

Mecánica de los Sólidos – Unidad 2A

Formulación Matemática de la Elasticidad Lineal

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2020



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



Contenido

1 Introducción

- 1.1 Mecánica de medios continuos
- 1.2 Elasticidad
- 1.3 Ecuación Constitutiva
- 1.4 Resistencia de Materiales – Elasticidad Lineal

2 Tensión

- 2.1 Estado tensional en un punto
- 2.2 Convención de signos
- 2.3 Notación cartesiana y notación indicial
- 2.4 Tensor tensión de Cauchy

1. Introducción

- En la Unidad 1 consideramos cuerpos deformables en los que se suponía que las cargas y las deformaciones resultantes eran unidireccionales.
- Además, encontramos la relación entre la carga y la deformación resultante en términos de la forma del cuerpo y una propiedad del material (el módulo de elasticidad E). Bajo el supuesto de que las condiciones eran uniformes de un punto a otro.
- A medida que extendemos nuestro estudio de sólidos deformables a casos más comunes donde las condiciones no son uniformes, descubriremos que es necesario estudiar el comportamiento en elementos diferencialmente pequeños dentro del cuerpo.
- Al mismo tiempo, generalmente es necesario considerar aspectos 2D ó 3D del comportamiento del material. Por ejemplo, la desviación transversal de una viga en flexión depende de la distribución de la fuerza axial por unidad de área, tanto a lo largo como a través de la viga.

- Para derivar el comportamiento general de un cuerpo a partir de las propiedades de elementos diferencialmente pequeños dentro del cuerpo es preciso el uso de: equilibrio, compatibilidad geométrica y las relaciones entre la fuerza y la deformación.
- En esta y en la siguiente Unidad investigaremos la importancia de nuestros tres principios básicos cuando se aplican al comportamiento localizado del material en un punto dentro de un cuerpo deformable.
- El equilibrio en un punto y la geometría de la deformación en un punto se consideran en las secciones restantes de esta Unidad, y las relaciones entre la fuerza y la deformación en un punto dentro de un material real se discuten en el próximo capítulo.
- Las siguientes Unidades se construirán sobre esta base al examinar la acción de estructuras de varias formas bajo una variedad de cargas.

- En esta Unidad se presentan y desarrollan los conceptos de tensión y deformación, que serán utilizados a lo largo del curso.
- La noción de tensión como fuerza aplicada por unidad de superficie y su relación con la resistencia estructural se debe a Galileo.
- La definición moderna de deformación ingenieril como alargamiento unitario se atribuye a Cauchy, aunque ciertamente debía manejarse con anterioridad.

1.1 Mecánica de medios continuos

- La mecánica de medios continuos es una rama de la física (específicamente de la mecánica) que propone un modelo unificado para la mecánica de sólidos deformables, sólidos rígidos y fluidos.
- El término medio continuo se usa tanto para designar un modelo matemático, como cualquier porción de material cuyo comportamiento se puede describir adecuadamente por ese modelo.
- El modelo ideal de un medio continuo considera que no hay discontinuidades entre las partículas y que su descripción matemática se puede realizar mediante funciones continuas.
- Límites de aplicabilidad
 - Aunque la mecánica de medios continuos es un modelo que permite investigar las propiedades de sólidos deformables y fluidos con gran precisión, hay que recordar que a escalas muy pequeñas la materia está hecha de átomos.
 - La naturaleza atómica de la materia da lugar a cierto tipo de microestructura heterogénea que puede violar alguno de los principios de la mecánica de medios continuos.

- La mecánica de medios continuos es una aproximación válida en la mayoría de situaciones macroscópicas en las que la microestructura asociada a la naturaleza atómica de la materia puede ser ignorada.

Disciplinas de la mecánica de medios continuos

Mecánica de medios continuos	<p>mecánica de sólidos deformables. La mecánica de sólidos deformables es la rama de la física que trata de medios continuos que tienen una forma definida no determinada enteramente por el recipiente o conjunto de constricciones sobre la superficie del sólido.</p>	<p>Elasticidad, que describe los materiales que recuperan su forma si se retiran las fuerzas causantes de la deformación.</p>	
		<p>Plasticidad, que describe los materiales que sufren deformaciones permanentes y no recuperables tras la aplicación de fuerzas suficientemente grandes.</p>	<p>Reología Dado que algunos materiales presentan viscoelasticidad (una combinación de comportamiento elástico y viscoso), la distinción entre la mecánica de sólidos y la mecánica de fluidos es difusa.</p>
	<p>Mecánica de fluidos (incluyendo hidrostática e hidrodinámica), que trata de la física de fluidos. Una propiedad importante de los fluidos es su viscosidad, que es una fuerza interna generada por un fluido que se opone al movimiento del mismo.</p>	<p>Fluido no newtoniano</p>	
		<p>Fluido newtoniano</p>	

