

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 5B

## Torsión

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, octubre de 2020



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



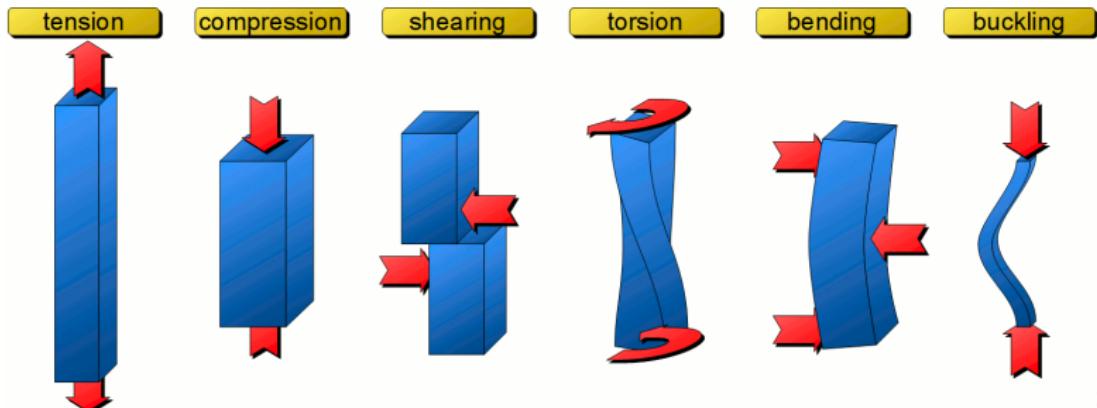
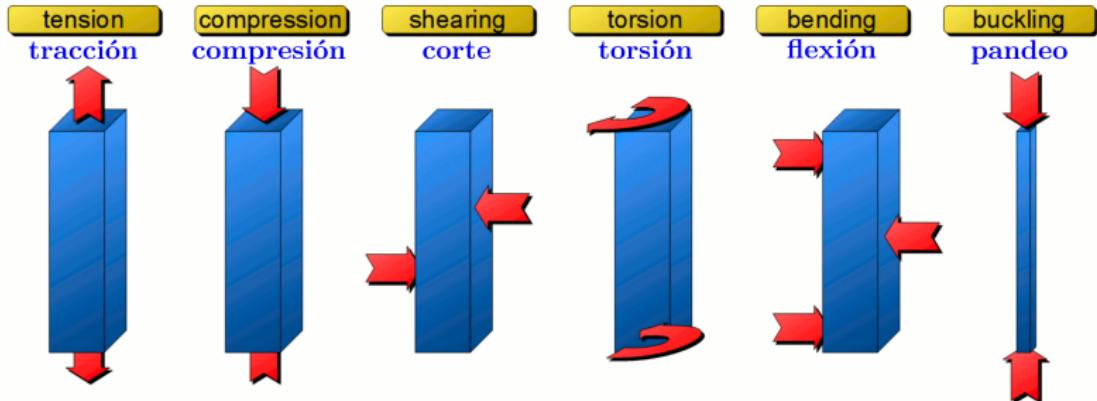
# Contenido

- ③ 3. Torsión de ejes prismáticos sin simetría de revolución
  - 3.1 Teoría de Saint Venant
  - Bibliografía



El eje del taladro está conectado a la broca de perforación mediante un eje con sección transversal cuadrada.

# Tipos de carga



# Belastungsarten

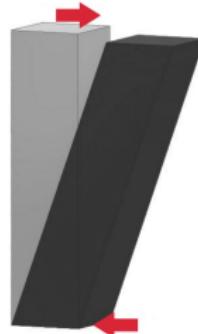
Zug



Druck



Scherung



Biegung



Torsion

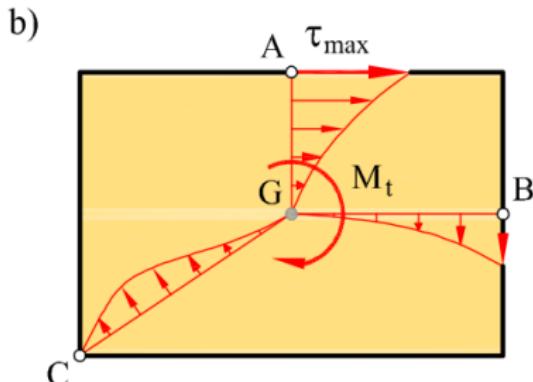
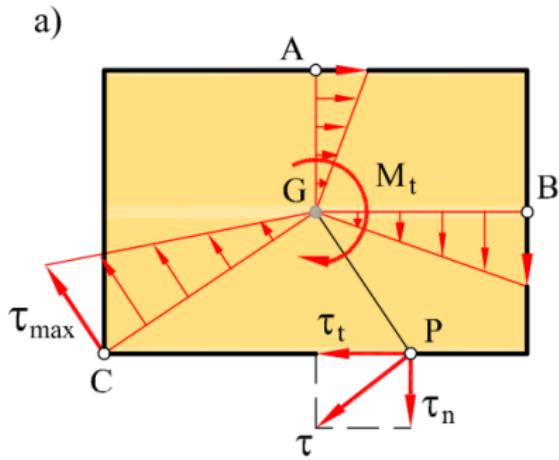


