

Mecánica de los Sólidos – Unidad 2D

Formulación Matemática de la Elasticidad Lineal

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2019



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD DE
CIENCIAS APLICADAS
A LA INDUSTRIA**

- 3 3. Relaciones tensión-deformación-temperatura
 - 3.1 Relaciones constitutivas
 - 3.2 Idealización de las curvas tensión-deformación
 - 3.3 Relaciones constitutivas elástico lineales
 - 3.4 Ley de Hooke generalizada
 - 3.5 Deformaciones térmicas
 - 3.6 Ecuaciones completas de elasticidad
 - 3.8 Principio de Saint Venant
 - 3.9 Energía de deformación en cuerpos elásticos

3. Relaciones tensión-deformación-temperatura

- Anteriormente desarrollamos por separado las ideas de tensión y deformación en un punto, utilizando solo la geometría y los conceptos físicos de equilibrio de fuerzas y la continuidad del desplazamiento. No se ha especificado la naturaleza del material.
- Para determinar las distribuciones de tensión y deformación en un cuerpo se necesitan relaciones adicionales, que permitan vincular las componentes del tensor de tensión y el tensor de deformación.
- Es decir, la distribución del estrés y la deformación depende del comportamiento material del cuerpo bajo estudio.
- En este capítulo nos ocuparemos de las relaciones entre la tensión y la deformación.

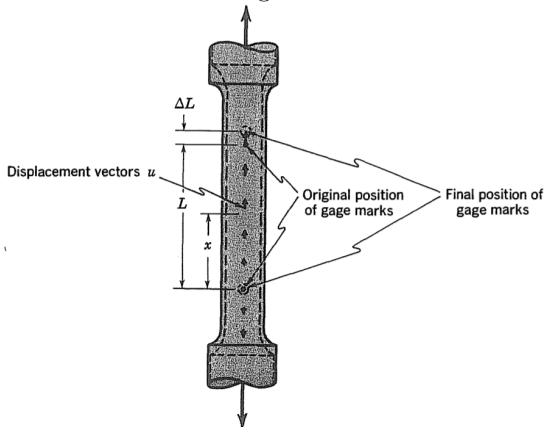
Se sugieren dos vías de enfoque:

- (1) relaciones basadas en evidencia experimental a nivel atómico con extensión teórica al nivel macroscópico o,
- (2) relaciones basadas en evidencia experimental a nivel macroscópico.

- Aunque ha habido mucho progreso en la física de sólidos durante las últimas décadas, no es posible obtener la información cuantitativa requerida por los ingenieros a partir de datos atómicos en muchas situaciones de interés práctico.
- Por lo tanto, el empleo de datos experimentales a nivel macroscópico, permite obtener las relaciones de estrés-deformación generalizando estos datos con la ayuda de argumentos físicos y matemáticos.
- En este capítulo se describe el comportamiento de tensión-deformación de una amplia variedad de materiales estructurales, incluidos metales, madera, polímeros y materiales compuestos. Se desarrollará en detalle la teoría de la elasticidad isotrópica lineal.

3.1 Relaciones constitutivas

- Como en otras ramas de la ciencia, se desea desarrollar una teoría que permita predecir el comportamiento de una situación general a partir de los resultados de un experimento realizado en una situación muy simple.
- La carga más simple que podemos imaginar es aquella en la que se tira de un miembro relativamente delgado en la dirección de su eje, ver figura.

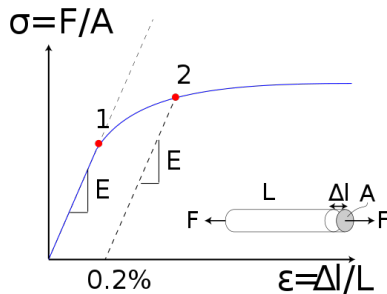


- Por lo general, el único componente de deformación registrado en una prueba de tracción es el componente axial normal.
- Si los desplazamientos varían uniformemente sobre la longitud del calibre L , se puede escribir

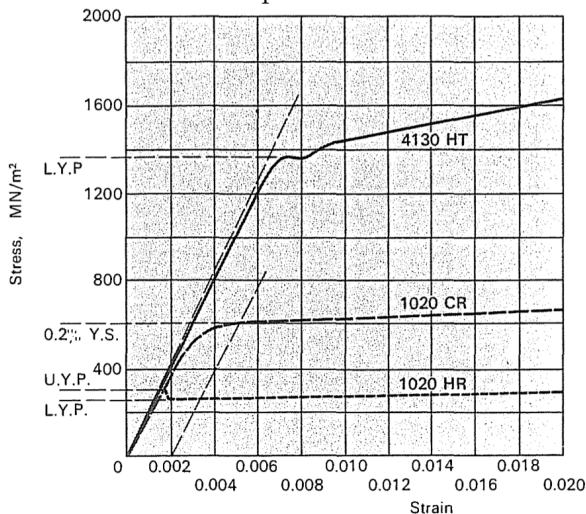
$$u = \frac{x}{L} \Delta L.$$

- Para pequeñas deformaciones, de la definición de deformación

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta L}{L}.$$



• Curvas de tensión-deformación para tres aceros.



Stress-strain curves for three steels.

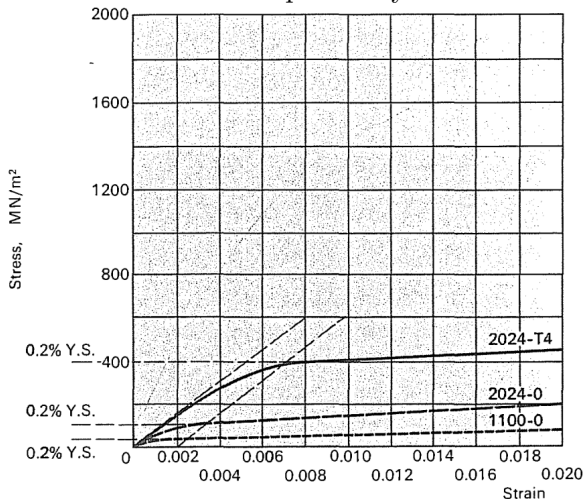
---- Mild steel, hot-rolled (1020 HR)

- - - Mild steel, cold-rolled (1020 CR)

— 0.3% C, 0.5% Mn, 0.25% Si, 0.9% Cr, balance Fe (4130 HT)

Heat treatment: Oil quenched from 870°C, tempered at 315°C

• Curvas de tensión-deformación para Al y dos aleaciones de Al.



