

Mecánica de los Sólidos – Unidad 1A

Principios fundamentales y Diagramas de Esfuerzos

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2019

Contenido

- 1 1. Principios fundamentales de mecánica
 - 1.1 Introducción
 - 1.2 Concepto de fuerza
 - 1.3 Concepto de Momento
 - 1.4 Condiciones de equilibrio

- 2 2. Mecánica de cuerpos deformables
 - 2.1 Análisis de cuerpos deformables
 - 2.2 Esfuerzo y deformación axial de una barra
 - 2.3 Sistemas estáticamente determinados
 - 2.4 Sistemas estáticamente indeterminados
 - 2.5 Idealizaciones más comunes

Mecánica de sólidos [wiki, google, web, etc]

- La mecánica de sólidos es el estudio de cuerpos formados por partículas que se imponen restricciones de movimiento las unas a las otras.
- Comprende dos tipos de problemas muy diferentes:
 - La mecánica del sólido rígido.
 - La mecánica de sólidos deformables.

Mecánica de sólidos

- La mecánica del sólido rígido.
 - Es aquella que estudia el movimiento y equilibrio de sólidos materiales ignorando sus deformaciones.
 - Se entiende por sólido rígido un conjunto de puntos del espacio que se mueven de tal manera que no se alteran las distancias entre ellos, sea cual sea la fuerza actuante (el movimiento de un sólido rígido viene dado por un grupo uniparamétrico de isometrías).
 - Es decir, consiste en un modelo matemático útil para estudiar una parte de la mecánica de sólidos, ya que todos los sólidos reales son deformables.
- La mecánica de sólidos deformables.
 - La mecánica de sólidos deformables estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos deformables ante diferentes tipos de situaciones, como la aplicación de cargas o efectos térmicos.
 - Estos comportamientos, más complejos que el de los sólidos rígidos, se estudian en mecánica de sólidos deformables introduciendo los conceptos de deformación y de tensión mediante sus aplicaciones de deformación [este curso].

Tipos de sólidos deformables

- Los sólidos deformables difieren unos de otros en su ecuación constitutiva.
- Según sea la ecuación constitutiva que relaciona las magnitudes mecánicas y termodinámicas relevantes del sólido, se tiene la siguiente clasificación para el comportamiento de sólidos deformables:
 - Comportamiento elástico.
 - Comportamiento plástico.
 - Comportamiento viscoso.

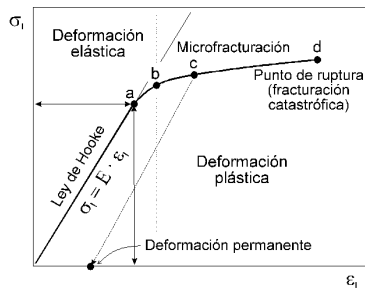
Tipos de sólidos deformables

- Comportamiento elástico.

- Se da cuando un sólido se deforma adquiriendo mayor energía potencial elástica y, por tanto, aumentando su energía interna sin que se produzcan transformaciones termodinámicas irreversibles.
- La característica más importante del comportamiento elástico es que es **reversible**: si se suprimen las fuerzas que provocan la deformación el sólido vuelve al estado inicial de antes de aplicación de las cargas.

- Comportamiento plástico.

- Existe irreversibilidad; aunque se retiren las fuerzas bajo las cuales se produjeron deformaciones elásticas, el sólido no vuelve exactamente al estado termodinámico y de deformación que tenía antes de la aplicación de las mismas. [Ej. carga/descarga]



Tipos de sólidos deformables

- Comportamiento viscoso.
 - Se produce cuando la velocidad de deformación entra en la ecuación constitutiva. Típicamente para deformar con mayor velocidad de deformación es necesario aplicar más tensión que para obtener la misma deformación con menor velocidad de deformación, pero aplicada más tiempo. [Ej. pantano, espuma viscoelástica de poliuretano].
 - Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Memory_foam.



Espuma de *memory foam* rápida.



Espuma de *memory foam* lenta.

Mecánica Aplicada de Sólidos

- El método general de abordaje para resolver problemas en mecánica aplicada es similar al de cualquier investigación científica.
 - 1 Seleccionar sistema de interés.
 - 2 Características del postulado del sistema. Esto generalmente implica idealización y simplificación de la situación real.
 - 3 Aplicar los principios de la mecánica al modelo idealizado. Deduce las consecuencias.
 - 4 Compare estas predicciones con el comportamiento del sistema real. Esto generalmente implica recurrir a pruebas y experimentos.
 - 5 Si no se logra un resultado satisfactorio, se deben reconsiderar los pasos anteriores. Muy a menudo se avanza alterando los supuestos con respecto a las características del sistema, es decir, construyendo un modelo idealizado diferente del sistema.
- Este curso abordará fundamentalmente los tres primeros pasos y ocasionalmente hará referencia a algún otro si fuera preciso.