### 3. Torsión de ejes sin simetría de revolución

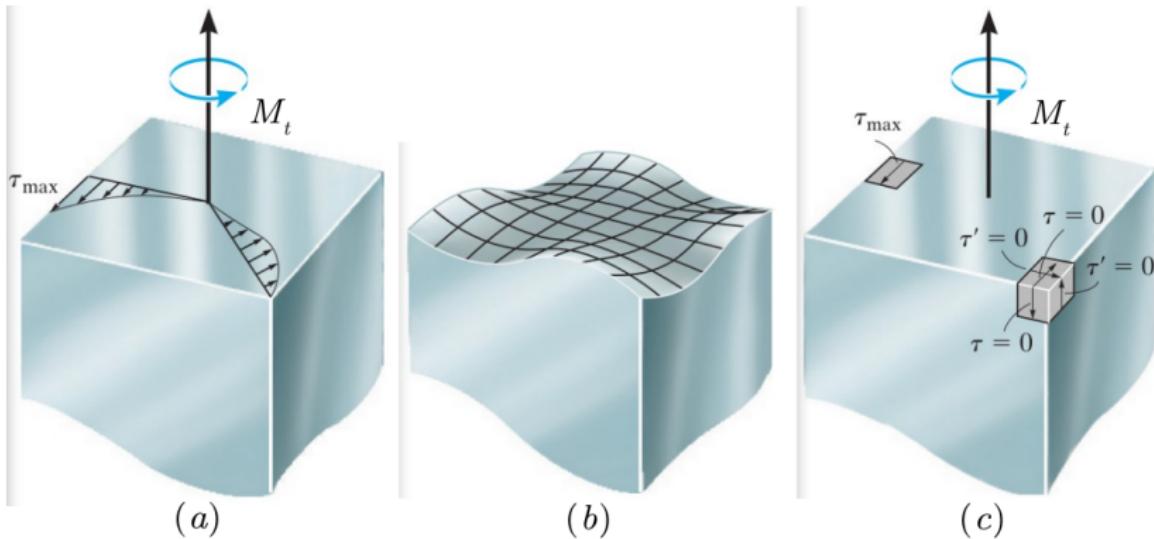
- Como se desarrolló en la Sección anterior el problema de torsión de una pieza de sección circular se resuelve admitiendo como hipótesis de deformación que las secciones rectas de la pieza permanecen planas y giran sin deformarse.
- La misma hipótesis, formulada por **Charles de Coulomb** en **1784**, fue aplicada en **1826** por **Claude Navier** al caso de una pieza prismática de sección rectangular, llegando a la conclusión errónea (como señaló en **1829** **Augustin Cauchy**):
  - “para un determinado momento torsor  $M_t$ , el ángulo de torsión es inversamente proporcional al momento polar de inercia respecto al baricentro de la sección y los valores máximos de la tensión tangencial se producen en los puntos más alejados de dicho punto.”
- Admitir esta hipótesis es equivalente a decir que las secciones rectas no experimentan alabeo alguno!

- Esta hipótesis es análoga a la de Bernouillí en la flexión, pero mientras que en la flexión conduce a fórmulas de una aproximación más que aceptable, en la teoría de la torsión introduce errores que la hacen inadmisible.
- Evidencias experimentales indican claramente que la teoría de Coulomb no es adecuada para representar el fenómeno de torsión en piezas de sección no circular.
- Ensayos de torsión en piezas de sección rectangular muestran que
  - a) la distorsión angular es máxima en los puntos medios de los lados más largos del rectángulo, que no son los puntos más alejados del baricentro de la sección, mientras que en las esquinas, que sí lo son, la distorsión es nula;
  - b) las secciones rectas de las piezas no permanecen planas al ser sometidas a torsión, sino que se alabeán fuera del plano.

- En la Figura se muestra la distribución de tensiones tangenciales de torsión en una sección rectangular de acuerdo a:
  - la teoría de Coulomb,
  - la teoría de Saint-Venant.