Stress-strain curves for aluminum and two aluminum alloys.

---- Commercially pure aluminum, annealed (1100-0)

— — 4.6% Cu, 1.5% Mg, 0.7% Mn, balance Al, annealed (2024-0)

—— 4.6% Cu, 1.5% Mg, 0.7% Mn, balance Al (2024-T4)

Water quenched from 490°C, aged 24 hr at 120°C

3.2 Idealización de las curvas tensión-deformación

- En la mecánica de cuerpos deformables, necesitamos conocer la relación entre la tensión y la deformación.
- La relación tensión-deformación (a), junto con las ecuaciones diferenciales de equilibrio (b) y las relaciones deformación-desplazamiento (c), deben satisfacerse en cada punto de un cuerpo deformable en equilibrio,

$$(a) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (b) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad (c) \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

- Estas relaciones para cada elemento diferencial comprenden los tres pasos en los que debe basarse la solución, que incluye los siguientes **pasos en el análisis de cuerpos deformables**:
 - (1) Estudio de fuerzas y requisitos de equilibrio.
 - (2) Estudio de deformación y condiciones de ajuste geométrico.
 - (3) Aplicación de las relaciones de fuerza-deformación.

- En un dado problema, se se desea emplear modelos simples y coherentes con la realidad física, por ello se idealiza a las curvas de tensión-deformación tal que puedan describirse mediante ecuaciones sencillas.
- La idoneidad de tal idealización dependerá de la magnitud de las deformaciones consideradas, y esto a su vez dependerá del problema práctico que se esté estudiando.
- **Ejercicio:** Para decidir qué idealizaciones de las curvas de tensión-deformación son necesarias, debemos recurrir a las aplicaciones de la mecánica en la que se utilizan estas idealizaciones.

Describa aquellos ejemplos prácticos empleados en el diseño de estructuras que soportan o producen ciertas deformaciones deseadas (diseño de resortes, válvulas de seguridad, parachoque, panel de choque, pasador de corte, diafragma de escape), diseño de procesos de corte y conformado de metales, diseño de elementos para evitar diversos tipos de falla.

- El análisis de diversos problemas que surgen en la mecánica de los sólidos tales como deformaciones excesivas (plasticidad), fractura, fatiga, desgaste, corrosión, muestra que existe una necesidad de una variedad de relaciones de tensión-deformación.
- En la mayoría de los materiales es imposible describir la curva de tensión-deformación mediante una expresión matemática sencilla, por ende el comportamiento del material está representado por una *curva idealizada de tensión-deformación* que enfatiza aquellos aspectos del comportamiento que son más importantes en ese problema particular.

- **Ejercicio:** Grafique el diagrama $\varepsilon - \sigma$ para los siguientes modelos idealizados de comportamiento del material, estos modelos son los de uso más práctico debido a su simplicidad matemática.

i. *Material rígido*, la tensión no depende del esfuerzo aplicado.

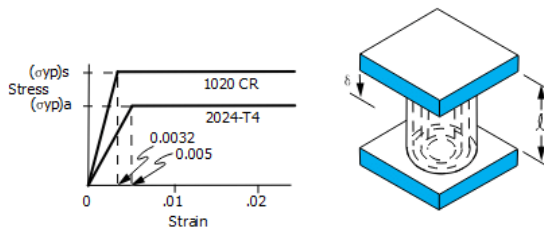
Estudio de grandes movimientos y fuerzas sobre piezas de máquina, para proporcionar una potencia adecuada y resistencia al desgaste.

ii. *Material linealmente elástico*, la deformación es proporcional al esfuerzo. Es útil en diseños a pequeñas deformaciones, en rigidez o para prevenir la fatiga o fractura en estructuras frágiles.

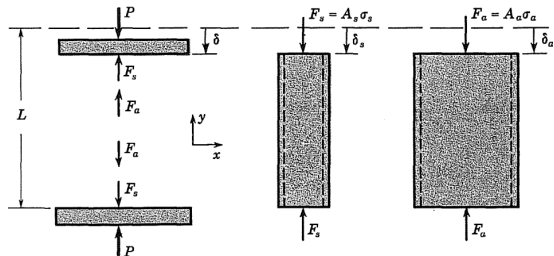
iii. *Material plástico-rígido*, se desprecian las deformaciones elásticas y dependientes del tiempo. Si se libera la tensión, la deformación permanece. El endurecimiento por la deformación puede despreciarse, material *perfectamente plástico*, o modelarse. Este tipo de idealizaciones se emplean para determinar cargas máximas de estructuras, en el estudio de problemas de mecanizado y conformado de metales, y en algunos estudios detallados de fracturas.

iv. *Material plástico-elástico*, están presentes tanto deformaciones elásticas como plásticas, el endurecimiento puede o no ser despreciado. Se emplean para diseñar bajo deformaciones moderadas y al realizar estudios detallados de fractura, desgaste y fricción.

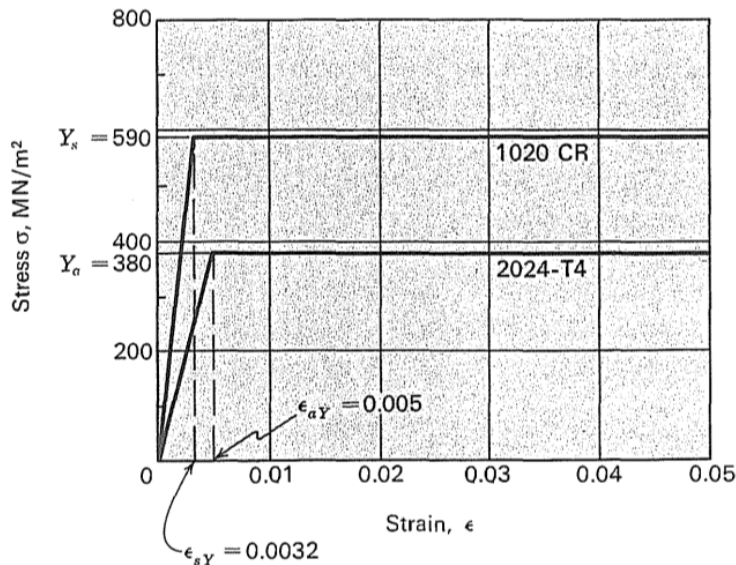
- **Ejercicio:** Dos tubos coaxiales, el interior de acero 1020 CR y sección transversal de área A_s , y el exterior de aleación de aluminio 2024-T4 y área A_a , se comprimen entre placas duras. Determinar la curva de carga-deformación del conjunto, cuando se comprime en la región plástica por una fuerza axial P .



