

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 3 A

## Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
*dmillan@fcai.uncu.edu.ar*

San Rafael–Argentina, setiembre de 2019



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE  
**CIENCIAS APLICADAS  
A LA INDUSTRIA**

# Contenido

- 1 1. Coeficiente de seguridad
- 2 2. Principios de la Resistencia de Materiales
  - 2.1 Principio de rigidez
  - 2.2 Principio de superposición
  - 2.3 Principio de Saint-Venant
  - 2.4 Restricciones geométricas
- 3 3. Estados planos de tensión y deformación
  - 3.1 Estados planos en coordenadas cartesianas
  - 3.2 Función de Airy
  - 3.3 Soluciones de la función de Airy

# 1.1 Introducción

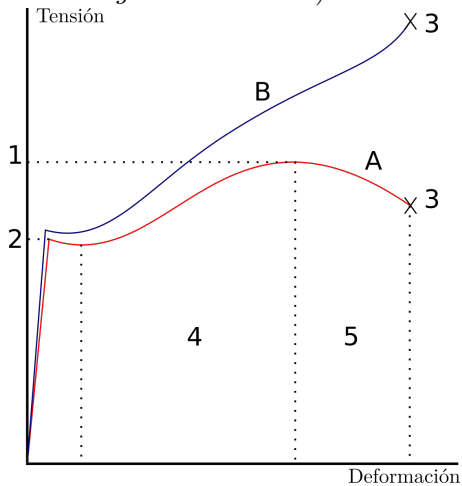
- A lo largo de su vida útil, las estructuras se ven sometidas a acciones y cargas permanentes, variables o excepcionales que pueden producir fallos estructurales totales o parciales.
- El requisito de seguridad exigible a las estructuras que se proyectan y se construyen conlleva la definición de un valor superior de la tensión que el material puede alcanzar sin que exista riesgo de que se produzca un fallo estructural.
- En ingeniería, arquitectura y en ciencias aplicadas, es común, y en algunos casos imprescindible, que el dimensionado de elementos o componentes de maquinaria, estructuras constructivas, instalaciones o dispositivos en general, incluyan un coeficiente de seguridad que garantice que bajo desviaciones aleatorias de los requerimientos previstos, exista un margen extra de prestaciones por encima de las mínimas estrictamente necesarias.

## 1.1 Tensión límite

- Se define tensión límite,  $\sigma_{\text{lim}}$ , como aquel valor de la tensión al cual el material alcanza su límite de resistencia, y por debajo del cual no se producen ni deformaciones excesivas ni, por supuesto, la rotura del mismo.
- En los materiales dúctiles, tales como el acero, es habitual considerar como tensión límite la tensión de fluencia (  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_f$  ), mientras que en los materiales frágiles, como el hormigón, se suele considerar como tensión límite la tensión de rotura (  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_r$  ).
- Sin embargo, en la práctica, las estructuras se diseñan para trabajar a niveles de tensión significativamente por debajo de la tensión límite de los correspondientes materiales estructurales.

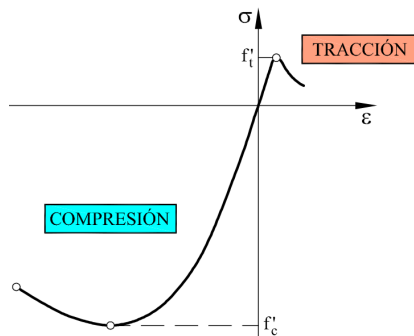
- Curva de Tensión vs. Deformación típica de un acero estructural, A36 ASTM (*American Society for Testing and Materials*).

1. Tensión de rotura
  2. Límite elástico.
  3. Fractura/rotura
  4. Región de endurecimiento inducido por deformación.
  5. Región de *necking*.
- A. curva tensión-deformación de ingeniería.  
B. curva tensión-deformación verdadera.



- Los materiales frágiles exhiben comportamientos muy diferentes según estén solicitados a tracción o a compresión.
- Por ejemplo, el hormigón y la mayoría de las rocas naturales, ver figura, tienen un comportamiento:

1. muy frágil a tracción con una resistencia relativamente baja.
2. mucho más dúctil a compresión, aunque sin mostrar una zona clara de fluencia, del orden de 10 veces mayor, tal como se muestra en la figura.