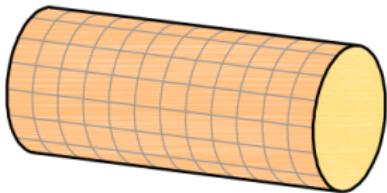
- (a) Esfuerzo cortante a lo largo de dos líneas radiales del eje.
- (b) Las distribuciones de esfuerzo cortante varían de una manera compleja, que harán que la sección transversal se alabe. En particular los puntos ubicados en las esquinas del eje deben estar sometidos a un esfuerzo cortante nulo, presentando una deformación cortante igual a cero.
- (c) Para un elemento de material ubicado en una esquina, los esfuerzos cortantes complementarios  $\tau$  y  $\tau'$ , que actúan sobre la superficie externa del eje, son iguales a cero.



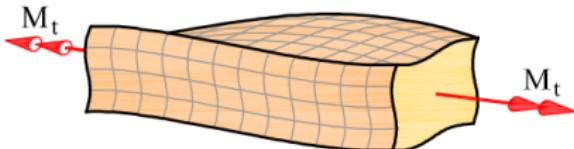
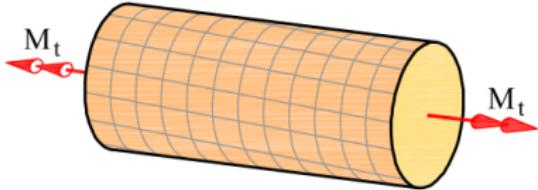
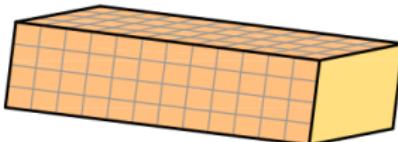
- Un elemento de esquina no puede tener tensiones que actúen sobre él y, por tanto, no está distorsionado en el eje deformado.
- Las secciones transversales originalmente planas se deforman o curvan fuera de sus propios planos.
- En general, la torsión de ejes que no poseen simetría circular produce deformaciones que implican rotaciones de cuerpo rígido de una sección transversal con respecto a otra acompañadas de alabeo de los planos originales de las secciones transversales.

- En la Figura se muestra la deformación en torsión pura de dos piezas prismáticas:
  - de sección circular, se deforma según la hipótesis de Coulomb, esto es, sin alabeo, y las secciones rectas permanecen planas;
  - de sección rectangular, se deforma según la hipótesis de Saint-Venant, y las secciones rectas giran en su plano y además dejan de ser planas, es decir, se alabean.

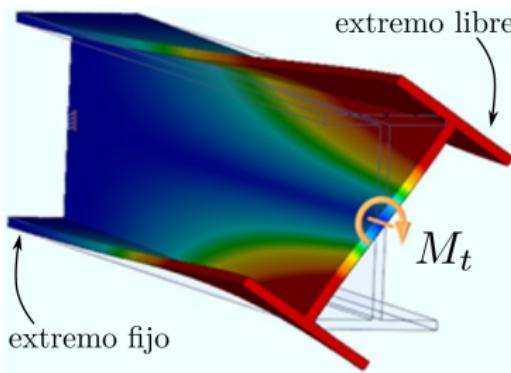
a)



b)



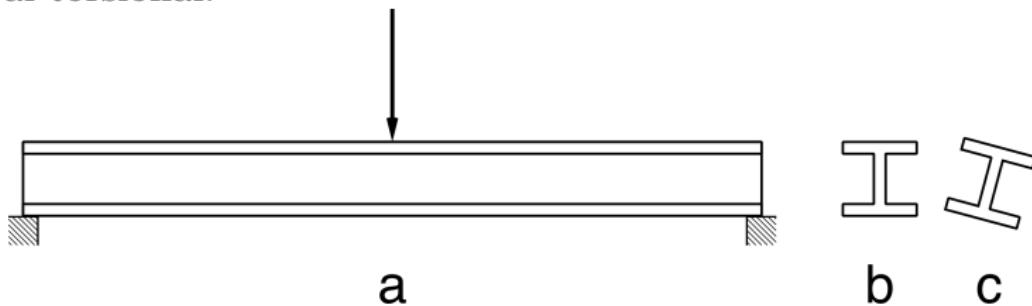
- Como se verá en esta Sección la resistencia a la torsión de una viga depende de su forma y de la selección del material.
- Consideremos un viga con perfil **I** empotrada en un extremo, mientras que en el extremo libre se aplica un momento torsor  $M_t$  como se indica en la figura.



- El mapa de colores indica la magnitud del desplazamiento. Se puede observar la línea central que no presenta ninguna deformación.

# Pandeo torsional o pandeo lateral

- En vigas de alas anchas o de escasa rigidez torsional, el pandeo flexional convencional puede ir acompañado de la aparición de una torsión de la sección, resultando un modo de fallo mixto conocido como pandeo torsional o pandeo lateral.
- Pandeo lateral-torsional de una viga en I con fuerza vertical en el centro: a) vista longitudinal, b) sección transversal cerca del soporte, c) sección transversal en el centro con pandeo lateral-torsional.



