

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 6A

## Flexión y corte en vigas

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, octubre de 2021



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



# Contenido

## 1. Introducción

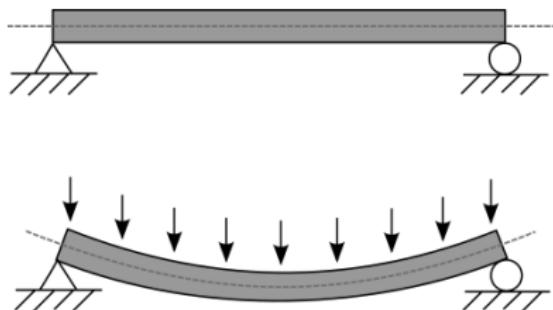
## 2. Flexión pura recta

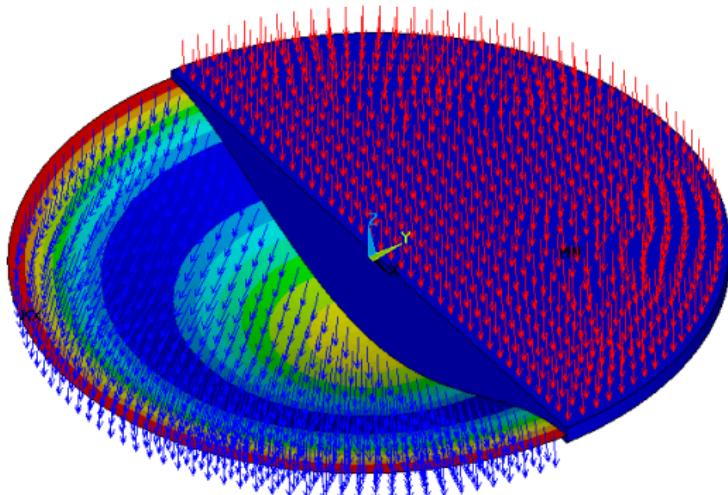
- 2.1 Geometría de la deformación
- 2.2 Estado de tensiones correspondiente
- 2.3 Condiciones de equilibrio
- 2.4 Modelo de flexión pura
- 2.5 Resumen flexión pura

## • Bibliografía

# 1. Introducción

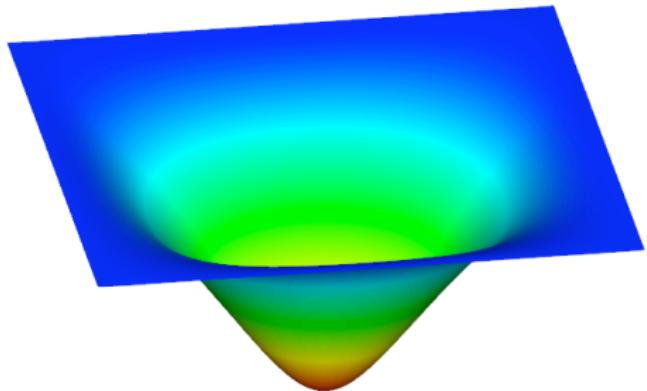
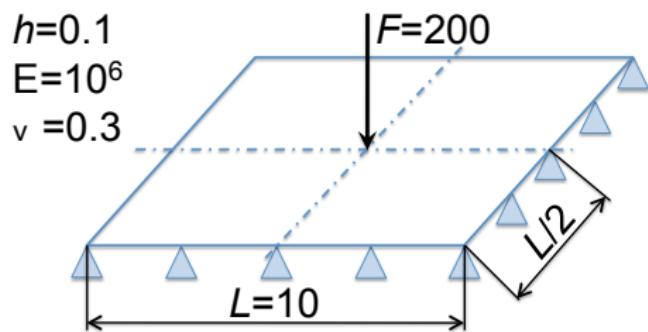
- En ingeniería se denomina *flexión* al tipo de deformación que presenta un elemento estructural alargado en una dirección perpendicular a su eje longitudinal.
- Un caso típico son las vigas, las que están diseñadas para trabajar, principalmente, por tracción. Igualmente, el concepto de flexión se extiende a elementos estructurales superficiales como placas o láminas.
- Ejemplo de flexión mecánica:  
arriba, un elemento tal como una barra se encuentra en estado de reposo; en la figura de abajo dicho elemento es sometido a una fuerza. El elemento, en consecuencia, se dobla en el mismo sentido de la fuerza.





Flexión de una placa circular empotrada en su contorno bajo la acción de una carga vertical distribuida uniformemente. La mitad izquierda muestra la forma deformada y la mitad derecha muestra la forma no deformada. La simulación mediante elementos finitos fue llevada a cabo mediante el software Ansys.

wiki: Teoría de placas y láminas

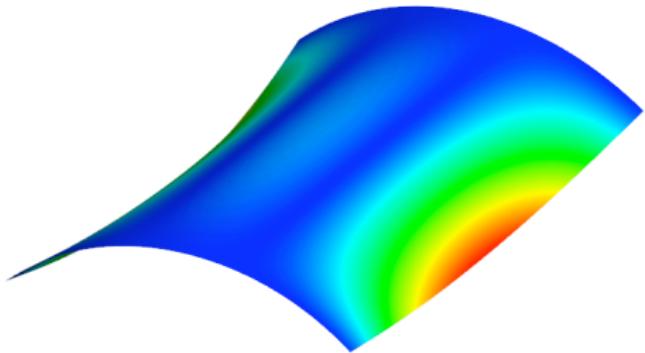
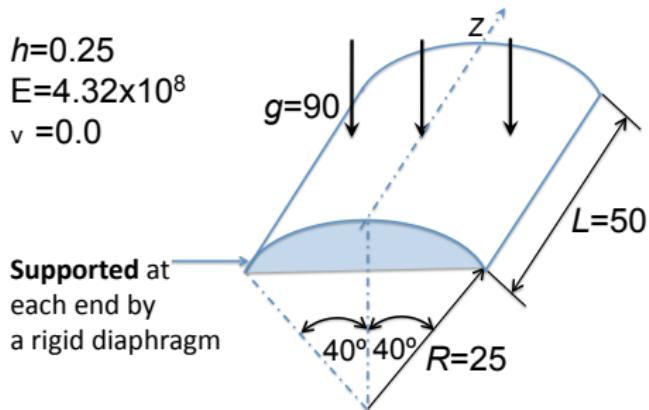


Flexión de una placa cuadrada empotrada en su borde, bajo la acción de una carga vertical puntual. En esta prueba, el comportamiento de flexión domina completamente la solución.

(izq.) Se muestra un bosquejo del problema bajo análisis.

(der.) Se muestra la forma deformada, donde el mapa de colores indica la magnitud del desplazamiento, la simulación se ha realizado mediante un método sin malla *local max-ent* empleando una formulación de Galerkin, fue llevada a cabo mediante un software C++/“in house”.

$$\begin{aligned} h &= 0.25 \\ E &= 4.32 \times 10^8 \\ v &= 0.0 \end{aligned}$$



Flexión de una lámina delgada conocida como “Scordelis-Lo roof”. Consiste en un “techo” formado por una lámina cilíndrica simplemente soportada en sus extremos  $z = 0$  y  $z = L$ , bajo la acción de una carga vertical uniforme (su propio peso). En esta prueba tanto la energía de membrana como la energía de flexión dominan el comportamiento de la deformación, por lo que la representación de modos inextensionales no es crucial en este problema.

*Nota:* esta prueba evalúa la habilidad del método numérico para calcular las tensiones de membrana, que podrían inhibir gravemente la convergencia.

