

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 2C

## Formulación Matemática de la Elasticidad Lineal

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
*dmillan@fcai.uncu.edu.ar*

San Rafael–Argentina, agosto de 2019



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



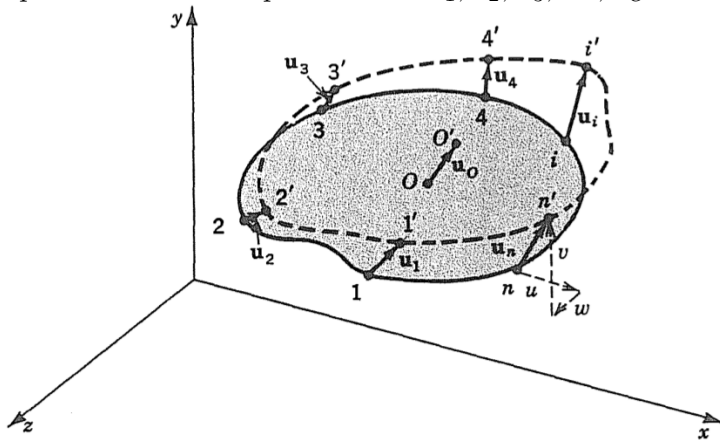
FACULTAD DE  
**CIENCIAS APLICADAS  
A LA INDUSTRIA**

- 2 2. Deformación
  - 2.1 Análisis de deformación
  - 2.2 Definición de las componentes de deformación
  - 2.3 Relación entre deformación y desplazamiento para un estado plano de deformación
  - 2.4 Componentes de deformación para ejes arbitrarios
  - 2.5 Círculo de Mohr del estado plano de deformación

## 2.1 Análisis de deformación

- Hasta ahora hemos considerado el equilibrio de fuerzas en un punto dentro de un cuerpo bajo tensión. Los resultados que hemos obtenido se basan únicamente en los requisitos de equilibrio y son igualmente ciertos para un cuerpo hipotéticamente “rígido” o para un cuerpo real que se deforma bajo la acción de estrés.
- Nuestro interés son cuerpos reales (sólidos deformables) y, por lo tanto, además de establecer las condiciones impuestas para el equilibrio de fuerzas, *debemos determinar qué restricciones impone el requisito de compatibilidad geométrica sobre la deformación de un cuerpo continuo.*
- **Por deformación geoméricamente compatible, de un cuerpo continuo, nos referimos a aquella en la que no se crean vacíos en el cuerpo.** Esto es un problema relacionado con la geometría e independiente de los requisitos de equilibrio.

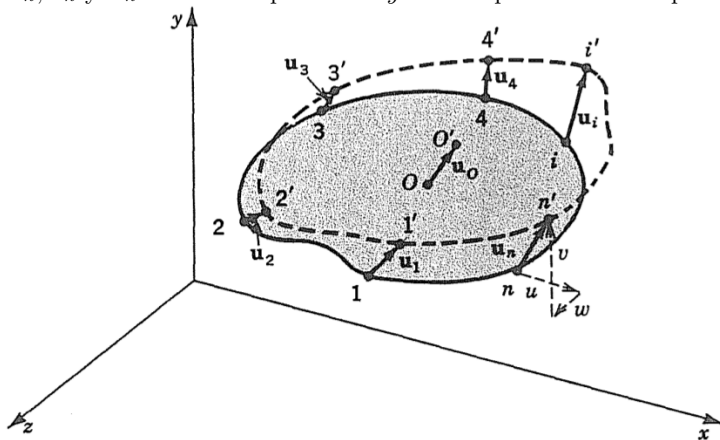
- Consideremos el cuerpo 3D de la figura que sufre un desplazamiento tal que el punto 1 va a 1', el punto 2 a 2', etc.
- Si las partículas de un cuerpo continuo experimentan desplazamiento, podemos representar el desplazamiento de cada punto por vectores de desplazamiento  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_O$ .