- Los motivos para esta práctica son varios, y fundamentalmente debidos a la existencia de incertidumbres en la fase de diseño:
  - *incertidumbres asociadas a la caracterización de las propiedades mecánicas de los materiales*, debidas a la calidad y homogeneidad del material, a la dispersión en los ensayos experimentales, a la adecuación de éstos a las condiciones reales de servicio, a fenómenos de fluencia y relajación, degradación debida a causas físicas o químicas, a efectos cíclicos o dinámicos, fatiga, etc.
  - *incertidumbres asociadas a la definición y caracterización de las acciones*, ya sea por la insuficiencia de datos para estimarlas (efectos climáticos y ambientales, efectos sísmicos), por su insuficiente definición en la fase de proyecto (cargas de servicio o cargas excepcionales), por la variabilidad temporal de su naturaleza, por el desconocimiento de su evolución durante la vida útil de la estructura, etc.
  - *incertidumbres asociadas a los métodos de cálculo*, ya sea por las hipótesis simplificativas adoptadas en las bases de cálculo, por la propia naturaleza de los métodos de análisis o por la dificultad asociada a éstos en caso de utilizar métodos sofisticados.

- Los motivos para esta práctica son varios, y fundamentalmente debidos a la existencia de incertidumbres en la fase de diseño (*cont.*):
  - *incertidumbres asociadas a los métodos de construcción*, y que pueden estar relacionadas con el proceso constructivo previsto, los procedimientos de ejecución y de control de calidad empleados, etc.
  - *incertidumbres asociadas a los métodos de conservación y mantenimiento*, que pueden reflejarse en fenómenos de degradación progresiva, corrosión, agresiones ambientales, etc.



## 1.2 Tensión admisible

- En consecuencia, se define la *tensión admisible*,  $\sigma_{\text{adm}}$ , como:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n} \leq \sigma_{\text{lim}},$$

donde  $\sigma_{\text{lim}}$  es la tensión límite del material y  $n$  es un coeficiente mayor (o excepcionalmente igual) que la unidad denominado **coeficiente de seguridad**.

- Las estructuras se diseñan, por tanto, con el criterio de que la tensión en cualquier punto sea inferior al valor de la tensión admisible; es decir, si  $\sigma_{\text{max}}$  es el valor máximo de la tensión en la estructura, debe cumplirse que

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{adm}} \leq \sigma_{\text{lim}}.$$

## 1.3 Coeficiente de seguridad

- En los cálculos de resistencia mecánica, el factor o coeficiente de seguridad se aplica principalmente de dos maneras:
  - (1) Multiplicando el valor de las solicitaciones o fuerzas que actúan sobre un elemento resistente por un coeficiente mayor a uno (coeficiente de mayoración). En este caso se calcula como si el sistema fuera solicitado en mayor medida de lo que se espera que lo sea en la realidad.
  - (2) Dividiendo las propiedades favorables del material que determinan el diseño por un número mayor que uno (coeficiente de minoración). En este caso se modela el material como si fuera peor de lo que se espera que sea.
- En ambos casos el resultado es un *sobredimensionamiento del componente*.
- La determinación del coeficiente de seguridad depende de un gran número de factores, pero éste debe ser mayor cuanto mayor sea el grado de incertidumbre o cuanto mayor sea el impacto, en términos socio-económicos, que acarrearía un eventual fallo estructural.

- Los valores usados como factores de seguridad, por lo general, provienen de la experiencia empírica o práctica, por lo cual están tabulados y contemplados en las normas o la literatura, o bien se aplican según la experiencia personal del diseñador.
- El coeficiente de seguridad puede reducirse en estructuras de poca complejidad o de vida útil reducida.
  - En general, para el mismo tipo de elemento dependerán del tipo de uso o servicio que se le piense dar y de la posibilidad de riesgo derivada para usuarios y terceras personas.  
*Por ejemplo*, para una máquina de uso continuo se usará un factor de seguridad mayor que para una de uso esporádico.
  - En resistencia de materiales se aplicarán diferentes coeficientes de seguridad dependiendo del uso del componente.  
*Por ejemplo*, en el cálculo de dimensionamiento de la sección de un cable para tender la ropa se utilizará un coeficiente de seguridad inferior al utilizado para ese mismo cable cuando se estudia su empleo para sustentar un ascensor.

- En edificación e ingeniería de la construcción se usan coeficientes de seguridad entre 2 y 5, adoptándose valores más altos para la construcción in situ que para la prefabricación.
- En ingeniería aeronáutica se usan, necesariamente, coeficientes de seguridad menores, entre 1.5 y 2, pero asociados a métodos de análisis, construcción, conservación y control más complejos.
- En el diseño de aparatos a presión, según la norma AD-Merkblatter, en el cálculo de espesor, se aplica un coeficiente de seguridad de 1.50 para presiones de diseño, y un coeficiente de seguridad de 1.10 para presiones de prueba. La tensión que toma la mencionada norma para los cálculos es la tensión de fluencia del material a la temperatura de trabajo. En este caso usamos el método 2, o sea, reducir la tensión a utilizar en los cálculos.
- En el caso del dimensionamiento de la pared de una tubería se suele aplicar, entre otros, un coeficiente de seguridad por corrosión del orden de 1.2. Al resultado del cálculo del espesor se lo multiplica por 1.2, obteniéndose un espesor mayor. En este caso utilizamos el método 1.

