

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 1B

## Principios fundamentales y Diagramas de Esfuerzos

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, agosto de 2020



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO





- 2 2. Mecánica de cuerpos deformables
  - 2.1 Análisis de cuerpos deformables
  - 2.2 Esfuerzo y deformación axial de una barra
  - 2.3 Sistemas estáticamente determinados
  - 2.4 Sistemas estáticamente indeterminados
  - 2.5 Idealizaciones más comunes

## 2.1 Análisis de cuerpos deformables

- Como se señaló en la primer clase, el abordaje de un problema de mecánica aplicada comienza con la selección del sistema a analizar, punto de partida común a las investigaciones científicas de cualquier campo.
- Este proceso de selección generalmente es un proceso dual de *identificación y simplificación*.
  - (a) *Identificación* de un sistema, que reconocemos que representa una descripción razonablemente completa de las interrelaciones de la situación física real.
  - (b) *Simplificación* de este sistema, hasta tener un modelo que seamos capaces de analizar.
- En este curso por defecto nos limitaremos a situaciones en las cuales la aceleración es cero y donde los movimientos del sistema están restringidos a deformaciones.

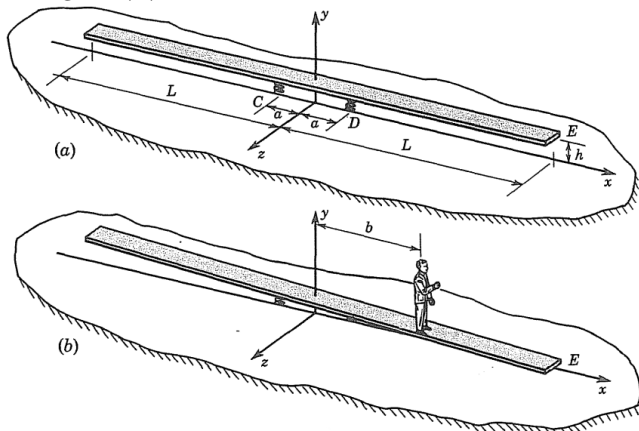
- En consecuencia, cuando hayamos seleccionado nuestro modelo, se lo analizará basados en los principios de la mecánica, que incluye los siguientes **pasos en el análisis de cuerpos deformables**:

1. Estudio de fuerzas y requisitos de equilibrio.
2. Estudio de deformación y condiciones de ajuste geométrico.
3. Aplicación de las relaciones de fuerza-deformación.

(2.1)

- Estos tres pasos llevan un número de ecuación porque son fundamentales para todo trabajo en la mecánica de cuerpos deformables; en este curso haremos frecuentes referencias a ellos.
- Los problemas previos se limitaron a casos que involucraron solo el primero de los tres pasos anteriores. En esta clase consideraremos casos para los que el análisis contendrá los tres pasos anteriores.
- En el siguiente ejemplo vamos a ilustrar el empleo de la Ec. (2.1) en el análisis de cuerpos deformables.

- **Ejemplo 2.1:** Un tablón de madera muy ligero y rígido de longitud  $2L$  está soportado por dos resortes idénticos de constante elástica  $k$ , como se muestra en la Figura (a).



- Los resortes tienen una longitud  $h$  cuando la tabla descansa sobre ellos (sin deformar).
- Suponga que un hombre se sube por la mitad de la tabla y comienza a caminar lentamente hacia un extremo, Figura (b).

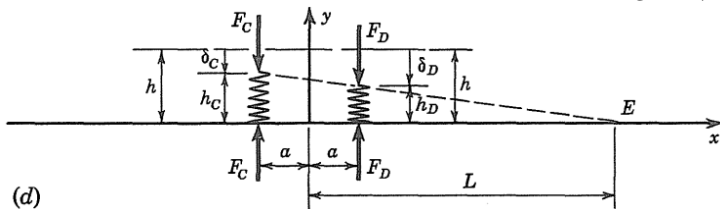
- **Ejemplo 2.1** (*cont.*):
- ♣ Quisiéramos saber hasta dónde puede caminar antes de que un extremo de la tabla toque el suelo; es decir, queremos saber la distancia  $b$ , es decir, cuando el extremo derecho  $E$  de la tabla está justo en contacto con el suelo.
  - Se debe tener en cuenta que los resortes pueden ejercer tensión y compresión.
  - Comenzamos seleccionando un modelo para representar el sistema.





