

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 2B

## Formulación Matemática de la Elasticidad Lineal

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
*dmillan@fcai.uncu.edu.ar*

San Rafael–Argentina, agosto de 2019



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO

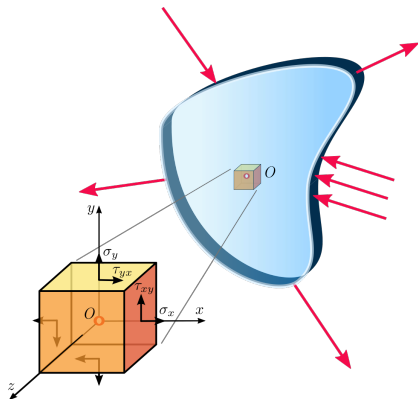


FACULTAD DE  
**CIENCIAS APLICADAS  
A LA INDUSTRIA**

- 1 Tensión (*cont.*)
  - 1.5 Estado plano de tensiones
  - 1.6 Componentes de tensión asociados con caras orientadas arbitrariamente en tensión plana
  - 1.7 Círculo de Mohr en tensión plana
  - 1.8 Círculo de Mohr de un estado general de tensión

## 1.5 Estado plano de tensiones

- En mecánica del continuo, se dice que un material está bajo tensión plana si el vector de tensión es cero en un plano particular.
- Cuando esa situación ocurre sobre un elemento completo de una estructura, como suele ser el caso de placas delgadas, el análisis de tensión se simplifica considerablemente, ya que el estado de tensión puede representarse mediante un tensor de dimensión 2.
- La tensión en el plano generalmente ocurre en placas planas delgadas sobre las que solo actúan fuerzas de carga paralelas a ellas.



- En ciertas situaciones, se puede suponer que una placa delgada suavemente curvada tiene tensión plana para realizar un análisis de tensión. Por ejemplo, un cilindro de pared delgada lleno de un fluido a presión. Es decir, los componentes de tensión perpendiculares a la placa son insignificantes en comparación con aquellos paralelos a ella.
- Como se verá más adelante, en ciertas situaciones, el esfuerzo de flexión de una placa delgada no puede ser obviado. Si bien el análisis se puede simplificar, utilizando un dominio 2D, el tensor de tensión plana deberá complementarse con términos de flexión.
- En términos más generales, si uno elige los dos primeros ejes de coordenadas de forma arbitraria pero perpendicular a la dirección de tensión cero, el tensor tensión tendrá la forma

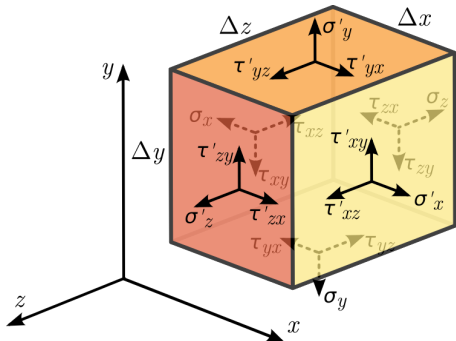
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y por lo tanto puede ser representado por una matriz  $2 \times 2$ ,

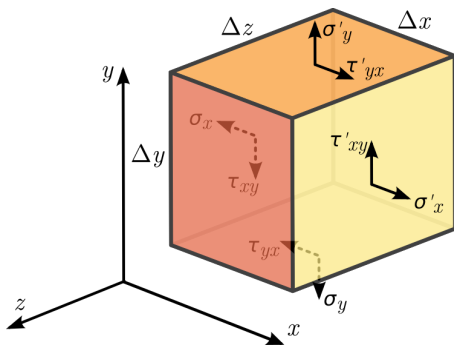
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}.$$

- Se dice que se tiene un estado plano de tensiones cuando las componentes tensionales sobre planos normales al eje  $z$ :  $\sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{zy}$ , son nulas, las tensiones están siempre contenidas en el plano  $xy$ .
- El estado tensional queda completamente definido por las componentes  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ . Conocidas estas componentes del tensor de tensiones en cualquier punto  $O$ , es posible determinar la tensión sobre una superficie arbitraria, si se conocen los cosenos directores de la misma.

