

Mecánica de los Sólidos – Unidad 6C

Flexión y corte en vigas

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, octubre de 2021



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



Contenido

- 5 5. Energía elástica en flexión
- 6 6. Inicio de fluencia en flexión
- 7 7. Flexión pura de vigas asimétricas
- 8 8. Flujo de corte en secciones abiertas de pared delgada
 - Bibliografía

3.1 Tensiones en vigas simétricas bajo fuerza de corte y momento flector

- Como se discutido previamente, es plausible *suponer que la distribución de la tensión de flexión (2.10)*

$$\sigma_x = -\frac{M_b}{I_{zz}}y, \quad (2.10)$$

es válida incluso cuando existe una fuerza de corte.

- Por lo tanto, en ingeniería, la teoría de vigas supone que la distribución de tensiones longitudinales o de flexión en una ubicación x viene dada por (2.10).
- Cabe señalar, sin embargo, que en flexión simple la deformada de la directriz no es un arco de circunferencia, ya que la curvatura variará de sección a sección, al variar el momento flector actuante.
- En flexión simple recta, la deformada de la línea media es necesariamente una curva plana, pero no de curvatura constante.

5. Energía elástica en flexión

- La energía de deformación en un cuerpo linealmente elástico sometido a una distribución arbitraria de esfuerzos y deformaciones viene dada por la [fórmula de Clapeyron](#)^{*}.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV, \quad (5.1)$$

donde la integración es sobre todo el volumen de la viga V .

- Ahora especializaremos ese resultado a vigas sometidas a flexión.
- Consideramos primero el [caso de flexión pura](#) donde el único componente de tensión que no desaparece es la tensión longitudinal [\(2.10\)](#).
- La energía de deformación total [\(5.1\)](#) se reduce así a

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_V \frac{\sigma_x}{2E} dV. \quad (5.2)$$

*Unidad 3B, Sección 2.4.

- Sustituyendo σ_x de (2.10), encontramos

$$U = \int_V \frac{1}{2E} \left(\frac{M_b y}{I_{zz}} \right)^2 dV = \int_L \frac{1}{2E} \left(\frac{M_b}{I_{zz}} \right)^2 dx \int_A y^2 dA,$$

donde las integraciones están sobre la longitud L y el área de la sección transversal A de la viga.

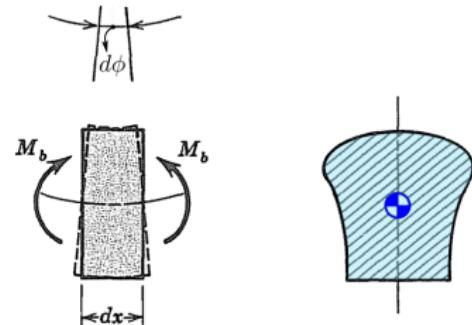
- Dado que la última integral es solo el segundo momento del área I_{zz} , la energía de deformación por flexión es

$$U = \int_L \frac{M_b^2}{2EI_{zz}} dx, \quad (5.3)$$

es decir, en el **caso de flexión pura**.

- La expresión anterior, Ec. (5.3), también puede derivarse considerando cada elemento diferencial de longitud dx para actuar como un resorte de flexión.

- En la figura se muestra un elemento diferencial de la viga el cual se dobla a través del ángulo $d\phi$ bajo la acción del momento flector M_b .



- Si, en la figura, los valores finales del momento flector y del ángulo flector son M_b y $d\phi$, respectivamente, el trabajo realizado durante un proceso de carga en el que estos crecen en proporción es

$$dU = \frac{1}{2}M_b d\phi = \frac{1}{2}M_b \frac{d\phi}{dx} dx.$$

- De (2.8), se tiene $\frac{d\phi}{dx} = M_b/(EI_{zz})$, si esto se sustituye en la expresión anterior y el resultado se integra sobre la longitud de la viga, obtenemos (5.3) nuevamente.

- Como hemos visto previamente, cuando una viga se somete a cortante transversal además de flexión, existen, en general, componentes de esfuerzo cortante transversal τ_{xy} y τ_{xz} además del esfuerzo de flexión σ_x .
- La energía de deformación total (5.1) se convierte en

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \\ &= \int_V \frac{\sigma_x}{2E} dV + \int_V \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} dV, \end{aligned} \quad (5.4)$$

- La primera integral de (5.4) es idéntica en forma a la energía de deformación (5.3) en flexión pura.
- La segunda integral de (5.4) es la contribución a la energía de deformación debida a los esfuerzos cortantes transversales.
- Para miembros delgados, la contribución debida a los esfuerzos cortantes transversales τ_{xy} y τ_{xz} , es casi siempre insignificante en comparación con la acción de la tensión longitudinal σ_x .

- La afirmación precedente puede inferirse de la discusión en la Sección 3.4 sobre las magnitudes comparativas de los esfuerzos de flexión y cortante.
- Si σ_x es un orden de magnitud mayor que τ_{xy} y τ_{xz} , entonces, dado que las integrales en (5.4) dependen de los cuadrados de las tensiones, vemos que la primera integral es *dos* órdenes de magnitud mayor que la segunda.
- Como consecuencia, es común ignorar la contribución a la energía de deformación debida a los esfuerzos cortantes transversales.
- La fórmula de flexión pura (5.3) se usa frecuentemente para representar la energía de deformación total en una viga, ya sea que haya cortante transversal o no.
- En cualquier caso particular, la magnitud de la segunda integral en (5.4) es posible de ser estimada, siempre que se pueda determinar una distribución aproximada de τ_{xy} y τ_{xz} .

Ejercicio 6.1: Considere la viga rectangular del Ejemplo 3.2, calcule la energía de deformación total y muestre que las magnitudes relativas de las contribuciones a la flexión y al corte está dada como

$$\frac{U_s}{U_b} = \frac{6E}{5G} \left(\frac{h}{L}\right)^2 = \frac{12}{5}(1+\nu) \left(\frac{h}{L}\right)^2,$$

donde U_b es la contribución de flexión a la energía de deformación, y U_s es la contribución de corte transversal a la energía.

- Por lo tanto, una viga con $L > 10h$ y con una relación de Poisson $\nu = 0.28$, la contribución por corte es menos del 3 % de la contribución de flexión.
- Para propósitos de ingeniería, es permisible ignorar la contribución de cortante transversal al evaluar la energía de deformación de la viga considerada.
- Para vigas con otras cargas y otras formas de sección transversal, la relación de U_s a U_b es siempre proporcional al cuadrado de la relación entre la profundidad de la viga y la longitud de apoyo.
- Sin embargo, el factor de proporcionalidad depende del patrón de carga y de la forma de la sección transversal. Por ejemplo, el factor numérico de $6/5$ puede ser tan grande como 12 para vigas I.

6. Inicio de fluencia en flexión

- Cuando una viga se somete a flexión pura, el estado de tensión es uno en el que las tensiones principales vienen dadas por

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

que es el estado de estrés que existe en una prueba de tracción (o compresión).

- Por tanto, si el material tiene un límite de fluencia σ_Y en tensión simple, el criterio de fluencia en flexión pura es simplemente que la fluencia ocurrirá cuando

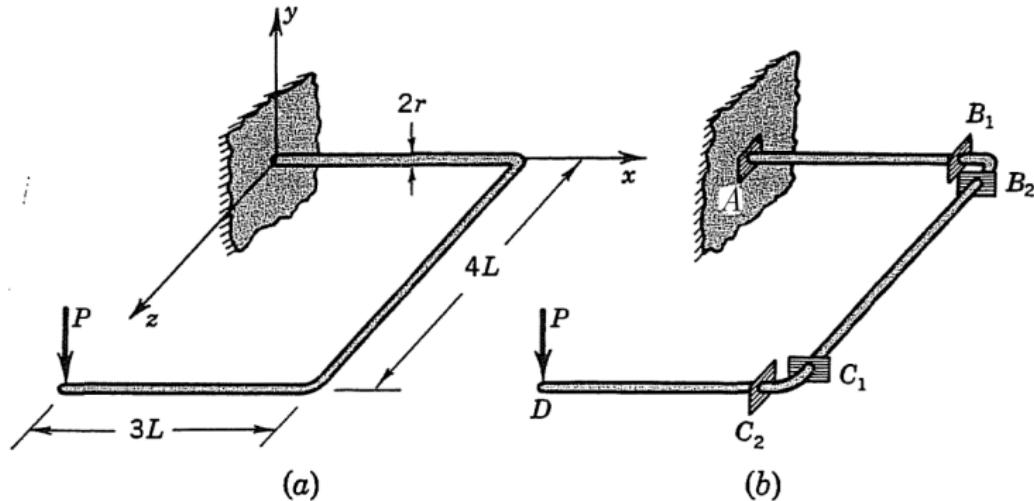
$$\sigma_x = \sigma_Y.$$

- Tan pronto como el estado de tensión se vuelve más complejo (p. ej. mediante la adición de fuerzas cortantes o de torsión o fuerzas longitudinales), el inicio de la fluencia por deformación incluye el tipo de análisis de tensión combinado descrito en la [Sección 4](#).