● **Ejemplo 2.1 (cont.):**

- Debido a que la tabla es liviana, despreciamos su peso; por ende los resortes no ejercen fuerza sobre la tabla, siendo entonces  $h$  la longitud libre de cada resorte.
- Finalmente, hemos asumido que la rigidez de la tabla es tal que podemos considerar que permanece absolutamente recta, por lo que las deflexiones de los resortes son como se ilustra en la Figura (d).



- Ahora analizamos el modelo usando los tres pasos de la Ec. (2.1).

## 1. Equilibrio de fuerzas.

- Aplicando las condiciones al cuerpo libre de la tabla, Figura (c), encontramos que

$$\sum F_y = F_C + F_D - W = 0, \quad (\text{a1})$$

y

$$\sum M_C = 2aF_D - (a + b)W = 0. \quad (\text{b1})$$

- Es decir

$$F_C = \frac{a - b}{2a}W, \quad (\text{a2})$$

Mientras que

$$F_D = \frac{a + b}{2a}W. \quad (\text{b2})$$

## 2. Estudio de geometría de deformación y requisitos de compatibilidad geométrica

- Cuando la tabla permanece recta, vemos, en los triángulos equivalentes de la Figura (d), que las longitudes de los resortes tienen la siguiente relación

$$\frac{h_C}{h_D} = \frac{L + a}{L - a}. \quad (c)$$

- Además, las deflexiones de los resortes son

$$\begin{aligned} \delta_C &= h - h_C, \\ \delta_D &= h - h_D. \end{aligned} \quad (d)$$

## 3. Relaciones entre fuerzas y deformación

- Aquí, dado que ambos resortes tienen la misma constante de resorte, las relaciones de deformación de la fuerza se expresan como

$$\begin{aligned} F_C &= k\delta_C, \\ F_D &= k\delta_D. \end{aligned} \quad (e)$$

- Las ecuaciones (a – e) nos dan siete relaciones independientes para las siete incógnitas  $F_C, F_D, h_C, h_D, \delta_C, \delta_D$  y  $b$ .

- Resolvemos estas ecuaciones,

$$\delta_C = \frac{F_C}{k} = \boxed{\frac{a-b}{2a} \frac{W}{k}} = h - h_C = \boxed{h - h_D \frac{L+a}{L-a}}, \quad (i)$$

$$\boxed{h_D} = h - \delta_D = h - \frac{F_D}{k} = \boxed{h - \frac{a+b}{2a} \frac{W}{k}} \quad (ii)$$

- Ahora reemplazamos  $h_D$  en la primer expresión y reordenamos términos para despejar  $b$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{2a} \frac{W}{k} &= h - \left( h - \frac{a+b}{2a} \frac{W}{k} \right) \frac{L+a}{L-a}, \\ \frac{a-b}{2a} \frac{W}{k} &= h \left( \frac{L-a-L-a}{L-a} \right) + \frac{a+b}{2a} \frac{W}{k} \frac{L+a}{L-a}, \\ (a-b) \frac{W}{k} &= -\frac{4a^2 h}{L-a} + (a+b) \frac{W}{k} \frac{L+a}{L-a}, \\ \frac{4a^2 h k}{W} &= (a+b)(L+a) - (a-b)(L-a), \\ \frac{4a^2 h k}{W} &= a(L+a-L+a) + b(L+a+L-a). \end{aligned} \quad (iii)$$

- Finalmente, encontramos que el valor de  $b$  está dado por

$$b = \frac{a^2}{L} \left( \frac{2kh}{W} - 1 \right). \quad (\text{f})$$

- Además, las deflexiones de los resortes en términos de  $b$  son

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{W}{2k} \left( 1 - \frac{b}{a} \right), \\ \delta_D &= \frac{W}{2k} \left( 1 + \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (\text{g})$$

- **Q:** Analizar  $\delta_C$  para las situaciones  $a < b$ ,  $a = b$  y  $a > b$ .