- Nuestro primer paso es construir un modelo idealizado de la situación, que mostramos en la figura.



- **Ejercicio (cont.):** Determinar la curva de $P - \delta$ del conjunto, $r_s = 5$ mm, $t_s = 0.5$ mm, $r_a = 10$ mm, $t_a = 1$ mm, $L = 50$ mm.



3.3 Relaciones constitutivas elástico lineales

- En las secciones anteriores se consideraron las relaciones de tensión-deformación para el caso especial de carga uniaxial. Solo estaba presente un componente del estrés, el componente axial normal, y solo se consideró el componente axial normal de la deformación.
- Ahora generalizaremos el comportamiento elástico en la prueba de tensión para llegar a las relaciones que conectan los seis componentes de la tensión con las seis componentes de la deformación elástica.
- Nos limitaremos a materiales que sean linealmente elásticos.
- Utilizaremos como definición de deformaciones expresada en la ecuación (c)–pág. 9, y por lo tanto, también nos restringimos a pequeñas deformaciones en comparación con la unidad.

- Dado un sistema de coordenadas cartesianas, los tensores de tensión y deformación se pueden representar por matrices 3×3 , es decir

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

- El tensor de rigidez nos permite definir un mapeo lineal entre los nueve números σ_{ij} y los nueve números ε_{kl} , se representa en el caso más general por $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ números reales C_{ijkl} .
- Los tres tensores generalmente varían de un punto a otro dentro del medio, y también pueden variar con el tiempo.
- El tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ especifica el desplazamiento de las partículas del medio en la vecindad del punto, mientras que el tensor de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ especifica las fuerzas que las parcelas vecinas del medio ejercen entre sí.
- Por lo tanto, son independientes de la composición y del estado físico del material. El tensor de rigidez \boldsymbol{C} , por otro lado, es una propiedad del material, y a menudo depende de variables de estado físico como temperatura, presión y microestructura.

- Como hemos visto en secciones precedentes el estado general de tensión en un punto se describe mediante tres componentes normales de tensión y tres componentes de tensión de corte.
- Del mismo modo, el estado más general de deformación puede describirse mediante tres componentes normales de deformación y tres componentes de deformación por cizallamiento.
- Por lo tanto, las relaciones generales entre el estrés y la tensión se pueden establecer en seis ecuaciones, cada una de las cuales proporciona la dependencia de un componente de la tensión de los diversos componentes de deformación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

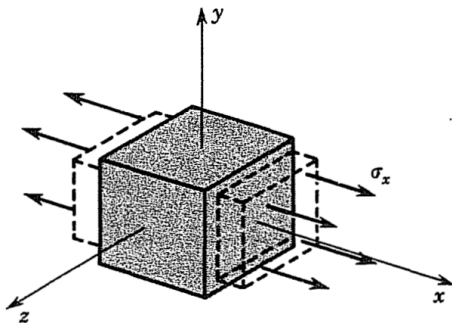
donde C_{ijkl} es el tensor de rigidez o de elasticidad, sus elementos son los coeficientes que relacionan las deformaciones con las tensiones.

- Debido a las simetrías inherentes de σ , ε y \mathbf{C} , solo 21 coeficientes elásticos de este último son independientes.
- Un material isotrópico se define como aquel cuyas propiedades son independientes de la orientación.
- Los materiales compuestos de elementos estructurales orientados al azar pueden considerarse estadísticamente isotrópicos.
- Para los medios isotrópicos (que tienen las mismas propiedades físicas en cualquier dirección), \mathbf{C} puede reducirse a solo dos números independientes, los parámetros de Lamè-Hooke.

- Primero, considere un elemento en el que solo hay un componente de la acción del estrés normal, ver figura.
- Si consideramos solo materiales en los cuales la deformación es directamente proporcional al esfuerzo. Esta relación se puede expresar en términos matemáticos como

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

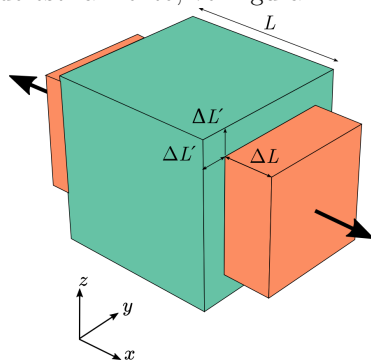
la cual es otra forma de la ley de Hooke para carga uniaxial.



- Además del componente normal de la deformación en la dirección x , nuestra experiencia nos lleva a esperar que habrá una contracción lateral cuando una barra se alargue.
- Mediciones precisas realizadas durante pruebas de tracción confirman esta suposición, y se encuentra que la deformación de compresión lateral es una fracción fija de la deformación normal.
- Además, pruebas de compresión uniaxial muestran una deformación extensional lateral que es la misma fracción fija de la contracción lateral cuando se estira. Esta fracción fija se conoce como la *relación de Poisson* o *parámetro de Poisson* y se le da el símbolo ν .
- Para la condición de tensión uniaxial ilustrada en la figura anterior, las deformaciones laterales ε_y y ε_z deben ser iguales porque ni el material, que es isotrópico, ni el modo de tensión favorecen alguna dirección.
- Para un material elástico lineal, estas deformaciones se pueden expresar como

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}.$$

- El *coeficiente de Poisson* (ν) es una constante elástica que proporciona una medida del estrechamiento de la sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la de estiramiento, ver figura.



- Un cubo con lados de longitud L de un material isotrópico linealmente elástico sujeto a tensión a lo largo del eje x . El cubo verde no está deformado, el rojo se expande en la dirección x por ΔL debido a la tensión, y se contrae en las direcciones y y z por $\Delta L'$.

