# Trabajo Práctico 7: Problemas planos en coordenadas polares

## Ejercicio 1.

Un procedimiento para construir cañones o cilindros que deben resistir altas presiones internas es el zunchado en caliente. Esto normalmente se lleva a cabo haciendo el diámetro interno del cilindro exterior más chico que el radio externo del cilindro interior y ensamblando el conjunto luego de calentar el cilindro exterior, creando una presión de contacto. Determinar las tensiones tangenciales en la superficie interior, exterior y de contacto para una construcción de este tipo sujeta a una presión interior de $20000psi$. El zunchado (diferencia de diámetros) es de $0.004in$. Realizar un gráfico de la variación de las tensiones en el espesor debidas al zunchado, a la presión y al efecto combinado. Realizar el cálculo como si fuera de pared delgada y discuta el resultado. Investigar que problema de estado plano de tensiones se resuelve mediante la función de tensión. Datos: $a = 6in$, $b = 8in$,$c = 10in$, $E = 30 \times 10^6 psi$,$\delta = 0.004in$, $pi = 20000psi$

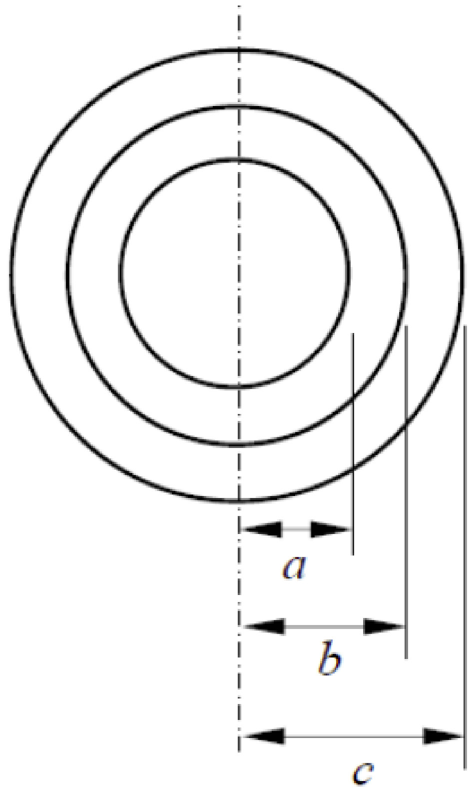


Figura 1: Ejercicio 1.

## Ejercicio 2.

Un anillo de acero zuncha un disco de fundición de hierro. Determine el cambio en la presión de zunchado producida por la fuerza de inercia a $3600rpm$, si $a = 1in$, $b = 5in$, $c = 10in$ (figura del problema 1), $E_s = 30 \times 10^6 lb/in^2$, $E_{ci} = 16 \times 10^6 lb/in^2$,$\gamma_s = 0.284lb/in^3$,$\gamma_{ci} = 0.260lb/in^3$.

## Ejercicio 3.

Un disco delgado de espesor uniforme y radio $b$ está construido de dos partes concéntricas, la superficie de separación se encuentra a un radio $a$. Encuentre el mínimo valor de la presión de contacto entre ambas partes cuando el disco está quieto, de manera que la parte exterior no pierda contacto con la interior cuando ambas giran a velocidad $\omega$.

## Ejercicio 4.

Un eje sólido de acero de $2ft$ de diámetro gira a una velocidad de $300rpm$. Si el mismo tiene impedidos los desplazamientos axiales de sus extremos, calcular las cargas axiales resultantes en una sección, debidas a las tensiones de rotación.$\gamma_s = 480lb/ft^3$ , $\nu = 0,3$.

## Ejercicio 5.

Un disco delgado de espesor uniforme y radio b se encuentra encerrado en un anillo rígido del mismo material, dentro del cual entra exactamente cuando ambos se encuentran a temperatura uniforme. Si se calienta el disco de manera que la temperatura a una distancia r del centro esta dada por:

$$T = (T_1 - T_0) - (T_1 - T_0)\frac{r^2}{b^2}$$

muestre que la tensión de compresión sobre el disco a un radio $r$ es:

$$\frac{1}{4}E\alpha(T_1 - T_0)\left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{r^2}{b^2}\right)$$

## Ejercicio 6.

Cuando una corriente eléctrica genera calor a una tasa uniforme por unidad de volumen dentro de un conductor sólido recto largo de radio $b$, el aumento consiguiente de temperatura dentro del conductor a un radio $r$ viene dada por la fórmula

$$T = \lambda(b^2 - r^2),$$

donde $\lambda$ es una constante. Asuma que no se excede el límite elástico del material y que no hay fuerzas restringiendo las expansiones radiales y longitudinales.

