Ejercicio 1

GUIA Nº 5

$\models$ monotona. $\quad \Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \cup \Gamma' \models \phi$

$\Gamma \models \phi \iff \forall I$ interpretación $\underbrace{I \models \Gamma}_{\Updownarrow \; \forall \Psi \in \Gamma :\, I \models \Psi} \Rightarrow I \models \phi$

$I \models \Gamma \Rightarrow I \models \phi \equiv \neg(I \models \Gamma) \vee I \models \phi$

- Sea el caso que $\neg(I \models \Gamma)$ para alguna interpretación esto implica $\exists \Psi \in \Gamma : I \not\models \Psi$

  Por lo tanto en un conjunto mas grande seguirá valiendo $\exists \Psi \in \Gamma \cup \Gamma' : I \not\models \Psi$ i.e. no vale el antecedente

  $\Gamma \cup \Gamma' \models \phi \Leftarrow \forall I$ interpretación $I \not\models \Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow I \models \phi$

- Sea el caso $I \models \Gamma$ veamos que ocurrirá con $I \models \Gamma \cup \Gamma'$

  Puede ser también q' exista $\exists \Psi \in \Gamma \cup \Gamma' : I \not\models \Psi$ para alguna interp.
  y estaremos en el mismo caso donde no vale el antecedente

  Si en cambio $\forall \Psi \in \Gamma \cup \Gamma' \; I \models \Psi \Rightarrow I \models \Gamma \cup \Gamma'$

  Pero como en particular $I \models \Gamma \Rightarrow I \models \phi$ pues $\Gamma \models \phi$

  $\therefore I \models \phi$

$\therefore \forall I$ interpretación $I \models \Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow I \models \phi \stackrel{def.}{\Rightarrow} \Gamma \cup \Gamma' \models \phi$

Para aquellas interpretaciones que $I \not\models \Gamma \cup \Gamma'$ será trivial

Para aquellas interpretaciones que $I \models \Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow I \models \Gamma$ y basandonos en eso como hipotesis tendremos que $I \models \Gamma \Rightarrow I \models \phi$

Ejercicio 2

ϕ Satisfactible $\Rightarrow$ $\neg\phi$ no es satisfactible FALSO!

$\Gamma \models \phi$ sii no existe I tq. $I \models \neg((\bigwedge_{\psi \in \Gamma} \psi) \Rightarrow \phi)$

Sea ϕ = "Todos los autos son azules"

$\neg\phi$ = "No todos los autos son azules"

Ambas son satisfactibles dependiendo de los axiomas del universo.

Ejercicio 3

$\overline{R}, \sim R, R^+, R^*, \underbrace{\quad}_{\text{unarias}} R+S, R\&S, R.S, R-S \underbrace{\quad}_{\text{binarias}}$

$Iden = \{(a,a) \mid a \in \mathcal{U}\}$

$\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R \; a \in \mathcal{U} \; b \in \mathcal{U}\}$

$\sim R = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

$R^+ = \{(a,c) \mid (a,b), (b,c) \in R\}$

$R^* = \{(a,c) \mid (a,b), (b,c) \in R\} \cup \{(a,a) \mid a \in \mathcal{U}\}$

$R+S = \{(a,b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid (a,b) \in R \vee (a,b) \in S\}$

$R.S = \{(a,b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \exists c \in \mathcal{U} : (a,c) \in R \wedge (c,b) \in S\}$

$R\&S = \{(a,b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S\}$

$R-S = \{(a,b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S\}$

EJERCICIO 4

AXIOMAS

$R + none = R$

$\{(a,b) \in U \times U \mid (a,b) \in R \lor (a,b) \in none\}$

ninguno.