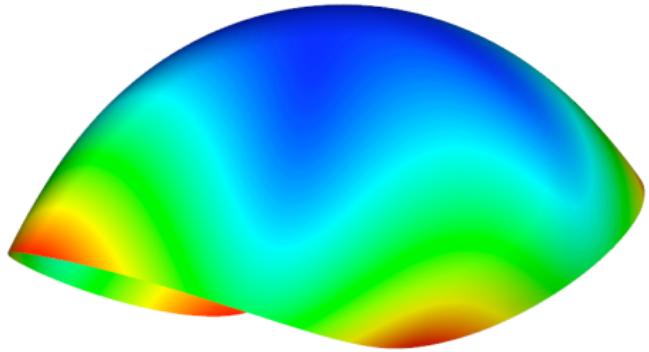
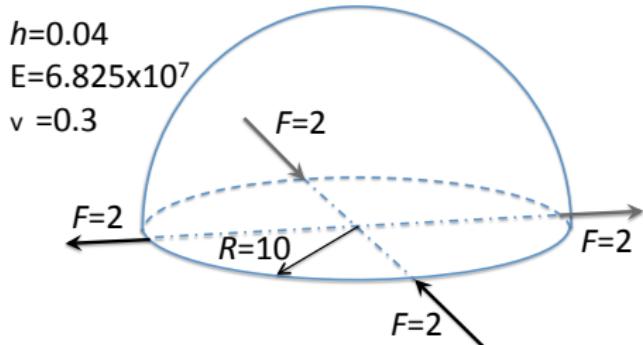
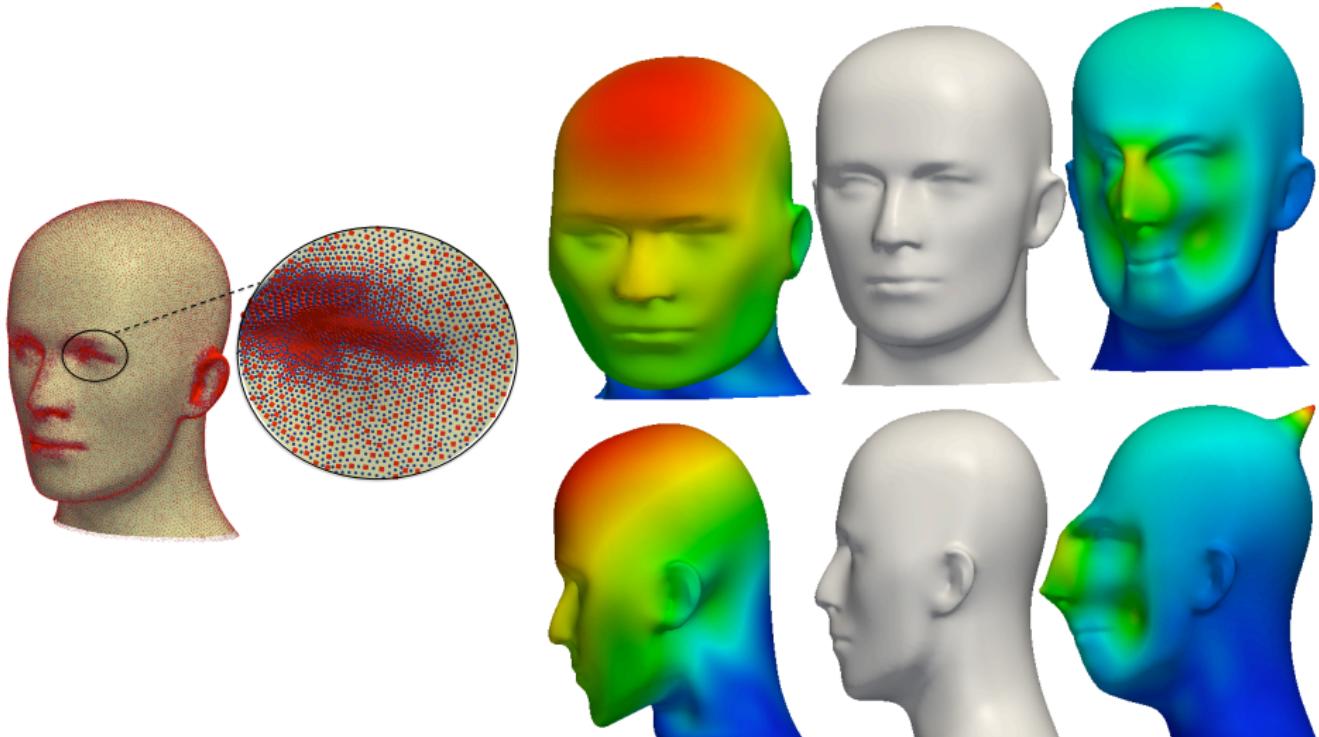


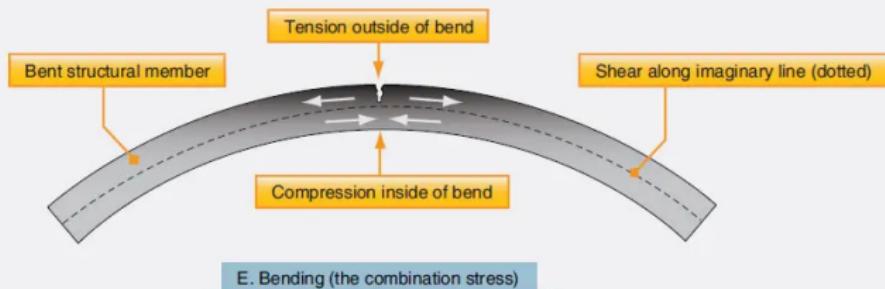
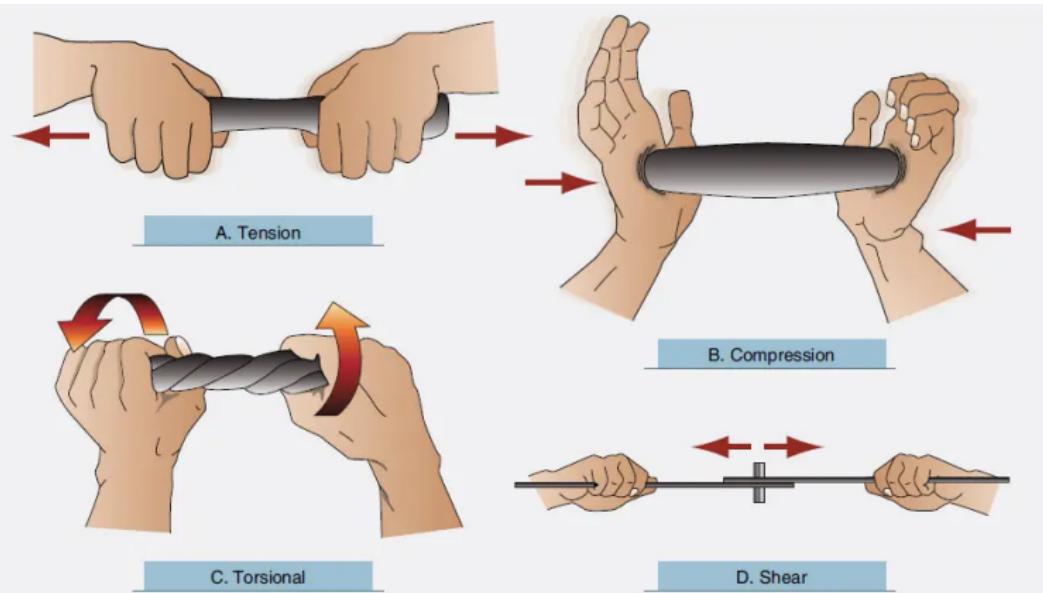
Lámina hemiesférica cargada puntualmente. Esta prueba es todo un reto, permite evaluar la capacidad del método numérico (empleado en la resolución) para representar deformaciones inextensionales en condiciones complejas de flexión de la lámina que implican curvatura en dos direcciones. La capacidad de doblarse sin desarrollar deformaciones parásitas de membrana es esencial para un buen desempeño en este problema.

[youtube: lámina hemiesférica geométricamente no lineal](#)

[youtube: lámina cilíndrica geométricamente no lineal](#)



Este último ejemplo ilustra la capacidad del método *local max-ent* para tratar láminas de geometría compleja, definidas solo por un conjunto de puntos, sin la necesidad de una malla de superficie. Por supuesto, la calidad de la distribución de los nodos debe ser lo suficientemente buena y estar adaptada a características geométricas complejas, aquí los oídos y los ojos. La Figura (izq.) muestra una lámina elástica delgada bajo una carga de uniforme y (der.) dos fuerzas concentradas en la coronilla de la cabeza y en la nariz.



Las vigas son componentes de transporte de carga esenciales en una amplia variedad de estructuras modernas.