- Hay dos criterios disponibles para señalar el inicio del rendimiento: el criterio de von Mises y el criterio de esfuerzo cortante máximo **.
- La determinación del punto crítico donde la estructura cede y las condiciones de carga que lo producen, incluso en estructuras relativamente simples, puede no ser obvio.
- Por lo cual en la práctica ingenieril es preciso realizar cálculos para más de un punto bajo sospecha, como se ilustra en el siguiente ejemplo.
- En la práctica profesional de ingeniería mecánica, en diseño de máquinas y herramientas, es común que los efectos del alabeo por flexión de las secciones transversales deban ser considerados.

** También conocido como criterio de rendimiento de Tresca.

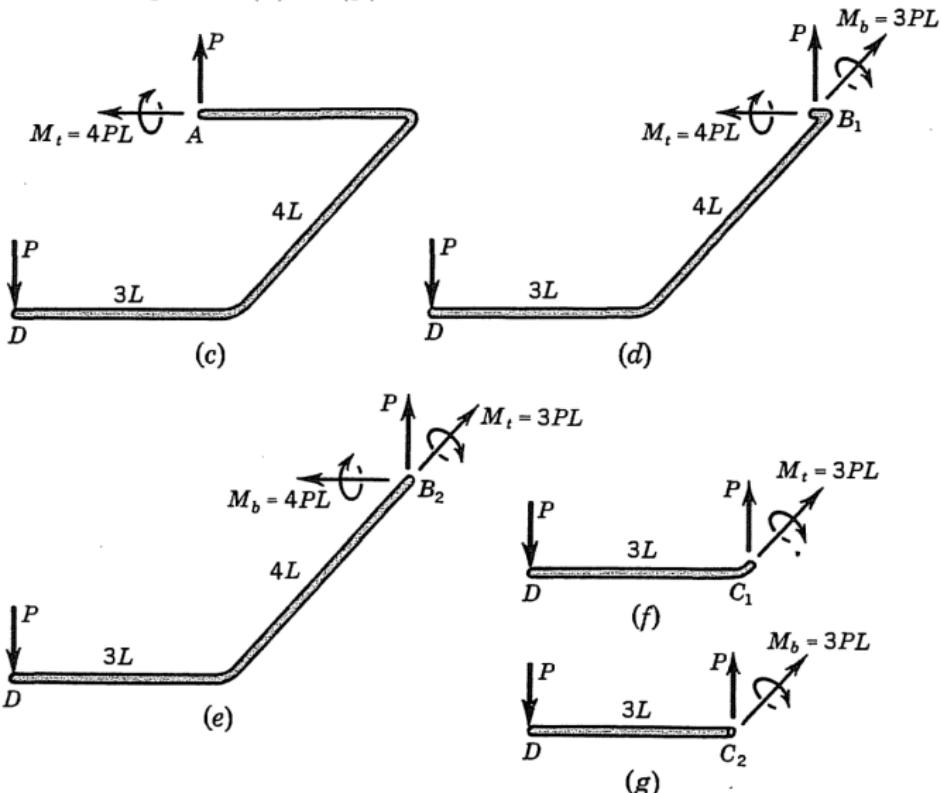
- **Ejemplo 6.1:** Una varilla circular de radio r se dobla en forma de U para formar la estructura que se muestra en la figura (a).



- El material de la varilla tiene un límite elástico σ_Y en tensión simple.
- Deseamos determinar la carga P que hará que la fluencia comience en algún punto de la estructura.
- Como se indica en la figura (b), hay 5 ubicaciones posibles para el punto con mayor tensión crítica.

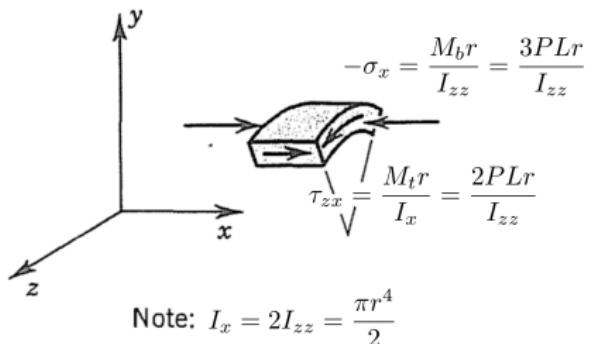
• **Ejemplo 6.1 (cont.):**

- Los momentos de flexión y torsión que actúan en estas ubicaciones se muestran en las figuras (c) a (g).

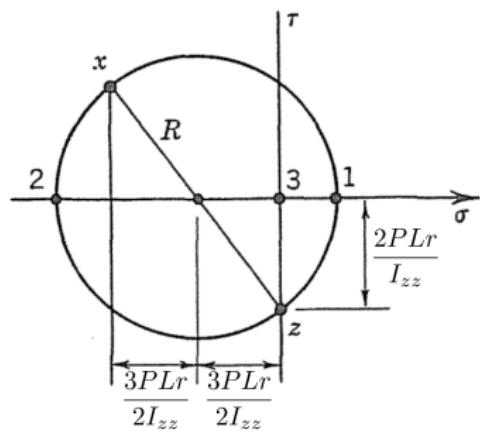


● Ejemplo 6.1 (cont.):

- De considerar los 5 puntos de mayor tensión crítica, la elección se reduce a la ubicación B_1 o B_2 ; pero no es obvio cuál de estos es el más crítico.
- Los esfuerzos cortantes por flexión y torsión que actúan sobre un elemento en la parte superior de la viga en la ubicación B_1 se indican en la figura (a).



(a)



- Aunque existe una fuerza cortante P en esta ubicación, el esfuerzo cortante correspondiente τ_{xy} es cero en la parte superior e inferior de la viga donde los esfuerzos cortantes por flexión y torsión son máximos.

● Ejemplo 6.1 (cont.):

- El radio del círculo de Mohr para el elemento en B_1 , que se muestra en la figura (a), es

$$R = \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{PLr}{I_{zz}}\right)^2 + \left(2 \frac{PLr}{I_{zz}}\right)^2} = \frac{5}{2} \frac{PLr}{I_{zz}}. \quad (\text{a})$$

- Usando (a), encontramos que las tensiones principales en el punto son

$$\sigma_1 = +\frac{PLr}{I_{zz}}, \quad \sigma_2 = -4 \frac{PLr}{I_{zz}}, \quad \sigma_3 = 0. \quad (\text{b})$$

- **Ejemplo 6.1 (cont.):**

- Sustituyendo (b) en el criterio de cedencia de von Mises,

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{PLr}{I_{zz}} + 4 \frac{PLr}{I_{zz}} \right)^2 + \left(-4 \frac{PLr}{I_{zz}} - 0 \right)^2 + \left(0 - \frac{PLr}{I_{zz}} \right)^2 \right]} = \sigma_Y,$$

obtenemos el resultado de que la fluencia comienza cuando

$$P = 0.218 \frac{I_{zz}\sigma_Y}{Lr}.$$

- Sustituyendo (b) en el criterio de esfuerzo cortante máximo,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{PLr}{I_{zz}} + 4 \frac{PLr}{I_{zz}} \right) = \frac{\sigma_Y}{2},$$

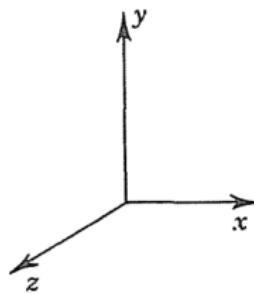
encontramos que la cedencia se predice cuando

$$P = 0.200 \frac{I_{zz}\sigma_Y}{Lr}.$$

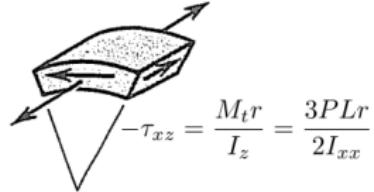
- Note la discrepancia del 9 % entre las cargas predichas por los dos criterios.

