EFC01

September 25, 2019

1 IA006 - Exercícios de Fixação de Conceitos

1.1 EFC1 - 2s2019

1.1.1 Parte 1 - Atividades teóricas

Exercício 1

Distribuição:

X/Y	Y=0	Y=1	Marg. X
X=0	1/6	3/8	13/24
X=1	1/8	1/3	11/24
Marg. Y	7/24	17/24	1

a) $P(X)$ e $P(Y)$

Resposta:

- $P(X = x) = \{\frac{13}{24}, \frac{11}{24}\}$
- $P(Y = y) = \{\frac{7}{24}, \frac{17}{24}\}$

b) $P(X = 0|Y = 0)$

$\frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1}{6} \times \frac{24}{7} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$

$\frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1}{8} \times \frac{24}{7} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

Resposta:

- $P(X = 0|Y = 0) = \frac{4}{7}$

c) $E[X]$ e $E[Y]$
$E[X] = \sum_k x_k P(x_k)$
$E[X] = 0 \times \frac{13}{24} + 1 \times \frac{11}{24}$
$E[Y] = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{17}{24}$

Resposta:

- $E[X] = \frac{11}{24}$
- $E[Y] = \frac{17}{24}$

d) São independentes? Por quê?
Resposta:
X e Y NÃO são independentes, pois a probabilidade do evento Y não afeta X, de acordo com a formulação:
$P(X, Y) = P(X)P(Y)$
Verificamos:
$P(X = x, Y = 0) = P(X = x)P(Y = 0)$
Por fim temos:
$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) => \frac{1}{6} = \frac{13}{24} \times \frac{7}{24} => \frac{1}{6} \neq \frac{91}{576}$
$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0) => \frac{1}{8} = \frac{11}{24} \times \frac{7}{24} => \frac{1}{8} \neq \frac{77}{576}$

Exercício 2
Distribuição:

X/Y	Y=0	Y=1	Marg. X
X=0	0	1/4	1/4
X=1	3/8	3/8	3/4
Marg. Y	3/8	5/8	1

a) $H(X), H(Y), H(X, Y)$
Sendo: $H(X) = -\sum_x p(x)log_2[p(x)]$
$H(X) = H(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
$H(X) = -((\frac{1}{4} \times log_2[\frac{1}{4}]) + (\frac{3}{4} \times log_2[\frac{3}{4}]))$
$H(X) = -((\frac{1}{4} \times -2) + (\frac{3}{4}(log_2[3] - 2)))$
$H(X) = -((-\frac{1}{2}) + (\frac{3}{4}(log_2[3] - 2)))$
$H(X) = 0.8112$

$H(Y) = H(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$
$H(Y) = -((\frac{3}{8} \times log_2[\frac{3}{8}]) + (\frac{5}{8} \times log_2[\frac{5}{8}]))$
$H(Y) = -((\frac{3}{8}(log_2(3) - 3)) + (\frac{5}{8}(log_2(5) - 3)))$
$H(Y) = 0.9544$

Calculando $H(X,Y)$
Sendo: $H(X,Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y)log_2[p(x,y)]$
$H(X,Y) = -((\frac{1}{4}log_2(\frac{1}{4})) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{3}{8})) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{3}{8})))$
$H(X,Y) = 1.5612$

Resposta:
$H(X) = 0.8112$
$H(Y) = 0.9544$
$H(X,Y) = 1.5612$

b) $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$
$H(Y|X) = -\sum_x \sum_y p(x,y)log_2[p(y|x)]$
$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$
$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$

$P(Y=1|X=0) = \frac{P(X=0,Y=1)}{P(X)} => \frac{1}{4} \times \frac{4}{1} = 1$
$P(Y=0|X=1) = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X)} => \frac{3}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{2}$
$P(Y=1|X=1) = \frac{P(X=1,Y=1)}{P(X)} = \frac{1}{2}$

$H(Y|X) = -((\frac{1}{4}log_2(1)) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{1}{2})) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{1}{2})))$
$H(Y|X) = -((\frac{3}{8} \times -1) + (\frac{3}{8} \times -1))$
$H(Y|X) = -((-\frac{3}{8}) + (-\frac{3}{8}))$
$H(Y|X) = 0.75$

