

Mecánica de los Sólidos – Unidad 5A

Torsión

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, octubre de 2021



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



Contenido

- 1 1. Torsión
- 2 2. Ejes circulares torsionados
 - 2.1 Geometría de deformación de ejes circulares torsionados
 - 2.2 Tensiones resultantes
 - 2.3 Condiciones de equilibrio
 - 2.4 Tensión y deformación de un eje circular torsionado
 - 2.5 Torsión de ejes huecos
 - 2.6 Análisis de tensión en torsión - Estrés Combinado
 - 2.7 Energía de deformación en la torsión
- Bibliografía

1. Torsión

- En ingeniería, **torsión** es la solicitación que se presenta cuando se aplica un momento sobre el eje longitudinal de un elemento constructivo o prisma mecánico, como pueden ser ejes o, en general, elementos donde una dimensión predomina sobre las otras dos, aunque es posible encontrarla en situaciones diversas.

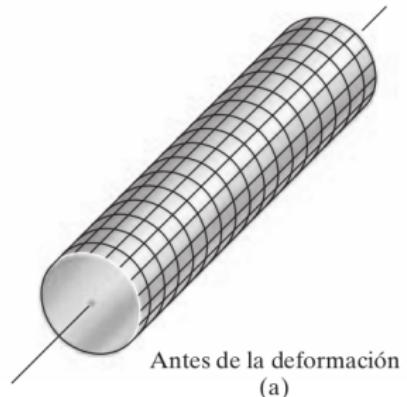


- El esfuerzo de torsión y el ángulo de giro de este barreno dependen de la potencia de la máquina que hace girar al taladro y de la resistencia del suelo que está en contacto con el eje.

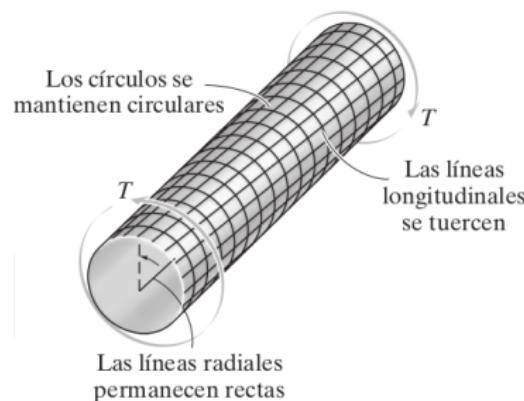


© Jill Fromer/Getty Images

- La torsión se caracteriza geométricamente porque cualquier curva paralela al eje de la pieza deja de estar contenida en el plano formado inicialmente por las dos curvas. En lugar de eso una curva paralela al eje se retuerce alrededor de él.
- Considere a modo de ejemplo la deformación por torsión de un eje circular.
 - Observe que el torcimiento ocasiona que los círculos se conserven como círculos, y que cada línea longitudinal de la cuadrícula se deforme en una hélice que interseca los círculos en ángulos iguales.
 - Además, las secciones transversales de los extremos a lo largo del eje seguirán siendo planas (es decir, no se arrugan o pandean hacia adentro o hacia afuera) y las líneas radiales se conservan rectas durante la deformación.



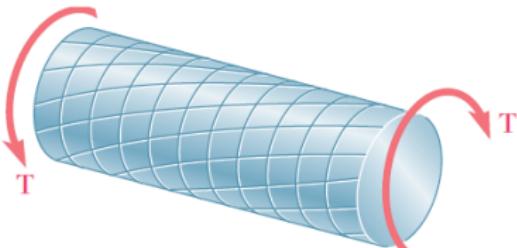
Antes de la deformación
(a)



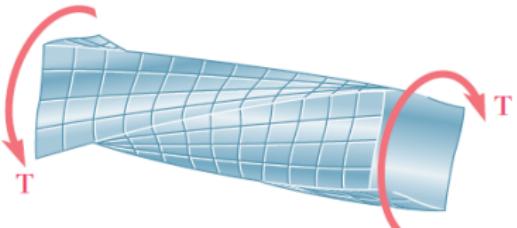
Después de la deformación
(b)

- El **estudio general de la torsión** es más complejo porque bajo ese tipo de solicitación la sección transversal de una pieza en general se caracteriza por dos fenómenos:

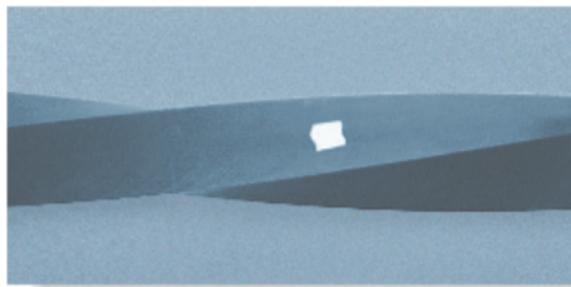
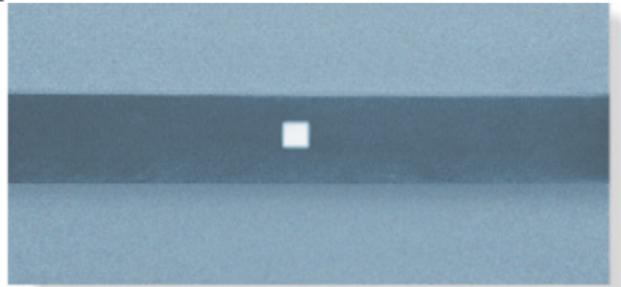
1. Aparecen tensiones tangenciales paralelas a la sección transversal. Si estas se representan por un campo vectorial sus líneas de flujo “circularan” alrededor de la sección.



2. Cuando las tensiones tangenciales no están distribuidas “adecuadamente”, cosa que sucede siempre a menos que la sección tenga simetría circular, aparecen alabeos seccionales que hacen que las secciones transversales deformadas no sean planas.



- El alabeo de la sección complica el cálculo de tensiones y deformaciones, y hace que el momento torsor pueda descomponerse en una parte asociada a torsión alabeada y una parte asociada a la llamada torsión de Saint-Venant.
- En función de la forma de la sección y la forma del alabeo, pueden usarse diversas aproximaciones más simples que el caso general.
- En las figuras se muestra una barra de caucho de sección no circular sometida a torsión, al no ser la sección transversal circular necesariamente se produce alabeo seccional.



- Si las cargas de torsión aplicadas sobre el eje son excesivas, entonces el material puede presentar cedencia (fluencia) y, en consecuencia, debe usarse un “análisis plástico” para determinar la distribución del esfuerzo cortante y el ángulo de giro.
- Para realizar dicho análisis es necesario que el eje cumpla con las condiciones de deformación y equilibrio.
- En la figura se muestra el torcimiento severo de una probeta de aluminio originado por la aplicación de un par de torsión plástico.



- En esta Unidad se analizarán los efectos que produce la aplicación de una carga de torsión sobre un elemento largo y recto como un eje o tubo.
- En un inicio se considerará que el elemento tiene una sección transversal circular. Se mostrará cómo determinar la distribución de esfuerzos dentro del elemento, así como el ángulo de torsión cuando el material se comporta en forma elástico lineal o de manera inelástica.
- También se abordará el análisis estáticamente indeterminado de los ejes y tubos, además de temas especiales como los elementos con secciones transversales de sección arbitraria.
- La torsión de cilindros de sección arbitraria es un ejemplo ilustrativo del planteamiento del problema elástico según se formule en desplazamientos, solución expuesta por Saint-Venant, o en tensiones, utilizando la función de tensiones de Prandtl.
- Como ejemplos de aplicación de la teoría de la torsión para barras cilíndricas de sección arbitraria, consideraremos los casos de secciones: elíptica, triangular equilátera y rectangular, estudiando la distribución de tensiones en cada uno de ellos.

