



## Unidad 1: Freno de cinta y freno de cinta & bloques

En los problemas desarrollados a continuación no se tendrán en cuenta los valores numéricos de las fuerzas o coeficientes, se suponen que todas las variables internas se encuentran expresadas en el mismo sistema de unidades.

### Ejemplo 1.2

Encuentre la relación entre las tensiones  $T_a = T_{AD}$  y  $T_b = T_{BC}$  (ver Figura 1) cuando se aplica una fuerza  $F$  en el pedal del freno en: (a) el freno de cinta y (b) en el freno de cinta y bloques para que el sistema se encuentre en equilibrio.

#### (a) Freno de cinta

Este problema está desarrollado en el Capítulo 2 del libro de Crandall et al., *An Introduction to the Mechanics of Solids* (in SI Units), 3ra Ed., Tata McGraw-Hill, New York, 2012.

El problema bajo análisis se muestra en la Figura 1(b). En una prueba en un motor, se suministra una fuerza de frenado a través de un brazo de palanca  $EF$  a una cinta de freno de acero  $CBAD$  que está en contacto con la mitad de la circunferencia de un volante de inercia de radio  $R$ . La banda de freno tiene un espesor  $h$ , un ancho  $w$  y está revestida con un material relativamente blando que tiene un coeficiente dinámico de fricción  $f$  con respecto al volante giratorio.

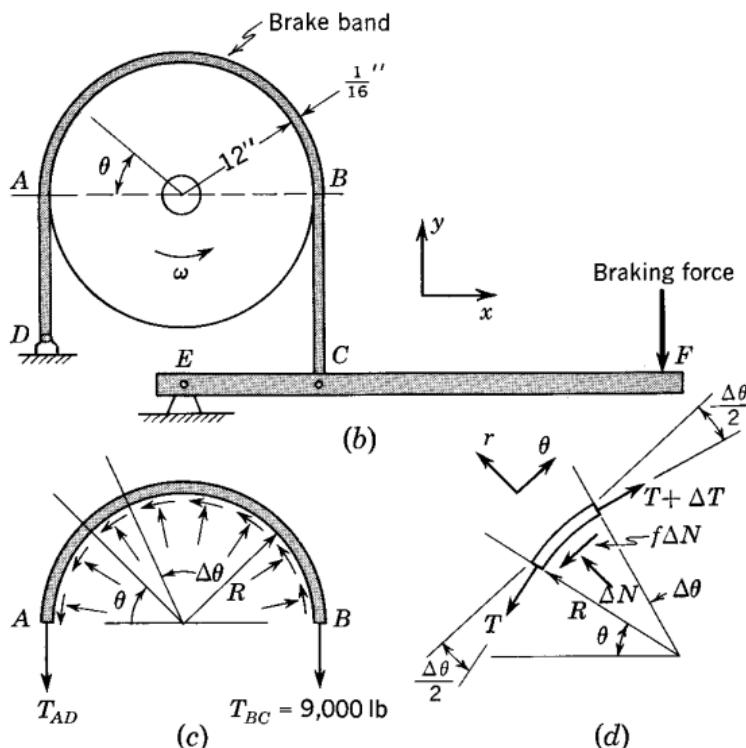


Figura 1: (b) Esquema de un motor con freno de cinta. (c) Diagrama de cuerpo libre del arco  $AB$  del freno a cinta. (d) Diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de la cinta en el tramo  $AB$ .

Comencemos formulando nuestro modelo dibujando un bosquejo de cuerpo libre de la sección  $AB$  de la banda de freno, que se muestra en la Figura 1(c). Existen fuerzas actuando en todos los puntos de contacto entre la banda y el tambor. Estas fuerzas se muestran como componentes normales y tangenciales a la superficie de contacto, donde asumimos que la componente tangencial es causada por la fricción entre el volante de inercia y el revestimiento y, por lo tanto, se muestra actuando en la misma dirección que el movimiento del volante de inercia. La Figura 1(d) muestra un esquema de cuerpo libre de un elemento de la banda. En este esquema se supone que la fuerza en la banda es una fuerza tangencial  $T$  que varía a lo largo de la circunferencia, cambiando por una cantidad  $\Delta T$  sobre la longitud  $R\Delta\theta$ . La componente radial total de la fuerza sobre el elemento recibe el símbolo  $\Delta N$ , y la componente tangencial causada por la fricción es  $f\Delta N$ . Supondremos que la fuerza  $T$  es soportada enteramente por la banda de acero y no por el revestimiento, que fue descrito como relativamente blando. De esta forma, hemos especificado un modelo que es explícito en su disposición para soportar las cargas y, por lo tanto, debería ser una base adecuada para calcular las relaciones entre las tensiones  $T_a = T_{AD}$  y  $T_b = T_{BC}$ .