$H(X|Y) = 1.5612 - 0.9544$
$H(X|Y) = 0.6068$

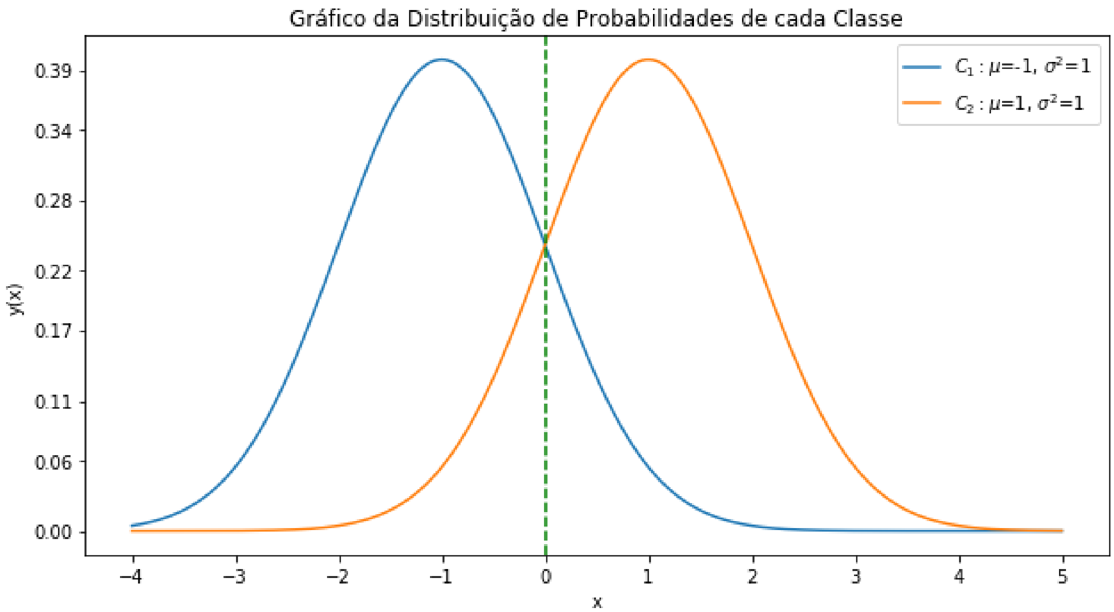
Resposta:
$H(Y|X) = 0.75$
$H(X|Y) = 0.6068$

c) $I(X,Y)$
Dado que,
$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$
temos portanto,
$I(X,Y) = 0.8112 - 0.6068$
$I(X,Y) = 0.2044$

Resposta:
$I(X,Y) = 0.2044$

Exercício 3 a)

$C_1 => \mu = -1, \sigma^2 = 1$
$C_2 => \mu = 1, \sigma^2 = 1$



Função de probabilidade de densidade da Distribuição Normal é dada por:
$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x-\mu)^2)}{2\sigma^2})$
Dado que MLE propõe:
$\theta_{MLE} = argmax_\theta log[p(x|\theta)]$
Sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$, portanto a MLE pode ser calculada usando:
$L(x|\mu, \sigma^2) = log[p(x|\mu, \sigma^2)]$
Usando a distribuição acima e a regra do estimado de máxima verossimilhança, calcula-se:
$L(x|\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x-\mu)^2$
Aplicando acima, sendo $n = 1$:
$L(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(x+1)^2$
$L(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

Dada as fórmulas acima podemos concluir portanto que quando $x = 0$, as equações terão valores iguais, definindo a fronteira no valor 0, sendo 0 indecisão (ambas as classes poderiam ser escolhidas).

Para demonstrar, podemos definir 2 (dois) valores para x, consideremos $x = (0, 1)$.