2. Ejes circulares torsionados

- **Torsión recta: Teoría de Coulomb.**
- La solución del problema elástico en una barra cilíndrica de sección circular sometida a torsión pura fue dada por Charles-Augustin de Coulomb en 1784.
- La *Hipótesis de Coulomb* se formula en el dominio de estudio de la mecánica de sólidos deformables, específicamente en los casos de torsión de barras y vigas con simetría axial.
- La hipótesis la enunció por primera vez Charles-Augustin de Coulomb de la forma siguiente:

“las secciones transversales circulares de una pieza permanecen planas durante la torsión, girando como un todo rígido alrededor del eje normal a la sección circular”.
- La torsión en piezas de sección circular no posee tensiones normales, es decir, sólo produce tensiones cortantes.
- La teoría de Coulomb es aplicable a ejes de transmisión de potencia macizos o huecos, debido a la simetría circular de la sección no pueden existir alabeos diferenciales sobre la sección.

- En la transmisión de potencia por un eje en torsión, nos interesa principalmente el momento de torsión que puede ser transmitido por el eje sin dañar el material y, por tanto, deseamos saber cuáles son las tensiones en el eje.
- En el uso de un eje como resorte de torsión, nos interesa principalmente la relación entre el momento de torsión aplicado y la torsión angular resultante del eje.
- Para obtener la relación fuerza-deformación, tendremos que considerar la distribución de esfuerzos y deformaciones en todo el elemento.
- Esto nos dará la oportunidad de estudiar una solución completa, no trivial, en la teoría de elasticidad.
- Los análisis considerados en este capítulo proporcionan la base para la mayoría de los cálculos de ingeniería que involucran ejes.

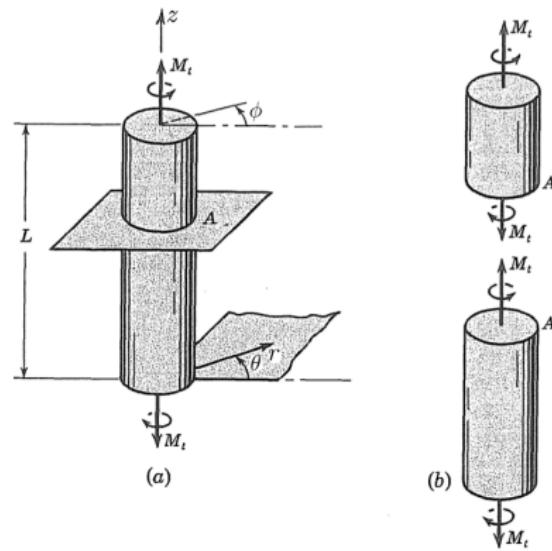
- Hemos dicho que se puede obtener una solución completa a un problema de mecánica de sólidos siguiendo los tres pasos dados en la [Unidad 1B](#):

1. Estudio de fuerzas y requisitos de equilibrio.
2. Estudio de deformación y condiciones de ajuste geométrico. ([2.1])
3. Aplicación de las relaciones de fuerza-deformación.

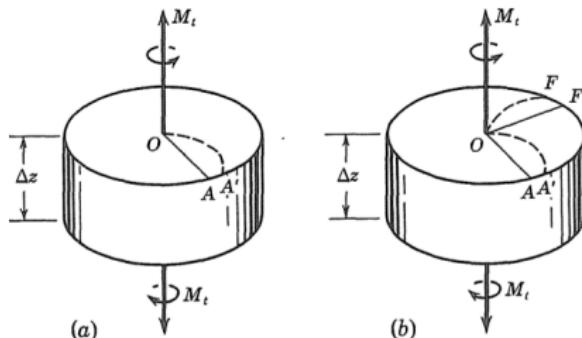
- En un nuevo problema no rutinario, no siempre está claro en qué orden se deben ejecutar estos pasos.
- En muchos casos es necesario volver a cada paso varias veces antes de obtener una solución.
- Por ejemplo, se pueden considerar todas las relaciones obvias en el **paso [2.1]-1** y luego continuar con el **paso [2.1]-2**. Sin embargo, al llevar a cabo el **paso [2.1]-2** puede resultar evidente que se han pasado por alto ciertos aspectos del **paso [2.1]-1**.
- En el problema de la torsión resulta más conveniente comenzar nuestro análisis examinando el comportamiento geométrico de un eje “torcido” y, a partir de esto, construir un modelo plausible para la deformación.
- Luego, se incorporan las relaciones tensión-deformación y, finalmente, se aplican las condiciones de equilibrio.

2.1 Geometría de deformación de ejes circulares

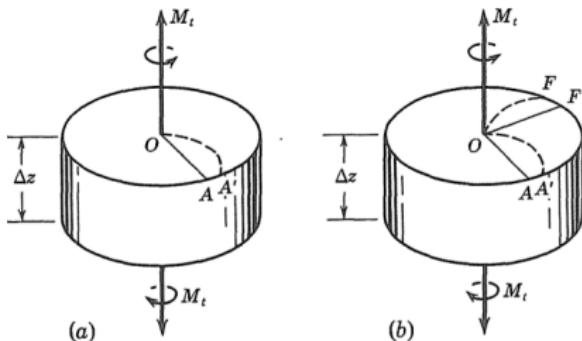
- En los desarrollos subsiguientes consideraremos ejes circulares uniformes hechos de material isotrópico.
- La figura (a) ilustra un eje circular cargado solo por el par M_t en sus extremos. Se muestran las coordenadas cilíndricas r, θ, z , que emplearemos en desarrollos posteriores.
- En la figura (a) se muestra un eje circular cargado en los extremos por un par de torsión M_t que provoca una rotación relativa ϕ entre los extremos.
- La figura (b) ilustra el hecho de que el equilibrio requiere que cada sección transversal del eje debe transmitir el momento de torsión M_t ó T .



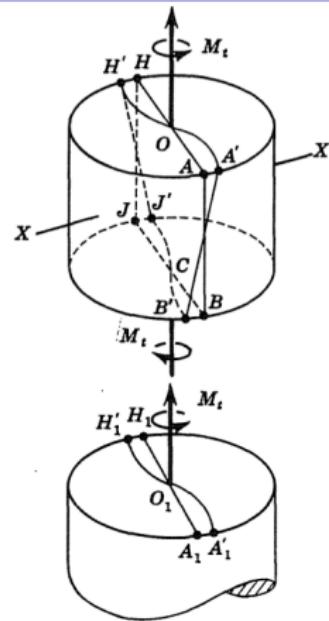
- Consideraremos los posibles modos de deformación aislando un corte de longitud Δz con caras originalmente planas y normales al eje axial, como se muestra en la figura.
- Tomamos esta rebanada de algún lugar cerca del centro del eje para evitar cualquier posible efecto de borde.
- Antes de continuar, observamos que cualquier otra porción tomada de esta región tendrá una forma original idéntica y estará sujeta al mismo momento de torsión, por ende podemos esperar que presente la misma deformación; es decir, **el patrón de deformación no variará a lo largo de la longitud del eje**.
- Nuestro objetivo es deducir un modo plausible de deformación para tal corte. En este proceso apelaremos al *argumento de la simetría*.
- Debido a su forma simple, el análisis del eje circular es particularmente “vulnerable” a los argumentos de simetría.



