamente necesarias.

- Aunque el comportamiento de cada material es diferente, en la curva tensión–deformación se distinguen, en general, las zonas y tensiones:



- OA** Tramo proporcional
- OB** Tramo elástico
- BC** Tramo plástico

- CD** Tramo de fluencia
- DE** Endurecimiento por deformación
- EF** Tramo de estriccion –*necking*–

- Materiales como la fundición, el hormigón o el vidrio, llamados frágiles, no se presenta una zona de fluencia plástica bien definida.
- En estos materiales se toma convencionalmente como tensión de fluencia la correspondiente a una deformación permanente de 0.2 %.

OA Tramo proporcional

En este tramo inicial la relación entre tensión y deformación es lineal (ley de Hooke) para tensiones inferiores al *límite de proporcionalidad*, σ_p .

OB Tramo elástico

Se llama *límite elástico* σ_e a la máxima tensión que se puede alcanzar sin que se produzcan deformaciones permanentes, inelásticas o plásticas. El tramo AB, de comportamiento elástico no lineal, puede ser más o menos observable dependiendo del material.

BD Tramo plástico

Se observa una deformación permanente al descargar la probeta, por ejemplo la marcada OL en el diagrama. Se llama *límite de fluencia* $\sigma_f = \sigma_Y$ a la tensión a partir de la cual el material se deforma casi sin aumento de la tensión.

CD Tramo de fluencia

En este tramo la deformación aumenta sin que se produzca un aumento apreciable de la tensión. La deformación longitudinal y las deformaciones transversales son sensiblemente uniformes a lo largo de la probeta.

DE Tramo de endurecimiento por deformación

A partir de un determinado valor de la deformación, la tensión necesaria para seguir aumentando la deformación plástica se incrementa, acompañado por la pérdida del estado uniforme de deformaciones. Se denomina *tensión de rotura* σ_r a la máxima tensión medida en el ensayo.



EF Tramo de estricción

La sección de una parte de la probeta comienza a disminuir de forma apreciable, localización de las deformaciones longitudinales y transversales, con pérdida del estado uniforme.

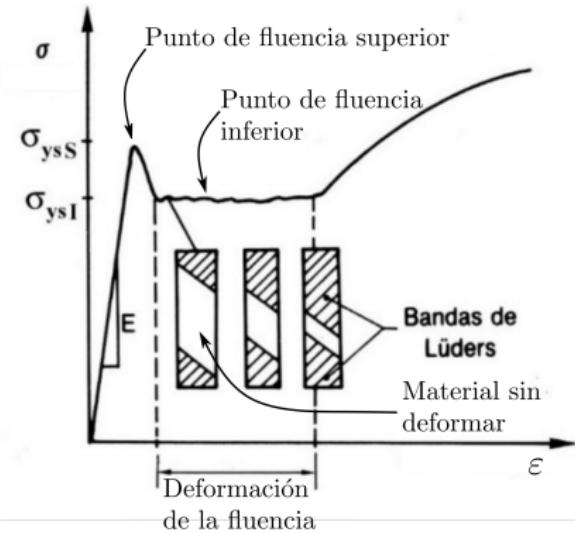
La aparente pérdida de tensión en este tramo se debe a la definición nominal de la tensión, que está calculada sobre el *área inicial* de la probeta, en lugar de calcularla sobre el *área real* en cada instante, y que es menor debido a la estricción.

1.2 Fluencia

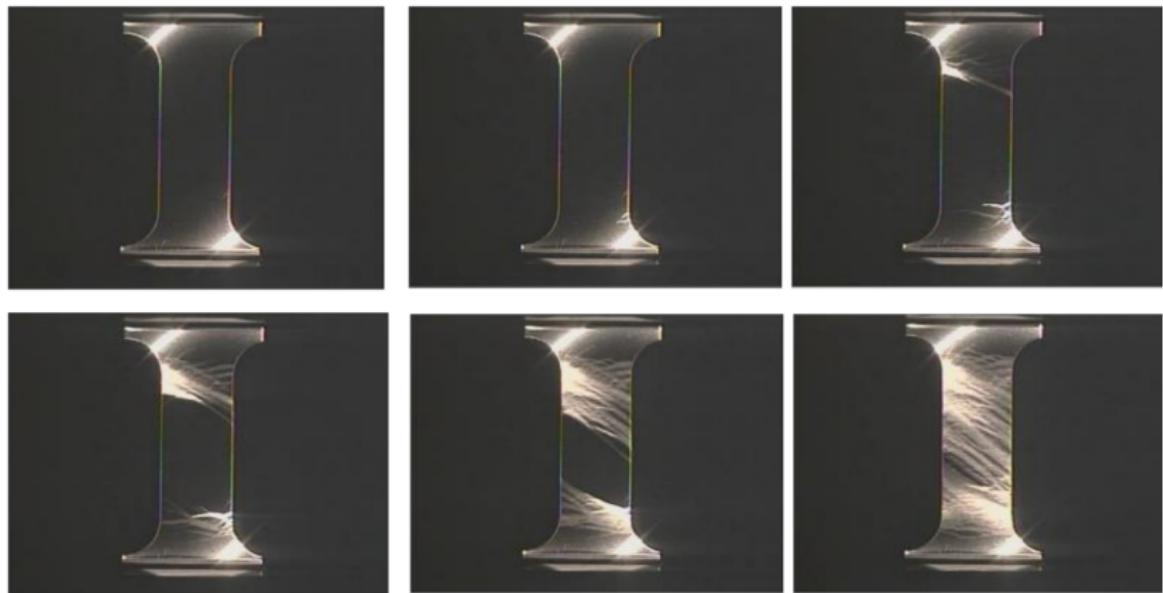
- La fluencia o cedencia es la deformación irrecuperable de la probeta, a partir de la cual solo se recuperará la parte de su deformación correspondiente a la deformación elástica, quedando una deformación irreversible.
- Este fenómeno se sitúa justo encima del límite elástico, y se produce un alargamiento muy rápido sin que varíe la tensión aplicada. Mediante el ensayo de tracción se mide esta deformación característica (que no todos los materiales experimentan).
- El fenómeno de fluencia se da cuando las impurezas o los elementos de aleación bloquean las dislocaciones de la red cristalina impidiendo su deslizamiento, proceso mediante el cual el material se deforma plásticamente.

- Alcanzado el límite de fluencia se llegan a liberar las dislocaciones, produciéndose una brusca deformación.
- La deformación en este caso también se distribuye uniformemente a lo largo de la probeta, pero concentrándose en las zonas en las que se ha logrado liberar las dislocaciones. Este efecto se conoce como **bandas de Lüders**.

- Ilustración de la curva tensión-deformación de tracción que exhibe caída de fluencia y propagación de la banda de Lüders.