- Supongamos ahora que además del plano  $mm$  pasamos otro plano a través del cuerpo, este plano es paralelo a  $mm$  pero separado de él una pequeña distancia  $\Delta x$ .
- De manera similar pasamos planos paralelos a los planos  $xz$  y  $xy$ , finalmente cortamos un paralelepípedo de  $\Delta x$  por  $\Delta y$  por  $\Delta z$ .
- Las primas se usan para indicar que los componentes de tensión en caras opuestas no tienen necesariamente las mismas magnitudes, ya que las caras están separadas por pequeñas distancias.
- Los componentes de tensión en la figura deben considerarse como valores promedio sobre las caras respectivas del paralelepípedo.



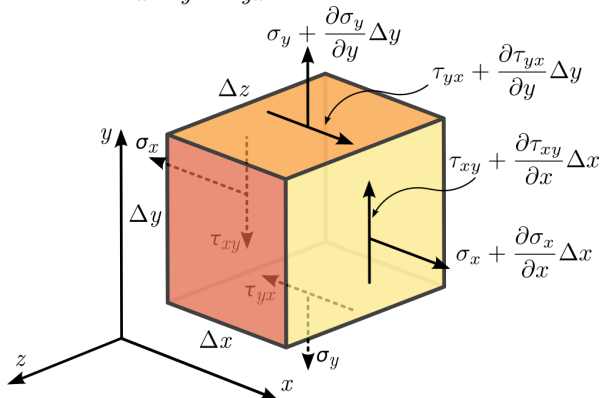
- **Equilibrio de un elemento diferencial en tensión plana**
- Si un cuerpo continuo está en equilibrio, cualquier parte aislada del cuerpo debe estar sometida a un conjunto de fuerzas en equilibrio (y viceversa, ver figura).
- Los requisitos de equilibrio establecen ciertas condiciones que deben existir entre los componentes de tensión.
- Primero expresaremos los componentes de tensión  $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, \tau'_{yx}$  en una forma más conveniente, relacionándolos con los componentes  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ .



- Usando el concepto de la derivada parcial, podemos aproximar la cantidad que cambia un componente de tensión entre dos puntos separados por una pequeña distancia  $\Delta x$  como

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \Delta x,$$

y de forma similar  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  y  $\tau'_{yx}$ .





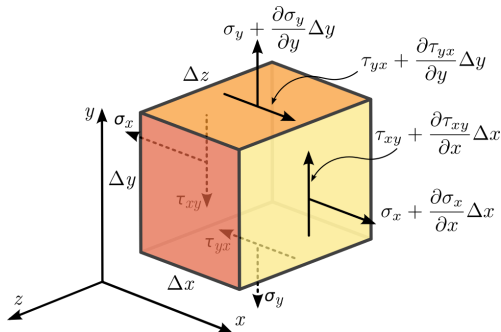
- **Ejercicio:** muestre que imponiendo las condiciones de equilibrio  $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$  al elemento de la figura respecto al centro, y aplicando el límite cuando se toma un paralelepípedo infinitesimal, se obtiene que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},$$

y

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$



- Es posible demostrar en el caso más general de tensión en un punto, que, para satisfacer el requisito de  $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ , los componentes de la tensión de corte que actúan sobre caras perpendiculares y en direcciones perpendiculares a la línea de intersección de las caras deben ser iguales en magnitud y estar orientadas entre sí. Es decir

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

- Para un caso de tensión 3D, el equilibrio de momento reducirá los nueve componentes originales de la tensión a seis:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}.$$

- Mientras que, la condición de  $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$  para un estado de tensión 3D requerirá de tres ecuaciones, las cuales pueden escribirse en notación indicial como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

- **Ejercicio – 4.33 Crandal et al.:** Recall that the equilibrium equations for a slender beam are

$$\frac{dV}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM_b}{dx} + V = 0.$$

Show that an integration of the equilibrium equations  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$ , across the thickness of a beam in plane stress reduces to the above equations where

$$V = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy, \quad M_b = - \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_y dy,$$