- Para valores muy pequeños de ΔL y $\Delta L'$, la aproximación de primer orden produce:

$$\nu \approx -\frac{\Delta L'}{\Delta L}.$$

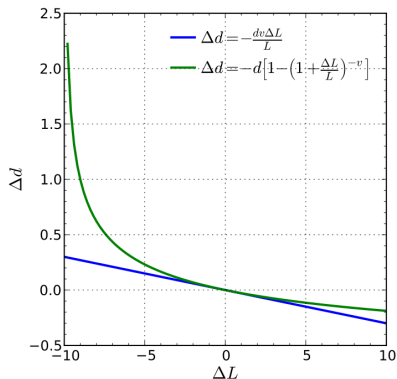
- Antes de continuar consideremos el cambio de ancho de una varilla con diámetro (o ancho, o grosor) d y longitud L , la cual está sujeta a tensión, de modo que su longitud cambiará en ΔL , entonces su diámetro d cambiará en:

$$\Delta d = -d\nu \frac{\Delta L}{L}, \quad \Rightarrow \frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta L}{L}.$$

- La fórmula anterior es correcta solo en el caso de pequeñas deformaciones. Si las deformaciones son grandes, se puede utilizar la siguiente expresión (más precisa):

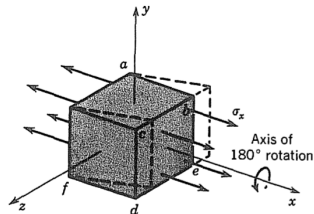
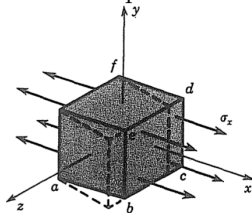
$$\frac{\Delta d}{d} = -1 + \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-\nu}.$$

El valor es negativo porque disminuye con el aumento de la longitud.



- En la figura se muestra la comparación entre las dos fórmulas, una para deformaciones pequeñas, otra para deformaciones grandes.

- Ahora, consideramos la posibilidad de deformaciones por corte resultantes del esfuerzo normal σ_x .
- De nuevo, la isotropía del material simplifica las relaciones. Suponga que estuviera presente una deformación por corte, como se muestra en la figura. Una rotación de 180° del elemento alrededor del eje x parecería dar una deformación de corte en el sentido opuesto (figura derecha).
- Si el material es isotrópico, su comportamiento de tensión-deformación debe ser independiente de una rotación de 180° . Esta contradicción se evita solo si la deformación de corte debido a un componente de deformación normal desaparece.
- Argumentos similares muestran que los otros dos componentes de la deformación de corte también deben desaparecer, y que, en consecuencia, un esfuerzo normal produce solo deformaciones normales.



- Se requiere un argumento adicional para descartar la posibilidad de una deformación ε_x debido al estrés τ_{yz} .
- La linealidad del material requiere cambios constantes de signo para una proporcionalidad entre ε_x y τ_{yz} .
- Nuevamente, la contradicción se evita solo si la deformación normal está ausente si se aplica un esfuerzo cortante τ_{yz} .
- Argumentos similares de simetría y linealidad muestran que no pueden existir componentes de deformación distintos de γ_{yz} , solos o en combinación, como resultado del componente de esfuerzo cortante τ_{yz} .
- De manera más general, concluimos que cada componente de esfuerzo cortante produce solo su componente de deformación de corte correspondiente.
- Además, la linealidad requiere proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación, y la isotropía requiere que la constante de proporcionalidad, G , sea independiente de la orientación, es decir.

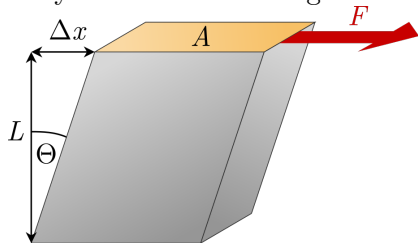
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

donde G se llama módulo de corte.

- Experimentalmente el módulo elástico transversal (o módulo cortante) puede medirse de varios modos, conceptualmente la forma más sencilla es considerar un cubo como el de la figura y someterlo a una fuerza cortante, para pequeñas deformaciones se puede calcular la razón entre la tensión y la deformación angular:

$$G = \frac{\tau_m}{\Theta} \approx \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F L}{\Delta x A}$$

donde τ_m es la tensión cortante, Θ es la deformación angular.



- El módulo de corte también puede medirse a partir de experimentos de torsión, por lo que dicha constante no sólo interviene en los procesos de cizalladura.

3.4 Ley de Hooke generalizada

- Dado un material isotrópico lineal, con todos los componentes de tensión presentes, se obtienen las siguientes relaciones tensión-deformación:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

- Estas ecuaciones son la **ley de Hooke generalizada**.

- Ley de Hooke en forma matricial

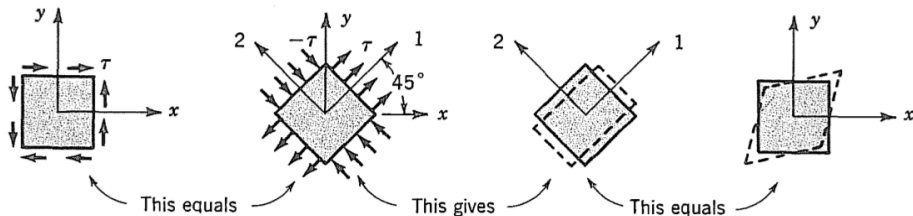
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}.$$

- Una consecuencia de la isotropía es el hecho de que los ejes principales de deformación en un punto de un cuerpo tensionado coinciden con los ejes principales de tensión en ese punto.
- Las relaciones angulares en los círculos de Mohr para la tensión y la deformación son, por lo tanto, idénticas, y al determinar la ubicación de los ejes principales correspondientes a un estado de tensión dado, se puede usar el círculo de Mohr para la tensión o la deformación.

- **Ejercicio:** Para un material isótropo elástico lineal el módulo de elasticidad transversal está relacionado con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson mediante la relación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{\tau_{ij}}{2\varepsilon_{ij}}, \quad i \neq j.$$

Obtenga esta relación mediante el análisis de un estado de tensión de corte puro τ , ver figura.



- **Ejercicio:** las ecuaciones constitutivas se expresan en forma matricial en términos del módulo de Young y del coeficiente de Poisson como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$

Muestre que las relaciones inversas se expresan como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

Donde $\alpha := \frac{\nu}{1-2\nu}$.