1.2 Elasticidad

- El término elasticidad designa la propiedad mecánica de ciertos materiales de sufrir *deformaciones reversibles* bajo la acción de fuerzas externas, es decir que recuperan la forma original si estas fuerzas externas se eliminan.
- La elasticidad es estudiada por la Teoría de la Elasticidad, que a su vez es parte de la Mecánica de los Sólidos Deformables.
- Ambas describen como un sólido (o fluido totalmente confinado) se mueve y se deforma en respuesta a fuerzas externas.
- Cuando sobre un sólido deformable actúan fuerzas externas este se deforma, es decir, se produce trabajo que se almacena en el cuerpo en forma de energía potencial elástica y por tanto se produce un aumento de la energía interna.

- La propiedad elástica de los materiales está relacionada con la capacidad de un sólido de sufrir transformaciones termodinámicas reversibles e independencia de la velocidad de deformación.
- Los sólidos viscoelásticos y los fluidos, por ejemplo, presentan tensiones dependientes de la velocidad de deformación.
- Físicamente las propiedades elásticas son el resultado de desplazar ligeramente los átomos de su posición de equilibrio a lo largo de planos cristalográficos, mientras las propiedades viscosas proceden de la difusión de átomos o moléculas en el interior del material.
- La Teoría de la Elasticidad trata sólidos en que las deformaciones son termodinámicamente reversibles y en los que el estado de tensiones σ en un punto \mathbf{x} y en un instante dado t dependen solo de las deformaciones ϵ en el mismo punto e instante, no así de las deformaciones anteriores (ni del valor de otras magnitudes en un instante anterior) – *Ecuación Constitutiva...*

1.3 Ecuación Constitutiva

- Una ecuación constitutiva es una relación entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico: presión, volumen, tensión, deformación, temperatura, entropía, etc.
- Cada material o sustancia tiene una ecuación constitutiva específica, dicha relación sólo depende de la *organización molecular interna*.
- En física se usa el término ecuación constitutiva para cualquier relación entre magnitudes tensoriales, que no es derivable de leyes de conservación, o de otro tipo de leyes universales y que son específicas del tipo de problema estudiado.
- **Ejemplos:** sólido elástico lineal (ley de Hooke), sólido elástico isótropo no lineal (Teorema de Rivlin-Ericksen), fluido newtoniano (viscosidad constante), ley de Fick (difusión), ley de Ohm, permitividad eléctrica, permeabilidad magnética, resistencia aerodinámica, etc.

- En Mecánica de los Sólidos la **Ecuación Constitutiva** relaciona el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ con la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$, usualmente dicha ecuación relaciona los componentes de los tensores tensión, deformación y velocidad de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.
- La ecuación constitutiva de un *sólido elástico* es de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{T}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \quad \hat{T} : \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^3)$$

donde $\mathcal{T}_2(\mathbb{R}^3)$ denota el conjunto de tensores simétricos de segundo orden del espacio euclídeo.

- Ejemplo:** sólido elástico homogéneo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{T}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t))$.
- Ejemplo:** sólido elástico isótropo no lineal. El Teorema de Rivlin-Ericksen (1955) establece que la ecuación constitutiva de un sólido deformable isótropo y objetivo debe tener la siguiente forma

$$\sigma_{ij} = \alpha(\iota_\varepsilon) \delta_{ij} + \beta_{ijkl}(\iota_\varepsilon) \varepsilon_{kl} + \gamma_{ijkl}(\iota_\varepsilon) \varepsilon_{km} \varepsilon_{ml},$$

donde ι_ε , es el conjunto de invariantes algebraicos (traza, invariante cuadrático y determinante), del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$.