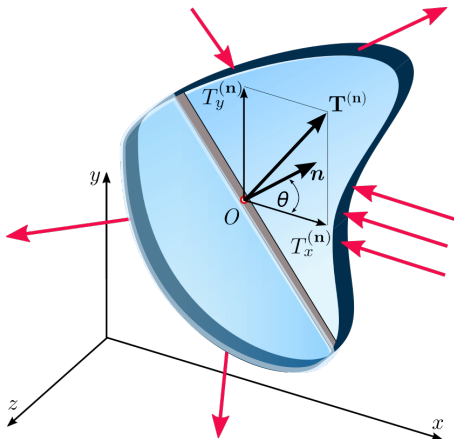
and

$$q = \sigma_y(y = h/2) - \sigma_y(y = -h/2).$$

## 1.6 Componentes de tensión asociados con caras orientadas arbitrariamente en tensión plana

- En esta sección examinamos más a fondo el problema del estado tensional en un punto y determinamos las relaciones que deben existir entre los componentes de tensión asociados con caras que no son perpendiculares entre sí.
- Además, encontraremos cómo expresar los componentes del vector tensión en un plano que pasa por un punto  $O$  que no es paralelo a uno de los planos de coordenadas cartesianos.
- También obtendremos los componentes de tensión en un conjunto de ejes rotados con respecto a los ejes originales en términos de los componentes de tensión referidos a los ejes de coordenadas originales.

- Supongamos que conocemos las componentes de tensión  $\sigma_x, \sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en algún punto de un cuerpo  $O$  sometido un estado de tensión plano. Nos interesa responder las siguiente pregunta:
  - ¿Los componentes de tensión en las caras  $x$  e  $y$  determinan las componentes del vector tensión  $\mathbf{T}^{(n)}$  que actúa sobre una cara que pasa a través del punto y cuya normal  $\mathbf{n}$  se encuentra en el plano  $xy$  y forma un ángulo arbitrario  $\theta$  con el eje  $x$ ?
  - En otras palabras ¿El equilibrio determina unívocamente los componentes  $T_x^{(n)}, T_y^{(n)}$ , del vector tensión  $\mathbf{T}^{(n)}$  en términos de  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  y el ángulo  $\theta$ ?



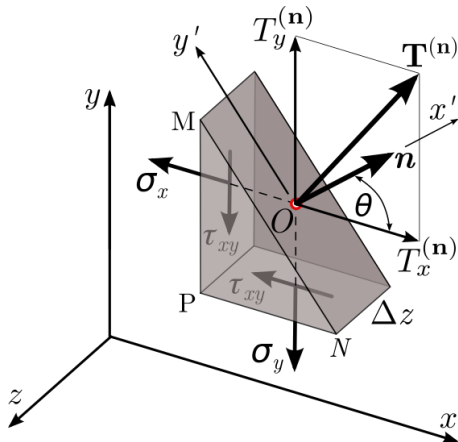
- **Ejercicio:** Responda la pregunta considerando el equilibrio ( $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ,  $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ ) de una pequeña cuña centrada en el punto  $O$ , como se muestra en la figura.
- Para una cuña suficientemente pequeña, podemos considerar que los componentes de tensión son uniformes sobre cada cara.
- Las condiciones de equilibrio

$$\sum M_z = 0,$$

$$\sum F_x = 0,$$

$$\sum F_y = 0,$$

siendo  $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ .



- **Ejercicio (cont.)**
- La respuesta a la pregunta planteada, para un estado plano de tensión, se expresa como

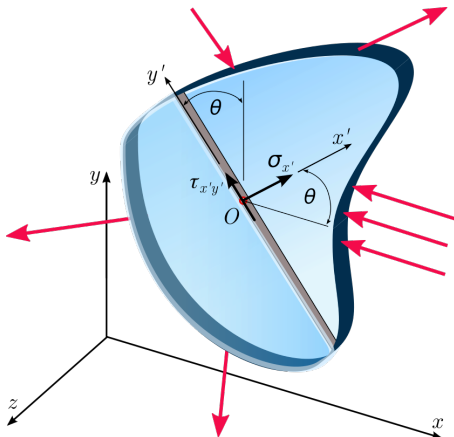
$$\begin{aligned}T_x^{(\mathbf{n})} &= \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta, \\T_y^{(\mathbf{n})} &= \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta,\end{aligned}$$

o en notación matricial (Teorema de tensión de Cauchy)

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}.$$

- Este resultado permite determinar los componentes del vector tensión  $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$  en términos de las componentes del tensor tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  actuando en las caras de coordenadas. Este cálculo a menudo se requiere realizar en la frontera de un cuerpo delgado.