En la Figura 1(a) se muestra un diagrama esquemático del problema bajo análisis. Este problema posee las siguientes condiciones de borde, representadas en la Figura 1(c),

$$\begin{aligned} T(\theta = 0) &= T_a, \\ T(\theta = \theta_{\max}) &= T_b. \end{aligned} \tag{1}$$

Si analizamos el diagrama de cuerpo libre de un pequeño elemento de cinta, Figura 2, tenemos que la sumatoria de fuerzas en el equilibrio satisface la relación  $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , además todas las fuerzas se encuentran contenidas en el plano  $r\theta$ . Por lo tanto el equilibrio se logra si

$$\begin{aligned} \sum F_r &= \Delta N - T \sin \frac{\Delta\theta}{2} - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \\ \sum F_\theta &= -T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_d \Delta N + (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

donde observamos que hemos empleado  $\mu_d$  para describir el coeficiente de rozamiento dinámico o cinético  $f$ , en inglés también se suele representar como  $\mu_k$  (*coefficient of kinetic friction*).

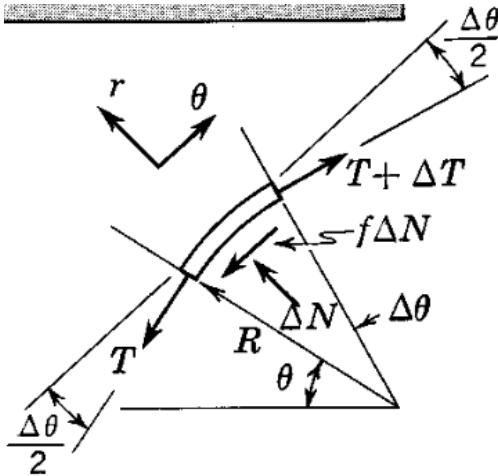


Figura 2: Motor con freno de cinta.

Ahora, del diagrama de la Figura 2 observamos que para un arco pequeño tenemos que  $\Delta\theta \ll 1$ , en el límite 0. Por lo tanto en el modelo del problema es posible realizar la siguiente aproximación

$$\cos \frac{\Delta\theta}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}.$$

Es decir, podemos reescribir la Eq. (2) como

$$\begin{aligned}\sum F_r &= \Delta N - T \frac{\Delta\theta}{2} - (T + \Delta T) \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \\ \sum F_\theta &= -T - \mu_d \Delta N + (T + \Delta T) = 0\end{aligned}\quad (3)$$

Realizando sobre la Eq. (3) algunas operaciones algebraicas elementales obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta N &= T \Delta\theta + \Delta T \frac{\Delta\theta}{2} = T \Delta\theta + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) \approx T \Delta\theta, \\ \Delta T &= \mu_d \Delta N \rightarrow \Delta F_f.\end{aligned}\quad (4)$$

La expresión obtenida, Eq. (4), nos dice que es posible aproximar a  $\mathcal{O}(\Delta\theta)$  el valor de  $\Delta T$ , lo cual es consistente con el análisis que venimos realizando sobre un pequeño elemento de cinta de longitud de arco  $R\Delta\theta$ . Por lo tanto, obtenemos

$$\Delta T = \mu_d T \Delta\theta, \quad (5)$$

reagrupando los factores y tomando el límite cuando  $\Delta\theta$  tiende a cero, obtenemos la siguiente EDO de primer orden

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta\theta} = \frac{dT}{d\theta} = \mu_d T. \quad (6)$$

