

# Comparación de leyes de mortalidad para estimar el valor presente neto de un seguro vida entera en Colombia \*

**Daniel Betancur Rodríguez**  
**Freddy Hernández Barajas**

*Universidad Nacional de Colombia - sede Medellín*  
*Universidad Nacional de Colombia - sede Medellín*

---

**Resumen:** Este documento presenta los resultados de un estudio de simulación para comparar la calidad del ajuste para estimar la prima neta de un seguro de vida entera para hombres en Colombia de cuatro leyes de mortalidad: ley de mortalidad de Gompertz, ley de mortalidad de Makeham, ley de mortalidad de Siler y ley de mortalidad de Heligman-Pollard. El desempeño de las leyes se analizó en dos escenarios de tasa de descuento y utilizando con distintos métodos de optimización del ajuste de los parámetros variando la función de pérdida y se midió utilizando el error cuadrático medio (ECM). El estudio concluyó que las leyes de mortalidad de Siler y Heligman-Pollard presentan un mejor rendimiento para la estimación del valor presente neto de los seguros al ajustarse con la función de pérdida 'LF2', sin embargo no se encontró información para asegurar cuál de estos dos modelos es superior, por lo que por parsionia se recomienda la ley de Siler por tener menos parámetros a estimar.

**Keywords:** ley de mortalidad de Gompertz, ley de mortalidad de Makeham, ley de mortalidad de Siler, ley de mortalidad de Heligman y Pollard, tablas de mortalidad, seguro de vida completa, valor presente neto

---

## Introducción

En el estudio de los seguros de vida se han utilizado modelos matemáticos y probabilísticos, [Giraldo \(2017\)](#) menciona el caso de estimar los modelos paramétricos para la duración de la vida humana con base en Tablas de mortalidad, que de acuerdo con [Zarruk A. \(2011\)](#) se pueden interpretar como modelos que representan la distribución estadística dle tiempo de sobrevivencia esperada de los miembros de un grupo, elaborada a partir de información del número y edad de personas expuestas al riesgo de muerte y la edad al momento de morir. En [Mayorga \(2017\)](#) se presenta la tabla utilizada en el presente estudio.

En [Zarruk A. \(2011\)](#) se menciona la necesidad del proceso de graduación utilizando modelos paramétricos. [Mode \(1993\)](#) afirma que estos modelos han probado ser útiles para dos propósitos generales: Como herramientas emíricas del estudio de la mortalidad humana y para motivar teorías respecto al proceso biológico que influencia los patrones de mortaliad, sin embargo los resultados de los estudios solo son tan buenos como los modelos de los cuales dependen, por lo que es común encontrar en la literatura el ajuste y evaluación de modelos paramétricos, también llamados leyes de mortalidad, para tablas de vida en diversos países, más no uno realizado con tablas de vida actuales en Colombia.

En la revisión de la literatura se encontró que [Wetterstrand \(1981\)](#) estudia la comparación de tablas de mortalidad ajustando la ley de mortalidad de Gompertz a 30 tablas de mortalidad y

---

\* Autor de contacto: [dabetancurro@unal.edu.co](mailto:dabetancurro@unal.edu.co).

analizando la evolución de los parámetros estimados en el tiempo. Thatcher (1990) compara las leyes de mortalidad de Heligmand y Pollard con la ley de Gompertz y una tabla de mortalidad inglesa, ajustando ecuaciones para las curvas de mortalidad. En Debón A. (2008) se aplica la ley de mortalidad de Lee-Carter (1992) a datos de mortalidad en España. Mode (1993) realizan un estudio comparativo entre cuatro leyes de mortalidad, utilizando tablas de mortalidad de Australia y Estados Unidos.