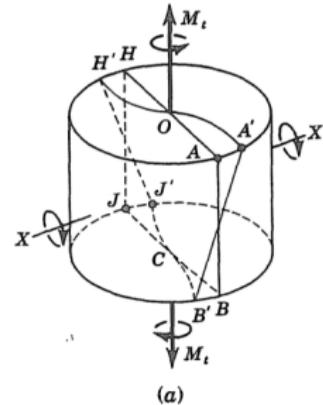
- Supongamos, figura (a), que el radio originalmente recto OA se deformaba en la línea curva OA' .
 - Como el material es isotrópico y el corte tiene simetría circular alrededor del eje z , debemos concluir que todos los radios se deforman en líneas curvas idénticas, como se ilustra en el radio OF de la figura (b).
 - Además, es posible demostrar empleando argumentos de simetría que las líneas curvas OA' y OF' deben estar todas en un plano; es decir, los extremos del corte permanecen *planos* durante la deformación.
 - Supongamos que un extremo del corte sobresale o se hunde. La simetría requeriría que el otro extremo haga lo mismo, pero sería imposible encajar un número arbitrario de cortes deformados para formar un eje continuo completo.
 - Por lo tanto, concluimos que cuando un eje circular se retuerce, sus *secciones transversales deben permanecer planas*.



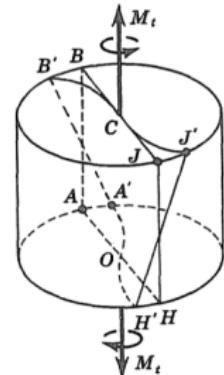
- Consideremos a continuación el corte que se muestra en la parte superior de la figura. Centramos nuestra atención en la sección $HOABCJ$, que es plana antes de la deformación.
 - Ahora, cuando se aplica el momento de torsión M_t , esta sección se deformará en una forma distorsionada $H'OA'B'CJ'$.
 - Supongamos que las curvaturas de las líneas $H'OA'$ y $B'CJ'$ son como se indica en la figura.
 - Podemos demostrar que esta suposición conduce a una contradicción al considerar una rebanada inferior muy cercana $H_1O_1A_1$, ver figura.
 - Dado que el nuevo elemento está sujeto a la misma deformación que el elemento anterior, esperamos que el diámetro $A_1O_1H_1$ se deforme en una línea curva $A'_1O_1H'_1$ con la misma forma que $A'OH'$.
 - Tal deformación, sin embargo, violaría la compatibilidad geométrica ya que las curvaturas de $A'_1O_1H'_1$ y $B'CJ'$ tienen sentido opuesto. Sería imposible unir estos dos elementos cuando se deforman.



- A continuación suponemos que $B'CJ'$ tiene la curvatura opuesta, como se indica en la figura (a). Esto permitiría combinar rebanadas adyacentes.
- Sin embargo, este patrón de deformación también conduce a una contradicción. Para ver esto, giramos el elemento en la figura (a) alrededor del eje XX que es perpendicular al elemento $HOABCJ$.
- Después de una rotación de 180° el elemento está al revés, como se muestra en la figura (b). Ahora comparamos la figura (a) con (b).
- Los elementos son de forma y material idénticos y están sujetos a cargas idénticas. Por lo tanto, deben tener deformaciones idénticas.
- Sin embargo, las curvaturas de los diámetros en los dos elementos son de sentido opuesto.
- Por lo tanto, la suposición de que las líneas diamatrales se deforman en líneas curvas se descarta por simetría.



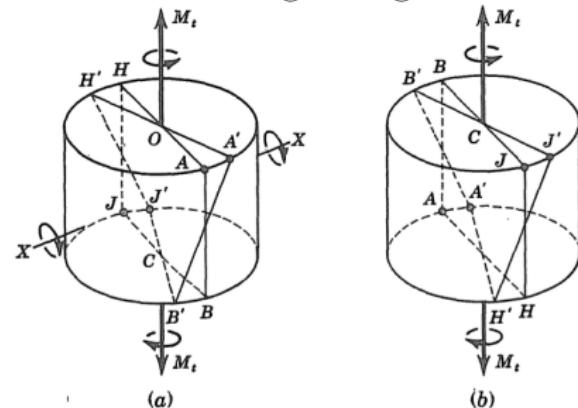
(a)



(b)

- Del análisis anterior se tiene como conclusión que el patrón de deformación debe ser: “los diámetros rectos se llevan a diámetros rectos por la deformación de torsión”, como se muestra en la figura siguiente.

- Para resumir, nuestra aplicación repetida del *argumento de la simetría* ha establecido que el eje circular debe deformarse de manera que cada sección transversal del plano originalmente normal al eje permanezca plana y normal y no se distorsione dentro de su propio plano.



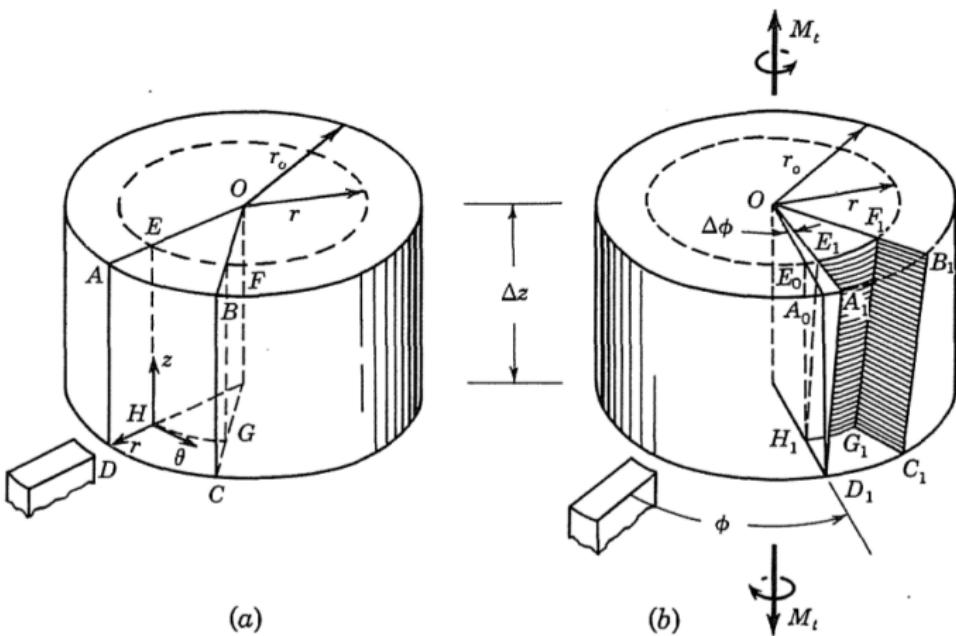
- Si el diámetro HA permanece recto durante la deformación, entonces la rotación de (a) alrededor de XX produce (b) que es idéntico en términos de deformación.
- La simetría de la deformación no descarta una expansión o contracción simétrica de la sección transversal circular o un alargamiento o acortamiento del cilindro.
- Sin embargo, no parece plausible que tales deformaciones de dilatación sean una parte importante de la deformación debido a un momento de torsión.