- De forma similar, nos interesa responder la siguiente pregunta:
  - ¿Los componentes de tensión en las caras  $x$  e  $y$  determinan las componentes de tensión en una cara que pasa a través del punto  $O$  y cuya normal  $\mathbf{n}$  se encuentra en el plano  $xy$  y forma un ángulo arbitrario  $\theta$  con el eje  $x$ ?
  - La pregunta se ilustra en la figura. Es decir: ¿Las condiciones de equilibrio determinan de manera única los componentes de tensión  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'y'}$  en términos de  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  y el ángulo  $\theta$ ?



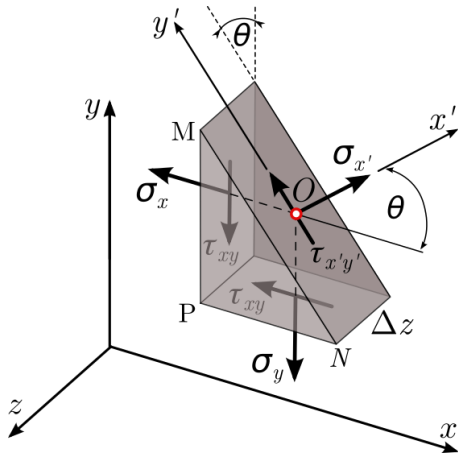


- **Ejercicio:** Responda la pregunta considerando el equilibrio ( $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ,  $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ ) de una pequeña cuña centrada en el punto  $O$ , como se muestra en la figura.
- Para una cuña suficientemente pequeña, podemos considerar que los componentes de tensión son uniformes sobre cada cara.
- Como vimos en el ejercicio anterior solo interesa analizar las condiciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0,$$

$$\sum F_y = 0,$$

siendo  $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ .



- **Ejercicio (cont.)** La respuesta a la pregunta planteada, para un estado plano de tensión, se expresa como

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

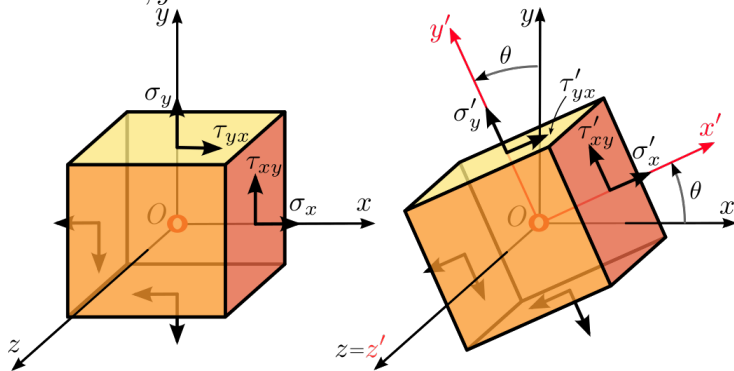
- La expresión anterior responde nuestra pregunta: los componentes de tensión  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'y'}$  en el punto  $O$  están determinadas únicamente por el equilibrio de las componentes de tensión  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'}$  en términos de  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  y el ángulo  $\theta$ .
- En tensión plana si conocemos los componentes de tensión en dos caras perpendiculares, conocemos los componentes de tensión en todas las caras cuyas normales se encuentran en el plano. En particular, si sustituimos  $\theta$  por  $\theta + \pi/2$ , podemos obtener  $\sigma_{y'}$ , la tensión que actúa sobre una cara perpendicular al eje  $y'$ ,

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta.$$

- **Nota:** alternativamente se emplea la notación  $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ .

- Si conocemos los componentes de tensión para todas las orientaciones posibles de un plano que pasa a través del punto en cuestión, decimos que conocemos el *estado de tensión en el punto*.
- La especificación de un estado de tensión en tensión plana implica, por lo tanto, el conocimiento de tres componentes de tensión, tomados más convenientemente como componentes normales y de corte en dos caras perpendiculares.
- Se debe tener cuidado de no confundir un solo componente de tensión con el estado de tensión en ese punto.
- En el caso general de tensión en 3D, la especificación del estado de tensión en un punto requiere seis piezas de información, lo más convenientemente es emplear componentes de tensión normal y cortante asociados con tres caras perpendiculares entre sí.

- **Transformación del sistema de referencia.**
- Como hemos visto las componentes del tensor de tensiones varían según el sistema de referencia en el que se expresan.
- Si el estado de tensiones es plano, las tensiones referidas al sistema  $x', y'$  variarán respecto a las correspondientes al sistema  $x, y$ . Nos interesa expresar tanto vectores de fuerza como el tensor tensión en el sistema  $x', y'$ .