- Un material isotrópico lineal solo posee dos constantes elásticas independientes, *los parámetros de Lamè*, λ y μ .
- En elasticidad lineal, los parámetros de Lamè son dos constantes elásticas que caracterizan por completo el comportamiento elástico lineal de un sólido isótropo en pequeñas deformaciones, estos dos parámetros se designan como:
 - λ primer parámetro de Lamè.
 - μ segundo parámetro de Lamè, o bien como módulo de elasticidad transversal, módulo de corte, módulo de rigidez transversal o módulo elástico tangencial. También denotado por la letra G .
- La ecuación constitutiva de un material elástico lineal homogéneo e isótropo, ley de Hooke, se expresa como

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I},$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la tensión, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de deformación, \mathbf{I} la matriz identidad y $\operatorname{tr}(\cdot)$ la función traza.

- El parámetro λ no tiene una interpretación física directa o simple, pero sirve para simplificar la matriz de rigidez en la ley de Hooke.

- (λ, μ) constituyen una parametrización del módulo de elasticidad para medios isotrópicos homogéneos, y están relacionados con los otros módulos de elasticidad.
- **Ejercicio:** determinar la relación entre los parámetros (E, ν) y (λ, μ) .

- Relaciones entre constantes elásticas de un material isotrópico lineal.
- En *ingeniería estructural* se emplean los parámetros (E, ν) , aunque a veces también se usa la elección equivalente (E, G) .
- En *termodinámica de sólidos deformables* se emplea el par (K, G) , donde K es el módulo de compresibilidad (isotérmica).

| | E : módulo de Young ν : coeficiente de Poisson | K : módulo de compresibilidad G : módulo de rigidez | λ : 1.º coeficiente de Lamé μ : 2º coeficiente de Lamé |
|------------------|---|--|--|
| (E, ν) | --- | $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ | $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ |
| (K, G) | $E = \frac{9KG}{3K + G}$ $\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$ | --- | $\lambda = K - \frac{2G}{3}$ $\mu = G$ |
| (λ, μ) | $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ | $K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ $G = \mu$ | --- |

- Para un material isótropo elástico perfectamente incompresible, $\nu = 0.5$.
- La mayor parte de los materiales prácticos en la ingeniería rondan entre 0.0 y 0.5, aunque existen algunos materiales compuestos llamados *materiales auxéticos* que tienen coeficiente de Poisson negativo.
- Termodinámicamente puede probarse que todo material tiene coeficientes de Poisson en el intervalo $(-1, 0.5)$, dado que la energía elástica de deformación (por unidad de volumen) para cualquier material isótropo alrededor del punto de equilibrio (estado natural) puede escribirse aproximadamente como:

$$\mathcal{E}_{\text{def}} = \mathcal{E}_{\text{def}0} + K \left(\sum_i \varepsilon_{ii} \right)^2 + G \sum_{i,j} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{\delta_{ij} \varepsilon_V}{3} \right)^2 + o(\varepsilon_{ij}^3).$$

- La existencia de un mínimo relativo de la energía para ese estado de equilibrio requiere:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0.$$

- Esta última condición sólo se puede cumplir si el coeficiente de Poisson cumple $-1 < \nu < 0.5$.

3.5 Deformaciones térmicas

- En la región elástica, el efecto de la temperatura sobre la deformación aparece de dos maneras: 1) al causar una modificación en los valores de las constantes elásticas, y 2) al producir directamente una deformación incluso en ausencia de tensión.
- El efecto sobre las constantes elásticas para muchos materiales es pequeño para un cambio de temperatura de cien grados centígrados y no se considerará más.
- La deformación debida al cambio de temperatura en ausencia de tensión se denomina deformación térmica y se denota con el superíndice t en el símbolo de deformación de este modo: ε^t .
- Para un material isotrópico, los argumentos de simetría muestran que la deformación térmica debe ser una expansión o contracción pura sin componentes de deformación por cizallamiento referidos a ningún conjunto de ejes.

- Las deformaciones térmicas no lineales con el cambio de temperatura, pero para cambios de temperatura de 100-200 grados Centígrados podemos describir de cerca la variación real mediante una aproximación lineal.
- Se obtienen entonces las siguientes deformaciones térmicas debido al cambio de temperatura de T_0 a T .

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha(T - T_0),$$

donde α es el coeficiente de expansión lineal.

- La deformación total en un punto en un cuerpo elástico es la suma debido al estrés y a la temperatura, viene dada por

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t, \quad \gamma_{xy}^t = \gamma_{yz}^t = \gamma_{zx}^t = 0.$$

donde ε^e denota la deformación elástica debido a la tensión y ε^t es la deformación térmica.

- Constantes elásticas para materiales isotrópicos a temperatura ambiente.

| <i>Material</i> | <i>Composition</i> | <i>Modulus of elasticity E, GN/m²</i> | <i>Poisson's ratio, ν</i> | <i>Shear modulus G, GN/m²</i> | <i>Coeff. of linear expansion α, 10⁻⁶/°C</i> | <i>Mass Density 10³ kg/m³</i> |
|----------------------------------|------------------------|--|--|--|---|---|
| Aluminum ¹ | Pure and alloy | 68–78.6 | 0.32–0.34 | 25.5–26.5 | 20.0–24.1 | 2.66–2.88 |
| Brass ^{1, 2} | 60–70 % Cu, 40–30 % Zn | 100–110 | 0.33–0.36 | 36.5–41.4 | 19.8–20.9 | 8.36–8.50 |
| Copper ^{1, 2, 3} | | 117–118 | 0.33–0.36 | 63.4–64.8 | 16.6–16.9 | 8.94–8.97 |
| Iron, cast ^{2, 3} | 2.7–3.6 % C | 89–145 | 0.21–0.30 | 35.8–56.5 | 10.4 | 6.95–7.34 |
| Steel ^{1, 2} | Carbon and low alloy | 193–220 | 0.26–0.29 | 75.8–82.0 | 9.9–12.8 | 7.72–7.86 |
| Stainless steel ^{3, 7} | 18 % Cr, 8 % Ni | 193–207 | 0.30 | 73.1 | 14.9–16.9 | 7.64–7.92 |
| Titanium ^{1, 2} | Pure and alloy | 106–114 | 0.34 | 41.4 | 8.82 | 4.51 |
| Glass ⁴ | Various | 50–79 | 0.21–0.27 | 26.2–32.4 | 5.94–9.54 | 2.38–3.88 |
| Methyl methacrylate ⁵ | | 2.4–3.5 | 0.35 | 1.03 | 90 | 1.16 |
| Polyethylene ⁵ | | 0.14–0.38 | 0.45 | 0.117 | 180 | 0.91 |
| Rubber ⁶ | | 0.00076–0.0041 | 0.50 | 0.0003–0.001 | 126–198 | 1.0–1.24 |