- **Ejercicio:** Analice cualitativamente el caso de un ascensor, en el que se indique como carga de uso una carga máxima de 320 kg ó 4 personas y que esté diseñado con un factor de seguridad de 1.5. Este último será desconocido por el usuario por razones de seguridad.

**Rta:** Dado que el coeficiente de seguridad es 1.5, realmente el ascensor aguantará hasa 480 kg. Al aplicar el coeficiente de seguridad dividiendo 480 kg por 1.5, obtenemos los 320 kg que es la carga de uso o de diseño. Es decir el coeficiente se aplica sobre la carga máxima de rotura del dispositivo (método 2). Si el ascensor se carga con 480 kg, que es su carga máxima calculada, los cables se romperían o estarían muy próximos a romperse.

## 2. Principios de la Resistencia de Materiales

- La Resistencia de Materiales puede considerarse como aquella parte de la Mecánica de Sólidos Deformables que resulta de aplicar la Teoría de la Elasticidad a un tipo restringido de problemas que se plantean en el día a día de la Ingeniería Estructural para posibilitar su resolución de forma analítica.
- Estos problemas vienen definidos, fundamentalmente, por:
  - ① *Restricción en la definición del problema elástico.* La Resistencia de Materiales se aplica a piezas prismáticas (vigas, columnas, barras, ejes, etc.) que están apoyadas, articuladas o empotradas y sometidas a la acción de fuerzas puntuales o repartidas, descensos de apoyos, cargas térmicas, etc.
  - ② *La adopción de ciertas hipótesis fundamentales.* Estas hipótesis permiten, por un lado, definir un problema lineal y, por otro, abordar un problema inicialmente tridimensional (las piezas tienen longitud, altura y anchura) como un “ensamblaje” de problemas básicamente unidimensionales (las piezas se representan como líneas).

- La Resistencia de Materiales, como parte integrante de la Mecánica de Estructuras, tiene como objetivo fundamental determinar la respuesta de las estructuras cuando éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil.
- Por “respuesta estructural” se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran.
- La determinación de los *estados de tensión* es necesaria para comprobar la satisfacción de los *criterios de resistencia* que establecen las correspondientes normativas y los usos de buena práctica, de cara a garantizar la seguridad de las estructuras.
- Por su parte, la determinación de los *estados de deformación* suele ser necesaria para satisfacer los *criterios de rigidez*, que están a menudo ligados a requisitos de funcionalidad de las estructuras.

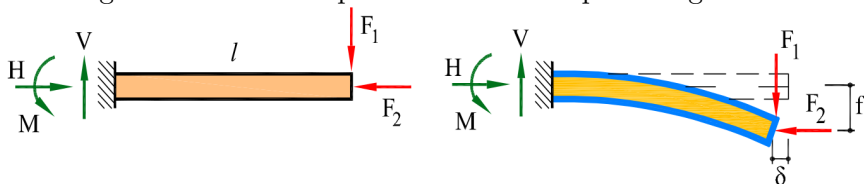
- La Resistencia de Materiales pretende establecer las condiciones de **resistencia y rigidez** de las estructuras analizadas.
- Ambos aspectos se abordan en los dos tipos de problemas fundamentales que se plantean en la práctica ingenieril: el dimensionamiento y la verificación de estructuras.
- La Resistencia de Materiales es una disciplina que se basa en tres principios o hipótesis fundamentales:
  1. el Principio de Rigidez,
  2. el Principio de Superposición,
  3. y el Principio de Saint-Venant.
- La validez de los resultados obtenidos mediante esta teoría depende, básicamente, del grado de satisfacción de estos principios en el caso concreto en que se aplique.



## 2.1 Principio de rigidez

- El Principio de rigidez es una consecuencia directa de la hipótesis de pequeños movimientos aplicada al análisis de estructuras y establece que *“las ecuaciones de equilibrio se pueden formular sobre la geometría indeformada, es decir, sin considerar los movimientos provocados por el sistema de cargas”*.
- Esta hipótesis implica que los movimientos de la estructura debidos al sistema de cargas sean pequeños: los desplazamientos, comparados con las dimensiones de la estructura, y los giros (en radianes), comparados con la unidad.
- Si esta condición no se cumple, las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la geometría deformada, y el problema deja de ser lineal para transformarse en un problema geoméricamente no lineal.