● **Ejemplo 6.1 (cont.):**

- Los esfuerzos cortantes por flexión y torsión que actúan sobre un elemento en la parte superior de la viga en la ubicación B_2 se indican en la figura (b).

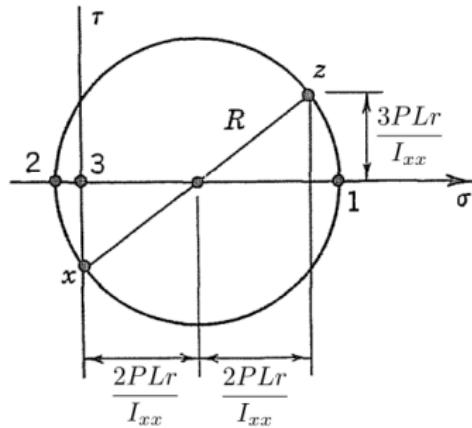


$$\sigma_z = \frac{M_b r}{I_{xx}} = \frac{4PLr}{I_{xx}}$$



$$\text{Note: } I_z = 2I_{xx} = \frac{\pi r^4}{2}; \quad I_{xx} = I_{zz}$$

(b)



- Repitiendo los cálculos anteriores para el elemento en la parte superior de la viga en la ubicación B_2 , encontramos que los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = +\frac{9}{2} \frac{PLr}{I_{xx}}, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2} \frac{PLr}{I_{xx}}, \quad \sigma_3 = 0.$$

- **Ejemplo 6.1 (cont.):**

- Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de von Mises, el rendimiento ocurre cuando

$$P = 0.210 \frac{I_{xx}\sigma_Y}{Lr},$$

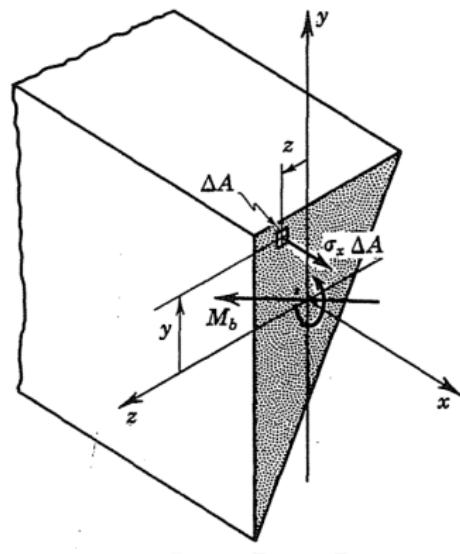
mientras que de acuerdo con el criterio de esfuerzo cortante máximo, la fluencia ocurre cuando

$$P = 0.200 \frac{I_{xx}\sigma_Y}{Lr}.$$

- El criterio de esfuerzo cortante máximo predice el rendimiento en las ubicaciones B_1 y B_2 con la misma carga, lo que indica que los círculos de Mohr en la figura (a) y (b) son del mismo tamaño.
- El criterio de von Mises identifica B_2 como la ubicación crítica y predice el rendimiento allí con una carga un 5 % mayor que la carga para el rendimiento de acuerdo con el criterio de esfuerzo cortante máximo.

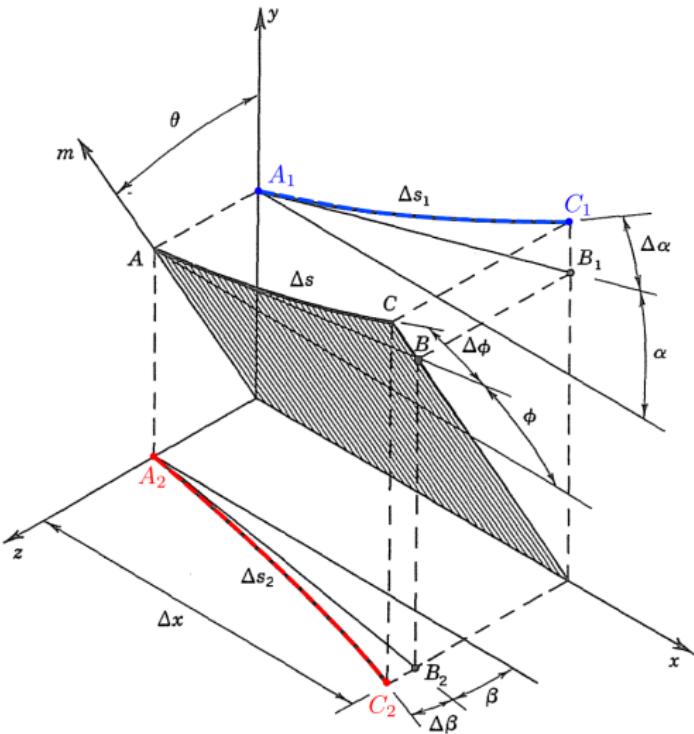
7. Flexión pura de vigas asimétricas

- En esta sección ampliaremos la teoría de la flexión pura de vigas elásticas, mas allá del caso fundamental de una sección recta simétrica deformada en su plano de simetría.
- Como antes, derivamos la distribución de la tensión de flexión sobre la sección transversal solo para el caso de flexión pura.
- De acuerdo con la teoría de ingeniería de la flexión, simplemente asumimos que ocurre la misma distribución en presencia de cortante transversal.
- Nuestros resultados se aplicarán a vigas de sección recta simétrica cargadas asimétricamente y a vigas asimétricas.
- El caso general se ilustra en la figura, donde una viga de sección transversal arbitraria (mostrada como triangular para ayudar en la visualización) transmite un momento flector M_b de orientación arbitraria.



- Nuestro procedimiento será similar al que se sigue para vigas simétricas, aunque aprovecharemos los resultados ya obtenidos.
- Primero estudiaremos la geometría de una curva cuyo plano de curvatura tiene una orientación arbitraria.
- Demostraremos que cuando los ángulos de la inclinación son pequeños, la curvatura resultante puede descomponerse en componentes de curvatura en dos planos perpendiculares.
- Las tensiones resultantes de estas componentes de curvatura se superponen para dar la distribución de tensiones y el momento flector correspondientes a la curvatura resultante.
- Esta solución también se puede invertir para proporcionar la curvatura cuando se da un momento flector arbitrario.
- Los resultados que obtendremos también son válidos para vigas sometidas a cargas cortantes transversales además del momento flector.

- Comenzamos considerando la geometría de la figura, donde la curvatura del área AC está en el plano xm que forma un ángulo θ con el plano xy .
- En la figura, AC es un elemento de un arco con curvatura $d\phi/ds$ en el plano xm .
- Las proyecciones de AC son A_1C_1 y A_2C_2 en los planos xy y xz , con curvatura $d\alpha/ds_1$ y $d\beta/ds_2$, respectivamente.
- Demostraremos que cuando el ángulo θ es pequeño, existe una relación muy simple entre la curvatura de AC y las curvaturas de las proyecciones A_1C_1 y A_2C_2 .

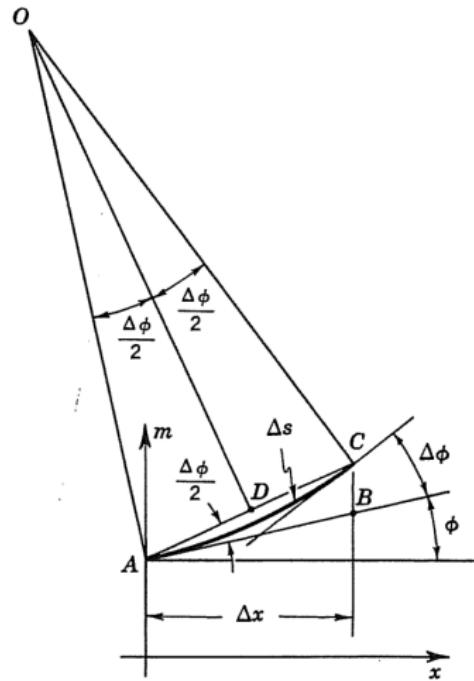


- En la figura mostramos el arco AC en el plano xm , donde la curva AC se representa en tamaño real.
- Por definición, su curvatura es

$$\frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}.$$

- Cuando ϕ es pequeño, el arco Δs es aproximadamente igual a su proyección Δx .
- El ángulo \widehat{CAB} entre la tangente y la cuerda en A es la mitad del ángulo central \widehat{AOC} (ver figura).
- Cuando ϕ y $\Delta\phi$ son pequeños, la intersección BC es aproximadamente

$$BC = \Delta x \frac{\Delta\phi}{2}.$$



- La curvatura AC , $d\phi/ds$, puede ser aproximada como sigue

$$\frac{d\phi}{ds} \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\overline{BC}}{(\Delta x)^2},$$

cuando ϕ es pequeño.