- Ver vídeo Universidad Técnica de Aquisgrán, Renania del Norte-Westfalia, Alemania.



- Cuando una carga aplicada causa tanto el desplazamiento lateral como la torsión de un miembro, se producirá un pandeo (fallo) lateral por torsión.
- La figura muestra una “jácena” (*beam girder*) luego de producirse un pandeo lateral por torsión. [ver enlace]



- El uso de secciones cerradas como la sección cuadrada hueca mitiga los efectos de pandeo lateral por torsión dada su alta rigidez a la torsión.

## 3.1 Teoría de Saint Venant

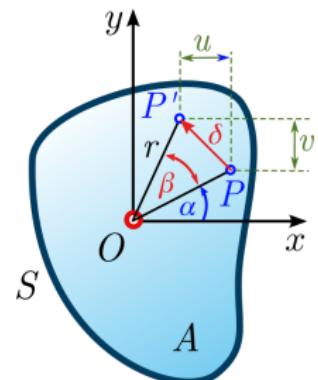
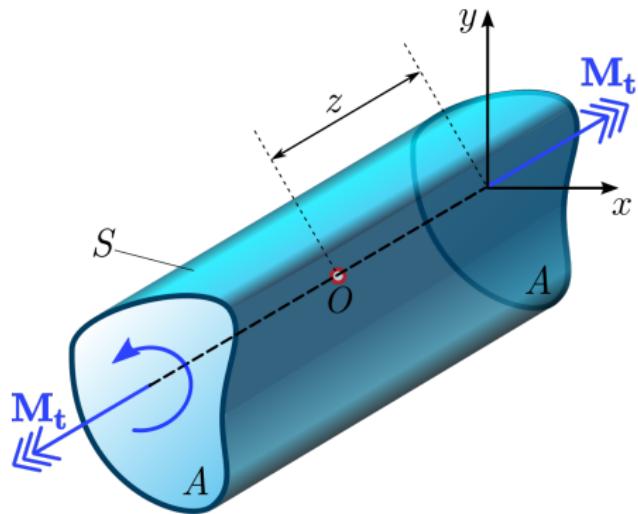
- El problema de la torsión uniforme de piezas prismáticas de forma arbitraria fue analizado por [Jean Claude Saint-Venant en 1853](#).
- La hipótesis de Saint-Venant considera que la deformación es uniforme, esto es, idéntica para todas las secciones de la pieza y que consiste en:
  - a) una rotación rígida de las secciones en su plano, y
  - b) un alabeo de las secciones fuera de su plano.
- El centro de giro de las secciones en su plano es, precisamente, el centro de esfuerzos cortantes. Por esta razón, al centro de esfuerzos cortantes se le llama también centro de torsión de la sección.
- En torsión uniforme, al lugar geométrico de los centros de torsión se le llama eje de torsión, eje paralelo a la directriz de la pieza.
- En la teoría de Saint-Venant tanto el giro de torsión por unidad de longitud,  $\theta$ , como el alabeo son uniformes a lo largo de la pieza.

- Suponer que el alabeo es uniforme para todas las secciones simplifica el planteamiento del problema, ya que de esta forma no aparecen tensiones normales debidas al fenómeno de alabeo.
- Sin embargo, es frecuente que una pieza sometida a torsión tenga alguna sección transversal obligada a permanecer fija, como es el caso de las secciones de empotramiento que no pueden alabearse durante la torsión.
- Esta restricción del alabeo de una sección transversal, da lugar a la aparición de torsión no uniforme a lo largo de la pieza.
- La influencia, que el alabeo no uniforme tiene, en el comportamiento de una pieza solicitada a torsión puede ser importante cuando las secciones rectas son abiertas y de pequeño espesor, pero es despreciable en los restantes tipos de secciones.
- El estudio completo del problema de torsión uniforme (o de Saint-Venant) se hace mediante la teoría de la Elasticidad.
- La solución del problema elástico de torsión uniforme en secciones de forma arbitraria es un problema matemático complejo, que a menudo se resuelve mediante métodos numéricos aproximados, tales como diferencias finitas, elementos finitos o por elementos de contorno.

- Recapitulando, se atribuye a Saint-Venant un método para el cálculo de las tensiones que existen en una pieza prismática, así como las deformaciones que se producen en ella al torsionarla.
- El método consiste en suponer que las componentes de la matriz de tensiones son nulas, excepto  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{zx}$ , en un sistema de referencia cuyo eje  $z$  tiene la dirección del eje longitudinal de la pieza.
- Este método se denomina *semi-inverso*, porque consiste en suponer que ciertas tensiones son nulas, verificando *a posteriori* que se cumple esta hipótesis a la vez que se determinan las tensiones no nulas.
- Recordamos que las tensiones que se obtienen aplicando las ecuaciones de la Elasticidad representan la solución del problema elástico si satisfacen todas las condiciones necesarias, dado que como hemos visto anteriormente para un problema de elasticidad la solución es única.