- Es posible realizar algunas consideraciones adicionales relacionadas con (f), para ello escribimos dicha expresión como

$$\frac{b}{L} = \frac{a^2}{L^2} \left( \frac{h}{W/2k} - 1 \right) < 1, \quad (\text{h})$$

observando así las proporciones adimensionales básicas del problema.

- Siempre es una buena práctica en cualquier problema de ingeniería considerar el significado físico de las cantidades adimensionales.
- $(W/2k)/h$  es la relación entre la deflexión de los resortes cuando el hombre está entre los resortes,  $b = 0$ , y la longitud original de los resortes. Por ende

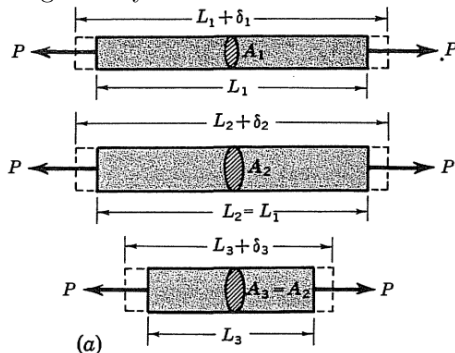
$$\frac{h}{W/2k} > 1.$$

- **Q:** Muestre que para que el problema sea factible, es decir existe un valor de  $b < L$  tal que exista contacto entre el punto del extremo derecho  $E$  de la tabla y el suelo,

$$\frac{W/2k}{h} > \frac{a^2}{a^2 + L^2}.$$

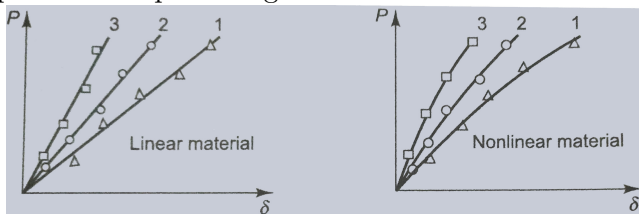
## 2.2 Esfuerzo y deformación axial de una barra

- Sea una barra cargada por dos fuerzas  $P$  en sus extremos, nos interesa el movimiento relativo de los puntos de aplicación de las dos fuerzas.
- Es más, considere la deformación de tres varillas de material idéntico, pero con diferentes longitudes y áreas de la sección transversal.



- Suponga que para cada barra la carga aumenta gradualmente desde cero, y que a varios valores de la carga se mide el alargamiento  $\delta$ .

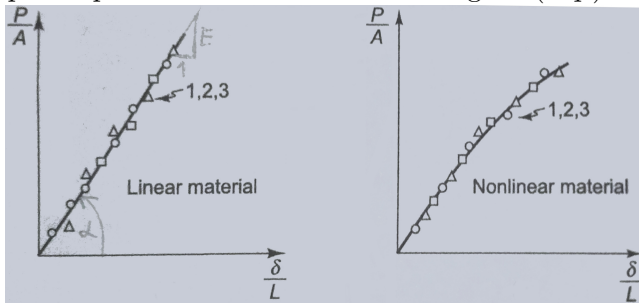
- Si el alargamiento máximo es muy pequeño ( $< L/1000$ ), entonces para la mayoría de los materiales los resultados de las tres pruebas estarán representados por una gráfica como:



- Las posiciones relativas de las tres curvas en cada gráfico son las que esperaríamos de la experiencia que hemos tenido con cuerpos fácilmente deformables como barras de goma.
- Q:** ¿Esta forma de representar los datos experimentales, es útil de cara a obtener las características de elongación de carga uniaxial de un material en particular? ¿Qué propuesta tiene para una mayor racionalización de los resultados?



- Si la relación de esfuerzo-alargamiento axial del material es lineal, se expresa por la pendiente de la recta de la Figura (izq.).