- En la figura se ilustra la aplicación del Principio de rigidez.

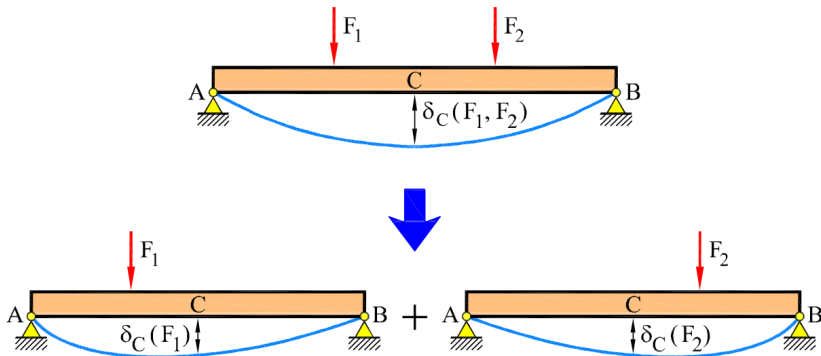


Bajo la hipótesis de pequeños movimientos (izquierda), las reacciones en el empotramiento sólo dependen de la geometría inicial y de las cargas ( $M = F_1 l$ ); sin ella (derecha), las reacciones dependen de la deformación de la estructura ( $M = F_1(l - \delta) + F_2 f$ ), y ésta es desconocida *a priori*.

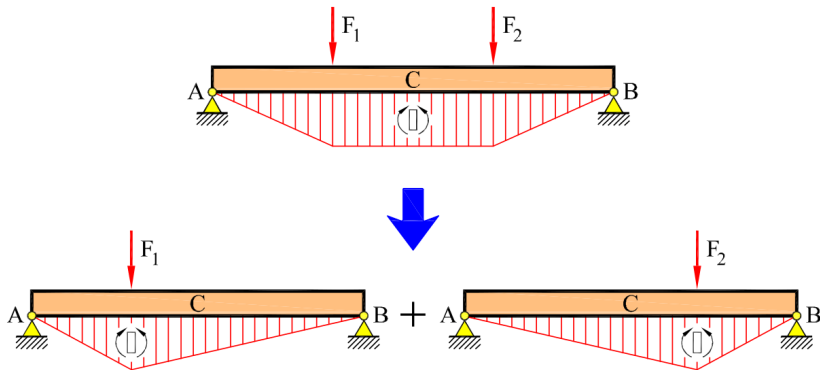
## 2.2 Principio de superposición

- Cuando es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos y se cumple la ley de Hooke, entonces el problema elástico es lineal.
- La resolución de un problema estructural lineal es mucho más sencillo que la de uno no lineal; además de otras dificultades de tipo práctico, en un problema no lineal no existe, en general, garantía de que la solución exista y sea única.
- El **Principio de superposición** establece que para un problema lineal, *“los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado”*.
- El principio de superposición implica que las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provoca sobre la estructura el estado de cargas original es igual a la suma de las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provocan los estados en los que éste se descompone.

- En la figura se muestra una viga biapoyada sobre la que actúa un sistema de carga consistente en dos fuerzas puntuales; este sistema puede descomponerse en los dos sistemas más simples de la parte inferior de la figura a efectos, por ejemplo, de calcular la flecha vertical en el punto  $C$ .



- En la viga biapoyada de la figura el momento flector debido al sistema de cargas  $F_1 + F_2$  es igual a la suma del momento flector debido a  $F_1$  más el debido a  $F_2$ , actuando separadamente.

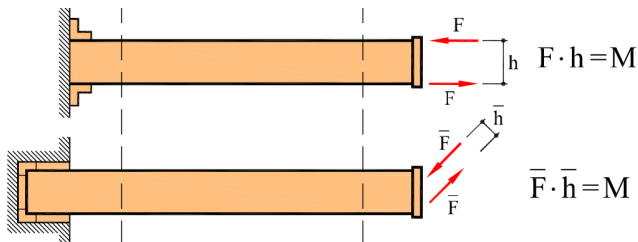


- Una consecuencia inmediata del citado principio es que el estado final (tensional y deformacional) de una estructura sometida a un sistema de fuerzas no depende del orden de aplicación de dichas fuerzas.
- Esto permite, por ejemplo, analizar el caso de una sollicitación compleja descomponiéndola en casos más simples de estudiar.
- Es posible, asimismo, la definición y el análisis de estados de carga de interés como combinación de estados de carga previamente definidos y analizados.
- Ambas posibilidades son utilizadas frecuentemente en Resistencia de Materiales.