Principios fundamentales de Mecánica

- El análisis de un sistema mecánico implica:
 - ① Estudio de fuerzas.
 - ② Estudio del movimiento y la deformación.
 - ③ Aplicación de leyes que relacionan las fuerzas con el movimiento y la deformación.
- Los problemas tratados en este curso generalmente no implicarán un movimiento general. Como consecuencia, **los pasos básicos en el análisis** pueden simplificarse a:
 - I. Estudio de fuerzas.
 - II. Estudio de deformaciones.
 - III. Aplicación de leyes que relacionan las fuerzas con las deformaciones (ley constitutiva).

1.2 Concepto de fuerza

- El desarrollo de la idea de “fuerza” en mecánica nos proporciona un medio eficaz para describir una interacción física muy compleja entre “cuerpos” en términos de un concepto simple y conveniente.
- Podemos decir que:
 - 1 La fuerza es una interacción vectorial, la cual puede describirse mediante un par de vectores iguales y opuestos que tienen la misma línea de acción.
 - 2 La magnitud de una fuerza se puede establecer en términos de un experimento estandarizado.
 - 3 Cuando dos o más fuerzas actúan simultáneamente, en un punto, el efecto es el mismo que si estuviera actuando una sola fuerza igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales.

1.3 Concepto de Momento

- El momento de una fuerza \mathbf{F} , aplicada en un punto P con respecto de un punto O viene dado por el producto vectorial o cruz del vector posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, por el vector fuerza, **en ese orden**; esto es,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Donde \mathbf{r} es el vector que va desde O a P .

- Por la propia definición del producto vectorial, el momento \mathbf{M} es un vector perpendicular al plano determinado por los vectores \mathbf{F} y \mathbf{r} .
- También se denomina momento dinámico o sencillamente momento. Ocasionalmente recibe el nombre de torque a partir del término inglés (*torque*), derivado a su vez del latín *torquere* (retorcer).

- Cuando varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ actúan sobre un cuerpo, su momento total sobre un punto fijo O se define como la suma

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

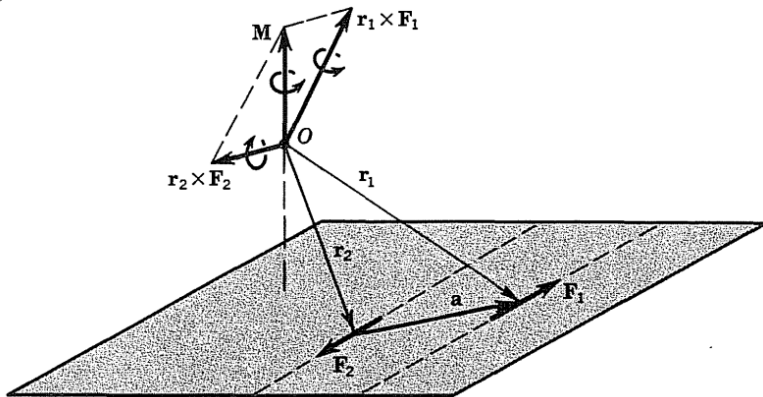
donde los \mathbf{r}_i son vectores de desplazamiento desde O a puntos en las líneas de acción de \mathbf{F}_i .

- Un caso particularmente interesante ocurre cuando hay dos fuerzas iguales y paralelas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que tienen sentido opuesto. Tal configuración de fuerzas se llama *cupla* o *par de fuerzas*.

- **Ejercicio:** Mostrar que el momento de una cupla es el mismo para todos los puntos en el espacio, siendo su módulo

$$F_1 d = F_2 d,$$

donde d es la distancia perpendicular entre las fuerzas (brazo del par).



El momento de una cupla sobre el punto O .

1.4 Condiciones de equilibrio

- De acuerdo con la ley de movimiento de Newton, una partícula no tiene aceleración si la fuerza resultante que actúa sobre ella es cero.
- Decimos que tal partícula está en *equilibrio*.
- No obstante, aceleración cero implica solo velocidad constante, el caso con el que tratamos más frecuentemente es el de velocidad cero.
- El estudio de fuerzas en sistemas en reposo se llama *estática*.
- Si varias fuerzas actúan sobre una partícula, la condición necesaria y suficiente para que la partícula esté en equilibrio es

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$

- En estas circunstancias, decimos que las fuerzas están *balanceadas* o *equilibradas* o en *equilibrio*.