- Esta pendiente se llama módulo de elasticidad o módulo de Young y generalmente se denota con el símbolo  $E$ . En términos de las coordenadas de la Figura,  $E$  se define por

$$E = \frac{P/A}{\delta/L}, \quad \delta = \frac{PL}{AE}. \quad (2.2)$$

Ley de Hooke, en honor a Robert Hooke primero en describir este comportamiento... [¿Ha escuchado hablar de John Harrison \(1693-1776\)?](#)

- En un material lineal la relación carga-alargamiento se puede expresar mediante la simple relación analítica de Ec. (2.2).
- Si el material no es lineal, no será posible representar la relación carga-alargamiento uniaxial por una sola constante.
- Por esta razón, cuando los materiales son solo ligeramente no lineales, se ha convertido en una práctica común aproximar los datos mediante una línea recta con una pendiente que se ajustará al comportamiento no lineal lo mejor posible (0.2 % deformación plástica). ♣
- El hierro fundido, el cobre y el zinc son ejemplos de materiales para los que se encuentran valores tabulados del módulo de elasticidad. ♣
- El uso de curvas de carga-alargamiento no lineales proporciona algunas ideas que no se obtendrían si solo se trataran con materiales lineales.
- Para la mayoría de los materiales, los experimentos con pequeñas deformaciones muestran que el acortamiento de una varilla, debido a una fuerza de compresión, es igual a la extensión debida a una fuerza de tracción de la misma magnitud. ♣
- ♣ Asumiremos, por tanto, que la Ec. (2.2) y curvas como las mostradas representan el comportamiento tanto en compresión como en tensión.

- Valores típicos de  $E$  para algunos materiales.

<i>Material</i>	<i>E, psi</i>	<i>E, kN/m<sup>2</sup></i>
Tungsten carbide	$60\text{--}100 \times 10^6$	$410\text{--}690 \times 10^6$
Tungsten	$58 \times 10^6$	$400 \times 10^6$
Molybdenum	$40 \times 10^6$	$275 \times 10^6$
Aluminum oxide	$47 \times 10^6$	$325 \times 10^6$
Steel and iron	$28\text{--}30 \times 10^6$	$194\text{--}205 \times 10^6$
Brass	$15 \times 10^6$	$103 \times 10^6$
Aluminum	$10 \times 10^6$	$69 \times 10^6$
Glass	$10 \times 10^6$	$69 \times 10^6$
Cast iron	$10\text{--}20 \times 10^6$	$69\text{--}138 \times 10^6$
Wood	$1\text{--}2 \times 10^6$	$6.9\text{--}13.8 \times 10^6$
Nylon, epoxy, etc.	$4\text{--}8 \times 10^4$	$27.5\text{--}55 \times 10^4$
Collagen	$2\text{--}15 \times 10^3$	$13.8\text{--}103 \times 10^3$
Soft rubber	$2\text{--}8 \times 10^2$	$13.8\text{--}55 \times 10^2$
Smooth muscle	2–150	13.8–1034
Elastin	50–100	345–690

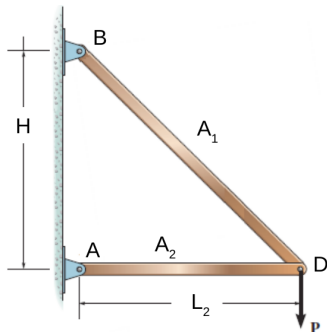
- Q: ¿Opina que estos valores son fidedignos? ¿Por qué?

## 2.3 Sistemas estáticamente determinados

- En algunos sistemas es posible determinar todas las fuerzas involucradas, satisfaciendo solo los requisitos de equilibrio, sin necesidad de considerar las deformaciones. Tales sistemas se denominan *estáticamente determinados*.
- Son aquellos sistemas estáticos en los cuales las fuerzas resultantes pueden obtenerse sin referencia a la geometría de la deformación.
- Una estructura es estáticamente determinada (*isostática*) si se pueden conocer sus fuerzas internas por medio de las ecuaciones de equilibrio estático, es decir, que puede analizarse bajo los principios de la estática.
- La cantidad de condiciones de respuesta de la estructura es igual a las ecuaciones que se tienen que plantear para despejarlas, de forma que resulta posible encontrar su comportamiento bajo este método.