Assim temos:
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(1+1)^2$
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(2)^2$
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - 2$
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -2.9189$

$L(x = 1|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(1-1)^2$
$L(x = 1|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(0)^2$

$L(x = 1|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -0.9189$

Definindo $x = 0$:
$L(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}(0 - 1)^2$
$L(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(-1)^2$
$L(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -1.4189$

$L(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}(0 - (-1))^2$
$L(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(1)^2$
$L(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -1.4189$

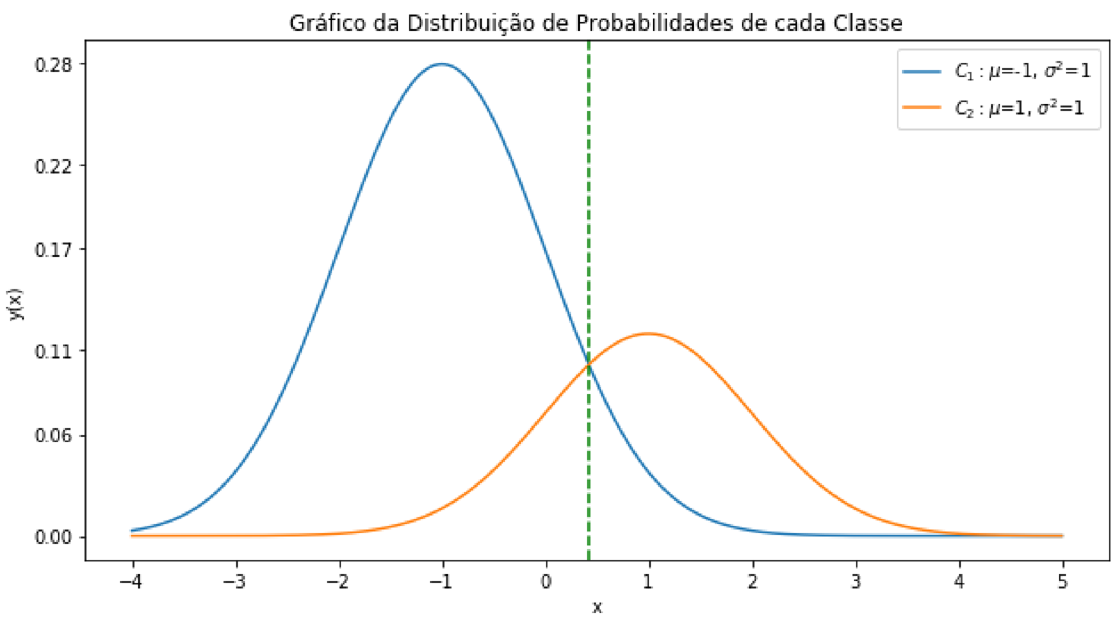
Resposta:
Dessa maneira, pode-se concluir que (conforma apresentado pelo gráfico também), amostras menores que 0 (zero) poderão ser classificados como sendo da classe C_1 e valores acima de 0 (zero) sendo da classe C_2, e 0 (zero) sendo a fronteira onde encontraremos indecisão.
$C_1 : x < 0$
$C_2 : x > 0$

b) $P(C_1) = 0,7, P(C_2) = 0,3$
Tendo a probabilidade a priori e utilizando o MAP cuja formulação apresenta:
$\theta_{MAP} = argmax_\theta log[p(x|\theta)] + log[p(\theta)]$
Sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$ e para o caso da classe C_1:
$f(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = log[p(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1)] + log[p(\mu = -1, \sigma^2 = 1)]$
Podemos definir para $x = 0$:
$log[p(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1)] = -1.4189$
$p(\mu = -1, \sigma^2 = 1) = 0.7$
Dessa maneira temos:
$f(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -1.4189 + log[0.7]$
$f(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -1.7755$
Para a classe C_2 temos:
$f(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -1.4189 + log[0.3]$
$f(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -2.6228$

Resposta:
Portanto no caso a amostra de valor 0 (zero) já não representa mais a região de indecisão do novo modelo dado as probabilidades.
Caso as distribuições sejam uniformes com média equidistantes e variâncias iguais a média, como o exercício fornece, pode-se calcular o ponto de intersecção, indiferente da densidade de probabilidades tendo valores a posteriori usando:
$\frac{P(C_1 x)}{P(C_2 x)} = \frac{f1(x)}{f2(x)} \times \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$
$\frac{P(C_1 x)}{P(C_2 x)} = log\frac{f1(x)}{f2(x)} + log\frac{P(C_1)}{P(C_2)}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = log\frac{f1(x=-1)}{f2(x=1)} + log\frac{P(C_1)}{P(C_2)}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = log\frac{0.3989}{0.3989} + log\frac{0.7}{0.3}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = 0 + 0.8472$
Como temos 2 classes:

$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = \frac{0.8472}{2}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = 0.4236$
Neste caso a fronteira de decisão será igual a 0.4236.