- Supondremos provisionalmente que todas las deformaciones normales desaparecen

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = 0.$$

- Sobre la base de esta suposición, llegaremos a una teoría consistente que cumpla con todos los requisitos de la teoría de la elasticidad, siempre que la *deformación por torsión sea pequeña*. Lo cual se aplica a la mayoría de los materiales estructurales.
- Para materiales como el caucho, donde son posibles grandes giros, esta teoría es demasiado simple, y los supuestos anteriores deben ser reexaminados.
- Suponiendo que las deformaciones axiales desaparecen, el único modo de deformación posible es uno en el que las secciones transversales del eje permanecen sin deformarse pero giran una con respecto a la otra (ver figura siguiente).

- En la figura (a) se muestra una rebanada de longitud Δz antes de girar. Después de girar, la sección inferior ha girado a través del ángulo ϕ y la sección superior ha girado a través del ángulo $\phi + \Delta\phi$, figura (b).



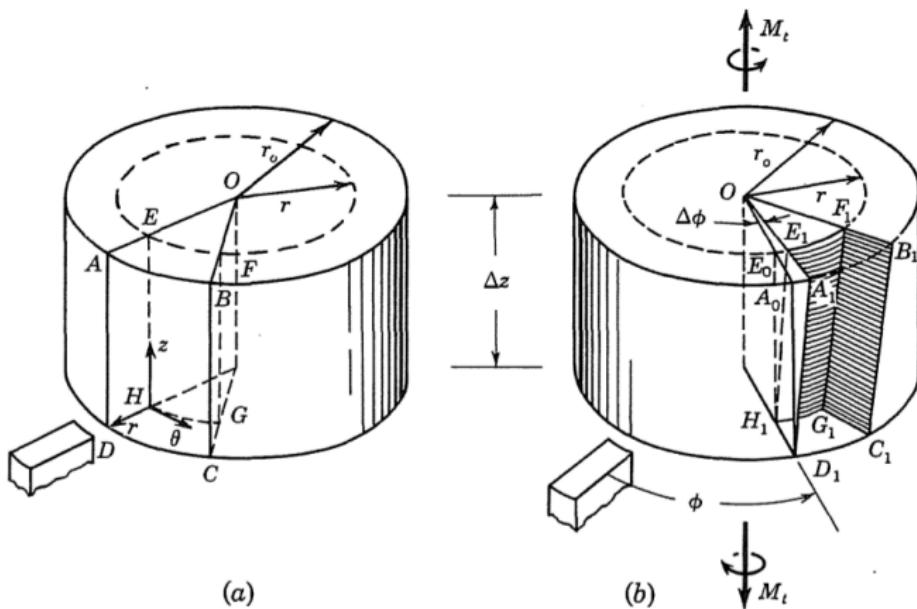
- La rotación relativa hace que los elementos rectangulares $EFGH$ se corten en paralelogramos $E_1F_1G_1H_1$.

- El ángulo recto original EHG se corta en el ángulo agudo $E_1H_1G_1$.
- En el sistema de coordenadas r, θ, z que se muestra en la figura (a), este tipo de deformación por corte se denota con el símbolo $\gamma_{\theta z}$.
- La magnitud de $\gamma_{\theta z}$ viene dada por el valor límite del ángulo $E_0H_1E_1$ en la figura (b) cuando el tamaño del elemento se aproxima a cero.
- La geometría de los triángulos $E_0H_1E_1$ y OE_0E_1 nos permite relacionar la tensión de corte $\gamma_{\theta z}$ con el ángulo de torsión ϕ , es decir

$$\gamma_{\theta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{E_0E_1}{H_1E_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{r\Delta\phi}{\Delta z} = r \frac{d\phi}{dz}.$$

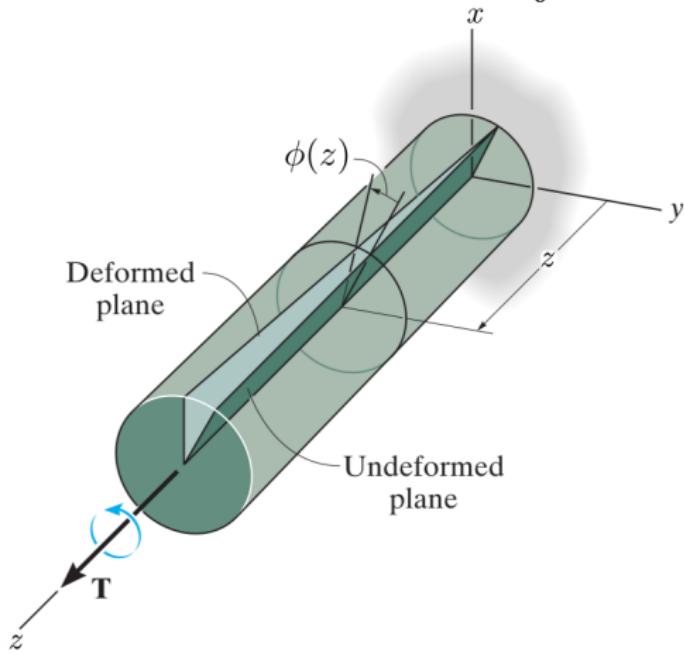
- Es importante enfatizar que esto establece que la tensión de corte varía en proporción directa al radio, desde un valor nulo en el centro a un valor máximo en el exterior, donde $r = r_0$ (es decir, el elemento $A_1B_1C_1D_1$ en la figura anterior tiene la mayor tensión de corte).
- Cada segmento de longitud Δz se deforma de la misma manera, por lo que podemos concluir que $d\phi/dz$ es una *constante* a lo largo de una sección uniforme del eje sometida a momentos de torsión en los extremos.
- Llamamos $d\phi/dz$ el *giro por unidad de longitud*, o la *tasa de giro*.

- Volviendo a la figura, nuestra suposición con respecto a la no distorsión dentro del plano de la sección transversal implica que el ángulo recto DHG pasa a un ángulo recto $D_1H_1G_1$ y, por lo tanto, $\gamma_{r\theta} = 0$.



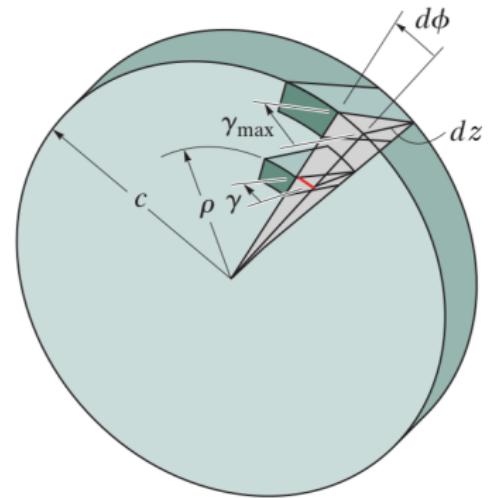
- Además, el ángulo recto EHD pasa al ángulo recto $E_1H_1D_1$ (pequeñas deformaciones) debido a nuestra suposición de que las secciones transversales planas siguen siendo planas. Esto implica que $\gamma_{rz} = 0$.

- Deformación torsional de un eje circular:



The angle of twist $\phi(z)$ increases as z increases.

(a)



The shear strain at points on the cross section increases linearly with ρ , i.e., $\gamma = (\rho/c)\gamma_{\max}$.