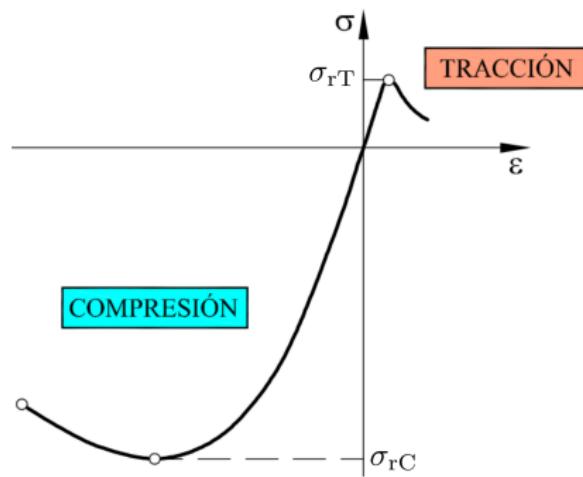
- En la figura se muestra la propagación de las bandas de Lüders durante una prueba de tracción en una probeta pulida de acero con bajo contenido de carbono [ver video].



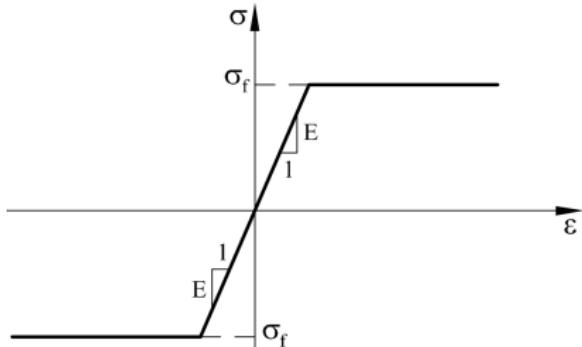
- Las bandas de Lüders son simplemente bandas en el metal donde comienza la deformación plástica permanente. Solo ciertas partes de la muestra “fluyen” a la vez.

- No en todos los materiales se observa el fenómeno de fluencia, es frecuente que la transición entre la deformación elástica y plástica del material no se aprecie de forma clara.
- Los materiales frágiles exhiben comportamientos muy diferentes según estén solicitados a tracción o a compresión.
- Por ejemplo, el hormigón y la mayoría de las rocas naturales, ver figura, tienen un comportamiento:

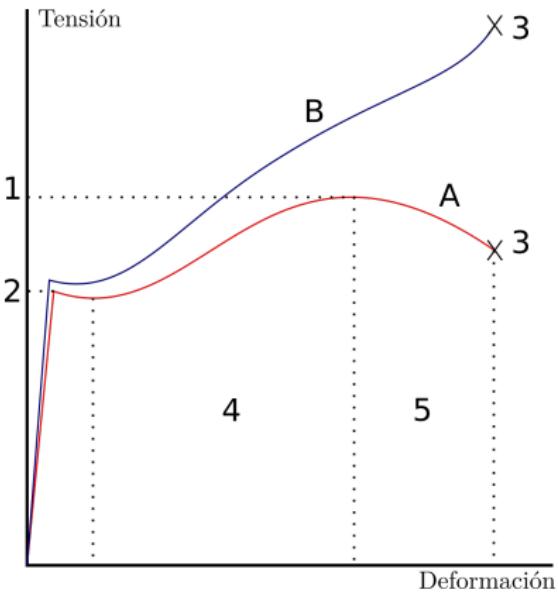
1. muy frágil a tracción con una resistencia relativamente baja.
2. mucho más dúctil a compresión, aunque sin mostrar una zona clara de fluencia, del orden de 10 veces mayor, tal como se muestra en la figura.



- Los aceros de construcción, en cambio, tienen un comportamiento parecido en tracción y en compresión (para piezas poco esbeltas), y con marcados tramos de fluencia en ambos casos.
- Para estos materiales la curva tensión-deformación se suele representar mediante diagramas idealizados trilineales, ver figura, en los que sólo se consideran los tramos proporcionales y los tramos de fluencia.
- Otros tipos de aleación de acero, por su parte, apenas muestran un tramo horizontal de fluencia, pero tienen una zona clara de endurecimiento por deformación, habitualmente lineal.



- Curva de Tensión vs. Deformación típica de un acero estructural, A36 ASTM (*American Society for Testing and Materials*).



1. Tensión de rotura.
 2. Límite elástico.
 3. Fractura/rotura.
 4. Región de endurecimiento inducido por deformación.
 5. Región de *necking*.
- A. curva tensión-deformación de ingeniería.
B. curva tensión-deformación verdadera.

- Observaciones:

- No es del todo riguroso calificar a un dado material como dúctil o frágil, ya que el comportamiento mecánico depende en gran medida de las condiciones de carga.
- Así, un acero dúctil en condiciones “normales” puede mostrar un comportamiento marcadamente frágil a bajas temperaturas o a altas velocidades de carga.
- Por otra parte, el hierro fundido o el vidrio muestran un comportamiento dúctil a altas temperaturas.

1.3 Tensión límite

- Se define la *tensión límite*, σ_{lim} , como aquel valor de la tensión al cual el material alcanza su límite de resistencia, y por debajo del cual no se producen ni deformaciones excesivas ni, por supuesto, la rotura del mismo.
- En los materiales dúctiles, tales como el acero, es habitual considerar como tensión límite la tensión de fluencia ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_f$).
- En los materiales frágiles, como el hormigón, se suele considerar como tensión límite la tensión de rotura ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_r$).
- Sin embargo, en la práctica, las estructuras se diseñan para trabajar a niveles de tensión significativamente por debajo de la tensión límite de los correspondientes materiales estructurales.

- Los motivos para esta práctica de diseño son varios, y fundamentalmente debidos a la *existencia de incertidumbres en la fase de diseño*:
 - *incertidumbres asociadas a la caracterización de las propiedades mecánicas de los materiales*, debidas a la calidad y homogeneidad del material, a la dispersión en los ensayos experimentales, a la adecuación de éstos a las condiciones reales de servicio, a fenómenos de fluencia y relajación, a degradación debida a causas físicas o químicas, a efectos cíclicos o dinámicos, fatiga, etc.
 - *incertidumbres asociadas a la definición y caracterización de las acciones*, ya sea por la insuficiencia de datos para estimarlas (efectos climáticos y ambientales, efectos sísmicos), por su insuficiente definición en la fase de proyecto (cargas de servicio o cargas excepcionales), por la variabilidad temporal de su naturaleza, por el desconocimiento de su evolución durante la vida útil de la estructura, etc.

- (cont.)...

- *incertidumbres asociadas a los métodos de cálculo*, ya sea por las hipótesis simplificativas adoptadas en las bases de cálculo, por la propia naturaleza de los métodos de análisis o por la dificultad asociada a éstos en caso de utilizar métodos sofisticados.
- *incertidumbres asociadas a los métodos de construcción*, y que pueden estar relacionadas con el proceso constructivo previsto, los procedimientos de ejecución y de control de calidad empleados, etc.
- *incertidumbres asociadas a los métodos de conservación y mantenimiento*, que pueden reflejarse en fenómenos de degradación progresiva, corrosión, agresiones ambientales, etc.