Portanto:
$C_1 : x < 0.436$
$C_2 : x > 0.436$



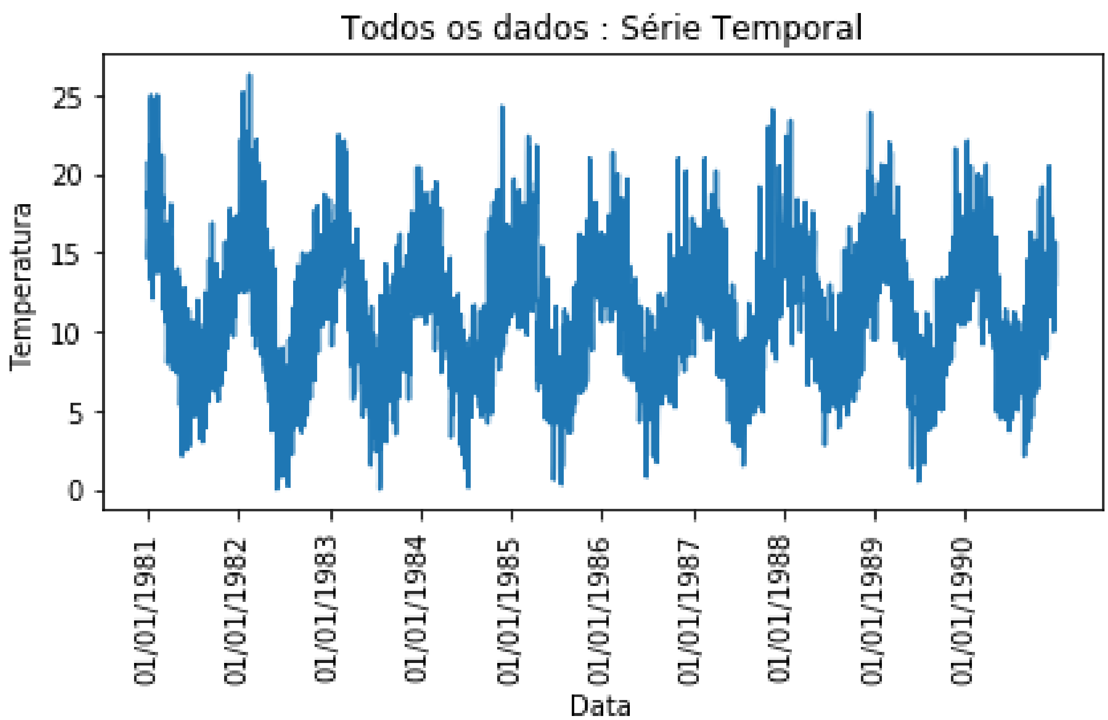
1.1.2 Parte 2 – Atividade computacional

Importação dos dados do *Australian Bureau of Meteorology* e sua apresentação.