1.4 Resistencia de Materiales – Elasticidad Lineal

- El objetivo principal de la **Resistencia de Materiales** es el de proporcionar los medios para analizar y diseñar estructuras o componentes capaces de soportar las cargas y acciones a las que éstos están (o pueden estar) sometidos durante su vida útil.
- El análisis y el diseño de un componente estructural conlleva la determinación de *tensiones y deformaciones*.
- La **Resistencia de Materiales** y la **Teoría de la Elasticidad Lineal** son dos disciplinas de la *Mecánica de Sólidos Deformables*.
- Poseen objetivos comunes, ambos abordan el estudio de:
 - ① la resistencia (estado de tensiones), y
 - ② la rigidez (estado de deformaciones) de cuerpos sólidos deformables sometidos a la acción de sistemas de fuerzas en equilibrio estático.
- Ambas parten del principio de linealidad entre acción y respuesta; esto implica que **el comportamiento de los materiales es elástico y que los movimientos que se producen son pequeños.**

- La ecuación constitutiva de un sólido elástico lineal se denomina ecuación de Lamé-Hooke o más simplemente ley de Hooke.
- La Resistencia de Materiales limita su campo de aplicación a ciertos tipos de elementos estructurales (vigas, columnas, etc.) sustentados de ciertas maneras predeterminadas (apoyos simples, articulaciones, empotramientos, etc.) y sometidas a ciertos tipos de acciones (fuerzas puntuales y repartidas, generalmente, y otras acciones definidas de forma adecuada).
- Esta restricción previa en cuanto a las geometrías, condiciones de apoyo y acciones consideradas permite la formulación de ciertas hipótesis de partida y de un planteamiento simplificado apto para la resolución analítica de multitud de problemas de ingeniería.
- La Teoría de la Elasticidad Lineal, afronta el problema mecánico en su forma más general en cuanto a geometrías, condiciones de contorno y tipos de acciones consideradas.

- La Teoría de la Elasticidad Lineal precisa de un planteamiento matemático que impide obtener soluciones analíticas, salvo para un número limitado de casos, requiriendo el uso de métodos numéricos aproximados (diferencias finitas, elementos finitos, etc.) para la resolución de la mayor parte de problemas de interés práctico.
- Dados sus objetivos (y principios) comunes, la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad Lineal siguen caminos paralelos prácticamente desde sus inicios, por lo cual no es fácil delimitar de forma nítida los ámbitos respectivos.
- Desde la perspectiva actual, es habitual considerar a la Resistencia de Materiales como una parte subordinada de la, más general, Teoría de la Elasticidad Lineal.
- En cualquier caso, ambas disciplinas manejan multitud de conceptos comunes, tales como los de fuerza, desplazamiento, tensión, deformación, equilibrio, compatibilidad, linealidad, etc..

2.1 Estado tensional en un punto

- La fuerza y la deformación en barras bajo cargas de tracción pueden relacionarse con una propiedad del material, al considerar la fuerza por unidad de área y la extensión por unidad de longitud.
- El concepto de fuerza interna por unidad de área puede extenderse a formas y cargas más generales, ver Figura 1.

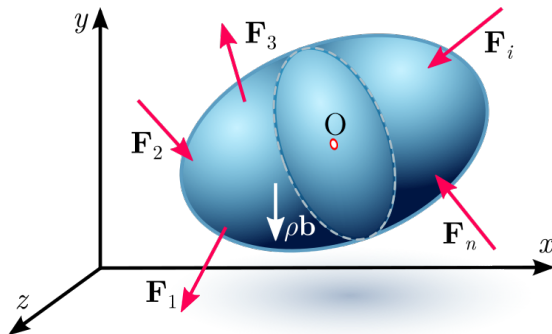


Figura 1: Sólido bajo cargas externas.

- Para examinar estas fuerzas internas en un punto O en el interior del cuerpo, pasamos un plano cuyo vector normal es \mathbf{n} a través del punto O , como se muestra en la Figura 2.

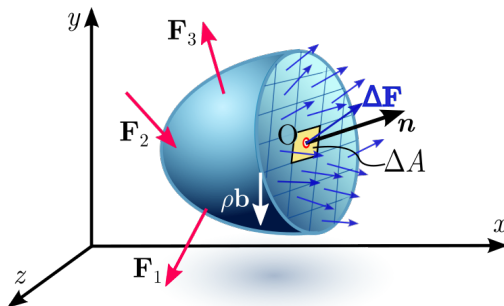


Figura 2: Sólido bajo cargas externas, se muestran las fuerzas internas generadas en un plano de corte de normal \mathbf{n} .

- Para que las mitades separadas del cuerpo estén en equilibrio, debe haber fuerzas internas transmitidas a través del plano de corte.
- Si dividimos el plano en varias áreas pequeñas y medimos las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas, observaremos que estas fuerzas en general varían de un área pequeña a la siguiente.