- **Considere un sistema aislado de partículas.**
- Decimos que tal sistema está en equilibrio si cada una de sus partículas constituyentes está en equilibrio. Ahora las fuerzas que actúan sobre cada partícula son de dos tipos, *externas* e *internas*.
- Si cada partícula en el sistema aislado está en equilibrio, la fuerza resultante sobre ella es cero.
- La suma vectorial de todas las fuerzas es claramente cero, ya que la suma vectorial de cada grupo alrededor de cada partícula debe ser cero por separado.
- Sin embargo, en el proceso de agregar todos los vectores, encontramos que las fuerzas internas se producen en pares auto cancelables y, por lo tanto, nos queda el resultado de que *si un conjunto de partículas está en equilibrio, la suma vectorial de las fuerzas externas debe ser cero*, i.e.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (1)$$

- Consideremos además el momento total de todas las fuerzas sobre un punto arbitrario O . El momento total debe ser cero ya que la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre cada partícula es por separado cero.
- Sin embargo, en el proceso de formación del momento total de todos los vectores, encontramos que las fuerzas internas se producen en pares auto cancelables que tienen la misma línea de acción y, por lo tanto, no contribuyen al momento total.
- De lo anterior nos queda el resultado de que *si un conjunto de partículas está en equilibrio, el momento total de todas las fuerzas externas sobre un punto arbitrario O debe ser cero*, i.e.

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (2)$$

donde \mathbf{r}_i representa un vector de posición que se extiende desde O hasta un punto arbitrario en la línea de acción de la fuerza externa \mathbf{F}_i .

- Las condiciones (1) y (2) son condiciones necesarias para el equilibrio; es decir, si el sistema está en equilibrio, entonces éstas deben satisfacerse.
- Sin embargo, es interesante considerar el problema inverso. Supongamos que sabemos que las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas satisfacen tanto (1) como (2). Entonces:
¿Podemos concluir que cada una de las partículas constituyentes del sistema aislado está en equilibrio?

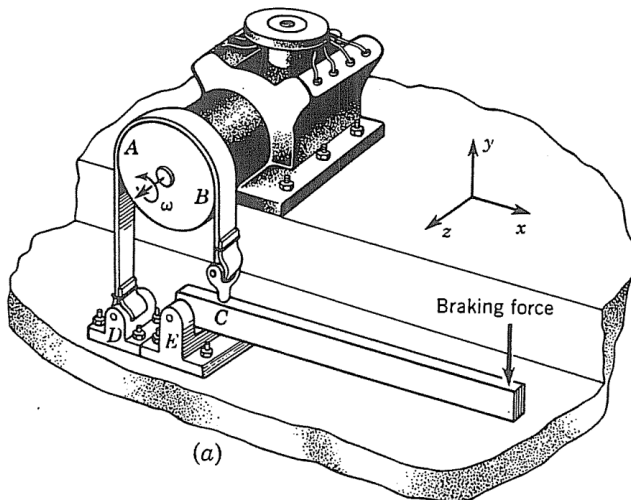
Esencia de la Teoría del Equilibrio

- Si un sistema de partículas fuera perfectamente rígido para que ningún par de partículas pudiera separarse, las fuerzas internas podrían ajustarse automáticamente para proporcionar un equilibrio interno siempre que las fuerzas externas estén en equilibrio.
- *Las condiciones necesarias y suficientes para que un cuerpo perfectamente rígido esté en equilibrio es que la suma vectorial de todas las fuerzas externas debe ser cero y que la suma de Los momentos de todas las fuerzas externas sobre un punto arbitrario, junto con cualquier momento externo aplicado, deben ser cero.*
- **Una condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema deformable es que los conjuntos de fuerzas externas que actúan sobre el sistema y sobre cada posible subsistema aislado del sistema original, deben ser conjuntos de fuerzas que satisfagan tanto (1) como (2).**

Esencia de la Teoría del Equilibrio

- Para concluir, es digno de mencionar que en una escala suficientemente fina, las partículas microscópicas que constituyen un sistema, generalmente no están en equilibrio, aunque el conjunto de partículas está en un estado de equilibrio macroscópico. Este es el caso en cualquier pieza “estática” de metal, líquido, gas, etc.
- El estudio de los efectos producidos por las partículas fuera del equilibrio constituye el eje central de estudio de la *mecánica estadística*.
- Las dos ecuaciones vectoriales (1) y (2) son equivalentes a seis ecuaciones escalares para que, en general, podamos resolver seis incógnitas escalares en cada conjunto de fuerzas externas.