- Resultados similares se obtienen para las proyecciones A_1C_1 y A_2C_2

$$\frac{d\alpha}{ds_1} \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\overline{B_1C_1}}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{d\beta}{ds_2} \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\overline{B_2C_2}}{(\Delta x)^2}.$$

- Retrocediendo a la figura inicial, las relaciones entre B_1C_1 , B_2C_2 , y BC son

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC} \cos \theta,$$

$$\overline{B_2C_2} = \overline{BC} \sin \theta.$$

- Por lo tanto, combinando las expresiones anteriores vemos, que dentro de las limitaciones de que se trate de un ángulo pequeño, hemos establecido el hecho importante de que

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds_1} &= \frac{d\phi}{ds} \cos \theta, \\ \frac{d\beta}{ds_2} &= \frac{d\phi}{ds} \sin \theta.\end{aligned}\tag{7.1}$$

- Las curvaturas de las curvas proyectadas son simplemente las componentes de la curvatura de la curva original.
- Ahora aplicaremos este resultado a la flexión pura de una viga asimétrica. Supondremos que el eje neutro de una viga originalmente recta tiene precisamente la curvatura de $d\phi/ds$ en el plano xm , que se representa por el arco AC .
- A continuación determinaremos la distribución de tensiones debida a cada una de las dos curvaturas componentes (7.1) por separado y después superpondremos estos resultados para obtener la distribución debida a la curvatura resultante $d\phi/ds$ en el plano xm .

- La figura representa la distribución de tensiones flexoras debida a la curvatura $d\alpha/ds_1$, en el plano xy .
- Aquí el razonamiento se basa en el desarrollo dado al principio de esta Unidad. Es decir, suponemos que la deformación unitaria longitudinal viene aún dada por (2.2),

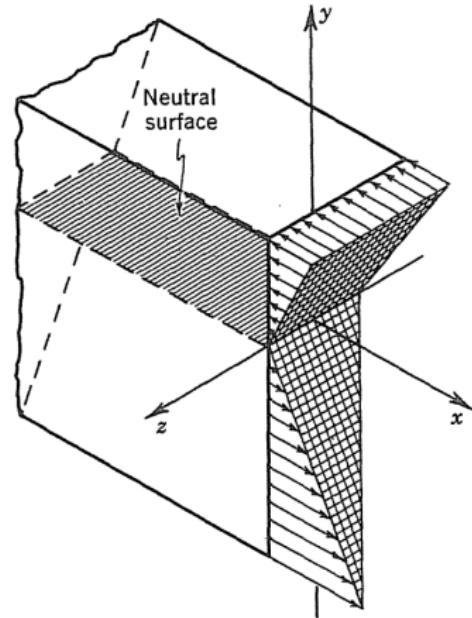
$$\varepsilon_x = -\frac{d\alpha}{ds_1}y. \quad (7.2)$$

- Suponiendo que como antes σ_x es la única componente de tensión distinta de cero, la ley de Hooke da

$$\sigma_x = -E \frac{d\alpha}{ds_1}y, \quad (7.3)$$

que es la distribución representada en la figura.

- A fin de que no haya una fuerza longitudinal resultante, de nuevo es necesario que la superficie neutra pase por el centroide de la sección recta.

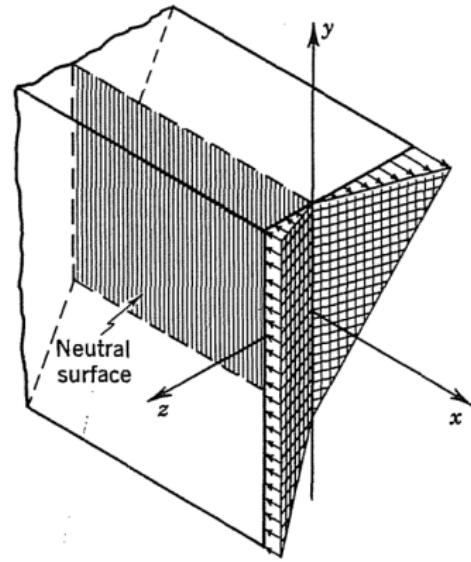


- La figura representa la distribución de tensiones flectoras debidas a la curvatura $d\beta/ds_2$ en el plano xz .
- Obtenemos la distribución de tensiones debida a la curvatura $d\beta/ds_2$, en el plano xz , de una manera completamente análoga

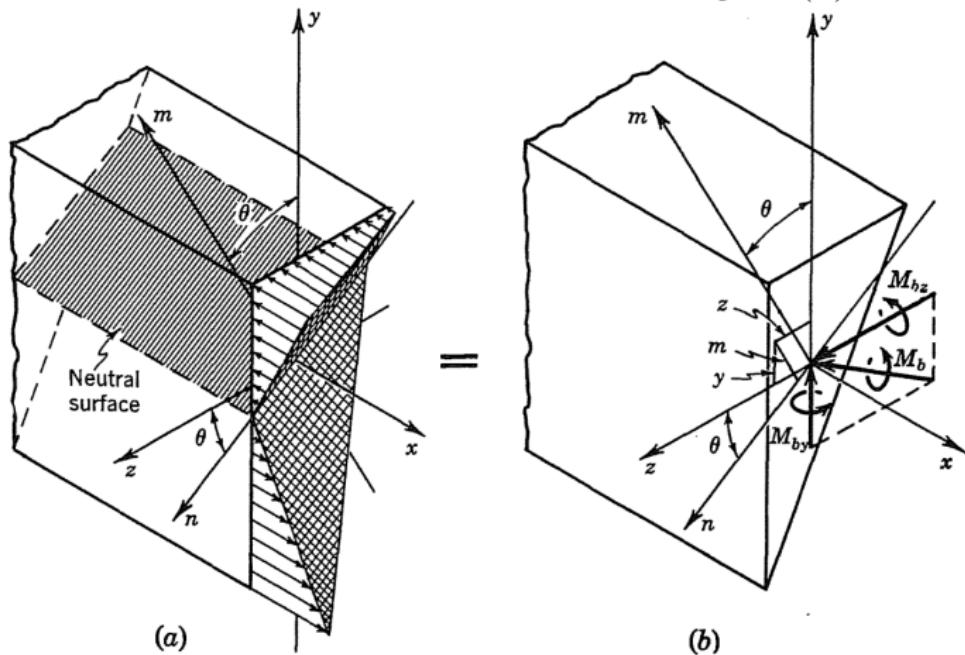
$$\sigma_x = -E \frac{d\beta}{ds_2} z, \quad (7.4)$$

que está representada en la figura.

- Aquí también la superficie neutra debe pasar por el centroide. Finalmente, consideraremos ahora el caso general en que hay una curvatura $d\phi/ds$ en el plano xz . Esta curvatura debe ser considerada como la suma de las componentes de curvatura (7.1).



- La tensión de flexión resultante se muestra en la figura (a).



- Esta se debe a la curvatura $d\phi/ds$ en el plano xm , viene dada por la suma de (7.3) y (7.4)

$$\sigma_x = -E \left(\frac{d\alpha}{ds_1} y + \frac{d\beta}{ds_2} z \right). \quad (7.5)$$

- La resultante de esta distribución de tensiones es el momento flector M_b , de la figura (b), cuyas componentes son M_{by} y M_{bz} . Siendo las resultantes

$$\begin{aligned} M_{bz} &= - \int_A y \sigma_x dA = E \left(\frac{d\alpha}{ds_1} \int_A y^2 dA + \frac{d\beta}{ds_2} \int_A yz dA \right), \\ M_{by} &= \int_A z \sigma_x dA = -E \left(\frac{d\alpha}{ds_1} \int_A yz dA + \frac{d\beta}{ds_2} \int_A z^2 dA \right), \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde las integrales se calculan en el área A de la sección recta.

