

Mecánica de los Sólidos – Unidad 3 C

Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, octubre de 2019



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE
**CIENCIAS APLICADAS
A LA INDUSTRIA**

- 5 5. Tensiones térmicas
 - 5.1 Discos delgados con temperatura no uniforme
 - 5.2 Cilindros largos con temperatura no uniforme
- ⊙ Bibliografía

5. Tensiones térmicas

- Se generan tensiones en un cuerpo elástico por el calentamiento desigual de diferentes partes del cuerpo.
- En general, un cuerpo se expande a medida que aumenta la temperatura. Si se permite que el elemento se expanda libremente, el cuerpo se deformará pero no habrá ningún estrés debido a dicha expansión.
- Sin embargo, si el aumento de temperatura en el cuerpo no es uniforme y el cuerpo es continuo, la expansión heterogénea de los elementos produce estrías térmicas.
- El problema de determinar las *tensiones térmicas* en un cuerpo elástico debido a una distribución de temperatura dada encuentra muchas aplicaciones prácticas en el diseño de máquinas, como en el diseño de turbinas de vapor y gas y motores de combustión interna.

- Consideremos primero un cuerpo elástico no deformado con una temperatura uniforme T_0 . Ahora imagine que el cuerpo se calienta a una temperatura T superior a T_0 . El cuerpo estará estresado si T varía de un punto a otro del cuerpo.
- La deformación de un elemento puede considerarse que consta de dos partes. Una parte se debe a la expansión del elemento debido al cambio de su temperatura. Si α es el *coeficiente de expansión lineal* del material, que se define como el cambio de longitud por unidad de longitud por grado de aumento de temperatura, esta parte de la deformación longitudinal será αT .
- No se producirán deformaciones por cizallamiento, porque la expansión de un elemento pequeño, debido al cambio de temperatura, no producirá una distorsión angular en un material isotrópico. Si se permite que el elemento se expanda libremente, la deformación debida al cambio de temperatura es el único componente de deformación y el elemento no se estresará.
- Ahora, si no se permite que el elemento se expanda libremente, se producirán tensiones y la deformación total del elemento debe ser la suma de la parte debida a las tensiones y la debida al cambio de temperatura.

5.1 Discos delgados con temperatura no uniforme

- Consideremos un disco circular delgado con distribución de temperatura desigual.
- Suponga que la temperatura T es una función de la distancia radial r solamente. Esto implica un caso de tensión plana con simetría rotacional.
- En términos de coordenadas cilíndricas, encontramos, de la relación tensión-deformación-temperatura (Unidad 2D, pág. 40)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha T.$$

- La ecuación de equilibrio

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

se satisface si se introduce la función de estrés ϕ tal que

$$\sigma_r = \frac{\phi}{r} \quad \text{y} \quad \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr}.$$

- Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de compatibilidad

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0,$$

y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} &= -\alpha E \frac{dT}{dr}, \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right) &= -\alpha E \frac{dT}{dr}. \end{aligned}$$

- La ecuación anterior puede ser fácilmente integrada siendo la solución

$$\phi = -\frac{\alpha E}{r} \int_a^r T r \, dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r},$$

donde el límite inferior a puede ser elegido de forma arbitraria. Para un disco sólido $a = 0$, mientras que para un disco con un orificio circular en el centro, a es el radio interior.

- De la función de estrés es posible determinar las tensiones

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r T r \, dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[-T + \frac{1}{r^2} \int_a^r T r \, dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}.$$

- Para un **disco sólido**, se tiene que la tensión debe tener un valor finito en el centro por lo cual $C_2 = 0$, mientras que si no se aplican fuerzas externas en el borde $\sigma_r = 0$ en $r = b$. Por lo tanto

$$\sigma_r = \alpha E \left[\frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r \, dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[-T + \frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r \, dr \right]$$

$$u = \frac{\alpha r}{b^2} (1 - \nu) \int_0^b T r \, dr + \frac{\alpha}{r} (1 + \nu) \int_0^r T r \, dr.$$

- Para un **disco con orificio circular centrado** de radio a , sin fuerzas externas en los bordes $\sigma_r = 0$ en $r = a$ y $r = b$, se tiene

$$\sigma_r = \alpha E \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr - \int_a^r T r \, dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr + \int_a^r T r \, dr - T r^2 \right],$$

$$u = \frac{\alpha}{r} \left(\frac{r^2(1 - \nu) + a^2(1 + \nu)}{b^2 - a^2} \right) \int_a^b T r \, dr + \frac{\alpha}{r} (1 + \nu) \int_a^r T r \, dr.$$