## 2.3 Principio de Saint-Venant

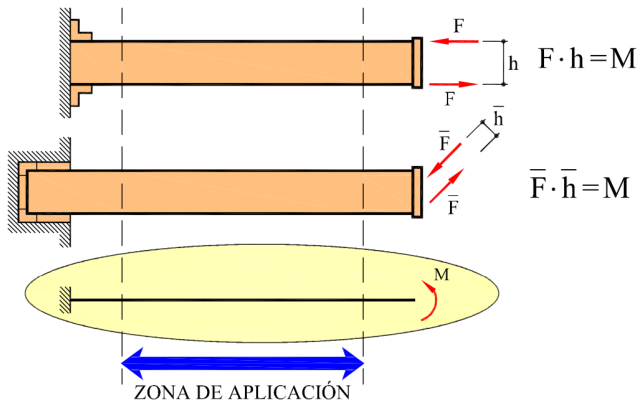
- El **Principio de Saint-Venant** puede considerarse la verdadera piedra angular de la Resistencia de Materiales, ya que establece que *“en una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada”*.
- Esta hipótesis implica que los efectos locales (fuerzas concentradas, apoyos, variaciones de sección) sólo afectan a una zona localizada a uno y otro lado de las secciones en que se producen.
- La forma precisa en que se aplican las cargas o los dispositivos empleados para aplicarlas, así como la disposición de los aparatos de apoyo, sólo afectan al estado tensional de esta zona localizada, de una longitud aproximadamente igual al canto de la pieza.
- El estudio tensional de las zonas afectadas por los efectos locales es complejo y debe hacerse mediante la Teoría de la Elasticidad.

- En la figura se muestran dos ejemplos de voladizos con momento aplicado en sus extremos libres.
- En el primer caso, el empotramiento se consigue apoyando la viga contra el soporte y coartando el giro mediante sendos angulares soldados a ambos; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas horizontales.
- En el segundo caso, el empotramiento se consigue encastrando adecuadamente la viga en el soporte; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas inclinadas respecto al eje de la viga.
- En ambas situaciones, el momento resultante de las fuerzas actuantes es idéntico, mientras que la resultante de fuerzas es nula.





- A pesar de que las condiciones de empotramiento y de los momentos aplicados son diferentes, su idealización a efectos de cálculo es idéntica, tal como se muestra en la figura.
- Según el Principio de Saint-Venant, las tensiones que aparecen en las zonas centrales de las piezas dependen, exclusivamente, del momento resultante de las fuerzas actuantes; las zonas extremas, por el contrario, se ven afectadas por los efectos locales.



- En la práctica ingenieril, el estudio del estado tensional de un elemento estructural suele hacerse suponiendo que el Principio de Saint-Venant es aplicable a la totalidad de las secciones analizadas. El dimensionamiento de las piezas suele hacerse en función de los resultados así obtenidos.
- *A posteriori*, se adoptan las disposiciones constructivas necesarias para reducir o soportar de forma adecuada los efectos locales en las zonas en las que los resultados calculados en esta forma no son aplicables.

## 2.4 Restricciones geométricas

- Para que los principios fundamentales enunciados se cumplan y los resultados de la Resistencia de Materiales sean válidos, las piezas deben cumplir ciertas condiciones:
  - *Geometría de la directriz.* En piezas de directriz curva, los radios de curvatura de ésta deben ser grandes en relación al canto de las piezas. Si esta relación es suficientemente grande, los efectos de la curvatura pueden llegar a despreciarse en el análisis del comportamiento de las rebanadas y utilizar las expresiones obtenidas para piezas de directriz recta.
  - *Geometría de las secciones:*
    - *Variación.* En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta. Las variaciones bruscas en las características geométricas de las secciones producen efectos locales que invalidan el principio de Saint-Venant.

- Condiciones sobre las piezas (*cont.*)...

- *Geometría de las secciones:*

- *Dimensiones.* Las dimensiones transversales de las piezas, canto y ancho, deben ser pequeñas en relación a su longitud. Esto es necesario para que se cumplan el principio de Saint-Venant y las hipótesis de deformación de las secciones que se utilizan habitualmente. Por otro lado, las características geométricas de las secciones rectas deben asegurar que las piezas tengan la rigidez necesaria para que los movimientos sean pequeños.