*a*) Muestre que las tensiones resultantes serán

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha\lambda}{4(1-\nu)}(b^2 - r^2),$$
$$\sigma_\theta = -\frac{E\alpha\lambda}{4(1-\nu)}(b^2 - 3r^2),$$
$$\sigma_z = -\frac{E\alpha\lambda}{2(1-\nu)}(b^2 - 2r^2).$$

*b*) Obtenga la expresión para el desplazamiento radial $u$ y represente gráficamente. Encuentre el valor de $r$ en el que se produce el valor máximo de $u$, muestre dicho valor de $u$ se expresa como

$$u_{\text{máx}} = \frac{\alpha\lambda}{2}\left(1 - \frac{\nu}{3}\right)^{3/2} \frac{b^3}{(1-\nu)\sqrt{1+\nu}}.$$

*c*) Si se emplea la tensión de Von Mises, $\sigma_{VM}$, para determinar la tensión efectiva en un punto de un sólido elástico deformable, ¿es correcta la suposición adoptada de que no se excede el límite elástico del material? Desarrolle su respuesta.

Además, se pide que muestre que

$$r^* = b\sqrt{\frac{2}{7}} = \underset{r\in[0,b]}{\arg\min}\, \sigma_{VM},$$

siendo las tensiones principales para $r^*$ dadas como

$$\sigma_r^* = 5\sigma_\theta^*, \qquad \sigma_z^* = 6\sigma_\theta^*, \qquad \sigma_{VM}^* = \sqrt{21}|\sigma_\theta^*|,$$

mientras que $\sigma_\theta^* = -\dfrac{E\alpha\lambda}{4(1-\nu)}\dfrac{b^2}{7}$.

Considere los siguientes valores: $b = 1$ cm, $E = 120$ GPa, $\nu = 0.35$, $\alpha = 16.7 \times 10^{-6}/\text{C}^\circ$, $\lambda = 4 \times 10^5\ \text{C}^\circ/\text{m}^2$, siendo la tensión de fluencia $\sigma_Y = 70$ MPa.

# Ejercicio 7.

Determinar las tensiones a las que esta sometida la siguiente viga curva haciendo uso de la siguiente función de Airy

$$\phi = a_0 + a_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r.$$

Las condiciones de borde son:

$$\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0,$$
$$\tau_{r\theta}(a) = \tau_{r\theta}(b) = 0,$$
$$\int_a^b \sigma_\theta\, dr = 0,$$
$$\int_a^b \sigma_\theta r\, dr = -M.$$

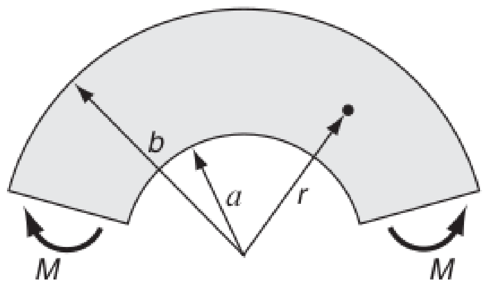


Figura 2: Ejercicio 7.

## Ejercicio 8.

Mediante un proceso de ajuste por contracción, un cilindro sólido rígido de radio $r_1+\delta$ debe insertarse en el cilindro hueco de radio interior $r_1$ y radio exterior $r_2$ (como se muestra en la siguiente figura). Este proceso crea una condición de frontera de desplazamiento $u_r(r_1)=\delta$. La superficie exterior del cilindro hueco debe permanecer libre de tensiones. Suponiendo condiciones de deformación plana, determine el campo de esfuerzos resultante dentro del cilindro ($r_1 < r < r_2$).