En este documento se presenta un estudio de simulación comparando cuatro leyes de mortalidad con diversas metodologías de ajuste y escenarios. Se presenta: En primer lugar un marco teórico corto, los objetivos del estudio y leyes de mortalidad a evaluar, escenarios de evaluación, metodología del estudio de simulación y finalmente los resultados obtenidos

## Elementos de Teoría de Supervivencia

Si se supone  $X$  una variable aleatoria continua que representa el tiempo de años que habrá de vivir una persona recién nacida, definida en  $[0, w)$  con  $w$  la edad máxima que alcanza la vida humana. la probabilidad de que una persona de edad  $x$  años fallezca antes de que pasen  $t$  años, es decir, antes de cumplir  $x + t$  años, se denota  ${}_tq_x$ , donde  ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$ , con las convenciones:

$${}_1q_x = q_x, {}_1p_x = p_x$$

### Fuerza de Mortalidad

La fuerza de mortalidad para  $x$  después de  $t$  años se define

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln {}_tp_x, \quad (1)$$

y se interpreta como la tasa instantánea de mortalidad, que mide el incremento de en la probabilidad de fallecer un individuo de edad  $x$ , a medida que aumenta el tiempo  $t$ . los modelos actuariales (leyes de mortalidad) se definen asumiendo una función paramétrica para  $\mu_{x+t}$  y hallando una expresión para  ${}_tp_x$  con base en la expresión

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}. \quad (2)$$

## Seguros de Vida

Entre los diversos tipos de seguro de vida, el seguro de vida entera es un contrato que provee el pago de una unidad monetaria al final del año de fallecimiento de un individuo de edad  $x$ . Sea  $K(x)$  la vida remanente abreviada de  $x$ , es decir la parte entera de su vida remanente  $T(x)$ . El tiempo en el que se paga el seguro es al final del año de fallecimiento, es decir  $K(x) + 1$ . El valor presente de dicho pago es:

$$Z = \prod_{j=1}^{K(x)+1} \frac{1}{1+i_j}$$

con  $i_j$  la tasa de descuento en el año  $j$ .

La prima neta es el valor esperado de  $Z$  y se utiliza para estimar el valor presente neto que tendrá el seguro de vida. Basandose en la expresión (2) se calcula como:

$$A_x := E(Z) = \sum_{k=0}^{w-x-1} \left( \frac{1}{1+i_j} \right)^{k+1} {}_k p_x q_x.$$

## Objetivo del estudio

El objetivo principal de este artículo es estudiar mediante simulación el desempeño de las cuatro leyes de mortalidad de Gompertz, Makeham, Siler y Heligman-Pollard, para la estimación del valor presente neto de un seguro de vida entera, basandose en las tabla de mortalidad para hombres en Colombia presentada en [Mayorga \(2017\)](#) para las edades de 30 a 49 años en que, según [Mayorga W. \(2015\)](#), se presenta la mayor demanda de seguros de vida en Colombia (44% de los seguros en el país).

Las leyes de mortalidad incluidas fueron seleccionadas por haber sido aplicadas y encontradas utiles en tablas de vida en otros países y periodos de tiempo. Sin embargo, de los modelos encontrados en la bibliografía se descartan el modelo de Lee-Carter y el modelo de Mode-Jacobson por su complejidad paramétrica y no estar disponible en las herramientas de software disponibles en el paquete estadístico MortalityLaws del software ? utilizando para el estudio.

## Escenarios de simulación

### *Función de pérdida*

Existen ocho funciones de perdida implementadas en el paquete MortalityLaws que permiten ajustar los parámetros de de cada ley, sin embargo, solo se tendrán en cuenta siete de estas, pues en el estudio se encontró que la función de perdida binomial generaba problemas de convergencia en algunas de las estimaciones.

### *Tasa de descuento*

La tasa a la que se descuenta el valor del seguro a traer a valor presente es la tasa de inflación, en el presente trabajo se toman en cuenta dos escenarios para la tasa de interés: tasa de descuento constante y tasa de descuento variable.

## Metodología del estudio de simulación

Para el estudio la variable que se quería simular era la duración de la vida de una persona para luego hallar el valor presente del seguro de vida pagado al momento de su muerte y compararlo con la prima neta que estima cada ley en cada uno de los escenarios. Finalmente se compara el rendimiento de las leyes para estimar el valor presente de los seguros. Los pasos seguidos fueron: Generación del tiempo de vida aleatorio a partir de la tabla de mortalidad, cálculo de valor presente neto del seguro para cada vida generada, cálculo de la prima neta estimada para cada ley de mortalidad bajo los diferentes escenarios, cálculo del ECM.