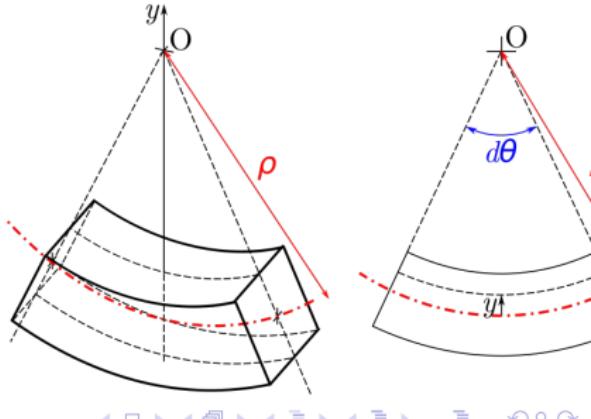


- La prueba de flexión de tres puntos proporciona valores para el módulo de elasticidad en flexión, tensión de flexión, deformación de flexión y la respuesta tensión-deformación de flexión del material.
- Esta prueba se realiza en una máquina de prueba universal (máquina de prueba de tracción) con un accesorio de curvatura de tres o cuatro puntos. [Architected IPC shells].
- La principal ventaja de una prueba de flexión de tres puntos es la facilidad de preparación y prueba de la muestra. Sin embargo, este método también tiene algunas desventajas: los resultados del método de prueba son sensibles a la geometría de la muestra y del tipo de carga, así como a la velocidad de deformación. [IPC primitive - experiment - BC].



- Los esfuerzos axial  $F$ , cortante  $V$  y momento torsor  $M_t$  son nulos en todas las secciones de la pieza.
  - El esfuerzo que provoca la flexión se denomina momento flector y se denota por  $M$  o  $M_b$  o  $M_f$  (*b: bending*).
  - Si actúan a la vez un momento flector y un momento torsor, se dice que la sección está sometida a *flexo-torsión*.
  - El rasgo más destacado de un objeto sometido a flexión es que éste presenta una superficie de puntos llamada *superficie neutra*, tal que la distancia a lo largo de cualquier curva contenida en ella no varía con respecto al valor antes de la deformación.

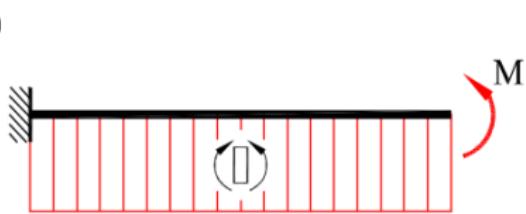
- En la Figura se representa un elemento de una viga doblada: las fibras forman arcos concéntricos. Las fibras por encima de la fibra neutra (curva a trazos de color rojo) se comprimen y las fibras inferiores se estiran.



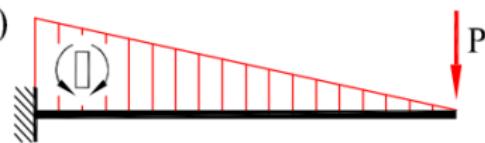
## • Tipos de flexión en vigas

- Una pieza está sometida a *flexión recta* cuando sus secciones están solicitadas por un momento flector  $M$  contenido en un plano principal de flexión.
- Éste es el caso de las vigas rectas de plano medio, que son vigas de sección con un plano de simetría longitudinal flectando en dicho plano.
- Una pieza está sometida a *flexión pura recta* cuando sus secciones están solicitadas únicamente por un momento flector  $M$ , Figura a).

a)

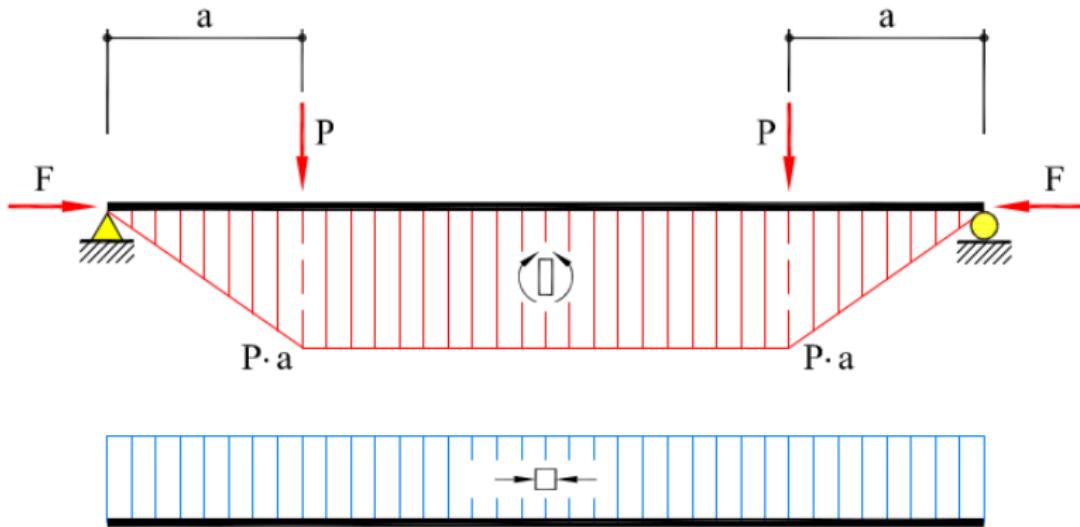


b)



- Una pieza está sometida a *flexión simple recta* cuando sus secciones están sometidas a momento flector variable y, en consecuencia, viene acompañado de esfuerzo cortante, Figura b).

- Una sección está sometida a *flexión compuesta recta* cuando sobre ella actúa un momento flector y un esfuerzo axial.
- En la Figura se muestra una viga biapoyada sometida a flexión compuesta, así como los diagramas de **esfuerzo de corte** y de **momento flector**.

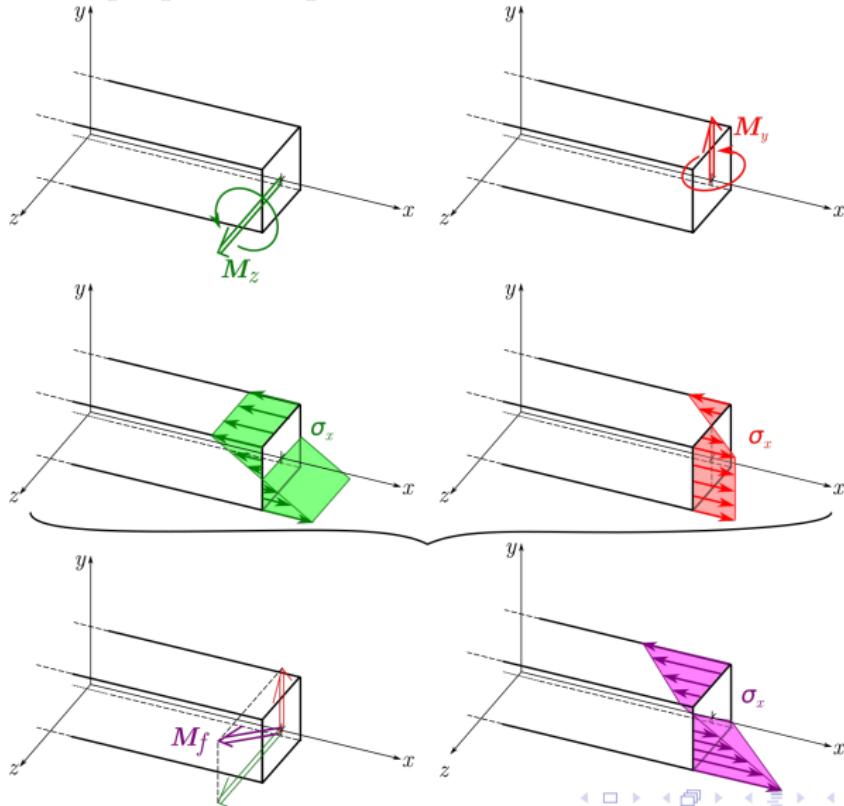


- En el caso más general de una sección arbitraria solicitada por un momento flector actuando en un plano cualquiera, se tiene *flexión esviada*.
- Si el momento actuante es constante en todas las secciones de la pieza se tiene *flexión pura esviada*.
- En el caso de que el momento sea variable se tiene *flexión simple esviada*, y está acompañado de esfuerzo cortante.
- Cuando la actuación del momento flector viene acompañada de un esfuerzo axial, de tracción o compresión, se tiene *flexión compuesta esviada*.
- El tipo de casos de flexión en vigas se resume en el siguiente cuadro:

Sección viga	Flexión	Características
recta	pura recta	$M_b$ constante en un plano de flexión
	simple recta	$M_b, V$
	compuesta recta	$M_b, V, F$
arbitraria	pura esviada	$M_b$ constante en un plano cualquiera
	simple esviada	$M_b, V$
	compuesta esviada	$M_b, V, F$

## - Ejemplo de una viga en flexión pura esviada.

Dos momentos  $M_y$  y  $M_z$  se aplican en dos planos de simetría, se emplea el principio de superposición para su análisis.