- El vector de desplazamiento de cualquier punto puede considerarse como la suma de los desplazamientos de componentes paralelos a un conjunto de ejes de coordenadas adecuados; así, para el punto  $n$  de la figura, podemos escribir

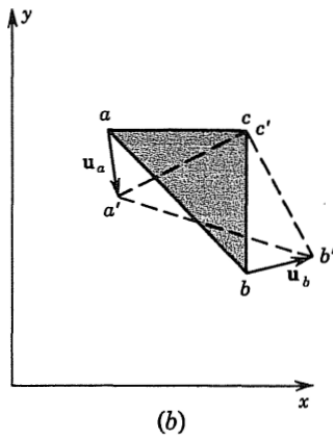
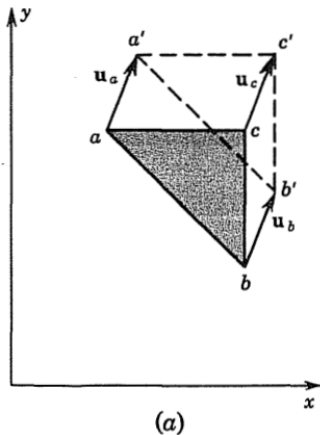
$$\mathbf{u}_n = u_n \mathbf{i} + v_n \mathbf{j} + w_n \mathbf{k},$$

donde  $u_n$ ,  $v_n$  y  $w_n$  son los componentes  $xyz$  del desplazamiento del punto  $n$ .

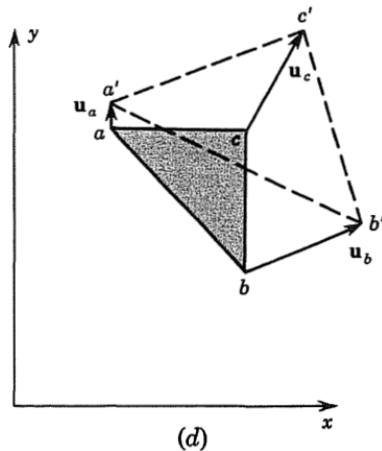
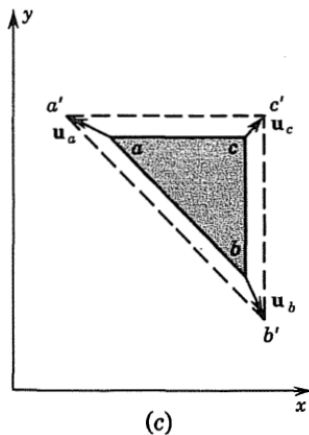


- El desplazamiento de un cuerpo continuo puede considerarse como la suma de dos partes:
  - (1) una traslación y / o rotación del cuerpo como un todo, y
  - (2) un movimiento de los puntos del cuerpo uno respecto al otro.
- La traslación y rotación del cuerpo en su conjunto se denomina movimiento de cuerpo rígido.
- El movimiento de los puntos de un cuerpo entre sí se llama deformación.

- En la figura (a) ilustramos una traslación de cuerpo rígido de un triángulo, que está obligado a moverse solo en el plano  $xy$ .
- En la figura (b) se muestra una rotación de cuerpo rígido alrededor de la esquina  $c$ .



- La figura (c) ilustra un tipo de deformación sin movimiento de cuerpo rígido.
- El desplazamiento de la figura (d) es el resultado de estos tres desplazamientos, como puede verificarse sumando los vectores de desplazamiento de (a), (b) y (c).