3.6 Ecuaciones completas de elasticidad

- *La teoría de la elasticidad* es el nombre dado al área del conocimiento que se ocupa de la distribución de la tensión y de la deformación en los cuerpos elásticos sujetos a cargas, desplazamientos y distribuciones de temperatura.
- El problema es encontrar distribuciones de tensión y deformación que satisfagan las cargas y desplazamientos prescritos en el límite y que en cada punto satisfagan las ecuaciones de equilibrio, las relaciones tensión-deformación-temperatura, y las condiciones geométricas asociadas con la definición de deformación y el concepto de desplazamientos continuos.
- Resumimos a continuación, los tres pasos en los que debe basarse la solución, es decir las ecuaciones explícitas que deben cumplirse en cada punto de un cuerpo no acelerado, isotrópico, lineal-elástico sujeto a pequeñas tensiones: equilibrio, compatibilidad geométrica y relaciones tensión-deformación-temperatura.

● EQUILIBRIO

En la superficie, los componentes de tensión deben estar en equilibrio con las cargas externas dadas, y dentro del cuerpo deben satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

donde X , Y y Z son fuerzas volumétricas que se distribuyen sobre el sólido con intensidades X , Y y Z por unidad de volumen.

● COMPATIBILIDAD GEOMÉTRICA

Los desplazamientos deben coincidir con las condiciones de contorno geométricas y deben ser funciones continuas de la posición con las que están asociados los componentes de deformación, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\end{aligned}\tag{2}$$

donde u , v y w son las componentes de desplazamiento en las direcciones x , y y z .

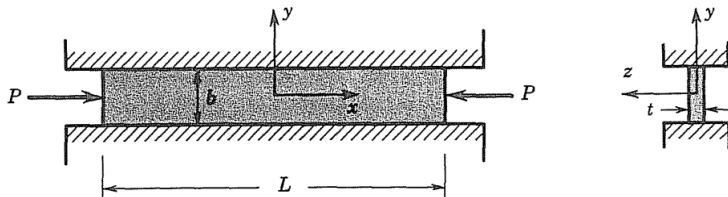
● RELACIONES DE TENSIÓN-DEFORMACIÓN-TEMPERATURA

Además de las relaciones entre los componentes de tensión y deformación, debemos incluir el efecto de la temperatura en los componentes de deformación. Ambos efectos están incluidos en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha(T - T_0), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}.\end{aligned}\tag{3}$$

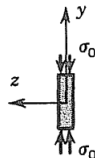
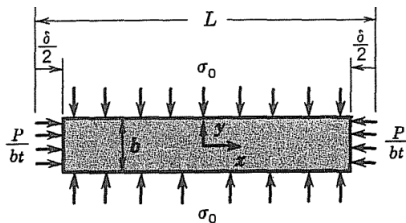
- Las ecuaciones anteriores proporcionan 15 ecuaciones para los seis componentes de tensión, los seis componentes de deformación y las tres componentes de desplazamiento.
- Estas 15 ecuaciones son la base de lo que comúnmente se llama *teoría de la elasticidad lineal*.
- Las ecuaciones son lineales debido al comportamiento del material lineal asumido en (3) y también debido a la restricción a pequeñas deformaciones en (2).
- Adicionalmente, de (2) se tiene que las deformaciones (y por lo tanto las tensiones) están asociadas con la configuración no deformada. Esto significa que (1) representa una aplicación de los requisitos de equilibrio en la configuración no deformada.
- Las ecuaciones completas (1), (2) y (3) se aplican a deformaciones de sólidos isotrópicos linealmente elásticos que involucran pequeñas deformaciones y para las cuales es aceptable aplicar los requerimientos de equilibrio en la configuración no deformada.

- **Ejercicio:** Una placa larga y delgada de ancho b , espesor t y longitud L se coloca entre dos paredes rígidas, separadas una distancia b , se aplica una fuerza axial P , como se muestra en la figura. Deseamos encontrar la desviación de la placa paralela a la fuerza P .



- **Ejercicio (cont.):** Idealizamos la situación en la figura. Al construir el modelo se ha asumido:

- La fuerza axial P resulta en un esfuerzo axial normal distribuida uniformemente sobre el área de la placa, incluidos los extremos.
- No hay estrés normal en la dirección delgada (esto implica un caso de tensión plana en el plano xy).
- No hay deformación en la dirección y , es decir, $\varepsilon_y = 0$ (esto implica un caso de deformación plana en el plano xz).
- No hay fuerza de fricción en las paredes (o, como alternativa, es lo suficientemente pequeña como para ser insignificante).
- La tensión normal de contacto entre la placa y la pared es uniforme a lo largo y ancho de la placa. Ahora satisfacemos los requisitos (1),(2), y (3) para el modelo idealizado de la figura.

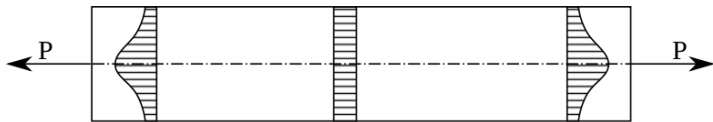


- **Ejercicio (cont.):** Algunos comentarios...
- Como se ha mostrado es posible obtener una solución rigurosa y exacta del modelo idealizado, si bien no se ha obtenido una solución exacta al problema real de la figura, donde hay una fuerza concentrada en lugar de una tensión distribuida uniformemente que actúa en los extremos de la placa.
- El problema real es en sí mismo una aproximación a una carga más realista sobre una pequeña región de contacto. En base a experimentos, de situaciones similares, se espera que la desviación de la placa real sea cercana a la estimada por el modelo idealizado.
- Lejos de los extremos la distribución de tensiones para la placa real es bastante similar a la del modelo, a pesar de que la distribución de tensiones es bastante diferente cerca de los extremos.
- Este problema es una ilustración de una clase de situaciones en las que es muy difícil obtener una solución exacta al problema real, pero en el que es relativamente fácil obtener una solución exacta o casi exacta a una aproximación idealizada del problema real. Esto se conoce como el *principio de St. Venant*.