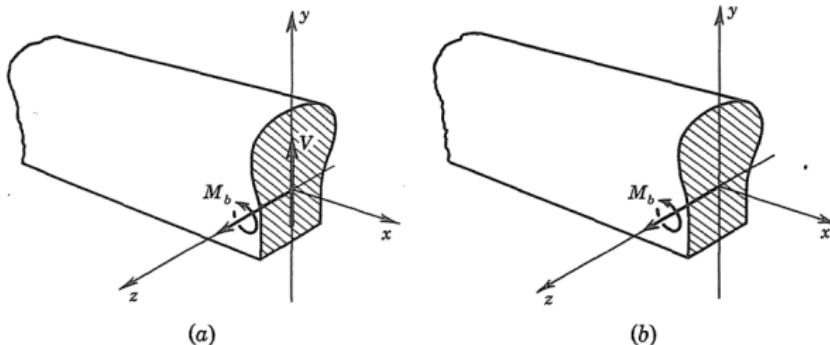
## 2. Flexión pura recta

- Nuestro objetivo en esta primer parte es determinar las distribuciones de esfuerzos que tienen como resultado la fuerza cortante  $V$  y el momento flector  $M_b$ .
- Aunque necesariamente consideraremos la naturaleza de la deformación de las vigas, pospondremos hasta la segunda parte de esta Unidad un estudio detallado de la deflexión de vigas bajo diversas condiciones de apoyo y carga.
- Nuestro método de aproximación será similar al que se siguió en la investigación de la torsión de Coulomb en la Unidad 5, y en cierta medida nuestros resultados serán similares.
- En esta sección también obtendremos una solución exacta dentro de la teoría de la elasticidad para el caso especial de una viga sometida a **flexión pura**.
- Para casos más generales obtendremos distribuciones aproximadas de tensiones sobre la base de consideraciones de equilibrio.



## 2.1 Geometría de la deformación

- Sea una viga originalmente recta que es uniforme a lo largo de su longitud, cuya sección transversal es simétrica respecto al plano de carga y cuyas propiedades materiales son constantes.
- Consideramos el caso en que la viga está sometida a un momento flector  $M_b$  que es constante a lo largo de su longitud, *flexión pura*.



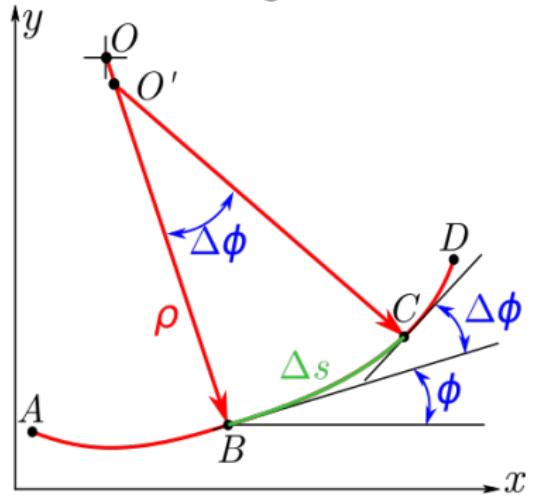
- En la Figura se muestra una viga simétrica cargada en su plano de simetría. (a) En general, se transmiten tanto la fuerza cortante  $V$  como el momento flector  $M_b$ . (b) En flexión pura no hay fuerza de corte, y solo se transmite un momento de flexión constante.

- Seleccionamos este caso simple como punto de partida dado que el patrón de deformación se puede determinar solo con argumentos de simetría.
- Establecida la naturaleza de la deformación, introduciremos las relaciones de tensión-deformación y determinaremos la distribución de tensión tal que posea el  $M_b$  necesario para el equilibrio de toda la viga.
- Dado que la viga original se deformará en una forma curva, resulta útil introducir el concepto de *curvatura de una curva plana*, es decir, la tasa de cambio del ángulo de inclinación de la curva a lo largo de la curva.

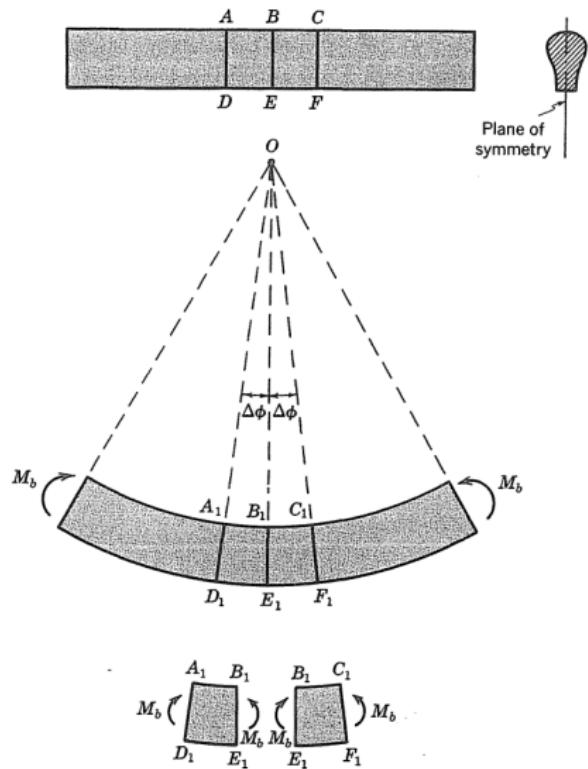
- En la Figura se tiene que la línea  $AD$  posee una curvatura en el punto  $B$  definida como

$$\frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{O'B} = \frac{1}{\rho},$$

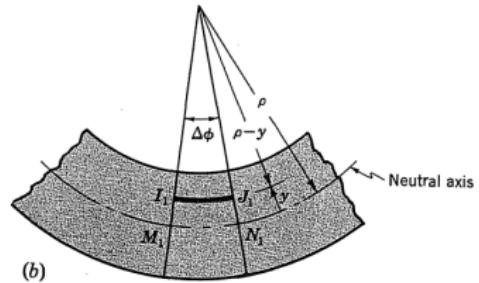
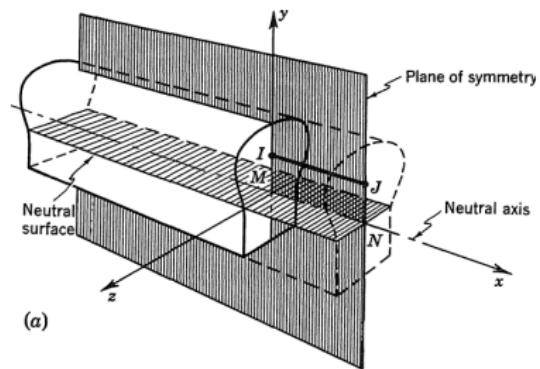
donde  $\rho = OB$  es el *radio de curvatura* en el punto  $B$ .



- Consideraremos la geometría de la deformación de la flexión pura de la viga que se muestra en la siguiente figura.
- Mediante argumentos de simetría es posible concluir que las superficies  $A_1D_1$ ,  $B_1E_1$  y  $C_1F_1$  deben ser superficies planas perpendiculares al plano de simetría.
- Así, en flexión pura en un plano de simetría, las secciones transversales del plano permanecen planas.
- Además, el hecho de que cada elemento se deforma de manera idéntica significa que las secciones planas inicialmente paralelas ahora deben tener una intersección común, como se ilustra en el punto  $O$  en la figura, y que la viga se dobla en un círculo centrado en esta intersección.