Reordenamos la Eq. (6), integramos y obtenemos la tensión  $T$  expresada en términos de  $\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{T} dT &= \int \mu_d d\theta, \\ \ln T &= \mu_d \theta + C_1, \\ T &= C_2 e^{\mu_d \theta},\end{aligned}\quad (7)$$

donde  $C_2 = e^{C_1}$  a ser determinada empleando las condiciones de borde dadas por la Eq. (1). Entonces, se tiene

$$T(\theta = 0) = T_a = C_2 e^{\mu_d \theta} \Rightarrow C_2 = T_a. \quad (8)$$

Por lo tanto, la expresión resultante para la tensión  $T$  en función del ángulo  $\theta$  se expresa como

$$T(\theta) = T_a e^{\mu_d \theta}. \quad (9)$$

Empleando la condición de contorno restante, es decir

$$T(\theta = \theta_{\max}) = T_b = T_a e^{\mu_d \theta_{\max}}, \quad (10)$$

nos permite finalmente obtener la relación buscada entre las tensiones  $T_a$  y  $T_b$

$$\boxed{\frac{T_b}{T_a} = e^{\mu_d \theta_{\max}}}. \quad (11)$$

Mediante la aplicación solo del equilibrio, hemos encontrado la fuerza en la cinta de freno y por lo tanto el problema se dice que está estáticamente determinado.

Es de notar que la Eq. (11) no depende de ningún parámetro elástico de los materiales que conforman la cinta o geométrico, solo es función del tipo de interacción entre los materiales que producen la fuerza de fricción a través del parámetro  $\mu_d$ .

Para un coeficiente  $\mu_d = 0.4$  se tiene que la relación entre las tensiones para una cinta actuando en media circunferencia ( $\theta_{\max} = \pi$ ) es de 3.51, mientras que si se da una vuelta ( $\theta_{\max} = 2\pi$ ) es de 12.3! Este comportamiento de fricción es conocido y empleado en diferentes situaciones, por ejemplo

los marineros lo usan para detener el movimiento de barcos grandes, simplemente dando vueltas una cuerda alrededor de un pilote (si  $\theta_{\text{máx}} = 4\pi$  la relación es  $> 152$ ).

**2.29.** A hawser from a ship is wrapped four times around a rotating capstan as shown in the figure. The dockworker pulls with a force of 200 N. What is the maximum force the man can exert on the boat if the coefficient of friction between the capstan and hawser is 0.3?

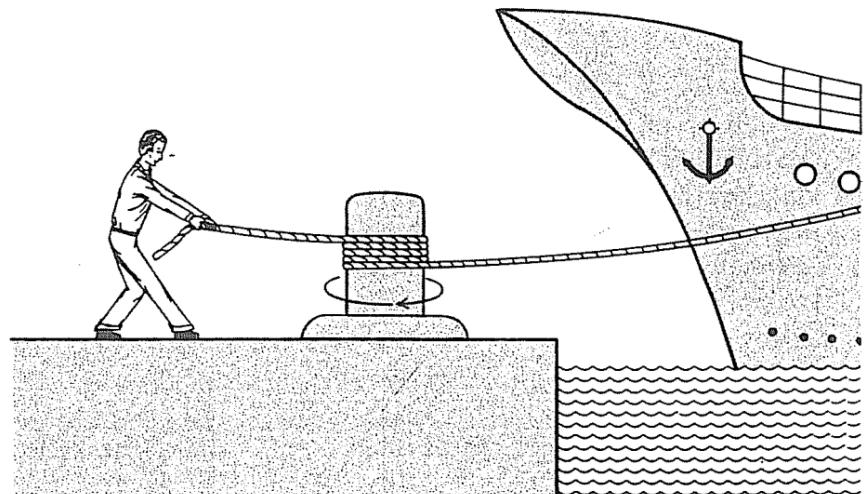


Figura 3: Problema 2.9 Crandall et. al, 2nd E. (1999).

### (b) Freno de cinta & bloques

El freno de cinta puede estar revestido con bloques de madera u otro material, ver Figura 4. La fricción entre los bloques y el volante de inercia proporciona una acción de frenado. El ángulo de apertura que posee cada bloque es  $\Delta\theta$ . Consideremos además que existen  $m$  bloques, perfectamente sujetos a la cinta, en conjunto estos actúan sobre un ángulo  $\Theta = m\Delta\theta$ . Siendo  $\mu_d$  el coeficiente de fricción dinámica entre los bloques y el volante de inercia.