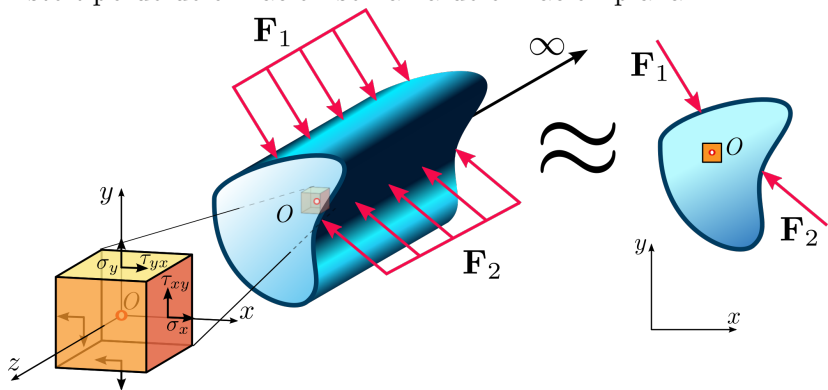




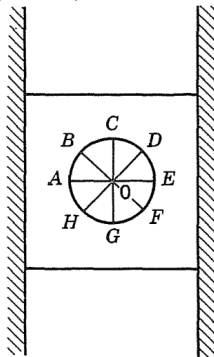
- Los desplazamientos asociados con el movimiento de cuerpo rígido pueden ser grandes o pequeños, mientras que los desplazamientos asociados con la deformación generalmente son pequeños.
- La descripción y el análisis del movimiento de cuerpo rígido es importante para la dinámica, donde las fuerzas requeridas para producir diferentes tasas de movimiento de cuerpo rígido son de interés.
- La descripción y el análisis de la deformación son importantes para el estudio de la mecánica de los cuerpos deformables, donde las fuerzas requeridas para producir diferentes distorsiones son de interés.
- Las secciones restantes de esta Unidad se dedicarán al estudio de la deformación en un punto de un cuerpo continuo.

## 2.2 Definición de las componentes de deformación

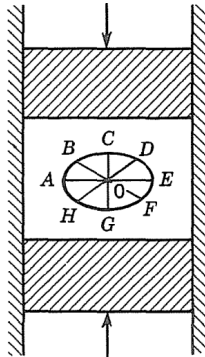
- Consideremos el caso de un cuerpo cuyas partículas se encuentran todas en el mismo plano y que solo se deforma en este plano.
- Este tipo de deformación se llama deformación plana.



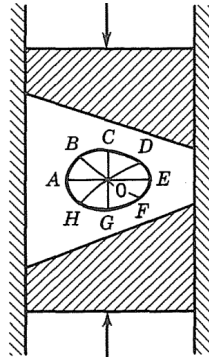
- Sea un delgado bloque de goma que se deforma en su propio plano.
- En (b), los elementos del bloque se han deformado en la misma cantidad, a esto se lo llama un **estado de deformación uniforme**. Además, las líneas rectas permanecen rectas en el estado deformado, aunque pueden haber cambiado su longitud o rotado.
- En (c), los elementos de la derecha se han deformado más que los de la izquierda; a esto se llama un **estado de deformación no uniforme**.



(a)

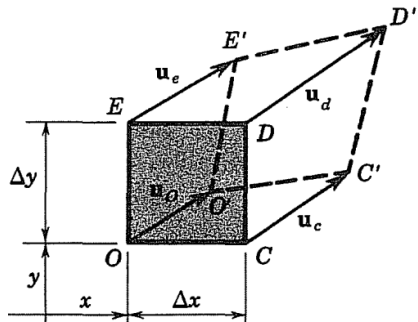


(b)



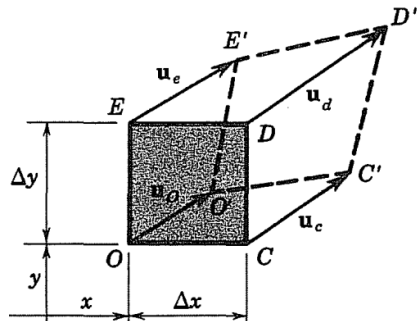
(c)

- Consideremos ahora un cuerpo delgado y continuo que se encuentra completamente en el plano  $xy$  y que sufre una pequeña deformación geoméricamente compatible en el plano  $xy$ .
- Si estudiamos un elemento pequeño del cuerpo, podemos considerar que este elemento está deformado en un estado de deformación uniforme.
- Para el elemento deformado en la figura, expresemos la deformación en la vecindad del punto  $O$  cuantitativamente dando los cambios en la longitud de las dos líneas  $OC$  y  $OE$  y la rotación de estas líneas entre sí.