- Cabe señalar que los argumentos anteriores no han descartado la posibilidad de deformación de una sección plana dentro de su propio plano. Volveremos sobre este aspecto más adelante.
  - Ahora deseamos obtener la distribución de la deformación debida a que las secciones transversales planas siguen siendo planas.
  - En (a) se muestra la viga no deformada y en (b) la traza deformada de la viga en el plano de simetría.
  - Las secciones transversales se han mantenido planas y las líneas longitudinales se han convertido en arcos de círculos.
  - El plano  $xy$  es el *plano de simetría*, y el plano  $xz$  se llama *superficie neutra*.
  - Se llama *eje neutro o fibra neutra* a la línea en el plano de simetría que no cambia de longitud. El sistema de coordenadas se define en la viga no deformada para que el eje  $x$  coincida con el eje neutro (*no conocido!*).



- En adelante, si bien admitiremos que puede haber deformación de la sección transversal en su propio plano, haremos la siguiente suposición:
  - “Suponemos que la deformación será lo suficientemente pequeña como para que podamos utilizar las coordenadas de un punto en la sección transversal no deformada para proporcionar una aproximación adecuada a la ubicación del punto después de la deformación”.
- Por lo tanto, en la figura anterior si  $IJ$  y  $MN$ , que están separados por la distancia  $y$  en la viga no deformada de la figura (a), se deforman en arcos circulares concéntricos  $I_1J_1$  y  $M_1N_1$  en la figura (b), suponemos que la diferencia entre sus radios de curvatura todavía puede ser tomado como  $y$ .
- Siendo  $\rho$  el radio de curvatura del eje neutro deformado  $M_1N_1$ , mientras que el radio de curvatura de  $I_1J_1$  es  $\rho - y$ .

- Dado que  $IJ = MN = M_1N_1$  de la definición de eje neutro, la deformación de  $I_1J_1$  es

$$\varepsilon_x = \frac{I_1J_1 - IJ}{IJ} = \frac{I_1J_1 - M_1N_1}{M_1N_1}. \quad (2.1)$$

- Los arcos circulares en la figura (b) se pueden expresar en términos del ángulo  $\Delta\phi$

$$M_1N_1 = \rho\Delta\phi \quad I_1J_1 = (\rho - y)\Delta\phi,$$

- Insertando estas últimas expresiones en (2.1) y usando la definición de curvatura, obtenemos

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\frac{d\phi}{ds}y, \quad (2.2)$$

la deformación longitudinal en el plano de simetría.

- Vemos que la deformación varía linealmente con  $y$ , mientras que el signo menos indica que hay un acortamiento sobre el eje neutral y un alargamiento debajo.

- La derivación de (2.2) se aplica estrictamente solo al plano de simetría, pero supondremos que (2.2) describe la deformación longitudinal en todos los puntos de la sección transversal de la viga.
- Una vez obtenida la solución, al problema de la flexión pura considerado, discutiremos la validez de los supuestos.
- Además de (2.2), podemos concluir de los argumentos de simetría que requieren que las secciones planas permanezcan planas, es decir que, las deformaciones de corte

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0,$$

para todos los puntos en la sección transversal de la viga.

- No podemos hacer declaraciones cuantitativas sobre las deformaciones  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  y  $\gamma_{yz}$ , más allá del comentario de que deben ser simétricas con respecto al plano  $xy$ .

## 2.2 Estado de tensiones correspondiente

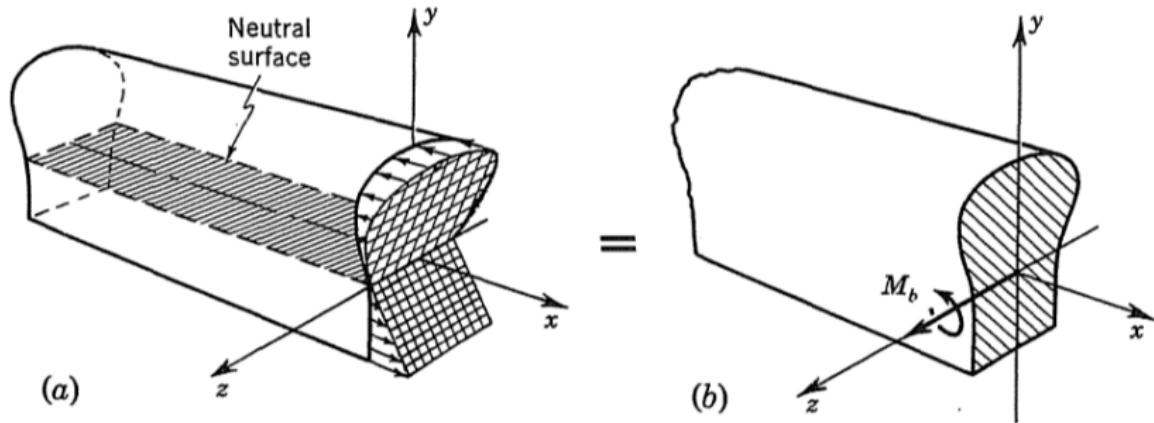
- Los argumentos que llevaron a (2.2) son independientes del material (o materiales) de la viga, mientras las propiedades del material no cambien a lo largo de la viga y sean simétricas con respecto al plano  $xy$ .
- Dentro de estas limitaciones, el material puede ser no isotrópico, lineal o no lineal, elástico o plástico.
- En esta sección nos limitaremos a vigas hechas de *material elástico isotrópico lineal*, es decir, a materiales que sigan la ley de Hooke.
- Los componentes de deformación obtenidos están relacionados con los componentes de tensión mediante la ley de Hooke, como sigue:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{y}{\rho}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} = 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

- Los componentes de esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  son nulos en flexión pura.

## 2.3 Condiciones de equilibrio

- En esta sección pasamos al tercero de los pasos en el análisis de sólidos deformables y consideraremos los requisitos de equilibrio.
  - En flexión pura el equilibrio precisa que la resultante de la distribución de tensiones sobre la sección transversal de la viga, Fig. (a), sea igual al momento flector  $M_b$ , como se muestra en la Fig. (b).



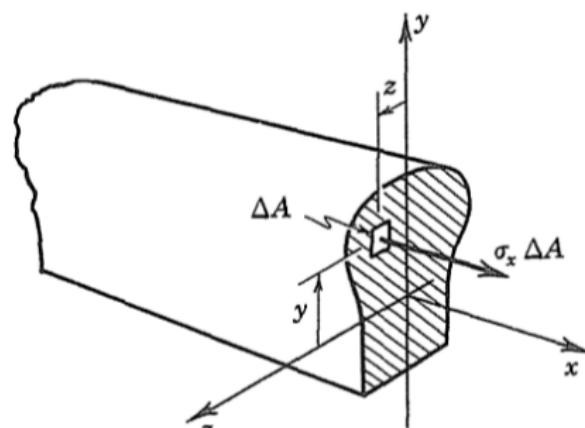
- En la Fig.(a) se supone una variación lineal de la tensión normal  $\sigma_x$  con la distancia  $y$  desde la superficie neutral.

- Sea  $\sigma_x \Delta A$  la fuerza sobre el área elemental  $\Delta A$  de la figura, podemos expresar la condición de equilibrio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= + \int_A \sigma_x dA = 0, \\ \sum M_y &= + \int_A z \sigma_x dA = 0, \quad (2.4)\end{aligned}$$

$$\sum M_z = - \int_A y \sigma_x dA = M_b,$$

donde las integrales se toman sobre toda el área de la sección transversal.

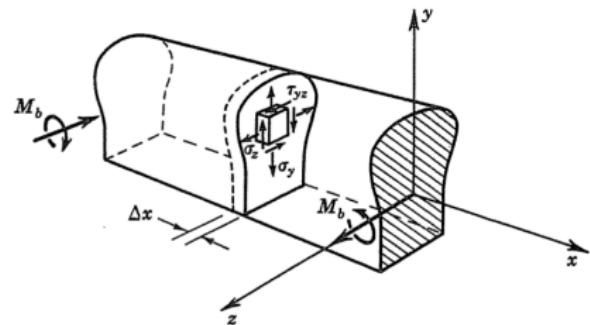


- Una vez más, hacemos la suposición fundamental de que *la deformación de la sección transversal es lo suficientemente pequeña* como para que podamos usar las coordenadas no deformadas para ubicar puntos en la sección transversal deformada.
- Es decir, aunque las tensiones deben ir acompañadas de la deformación, asumimos que, a efectos de equilibrio, podemos asociar la tensión en un punto con la posición de ese punto en la viga no deformada.

