

# Estructura de dependencia mediante el uso de cópulas para el índice bursátil colombiano \*

**Daniel Velásquez Gaviria** *Instituto Tecnológico Metropolitano - ITM*  
**Romario Conto López** *Instituto Tecnológico Metropolitano - ITM*

---

**Resumen:** Esta investigación examina la estructura de dependencia entre el Índice Colcap del mercado colombiano, el índice SyP500, el Índice Bovespa del mercado de Brasil, el tipo de cambio USD / COP del mercado colombiano con los Estados Unidos y el precio internacional del petróleo crudo WIT. La relación entre estas variables es estimada a través de tres cópulas Arquimedianas y dos elípticas, las cópulas fueron construidas con los rendimientos diarios de 2002 a 2019 luego de ser filtrados con un modelo AR-GARCH, para así evitar que la volatilidad no constante afecte las correlaciones estimadas. Se encontró que existe relación baja y positiva entre el Colcap y el índice Ibove, el SyP500 y el petróleo crudo, y una relación baja y negativa con el USD / COP. Adicionalmente, se evidencia mayor dependencia de cola con el índice Ibove; y menor con el petróleo crudo.

**Keywords:** Cópulas Arquimedianas, Cópulas elípticas, AR-GARCH, Tail dependence, Kendall tau

---

## Introducción

El estudio de la relación entre los rendimientos de un activo y los rendimientos del mercado se ha llevado a cabo tradicionalmente mediante el coeficiente de correlación lineal, sin embargo, esta medida funcionaría para describir la asociación en un mercado con retornos normales, y es sencillo demostrar que la distribución de los retornos tiende a ser leptocúrtica y de cola pesada, cuya estructura conduce a una dependencia no lineal entre las variables. El efecto de dependencia no lineal tiende a ser diferente cuando el mercado sube que cuando cae. Siendo así, la herramienta estadística cópula permite explicar la dependencia entre variables de mejor manera, pues estudia la relación como la probabilidad de que una variable supere cierto cuantil debido a que la otra variable también lo excedió. Esto es interesante para los gestores de cartera, porque combina las distribuciones marginales de diferentes activos y captura el vínculo entre ellos en una distribución conjunta.

La relevancia de este trabajo, radica en que los gestores de cartera buscan entender la volatilidad de los factores económicos y financieros de los cuales depende el valor de su cartera, también intentan comprender de manera más clara cómo el valor de dicha cartera cambia entre estos factores, considerando así la dependencia no lineal, la distribución subyacente y la dependencia de cola, para así tener una mejor comprensión de las interacciones de los activos en los mercados de capital. En la primera parte se examinan las series diarias ajustando un modelo AR-GARCH con distribución t-Student, luego son usados los residuos de dicho modelo para estimar las cópulas Arquimedianas y Elípticas por el método de máxima verosimilitud. También es calculado el Kendall  $\tau$  y la probabilidad de dependencia de la cola para la muestra y luego en una ventana móvil de 500 días, lo que permite establecer si la relación y la dependencia de la cola con el índice Colcap varían con el tiempo.

---

\* Autor de contacto: [danielvelasquez@itm.edu.co](mailto:danielvelasquez@itm.edu.co).

## Metodología

La herramienta cópula, para el caso bivariado, es una función  $C(u) = C(u_1, u_2)$ , en  $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , con distribuciones marginales uniformes estándar. Sklar (1959) plantea en este caso, que si  $F$  es la función de distribución conjunta con marginales  $F_1, F_2$ , existe entonces una cópula  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  tal que, para todo  $r_1, r_2$  en  $\mathbb{R}$ ,  $F(r_1, r_2) = C(F_1(r_1), F_2(r_2)) = C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$ , donde  $U_1 = F_1(r_1)$  y  $U_2 = F_2(r_2)$  son funciones uniformes estándar. Lo cual implica que la cópula  $C$  captura la estructura de dependencia entre  $r_1, r_2$  y si las marginales son continuas hay una única cópula  $C$  que la represente.

Las funciones cópulas son una herramienta eficiente para crear distribuciones que modelen la relación entre datos multivariados, analizando la estructura de dependencia presente entre las variables. En la literatura es posible distinguir las familias de cópulas elípticas, como la Normal y t-student, y las Arquimedianas, como la Gumbel, Frank, y Clayton. Las cópulas elípticas representan relaciones de dependencia simétricas y son las más populares en finanzas, debido a la facilidad de su implementación [Aloui, Aïssa and Nguyen \(2013\)](#). La cópula normal no presenta dependencia de cola, mientras que la cópula t-student puede capturar dependencias extremas entre variables.

$$C_{\rho}^{\text{Gaussiana}}(u_1, u_1) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left[ \frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right] ds_1 ds_2 \quad (1)$$

Estudios recientes se centran en el uso en la cópula t-student como herramienta para modelar la dependencia entre variables cuando se presenta leptocurtosis y asimetría, como [Demarta and McNeil \(2005\)](#) y [Mashal, Naldi and Zeevi \(2003\)](#).

$$C_{v,\rho}^t(u_1, u_1) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left[ 1 + \frac{s_1^2 - \rho s_1 s_2 + s_2^2}{v(1-\rho^2)} \right]^{-\frac{(v+2)}{2}} ds_1 ds_2 \quad (2)$$

Las cópulas arquimedianas proporcionan una forma cerrada (explícita) para describir una gran cantidad estructuras de dependencia entre variables, capturar asimetría y dependencia de colas.