1.4 Tensión admisible

- Se define la *tensión admisible*, σ_{adm} , como:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n} \leq \sigma_{\text{lim}},$$

donde σ_{lim} es la tensión límite del material y n es un coeficiente mayor (o excepcionalmente igual) que la unidad denominado *coeficiente de seguridad*.

- Las estructuras se diseñan, por tanto, con el criterio de que la tensión en cualquier punto sea inferior al valor de la tensión admisible; es decir, si σ_{max} es el valor máximo de la tensión en la estructura, debe cumplirse que

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{adm}} \leq \sigma_{\text{lim}}.$$

1.5 Coeficiente de seguridad

- En los cálculos de resistencia mecánica, el factor o coeficiente de seguridad se aplica principalmente de dos maneras:
 - (1) Multiplicando el valor de las solicitudes o fuerzas que actúan sobre un elemento resistente por un coeficiente mayor a uno (coeficiente de mayoración). En este caso **se calcula como si el sistema fuera solicitado en mayor medida de lo que se espera que lo sea en la realidad.**
 - (2) Dividiendo las propiedades favorables del material que determinan el diseño por un número mayor que uno (coeficiente de minoración). En este caso **se modela el material como si fuera peor de lo que se espera que sea.**
- En ambos casos el resultado es un *sobredimensionamiento del componente.*
- La determinación del coeficiente de seguridad depende de un gran número de factores, pero éste debe ser mayor cuanto mayor sea el grado de incertidumbre o cuanto mayor sea el impacto, en términos socio-económicos, que acarrearía un eventual fallo estructural.

- Los valores usados como factores de seguridad, por lo general, provienen de la experiencia empírica o práctica, por lo cual están tabulados y contemplados en las normas o la literatura, o bien se aplican según la experiencia personal del diseñador.
- El coeficiente de seguridad puede reducirse en estructuras de poca complejidad o de vida útil reducida.
 - En general, para el mismo tipo de elemento dependerán del tipo de uso o servicio que se le piense dar y de la posibilidad de riesgo derivada para usuarios y terceras personas.
Por ejemplo, para una máquina de uso continuo se usará un factor de seguridad mayor que para una de uso esporádico.
 - En resistencia de materiales se aplicarán diferentes coeficientes de seguridad dependiendo del uso del componente.
Por ejemplo, en el cálculo de dimensionamiento de la sección de un cable para tender la ropa se utilizará un coeficiente de seguridad inferior al utilizado para ese mismo cable cuando se estudia su empleo para sustentar un ascensor.

- En edificación e ingeniería de la construcción se usan coeficientes de seguridad entre 2 y 5, adoptándose valores más altos para la construcción *in situ* que para la prefabricación.
- En ingeniería aeronaútica se usan, necesariamente, coeficientes de seguridad menores, entre 1.5 y 2, pero asociados a métodos de análisis, construcción, conservación y control más complejos.
- En el diseño de aparatos a presión, según la norma AD-Merkblätter, en el cálculo de espesor, se aplica un coeficiente de seguridad de 1.50 para presiones de diseño, y un coeficiente de seguridad de 1.10 para presiones de prueba. La tensión que toma la mencionada norma para los cálculos es la tensión de fluencia del material a la temperatura de trabajo. En este caso usamos el método 2, o sea, reducir la tensión a utilizar en los cálculos.
- En el caso del dimensionamiento de la pared de una tubería se suele aplicar, entre otros, un coeficiente de seguridad por corrosión del orden de 1.2. Al resultado del cálculo del espesor se lo multiplica por 1.2, obteniéndose un espesor mayor. En este caso utilizamos el método 1.

- **Ejemplo 1.1:** Analize cualitativamente el caso de un ascensor, en el que se indique como carga de uso una carga máxima de 320 kg ó 4 personas y que esté diseñado con un factor de seguridad de 1.5. Este último será desconocido por el usuario por razones de seguridad.

Rta: Dado que el coeficiente de seguridad es 1.5, realmente el ascensor aguantará hasta 480 kg. Al aplicar el coeficiente de seguridad dividiendo 480 kg por 1.5, obtenemos los 320 kg que es la carga de uso o de diseño. Es decir el coeficiente se aplica sobre la carga máxima de rotura del dispositivo (método 2). Si el ascensor se carga con 480 kg, que es su carga máxima calculada, los cables se romperían o estarían muy próximos a romperse.

2. Principios de la Resistencia de Materiales

- La Resistencia de Materiales puede considerarse como aquella parte de la Mecánica de Sólidos Deformables que resulta de aplicar la Teoría de la Elasticidad a un tipo restringido de problemas que se plantean en el día a día de la Ingeniería Estructural para posibilitar su resolución de forma analítica.
- Estos problemas vienen definidos, fundamentalmente, por:
 - ① *Restricción en la definición del problema elástico.* La Resistencia de Materiales se aplica a piezas prismáticas (vigas, columnas, barras, ejes, etc.) que están apoyadas, articuladas o empotradas y sometidas a la acción de fuerzas puntuales o repartidas, descensos de apoyos, cargas térmicas, etc.
 - ② *La adopción de ciertas hipótesis fundamentales.* Estas hipótesis permiten, por un lado, definir un problema lineal y, por otro, abordar un problema inicialmente tridimensional (las piezas tienen longitud, altura y anchura) como un “ensamblaje” de problemas básicamente unidimensionales (las piezas se representan como líneas).

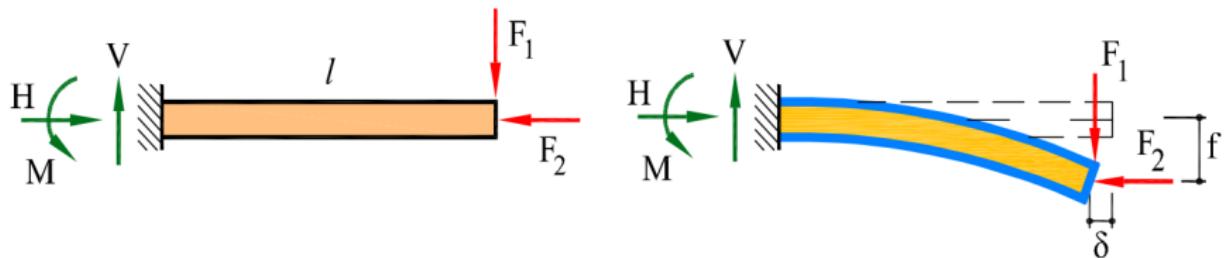
- La Resistencia de Materiales, como parte integrante de la Mecánica de Estructuras, tiene como objetivo fundamental determinar la respuesta de las estructuras cuando éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil.
- Por “respuesta estructural” se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran.
- La determinación de los *estados de tensión* es necesaria para comprobar la satisfacción de los *criterios de resistencia* que establecen las correspondientes normativas y los usos de buena práctica, de cara a garantizar la seguridad de las estructuras.
- Por su parte, la determinación de los *estados de deformación* suele ser necesaria para satisfacer los *criterios de rigidez*, que están a menudo ligados a requisitos de funcionalidad de las estructuras.