5.2 Cilindros largos con temperatura no uniforme

- Consideremos las tensiones térmicas en un cilindro circular largo con una distribución de temperatura simétrica alrededor de su eje.
- Si los extremos del cilindro están restringidos de tal manera que $\varepsilon_z = 0$, tenemos un estado de deformación plana, es decir

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET.$$

- En términos de coordenadas cilíndricas, las relaciones tensión-deformación a lo largo del eje son

$$\varepsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - \nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta \right] + \alpha(1 + \nu)T,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r \right] + \alpha(1 + \nu)T.$$

- La ecuación de compatibilidad resultantes es

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} = -\frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{dT}{dr}.$$

- Comparando la ecuación de compatibilidad para los casos de deformación plana y tensión plana observamos que son similares, excepto por el coeficiente de dT/dr . Por lo tanto se tiene que su solución es

$$\phi = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}.$$

- De la función de estrés es posible determinar las tensiones

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2},$$
$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[-T + \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}.$$

- Para un **cilindro sólido**, se tiene que la tensión debe tener un valor finito en el centro por lo cual $C_2 = 0$, mientras que si no se aplican fuerzas externas en el borde $\sigma_r = 0$ en $r = b$. Obteniendo

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r \, dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{b^2} \int_0^b T r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r \, dr - T \right].$$

- Por lo tanto para un cilindro cuyos extremos están fijos ($\varepsilon_z = 0$)

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2\nu}{b^2} \int_0^b T r \, dr - T \right],$$

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[\frac{(1 - 2\nu)r^2}{b^2} \int_0^b T r \, dr + \int_0^r T r \, dr \right].$$

- **Ejercicio:** Muestre que $\varepsilon_z = 0$.

- Si el cilindro tiene extremos libres, podemos superponer un esfuerzo axial uniforme C_3 para que la fuerza resultante en los extremos sea cero,

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2\nu}{b^2} \int_0^b T r \, dr - T \right] + C_3$$

- Integrando, encontramos que la condición

$$\int_0^b \sigma_z 2\pi r \, dr = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{2\alpha E}{b^2} \int_0^b T r \, dr.$$

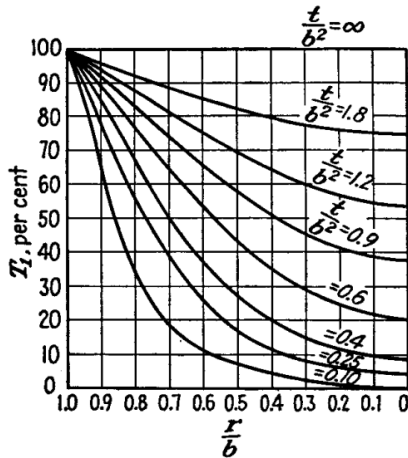
- En tal caso

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2}{b^2} \int_0^b T r \, dr - T \right],$$

$$u = \frac{1}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[\frac{(1 - 3\nu)r^2}{b^2} \int_0^b T r \, dr + (1 + \nu) \int_0^r T r \, dr \right].$$

- **Ejercicio:** Muestre que $\varepsilon_z = \frac{2\alpha}{b^2} \int_0^b T r \, dr$.

- La figura representa la distribución de temperatura en un cilindro de acero. Se supone que el cilindro tiene una temperatura inicial uniforme igual a cero y que a partir de un instante $t = 0$, la superficie del cilindro se mantiene a una temperatura T_1 .



- Las distribuciones de temperatura a lo largo del radio, para varios valores de t/b^2 [s/cm²], están representadas por curvas. Es posible determinar (no en este curso) que la distribución de temperatura para cilindros de diferentes diámetros es la misma si el tiempo de calentamiento es proporcional al cuadrado del diámetro, $t \propto b$.

- A partir de la figura, se puede calcular la temperatura promedio de todo el cilindro y también de una porción interna del cilindro de radio r .
- Teniendo estas temperaturas, encontramos las tensiones térmicas para un cilindro sólido. Si tomamos un valor muy pequeño para t , las temperaturas promedio, mencionadas anteriormente, se acercan a cero por lo que encontramos en la superficie

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_z = -\frac{\alpha E T_1}{1 - \nu},$$

este valor es el máximo esfuerzo térmico producido en un cilindro por calentamiento.