## 2.4 Modelo de flexión pura

- Nuestro objetivo ahora es extraer la solución que cumpla con los requisitos de (2.3) y (2.4).
- En (2.4) observamos que las condiciones de equilibrio involucran solo  $\sigma_x$ , mientras que (2.3) también incluye las tensiones normales transversales  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ .
- Podríamos sustituir  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  empleando la ley de Hooke para introducir las deformaciones transversales normales  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$ , pero esto no nos llevaría muy lejos ya que no podemos decir nada cuantitativo sobre estas deformaciones.
- Por lo tanto hemos llegado a un punto muerto, para proceder es necesario hacer alguna suposición sobre el comportamiento transversal.

- Al buscar una suposición razonable, observamos que las superficies externas del corte elemental de espesor  $\Delta x$  en la figura están libres de tensiones normales y de corte.
- La delgadez de la viga sugiere plausible suponer que las tensiones transversales  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{yz}$  sean cero en el interior de la viga.



- Procederemos sobre la base de esta suposición; es decir, *asumiremos*:

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0.$$

- Con este supuesto queda solo un componente de tensión distinto de cero

$$\sigma_x = -E \frac{y}{\rho} = -E \frac{d\phi}{ds} y,$$

(2.5)

la distribución de tensión normal longitudinal en flexión pura de una viga cuyo material sigue la ley de Hooke.

- Queda por determinar la posición de la superficie neutra.**

- Continuamos en la obtención de la solución, sustituimos (2.5) en la primer condición de (2.4)

$$\sum F_x = \int_A \sigma_x dA = - \int_A E \frac{y}{\rho} dA = - \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

- Este resultado nos dice que cuando una viga linealmente elástica de módulo constante  $E$  se dobla (es decir, cuando  $E/\rho$  no es cero), el primer momento del área de la sección transversal alrededor de la superficie neutra debe ser cero.
- Dicho de otro modo, *la superficie neutra debe pasar a través del centroide del área de la sección transversal.*
- Para vigas elásticas lineales hechas de más de un material o para vigas cuyo material es no lineal, si bien la superficie neutra se determina estableciendo  $\sum F_x = 0$  ésta **no** pasará en general por el centroide del área de la sección transversal.

- Sustituimos (2.5) en la segunda condición de (2.4), tenemos

$$\sum M_y = \int_A z \sigma_x dA = - \int_A E \frac{y}{\rho} z dA = - \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0. \quad (2.6)$$

- La integral a la derecha en (2.6) es cero debido a la simetría de la sección transversal con respecto al plano  $xy$ , y por lo tanto se cumple la segunda condición de equilibrio de (2.4).
- Sustituimos (2.5) en la segunda condición de (2.4), tenemos

$$\sum M_z = \int_A y \sigma_x dA = - \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_b. \quad (2.7)$$

- El argumento de la integral en (2.7) se conoce como el *segundo momento* del área de la sección transversal de la viga o como el *momento de inercia* del área alrededor del eje neutro.
- El momento de inercia se puede calcular una vez que se conoce la forma específica de la sección transversal  $A$  y se denota por  $I_{zz}$ ,

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA.$$

- Por lo tanto, empleando la definición de  $I_{zz}$  en (2.7) obtenemos la siguiente expresión para la curvatura  $d\phi/ds$  en función de  $M_b$ :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EI_{zz}}. \quad (2.8)$$

- Cuando  $M_b > 0 \Rightarrow d\phi/ds > 0$ , es decir, cóncava hacia arriba.
- Finalmente, al sustituir (2.8) en nuestras expresiones anteriores de deformación y estrés, (2.2) y (2.5), obtenemos los resultados

$$\varepsilon_x = -\frac{M_b}{EI_{zz}}y, \quad (2.9)$$

y

$$\sigma_x = -\frac{M_b}{I_{zz}}y, \quad (2.10)$$

que expresan la deformación y tensión longitudinal en términos del momento flector aplicado.

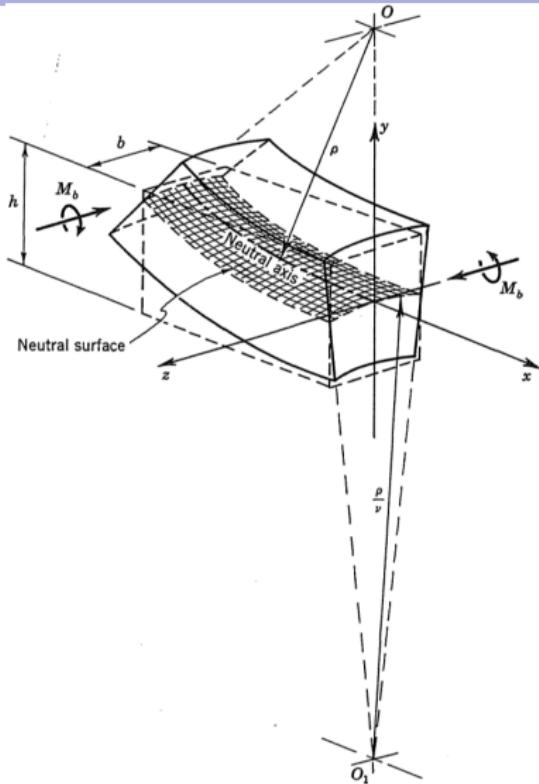
- ♣ La distribución de tensiones es lineal y de (2.10) observamos que las fibras en la superficie superior de la viga están en compresión mientras que las fibras en la superficie inferior están en tensión.

- Para completar nuestra solución, sustituimos  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$  y (2.10) en la ley de Hooke para obtener los componentes de deformación transversal

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \nu \frac{M_b}{EI_{zz}} y = -\nu \varepsilon_x, \\ \varepsilon_z &= \nu \frac{M_b}{EI_{zz}} y = -\nu \varepsilon_x, \\ \gamma_{yz} &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

- Por lo tanto, de (2.11) podemos concluir que en flexión pura:
  - La sección transversal se deforma en el plano que la contiene.
  - Las deformaciones normales, en el plano de la sección transversal, son proporcionales a la deformación axial normal pero de sentido opuesto.
  - Como la deformación axial normal es compresiva en la parte superior de la viga y extensible en la parte inferior, la parte superior de la sección transversal se expande mientras que la parte inferior de la sección transversal se contrae.

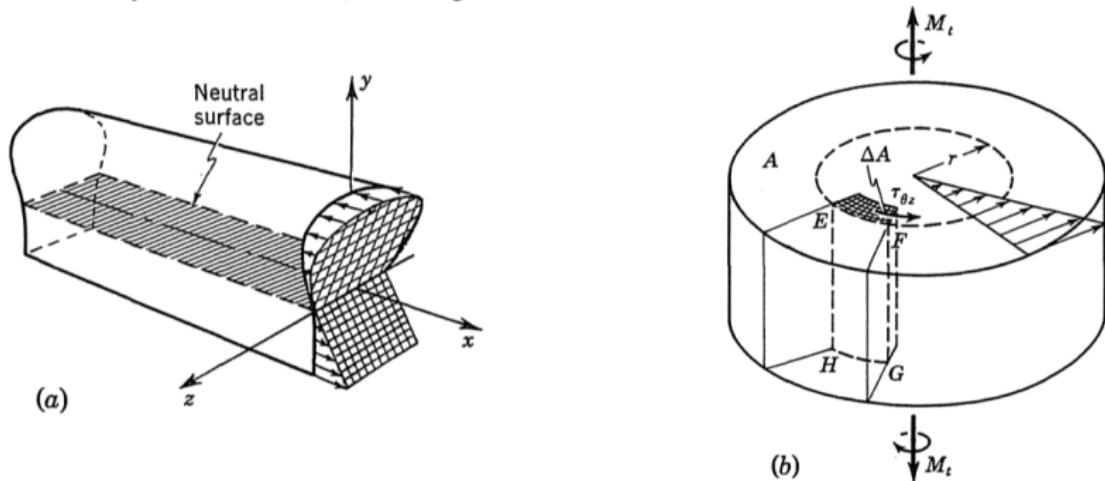
- En la figura se representa la forma deformada de una viga originalmente rectangular sometida a flexión pura en un plano de simetría.
- El resultado para  $\varepsilon_z$  implica que las líneas en la sección transversal originalmente paralelas al eje  $z$  se han deformado en arcos de círculos.
- En particular, la traza de la superficie neutra en la sección transversal se ha convertido en un arco con curvatura  $-\nu/\rho$ , ver figura.
- Esta curvatura transversal de la viga se llama **curvatura anticlástica**, es decir que la superficie neutra posee doble curvatura.
- Por lo tanto, una consecuencia de la curvatura anticlástica es que el eje neutro es la única línea en la superficie neutra deformada cuya curvatura está en un plano paralelo al plano de simetría original de la viga.