- La Resistencia de Materiales pretende establecer las condiciones de **resistencia y rigidez** de las estructuras analizadas.
- Ambos aspectos se abordan en los dos tipos de problemas fundamentales que se plantean en la práctica ingenieril: el dimensionamiento y la verificación de estructuras.
- La Resistencia de Materiales es una disciplina que se basa en tres principios o hipótesis fundamentales:
 1. el Principio de Rigidez,
 2. el Principio de Superposición,
 3. y el Principio de Saint-Venant.
- La validez de los resultados obtenidos mediante esta teoría depende, básicamente, del grado de satisfacción de estos principios en el caso concreto en que se aplique.

2.1 Principio de Rigidez

- El **Principio de Rigidez** es una consecuencia directa de la hipótesis de pequeños desplazamientos aplicada al análisis de estructuras y establece que *“las ecuaciones de equilibrio se pueden formular sobre la geometría sin deformar, es decir, sin considerar los desplazamientos provocados por el sistema de cargas”*.
- Esta hipótesis implica que los desplazamientos de la estructura debidos al sistema de cargas sean pequeños: los desplazamientos, comparados con las dimensiones de la estructura, y los giros (en radianes), comparados con la unidad.
- Si esta condición no se cumple, las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la *geometría deformada*, y el problema deja de ser lineal para transformarse en un problema geométricamente no lineal.

- En la figura se ilustra la aplicación del Principio de Rigidez.

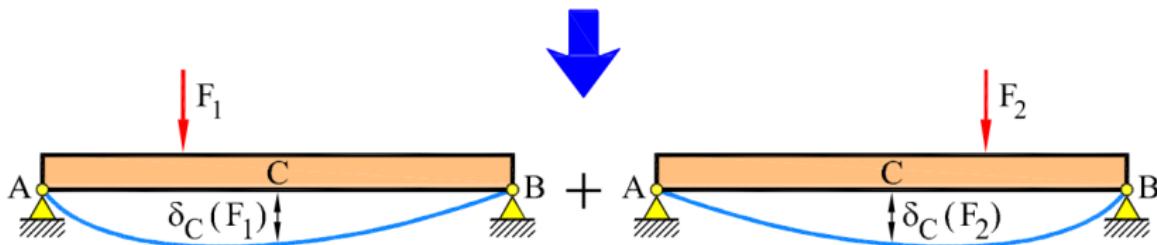
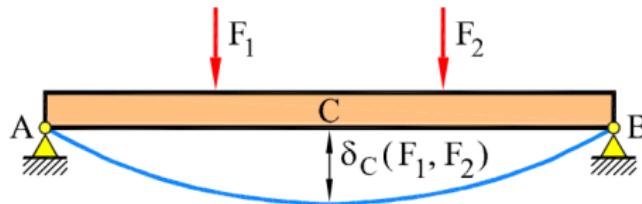


- Bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos (izquierda), las reacciones en el empotramiento sólo dependen de la geometría inicial y de las cargas ($M = F_1 l$).
- Sin la hipótesis de pequeños desplazamientos (derecha), las reacciones dependen de la deformación de la estructura ($M = F_1(l - \delta) + F_2 f$), y ésta es desconocida *a priori*.

2.2 Principio de Superposición

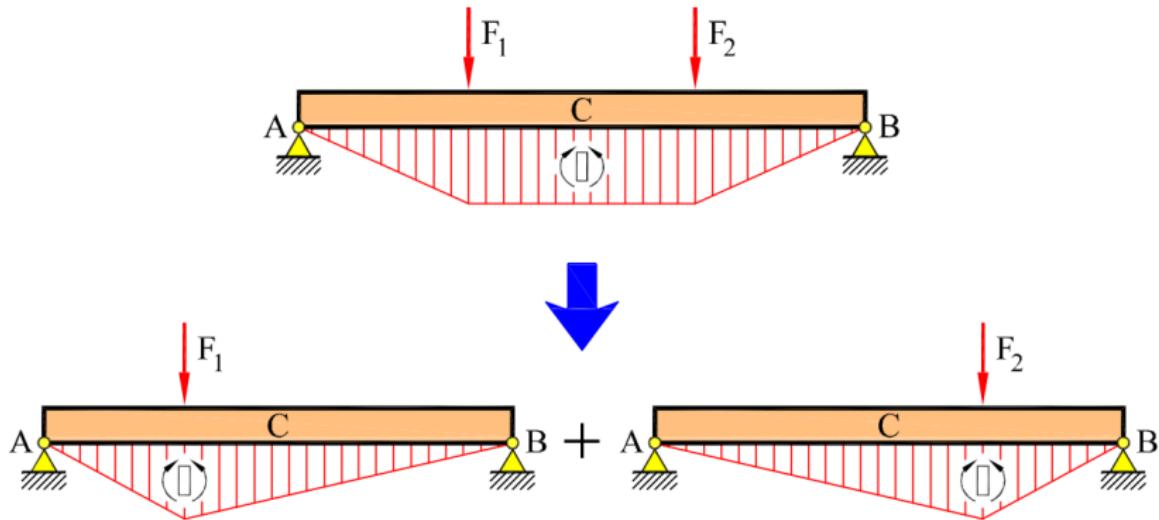
- Cuando es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos y se cumple la ley de Hooke, entonces el problema elástico es lineal.
- La resolución de un problema estructural lineal es mucho más sencillo que la de uno no lineal; además de otras dificultades de tipo práctico, en un problema no lineal no existe, en general, garantía de que la solución exista y sea única.
- El **Principio de Superposición** establece que para un problema lineal, *“los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado”*.
- El Principio de Superposición implica que las reacciones, desplazamientos, tensiones y deformaciones que provoca sobre la estructura el estado de cargas original es igual a la suma de las reacciones, desplazamientos, tensiones y deformaciones que provocan los estados en los que éste se descompone.

- En la figura se muestra una viga biapoyada sobre la que actúa un sistema de carga consistente en dos fuerzas puntuales.



- El sistema considerado puede descomponerse en los dos sistemas más simples de la parte inferior de la figura a efectos, por ejemplo, de calcular la flecha vertical en el punto C.

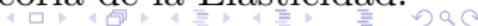
- En la viga biapoyada de la figura el momento flector debido al sistema de cargas $F_1 + F_2$ es igual a la suma del momento flector debido a F_1 más el debido a F_2 , actuando separadamente.