- Representaremos estas integrales por los símbolos siguientes:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_A y^2 dA, \\ I_{yy} &= \int_A z^2 dA, \\ I_{yz} &= \int_A yz dA. \end{aligned} \quad (7.7)$$

- Las dos primeras, I_{zz} y I_{yy} , son los *momentos de inercia* del área de la sección recta, y la tercera, I_{yz} se llama *producto de inercia* del área de la sección recta respecto a los ejes y y z .

- Se puede demostrar (ver Prob. 7.9 [?]) que siempre hay alguna orientación de los ejes y, z , aún en secciones rectas asimétricas, para los que se anula el producto de inercia. Los ejes para los que se anula se llaman *ejes principales de inercia*.
- Mediante la notación (7.7), podemos escribir (7.6) como sigue:

$$\begin{aligned} M_{bz} &= E \left(I_{zz} \frac{d\alpha}{ds_1} + I_{yz} \frac{d\beta}{ds_2} \right), \\ M_{by} &= -E \left(I_{yz} \frac{d\alpha}{ds_1} + I_{yy} \frac{d\beta}{ds_2} \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

- Por último, podemos expresar estos componentes del momento en función de la curvatura resultante $d\phi/ds$ del eje neutro y el ángulo θ que sitúa el plano de la curvatura resultante mediante (7.1)

$$\begin{aligned} M_{bz} &= E \frac{d\phi}{ds} (I_{zz} \cos \theta + I_{yz} \sin \theta), \\ M_{by} &= -E \frac{d\phi}{ds} (I_{yz} \cos \theta + I_{yy} \sin \theta). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Este par de ecuaciones puede considerarse como la generalización de la relación momento-curvatura, Ec. (2.8).

- Las ecuaciones (7.9) de hecho se reducen a (2.8) cuando la curvatura está en el plano xy ($\theta = 0$) y el plano xy es un plano de simetría ($I_{yz} = 0$).
- En general, la orientación del momento flector resultante no es paralela a la superficie neutra.
- A partir de (7.9) se puede demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el vector del momento flector sea paralelo a la superficie neutra es que el vector del momento flector debe ser paralelo a un eje principal de inercia de la sección transversal.
- Para una curvatura conocida $d\phi/ds$ con orientación conocida θ , podemos usar (7.9) para obtener los componentes del momento flector. Se da la distribución de la tensión de flexión por (7.5), y al usar (7.1) tenemos

$$\sigma_x = -E \frac{d\phi}{ds} [y \cos \theta + z \sin \theta], \quad (7.10)$$

que puede considerarse como una generalización de (2.5). Observe que el término entre corchetes a la derecha de (7.10) es igual a la coordenada m en la figura (b), pág. 26.

- Las dos relaciones (7.9) y (7.10) producen la solución completa cuando se da la curvatura $d\phi/ds$.

- Para resolver el problema opuesto, es decir, encontrar la curvatura y las tensiones cuando se da el momento flector, *invertimos* nuestros resultados anteriores.
- Volviendo a (7.8), consideramos que los componentes del momento flector son conocidos y resolvemos los componentes de la curvatura

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds_1} &= \frac{d\phi}{ds} \cos \theta = \frac{M_{bz}I_{yy} + M_{by}I_{yz}}{E(I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2)}, \\ \frac{d\beta}{ds_2} &= \frac{d\phi}{ds} \sin \theta = -\frac{M_{bz}I_{yz} + M_{by}I_{zz}}{E(I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2)}.\end{aligned}\quad (7.11)$$

- Este par de expresiones nos permite resolver la magnitud y la orientación de la curvatura resultante.
 - La magnitud viene dada por la raíz cuadrada de las sumas de los cuadrados de los componentes de curvatura.
 - La tangente de θ está dada por su cociente.

- Podemos obtener la distribución de esfuerzos resultante sin calcular las curvaturas de los componentes simplemente sustituyendo (7.11) en (7.5) para obtener

$$\sigma_x = -\frac{(yI_{yy} - zI_{yz})M_{bz} + (yI_{yz} - zI_{zz})M_{by}}{I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2}. \quad (7.12)$$

- En la figura (a) se muestra esta distribución de esfuerzos, mientras que en (b) los componentes del momento flector (pág. 26).
- La distribución (7.12) puede considerarse como la generalización de (2.10). Tenga en cuenta que (7.12) de hecho se reduce a (2.10) cuando $M_{by} = 0$ y cuando $I_{yz} = 0$.
- Tenga en cuenta también que la intersección de la superficie neutra y el plano yz (i.e, el eje n en la figura que se muestra en la pág. 26) es el lugar geométrico de los puntos para los cuales $\sigma_x = 0$ en (7.12).

- Al aplicar la teoría anterior a casos prácticos, por lo general es posible orientar el sistema de coordenadas de modo que algunos de los términos de la ecuación desaparezcan.
- Un enfoque, y probablemente el más simple, es elegir los ejes y , z de manera que sean ejes principales de inercia para la sección transversal.
- Otro enfoque es alinear el eje y o z con el vector de momento resultante; esto también resulta en una simplificación de las ecuaciones.
- El último enfoque se utiliza en el siguiente ejemplo.

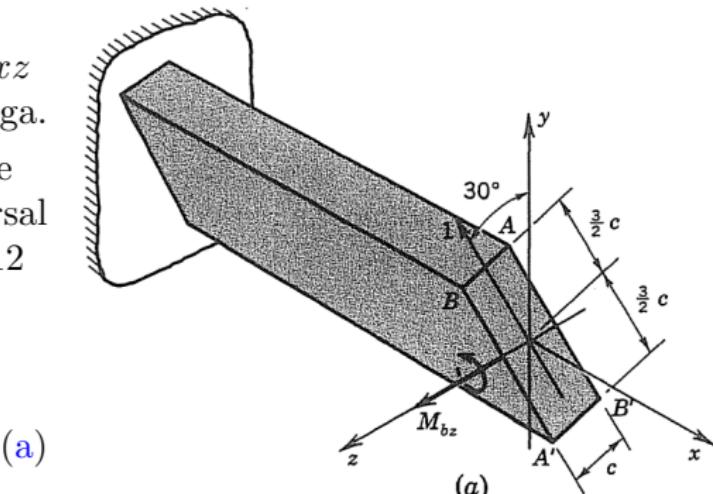
- **Ejemplo 7.1:** Una viga en voladizo rectangular transmite un momento flector cuyo plano de acción está inclinado 30° con respecto al eje mayor de simetría, como se muestra en la figura (a).

- Se desea determinar las curvaturas en los planos xy y xz y el esfuerzo de flexión en la viga.
- Los momentos y el producto de inercia para la sección transversal de la viga son (vea el Prob. 7.12 [?])

$$I_{zz} = \frac{7}{4}c^4,$$

$$I_{yy} = \frac{3}{4}c^4,$$

$$I_{yz} = 0.87c^4.$$



● **Ejemplo 7.1 (cont.):**

- Sustituyendo las expresiones de (a) en la primera de (7.11), encontramos

$$\frac{d\alpha}{ds_1} = \frac{\frac{3}{4}c^4}{(\frac{7}{4}c^4)(\frac{3}{4}c^4) - 0.87c^4} \frac{M_{bz}}{E} = 1.36 \frac{M_{bz}}{Ec^4}. \quad (\text{b})$$

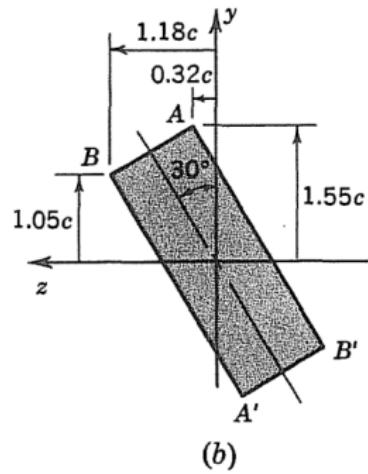
- A partir del segundo de (7.11) obtenemos

$$\frac{d\beta}{ds_2} = -\frac{I_{yz}}{I_{yy}} \frac{d\alpha}{ds_1} = -\frac{0.87c^4}{\frac{3}{4}c^4} \left(1.36 \frac{M_{bz}}{Ec^4} \right) = -1.58 \frac{M_{bz}}{Ec^4}. \quad (\text{c})$$