El coeficiente Kendall- $\tau$  es una medida de asociación no lineal entre variables. Para su cálculo se toma consideración el vector aleatorio  $(r_1, r_2)$  y una copia independiente  $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ , para luego hallar la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia. Donde  $-1 \leq \tau \leq 1$ ,  $\tau$  y se interpreta similar a la correlación de Spearman. Los coeficientes Tail dependence miden la fortaleza de la dependencia para los valores extremos entre un par de distribuciones. Es común que los rendimientos de acciones presenten dependencia de cola, así no muestren correlación entre ellos. Es posible hallar un coeficiente empírico de dependencia de cola superior  $\lambda_u$  y otro inferior  $\lambda_l$ , ambos en  $(0, 1]$ .

## Aplicación

Los índices de interés fueron recolectados con frecuencia diaria, de enero de 2002 a abril de 2019. Cada índice queda con 4319 observaciones. Luego son hallados los rendimientos logarítmicos, los cuales son filtrados mediante un modelo AR(1)-GARCH(1,1), que resulta ser significativo. Esto se realiza, pues no es correcto estimar la cópula sin filtrar los rendimientos, porque los coeficientes pueden presentar volatilidad condicional como componente de ruido en la estimación de dicha

Parámetros	Índice Ibov	Índice S&P500	Petróleo Crudo	USD/COP	Parámetros	Índice Ibov	Índice S&P500	Petróleo Crudo	USD/COP
<i>Cópula Clayton</i>					<i>Cópula Gumbel</i>				
$\theta$	0.455** (0.031)	0.3755*** (0.022)	0.2975*** (0.021)	-0.293*** (0.016)	$\theta$	1.214*** (0.014)	1.201*** (0.013)	1.154*** (0.012)	NA
$\tau$	0.1714	0.1581	0.1294	-0.1715	$\tau$	0.176	0.168	0.133	NA
<i>Dependencia de cola</i>					<i>Dependencia de cola</i>				
$\lambda_l$	0.1872	0.1579	0.0973	0	$\lambda_l$	0	0	0	NA
$\lambda_u$	0	0	0	0	$\lambda_u$	0.23	0.2195	0.1766	NA
Parámetros					USD/COP				
<i>Cópula Frank</i>									
$\theta$			1.793*** (0.095)	1.699*** (0.095)	1.392*** (0.094)	-1.633*** (0.095)			
$\tau$			0.193	0.183	0.152	-0.177			
<i>Dependencia de cola</i>									
$\lambda_l$			0	0	0	0			
$\lambda_u$			0	0	0	0			

Los valores en paréntesis corresponden a las desviaciones estándar,  $\tau$  corresponde al Tau de Kendall,  $\rho$  es el coeficiente de correlación de Pearson,  $\lambda_l$  y  $\lambda_u$  son los coeficientes de dependencia de cola inferior y superior respectivamente. Los asteriscos indican el nivel de significancia: "\*" 10%, "\*\*\*" 5%, "\*\*\*\*" 1%.

Figure 1: Resultados para las Cópulas Arquimedianas.

correlación. Son estimadas en [R Core Team \(2019\)](#) las cópulas arquimedianas y elípticas, así como los coeficientes Kendall  $\tau$  y Tail dependence.

De acuerdo a las figuras 1 y 2, el índice Ibov muestra una relación muy leve con el Colcap, de acuerdo al Kendall  $-\tau$ , el cual está entre 0.1714 y 0.204 para las cópulas ajustadas. Se presenta una correlación positiva entre las series y una dependencia de cola inferior de 5.9% para la cópula t y 18.72% para la cópula Clayton; implicando que existe una probabilidad del 99% de que cuando el Ibov tenga un valor extremo, en el Colcap también se tendrá con igual signo. Adicionalmente, los resultados muestran dependencia de cola superior del 5.9% para la t y del 23% para la cópula Gumbel. El índice SyP500 muestra una correlación positiva y muy leve, de entre 0.15 y 0.18 con el Colcap, lo cual indica que el índice SyP500 no está relacionado o no explica en mayor medida el comportamiento de Colcap. Adicional a esto, la dependencia de cola está entre 3.47 y 15.79%.