- En el área pequeña ΔA cuyo vector normal está centrado en el punto O , habrá una fuerza $\Delta \mathbf{F}$ que está inclinada hacia la superficie ΔA en un ángulo arbitrario.
- Cuando consideramos el problema de describir completamente la acción del vector de fuerza $\Delta \mathbf{F}$, tenemos que especificar la orientación y el tamaño de la cara sobre la que actúa $\Delta \mathbf{F}$, la magnitud de $\Delta \mathbf{F}$ y la orientación de $\Delta \mathbf{F}$ con respecto a la cara.
- Definimos el *vector tensión* \mathbf{T} que actúa en el punto O , en un plano cuya normal es \mathbf{n} que pasa a través de O , como

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

- $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ es la intensidad de la fuerza o la tensión que actúa en un plano cuya normal es \mathbf{n} en el punto O , en general no actúa en la dirección de \mathbf{n} .
- Al asumir la existencia del límite hemos formulado una *hipótesis del continuo* con respecto a la distribución de las fuerzas internas. Esto es una idealización del comportamiento en un material real, donde la $\Delta \mathbf{F}$ disminuye suavemente con ΔA , y ΔA es grande en comparación con la *microestructura* (metalúrgica o molecular) del material.

- Respecto al concepto de tensión pueden hacerse las siguientes observaciones:
 - 1 Las dimensiones de la tensión son $[FL^{-2}]$, fuerza por unidad de superficie. En el S.I. la tensión se mide en Pascales (Pa), es decir, en N/m^2 .
 - 2 La tensión se define en un punto sobre un plano o límite imaginario que divide el material en dos partes.
 - 3 La tensión es un vector equivalente a la acción de una parte del material sobre la otra.
 - 4 La dirección del vector de tensión no está restringida. La tensión depende del punto y de la orientación de la sección elegidos. Así, en un punto dado se tendrán diferentes tensiones según la orientación considerada, y para una sección dada se tendrán tensiones diferentes para distintos puntos.

- En general, la tensión no es normal al plano de corte considerado, sino que puede descomponerse según dos componentes: la *tensión normal* al plano de la sección, σ_n y la *tensión cortante* o tangencial a dicho plano, τ_n , tal como se muestra en la Figura 4.

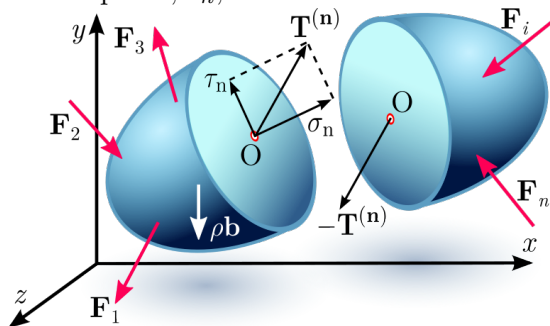


Figura 4: Vector tensión.

- El módulo del vector tensión es igual a $\|\mathbf{T}^{(n)}\| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$.
- Adicionalmente, es posible escribir el vector tensión en términos de sus componentes con respecto a los ejes de coordenadas como

$$\mathbf{T}^{(n)} = T_x^{(n)}\mathbf{i} + T_y^{(n)}\mathbf{j} + T_z^{(n)}\mathbf{k}. \quad (2.2)$$

2.2 Convención de signos

- Consideremos un plano mm que pasa por el punto O , paralelo al plano yz y consideremos el cuerpo libre a la izquierda del plano mm . Dividimos el plano mm en una gran cantidad de áreas pequeñas, de Δy por Δz , como se muestra en la Figura 5.

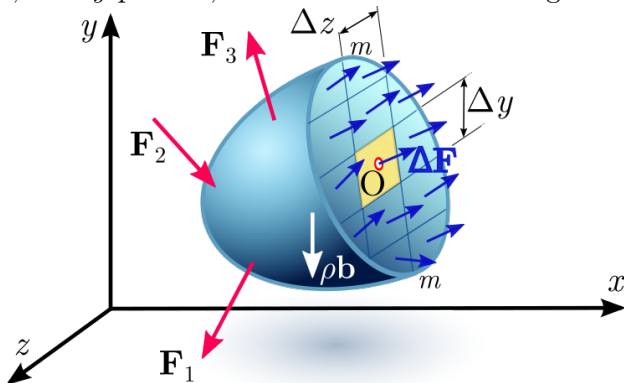


Figura 5: Cargas internas en el plano de corte.

- Repetimos nuestros argumentos previos para el vector de fuerza y la intensidad de fuerza, para el plano definido con vector normal \mathbf{n} , aplicándolos a un elemento de área en el plano mm .
- Es decir, en el área pequeña ΔA centrada en el punto O , actuará una fuerza $\Delta \mathbf{F}$, inclinada hacia la superficie mm en algún ángulo arbitrario.
- Si describimos el vector de fuerza $\Delta \mathbf{F}$ mediante un conjunto rectangular de componentes de fuerza, obtendremos que el conjunto de ejes más conveniente resulta ser aquel en el que un eje es normal a la superficie y los otros dos son paralelos a la superficie.