- Encontraremos conveniente definir cantidades adimensionales que describan estos dos aspectos de la deformación.

- (1) Medida del alargamiento o contracción de una línea, se llama componente de *deformación normal*.
- (2) Medida de la rotación relativa de dos líneas, se denomina componente de *esfuerzo cortante*.



- El componente de *deformación normal* se define como el cambio incremental en la longitud original de una línea y se designa con el símbolo  $\varepsilon$ . Por lo tanto, los valores de  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$  en el punto  $O$  son

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O'C' - OC}{OC}, \quad \varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{O'E' - OE}{OE}.$$

siendo la deformación normal positiva cuando la línea se alarga y negativa cuando la línea se contrae.

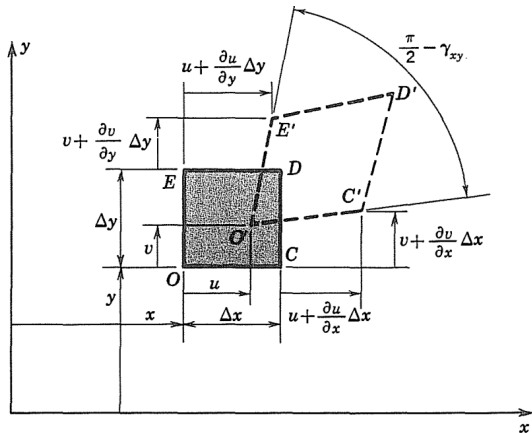
- La *deformación de corte* se especifica con respecto a los ejes que son perpendiculares en el cuerpo no deformado y está designado por el símbolo  $\gamma_{xy}$ . La deformación de corte puede definirse como la tangente del cambio de ángulo entre estos dos ejes originalmente perpendiculares.
- Para la deformación ilustrada en la figura anterior, la deformación de corte  $\gamma_{xy}$  es positiva.
- Para deformaciones de corte pequeñas, en ingeniería menores a 0.01, es adecuado definir ésta en términos del cambio en el ángulo (en radianes) en lugar de en términos de la tangente de este cambio de ángulo. La deformación de corte en el punto  $O$  es

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\angle COE - \angle C'O'E') = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \angle C'O'E' \right).$$

## 2.3 Relación entre deformación y desplazamiento para un estado plano de deformación

- Sea  $u$  el desplazamiento en la dirección  $x$  del punto  $O$ , ver figura, y  $v$  el desplazamiento en la dirección  $y$ , podemos expresar el vector de desplazamiento del punto  $O$  como

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}.$$



- Los componentes de desplazamiento  $u$  y  $v$  deben ser funciones continuas de  $x$  e  $y$  para garantizar que el desplazamiento sea geoméricamente compatible, es decir, para garantizar que el desplazamiento no cree huecos ni agujeros.
- Expresamos los desplazamientos de los puntos  $E$  y  $C$  en términos de los desplazamientos  $u$  y  $v$  del punto  $O$  y sus derivadas parciales.
- Usando las definiciones previamente establecidas, obtenemos las siguientes relaciones de la figura anterior bajo el supuesto de que las deformaciones son pequeñas en comparación con la unidad.