En general, son admisibles las relaciones *luz/canto* ( $l/h$ ) siguientes:

10 a 12 para piezas rectas de hormigón armado

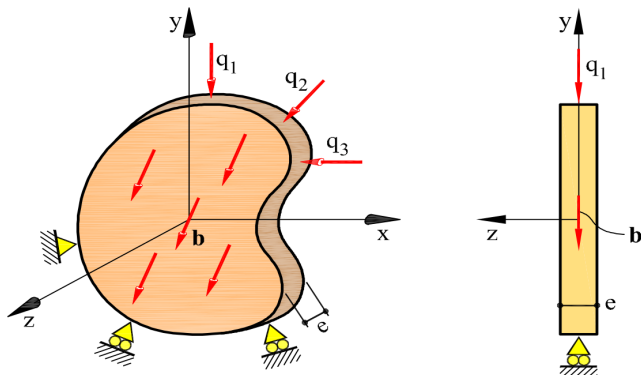
15 a 25 para piezas rectas de hormigón pretensado

20 a 35 para piezas rectas de acero laminado

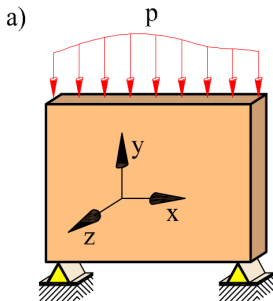
40 a 100 para arcos

### 3. Estados planos de tensión y deformación

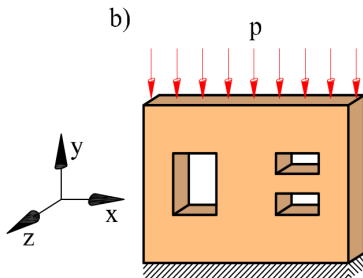
- Una estructura está sometida a un **estado plano de tensiones** cuando una de las dimensiones de la estructura ( $z$ ) es mucho menor que las otras dos ( $x, y$ ) que definen el plano de análisis.
- Además, las cargas externas puntuales  $q_i$  y volumétricas  $\mathbf{b}$  que solicitan la estructura están contenidas en dicho plano ( $x, y$ ) (ver figura).



- En la figura se muestran dos ejemplos de estructuras bajo estado de tensión plana: (a) una placa o una viga gran canto cargada en su plano medio; (b) una pared cargada según se muestra en la figura.



Viga pared

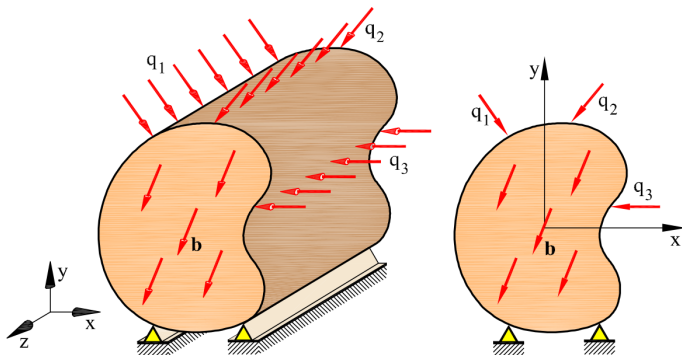


Pared

- En un estado plano de tensiones

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

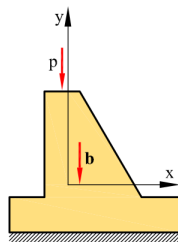
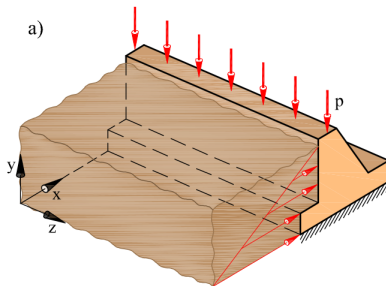
- Una estructura está sometida a un **estado plano de deformaciones** cuando una de sus dimensiones ( $z$ ) es mucho mayor que las restantes ( $x, y$ ) y está sometida a cargas externas puntuales  $q_i$  y volumétricas  $\mathbf{b}$  perpendiculares al eje de la dimensión mayor (ver figura).



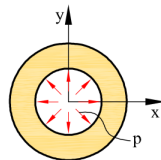
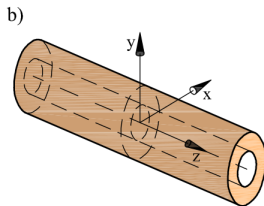
- En un estado plano de deformaciones

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.$$

- En la figura se muestran dos ejemplos de estructuras bajo estado de deformación plana: (a) muro de contención y (b) tubería bajo presión interna y/o externa.