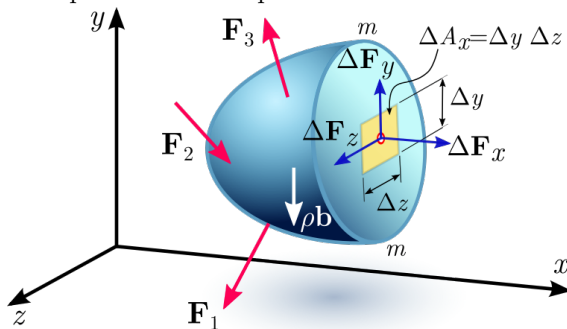


Figura 6: Componentes de las cargas internas.

- Por lo tanto, en la Figura 7, la cara 1-4-5-8 es una cara z positiva, y la cara 2-3-6-7 es una cara z negativa.

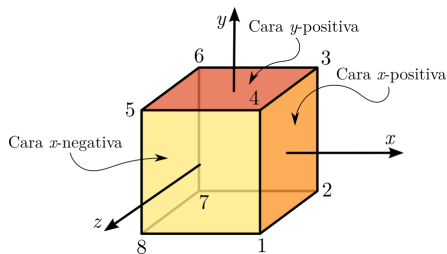


Figura 7: Convención de signos.

- Si consideramos las relaciones $\Delta F_x/\Delta A_x$, $\Delta F_y/\Delta A_x$ y $\Delta F_z/\Delta A_x$, tenemos tres cantidades que establecen la intensidad promedio de la fuerza en la superficie del área $\Delta A_x = \Delta y \Delta z$.
- En el límite como $\Delta A_x \rightarrow 0$, estas relaciones definen la intensidad de la fuerza que actúa sobre la cara x en el punto O . Son los componentes del vector de tensión que actúan sobre la cara x en el punto O .
- Es decir, son los componentes del vector de tensión que actúan sobre un elemento de área cuya normal apunta en la dirección x positiva.
- Los componentes de tensión en la cara x en el punto O se definen en términos de las relaciones de intensidad de fuerza:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}. \quad (2.3)$$

- Los componentes de tensión tangenciales a la superficie se denominan como tensión de corte y se denotan por τ . La componente de la tensión de corte que actúa sobre la cara x en la dirección y se identifica como τ_{xy} , donde el primer subíndice denota la dirección de la normal a la cara y el segundo denota la dirección en la que actúa la componente de la tensión.
- La componente de la tensión perpendicular a la cara se denomina tensión normal y se indica con σ . La tensión normal que actúa sobre la cara x se identifica como σ_{xx} o σ_x .

- Adoptaremos la convención de signos para los componentes de la tensión definida en la Unidad 1, es decir, se define la componente de tensión como positiva cuando la componente de fuerza tiene sentido positivo y actúa sobre una cara positiva.
- Todos los componentes de la tensión que se muestran en la Figura 8 son positivos de acuerdo con esta convención de signos.

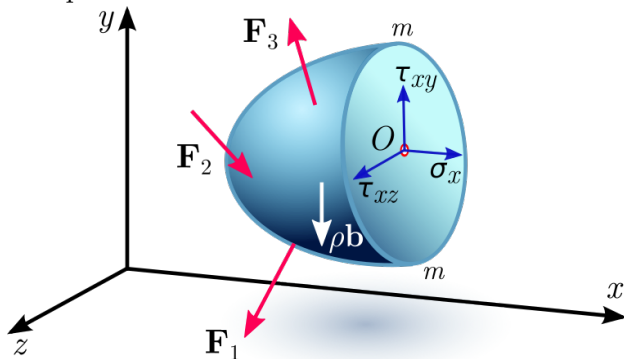


Figura 8: Componentes de la tensión interna que actúan sobre la cara x en el punto O .