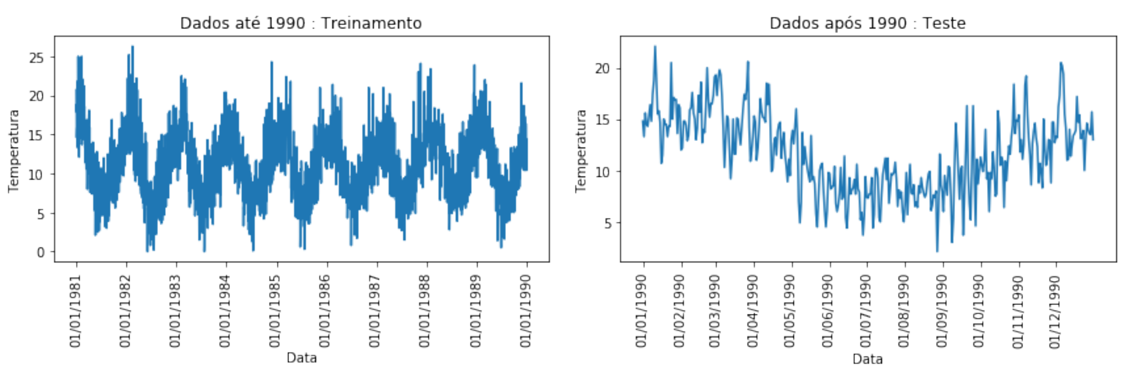
Os dados, são definidos como uma série temporal onde em determinada data é apresentada a temperatura. Abaixo é apresentado os primeiros 10 registros dos 3650 itens.

```
        Data  Temperature
0  01/01/1981         20.7
1  02/01/1981         17.9
2  03/01/1981         18.8
3  04/01/1981         14.6
4  05/01/1981         15.8
5  06/01/1981         15.8
6  07/01/1981         15.8
7  08/01/1981         17.4
8  09/01/1981         21.8
```

```
9  10/01/1981        20.0
```