Sección recta del muro



Sección recta de la tubería



## 3.1 Estados planos en coordenadas cartesianas

- Al considerar el problema bidimensional, las ecuaciones que relacionan tensiones con deformaciones (ley de Hooke generalizada) obtenidas para el caso general tridimensional se reducen en un estado plano a:

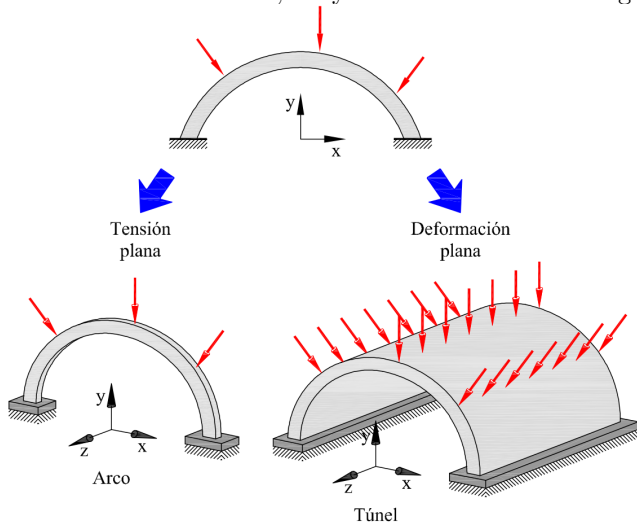
$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{\widetilde{E}}(\sigma_x - \widetilde{\nu}\sigma_y), & \sigma_x &= \frac{\widetilde{E}}{1 - \widetilde{\nu}^2}(\varepsilon_x - \widetilde{\nu}\varepsilon_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\widetilde{E}}(\sigma_y - \widetilde{\nu}\sigma_x), & \sigma_y &= \frac{\widetilde{E}}{1 - \widetilde{\nu}^2}(\varepsilon_y - \widetilde{\nu}\varepsilon_x),\end{aligned}$$

siendo  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

- Donde la ley de Hooke generalizada para las expresiones anteriores se debe calcular teniendo en cuenta las siguientes relaciones

	Tensión plana	Deformación plana
$\tilde{\nu}$	$\nu$	$\frac{\nu}{1 - \nu}$
$\tilde{E}$	$E$	$\frac{E}{1 - \nu^2}$
$\sigma_z$	0	$\frac{\nu E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)$
$\varepsilon_z$	$-\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$	0

- De la comparación de las expresiones obtenidas para los estados de tensión y deformación plana se observa que ambos son muy similares una vez la atención se centra sobre el plano de análisis (el plano  $xy$ ).
- Se debe resaltar que fuera de dicho plano (a lo largo del eje  $z$ ) la realidad es muy diferente en ambos casos, tal y como se ilustra en la figura.



## 3.2 Función de Airy

- El planteamiento del problema elástico para un estado de elasticidad plana en ausencia de fuerzas de volumen conduce a unas ecuaciones algo más sencillas de lo habitual para que la que puede aplicarse tanto el método de la función de tensiones de Airy como los métodos de variable compleja, para hallar una solución.
- En primer lugar las ecuaciones de equilibrio se reducen a solo dos ecuaciones independientes:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

- Mientras que las ecuaciones de compatibilidad se reducen a una única ecuación independiente:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2)$$

- **Función de tensiones de Airy**

- En las condiciones anteriores puede probarse que la solución del sistema formado por (1) y (2) sobre un cierto dominio plano, simplemente conexo, puede expresarse en función de una función biarmónica sobre dicho dominio, siendo las tensiones expresables en función de esta única función biarmónica:

$$\nabla^4 \phi = 0, \quad \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}.$$

Además se cumple que:

$$\nabla^2 \phi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

- Además, es posible probar que toda función real que satisface las ecuaciones anteriores se puede expresar en términos de dos funciones armónicas holomorfas:

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\psi(z) + \chi(z)\}, \quad z = x + iy.$$

- **Ejercicio:** *Two-dimensional biharmonic PDE.*

Obtain a scalar partial differential equation for 2D elasticity problems with no body forces whose only unknown is the stress function (Hint: replace the stresses in the Beltrami-Michell equations for 2D (plane strain or stress) with no body forces in terms of the Airy stress function. The final result should be:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0$$

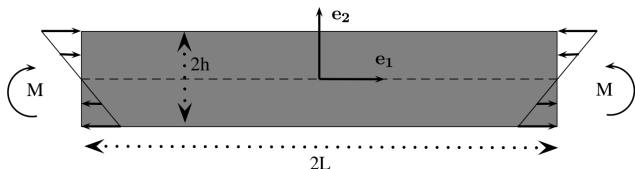
This can also be written using the  $\nabla$  operator as:

$$\nabla^4 \phi = \left( \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}}_{\nabla^2} \right)^2 \phi.$$

## 3.3 Soluciones de la función de Airy

- Ejercicio:** *Pure bending of a beam.*

Consider the stress function  $\phi = A x_2^3$ . Show that this stress function corresponds to a state of pure bending of a beam of height  $2h$  and length  $2L$  subject to a bending moment  $M$  as shown in the figure.