$\{(a,b) \in U \times U \mid (a,b) \in R\}$

$(R.S).T = R.(S.T)$

$(R.S).T = \{(a,b) \in U \times U \mid \exists c \in U \ (a,c) \in R \ y \ (c,b) \in S\}.T$

$\{(\tilde{a},\tilde{b}) \in U \times U \mid \exists \tilde{c} \in U \ (\tilde{a},\tilde{c}) \in \{(a,b) \in U \times U \mid \exists c \in U \ldots\} \ y \ (\tilde{c},\tilde{b}) \in T\}$

$\{(\tilde{a},\tilde{b}) \in U \times U \mid \exists \tilde{c} \in U \ \exists c \ (\tilde{a},c) \in R, (c,\tilde{c}) \in S \ y \ (\tilde{c},\tilde{b}) \in T\}$

$\{(\tilde{a},\tilde{b}) \in U^2 \mid \exists c \in U \ (\tilde{a},c) \in R \ (c,\tilde{b}) \in \{(c,\tilde{b}) \in U^2 \mid \exists \tilde{c} \ (c,\tilde{c}) \in S \ (\tilde{c},\tilde{b}) \in T\}$

$R.\{c,\tilde{b} \in U^2 \ldots\}$

$R.(S.T)$

$\sim(R.S) = \sim S . \sim R$

$\sim(R.S) = \{(a,b) \in U^2 \mid (b,a) \in R.S\}$

$\{(a,b) \in U^2 \mid (b,a) \in \{(b,a) \in U^2 \mid \exists c \ (b,c) \in R \ y \ (c,a) \in S\}\}$

$\{(a,b) \in U^2 \mid \exists c \ (b,c) \in R \ y \ (c,a) \in S\}$

$\sim S . \sim R = \{(a,b) \in U^2 \mid \exists c \ (a,c) \in \sim S, \ y \ (c,b) \in \sim R\}$

$\{(a,b) \in U^2 \mid \exists c \ (c,a) \in S \ y \ (b,c) \in R\}$ ✓

EJERCICIO 5

(a) R orden parcial $\quad R \neq none$? MAL

(b) R es orden total $\quad Iden \subseteq R . \sim R$

(c) R orden estricto si
- No es Reflex $\quad Iden \,\&\, R = none$
- Transitiva $\quad (R.R) \,\&\, \overline{R} = none$
- Asimetrica $\quad \sim R \,\&\, R = none$

(a)

R orden parcial → Reflexiva
→ Antisimétrica
→ Transitiva

Reflexiva

$\forall x \quad (x,x) \in R$

$\forall x,y \,:\, x = y \Rightarrow (x,y) \in R$

$\forall x,y \,:\, (x,y) \in Iden \Rightarrow (x,y) \in R$

$Iden \subseteq R$

Antisimétrica

$\forall x,y \quad (x,y) \in R \text{ y } (y,x) \in R \Rightarrow x = y$

$\forall x,y \quad (x,y) \in R \text{ y } (x,y) \in \sim R \Rightarrow (x,y) \in Iden$

$\forall x,y \quad (x,y) \in R \,\&\, \sim R \Rightarrow (x,y) \in Iden$

$R \,\&\, \sim R \subseteq Iden$

Transitiva

$\forall x,y,z \quad (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$\forall x,z \quad \exists y \; (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in R \Rightarrow x,z \in R$

$\forall x,z \quad (x,z) \in R.R \Rightarrow x,z \in R$

$R.R \subseteq R$

(b) R es orden total → Orden parcial
↳ Total

Total $\forall x,y \quad (x,y) \in R \lor (y,x) \in R$

$\forall x,y \in Univ \Rightarrow (x,y) \in R \lor (y,x) \in R$

$\forall x,y \in Univ \Rightarrow (x,y) \in R \lor (x,y) \in \sim R$

$\forall x,y \in Univ \Rightarrow (x,y) \in R \cup \sim R$

$Univ \subseteq R + \sim R$

unión

(c) R orden estricto → no reflexiva
↳ antisimétrica
↳ transitiva

No Reflex $\forall x : (x,x) \notin R$

$\forall x : (x,x) \in \overline{R}$

$\forall x,y \ (x,y) \in Iden \Rightarrow (x,y) \in \overline{R}$

$Iden \subseteq \overline{R}$

Ejercicio 6

R simulación $\forall s,t,s' : (s,t) \in R \land s \xrightarrow{a} s' \Rightarrow \exists t' \ (s',t') \in R \land t \xrightarrow{a} t'$

$\forall s,t,s' : (s,t) \in R \land (s,s') \in Ta \Rightarrow \exists t' \ (t,t') \in Ta \land (s',t') \in R$

$\forall t,s' : \exists s \ (s,t) \in R \land (s,s') \in Ta \Rightarrow \exists t' \ (t,t') \in Ta \land (s',t') \in R$