● **Ejemplo 2.2:** Ejercicio 1.4 - TP1.

En la figura se muestra un marco triangular de acero que soporta una carga  $P$ , colgada del punto  $D$ . El marco consiste de dos barras de acero articuladas entre si, y a una pared vertical.



Considere:  $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  
 $A_1 = 5 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 20 \text{ cm}^2$ ,  
 $H = L_2 = 3 \text{ m}$ .

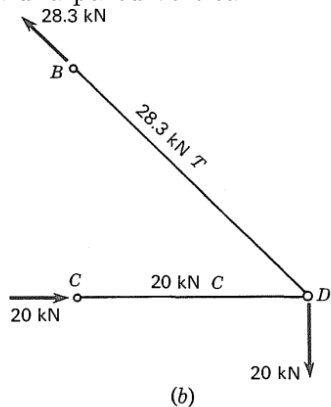
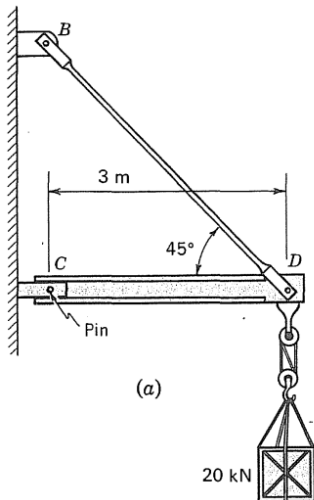
● Se pide:

a) **Estimar** el desplazamiento del punto  $D$  debido a la carga.

**Rta.**  $\Delta_D = 1,8163 \text{ mm}$ .

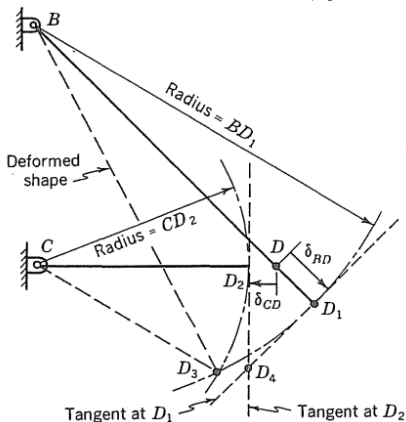
● **Ejemplo 2.2:** Ejercicio 1.4 - TP1.

En la figura se muestra un marco triangular de acero que soporta una carga  $P$ , colgada del punto  $D$ . El marco consiste de dos barras de acero articuladas entre si, y a una pared vertical.

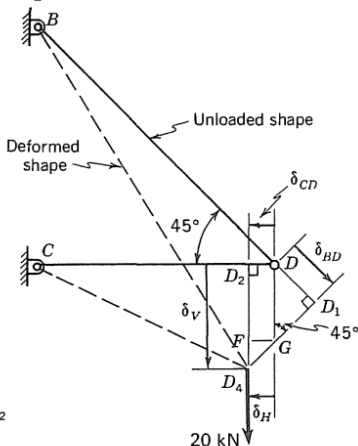


- **Ejemplo 2.2:** Ejercicio 1.4 - TP1.

En la figura se muestra un marco triangular de acero que soporta una carga  $P$ , colgada del punto  $D$ . El marco consiste de dos barras de acero articuladas entre si, y a una pared vertical.



(c).



(d)

## 2.4 Sistemas estáticamente indeterminados

- Las estructuras indeterminadas (*hiperestáticas*) son aquellas en las que la cantidad de incógnitas es superior a las ecuaciones de equilibrio estático.
- La ecuación que especifica las condiciones para el desplazamiento se conoce como una *condición de compatibilidad* o *condición cinemática*.
- Las reacciones de soporte para problemas estáticamente indeterminados se determinan satisfaciendo los requisitos de equilibrio, compatibilidad geométrica y relación de carga–desplazamiento (Eq. (2.1)).
- Se deben emplear las ecuaciones de compatibilidad geométrica de deformaciones y las de fuerzas y desplazamientos (o leyes constitutivas del material como  $\delta = \frac{LF}{AE}$ ).