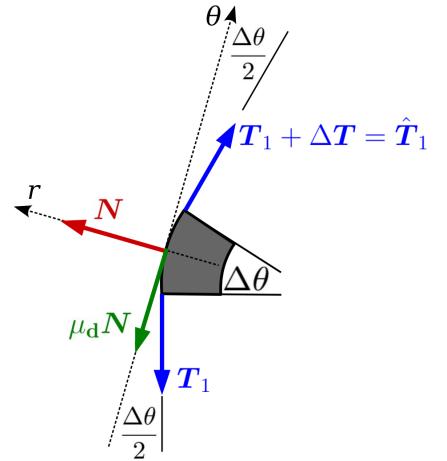


Figura 4: Volante de inercia con freno de cinta & bloques (izq.) y diagrama de cuerpo libre indicando las fuerzas que actúan sobre la cinta debidas al bloque 1 (der.). <http://mechstuff.com/types-of-brakes-in-automobiles/>

Ahora, analizemos el diagrama de cuerpo libre para uno de los bloques, consideremos el  $i$ -ésimo bloque, Figura 4(der.). La condición de equilibrio está dada como

$$\begin{aligned}\sum F_r &= N_i - T_i \sin \frac{\Delta\theta}{2} - (T_i + \Delta T_i) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \\ \sum F_\theta &= -T_i \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_d \Delta N_i + (T_i + \Delta T_i) \cos \frac{\Delta\theta}{2} = 0.\end{aligned}\quad (12)$$

A diferencia de lo que sucede en el freno de cinta ahora no es posible considerar que  $\Delta\theta$  es muy pequeño, por lo cual las expresiones para  $\cos \frac{\Delta\theta}{2}$  y  $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$  no se pueden simplificar.

Entonces, si empleamos la definición de  $\hat{T}_i$  que se muestra en la Figura 4(der.) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum F_r &= N_i - T_i \sin \frac{\Delta\theta}{2} - \hat{T}_i \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \\ \sum F_\theta &= -T_i \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_d \Delta N_i + \hat{T}_i \cos \frac{\Delta\theta}{2} = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Reordenamos y agrupamos términos para despejar la normal y la fuerza de fricción actuando en el  $i$ -ésimo bloque, es decir

$$\begin{aligned}N_i &= (\hat{T}_i + T_i) \sin \frac{\Delta\theta}{2}, \\ \mu_d N_i &= (\hat{T}_i - T_i) \cos \frac{\Delta\theta}{2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Llegados a este punto, mediante una simple operación algebráica podemos obtener una relación en la cual no esté presente  $N_i$ , dada como

$$\begin{aligned} \mu_d(\hat{T}_i + T_i) \sin \frac{\Delta\theta}{2} &= (\hat{T}_i - T_i) \cos \frac{\Delta\theta}{2}, \\ \underbrace{\mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}}_t &= \frac{(\hat{T}_i - T_i)}{(\hat{T}_i + T_i)} < 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Como podemos apreciar en la Ec. (16) la variable  $t$  es una constante que no depende del bloque bajo análisis. Esto nos permite describir la relación entre las tensiones  $T_i$  y  $\hat{T}_i$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} t &= \frac{(\hat{T}_i - T_i)}{(\hat{T}_i + T_i)}, \\ t(\hat{T}_i + T_i) &= (\hat{T}_i - T_i), \\ \hat{T}_i(1 - t) &= T_i(1 + t), \\ \frac{\hat{T}_i}{T_i} &= \frac{1 + t}{1 - t}. \end{aligned} \quad (16)$$

La relación entre las tensiones actuantes no depende del bloque que se esté considerando, siendo la relación entre ellas dada como

$$\frac{\hat{T}_i}{T_i} = \frac{1 + \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}} = C, \quad (17)$$

donde  $C$  es una constante.