- El máximo esfuerzo térmico calculado es el esfuerzo necesario para la supresión total de la expansión térmica en la superficie. En otras palabras, es el estrés de compresión requerido durante el calentamiento, y de tracción durante el enfriamiento.
- Para reducir las tensiones máximas, es una práctica habitual comenzar el calentamiento de ejes y rotores con una temperatura algo menor que la temperatura final T_1 , y aumentar el tiempo de calentamiento en proporción al cuadrado del diámetro, $t \propto b$.

- En el caso de un **cilindro con orificio circular centrado**, de radio a , las constantes de integración se pueden obtener de las condiciones de borde $\sigma_r = 0$ en $r = a$ y $r = b$, es decir no existen fuerzas externas en los bordes. Se tiene

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr - \int_a^r T r \, dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr + \int_a^r T r \, dr - T r^2 \right].$$

- Nuevamente, obtenemos en el caso de restringir las deformaciones axiales

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2\nu}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr - T \right],$$

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[\frac{(1 - 2\nu)r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr + \int_a^r T r \, dr \right].$$

- Es decir $\varepsilon_z = 0$.

- Sumando el esfuerzo axial

$$C_3 = \frac{2\alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr,$$

requerido para hacer que la fuerza axial resultante sea cero, obtenemos

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr - T \right],$$

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \left[\frac{\frac{1-3\nu}{1+\nu} r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr + \int_a^r T r \, dr \right].$$

- Mientras que $\varepsilon_z = \frac{2\alpha}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr$.
- **Ejercicio:** Muestre que la diferencia del desplazamiento radial en un cilindro hueco cuyos extremos se dejan libres, con respecto a uno cuya deformación axial es nula está dado por

$$\delta = u_{\text{Libre}} - u_{\text{Fijo}} = \frac{2\alpha\nu}{b^2 - a^2} \int_a^b T r \, dr = \nu \varepsilon_z^{\text{Libre}}.$$

- **Ejercicio:** Si T_1 es la temperatura en la superficie interna del cilindro y T_0 es la temperatura en la superficie externa, en el caso de un flujo de calor constante, el aumento de temperatura T a cualquier distancia r del centro es

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\ln(b/a)} \ln \frac{b}{r}.$$

- Muestre que las tensiones térmicas se expresan como

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu) \ln(b/a)} \left[-\ln \frac{b}{r} + \frac{a^2}{r^2} \frac{(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu) \ln(b/a)} \left[1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2}{r^2} \frac{(b^2 + r^2)}{(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu) \ln(b/a)} \left[1 - 2 \ln \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right].\end{aligned}$$

- Obtenga el desplazamiento $u(r)$.



● **Ejercicio (cont):**

- Si $T_1 > T_0$, las tensiones son compresivas en la superficie interna y de tracción en la superficie externa. En el caso de materiales tales como piedra, ladrillo u hormigón los cuales son frágiles bajo tracción, es probable que se inicien grietas en la superficie externa del cilindro en las condiciones anteriores.
- (a) ¿El esfuerzo radial es compresivo en todos los puntos y se convierte en cero en las superficies interna y externa del cilindro?
- (b) ¿Los componentes de tensión σ_θ y σ_z tienen sus valores numéricos más grandes en las superficies interna y externa del cilindro?
- (c) Determine los valores de σ_θ y σ_z para $r = a$ y $r = b$. ¿Cuál es la relación entre estos valores?
- (d) Si el espesor $h = b - a$ de la pared es pequeño en comparación con el radio exterior del cilindro. Muestre que es posible simplificar las expresiones de las tensiones σ_θ y σ_z para $r = a$ y $r = b$, tal que

$$\sigma_\theta(a) = \sigma_z(a) = -\frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu)} \left(1 + \frac{h}{3a}\right),$$

$$\sigma_\theta(b) = \sigma_z(b) = \frac{\alpha E(T_1 - T_0)}{2(1 - \nu)} \left(1 - \frac{h}{3a}\right).$$

Bibliografía

-  [Timoshenko, Stephen; J N. Goodier \(1951\).](#)
Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.
-  [Wang, Chi-Teh. \(1953\).](#)
Applied Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1953.

Fin