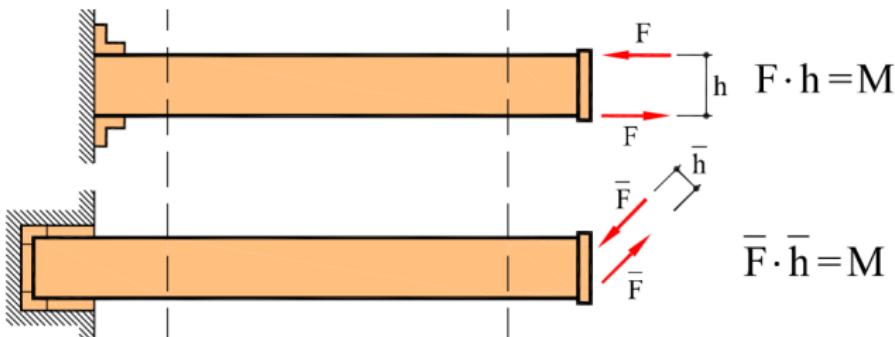
- Una consecuencia inmediata del citado principio es que el estado final (tensional y deformacional) de una estructura sometida a un sistema de fuerzas no depende del orden de aplicación de dichas fuerzas.
- Esto permite, por ejemplo, analizar el caso de una solicitud compleja descomponiéndola en casos más simples de estudiar.
- Es posible, asimismo, la definición y el análisis de estados de carga de interés como combinación de estados de carga previamente definidos y analizados.
- Ambas posibilidades son utilizadas frecuentemente en Resistencia de Materiales.

2.3 Principio de Saint-Venant

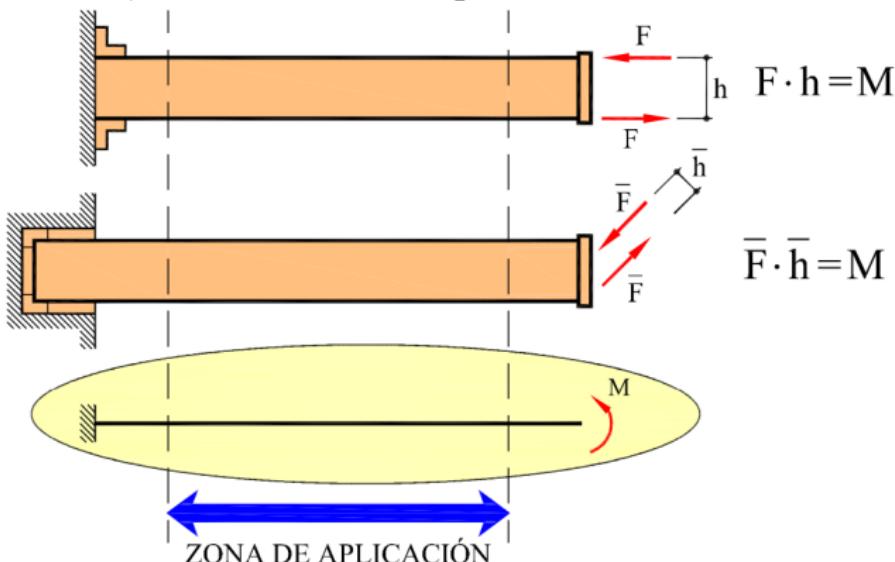
- El **Principio de Saint-Venant** puede considerarse la verdadera piedra angular de la Resistencia de Materiales, ya que establece que *“en una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada”*.
- Esta hipótesis implica que los efectos locales (fuerzas concentradas, apoyos, variaciones de sección) sólo afectan a una zona localizada a uno y otro lado de las secciones en que se producen.
- La forma precisa en que se aplican las cargas o los dispositivos empleados para aplicarlas, así como la disposición de los aparatos de apoyo, sólo afectan al estado tensional de esta zona localizada, de una longitud aproximadamente igual al canto de la pieza.
- El estudio tensional de las zonas afectadas por los efectos locales es complejo y debe hacerse mediante la Teoría de la Elasticidad.



- En la figura se muestran dos ejemplos de voladizos con momento aplicado en sus extremos libres.
- En el primer caso, el empotramiento se consigue apoyando la viga contra el soporte y coartando el giro mediante sendos angulares soldados a ambos; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas horizontales.
- En el segundo caso, el empotramiento se consigue encastrando adecuadamente la viga en el soporte; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas inclinadas respecto al eje de la viga.
- En ambas situaciones, el momento resultante de las fuerzas actuantes es idéntico, mientras que la resultante de fuerzas es nula.



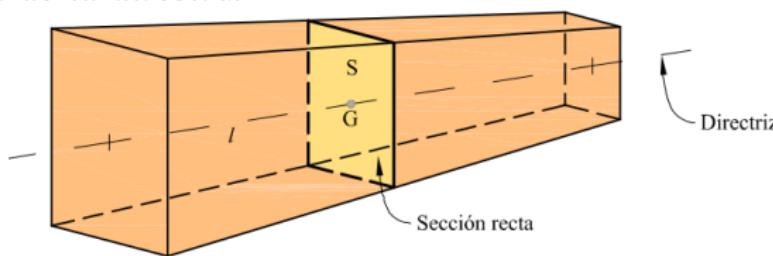
- A pesar de que las condiciones de empotramiento y de los momentos aplicados son diferentes, su idealización a efectos de cálculo es idéntica, tal como se muestra en la figura.
- Segundo el Principio de Saint-Venant, las tensiones que aparecen en las zonas centrales de las piezas dependen, exclusivamente, del momento resultante de las fuerzas actuantes; las zonas extremas, por el contrario, se ven afectadas por los efectos locales.



- En la práctica ingenieril, el estudio del estado tensional de un elemento estructural suele hacerse suponiendo que el Principio de Saint-Venant es aplicable a la totalidad de las secciones analizadas. El dimensionamiento de las piezas suele hacerse en función de los resultados así obtenidos.
- *A posteriori*, se adoptan las disposiciones constructivas necesarias para reducir o soportar de forma adecuada los efectos locales en las zonas en las que los resultados calculados en esta forma no son aplicables.

2.4 Restricciones geométricas

- Para que los principios fundamentales enunciados se cumplan y los resultados de la Resistencia de Materiales sean válidos, las piezas deben cumplir ciertas condiciones:
 - Geometría de la directriz.*



En piezas de directriz curva, sus radios de curvatura deben ser grandes en relación al canto de las piezas.

Si esta relación es suficientemente grande, los efectos de la curvatura pueden llegar a despreciarse en el análisis del comportamiento de las rebanadas y utilizar las expresiones obtenidas para piezas de directriz recta.

- Condiciones sobre las piezas (*cont.*)...