### Función objetivo

Se usa la función de simulación que halla el error cuadrático medio estimado cometido con  $N$  simulaciones para cada escenario. A tener en cuenta que este ECM estimado viene dado por:

$$ECM = \sum_{i=1}^N \frac{(A_x - Z_i)^2}{N},$$

donde  $A_x$  es el valor de la prima neta estimado para una persona de edad  $x$ ,  $Z_i$  Es el valor presente neto real de un seguro de vida para la persona  $i$  de edad  $x$  y  $N$  el número de simulaciones.

### Resultados

*Por tasa de descuento constante para los mejores ajustes en cada ley*

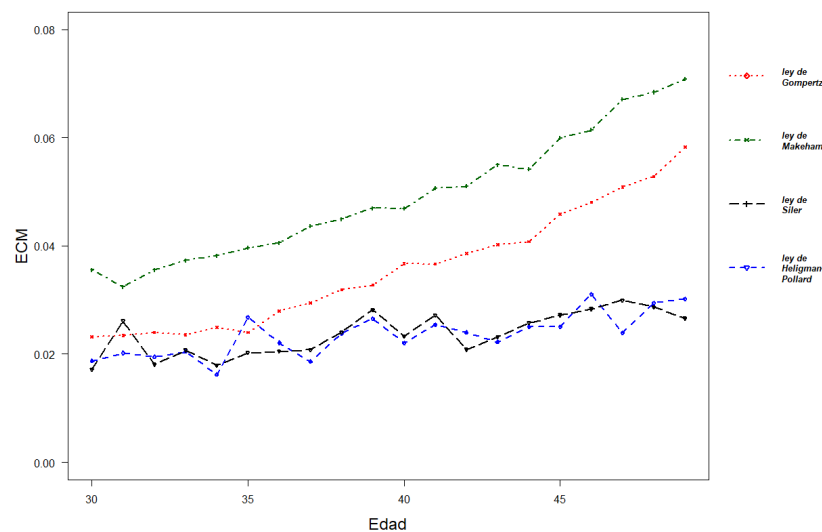


Figure 1: ECM estimado para las cuatro leyes de mortalidad con el mejor ajuste determinado para cada una con tasa de descuento constante.

*Por tasa de descuento variable para los mejores ajustes en cada ley*

Los gráficos evidencian que las leyes de Mortalidad de Siler y Heligman-Pollard fueron las que tuvieron el mejor rendimiento en la estimación del VPN de los seguros para todas las edades, teniendo estas un desempeño muy similar y que no puede presentarse una como mejor tampoco al analizar la desviación estándar del estimador. # Discusión

Las leyes de mortalidad de Siler y Heligman-Pollard mostrar tener un mejor desempeño que las de Gompertz y Makeham para la estimación del valor presente neto de los seguros de vida tanto para las tasa de descuento constante como variable, diferencia que se hace más notable además a medida que aumenta la edad del asegurado. Sin embargo los resultados no arrojan de manera concluyente un mejor modelo entre estos dos, por lo que se sugiere, por parsimonia, la utilización de la ley de Siler, debido a tener menos parámetros a estimar.

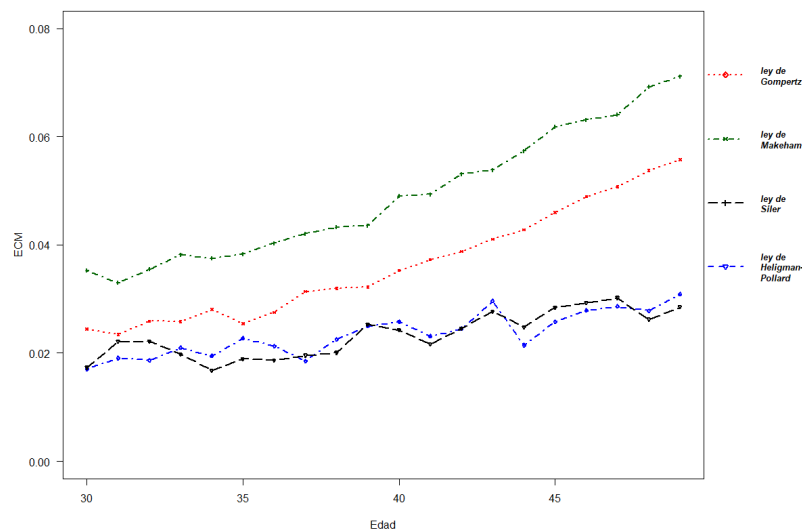


Figure 2: ECM estimado para las cuatro leyes de mortalidad con el mejor ajuste determinado para cada una con tasa de descuento variable.