- La tensión de flexión será máxima en una esquina, ver figura (b).
- Investigaremos las esquinas A y B ; las tensiones en A' y B' tendrán el signo invertido.
- Sustituyendo las coordenadas de A y B en (7.12), obtenemos:

$$\text{En } A: \sigma_x = -1.60 \frac{M_{bz}}{c^3}. \quad (\text{d})$$

$$\text{En } B: \sigma_x = +0.44 \frac{M_{bz}}{c^3}.$$



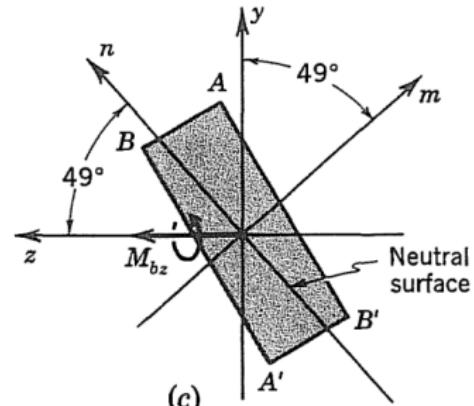
• **Ejemplo 7.1 (cont.):**

- Dado que las tensiones son de signo opuesto en las esquinas A y B, concluimos que la superficie neutra debe intersecar el lado AB.
- Esta conclusión se verifica cuando, a partir de (7.11), encontramos

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \left(-\frac{I_{yz}}{I_{yy}} \right) \\ &= \arctan \left(-\frac{0.87c^4}{\frac{3}{4}c^4} \right) \quad (\text{d}) \\ &= -49.2^\circ,\end{aligned}$$

que coloca la superficie neutra en la posición que se muestra en la figura (c).

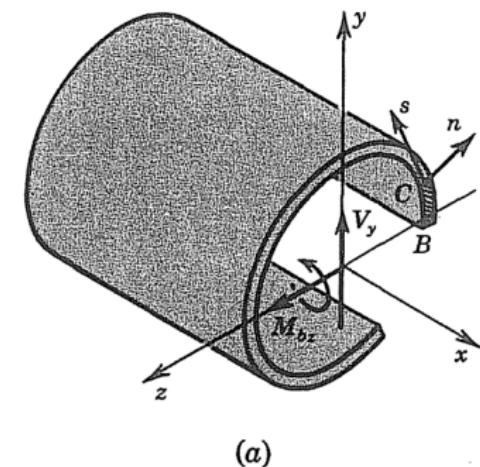
- Es interesante observar cómo la viga tiende a doblarse en su “plano débil”, es decir, qué tan cerca coincide la superficie neutra con el eje largo de simetría de la sección transversal.



8. Flujo cortante en secciones abiertas de pared delgada. Centro de corte.

- La determinación de los flujos cortantes en vigas asimétricas sigue el mismo proceso que el indicado anteriormente para vigas simétricas.
- Cuando están presentes fuerzas cortantes, el momento flector varía a lo largo de la longitud de la viga.
- Sin embargo, suponemos que las tensiones de flexión están distribuidas aún de acuerdo con (2.10). Entonces los flujos cortantes se obtienen de la condición de equilibrio longitudinal aplicada a los cuerpos libres de elementos de la viga.
- Limitaremos nuestro estudio a secciones abiertas de pared delgada.

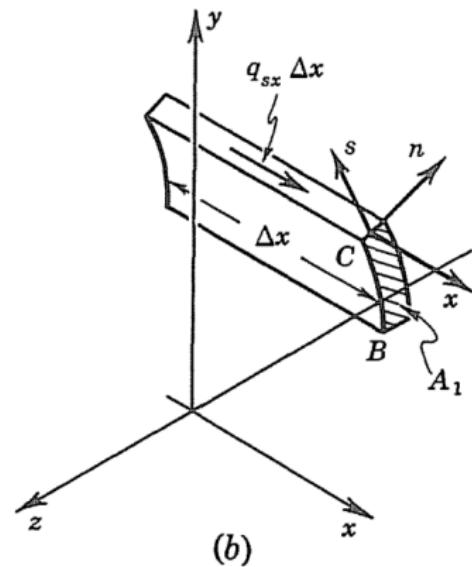
- Dada una pared delgada abierta, figura (a), determinaremos el flujo cortante en una viga asimétrica de sección transversal abierta de paredes delgadas por una carga en un plano paralelo al plano xy .
- Supondremos que el flujo cortante resultante en la sección recta tiene en cualquier punto la dirección s de la línea central de la pared; es decir, despreciamos cualquier flujo cortante en la dirección de la normal n .
- Esta hipótesis solo es válida en el límite de paredes infinitamente delgadas, pero proporciona una aproximación útil cuando el espesor es pequeño comparado con las dimensiones globales de la sección recta.
- En la figura (a), la viga asimétrica de sección abierta de pared delgada se carga en un plano paralelo al plano xy y, por lo tanto, $V_z = M_{by} = 0$.



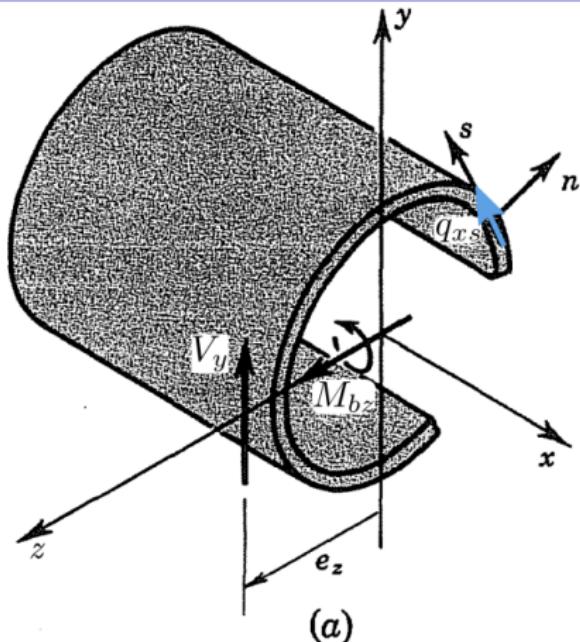
- Para calcular el flujo cortante en algún punto C de la sección transversal, aislamos el segmento BC que se muestra en la figura (b), donde B es un borde libre.
- La fuerza $q_{sx}\Delta x$ en la cara positiva s debe equilibrar las tensiones de flexión desiguales que actúan sobre los extremos del elemento.
- Llevando a cabo el análisis de la misma manera que en la Sección 3.1, con la excepción de que en lugar de (2.10) usamos (7.12) para σ_x , obtenemos

$$q_{xs} = q_{sx} = \frac{-V_y}{I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2} \left(I_{yy} \int_{A_1} y \, dA - I_{yz} \int_{A_1} z \, dA \right). \quad (8.1)$$

- Siendo las integrales, el primer momento del área sombreada A_1 en la figura (b), alrededor del plano $y = 0$ y alrededor del plano $z = 0$, respectivamente.



- Si ahora determinamos la resultante del flujo cortante q_{xs} que actúa sobre la cara de la sección transversal, encontraremos que es una fuerza V_y , pero en general esta fuerza no actuará a través del centroide como se indica en la figura anterior; más bien, la resultante se ubicará a una distancia, digamos e_z , del centroide, como se ilustra en la figura (a).