(b)

- Por lo tanto, a partir de la simetría y la suposición plausible de que las deformaciones normales son cero, hemos llegado a la siguiente distribución de deformaciones:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_{\theta z} = r \frac{d\phi}{dz}. \quad (2.1)$$

- Este estado de deformaciones se derivó por medio del análisis de una deformación geométricamente compatible.
- Un procedimiento alternativo que conduce a las expresiones anteriores es describir los desplazamientos en términos de coordenadas cilíndricas y obtener las deformaciones de las ecuaciones diferenciales que relacionan las deformaciones con los desplazamientos.

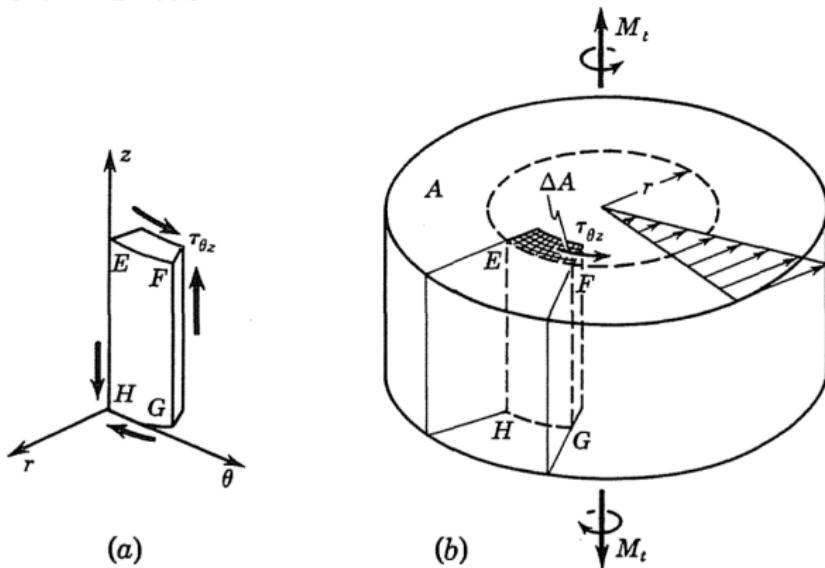
2.2 Tensiones resultantes

- Cabe señalar que al deducir las deformaciones (2.1), la única restricción impuesta al material era que debía ser isotrópico. Es decir, dentro de esta restricción el material puede ser elástico o plástico, lineal o no lineal.
- Usando la ley de Hooke en coordenadas cilíndricas, encontramos que los componentes de tensión relacionados con los componentes de deformación dados por (2.1) son

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z} = Gr \frac{d\phi}{dz}, \quad (2.2)$$

donde G es el módulo de corte.

- El estado de tensión (2.2) se ilustra en la figura (a), donde $\tau_{\theta z}$ es el único componente de tensión que actúa sobre el elemento referido a las coordenadas cilíndricas.



- Los componentes de tensión que actúan sobre una sección transversal del eje se muestran en la figura (b).
- El único componente que actúa es el componente de esfuerzo cortante tangencial $\tau_{\theta z}$, cuya magnitud varía linealmente con el radio como se indica en (2.2).

2.3 Condiciones de equilibrio

- El análisis de las deformaciones y las relaciones tensión-deformación nos han llevado a una propuesta para la forma de las distribuciones de deformación y tensión en un eje circular sometido a torsión.
- Tanto la deformación de corte $\gamma_{\theta z}$ como la tensión de corte $\tau_{\theta z}$ son proporcionales a la tasa de torsión $d\phi/dz$, que aún se desconoce.
- Aún es necesario que las tensiones cumplan con las condiciones de equilibrio.
- En primer lugar, observamos que la distribución de tensiones dada por (2.2) deja la superficie cilíndrica externa del eje libre de tensiones, como debe ser.

- Dentro del eje, cada elemento, como el que se muestra en la Fig. 1(a), está en equilibrio porque el esfuerzo cortante $\tau_{\theta z}$ no cambia en la dirección θ , debido a la simetría; ni en la dirección z , debido a la uniformidad de la deformación y al patrón de tensión a lo largo del eje.

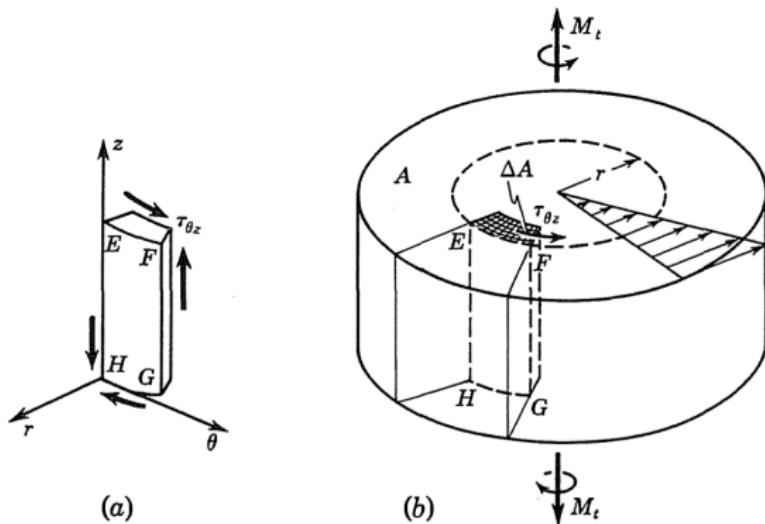


Figura 1: (a) Componentes de tensión que actúan sobre un elemento pequeño; (b) distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal.

- Por lo tanto, el esfuerzo cortante es el mismo en cada cara z y θ del elemento en la Fig. 1(a), y por lo tanto el elemento está en equilibrio.

- En cada sección transversal del eje, la resultante de la distribución de tensiones debe ser igual al momento de torsión aplicado M_t .
- Debido a la simetría rotacional de la distribución de tensiones que se muestra en la Fig. 1(b), está claro que la fuerza resultante debe ser cero.
- La única resultante de la distribución de tensiones en la Fig. 1(b) es, por lo tanto, el momento

$$\int_A r(\tau_{\theta z} dA) = M_t, \quad (2.3)$$

donde dA es el elemento de área y la integral debe tomarse sobre el área de sección transversal A del eje axial.

Ejercicio 2.1: Muestre que las tensiones (2.2) satisfacen las ecuaciones de equilibrio en coordenadas cilíndricas.

2.4 Tensión y deformación de un eje circular

- En las secciones anteriores hemos considerado la geometría de la deformación, las relaciones tensión-deformación y los requisitos de equilibrio de un eje circular torsionado hecho de material isotrópico que obedece la ley de Hooke, ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3).
- En esta sección combinamos estos resultados de una manera que producirá las interrelaciones que son de interés para nosotros:
 - la relación entre ϕ y M_t ,
 - la relación entre $\tau_{\theta z}$ y M_t .
- Si sustituimos $\tau_{\theta z}$ de (2.2) en la relación de equilibrio (2.3), obtenemos

$$M_t = \int_A r(\tau_{\theta z} dA) = G \frac{d\phi}{dz} \int_A r^2 dA = G \frac{d\phi}{dz} I_z,$$

donde $I_z = \int_A r^2 dA$ se denomina *momento de inercia polar* del área de la sección transversal al eje de giro.