Parámetros	Índice Ibov	Índice S&P500	Petróleo Crudo	USD/COP	Parámetros	Índice Ibov	Índice S&P500	Petróleo Crudo	USD/COP
<i>Cópula t-Student</i>					<i>Cópula Normal</i>				
$\rho$	0.3014*** (0.015)	0.288*** (0.015)	0.239*** (0.015)	-0.276*** (0.015)	$\rho$	0.314*** (0.013)	0.296*** (0.013)	0.243*** (0.014)	-0.285*** (0.013)
$\tau$	0.195	0.186	0.154	-0.178	$\tau$	0.204	0.191	0.156	-0.184
<i>Dependencia de cola</i>					<i>Dependencia de cola</i>				
$\lambda_l$	0.059	0.037	0.013	0.001	$\lambda_l$	0	0	0	0
$\lambda_u$	0.059	0.037	0.013	0.001	$\lambda_u$	0	0	0	0
Df	7.734 (1.191)	9.371 (1.707)	12.295 (2.790)	10.082 (1.916)					
Índice Ibov					USD/COP				
Dependencia de cola empírica al 1%									
$\lambda_l$			0.240	0.136	0.071	0			
$\lambda_u$			0.126	0.056	0.042	0			

Los valores en paréntesis corresponden a las desviaciones estándar,  $\tau$  corresponde al Tau de Kendall,  $\rho$  es el coeficiente de correlación de Pearson,  $\lambda_l$  y  $\lambda_u$  son los coeficientes de dependencia de cola inferior y superior respectivamente y Df los grados de libertad para la t. Los asteriscos indican el nivel de significancia: "\*" 10%, "\*\*\*" 5%, "\*\*\*\*" 1%.

Figure 2: Resultados para las Cópulas Elípticas.

```
#Código R para el ajuste de la cópula t y los coeficientes Kendall-tau
#y Tail dependence con ventanas móviles de 500 días.
for (i in 2:5){
  for (t in (WE+1):4319){
    t1 = t-WE
    t2 = t-1
    window = res[t1:t2,]
    m <- pobs(as.matrix(cbind(window[,1],window[,i])))
    t.cop <- tCopula(dim=2)
    fit<- fitCopula(t.cop,m,method="ml",optim.method="BFGS" )
    rho<- coef(fit)[1]
    df<- coef(fit)[2]
    a=tCopula(dim=2,rho,df=df)
    cor_t[t,i]= tau(a)
    low_t[t,i]= lambda(a)[1]
    up_t[t,i] = lambda(a)[2]
    df_t[t,i] = coef(fit)[2]
    print(t)
    print(i)
  }}

```

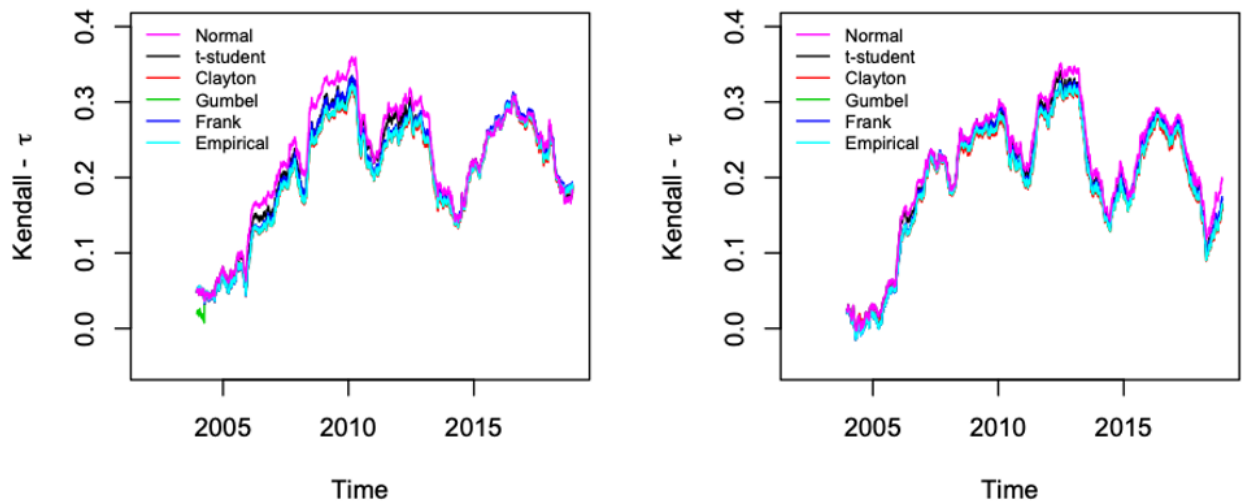


Figure 3: Kendal Tau con ventana móvil de 500 días para Ibov-Colcap (izquierda) y SyP500-Colcap (derecha).

## References

- Aloui, Riadh, Mohamed Safouane Ben Aïssa and Duc Khuong Nguyen. 2013. "Conditional dependence structure between oil prices and exchange rates: a copula-GARCH approach." *Journal of International Money and Finance* 32:719–738.
- Demarta, Stefano and Alexander J McNeil. 2005. "The t copula and related copulas." *International statistical review* 73(1):111–129.
- Mashal, Roy, Marco Naldi and Assaf Zeevi. 2003. "On the dependence of equity and asset returns." *RISK-LONDON-RISK MAGAZINE LIMITED*- 16(10):83–88.
- R Core Team. 2019. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing.  
**URL:** <https://www.R-project.org/>