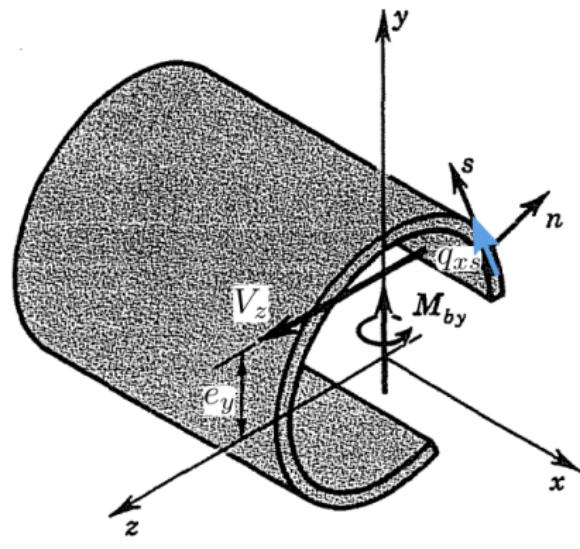


- Cuando la carga está en un plano paralelo al plano \$xz\$***, q_{xs} viene dado por

$$q_{xs} = q_{sx} = \frac{-V_z}{I_{zz} I_{yy} - I_{yz}^2} \left(I_{zz} \int_{A_1} z \, dA - I_{yz} \int_{A_1} y \, dA \right). \quad (8.2)$$

*** Problema 3.33 [?].

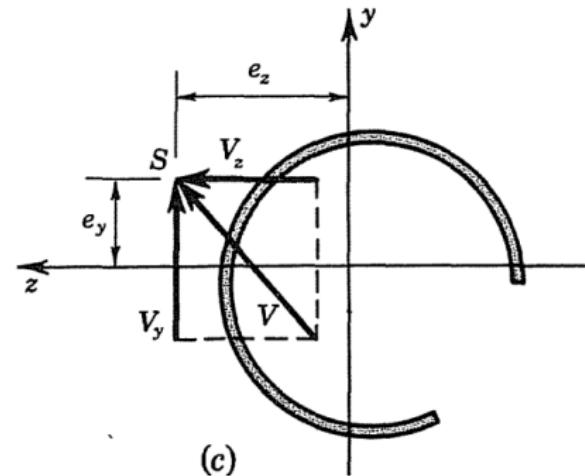
- La resultante del flujo cortante de (8.2) es una fuerza V_z que en general se ubicará a una distancia, digamos e_y , del centroide, como se ilustra en la figura (b).
- Las distancias e_z y e_y dependen únicamente del patrón del flujo cortante y son independientes de las magnitudes V_y y V_z .



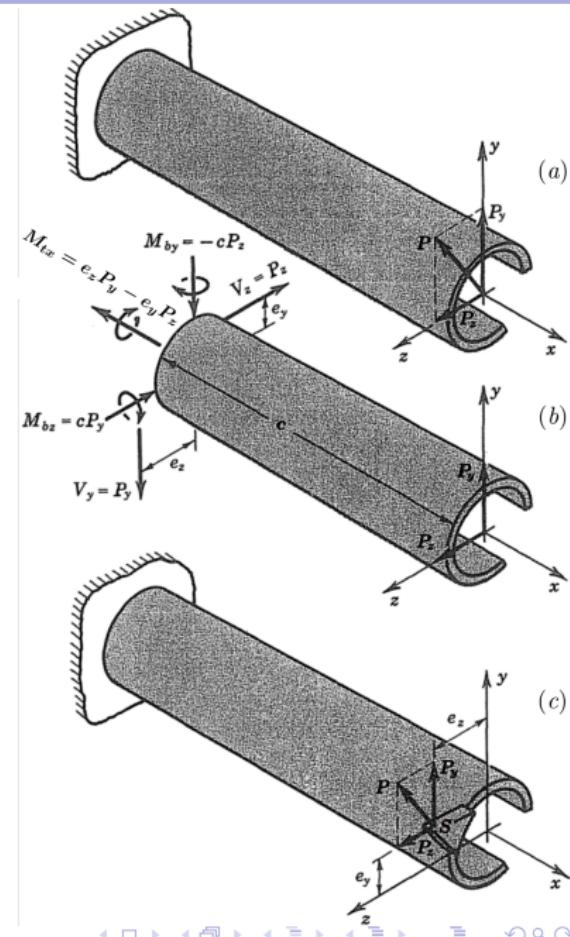
(b)

- Cuando las cargas de las figuras (a) y (b) se superponen para dar el caso general, la resultante de los flujos cortantes será una fuerza V que es la suma vectorial de V_y y V_z y cuya línea de acción debe pasar por el punto S con coordenadas (e_y, e_z) (ver figura siguiente).

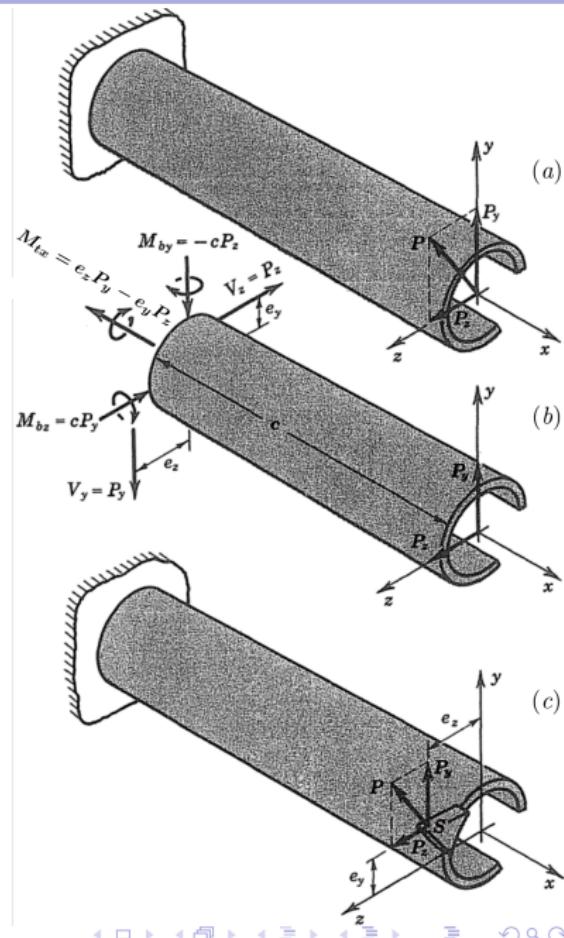
- El punto S con coordenadas (e_y, e_z) , que se muestra en la figura (c), se llama *centro de cortante*. La figura muestra los resultantes de las distribuciones de flujo cortante pasan a través del centro de cortante S .
- No importa cuál sea la magnitud u orientación de la fuerza de corte resultante V , la línea de acción de V pasará por el centro del cortante.
- Nótese que la ubicación de S depende de las distribuciones de flujo cortante (8.1) y (8.2), que a su vez dependen de la distribución de esfuerzos de flexión (7.12) que hemos asumido como válida para el caso de momento flector variable.
- Cada sección transversal de viga elástica tiene un centro de cortante S , aunque al utilizar la teoría de ingeniería de los esfuerzos en las vigas, solo podemos ubicar S en secciones simétricas y en secciones de paredes delgadas.



- En la figura se ilustra la presencia de un momento de torsión cuando la fuerza P no se aplica a través del centro de cortante S .
- En la figura se muestra una propiedad importante del centro de cortante, donde una viga en voladizo que tiene una sección transversal abierta se carga a través del centroide de la sección transversal del extremo mediante una fuerza P con componentes P_y y P_z .
- En la figura (b) se considera un cuerpo libre de la longitud e de la viga. Suponemos que los esfuerzos de flexión en la sección $x = -c$ se distribuyen de acuerdo con (7.12).
- Los flujos cortantes estarán dados por (8.1) y (8.2), y las componentes resultantes de la fuerza cortante tendrán las líneas de acción que se muestran en la figura (b).



- Para que el cuerpo libre de la figura esté en equilibrio, un momento de torsión M_{tx} debe actuar en el extremo izquierdo para mantener el momento de equilibrio alrededor del eje x .
- Debe haber deformaciones torsionales y tensiones en la viga para generar el momento de torsión M_{tx} , y, como consecuencia, la viga de la figura (a) se torcerá y se doblará cuando se aplique la fuerza P .
- Es evidente que si la fuerza P se aplicara en el centro de cortante S en la sección transversal final, como se ilustra en la figura (c), entonces el momento de torsión sería cero y la fuerza P produciría solo flexión.



- En resumen:
 - Por tanto, si se desea doblar una viga mediante fuerzas transversales *sin retorcer la viga*, cada fuerza transversal debe pasar a través del centro de cortante de la sección recta de aplicación.
 - Para ubicar el centro de corte, se encuentra la intersección de las resultantes de las distribuciones de flujo de corte para cargas sucesivas en dos planos perpendiculares, como se indica en la sección considerada en esta sección, ver figura en [pág. 41](#).
 - Cuando la sección tiene un eje de simetría, el centro de corte se encuentra en este eje y, por lo tanto, solo es necesario considerar la carga en el plano perpendicular a este eje.
- El siguiente es un ejemplo de cálculo en el caso de una sección recta en ángulo, es decir asimétrica.