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O'C' - OC}{OC} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}},$$

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{O'E' - OE}{OE} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[\Delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y] - \Delta y}{\Delta y} = \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \angle C'O'E' \right) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} - \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}{\Delta y} \right) \right\} \\ &= \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}. \end{aligned}$$



- Como podemos deducir se tiene que no todo el desplazamiento relativo implica deformación. Es decir, una parte del desplazamiento relativo surge de la rotación del cuerpo rígido.
- Para derivadas de desplazamiento pequeño, la rotación alrededor del eje  $z$  de la línea  $OC$ , por ejemplo, es

$$(\omega_z)_{OC} = \frac{[v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x] - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Del mismo modo, la rotación sobre el eje  $z$  de la línea  $OE$  es

$$(\omega_z)_{OE} = \frac{[u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y] - u}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- Se define la rotación promedio (pequeña) del elemento, como un todo, como el promedio de las rotaciones de los dos segmentos de línea

$$\omega_z = \frac{1}{2}[(\omega_z)_{OC} + (\omega_z)_{OE}] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

- Los componentes de la deformación en términos de los derivadas de desplazamiento se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}}, \quad \boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}, \quad \boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}.$$

- Los componentes de deformación dependen linealmente de las derivadas de los componentes de desplazamiento.
- La derivación desarrollada, para las deformaciones normales y de corte, es válida bajo el **supuesto de pequeñas derivadas de desplazamiento en comparación con la unidad**.
- La derivación anterior remarca el significado geométrico de los componentes de deformación.
- Si se debe trabajar en una situación en la que las grandes deformaciones son importantes, entonces se requiere un conjunto de relaciones de deformación–desplazamiento no lineal. La derivación de las relaciones no lineales generalmente procede de una manera diferente de la dada anteriormente.

- Si ahora pasamos a la notación indicial, podemos escribir los componentes de deformación de manera minimalista como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

donde  $\varepsilon_x = \varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_{22}$  y  $\gamma_{xy} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$ .

- La deformación en los puntos adyacentes al punto  $O$  en general diferirá de la del punto  $O$ .
- El hecho de que dos componentes del desplazamiento sirvan para definir tres componentes de la deformación, indica que los tres componentes de la deformación no pueden variar arbitrariamente en un campo de deformación no uniforme.
- Las condiciones que aseguran que se encontrará un valor único para el desplazamiento, en cualquier punto a partir del conocimiento de las deformaciones, se denominan condiciones de compatibilidad. (Estas condiciones no se derivarán aquí.)

- **Ejercicio:** derive la condición de compatibilidad 2D de *Saint-Venant* . La diferenciación repetida de estas relaciones, para eliminar los desplazamientos  $u_1$  y  $u_2$ , nos da la condición de compatibilidad bidimensional para las deformaciones

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0.$$

# Resumen

- En un problema plano en el que se producen las componentes de desplazamiento  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  en las direcciones  $x, y$ , respectivamente, hay tres deformaciones unitarias independientes, dos longitudinales y una angular, expresadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

- Las relaciones entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos se basan en la hipótesis de que los desplazamientos y las deformaciones son pequeños

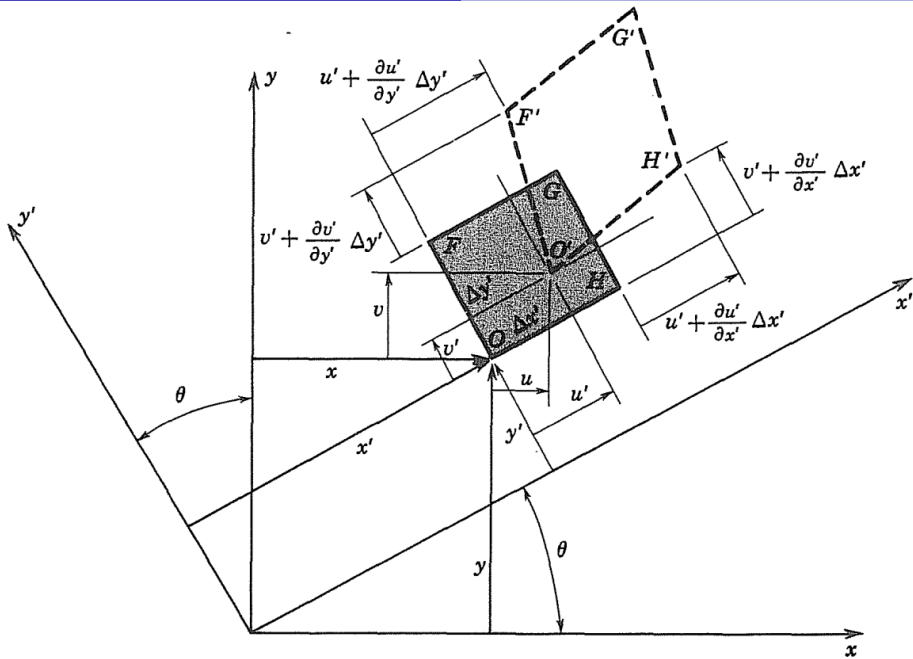
$$\|\mathbf{u}\| \ll 1, \quad \|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1. \quad (\text{principio de rigidez})$$