- Para un eje de radio r_0 y diámetro $d = 2r_0$, obtenemos

$$I_z = \frac{\pi r_0^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

- Por lo tanto, la tasa de giro, $d\phi/dz$, en términos del momento de torsión aplicado se expresa como

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M_t}{GI_z}. \quad (2.4)$$

- Para un eje de longitud L que se carga en los extremos mediante momentos de torsión, el ángulo total de torsión entre los extremos se obtiene integrando (2.4)

$$\phi = \int_L \frac{M_t}{GI_z} dz = \frac{M_t L}{GI_z}, \quad (2.5)$$

donde ϕ está dado en radianes.

- Cuando sustituimos $d\phi/dz$ de (2.4) en (2.2), obtenemos la tensión en términos del momento de torsión aplicado

$$\tau_{\theta z} = \frac{M_t r}{I_z}. \quad (2.6)$$

- Recapitulando, para el problema de la torsión de un eje circular sólido:

- Los estados de deformación (2.1) y de tensión (2.2) satisfacen las ecuaciones fundamentales de elasticidad: equilibrio, compatibilidad geométrica y la ley de Hooke.
 - Se ha obtenido la relación (2.5) entre el momento torsor aplicado M_t y el ángulo de torsión ϕ resultante; y la relación (2.6) entre el momento de torsión M_t y la distribución de tensión resultante $\tau_{\theta z}$.
 - Se cumple la condición de borde de no estrés en la superficie cilíndrica exterior. El único posible inconveniente de la solución ocurre en los extremos del eje.
 - Para que la solución obtenida sea válida en los extremos, el momento de torsión aplicado externamente debe distribuirse linealmente como se muestra en la Fig. 1(b).

- Recapitulando, para el problema de la torsión de un eje circular sólido:
 - Consideraremos como caso práctico aquel en el cual M_t es aplicado por una llave Stillson o para tubos (*Stillson wrench, Stillson-pattern wrench, pipe wrench*, October 12, 1869, U.S. patent #95,744).



- Por el principio de St. Venant la solución obtenida es una excelente aproximación a la distribución real de tensión y deformación en la parte central del eje y será adecuada dentro a un diámetro o dos de los extremos.
- Si el eje es razonablemente largo, la estimación de ϕ no se verá muy afectada, mientras que no será posible predecir las tensiones locales en los extremos.

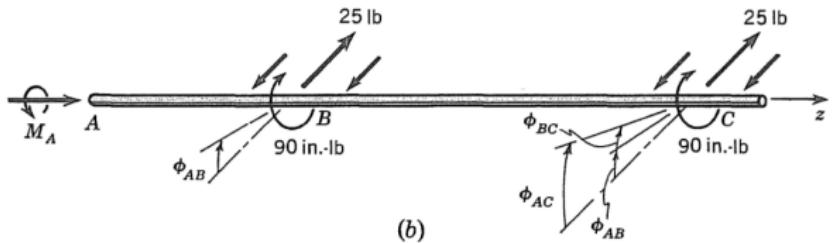
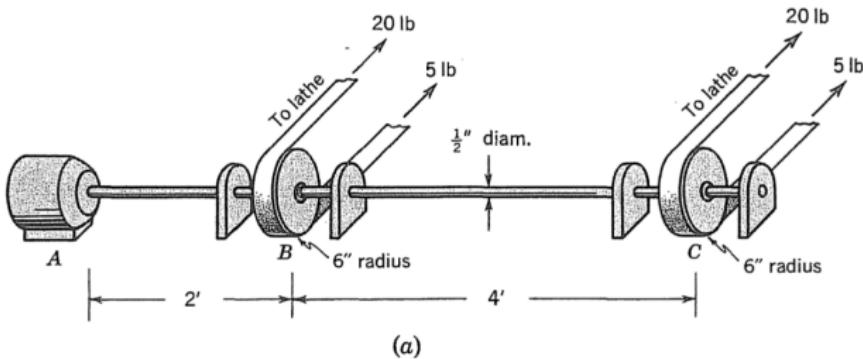
- Es inusual encontrar una situación en ingeniería en la que la forma del cuerpo, la carga impuesta sobre él y las deformaciones resultantes sean tan simples que se pueda obtener una solución exacta de acuerdo con la teoría de la elasticidad tan directamente como en este caso.
- En el caso de considerar un eje circular como un elemento estructural, la expresión (2.5) se convierte en la relación carga-deformación del **paso [2.1]-3** para el análisis de cuerpos deformables.
 - A menudo es conveniente emplear la expresión

$$\frac{M_t}{\phi} = \frac{GI_z}{L},$$

la cual proporciona el momento de torsión por radián de giro.

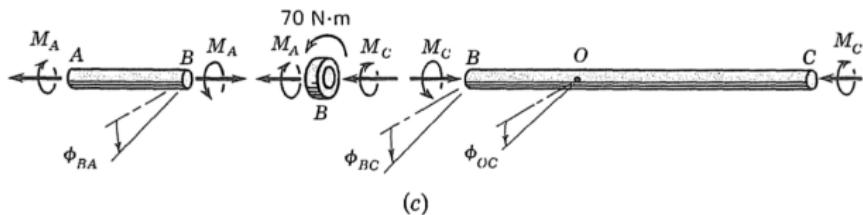
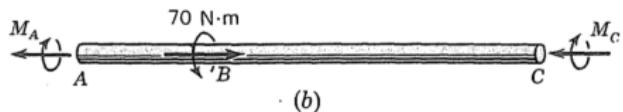
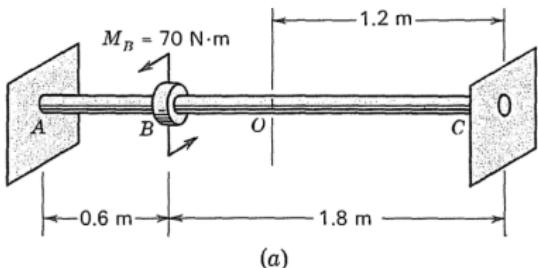
- La razón GI_z/L que depende exclusivamente del material de la barra y del radio, es análoga a una constante de resorte que proporciona fuerza de tracción por unidad de longitud de estiramiento, se la denomina *rigidez torsional* del eje y a menudo se denota con el símbolo *k*.

- Ejemplo 2.1:** Dos pequeños tornos son impulsados por el mismo motor a través de un eje de acero de $\frac{1}{2}$ pulgada de diámetro, como se muestra en la figura.



- Deseamos conocer el esfuerzo cortante máximo en el eje debido a la torsión y el ángulo de torsión entre los dos extremos del eje.

- Ejemplo 2.2:** Se aplica un par de 70 Nm a un eje de aleación de aluminio 2024-0 de 25 mm de diámetro, como se muestra en la figura.

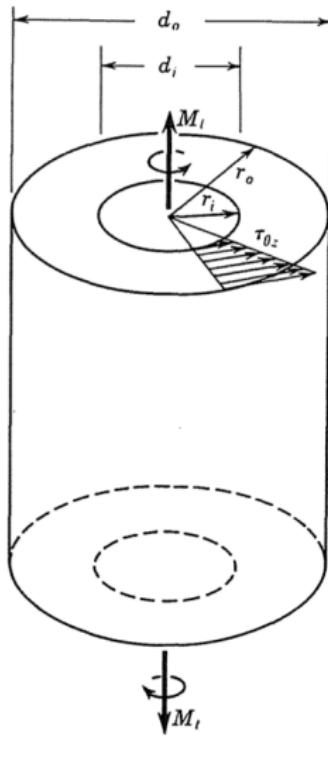


- Los extremos A y C del eje están empotrados y no pueden girar, se desea conocer el ángulo de giro que realiza la sección transversal central O del eje.