- Saint-Venant estableció, con el fin de aplicar el *método semi-inverso*, para el estudio de la torsión de una barra prismática de sección arbitraria, las siguientes *hipótesis*:
  - a) La deformación de cualquier sección recta es un giro alrededor de un punto  $O$ , acompañado de una alabeo que es igual para todas las secciones.
  - b) El ángulo  $\theta$  girado por unidad de longitud es constante, también se suele denominar como velocidad de giro.
- En virtud de la primera hipótesis, mismo alabeo para todas las secciones, la componente  $w$  del vector desplazamiento de un punto  $P$  de la barra prismática (Fig. sgte.) será independiente de  $z$ .

- El ángulo de rotación de cada sección  $\beta$  es una función lineal de  $z$ , es decir,  $\beta(z) = \theta z$ .



- Por tanto, si llamamos  $\omega(x, y)$  a la *función de alabeo*, podemos expresar el desplazamiento a lo largo del eje de la barra como:

$$w = \theta \omega(x, y).$$

- Mientras que las otras dos componentes del vector desplazamiento,  $(v, w)$ , teniendo en cuenta la constancia de  $\theta$ , si  $\overline{OP} = r$ , serán:

$$u = r \cos(\alpha + \beta) - r \cos \alpha,$$

$$v = r \sin(\alpha + \beta) - r \sin \alpha,$$

dado que la línea  $\overline{OP}$  rota un pequeño ángulo  $\beta$

$$u = -r\beta \sin \alpha = -\theta yz,$$

$$v = r\beta \cos \alpha = \theta xz.$$

- Finalmente, los desplazamientos para el problema de torsión se pueden escribir como

$$u = -\theta yz,$$

$$v = \theta xz, \quad (3.1)$$

$$w = \theta \omega.$$

- Notar que el punto  $O$  no tiene por qué coincidir con el centro de gravedad  $G$  de la sección, a no ser que  $G$  sea el centro de simetría.

- Conocidas las componentes del vector de desplazamiento, Ec. (3.1), de acuerdo a las *suposiciones cinemáticas* realizadas, es posible obtener las componentes de la matriz de deformación

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} = 0 \\ \varepsilon_y &= v_{,y} = 0 \\ \varepsilon_z &= w_{,z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = 0 \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = \theta (\omega_{,x} - y) \\ \gamma_{yz} &= v_{,y} + w_{,z} = \theta (\omega_{,y} + x)\end{aligned}\tag{3.2}$$

- Calculando las tensiones a partir de las deformaciones, Ec. (3.2), e introduciéndolas en la ecuación de equilibrio elástico se llega a:

$$\boldsymbol{\sigma}_{tor} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} = G\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{,x} - y \\ 0 & 0 & \omega_{,y} + x \\ \omega_{,x} - y & \omega_{,y} + x & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

- Las expresiones obtenidas verifican las condiciones que requiere la solución del problema elástico. Donde, las ecuaciones de equilibrio interno se reducen a

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

- Bajo los supuestos de la teoría de torsión de Saint-Venant es posible derivar una relación de compatibilidad especial. Para este fin, derivamos  $\tau_{xz}$  con respecto a  $y$  y  $\tau_{yz}$  con respecto a  $x$ ,

$$\tau_{xz,y} = G\theta(\omega_{,xy} - 1), \quad \tau_{yz,x} = G\theta(\omega_{,yx} + 1).$$

- La diferencia de estas expresiones da un resultado sorprendente

$$\boxed{\tau_{xz,y} - \tau_{yz,x} = -2G\theta}. \quad (3.5)$$

- Aquí llegamos al paso vital en el análisis de Saint-Venant. Suponemos que hay una función  $\Phi(x, y)$ , de modo que las tensiones se pueden encontrar por diferenciación, por lo tanto:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (3.6)$$

- La definición de la nueva función  $\Phi$  se ha elegido inteligentemente dado que satisface las ecuaciones de equilibrio (3.4) para cualquier función arbitraria  $\Phi$ , siempre que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x},$$

lo cual siempre es cierto si  $\Phi$  es una función continua.

- La función  $\Phi$  se llama la “función de estrés” del problema; y en este caso es la “función de estrés de torsión de Saint-Venant” y fue introducida por **L. Prandtl** en 1903.