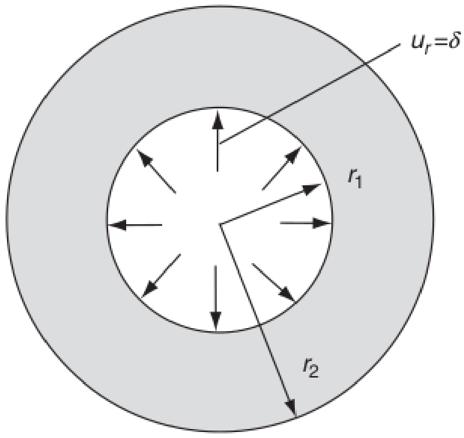


Figura 3: Ejercicio 8.

## Ejercicio 9.

Considere el problema de un disco anular con un radio interno fijo y cargado con un esfuerzo cortante uniforme t sobre el radio externo. Utilizando la función de tensión de Airy:

$$\phi = a_4\theta,$$

demuestre que la solución de tensión y desplazamiento para este problema está dada por

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = \tau\frac{r_2^2}{r^2},$$

$$u_r = 0, u_\theta = \frac{1+\nu}{E}\tau r_2^2\left(\frac{r}{r_1^2} - \frac{1}{r}\right).$$

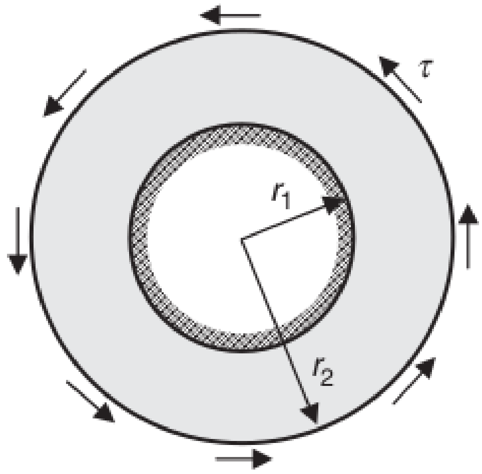


Figura 4: Ejercicio 9.

## Ejercicio 10.

Se coloca una cierta cantidad de agua dentro de los confines de un cilindro de acero, que descansa sobre un soporte. El radio interno del cilindro es de 25 $cm$ y su espesor es de $2cm$. Mediante una prensa se comprime el líquido con una carga de $P = 500\ kN$, considere temperatura ambiente de $20℃$.

Se pide:

a) Realizar un modelo idealizado que permita resolver el estado de tensiones y deformaciones del cilindro. Obtener las expresiones y graficar el desplazamiento radial, las deformaciones y las tensiones. Determinar las expresiones de las tensiones máximas, así como sus valores numéricos sobre el tubo.

b) Repita el inciso a) en el caso de que se incremente, mediante un proceso suficientemente lento (mediante una resistencia eléctrica), la temperatura del agua dentro del tubo, por $180℃$.

c) Analizar si en alguno de los casos a) ó b) se alcanza el valor máximo de tensión admisible.

Parámetros:

- $\alpha_s$ coeficiente de expansión térmica lineal del acero.
- $\alpha_a$ coeficiente de expansión térmica volumétrica del agua.
- $E$ módulo de Young del acero.
- $\nu$ coeficiente de Poisson del acero.
- $R$ radio interno del tubo.
- $t$ espesor del tubo.
- $P$ carga aplicada en el pistón.
- $T_a$ temperatura ambiente.
- $T_b$ temperatura del líquido luego de calentarse.
- Wikipedia: expansión térmica.
- Propiedades del agua.

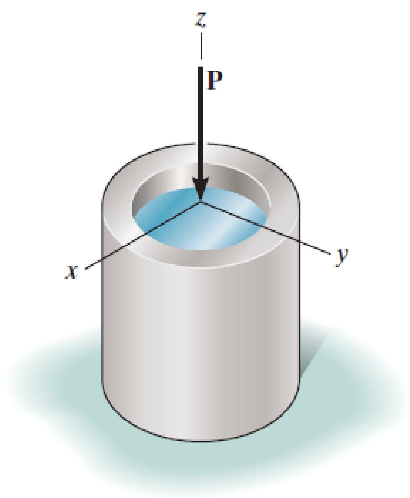


Figura 5: Ejercicio 10.