Si además, tenemos en cuenta que las fuerzas  $T_{i+1}$  y  $\hat{T}_i$  son pares de fuerza de acción y reacción actuando a lo largo de la cinta entre dos bloques consecutivos, vemos que, es posible escribir las siguientes igualdades entre las tensiones que actúan en los diferentes bloques

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_1}{T_1} &= \frac{\hat{T}_2}{T_2} = \frac{\hat{T}_3}{T_3} = \dots = \frac{\hat{T}_m}{T_m} = \frac{1 + \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}} = C, \\ \frac{\hat{T}_1}{T_1} &= \frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} = \frac{\hat{T}_3}{\hat{T}_2} = \dots = \frac{\hat{T}_m}{\hat{T}_{m-1}} = \frac{1 + \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}} = C, \\ \frac{\hat{T}_1}{T_a} &= \frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} = \frac{\hat{T}_3}{\hat{T}_2} = \dots = \frac{T_b}{\hat{T}_{m-1}} = \frac{1 + \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}} = C, \end{aligned} \quad (18)$$

donde se han considerado las condiciones de borde conocidas, es decir que la tensión en el primer bloque es  $T_a$  mientras que la tensión actuando en el  $m$ -ésimo bloque es  $T_b$ .

De la relación expresada en la Ec. (18) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_1}{T_a} &= C \longrightarrow \hat{T}_1 = CT_a \\ \frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} &= C \longrightarrow \hat{T}_2 = C^2 T_a \\ \frac{\hat{T}_3}{\hat{T}_2} &= C \longrightarrow \hat{T}_3 = C^3 T_a \\ &\dots \\ \frac{T_b}{\hat{T}_{m-1}} &= C \longrightarrow T_b = C^m T_a, \end{aligned} \quad (19)$$

obteniendo finalmente la relación entre las tensiones  $T_a$  y  $T_b$

$$\frac{T_b}{T_a} = C^m = \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^m, \quad (20)$$

es decir que en términos del coeficiente dinámico de fricción  $\mu_d$  y del ángulo de apertura  $\Delta\theta$

$$\boxed{\frac{T_b}{T_a} = \left( \frac{1 + \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \mu_d \tan \frac{\Delta\theta}{2}} \right)^m}. \quad (21)$$

### Relación entre: frenos de cinta y de cinta & bloques

En este apartado nos interesa determinar la relación existente entre las expresiones obtenidas para los dos tipos de freno considerados en **(a)** y **(b)**. Es decir entre la Eq. (11) y la Eq. (21), para el supuesto de que es posible incrementar el número de bloques de tal forma que  $m \gg 1$ .

Como primer paso recordemos algunas relaciones matemáticas empleadas en cálculo diferencial, en concreto al estudiar límite tenemos la propiedad del cociente de un límite de dos funciones dada por

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad (22)$$

siempre que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  o que exista una indeterminación que pueda ser salvada empleando la regla de *L'Hôpital*. Además, nos convendrá recordar la siguiente relación

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)^{-m} = e^\alpha. \quad (23)$$

Retomamos nuestro análisis inicial, es decir el número de bloques es  $m \gg 1$ ,  $m \geq 20$ , en ese caso es válido tomar  $\tan \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ , por lo que la Eq. (21) puede ser aproximada como

$$\frac{T_b}{T_a} = \left( \frac{1 + \mu_d \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \mu_d \frac{\Delta\theta}{2}} \right)^m. \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que los bloques actúan sobre un ángulo  $\Theta = m\Delta\theta$ , es posible expresar la Eq. (24) en función del número  $m$  de bloques mediante la expresión

$$\frac{T_b}{T_a} = \left( \frac{1 + \mu_d \frac{\Theta}{2m}}{1 - \mu_d \frac{\Theta}{2m}} \right)^m. \quad (25)$$

Si consideramos el límite cuando el número de bloques tiende a infinito tenemos que

$$\begin{aligned} \Theta &\rightarrow \theta_{\max}, \\ \frac{T_b}{T_a} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \mu_d \frac{\theta_{\max}}{2m}}{1 - \mu_d \frac{\theta_{\max}}{2m}} \right)^m = e^{\mu_d \theta_{\max}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Donde hemos aplicado las propiedades de límite dadas en la Eq. (22) y la igualdad de la Eq. (23).

Concluimos que cuando el número de bloques se incrementa considerablemente, el efecto de emplear un freno de cinta & bloques es equivalente a emplear un freno de cinta que posee una relación exponencial. Por lo cual es de esperar que este resultado sea empleado con frecuencia en la industria dada la versatilidad que ofrece un freno de cinta & bloques desde un punto de vista tecnológico, en relación al mantenimiento, fabricación mediante empleo de distintos materiales, entre otros aspectos.