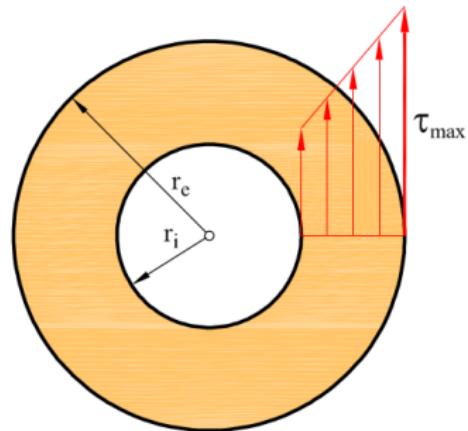
2.5 Torsión de ejes huecos

- Si examinamos los argumentos que se usaron para desarrollar las ecuaciones (2.5) y (2.6) para un eje circular sólido, encontraremos que los argumentos se aplican con igual validez a un eje circular con un agujero concéntrico.
- La única diferencia es que la integral en (2.3) ahora se extiende sobre un anillo en lugar de un círculo completo.
- Por lo tanto, (2.5) y (2.6) describen el comportamiento del eje circular hueco de la figura, siempre que el momento polar de inercia se tome como

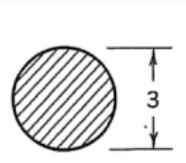
$$I_z = \frac{\pi r_0^4}{2} \left(1 - \frac{r_i^4}{r_0^4} \right) = \frac{\pi d_0^4}{32} \left(1 - \frac{d_i^4}{d_0^4} \right). \quad (2.7)$$



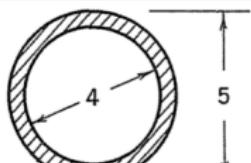
- Un elemento de material cerca del centro del eje tiene una tensión baja y un brazo de momento pequeño.
- Por lo tanto, un elemento de material cerca del centro del eje, contribuye menos al momento de torsión que un elemento cerca del exterior del eje.
- Más precisamente, la rigidez torsional k por unidad de longitud de un material dado depende solo del momento polar de inercia I_z .
- De la relación (2.7) para I_z es claro que el tamaño del agujero interviene solo en $(d_i/d_0)^4$.
- De las expresiones desarrolladas previamente se tiene que el esfuerzo cortante máximo (2.6), para un momento de torsión dado, también depende de la misma manera del tamaño del agujero.



- **Ejemplo 2.3:** Considere los dos ejes de la figura que poseen secciones transversales cuyo valor de área es idéntico.



Shaft 1



Shaft 2

- Determine las deformaciones y tensiones máximas cuando ambos ejes son torsionados por el mismo momento M_t , compare los resultados.
- Definimos para cada eje

$$\begin{aligned} \text{Eje 1: } \tau_1 &= \max_{r,z} \tau_{\theta z}, & k_1 &= M_t/\phi. \\ \text{Eje 2: } \tau_2 &= \max_{r,z} \tau_{\theta z}, & k_2 &= M_t/\phi. \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la razón entre las tensiones máximas es

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{15}{41} = 0.37.$$

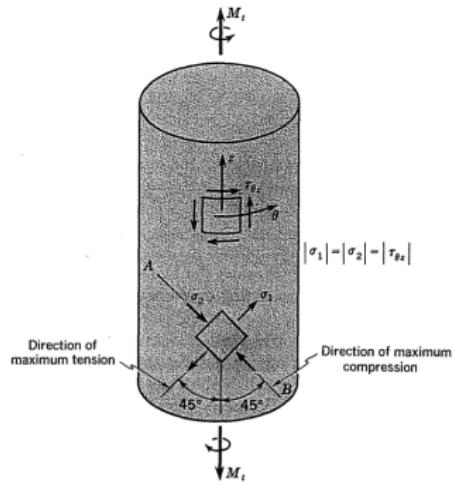
- Mientras que la relación entre los valores de rigidez es

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{41}{9} = 4.56.$$

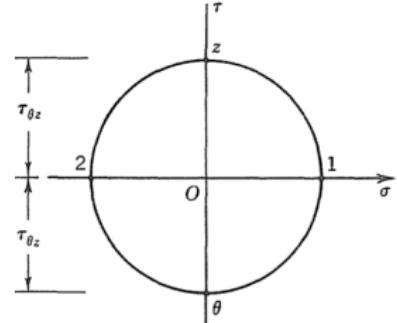
- Como se mostró en el **Ejemplo 2.3** anterior una cantidad dada de material se usará más eficientemente en torsión cuando se emplea un eje hueco.
- No obstante, dado que la construcción de un eje hueco requiere de mano de obra adicional para perforar un eje sólido del diámetro exterior correcto, puede resultar contraproducente realizar un eje hueco, excepto en aplicaciones donde el peso sea crítico.
- Adicionalmente, existe un límite de la efectividad que se puede obtener aumentando el diámetro y disminuyendo el grosor de la pared, manteniendo $A=\text{cte}$.
- Si la pared se hace demasiado delgada, la pared del cilindro corre riesgo de pandear (colapsar) debido a los esfuerzos de compresión que actúan en la pared, los cuales se presentan a 45° con respecto al eje del cilindro.

2.6 Análisis de tensiones en torsión - Estrés Combinado

- Puede resultar de interés expresar el estado de tensiones en un sistema coordenado diferente de r, θ y z .
- Para el caso de una barra bajo torsión (ver figura) es muy útil emplear el círculo de Mohr.
- Empleando el círculo de Mohr vemos que las tensiones principales son σ_1 (tracción) y σ_2 (compresión), con magnitudes $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau_{\theta z}|$.



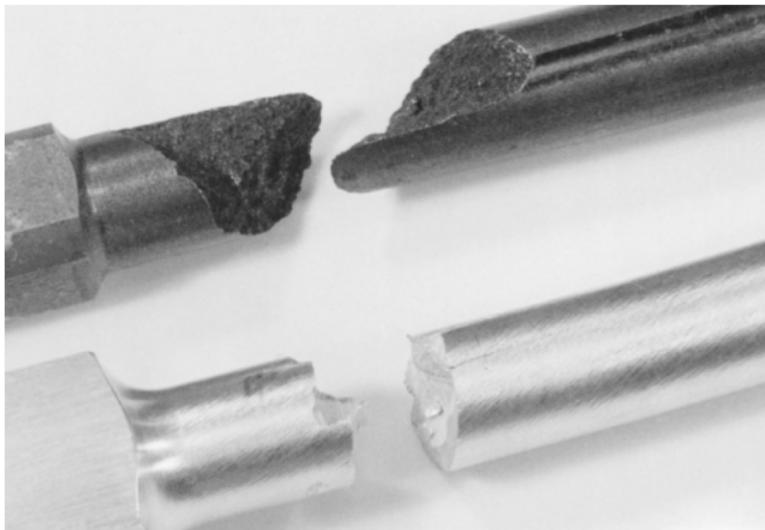
- La orientación del diámetro principal en el círculo de Mohr es 90° desde el diámetro $\theta - z$.
- Por lo tanto las direcciones principales en el eje deben estar a 45° de las direcciones $\theta - z$.



- **Ejemplo 2.4:** Considere una tiza.
¿Qué sucede si se tuerce?



- **Ejemplo 2.5:** ¿Qué espera observar en los resultados de pruebas de torsión (a) para un material frágil (hierro fundido gris) y (b) un material dúctil (aleación de aluminio)?