- Para obtener la ecuación de gobierno final para la función de estrés, necesitamos combinar las expresiones para  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  con la ecuación de compatibilidad (3.5)

$$\tau_{xz,y} - \tau_{yz,x} = (\Phi_{,y}),_y - (-\Phi_{,x}),_x = -2G\theta.$$

Obteniendo

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi = -2G\theta}, \quad (3.7)$$

es decir, la función de tensiones es tal que su laplaciano es constante en todos los puntos de la barra e igual a  $-2G\theta$ .

- Si desarrollamos la primera de las ecuaciones (3.4), vemos que

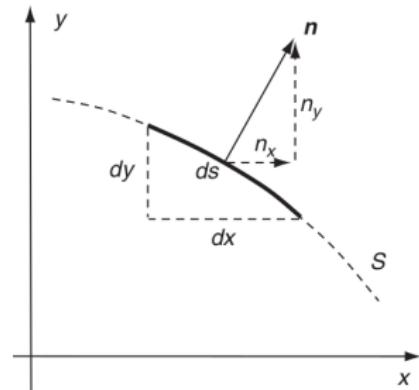
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0,$$

que es la ecuación en derivadas parciales que permite encontrar la función de alabeo. Más adelante volveremos sobre este problema no trivial.

- El tipo de ecuación (3.7), laplaciano igual a constante, se conoce como la ecuación de Poisson.
- Para resolver el problema se requiere la provisión de condiciones de contorno adecuadas. En el problema de torsión bajo estudio el contorno no está sometido a cargas.

- Como sabemos, las formulaciones de tensión son útiles cuando podemos proporcionar condiciones de contorno de tracción, siendo en este caso

$$\boldsymbol{\sigma}_{tor} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{0}.$$



- Se tiene que el vector normal a la sección de la pieza es  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$ , empleando la función de estrés, obtenemos

$$\boldsymbol{\sigma}_{tor} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = \Phi_{,y}n_x - \Phi_{,x}n_y = 0.$$

- Además, se tiene que el vector tangente a la sección en el borde es  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, 0) = (-n_y, n_x, 0)$ , si lo sustituimos en la expresión anterior obtenemos la condición de borde a ser impuesta sobre  $\Phi$

$$\Phi_{,y}s_y - \Phi_{,x}(-s_x) = \nabla\Phi \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}} = 0.$$

es decir, el gradiente de la función de tensión es ortogonal al vector tangente  $\mathbf{s}$ , o paralelo a la normal  $\mathbf{n}$  en el borde de la sección transversal, lo cual implica que  $\Phi$  es constante en el borde de la sección transversal.

- El valor de  $\Phi$  no tiene sentido alguno; solo sus diferencias son importantes. El valor de  $\Phi$  en el borde es irrelevante, ya que agregar una constante a  $\Phi$  no afectará las tensiones.
- Por conveniencia, asumiremos que este valor es cero. (En el caso de secciones con múltiples conexiones esto debe ser relajado).
- La función de estrés  $\Phi$  tiene la naturaleza de una función potencial, como la altura gravitacional, el voltaje eléctrico o el potencial de velocidad de la hidrodinámica.
- En suma, el problema de torsión para secciones transversales simplemente conectadas se reduce al siguiente problema de valor de borde en la sección  $A$ :

$$\begin{cases} \Delta\Phi = -2G\theta & \forall(x, y) \in A, \\ \Phi = 0 & \forall(x, y) \in \partial A. \end{cases} \quad (3.8)$$

- Además es posible comprobar que en cualquier sección recta la resultante de las fuerzas debidas a las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  es nula, mientras que el momento resultante respecto a  $O$  de dichas fuerzas es igual al momento torsor  $M_t$ .
- En efecto, las componentes de la resultante son:

$$\int_A \tau_{xz} dA = \int_a^b \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \right\} dx = \int_a^b \Phi|_1^2 dx = 0,$$

$$\int_A \tau_{yz} dA = - \int_c^d \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \right\} dy = - \int_c^d \Phi|_1^2 dy = 0,$$

las cuales se anulan ya que  $\Phi$  es constante en el borde, por lo cual  $\Phi_1 = \Phi_2$  para cualesquiera dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  en el borde de  $A$ .

- Mientras que el torque transmitido por el eje

$$M_t = \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA = - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} x dA - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dA.$$

- Integramos por partes estas dos últimas integrales teniendo en cuenta que, si se trata de secciones que sean recintos simplemente conexos, podemos considerar que la función de tensiones  $\Phi$  se anula en los puntos del contorno.

$$\begin{aligned} - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} x dA &= - \int_c^d \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} x dx \right\} dy \\ &= - \int_c^d \left\{ [x\Phi]_1^2 - \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx \right\} dy = \int_A \Phi dA, \\ - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dA &= - \int_a^b \left\{ [y\Phi]_1^2 - \int_{y_1}^{y_2} \Phi dy \right\} dx = \int_A \Phi dA, \end{aligned}$$

donde se ha empleado el hecho de que  $\Phi = 0$  en la frontera  $\partial A$ .