- Para poder resolver el problema inverso, es decir, para poder hallar los desplazamientos  $u, v$  dadas  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ , éstas deben cumplir la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0.$$

## 2.4 Componentes de deformación para ejes arbitrarios

- En esta sección examinamos más a fondo el problema de la compatibilidad geométrica en un punto y determinamos las relaciones que deben existir entre los componentes de deformación asociados con los ejes que no son perpendiculares entre sí.
- Análogamente a lo desarrollado para el tensor de tensiones, en un estado plano el tensor de deformación se transforma al girar el sistema de referencia  $x, y$  y pasar a ser  $x', y'$ .



- **Ejercicio:** mostrar que el estado plano de deformación asociado con diferentes conjuntos de ejes perpendiculares, en deformación plana, se expresa como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

- Cuya representación circular es

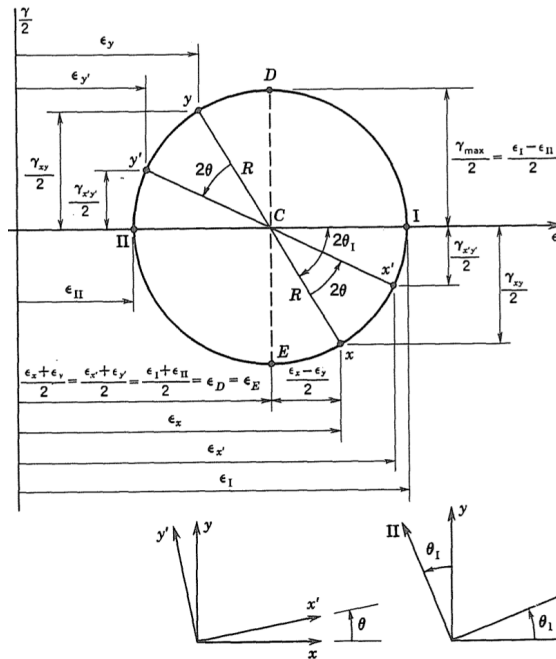
$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta.\end{aligned}$$

- Las ecuaciones anteriores definen las condiciones que la compatibilidad geométrica impone a los componentes de deformación asociados con diferentes conjuntos de ejes perpendiculares en deformación plana: si se especifican los componentes de deformación  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  y el ángulo  $\theta$ , los componentes de deformación  $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{x'y'}$  están completamente determinados.



## 2.5 Círculo de Mohr del estado plano de deformación

- Si observamos las expresiones para la tensión y para la deformación expresadas en función del ángulo doble, vemos que son similares si sustituimos  $\varepsilon$  por  $\sigma$  y  $\gamma/2$  por  $\tau$ . Lo cual nos lleva a emplear el círculo de Mohr para representar un estado plano de deformación.
- De la misma forma que en el caso del tensor de tensión es posible para el tensor de deformación unitaria determinar ejes principales de deformación, máxima deformación de corte, etc.



# Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).

Resistencia de Materiales. CIMNE, 2015.

# Fin