## 2.5 Resumen flexión pura

- La discusión anterior de las vigas inicialmente rectas puede aplicarse a la flexión pura de vigas curvas.
- Mediante el análisis de vigas curvadas es posible determinar que la Ec. (2.10), para la distribución de la tensión a través del grosor de la viga es razonablemente precisa, cuando el radio de la viga curva es mayor que  $\approx 5$  veces el grosor de la viga.

- Es interesante observar la similitud entre la distribución de la tensión longitudinal  $\sigma_x$  en flexión y la distribución de la tensión de corte  $\tau_{\theta z}$  en torsión de ejes circulares, ver figuras.



- También es de interés la correspondencia entre las ecuaciones

Torsión eje circular	Flexión pura
$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M_t}{GI_0}$	$\frac{d\phi}{ds} = \frac{M_b}{EI_{zz}}$
$\tau_{\theta z} = \frac{M_t}{I_0} r$	$\sigma_x = -\frac{M_b}{I_{zz}} y$

- Recapitulando,

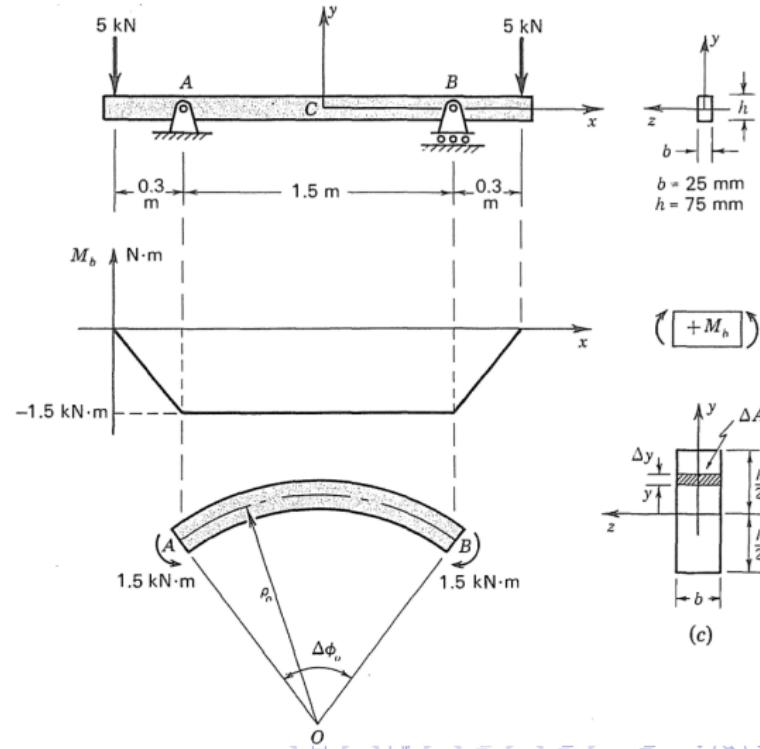
- Cuando consideramos un prisma mecánico y lo sometemos a flexión pura observamos que varía la curvatura de su línea media acortándose unas fibras, mientras que otras se alargan.
- Las primeras estarán necesariamente sometidas a esfuerzos de compresión y las segundas a esfuerzos de tracción.
- Por ende, admitidas las hipótesis de homogeneidad, continuidad e isotropía hemos deducido que una fibra no se acortará ni se alargará, por lo que no estará sometida a tensión alguna y de ahí su nombre de fibra neutra.
- Es decir, dicha fibra contiene los centros de gravedad de las distintas secciones del prisma.

- En el estudio de la flexión se han admitido las siguientes hipótesis fundamentales:
  - ① El sólido en flexión se mantiene dentro de los límites de elasticidad proporcional.
  - ② Las secciones planas antes de la deformación siguen siendo planas después de ella (**hipótesis de Bernoulli**).
  - ③ Las deformaciones son suficientemente pequeñas para que la acción de las fuerzas exteriores no se vea modificada, en primera aproximación, por la deformación.
- Una consecuencia inmediata que se deduce de las hipótesis establecidas es que en la sección no existen tensiones tangenciales.
- En efecto, en cualquier punto  $P$  del prisma, el ángulo inicialmente recto formado por una fibra longitudinal que pasa por él y la sección recta correspondiente sigue siendo recto después de la deformación en virtud de la hipótesis de Bernoulli, por lo que, según la ley de Hooke,  $\tau = G\gamma = 0$  al ser nula la distorsión  $\gamma$ .

- En la sección recta existirán, pues, solamente tensiones normales.
- Las fibras extremas, al ser las más deformadas, serán las sometidas a tensiones más elevadas.
- Como el cociente  $E/\rho$  es constante en cada sección, podemos enunciar la ley de Navier:
  - “En una sección sometida a flexión pura, los módulos de las tensiones que se ejercen sobre las distintas fibras son directamente proporcionales a sus distancias a la fibra neutra.”

- Ejemplo 2.1:** Una viga de acero de 25 mm de ancho y 75 mm de profundidad se fija a los soportes en los puntos *A* y *B*, como se muestra en la figura, donde el soporte *B* está sobre rodillos y es libre para moverse horizontalmente.

- Deseamos encontrar la tensión de flexión máxima en el tramo medio de la viga y también el ángulo subtendido por las secciones transversales en *A* y *B* en la viga deformada cuando los extremos de la viga se cargan con cargas de 5 kN.



### • Ejemplo 2.1 (cont.)

- El centroide se encuentra a la altura media de la sección transversal, por ende

$$I_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} = 8.789 \times 10^5 \text{ mm}^4.$$

- La tensión de flexión máxima se produce a la distancia más alejada de la superficie neutra,  $h/2$ . En el tramo medio

$$\sigma_x = -\frac{M_b}{I_{zz}} \frac{h}{2} = 64 \text{ MPa.}$$

- Para obtener el cambio de ángulo  $\Delta\phi_0 = \phi_B - \phi_A$ , aplicamos la relación momento-curvatura (2.8), es decir

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{M_b}{EI_{zz}},$$

que luego debe ser integrada.