- *Geometría de las secciones:*

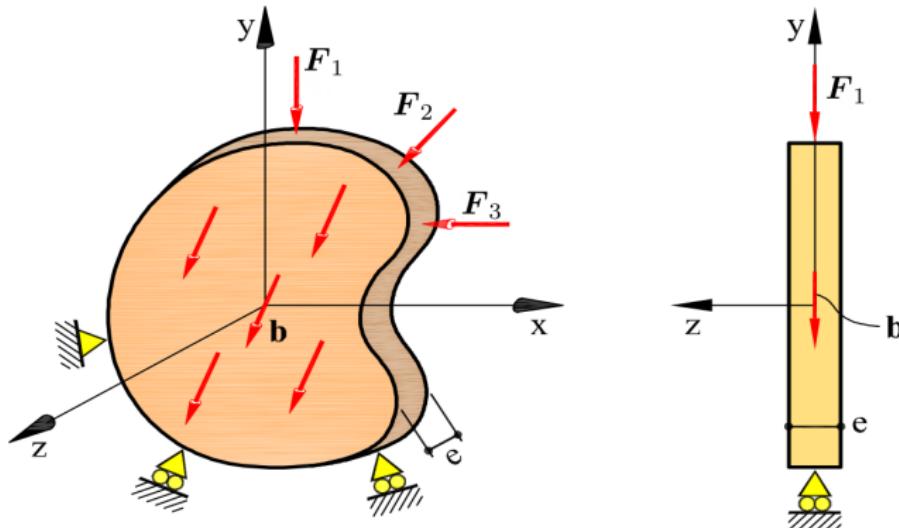
- # *Variación.* En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta. Las variaciones bruscas en las características geométricas de las secciones producen efectos locales que invalidan el principio de Saint-Venant.
 - # *Dimensiones.* Las dimensiones transversales de las piezas, canto y ancho, deben ser pequeñas en relación a su longitud. Esto es necesario para que se cumplan el principio de Saint-Venant y las hipótesis de deformación de las secciones que se utilizan habitualmente. Por otro lado, las características geométricas de las secciones rectas deben asegurar que las piezas tengan la rigidez necesaria para que los movimientos sean pequeños.

En general, son admisibles las relaciones *luz/canto* (l/h) siguientes:

- 10 a 12 para piezas rectas de hormigón armado
- 15 a 25 para piezas rectas de hormigón pretensado
- 20 a 35 para piezas rectas de acero laminado
- 40 a 100 para arcos

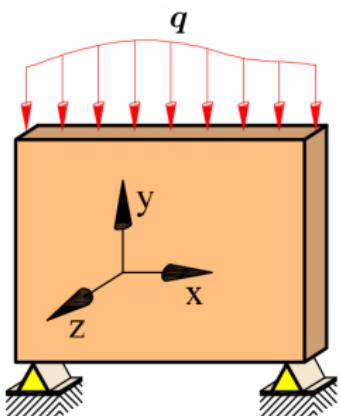
3. Estados planos de tensión y deformación

- Una estructura está sometida a un **estado plano de tensiones** cuando una de las dimensiones de la estructura (z) es mucho menor que las otras dos (x, y) que definen el plano de análisis.
- Además, las cargas externas puntuales \mathbf{F}_i y volumétricas \mathbf{b} que solicitan la estructura están contenidas en dicho plano (x, y) (ver figura).



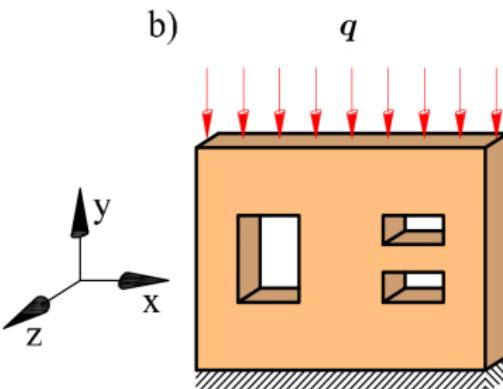
- En la figura se muestran dos ejemplos de estructuras bajo estado de tensión plana: (a) una placa o una viga gran canto cargada en su plano medio; (b) una pared cargada según se muestra en la figura.

a)



Viga pared

b)

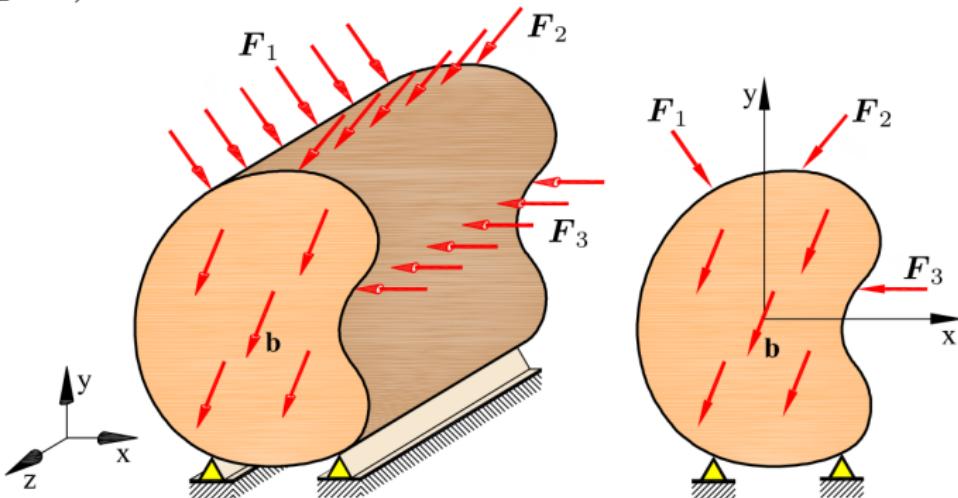


Pared

- En un estado plano de tensiones

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

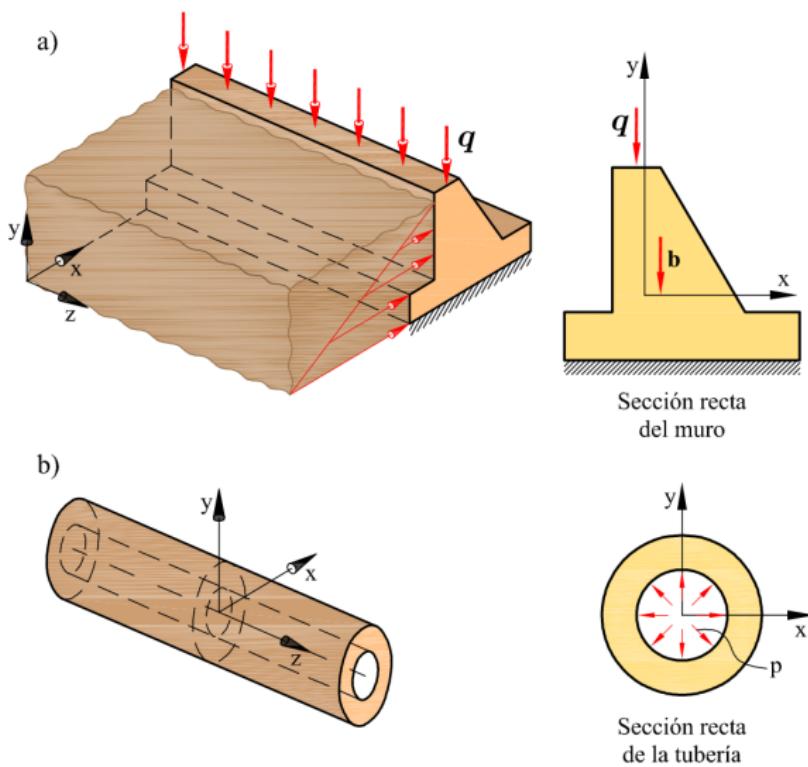
- Una estructura está sometida a un **estado plano de deformaciones** cuando una de sus dimensiones (z) es mucho mayor que las restantes (x, y).
- Además, la estructura está sometida a cargas externas puntuales \mathbf{F}_i y volumétricas \mathbf{b} perpendiculares al eje de la dimensión mayor (ver figura).