2.3 Notación cartesiana y notación indicial

- Si volvemos al cuerpo continuo que se muestra en la Figura 1, observamos que también es posible pasar un plano paralelo a los planos xy y xz a través del punto O . En los elementos de área que se encuentran en los planos xy y xz , definimos componentes de tensión de forma análoga

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y}, \quad \sigma_y = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_y}, \quad \tau_{yz} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_y},$$

y

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_z}, \quad \tau_{zy} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_z}, \quad \sigma_z = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_z}.$$

- El estado de tensión en el punto O se define por nueve componentes:

$$\begin{array}{l} \text{sobre las caras} \\ \text{normales al eje} \end{array} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \text{actúan las componentes} \\ \text{cartesianas de tensión} \end{array} \begin{Bmatrix} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

- Es necesario conocer los nueve componentes para determinar el vector de tensión $\mathbf{T}^{(n)}$ que actúa en un plano arbitrario con normal \mathbf{n} .

- Una notación alternativa llamada **notación indicial** es a menudo empleada para representar las tensiones dado que facilita el análisis y discusiones generales sobre elasticidad.
- Se expondrá brevemente esta notación aquí. En la notación indicial los ejes coordenados x , y , y z se reemplazan por ejes numerados, x_1 , x_2 y x_3 .
- Los componentes de un vector como la fuerza $\Delta \mathbf{F}$ se escriben como ΔF_1 , ΔF_2 y ΔF_3 , donde el subíndice numérico indica el componente con respecto a los ejes de coordenadas numerados.
- Las definiciones de los componentes de la tensión que actúan sobre la cara x_1 , pueden escribirse en forma indicial como

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_1}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_2}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_3}{\Delta A_1}.$$

donde σ se emplea tanto para tensiones normales como de corte.

- Los componentes de la tensión poseen dos subíndices numéricos, el primero indica la cara en la que actúa el componente de la tensión y el segundo especifica la dirección del componente del vector tensión.
- Los componentes de tensión se pueden definir por una sola ecuación:

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

2.4 Tensor tensión de Cauchy

- En mecánica del continuo el *tensor tensión de Cauchy*, tensor de tensiones, tensor de esfuerzos, o simplemente tensor tensión, σ , es un tensor de segundo orden que da cuenta de la distribución de tensiones y esfuerzos internos en el medio continuo.
- El tensor consta de nueve componentes σ_{ij} que definen completamente el estado de tensión en un punto dentro de un material en el estado, ubicación o configuración deformada.
- Fijado un sistema de referencia ortogonal, el tensor tensión de Cauchy viene dado por una matriz, cuyas componentes son:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

- La tercera forma es la forma común de llamar a las componentes del tensor tensión en ingeniería.

- Cabe señalar que en un problema mecánico *a priori* es difícil conocer el tensor tensión de Cauchy ya que este está definido sobre la geometría del cuerpo una vez deformado, y ésta no es conocida de antemano. Por tanto previamente es necesario encontrar la forma deformada para conocer exactamente el tensor de Cauchy.
- Cuando las deformaciones son pequeñas, en ingeniería y aplicaciones prácticas se emplea este tensor aunque definido sobre las coordenadas del cuerpo sin deformar. Esto no conduce a errores de cálculo excesivo si todas las deformaciones máximas son inferiores a 0,01.

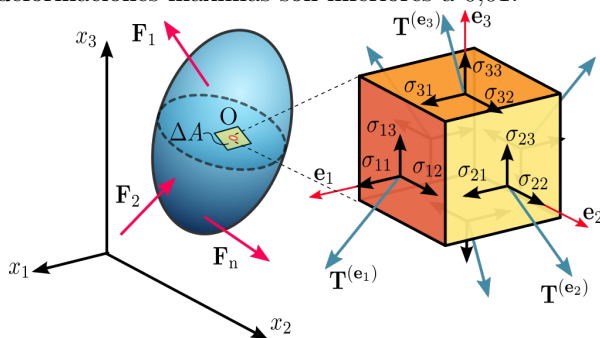


Figura 9: Componentes indiciales del tensor tensión de Cauchy.

- El tensor tensión de Cauchy se utiliza para el análisis de tensión de cuerpos materiales que experimentan pequeñas deformaciones: **concepto central en la teoría lineal de la elasticidad.**
- En grandes deformaciones, también llamadas deformaciones finitas, se requieren otras medidas de tensión, como el tensor de tensión de Piola-Kirchhoff, el tensor de tensión de Biot y el tensor de tensión de Kirchhoff.
- **El tensor tensión es simétrico**, por lo que solo tiene seis componentes de tensión independientes, en lugar de los nueve originales siempre que:
 - El cuerpo continuo está en equilibrio estático, de acuerdo con el principio de conservación del momento lineal, se puede demostrar que los componentes del tensor tensión de Cauchy en cada punto material del cuerpo satisfacen las ecuaciones de equilibrio (ecuaciones de movimiento de Cauchy para aceleración cero).
 - Al mismo tiempo, el equilibrio requiere que la suma de momentos con respecto a un punto arbitrario sea cero, de acuerdo con el principio de conservación del momento angular.