- Por lo tanto el momento transmitido por el eje se expresa como

$$M_t = 2 \int_A \Phi dA. \quad (3.9)$$

- Veamos otra relación de interés entre la tensión tangencial  $\tau$  y la función de tensiones  $\Phi$ . La tensión  $\tau$  se puede expresar como

$$\tau = \tau_{xz}\mathbf{i} + \tau_{yz}\mathbf{j} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{j} = -\mathbf{k} \times \nabla\Phi.$$

- Dado que la función  $\Phi$  representa una superficie o, mejor dicho, un casquete de superficie que se apoya en el contorno de la sección, ya que  $\Phi$  se anula en el borde. Si cortamos el casquete por planos paralelos al plano de la sección se obtiene una serie de curvas que no son otra cosa que las líneas de nivel del campo escalar  $\Phi(x, y)$ .
- Como el gradiante de la función es, en cualquier punto  $P$  de la sección, perpendicular a la línea de nivel que pasa por él, y la tensión tangencial viene dada la expresión anterior,  $\tau$  resulta ser tangente a dicha curva de nivel.
- Además, se tiene que el módulo de la tensión tangencial en un punto cualquiera de la sección es igual a la derivada de la función  $\Phi$  en la dirección normal a la línea de nivel que pasa por él

$$\tau = \| -\mathbf{k} \times \nabla\Phi \| = \| \nabla\Phi \| = \left| \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|.$$

- La expresión del momento torsor puede ser reformulada empleando (3.3) como

$$M_t = \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA = G\theta \int_A \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA,$$

donde a la integral

$$J = \int_A \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA,$$

se la denomina *inercia torsional*.

- La inercia torsional  $J$  es igual al momento de inercia polar  $I_0$ , de la sección respecto del centro de torsión solamente cuando se anula el alabeo,

$$J = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_0,$$

esto es, cuando la sección recta es circular. En tal caso, el centro de torsión coincide con el centro de gravedad de la sección.

## Procedimiento de solución general:

- (1) Calcule la función de estrés  $\Phi$  mediante la resolución de la ecuación asociada de Poisson (3.8).
- (2) Obtenga la relación entre el torque - velocidad de giro,  $M_t = M_t(\theta)$  de (3.9).
- (3) Calcule las tensiones  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  de (3.6), mientras  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  se derivan de la ley constitutiva.
- (4) Calcule la función de alabeo  $\omega(x, y)$  integrando las relaciones (3.3).

- Comúnmente la solución de la ecuación de Poisson para el problema de torsión se basa en el hecho que  $\Phi = 0$  en el borde de la sección.
- Por lo tanto, si tenemos una descripción implícita del borde de la sección  $f(x, y) = 0$ , podríamos usar el método inverso asumiendo una relación de la forma  $\Phi(x, y) = C f(x, y)$ , donde  $C$  es una constante por determinar.
- Aunque esto no proporciona una solución general a la ecuación de Poisson, es útil en varios problemas de interés. Si la solución propuesta satisface las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno, la unicidad garantiza que hemos encontrado la única solución del problema.

- **Ejemplo 3.1:** *Torsión de una barra elíptica.*

Considere una barra con sección transversal elíptica de semiejes  $a$  y  $b$ ,  $a > b$ , sujetada a un torque  $M_t$  en sus extremos. El borde se describe mediante la ecuación implícita

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Se piden determinar los siguientes aspectos:

1. Proponga una forma funcional para la función de estrés  $\Phi$ .
2. Use la ecuación de gobierno  $\Delta\Phi = -2G\theta$  para determinar el valor de la constante  $C$  y la expresión final para  $\Phi$ .
3. Determine la relación entre el par aplicado  $M_t$  y la tasa de torsión  $\theta$  utilizando la relación torque- $\Phi$  (3.9).
4. Calcule los esfuerzos cortantes en función del torque  $M_t$ .
5. Determine la tensión resultante definida como  $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$ .
6. Determine el esfuerzo máximo resultante  $\tau_{\max}$  y su ubicación en la sección transversal,  $a > b$ . ¿Qué valores toman  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ ?