- En un estado plano de deformaciones

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.$$

- En la figura se muestran dos ejemplos de estructuras bajo estado de deformación plana: (a) muro de contención y (b) tubería bajo presión interna y/o externa.



3.1 Estados planos en coordenadas cartesianas

- Al considerar el problema bidimensional, las ecuaciones que relacionan tensiones con deformaciones (ley de Hooke generalizada) obtenidas para el caso general tridimensional se reducen en un estado plano a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{\tilde{E}}(\sigma_x - \tilde{\nu}\sigma_y), & \sigma_x &= \frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2}(\varepsilon_x + \tilde{\nu}\varepsilon_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\tilde{E}}(\sigma_y - \tilde{\nu}\sigma_x), & \sigma_y &= \frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2}(\varepsilon_y + \tilde{\nu}\varepsilon_x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

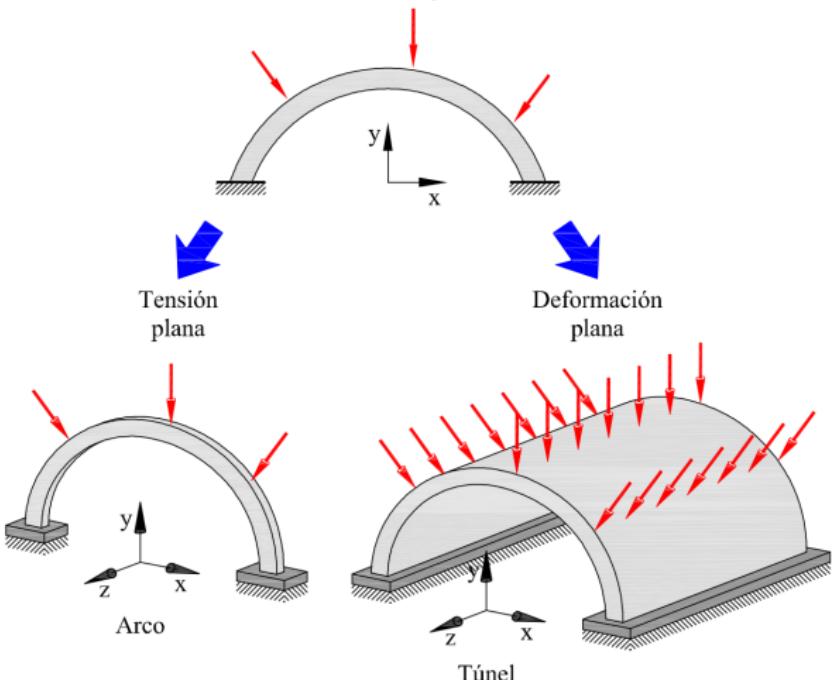
siendo $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

- Notar que no se consideran efectos térmicos.

- **Ejemplo 3.1:** Muestre que la ley de Hooke generalizada para las expresiones anteriores se debe calcular teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

| | Tensión plana | Deformación plana |
|-----------------|--|--|
| $\tilde{\nu}$ | ν | $\frac{\nu}{1-\nu}$ |
| \tilde{E} | E | $\frac{E}{1-\nu^2}$ |
| σ_z | 0 | $\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{(1-\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ |
| ε_z | $-\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ $-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ | 0 |

- De la comparación de las expresiones obtenidas para los estados de tensión y deformación plana se observa que ambos son muy similares una vez la atención se centra sobre el plano de análisis (el plano xy).
- Se debe resaltar que fuera de dicho plano (a lo largo del eje z) la realidad es muy diferente en ambos casos, tal y como se ilustra en la figura.



3.2 Función de Airy

- El planteamiento del problema elástico para un estado de elasticidad plana en ausencia de fuerzas de volumen conduce a unas ecuaciones algo más sencillas de lo habitual para la que puede aplicarse tanto el método de la función de tensiones de Airy como los métodos de variable compleja, para hallar una solución.
- En primer lugar las ecuaciones de equilibrio se reducen a solo dos ecuaciones independientes:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

- Mientras que las ecuaciones de compatibilidad se reducen a una única ecuación independiente:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.3)$$

• Función armónica

- En matemáticas, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n) una función real de n variables, se le llama **armónica en Ω** , si sobre Ω tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0,$$

en Ω .

- Esto se suele escribir como

$$\nabla^2 f = 0,$$

o también como

$$\Delta f = 0.$$

• Función holomorfa

- Son el principal objeto de estudio del análisis complejo; se definen sobre un subconjunto del plano complejo \mathbb{C} y con valores en \mathbb{C} , que son complejo-diferenciables en algún entorno de un punto de su dominio (la función es holomorfa en ese punto).
- Esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad en caso real e implica que la función es infinitamente diferenciable y que puede ser descrita mediante su serie de Taylor.
- El término función analítica se usa especialmente para cuando se trata de la restricción a los números reales de una función holomorfa.
- La frase “holomorfa en un punto a ” significa no solo diferenciable en a , sino diferenciable en todo un disco abierto centrado en a , en el plano complejo.
- La definición/función es la siguiente:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Este límite se toma aquí sobre todas las sucesiones de números complejos que se aproximen a z_0 , y para todas esas sucesiones el cociente de diferencias tiene que dar el mismo número $f'(z_0)$.



• Función de tensiones de Airy

- En las condiciones anteriores puede probarse que la solución del sistema formado por (3.2) y (3.3) sobre un cierto dominio plano, simplemente conexo, puede expresarse en función de una función biarmónica sobre dicho domino, siendo las tensiones expresables en función de esta única función biarmónica:

$$\nabla^4 \phi = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}.$$

Además se cumple que:

$$\nabla^2 \phi = \sigma_x + \sigma_y$$

- Además, es posible probar que toda función real que satisface las ecuaciones anteriores se puede expresar en términos de dos funciones armónicas holomorfas:

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\psi(z) + \chi(z)\}, \quad z = x + iy.$$

- **Ejemplo 3.2:** PDE biarmónica bidimensional.