- **Ejemplo 2.1 (cont.)**

- Usando  $E = 205$  GPa, encontramos que la curvatura en el segmento  $AB$  es

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{M_b}{EI_{zz}} = -8.325 \times 10^{-3} \text{ rad/m.}$$

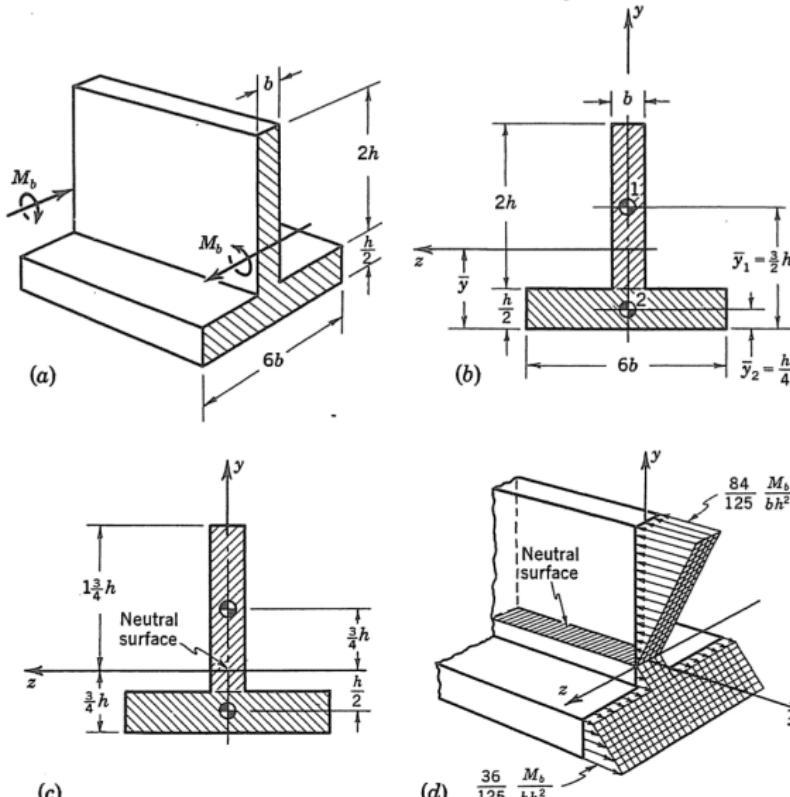
- El cambio de ángulo total entre  $A$  y  $B$  se encuentra mediante la integración de la relación de curvatura

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\phi}{ds} ds = -0.124 \text{ rad} = -0.72^\circ.$$

- Finalmente, el radio de curvatura es

$$\rho = \frac{1}{\frac{d\phi}{ds}} = -\rho_0 = -120 \text{ m.}$$

- Ejemplo 2.2:** Deseamos encontrar las tensiones de flexión máximas de tracción y compresión en la viga simétrica en  $T$ , figura (a), bajo la acción de un momento de flexión constante  $M_b$ .



• **Ejemplo 2.2 (cont.):**

- Sea  $\bar{y}$  la distancia desde la base al centroide de la sección transversal, entonces

$$\bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\frac{3}{2}h(2bh) + \frac{h}{4}(3bh)}{2bh + 3bh} = \frac{3}{4}h.$$

- Calculamos el momento de inercia para el rectángulo 1 usando el teorema del eje paralelo de Steiner

$$(I_{zz})_1 = \frac{b(2h)^3}{12} + 2bh\left(\frac{3h}{4}\right)^2 = \frac{43}{24}bh^3.$$

- De manera similar, para el rectángulo 2 obtenemos

$$(I_{zz})_2 = \frac{6b(h/2)^3}{12} + 3bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}bh^3.$$

- Luego, para toda la sección transversal

$$I_{zz} = (I_{zz})_1 + (I_{zz})_2 = \frac{43}{24}bh^3 + \frac{13}{16}bh^3 = \frac{125}{48}bh^3.$$

- **Ejemplo 2.2 (cont.):**

- Ahora, sustituyendo encontramos el esfuerzo de flexión de tracción máximo

$$\sigma_x = -\frac{M_b}{I_{zz}}y = -\frac{M_b \left( -\frac{3}{4}h \right)}{\frac{125}{48}bh^3} = \frac{36}{125} \frac{M_b}{bh^2},$$

donde se ha empleado  $y = -\frac{3}{4}h$  medido desde el centroide.

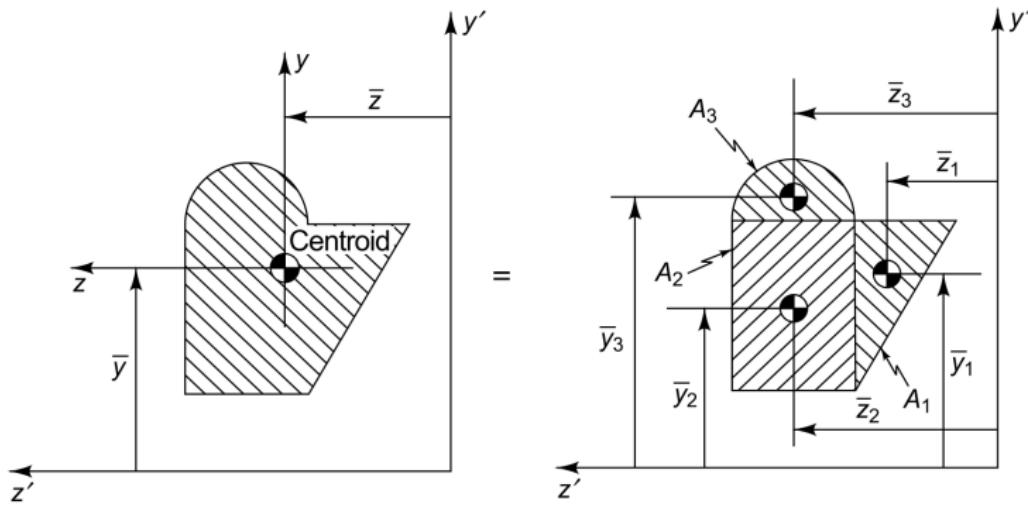
- La máxima tensión de flexión por compresión se produce en  $y = 1\frac{3}{4}h = \frac{7}{4}h$

$$\sigma_x = -\frac{M_b \frac{7}{4}h}{\frac{125}{48}bh^3} = -\frac{84}{125} \frac{M_b}{bh^2}$$

- Vemos que el esfuerzo máximo de compresión es aproximadamente 2.3 veces mayor que el esfuerzo máximo de tracción.

**Ejercicio 6.1:** Demuestre que si se considera un área complicada como la suma de varias formas simples, como se ilustra en los diagramas adjuntos, entonces la ubicación del centroide se puede expresar en la forma

$$\bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_i \bar{z}_i A_i}{\sum_i A_i}.$$

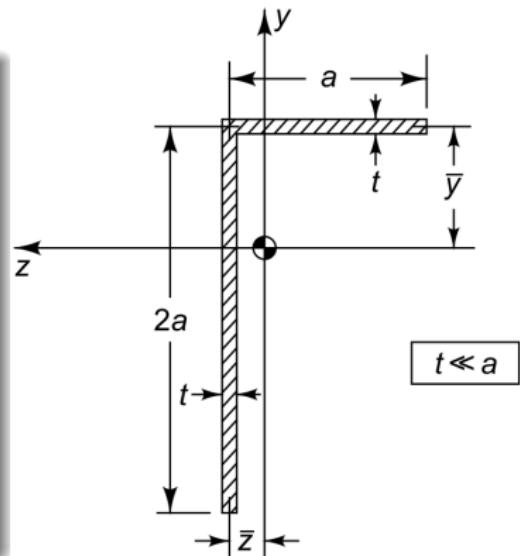


**Ejercicio 6.2:** Demuestre que el centroide de la sección “L” o “ángulo” está ubicado en

$$\bar{y} = \frac{2}{3}a, \quad \bar{z} = \frac{a}{6},$$

y que  $I_{zz}$ ,  $I_{yy}$  and  $I_{yz}$  tienen valores dados por

$$I_{zz} = \frac{4}{3}a^3t, \quad I_{yy} = \frac{1}{4}a^3t, \quad I_{yz} = -\frac{1}{3}a^3t.$$



**Nota:** el perfil L recibe su nombre **ángulo** debido a su factibilidad para acomodar conexiones angulares. Esta sección es muy utilizada para aplicaciones de carga puntual para resistir el corte, tensión y compresión. Esta sección es perfecta para ser utilizada como miembro de conexión entre formas I y / u otras formas.

[+info secciones de acero]

# Bibliografía

-  Stephen H. Crandall, Norman C. Dahl, Thomas J. Lardner, M. S. Sivakumar (2012).  
An Introduction to the Mechanics of Solids. 3rd Ed. with SI Units, McGraw-Hill, New York, 2012.
-  James M. Gere, Barry J. Goodno (2016).  
Mecánica de Materiales. 8va Ed., Cengage Learning, México, 2016.
-  Russel C. Hibbeler (2017).  
Mecánica de Materiales. 9na Ed., Pearson, México, 2017.
-  Ansel C. Ugural, Saul K. Fenster (2020).  
Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity. 6th Ed., Academic Press, London, UK, 2020.

# Fin

