



Trabajo Práctico 0: Vectores y espacios vectoriales

Ejercicio 1.

Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} vectores cualesquiera en \mathbb{R}^n , pruebe que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Este resultado es conocido como la *desigualdad triangular* o *desigualdad de Minkowski*.

Ejercicio 2.

Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} vectores cualesquiera en \mathbb{R}^3 , pruebe que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = A$. Siendo $A = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$, el área del paralelogramo definido por estos vectores, donde θ es el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Ejercicio 3.

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , encuentre la esfera de mayor radio que puede ser contenida por el paralelepípedo que estos vectores forman.

Ejercicio 4.

Obtenga las expresiones del Jacobiano en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Ejercicio 5.

Utilice vectores para probar que la distancia en \mathbb{R}^3 entre un punto (x_0, y_0, z_0) y un plano dado por $ax + by + cz + d = 0$, es $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, suponiendo que a, b y c no son todos cero.

Ejercicio 6.

Sea n un entero positivo. Sea D_n el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales y de grado n , con la suma de polinomios y la multiplicación de un polinomio por un escalar usuales. Muestre que D_n no es un espacio vectorial. ¿Qué condiciones de la definición fallan?

Ejercicio 7.

Compruebe que e^{2x} y e^{-2x} forman una base para el espacio solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$. ¿Cuál es la dimensión de este espacio solución?

Ejercicio 8.

Considere un tobogán, tal que su curva central es una espiral circular. El tobogán posee una separación h entre pasos y un radio R a la curva media. Se desea que al arrojar una masa m con velocidad inicial v_0 (perfectamente alineada con la tangente), desde la parte superior, ésta se deslice a velocidad constante y siga la hélice central. Considere que el coeficiente dinámico de fricción entre la masa y el tobogán es μ_d .

1. ¿Qué inclinación debe tener la sección transversal $z-r$ del tobogán, para que una partícula m no se deslice fuera de la curva central? (peralte)
2. ¿Qué inclinación deberá tener la sección transversal $z-\theta$?
3. Describa la normal al plano sobre el que se apoya la masa en cada instante de tiempo.
4. ¿Qué distancia recorre la partícula en cada vuelta?
5. Describa la superficie del tobogán de forma paramétrica.

Ejercicio 9.

En una fábrica donde se procesa madera se desea construir un mecanismo pasivo, el cual debe permitir deslizar cubos de madera de 5 kg (± 200 g) entre dos secciones separadas por 5 m de altura y en un área de trabajo máxima de 10 m². Por aspectos de *lay-out* se debe ubicar la salida a 90° de la cinta transportadora de la que se tomarían los cubos, la cual opera a 0.5 m/s.

Basado en la idea presentada en el problema anterior ud. decide evaluar si es factible resolver esto mediante un tobogán, el cual puede ser construido/reparado/mantenido sin mayores inconvenientes en el taller de la empresa tanto de acero o de fibra de vidrio.

1. Dimensione el tobogán tal de disminuir el contacto del bloque de madera con las guías laterales durante su trayecto.
2. ¿Qué carga debe soportar la estructura si se contabiliza un cubo por segundo?
3. Determine el momento máximo respecto al centro del tobogán.
4. Considere una propuesta a implementar en el tramo final (cuarto de giro), de cara a expulsar los cubos de la forma más ordenada posible y que evite un abotellamiento, y obviamente fomente su promoción en la empresa.
5. ¿Sería más efectivo un tobogán construido como una canasta de barras de acero, tal que por su interior se desplacen los cubos de madera? Discuta y fundamente su respuesta.
6. Concluya su análisis con una recomendación sobre si es factible construir un tobogán como mecanismo pasivo, en caso de descartar el tobogán contemple, describa y analice otra propuesta de mecanismo pasivo. ¿Es posible que se deba descartar un mecanismo pasivo y se deba incurrir en una solución menos rentable?