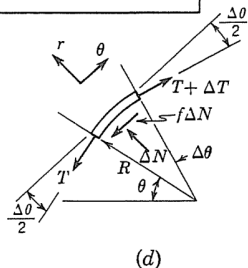
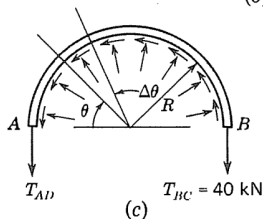
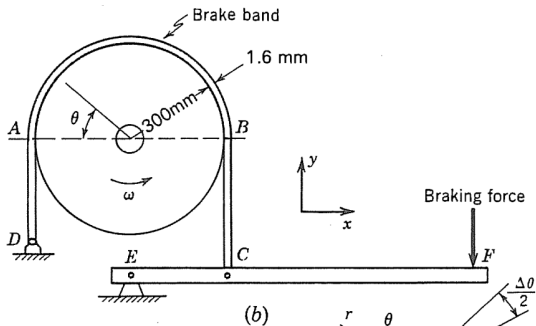
- **Ejemplo:** Encuentre la relación entre las tensiones T_1 y T_2 en (a) el freno de cinta y (b) en el freno de cinta y bloques.



Motor con freno de cinta.

<http://mechstuff.com/types-of-brakes-in-automobiles/>

- **Ejemplo:** Encuentre la relación entre las tensiones T_1 y T_2 en (a) el freno de cinta y (b) en el freno de cinta y bloques.



Motor con freno de cinta.

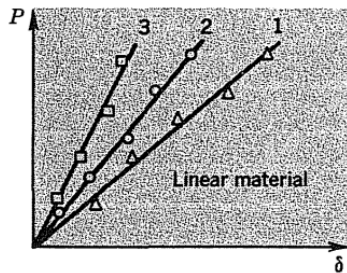
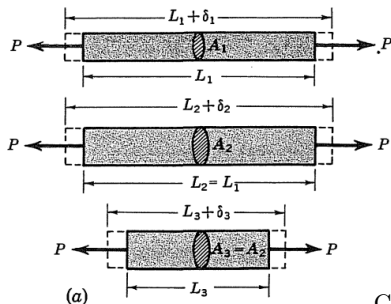
2.1 Análisis de cuerpos deformables

- En este curso por defecto nos limitaremos a situaciones en las cuales la aceleración es cero y donde los movimientos del sistema están restringidos a deformaciones.
- El método general de análisis que se sigue a lo largo de este curso implica los pasos preliminares:
 - (i) Selección de sistema.
 - (ii) Idealización de las características del sistema.
- En consecuencia, cuando hayamos seleccionado nuestro modelo, se lo analizará basados en los principios de la mecánica, que incluye los siguientes **pasos en el análisis de cuerpos deformables**:
 - (1) Estudio de fuerzas y requisitos de equilibrio.
 - (2) Estudio de deformación y condiciones de ajuste geométrico.
 - (3) Aplicación de las relaciones de fuerza-deformación.

2.2 Esfuerzo y deformación axial de una barra

- Si la relación de esfuerzo-alargamiento axial del material es lineal, entonces esta relación puede expresarse dando la pendiente de la línea recta en la figura (a). Esta pendiente se llama módulo de elasticidad o módulo de Young y generalmente se denota con el símbolo E . En términos de las coordenadas de la figura (a), E se define por

$$E = \frac{P/A}{\delta/L}, \quad \delta = \frac{PL}{AE}.$$



Carga axial.

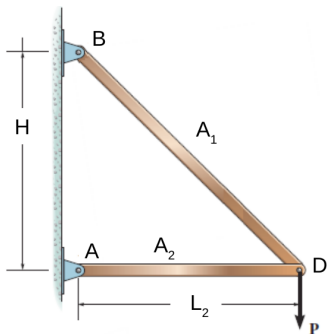
2.3 Sistemas estáticamente determinados

- En algunos sistemas es posible determinar todas las fuerzas involucradas, satisfaciendo solo los requisitos de equilibrio, sin necesidad de considerar las deformaciones. Tales sistemas se denominan *estáticamente determinados*.
- Son aquellos sistemas estáticos en los cuales las fuerzas resultantes pueden obtenerse sin referencia a la geometría de la deformación.
- Una estructura es estáticamente determinada (*isostática*) si se pueden conocer sus fuerzas internas por medio de las ecuaciones de equilibrio estático, es decir, que puede analizarse bajo los principios de la estática.
- La cantidad de condiciones de respuesta de la estructura es igual a las ecuaciones que se tienen que plantear para despejarlas, de forma que resulta posible encontrar su comportamiento bajo este método.