- Comencemos con la transformación de vectores en 2D, para ello definamos  $\mathbf{A}$  como la matriz de cosenos directores de los ejes  $x', y'$  respecto de los ejes  $x, y$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

- Por lo tanto un vector  $\mathbf{t}$  se expresará en el sistema rotado como

$$\mathbf{t}' = \mathbf{A}\mathbf{t},$$

es decir transforma como

$$t_{x'} = t_x \cos \theta + t_y \sin \theta,$$

$$t_{y'} = -t_x \sin \theta + t_y \cos \theta,$$

- Ejercicio:** Mostrar que las componentes del tensor tensión  $\boldsymbol{\sigma}'$  en el nuevo sistema de referencia  $x', y'$  se obtienen como


$$\sigma'_{ij} = a_{im}a_{jn}\sigma_{mn} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}^T,$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de rotación (ortogonal).

# 1.7 Círculo de Mohr en tensión plana

- Las transformaciones del tensor de tensión parecen abstractas al principio, por lo que es preciso una herramienta para ayudar a visualizarlas. Pues resulta que las ecuaciones de transformación tienen una famosa interpretación gráfica (“**entre ingenieros**”) conocida como el *círculo de Mohr*<sup>1</sup>.
- El círculo de Mohr es simplemente una herramienta matemática o procedimiento sistematizado para visualizar cómo cambian las tensiones (y otros tensores de segundo rango) cuando se giran los ejes.
- El procedimiento de Mohr emplea las relaciones trigonométricas de ángulo doble para mostrar que las ecuaciones de tensión vistas previamente tienen una representación circular

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\
 \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta, \\
 \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta.
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Presentado en 1900 por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835–1918) 

- En el círculo de Mohr, un esfuerzo cortante que actúa en sentido horario es positivo y en sentido antihorario negativo. Los esfuerzos cortantes en las caras  $x$  e  $y$  deben tener signos opuestos. Las tensiones normales son positivas en tensión y negativas en compresión, como de costumbre.
- Para construir el círculo de Mohr, procedemos de la siguiente manera dados los componentes de tensión  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ :

- (1) Construya un gráfico con  $\tau$  como ordenada (eje  $y$ ) y  $\sigma$  como abscisa, y trace los esfuerzos en las caras  $x$  e  $y$  del cuadrado de tensiones como dos puntos en este gráfico. Usando la convención de signos para los componentes de tensión que acabamos de dar, ubicamos el punto  $\mathbf{x} = (\sigma_x, -\tau_{xy})$  y  $\mathbf{y} = (\sigma_y, \tau_{xy})$ .
- (2) Una los puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  con una línea recta que intersecta el eje  $\sigma$  en el punto  $C$ , que será el centro del círculo de Mohr. La abscisa de del centro  $C$  es

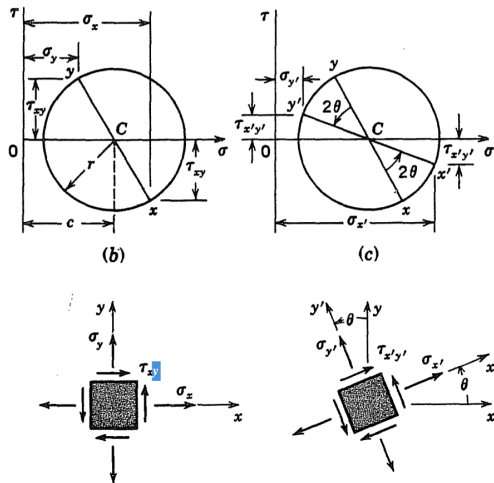
$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

- (3) Con  $C$  como centro y  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  como diámetro dibujamos el círculo, cuyo radio es

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

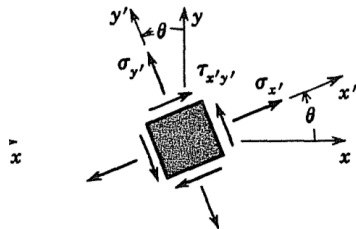
• (cont.)

- (3) Una vez que se ha construido el círculo, se puede usar para determinar los componentes de tensión  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  y  $\tau_{x'y'}$  que se muestran en la figura. Estos componentes de tensión se aplican al mismo punto físico  $O$  en el cuerpo pero son con respecto a los ejes  $x'y'$  que forman un ángulo  $\theta$  con los ejes  $xy$  originales.