3.8 Principio de Saint Venant

- Principio que establece los efectos de un sistema de fuerzas sobre un sólido deformable son independientes de la distribución particular de fuerzas que conducen a esa resultante a partir de una distancia suficiente de los puntos de aplicación de dichas fuerzas.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

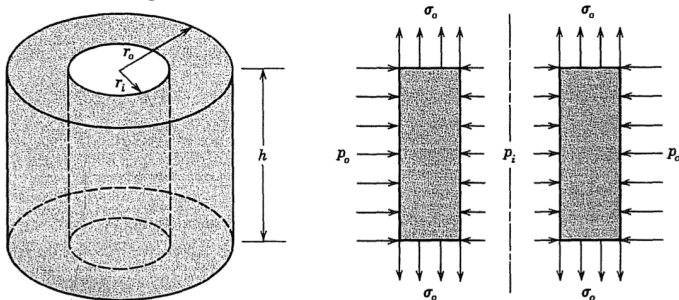


Esquema de las tensiones longitudinales en un prisma solicitado por fuerzas puntuales. Cerca de los extremos la distribución no es uniforme, pero hacia el centro de la sección los esfuerzos tienden a ser exactamente iguales a los que se habrían obtenido bajo cargas uniformemente distribuidas, y estáticamente equivalentes a las cargas puntuales.

- En el contexto de la teoría de la elasticidad puede enunciarse como:
“... la diferencia entre los efectos de dos sistemas de cargas estáticamente equivalentes se hace arbitrariamente pequeña a distancias suficientemente grandes de los puntos de aplicación de dichas cargas.”
- El principio establece que la equivalencia estática implica asintóticamente la equivalencia elástica.
- La formulación original fue publicada en francés por A. J. C. B. Saint-Venant en 1855. Esta formulación informal es bien conocida y usada por los ingenieros mecánicos, no obstante trabajos matemáticos más recientes lo han reformulado ligeramente con el objeto de poder construir una demostración matemáticamente precisa en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales de la teoría de la elasticidad.
- En otras palabras, la afirmación original no es suficientemente precisa tal como mostró von Mises en 1945.

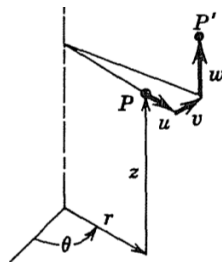
Ejercicio: Cilindro de pared gruesa.

- En este problema se desea obtener la solución exacta, dentro de la teoría de la elasticidad para sólidos isotrópicos homogéneos, de un cilindro de pared gruesa, ver figura.
- Considere la altura del cilindro h , el radio interno r_i y el radio externo r_o . El cual está sujeto a las cargas externas: presión interna uniforme p_i , presión externa uniforme p_o y una tensión de tracción axial uniforme σ_o .
- Determinaremos la distribución de la tensión dentro del cilindro cuando está sujeto a las cargas externas indicadas.



Ejercicio (cont.): Cilindro de pared gruesa.

- Esta situación permite el estudio de varios problemas prácticos. Por ejemplo, el cilindro puede ser un recipiente a presión de paredes gruesas donde la carga importante es la presión interna o un casco sumergible donde la carga importante es la presión externa.
- Alternativamente, si la altura fuera pequeña en comparación con los radios, el cilindro podría ser una placa o un disco, y la carga importante podría ser la presión interna que surge del “ajuste por contracción” cuando se fija a un eje.
- Para aprovechar la simetría cilíndrica, utilizamos las coordenadas cilíndricas r , θ y z que se muestran en la figura.
- En la figura también se indican los componentes u , v y w en las direcciones r , θ y z del vector de desplazamiento en coordenadas cilíndricas.



Ejercicio (cont.): Cilindro de pared gruesa.

- Las condiciones de contorno son para

- la superficie interna, $r = r_i$:

$$\sigma_r = -p_i, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0;$$

- la superficie externa, $r = r_0$:

$$\sigma_r = -p_0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0;$$

- y en las superficies superior e inferior, donde $z = h$ y $z = 0$:

$$\sigma_z = \sigma_0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = 0.$$

- El problema es determinar las tensiones que, junto con las deformaciones y los desplazamientos, satisfacen las 15 ecuaciones interiores y las tres condiciones de borde en cada punto de las superficies externas.

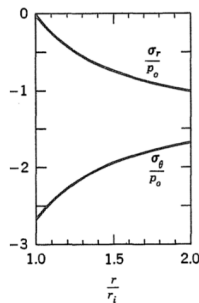
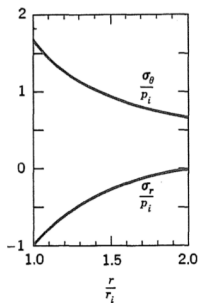
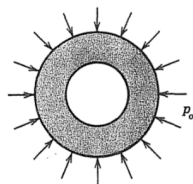
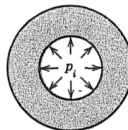
Ejercicio (cont.): Cilindro de pared gruesa.

- La solución para las tensiones transversales es:

$$\sigma_r = \frac{p_i \left(\left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^2 \right) - p_0 \left(\left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right)}{\left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2 - 1},$$

y

$$\sigma_\theta = \frac{p_i \left(1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) - p_0 \left(\left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right)}{\left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2 - 1}.$$



- La solución encontrada (exacta) nos permite verificar el principio cualitativo de St. Venant.

- Sean dos conjuntos de fuerzas aplicados a un cuerpo elástico en su frontera. Deje que estas cargas sean idénticas en toda la superficie, excepto en cierta región pequeña R donde difieren. Las distribuciones de tensión interna resultantes serán, en general, diferentes en todo el interior.
- El principio de St. Venant afirma que las diferencias significativas en la tensión interna se localizarán en la vecindad inmediata de R si las dos cargas sobre la región R son estáticamente equivalentes.
- No se puede hacer una afirmación general sobre cuán grande será la diferencia en el entorno. Esto depende del tamaño, la forma y la ubicación de la pequeña región R , así como de la naturaleza de las diferentes cargas sobre R .
- Sea ϵ una medida representativa de la región R , entonces es una regla general que, para fines de ingeniería, las diferencias en la tensión interna se convierten en una fracción insignificante de las diferencias en la tensión superficial a distancias de la superficie $\gtrsim 2\epsilon - 3\epsilon$.