- **Ejemplo:** Ejercicio 1.1 - TP1.

En la figura se muestra un marco triangular de acero que soporta una carga P , colgada del punto D . El marco consiste de dos barras de acero articuladas entre si, y a una pared vertical. Se pide:

- a) Estimar el desplazamiento del punto D debido a la carga.



Considere: $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, $A_2 = 20 \text{ cm}^2$,
 $H = L_1 = 3 \text{ m}$.

2.4 Sistemas estáticamente indeterminados

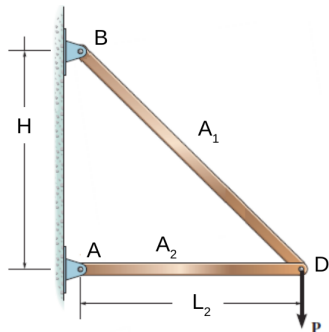
- Las estructuras indeterminadas (*hiperestáticas*) son aquellas en las que la cantidad de incógnitas es superior a las ecuaciones de equilibrio estático.
- La ecuación que especifica las condiciones para el desplazamiento se conoce como una *condición de compatibilidad* o *condición cinemática*.
- Las reacciones de soporte para problemas estáticamente indeterminados se determinan satisfaciendo los requisitos de equilibrio, compatibilidad geométrica y carga–desplazamiento (3 pasos).
- Se deben emplear las ecuaciones de compatibilidad geométrica de deformaciones y las de fuerzas y desplazamientos (o leyes constitutivas del material como $\delta = \frac{L_0 F}{AE}$).

- **Ejemplo:** Ejercicio 1.1 - TP1 (continuac.).

En la figura se muestra un marco triangular de acero que soporta una carga P , colgada del punto D . El marco consiste de dos barras de acero articuladas entre si, y a una pared vertical.

Se pide:

- b) Calcular el desplazamiento del punto D debido a la carga.
- c) Comparar las expresiones resultantes así como los valores del desplazamiento y de la deformación axial.



Considere: $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, $A_2 = 20 \text{ cm}^2$,
 $H = L_1 = 3 \text{ m}$.

2.5 Idealizaciones más comunes

- En ocasiones, el *principio de superposición* se utiliza para simplificar los problemas de esfuerzo y desplazamiento con cargas complicadas. Esto se hace mediante la subdivisión de la carga en sus componentes, para después sumar los resultados algebraicamente.
- La superposición requiere que la carga se relacione linealmente con el esfuerzo o el desplazamiento, y que la carga no cambie de manera significativa la geometría original del elemento.
- Un problema es *estáticamente indeterminado* si las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar todas las reacciones en un elemento.
- Las *condiciones de compatibilidad* especifican las restricciones de desplazamiento que se producen en los soportes u otros puntos de un elemento.

Procedimiento de análisis

[R. Hibbeler, Mecánica de Materiales. pp. 138, 8va Ed., 2011]

- Las reacciones en los apoyos para **problemas estáticamente indeterminados** se calculan al satisfacer los requerimientos de equilibrio, compatibilidad y fuerza-desplazamiento para el elemento.



La mayoría de las columnas de concreto están reforzadas con barras de acero; y como estos dos materiales trabajan juntos para soportar la carga aplicada, las fuerzas en cada material se vuelven estáticamente indeterminadas.

Procedimiento de análisis

[R. Hibbeler, *Mecánica de Materiales*. pp. 138, 8va Ed., 2011]

- **Equilibrio.**

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre del elemento a fin de identificar todas las fuerzas que actúan sobre él.
- El problema se puede clasificar como estáticamente indeterminado si el número de reacciones desconocidas en el diagrama de cuerpo libre es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio disponibles.
- Escriba las ecuaciones de equilibrio para el elemento.

- **Compatibilidad.**

- Considere dibujar un diagrama de desplazamiento a fin de investigar la forma en que los elementos se alargan o contraen al ser sometidos a las cargas externas.
- Exprese las condiciones de compatibilidad en términos de los desplazamientos causados por la carga.

- **Carga-desplazamiento.**

- Use una relación carga-desplazamiento, como $\delta = PL/AE$, para relacionar los desplazamientos desconocidos con las reacciones.
- Despeje las reacciones de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Si alguno de los resultados tiene un valor numérico negativo, entonces la fuerza actúa en sentido contrario al de la dirección indicada en el diagrama de cuerpo libre.

Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Russel C. Hibbeler (2011).

Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

Fin