- En principio podríamos suponer que para conocer el estado de tensión en un punto de un cuerpo se deberían definir los vectores tensión $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ asociados con los infinitos planos que pasan por ese punto.
- De acuerdo con el **Teorema de Tensión de Cauchy**, simplemente es necesario conocer los vectores tensión en tres planos mutuamente perpendiculares. El vector tensión en cualquier otro plano que pase por ese punto se puede encontrar a través de ecuaciones de transformación de coordenadas.
- El teorema de tensión de Cauchy afirma que existe un campo tensor de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, llamado tensor tensión de Cauchy, independiente de \mathbf{n} , de modo que \mathbf{T} es una función lineal de \mathbf{n} :

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{o} \quad T_j^{(n)} = \sigma_{ij} n_i.$$

- Esta ecuación implica que el vector tensión $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ en cualquier punto O en un continuo asociado con un plano, con normal \mathbf{n} , puede expresarse como una función de los vectores de tensión en los planos perpendiculares a los ejes de coordenadas, es decir, en términos de los componentes σ_{ij} del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$.

- **Ejemplo 2.1:** Probar la expresión $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, para ello considere el “tetraedro de Cauchy” representado en la Figura 10.

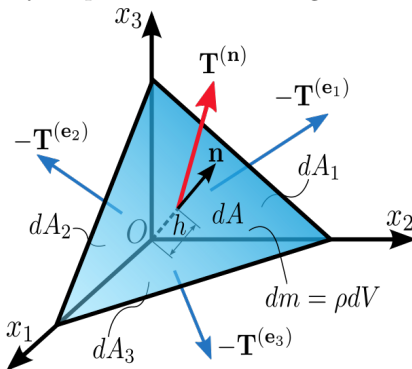


Figura 10: Tetraedro de Cauchy. Se muestra el vector tensión $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ que actúa sobre un plano con vector unitario normal \mathbf{n} .

- Una nota sobre la convención de signos: el tetraedro se forma cortando un paralelepípedo a lo largo de un plano arbitrario \mathbf{n} . Entonces, la fuerza que actúa sobre el plano \mathbf{n} es la reacción que ejerce la otra mitad del paralelepípedo y tiene signo opuesto.

● **Ejemplo 2.1:** (*cont.*)

- Equilibrio de fuerzas

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} dA_1 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} dA_2 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} dA_3 = dm \mathbf{a}, \quad (a)$$

donde el lado derecho representa el producto de la masa encerrada por el tetraedro y su aceleración \mathbf{a} .

- Siendo $dm = \rho dV$, donde ρ es la densidad y $dV = \frac{h}{3}dA$, mientras que h es la altura del tetraedro, considerando el plano \mathbf{n} como su base.
- El área de las caras del tetraedro perpendiculares a los ejes se pueden encontrar proyectando dA en cada cara

$$dA_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) dA = n_i dA. \quad (b)$$

- Sustituyendo (b) en (a) y eliminando dA de la relación resultante

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} n_1 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} n_2 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} n_3 = \rho \left(\frac{h}{3} \right) \mathbf{a}. \quad (c)$$

- Considerando el caso límite cuando el tetraedro se contrae a un punto, $h \rightarrow 0$ (el plano \mathbf{n} es llevado hacia O). Como resultado, el lado derecho de la ecuación se acerca a 0, entonces $\rho \left(\frac{h}{3} \right) \mathbf{a} \rightarrow 0$.

● Ejemplo 2.1: (cont.)

- El caso límite anterior se reduce a

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}n_1 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}n_2 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}n_3. \quad (d)$$

- Suponiendo un sistema de coordenadas cartesiano, los vectores de tensión asociados con cada uno de los planos del elemento, es decir, $\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}$, $\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}$, y $\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}$ pueden ser descompuesto en una componente normal y dos componentes de corte.
- Por ej. en el caso particular de una superficie con vector normal unitario orientado en la dirección del eje x_1 tendremos

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} = T_1^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + T_2^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_2 + T_3^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_3 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3,$$

donde hemos denotado el esfuerzo normal por σ_{11} , y los dos esfuerzos cortantes como σ_{12} y σ_{13} .

- Es decir, en notación indicial tendremos

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_i)} = T_j^{(\mathbf{e}_i)}\mathbf{e}_j = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j, \quad (e)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$.