- **Ejercicio:** Cilindro de pared gruesa. Sea $r_i \ll r_0$, $p_i = p$ y $p_0 = 0$. La dimensión representativa ϵ de la región R puede ser tomada como r_i , siendo la región donde se aplican las cargas, R , la superficie interna del cilindro de radio r_i .
Se pide:
 - (a) Determinar la expresión aproximada para las tensiones transversales internas σ_r y σ_θ .
 - (b) Determine la distancia, como fracción de ϵ , a la cual las diferencias en las tensiones internas decaen a menos del 10 % de la existente en los puntos interiores.

- El ejemplo del cilindro de pared gruesa además nos permite ilustrar el concepto de *concentración de estrés*.
- Cuando se tensiona un cuerpo elástico con una irregularidad geométrica local, como un agujero para el aceite, un chavetero/chaveta, o una muesca, generalmente hay una variación localizada en el estado de tensión en la vecindad inmediata de la irregularidad.
- Los niveles máximos de estrés en la irregularidad pueden ser varias veces mayores que los niveles nominales de estrés en la mayor parte del cuerpo. En estas circunstancias, se dice que **la irregularidad causa una concentración de estrés**.
- **Ejercicio:** Cilindro de pared gruesa. Sea $r_i \ll r_0$, $p_i = 0$ y $p_0 = p$. El pequeño agujero de radio r_i puede considerarse como una irregularidad geométrica en un cilindro sólido. Muestre que fuera del agujero pequeño, el estado de tensión es casi una compresión biaxial, con $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$, mientras que en la superficie del agujero el estado de estrés es tensión simple, con $\sigma_r = 0$ y σ_θ casi igual a $2p$. El nivel de tensión pico es, por lo tanto, casi el doble que en la mayor parte del cilindro. El cambio en el estado de tensión se concentra en la vecindad cercana del agujero: aproximadamente el 90 % del cambio tiene lugar en un radio de $r = 3r_i$.

3.9 Energía de deformación en cuerpos elásticos

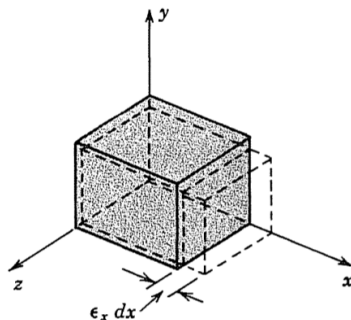
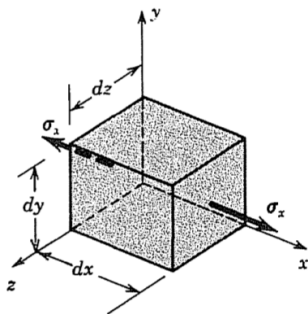
- Nos interesa analizar la energía de deformación de un cuerpo arbitrariamente elástico lineal sometido a pequeñas deformaciones.
- La energía elástica U almacenada en un resorte lineal se da en tres formas: en términos de la desviación δ , en términos de la fuerza F , o en términos de la desviación δ y la fuerza F .
- Como será evidente en el desarrollo posterior la última forma

$$U = \frac{1}{2} F \delta,$$

es más conveniente para nuestros propósitos.

- Debido a la linealidad, la fuerza y la desviación crecen de forma directamente proporcional durante el proceso de carga y, por lo tanto, el trabajo total realizado es solo la mitad del producto de la fuerza final y la desviación final.

- Apliquemos el concepto anterior a un elemento infinitesimal dentro de un cuerpo linealmente elástico.
- La figura muestra un eje de componente de tensión uniaxial que actúa sobre un elemento rectangular (izquierda), así como la deformación correspondiente (derecha), incluido el alargamiento debido al componente de deformación ϵ_x .



- La energía elástica almacenada en dicho elemento se denomina comúnmente *energía de deformación*. En este caso, la fuerza $\sigma_x dydz$ que actúa sobre la cara x -positiva realiza trabajo cuando el elemento se alarga $\varepsilon_x dx$.
- La energía de deformación dU almacenada en el elemento, cuando los valores finales de tensión y deformación son σ_x y ε_x , es

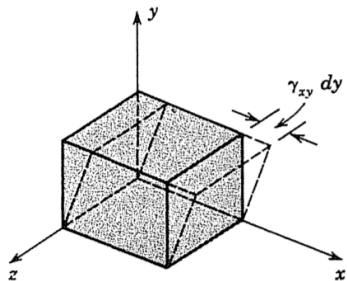
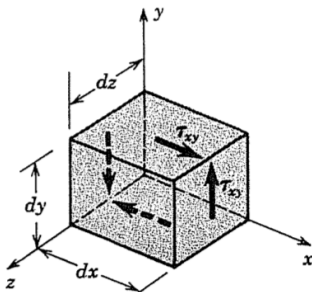
$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x dydz)(\varepsilon_x dx) = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dV,$$

donde $dV = dx dy dz$ es el volumen del elemento infinitesimal.

- Dado un cuerpo elástico de volumen total V , la energía de deformación total U se obtiene por integración

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV.$$

- Considere a continuación el componente de esfuerzo cortante τ_{xy} que actúa sobre el elemento infinitesimal en la figura (izquierda).
- La deformación correspondiente debida al componente de esfuerzo cortante γ_{xy} se indica en la figura (derecha).
- En este caso, la fuerza $\tau_{xy} dx dz$ actúa sobre la cara positiva y realiza trabajo a medida que esa cara se desplaza la distancia $\gamma_{xy} dy$.
- Debido a la linealidad del material, γ_{xy} y τ_{xy} crecen de forma directamente proporcional a medida que el elemento se deforma.



- La energía de deformación almacenada en el elemento, cuando los valores finales de deformación y tensión son γ_{xy} y τ_{xy} , es

$$dU = \frac{1}{2}(\tau_{xy}dydz)(\gamma_{xy}dx) = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}dV.$$

- Se pueden escribir resultados análogos para cualquier otro par de tensiones y deformaciones (por ejemplo, σ_y y ε_y o τ_{yz} y γ_{yz}) cuando el componente de tensión involucrado es la única tensión que actúa sobre el elemento.
- La energía de deformación total almacenada en el elemento infinitesimal para un estado general 3D de tensión es

$$dU = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

- La energía de tensión almacenada en todo el cuerpo es

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Russel C. Hibbeler (2011).

Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

Fin