Shows that the displacement field is

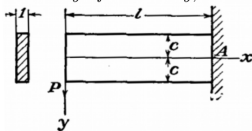
$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{3M}{2Eh^3}x_1x_2,$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{3M}{4Eh^3}(x_1^2 + \nu x_2^2 - L^2).$$

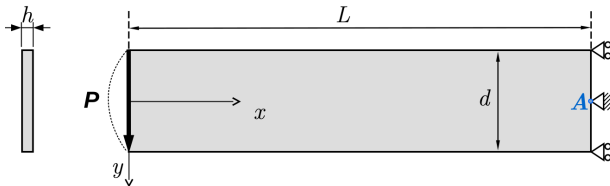
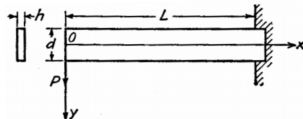
● **Ejercicio:** *Bending of a Cantilever Loaded at the End.*

Obtain the solution of a cantilever beam of narrow rectangular cross section under an end load  $P$ . With its width  $h$  small compared with the depth  $d$ , the loaded beam may be regarded as an example in plane stress. The boundary conditions are that the upper and lower edges are free from load and shearing forces, having a resultant  $P$ , are distributed along the end  $x = 0$ . If  $P$  is large compared with  $\rho g$ , the gravitational force can be neglected.

Timoshenko & Goodier,  
*Theory of Elasticity*, 1951



Wang, *Applied Elasticity*, 1953





- **Ejercicio (cont):** *Bending of a Cantilever Loaded at the End.*

Noting that  $I = d^3h/12$  is the moment of inertia of the cross section, the final expressions for the stress components are

$$\sigma_x = -\frac{Px}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right). \quad (3)$$

### Timoshenko & Goodier:

It should be noted that this solution represents an exact solution only if the shearing forces on the ends are distributed according to the same parabolic law as the shearing stress  $\tau_{xy}$  and the intensity of the normal forces at the built-in end is proportional to  $y$ . If the forces at the ends are distributed in any other manner, the stress distribution (3) is not a correct solution for the ends of the cantilever, but, by virtue of Saint-Venant's principle, it can be considered satisfactory for cross sections at a considerable distance from the ends.

● **Ejercicio:** *Bending of a Cantilever Loaded at the End.*

Verifique que las soluciones obtenidas por Timoshenko y Goodier son equivalentes a las de Wang, ver Figuras en problema anterior.

Timoshenko & Goodier:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6GI} + \left( \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \right) y,$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Wang:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + \frac{Py^3}{3EI} \left( 1 + \frac{\nu}{2} \right) + \frac{P}{2EI} \left( L^2 - (1 + \nu) \frac{d^2}{2} \right) y,$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}.$$

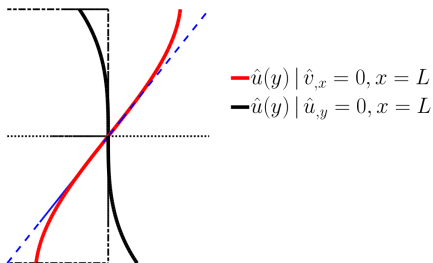
- **Ejercicio:** *Bending of a Cantilever Loaded at the End.*

Grafique en Octave las configuraciones deformadas de la viga, analice la solución en la sección que se encuentra fijada, determine el punto que experimenta el desplazamiento máximo. Tome  $L = 1$ ,  $d = 0.1$  y  $\nu = 0.4$ .

- *Hint 1:* trabaje con las variables adimensionales

$$\hat{u} = \frac{uEI}{PL^3}, \quad \hat{v} = \frac{vEI}{PL^3}.$$

- *Hint 2:* Fig. 27, pág. 39, Timoshenko & Goodier, 1951.



### Timoshenko & Goodier:

The fixed section is usually not free to distort and the distribution of forces at this end is different from that given by Eqs. (3). Solution (3) is, however, satisfactory for comparatively long cantilevers at considerable distances from the terminals.

# Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).

Resistencia de Materiales. Barcelona, CIMNE, 2015.



Timoshenko, Stephen; J N. Goodier (1951).

Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.



Wang, Chi-Teh. (1953).

Applied Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1953.

# Fin