● **Ejemplo 2.1:** (*cont.*)

- Por ende de la Ec. (*e*) es posible deducir las 9 componentes del tensor tensión de Cauchy como

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} \\ \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} \\ \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (f)$$

donde σ_{11}, σ_{22} y σ_{33} son tensiones normales y $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$, y σ_{32} son tensiones cortantes. El primer índice i indica que la tensión actúa en un plano normal al eje x_i , y el segundo índice j denota la dirección en la que actúa la tensión.

- Por lo tanto, usando los componentes del tensor de tensión en la Ec. (*d*)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} &= \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}n_1 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}n_2 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}n_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_i)}n_i \\ &= (\sigma_{ij}\mathbf{e}_j)n_i \\ &= \sigma_{ij}n_i\mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (g)$$

● **Ejemplo 2.1:** (*cont.*)

- O de forma equivalente

$$\boxed{T_j^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_i \quad \text{o} \quad \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.} \quad (h)$$

- Alternativamente, en forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} T_1^{(\mathbf{n})} & T_2^{(\mathbf{n})} & T_3^{(\mathbf{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (i)$$

- La representación de notación de Voigt del tensor de tensión de Cauchy aprovecha la simetría del tensor de tensión para expresar la tensión como un vector de seis dimensiones de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6]^T \equiv [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T. \quad (j)$$

- La notación de Voigt se utiliza ampliamente para representar las relaciones tensión-deformación en mecánica de sólidos y para la eficiencia computacional en cálculos numéricos de mecánica estructural.

- **Diagonalización e Invariantes del Tensor Tensión**
- Como hemos visto la forma general para un campo tensorial de tensiones en tres dimensiones está dado como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

en la que los términos en la diagonal principal representan esfuerzos a la tracción o a la compresión, y los términos fuera de la diagonal representan los esfuerzos cortantes.

- En un sistema de referencia cuyos ejes coordenados son las direcciones principales, la matriz que representa al tensor tensión es diagonal y tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

- En las direcciones o ejes principales, no hay tensiones tangenciales o cortantes.

- El problema de determinar las tensiones principales, σ_i , y las direcciones principales, \mathbf{n}_i , se reduce a un problema de autovalores

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_i - \lambda_i \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$$

en el que las incógnitas son las componentes n_{i1} , n_{i2} y n_{i3} de la i -ésima dirección principal y el valor λ_i es la i -ésima atensión principal, donde $i = 1, 2, 3$.

- Para obtener una solución no trivial (distinta de cero), el determinante de la matriz $\boldsymbol{\sigma} - \lambda_i \mathbf{I}$ debe ser igual a cero, es decir, el sistema es singular.

- **Ejemplo 2.2:** Mostrar que expandiendo el determinante $|\boldsymbol{\sigma} - \lambda_i \mathbf{I}|$ se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

donde

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$= \sigma_{kk} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) \right] \end{aligned}$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{31}^2\sigma_{22}$$

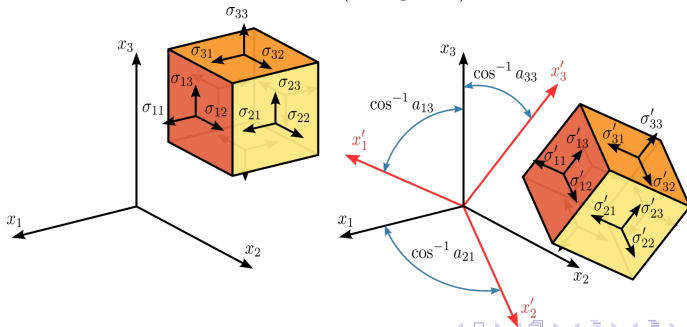
I_1 , I_2 y I_3 se conocen como los invariantes de tensión, se llaman así porque estos valores no cambian aunque cambie el sistema de referencia.

- Los valores de λ_i que hacen cero el polinomio característico, las raíces, son los valores de las tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 .

- **Regla de transformación del tensor tensión.**
- El tensor tensión es un tensor de segundo orden contravariante, lo cual es una declaración de cómo se transforma de un sistema de coordenadas x_i a un sistema x'_i .
- Los componentes σ_{ij} en el sistema inicial se transforman en los componentes σ'_{ij} en el nuevo sistema de acuerdo con la regla de transformación para tensores de segundo rango:

$$\sigma'_{ij} = a_{im}a_{jn}\sigma_{mn} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}^T,$$

donde \mathbf{A} es una matriz de rotación (ortogonal).



Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).

Resistencia de Materiales. CIMNE, 2015.



Wikipedia: Cauchy stress tensor, visitado 2020.

Fin