## Conclusiones

Si bien la literatura ha reportado estudios de calidad de ajuste de leyes de mortalidad para tablas de mortalidad en varios países, no se encontró un estudio que aplicara estos modelos a tablas de vida en Colombia con datos actuales. Por otro lado, cabe resaltar que existen muchas otras leyes de mortalidad posteriores a las estudiadas sobre las cuales no se han adelantado trabajos similares ni están aún incluidas en herramientas de software. El presente estudio evaluó la calidad de la estimación del valor presente neto de seguros de vida entera para en hombres en Colombia entre los 30 y 49 años de las leyes de mortalidad de Gompertz, Makeham, Siler y Heligman-Pollard, encontrando que para todas las situaciones estudiadas los modelos de Siler y Heligman-Pollard presentan un ECM menor en la estimación.

Debido a que se trata de un modelo con menos parámetros a estimar, se propone que en situaciones prácticas donde se desee estimar el valor presente de un seguro de vida para la población analizada en este artículo se utilice la ley de mortalidad de Siler ajustando con la función de pérdida denotada 'LF2' en este artículo.

## Código en R

El siguiente link dirige a un repositorio en github donde está disponible el código y archivos utilizados para la realización de este estudio:

<https://github.com/dbeta95/Comparaci-n-de-leyes-de-mortalidad-para-estimar-el-valor-presente-neto-de-un-seguro-de-vida-entera->

## References

- Debón A., Montes F. & Puig F. 2008. "Modelling and forecasting mortality in Spain." *European Journal of Operational Research* 189(3):624–637.  
**URL:** <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.07.050>
- Giraldo, Norman D. 2017. *Actuaría de Contingencias de Vida*. Escuela de Estadística, Universidad Nacional, sede Medellín.
- Mayorga, Torres D. &. 2017. "Graduación de una nueva tabla de mortalidad de asegurados de vida individual." *Revista fasecolda* 166:44–53.  
**URL:** [https://fasecolda.com/files/3415/2061/2503/270-Texto\\_del\\_articulo-516-1-10-20180215.pdf](https://fasecolda.com/files/3415/2061/2503/270-Texto_del_articulo-516-1-10-20180215.pdf)
- Mayorga W., Grass M., Gutiérrez D. & Torres D. 2015. "La demanda de seguros de vida en Colombia: Una visión integral.".  
**URL:** <http://www.fasecolda.com/files/5214/3265/2138/DemandaSegurosdevidaColombia.pdf>
- Mode, Timothy B. Gage & Charles J. 1993. "Some Laws of Mortality: How Well Do They Fit?" *Human Biology* 65(3):445–461.  
**URL:** <https://www.jstor.org/stable/41464865>
- Thatcher, A.R. 1990. "Some results on the Gompertz and Heligman and Pollard laws of mortality." *Journal of the institute of Actuaries* 117(1):135–149.
- Wetterstrand, W.H. 1981. "Parametric models for life insurance mortality data: Gompertz's law over time." *Transactions of society of actuaries* 33:159–179.  
**URL:** <https://pdfs.semanticscholar.org/c64b/a57f7ede96e0b3bd193072e536f9fb3fe593.pdf>
- Zarruk A., Villegas A. & Ortiz F. 2011. *La industria aseguradora en Colombia Tomo I*. Fasecolda.  
**URL:** [http://www.fasecolda.com/files/9813/9101/5739/tablas\\_de\\_mortalidad.pdf](http://www.fasecolda.com/files/9813/9101/5739/tablas_de_mortalidad.pdf)