● **Ejemplo 2.2 (cont.):** Ejercicio 1.4 - TP1.

- b) **Calcular** el desplazamiento del punto  $D$  debido a la carga.  
 c) Comparar las expresiones resultantes así como los valores del desplazamiento y de la deformación axial.

Estimado	Calculado
$\alpha = 6,0348 \times 10^{-4}$	$\alpha = 6,0363 \times 10^{-4}$
$\hat{\varphi} = 0,7851$	$\varphi = 0,7851$
$\hat{\varepsilon}_1 = 2,7719 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 2,7719 \times 10^{-4}$
$\hat{\varepsilon}_2 = 4,9000 \times 10^{-5}$	$\varepsilon_2 = 4,8998 \times 10^{-5}$
$\hat{\delta}_1 = 1,1760mm$	$\delta_1 = 1,1763mm$
$\hat{\delta}_2 = 1,4700 \times 10^{-4}m$	$\delta_2 = 1,4699 \times 10^{-4}m$
$\hat{\Delta}_D = 1,8163mm$	$\Delta_D = 1,8168mm$

- Relaciones entre deformaciones estimadas y las obtenidas teniendo en cuenta las restricciones cinemáticas reales

$$\varepsilon_1 = \frac{\hat{\varepsilon}_1}{1 - \hat{\varepsilon}_1} = \hat{\varepsilon}_1[1 + \hat{\varepsilon}_1 + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon}_1^2)],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2}{1 + \hat{\varepsilon}_2} = \hat{\varepsilon}_2[1 - \hat{\varepsilon}_2 + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon}_2^2)].$$

## 2.5 Idealizaciones más comunes

- En ocasiones, el *principio de superposición* se utiliza para simplificar los problemas de esfuerzo y desplazamiento con cargas complicadas. Esto se hace mediante la subdivisión de la carga en sus componentes, para después sumar los resultados algebraicamente.
- La superposición requiere que la carga se relacione linealmente con el esfuerzo o el desplazamiento, y que la carga no cambie de manera significativa la geometría original del elemento.
- Un problema es *estáticamente indeterminado* si las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar todas las reacciones en un elemento.
- Las *condiciones de compatibilidad* especifican las restricciones de desplazamiento que se producen en los soportes u otros puntos de un elemento.

# Procedimiento de análisis

[R. Hibbeler, Mecánica de Materiales. pp. 138, 8va Ed., 2011]

- Las reacciones en los apoyos para **problemas estáticamente indeterminados** se calculan al satisfacer los requerimientos de equilibrio, compatibilidad y fuerza-desplazamiento para el elemento.



La mayoría de las columnas de concreto están reforzadas con barras de acero; y como estos dos materiales trabajan juntos para soportar la carga aplicada, las fuerzas en cada material se vuelven estáticamente indeterminadas.

# Procedimiento de análisis

[R. Hibbeler, *Mecánica de Materiales*. pp. 138, 8va Ed., 2011]

- **Equilibrio.**

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre del elemento a fin de identificar todas las fuerzas que actúan sobre él.
- El problema se puede clasificar como estáticamente indeterminado si el número de reacciones desconocidas en el diagrama de cuerpo libre es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio disponibles.
- Escriba las ecuaciones de equilibrio para el elemento.

- **Compatibilidad.**

- Considere dibujar un diagrama de desplazamiento a fin de investigar la forma en que los elementos se alargan o contraen al ser sometidos a las cargas externas.
- Expresé las condiciones de compatibilidad en términos de los desplazamientos causados por la carga.

- **Carga-desplazamiento.**

- Use una relación carga-desplazamiento, como  $\delta = PL/AE$ , para relacionar los desplazamientos desconocidos con las reacciones.
- Despeje las reacciones de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Si alguno de los resultados tiene un valor numérico negativo, entonces la fuerza actúa en sentido contrario al de la dirección indicada en el diagrama de cuerpo libre.

# Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Russel C. Hibbeler (2011).

Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

# Fin