- Un eje circular a menudo se somete a deformaciones longitudinales y de flexión además de la torsión.
- Si bien aún no hemos considerado la distribución de tensiones en la flexión, estamos familiarizados con cargas axiales simples (de tracción o compresión) en miembros delgados.
- Por lo tanto, podemos considerar el problema de estrés combinado, resultante de carga axial y torsión.
- El estado de estrés resultante se obtiene mediante la superposición de los efectos individuales.
- El **principio de superposición** radica en la linealidad de las ecuaciones subyacentes a la teoría de la elasticidad lineal.
- Las tensiones y deformaciones aportadas por una forma de carga no se ven alteradas por la presencia de otro tipo de carga.

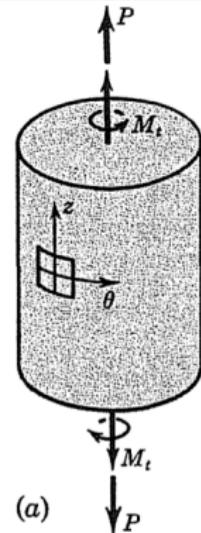
- Ejemplo 2.6:** Se posee un eje circular uniforme y homogéneo sometido simultáneamente a una fuerza de tracción axial P y un momento de torsión M_t , como se muestra en la figura.

- Debido al momento de torsión, tenemos la distribución

$$\tau_{\theta z} = \frac{M_t r}{I_z}.$$

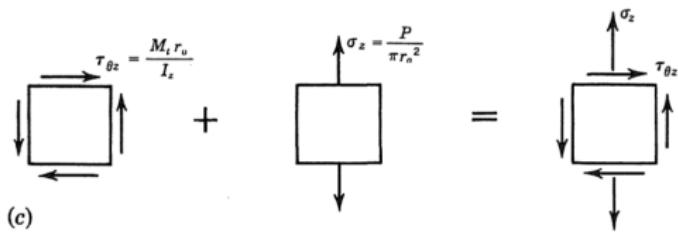
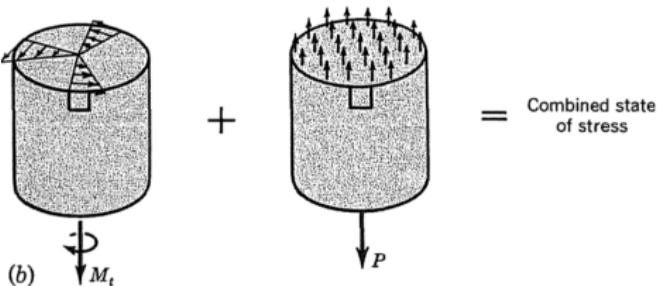
- Debido a la fuerza de tensión se posee una distribución uniforme.
- Las consideraciones de simetría conducen al postulado de que las secciones transversales planas permanecen planas pero se desplazan uniformemente bajo la carga de tracción.
- Esto implica una distribución uniforme de la deformación axial y, por lo tanto, una distribución uniforme de la tensión axial.
- Para estar en equilibrio con P , la magnitud del esfuerzo axial debe ser

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi r_0^2}.$$

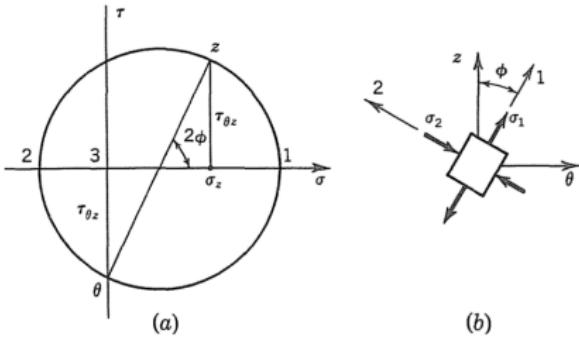


- **Ejemplo (cont.):** estado combinado de estrés.

- Las tensiones individuales se muestran primero por separado y luego se superponen para representar el estado de tensión combinada sobre un pequeño elemento en la superficie del eje, donde $r = r_0$.



- El método más conveniente para describir el estado de estrés combinado es empleando los componentes principales de estrés.
- El círculo de Mohr permite obtener las tensiones principales (*a*), y las direcciones principales (*b*), $\sigma_3 = 0$.



2.7 Energía de deformación en la torsión

- **Teorema de Castigliano**, es una herramienta poderosa para la determinación de deformaciones de estructuras complejas. Establece que cuando actúan fuerzas sobre sistemas elásticos lineales, el desplazamiento correspondiente a cualquier fuerza, puede encontrarse obteniendo la derivada parcial de la energía de deformación respecto a esta fuerza.
- “Fuerza” y “Desplazamiento” han de interpretarse con amplitud, ya que se aplican igualmente a desplazamientos y a momentos angulares.
- Para aplicar el teorema de Castigliano a un sistema lineal-elástico la energía elástica total U se debe expresar en términos de cargas.
- Siendo la deflexión δ_i respecto del punto de aplicación de una carga particular P_i dada por la derivada parcial

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}.$$

- Es decir, de forma equivalente

$$\phi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i},$$

donde ϕ_i es el ángulo de rotación sobre el eje del momento M_i .

- En la Unidad 3-B, Sección 2.5 (pág. 36) se desarrolla una fórmula para la energía de deformación en un cuerpo linealmente elástico sometido a una distribución arbitraria de tensión y deformación,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

- En esta sección aplicamos ese resultado específicamente al caso de torsión de miembros circulares y consideramos un ejemplo del teorema de Castigliano aplicado a la deformación torsional.
- En la torsión de un eje elástico isotrópico de sección transversal circular, la energía de deformación total se reduce a

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} dV,$$

donde la integración está sobre el volumen V del eje.

- Tomando $\gamma_{\theta z} = \tau_{\theta z}/G$ e introduciendo (2.6), encontramos

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{G} \left(\frac{M_t r}{I_z} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_t^2}{G I_z^2} dz \int_A r^2 dA,$$

donde las integraciones se realizan sobre la longitud L y el área de sección transversal A del eje.

- Dado que la última integral en A representa el momento polar de inercia I_z , la energía de deformación torsional es

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_t^2}{G I_z} dz. \quad (2.8)$$

- La Ec. (2.8) también puede derivarse considerando cada corte diferencial de espesor dz del eje para que actúe como un resorte torsional.
- Si los valores finales del momento de torsión y el ángulo de torsión son M_t y ϕ respectivamente, el trabajo realizado durante un proceso de carga en el que estos crecen en proporción es

$$dU = \frac{1}{2}M_t d\phi = \frac{1}{2}M_t \frac{d\phi}{dz} dz.$$

- Cuando $d\phi/dz$ se sustituye por (2.4) y el resultado se integra a lo largo del eje, obtenemos nuevamente (2.8).

Bibliografía

-  Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids. 2nd Ed. with SI Units,
McGraw-Hill, New York, 1999.
-  James M. Gere, Barry J. Goodno (2016).
Mecánica de Materiales. 8va Ed., Cengage Learning, México, 2016.
-  Sadd, Martin H. (2021).
Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. 4th Ed., Academic Press,
London, UK, 2021.
-  Ortiz Berrocal, L. (2005).
Elasticidad. 2da Ed., McGraw-Hill, New York, 2005.
-  Russel C. Hibbeler (2011).
Mecánica de Materiales. 8va Ed., Pearson, México, 2011.

Fin