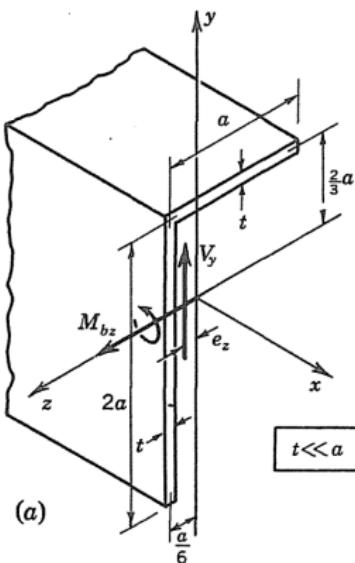
● **Ejemplo 8.1:** Deseamos determinar la distribución del flujo cortante en la sección en ángulo de la figura (a), cuya ubicación del centroide y momentos y producto de inercia obtenemos del Problema 7.7 [?], siendo

$$I_{yy} = \frac{4}{3}a^3t,$$

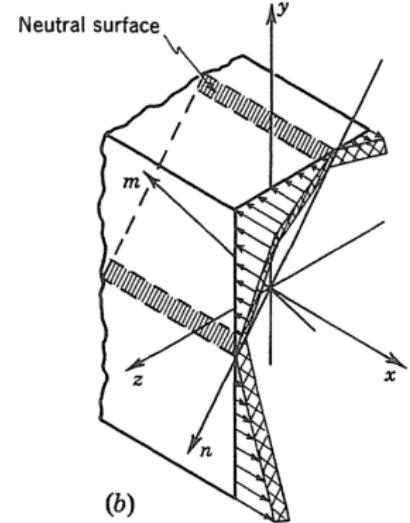
$$I_{zz} = \frac{1}{4}a^3t,$$

$$I_{yz} = -\frac{1}{3}a^3t.$$

(a)



(a)



(b)

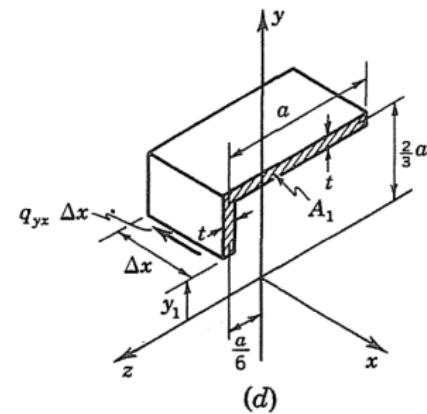
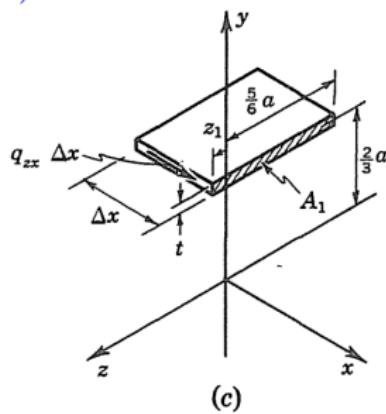
- En la figura se muestra el cálculo de la distribución del flujo cortante en una sección en ángulo de pared delgada debido a la carga en un plano paralelo al plano xy . La distribución del esfuerzo de flexión dada por (7.12) se muestra en la figura (b).

- **Ejemplo 8.1 (cont.):**

- Comenzamos considerando la carga en un plano paralelo al plano xy .
- El flujo cortante q_{xz} en el tramo horizontal se puede obtener de (8.1).
- Al desarrollar la relación (8.1) para q_{xs} , la coordenada s en la sección considerada aumentaba a medida que nos movíamos alrededor de la sección en sentido antihorario.
- En el brazo horizontal, la coordenada z aumenta a medida que nos movemos en sentido contrario a las agujas del reloj, por ende z corresponde a s . Por lo tanto, a partir de (8.1) podemos escribir

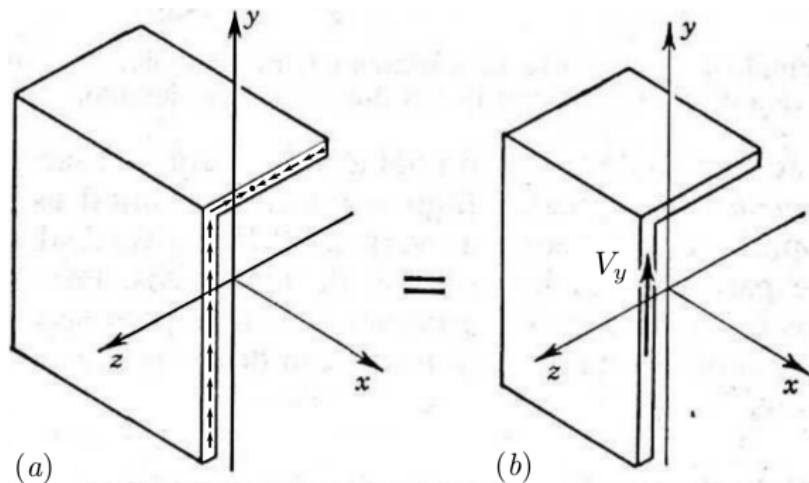
$$q_{xz} = q_{xs} = \frac{-V_y}{I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2} \left(I_{yy} \int_{A_1} y \, dA - I_{yz} \int_{A_1} z \, dA \right). \quad (\text{b})$$

● Ejemplo 8.1 (cont.): .



• Ejemplo 8.1 (cont.): .

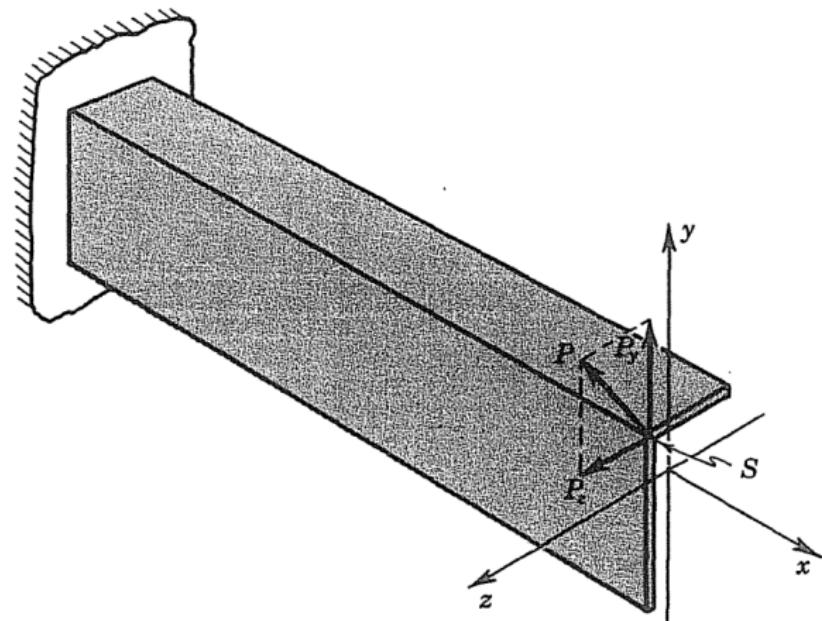
- Situación de la resultante de la distribución de flujo cortante.



Ejercicio 8.1: Determine las posiciones donde $q_{xz} = 0$ ¿En qué posición se posee el máximo flujo q_{xz} ? ¿Dicha posición es la que presenta el máximo valor absoluto? Realice una figura y discuta los resultados obtenidos.

- Ejemplo 8.1 (cont.): .

- El centro de cortante para cualquier sección en ángulo de paredes delgadas está en la intersección de los dos lados del ángulo.



Bibliografía

-  Stephen H. Crandall, Norman C. Dahl, Thomas J. Lardner, M. S. Sivakumar (2012).
An Introduction to the Mechanics of Solids. 3rd Ed. with SI Units, McGraw-Hill, New York, 2012.
-  James M. Gere, Barry J. Goodno (2016).
Mecánica de Materiales. 8va Ed., Cengage Learning, México, 2016.
-  Russel C. Hibbeler (2017).
Mecánica de Materiales. 9na Ed., Pearson, México, 2017.
-  Ansel C. Ugural, Saul K. Fenster (2020).
Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity. 6th Ed., Academic Press, London, UK, 2020.

Fin