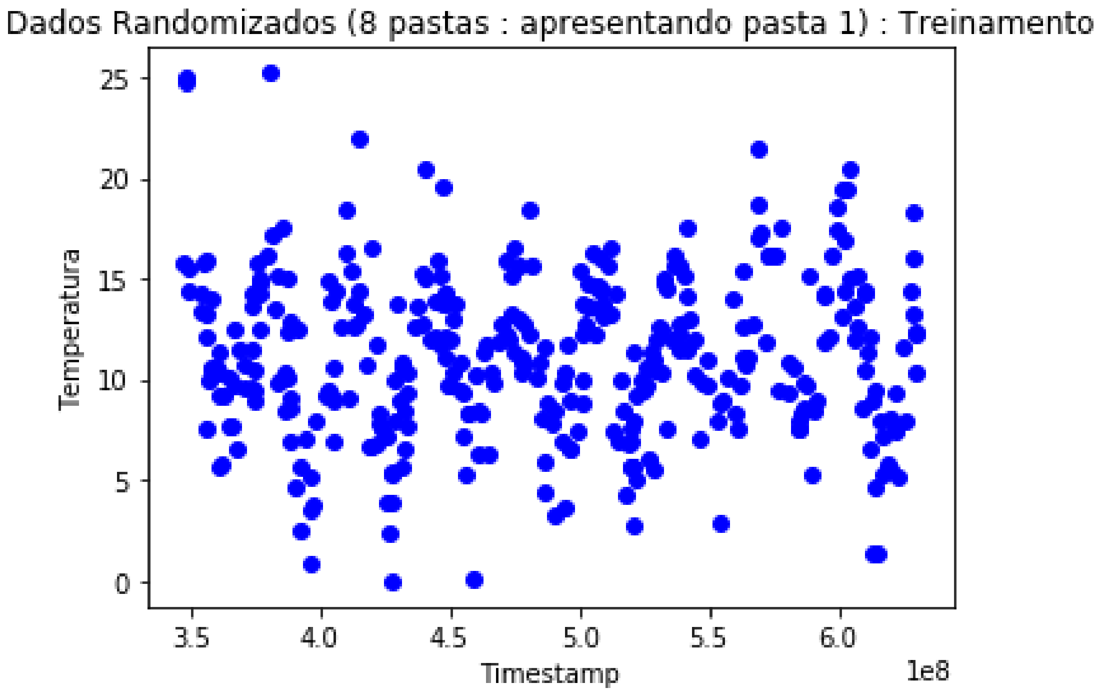


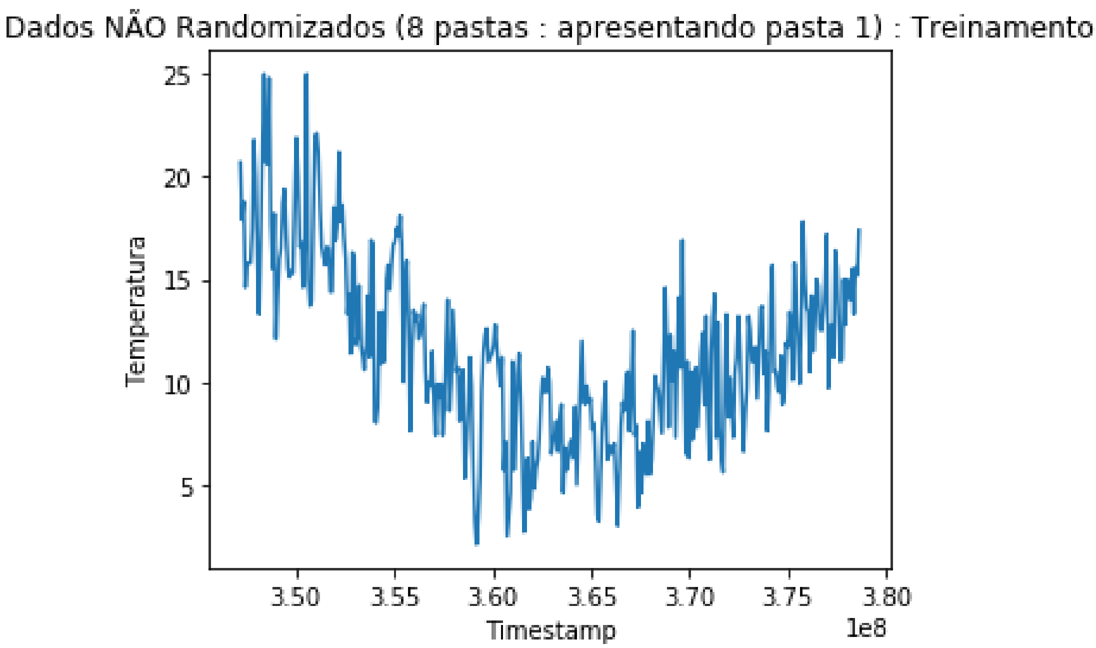
Divisão dos dados em treinamento e teste. Conforme solicitado os dados até 1990 serão usado para treinamento e os posteriores para teste.



Utilização de K-Folds para dividir os dados de treinamento em pequenas "pastas" para verificar melhor configuração de treinamento dado os dados.

Conforme solicitado, os dados serão divididos em até 30 pastas, além disso, será testado a possibilidade de cada pasta conter dados randomicamente misturados de diferentes épocas para avaliar se o modelo se comporta de modo melhor ou pior em questão a temporalidade das informações.





Exercício 1 Calcular a melhor predição de acordo com os dados usando Quadrados Mínimos.

$w = \phi^T(\phi\phi^T)^{-1}y$

Usando K-Fold Cross Validation, o dataset foi dividido e executado para cada parâmetro de K. Sendo k a quantidade de atrasos.

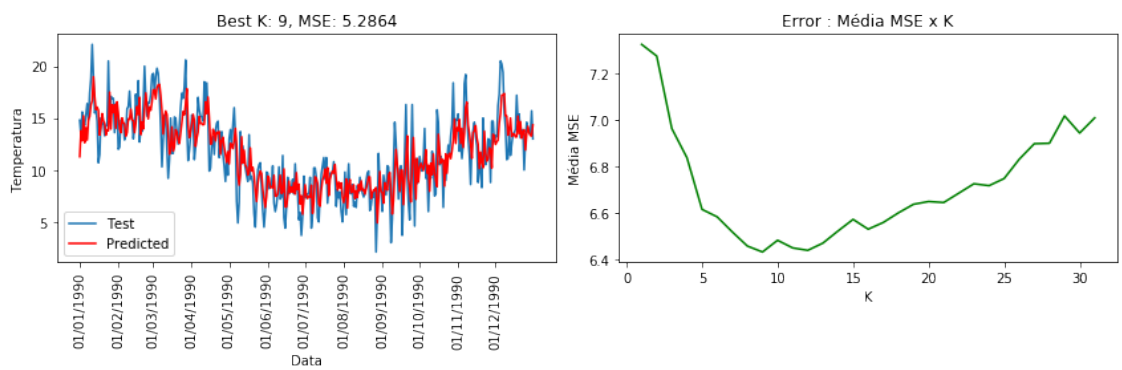
Conforme discutido em aula, os atrasos da série, aqueles cujas valores começam a posição inicial poderiam ser preenchidos com 0 (zero). Entretanto, tentanto evitar um desvio inicial muito grande, essa série atrasada inicial foi preenchidas com valores de uma distribuição uniforme variando do valor mínimo e máximo contido dentro do dataset, conforme abaixo.

```
Valores:
--------------------
Min: 0.0
Max: 26.3
```