• **Ejemplo 3.1 (cont.): Torsión de una barra elíptica.**

7. Obtenga las expresiones de la rigidez torsional  $GJ = M_t/\theta$  y la inercia torsional  $J = (a^2 + b^2)/(\pi a^3 b^3)$ .
8. Calcule el ángulo de giro máximo antes de que el material ceda plásticamente y el valor del par  $M_t$  en ese punto. Suponga un criterio de fluencia basado en el esfuerzo cortante máximo<sup>1</sup>, es decir, el material fluye plásticamente cuando  $\tau_{\text{máx}} = \sigma_Y$ .
9. Determine la función de alabeo  $\omega(x, y)$ , para ello use la relación (3.3).
10. Obtenga las componentes del desplazamiento en función de  $M_t$

$$u = -\theta y z = -\frac{M_t(a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} y z,$$

$$v = \theta x z = \frac{M_t(a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} x z,$$

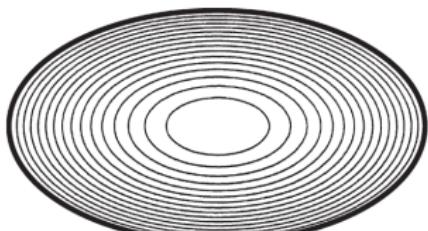
$$w = \theta \omega = -\frac{M_t(a^2 - b^2)}{\pi G a^3 b^3} x y,$$

donde  $\theta = \frac{M_t}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}$  y  $\omega = -\frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} x y$ .

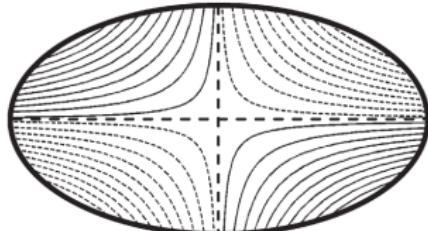
<sup>1</sup>Criterio de Tresca o criterio de la tensión tangencial máxima.

• **Ejemplo 3.1 (cont.): Torsión de una barra elíptica.**

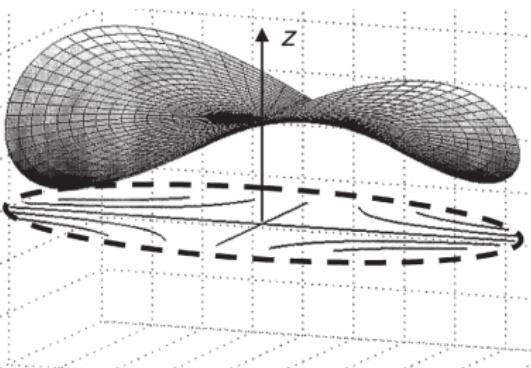
- Curvas de nivel para la función de tensión de Prandtl  $\Phi(x, y)$  y del desplazamiento. Además se muestra la superficie alabeada del desplazamiento  $w(x, y)$  para la sección elíptica, ver [Sadd, 2014].



(Stress Function Contours)



(Displacement Contours)



(Warping Displacement Surface)

- **Ejemplo 3.2:** Especialice los resultados para la sección transversal elíptica en el caso de un círculo de radio  $r = a = b$ .
  - Obtenga
    - Función de estrés  $\Phi(x, y)$ .
    - Torque  $M_t$  y  $\Phi(M_t)$ .
    - Tensiones de corte  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ .
    - Tensión resultante  $\tau$  y su máximo  $\tau_{\text{máx}}$ .
    - Función de alabeo  $\omega(x, y)$  para el desplazamiento.
  - Verifique que estos resultados son los obtenidos mediante la teoría de Coulomb.

- Saint-Venant en 1855 encontró soluciones al problema de torsión para varias secciones transversales, como las secciones rectangulares, triangulares y elípticas.
- Dichas soluciones fueron encontradas por métodos matemáticos complejos, a menudo involucrando series infinitas.
- Por otra parte muchas secciones prácticas importantes, como los canales y las vigas I, ni siquiera pueden reducirse a una fórmula matemática, por lo que son deseables los métodos aproximados de solución. El mejor método de este tipo entre los muchos que han aparecido es debido a Prandtl (1903).
- Prandtl observó que la ecuación diferencial (3.7) para la función de tensión es la misma que la ecuación diferencial para la forma de una membrana estirada, originalmente plana, que luego es deformada por la presión del aire desde el fondo.
- Esta observación nos permite una manera extremadamente simple y clara de visualizar la forma de la función  $\Phi$  y la distribución del estrés en cada punto de la sección de la pieza.

# Bibliografía

-  Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).  
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units.  
McGraw-Hill, New York, 1999.
-  Ortiz Berrocal, L. (2005).  
Elasticidad. 2da Ed., McGraw-Hill, New York, 2005.
-  Russel C. Hibbeler (2011).  
Mecánica de Materiales. 8va Ed. Pearson, México, 2011.
-  Sadd, Martin H. (2014).  
Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Boston, Academic Press, 2014.
-  Den Hartog, Jacob P. (1987).  
Advanced Strength of Materials. Dover Publications, New York, 1987.

# Fin