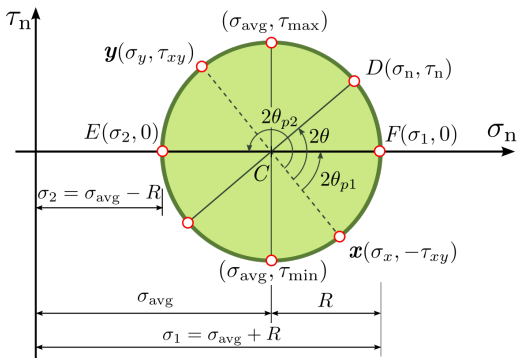


- (4) Localizamos el diámetro  $x'y'$  con respecto al diámetro  $xy$  en el círculo de Mohr empleando el ángulo  $2\theta$  en la figura, girando en el mismo sentido que la rotación  $\theta$  que lleva los ejes  $xy$  a los ejes  $x'y'$  del cuadrado de tensiones en la figura (debajo).
- (5) Usando la convención de signos para componentes de tensión en el círculo de Mohr, leemos los valores de  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'y'}$  como las coordenadas del punto  $x'$  y los valores de  $\sigma_{y'}$  y  $\tau_{x'y'}$  como las coordenadas del punto  $y'$ .



- El círculo de Mohr proporciona una descripción gráfica del estado de tensión plana en un punto.
- Cada posible combinación de componente de tensión  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  y  $\tau_{x'y'}$  está representada por un diámetro del círculo.
- Una combinación particularmente importante es la representada por el diámetro que está alineado con el eje horizontal de tensión normal  $\sigma$ .
- Hay tensiones normales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , tensiones principales, pero no hay un componente de esfuerzo cortante. Además,  $\sigma_1$  es el componente de tensión normal máximo posible, y  $\sigma_2$  es el componente de tensión normal mínimo posible en el punto del cuerpo bajo estudio.
- Otra combinación de componentes de tensión que es de especial interés es la representada por el diámetro vertical del círculo de Mohr. Aquí las tensiones normales son iguales, y la magnitud del esfuerzo cortante es la máxima posible en esta ubicación,  $\tau_{max}$ .
- Los ejes se denominan ejes de corte máximo. Se dice que las caras de elementos correspondientes, perpendiculares a estos ejes, definen los planos de corte máximo en esta ubicación en el cuerpo.
- Los ejes de corte máximo están inclinados a  $45^\circ$  con respecto a los ejes principales.
- En la siguiente figura se resumen estos puntos...

## Círculo de Mohr para condiciones de tensión plana y deformación plana.

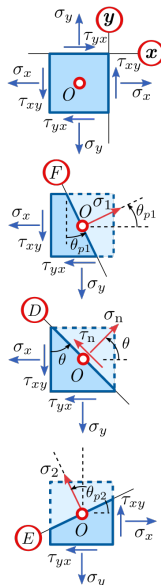


$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



## 1.8 Círculo de Mohr de un estado general de tensión

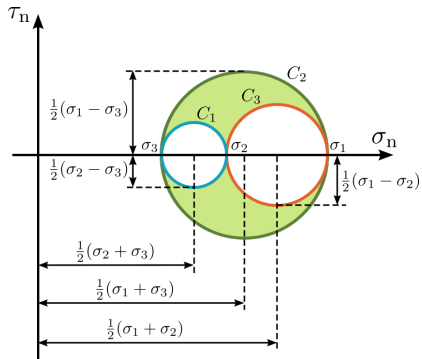
- Para construir el círculo de Mohr para un caso general 3D de tensiones en un punto, se deben evaluar los valores de las tensiones principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) y sus direcciones principales ( $n_1, n_2, n_3$ ), siendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .
- Las expresiones para los círculos de Mohr son

$$\tau_n^2 + \left[ \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \geq \left( \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right)^2$$

$$\tau_n^2 + \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]^2 \leq \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right)^2$$

$$\tau_n^2 + \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]^2 \geq \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right)^2$$

- Mientras que los radios de los círculos de tensión  $C_i$  están dados como  $R_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ ,  $R_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , y  $R_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ , siendo sus centros como se muestra en la figura.



# Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).

Resistencia de Materiales. CIMNE, 2015.

# Fin