$\forall t,s' : (\exists s : (t,s) \in \sim R \land (s,s') \in Ta) \Rightarrow \exists t' : (t,t') \in Ta \land (t',s') \in \sim R$

$\forall t,s' : (t,s') \in \sim R . Ta \Rightarrow (t,s') \in \sim Ta . \sim R$

$$\begin{array}{cc} \forall s & \exists t \\ \downarrow a & \downarrow a \\ s' & t' \end{array}$$

$\boxed{\sim R . Ta \subseteq Ta . \sim R}$

(b)- Una bisimulación $\begin{cases} \to \text{simulación} \\ \to R^{-1} \text{ simulación} \end{cases}$

$$\forall s,t,t' : (s,t) \in R \wedge t \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists s' \; s \xrightarrow{a} s' \wedge (s',t') \in R$$

$$\forall s,t', \quad \exists t \; (s,t) \in R \wedge t \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists s' \; s \xrightarrow{a} s' \wedge (s',t') \in R$$

$$\forall s,t' \quad \exists t \; (s,t) \in R \wedge (t,t') \in T_a \Rightarrow \exists s' \; (s,s') \in T_a \wedge (s',t') \in R$$

$$\forall s,t' \quad \cancel{\exists t} \; (s,t') \in R.T_a \Rightarrow \cancel{\exists s'} \; (s,t') \in T_a.R$$

$$\boxed{R.T_a \subseteq T_a.R}$$

Bisimulación $= R.T_a \subseteq T_a.R \wedge \sim R \, T_a \subseteq T_a.\sim R$

(C) Bisimulación débil $\begin{cases} \to \text{simulación débil} \\ \to R^{-1} \text{ simulación débil} \end{cases}$

$$\forall \; s \xrightarrow{a} s' \qquad t \overset{a}{\Longrightarrow} t' \; \exists$$

$\sim R.T_a \subseteq T_a.\sim R$ pero no queremos solo T_a sino D_a con transiciones τ posibles

$$\begin{cases} \sim R.T_a \subseteq D_a.\sim R \\ D_a = D_t + T_a.D_t \\ D_t = T_\tau^* \end{cases}$$

Ingeniería de Software II
Trabajo práctico N^o 5

Universidad Nacional de Córdoba
FaMAF

Ejercicio 1. Demuestre que $\models$, como relación binaria entre conjuntos de fórmulas de la lógica proposicional, es monótona, es decir, que:

$$\Gamma \models \phi \quad \text{implica} \quad \Gamma \cup \Gamma' \models \phi$$

cualesquiera sean los conjuntos de fórmulas Γ y Γ'.

Ejercicio 2. Demuestre o refute lo siguiente:

Si una fórmula es ~~satisfactible~~, su negación necesariamente no ~~lo es~~. X ✓
válida satisf.

Ejercicio 3. Dé la semántica formal de los operadores del álgebra de relaciones (en la transparencia 22 del teórico hay 3 ejemplos).

Ejercicio 4. Usando la semántica formal demuestre los axiomas dados en la transparencia 23 del teórico.

Ejercicio 5. En el álgebra de relaciones, dé los conjuntos de ecuaciones que especifican que una relación R es:

✓ (a) un orden parcial,

✓ (b) un orden total,

✓ (c) un orden estricto.

Ejercicio 6. Sea Act un conjunto de acciones o eventos. Para cada $a \in Act$, sea T_a la relación de transición etiquetada con a en un sistema de trasiciones etiquetadas (i.e., $s\ T_a$ sii $s \xrightarrow{a} t$). Dé los conjuntos de equaciones que especifican que una relación R es:

(a) una simulación, ✓

(b) una bisimulación,

(c) una bisimulación débil.

Ejercicio 7. Sea $E \subseteq N \times N$ la relación de aristas en un grafo dirigido sobre el conjunto de nodos N. Usando álgebra de relaciones, dé las ecuaciones necesarias sobre E para especificar que:

(a) el grafo es acíclico,

(b) el grafo es no dirigido,

(c) el grafo es fuertemente conexo,

(d) el grafo es conexo,

(e) el grafo contiene una componente fuertemente conexa,

(f) el grafo contiene una componente conexa,

(g) el grafo es un árbol.

FALTA