Obtenga una ecuación en derivadas parciales (PDE) escalar para problemas de elasticidad 2D siendo que no hay fuerzas volumétricas, tal que la única incógnita sea la función de estrés. El resultado final debería ser:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0$$

Esto también se puede escribir usando el operador ∇ como:

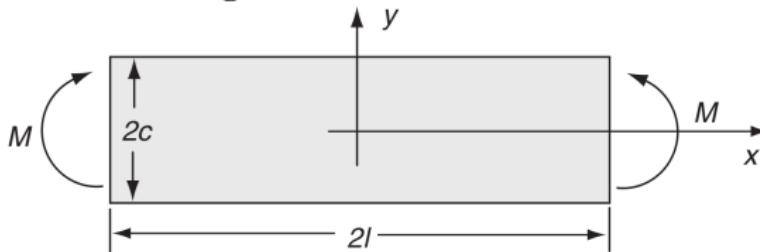
$$\nabla^4 \phi = \left(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}}_{\nabla^2} \right)^2 \phi.$$

- *Pista:* reemplace las tensiones en las ecuaciones de Beltrami-Michell para 2D (deformación o tensión plana) sin fuerzas corporales en términos de la función de tensión de Airy.

3.3 Soluciones de la función de Airy

- **Ejemplo 3.3:** Flexión pura de una viga *Sadd. 3rd Ed, pp. 163.*

Considere la función de tensión $\phi = A y^3$. Demuestre que esta función de tensión corresponde a un estado de flexión pura de una viga de altura $2c$ y longitud $2l$ sujeta a un momento de flexión M como se muestra en la figura.



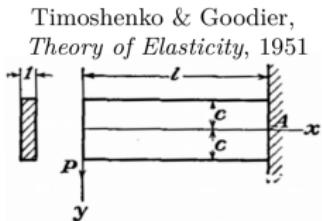
Muestre que el campo de desplazamiento es

$$u(x, y) = -\frac{3M}{2Ec^3}xy,$$

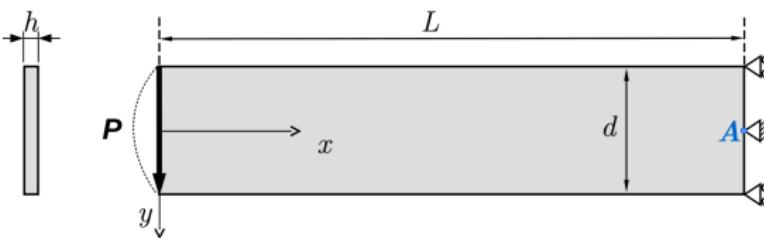
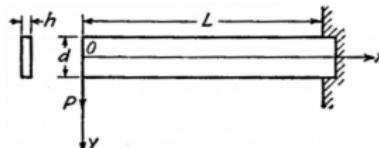
$$v(x, y) = \frac{3M}{4Ec^3}(x^2 + \nu y^2 - l^2).$$

• **Ejemplo 3.4:** Viga en voladizo cargada en su extremo

Obtenga la solución de una viga en voladizo de sección transversal rectangular estrecha bajo una carga en su extremo P .



Wang, *Applied Elasticity*, 1953



El espesor h es pequeño en comparación con la altura d , este es un ejemplo de tensión plana.

Las condiciones de contorno son que los bordes superior e inferior están libres de carga y las fuerzas de corte, que tienen una resultante P , se distribuyen a lo largo del extremo $x = 0$ de forma parabólica.

• **Ejemplo 3.4 (cont): Viga en voladizo cargada en su extremo.**

Si P es grande en comparación con ρg , la fuerza gravitacional puede despreciarse.

Teniendo en cuenta que $I = d^3h/12$ es el momento de inercia de la sección transversal, las expresiones finales para los componentes de la tensión son

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.4)$$

Timoshenko & Goodier:

Cabe señalar que esta solución representa una solución exacta solo si las fuerzas cortantes en los extremos se distribuyen de acuerdo con la misma ley parabólica que la tensión cortante τ_{xy} y la intensidad de las fuerzas normales en el extremos es proporcional a y .

Si las fuerzas en los extremos se distribuyen de cualquier otra manera, la distribución de esfuerzos (3.4) no es una solución correcta para los extremos del voladizo, pero, en virtud del principio de Saint-Venant, puede considerarse satisfactoria, para secciones transversales a una distancia considerable de los extremos.

- **Ejemplo 3.5:** Viga en voladizo cargada en su extremo.

Verifique que las soluciones obtenidas por Timoshenko y Goodier son equivalentes a las de Wang, ver Figuras en problema anterior.

Timoshenko & Goodier:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6GI} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \right) y,$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Wang:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + \frac{Py^3}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) + \frac{P}{2EI} \left(L^2 - (1 + \nu) \frac{d^2}{2} \right) y,$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}.$$

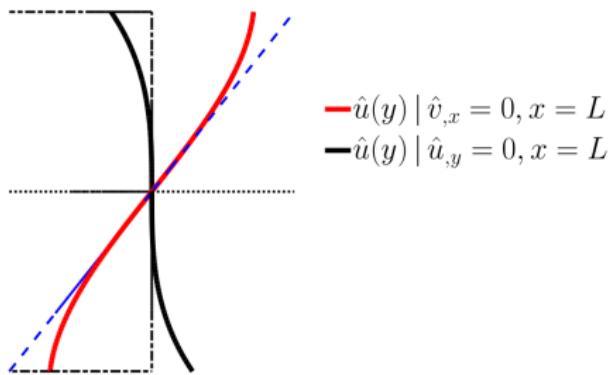
• **Ejemplo 3.6:** Viga en voladizo cargada en su extremo.

Grafique en Octave las configuraciones deformadas de la viga, analice la solución en la sección que se encuentra fija, determine el punto que experimenta el desplazamiento máximo. Tome $L = 1$, $d = 0.1$ y $\nu = 0.4$.

- *Pista 1:* trabaje con las variables adimensionales

$$\hat{u} = \frac{EI}{PL^3} u, \quad \hat{v} = \frac{EI}{PL^3} v.$$

- *Pista 2:* Fig. 27, pág. 39,
Timoshenko & Goodier, 1951.



Timoshenko & Goodier:

Observe que la sección fija no es libre de distorsionarse libremente y la distribución de fuerzas en este extremo es diferente de la dada por las ecuaciones (3.4). La solución (3.4) es, sin embargo, satisfactoria para voladizos comparativamente largos a distancias considerables de los extremos.

Bibliografía

-  Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.
-  Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).
Resistencia de Materiales. Barcelona, CIMNE, 2015.
-  Timoshenko, Stephen; J N. Goodier (1951).
Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.
-  Wang, Chi-Teh. (1953).
Applied Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1953.
-  Sadd, Martin H. (2014).
Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Boston, Academic Press, 2014.

Fin