Dessa maneira foi executado um modelo de Regressão Linear nos dados, partindo de uma séria de K=1 até K=30 e usando K-Fold (variando até 20 folds).

O resultados obtidos são apresentados abaixo.

```
Melhores valores
--------------------
K     : 9
K-Fold: 6 / 6
```



Os gráficos acima, apresentam os valores após filtro pós-processamento para escolher o melhor valor de K.

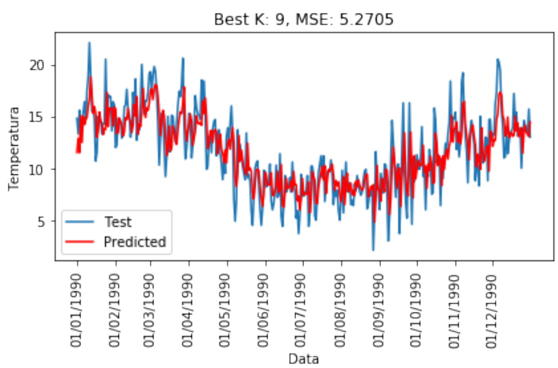
Abaixo, é apresentado os primeiros 10 itens da iteração total executada. O primeiro item não representa a melhor opção, pois para escolha da melhor opção foi calculada a média dos valores.

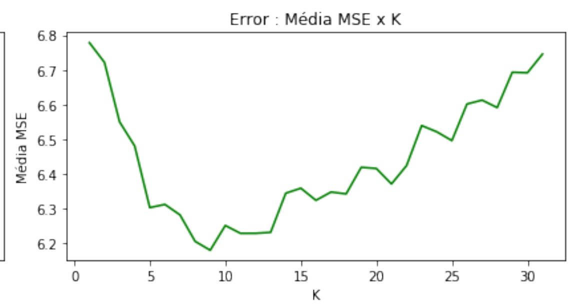
```
      K  K-Fold  Validation Fold  Média MSE
211  12       3                3   6.106218
306  17       3                3   6.113080
325  18       3                3   6.124077
287  16       3                3   6.124489
230  13       3                3   6.127886
192  11       3                3   6.129489
```

214	12	6	6	6.136289
157	9	6	6	6.136340
154	9	3	3	6.144639
213	12	5	5	6.146275

É possível também, usar de outra alternativa no método de K-Fold... no caso estamos embaralhando os dados antes de passar para o método e consequentemente o modelo. Por fim, chegamos aproximadamente no mesmo resultado, entretanto tomando um caminho de certa maneira diferente... Neste sentido, podemos encontrar os melhores valores W para o modelo em folds totalmente direfentes.

```
Melhores valores
--------------------
K     : 9
K-Fold: 1 / 1
```





Abaixo, é apresentado os primeiros 10 itens da iteração total executada. O primeiro item não representa a melhor opção, pois para escolha da melhor opção foi calculada a média dos valores.

	K	K-Fold	Validation Fold	Média MSE
380	21	1	1	5.734276
152	9	1	1	5.740302
437	24	1	1	5.771849
494	27	1	1	5.832434
456	25	1	1	5.841967
399	22	1	1	5.864810
285	16	1	1	5.866220
532	29	1	1	5.866232
552	30	2	1	5.886848
384	21	5	3	5.890825

Exercício 2 No exercício 2 usando o mesmo dataset usando anteriormente com a mesma questão de atraso, passaremos cada um dos itens por uma Rede Neural, usando como função de ativação a função hiperbólica.

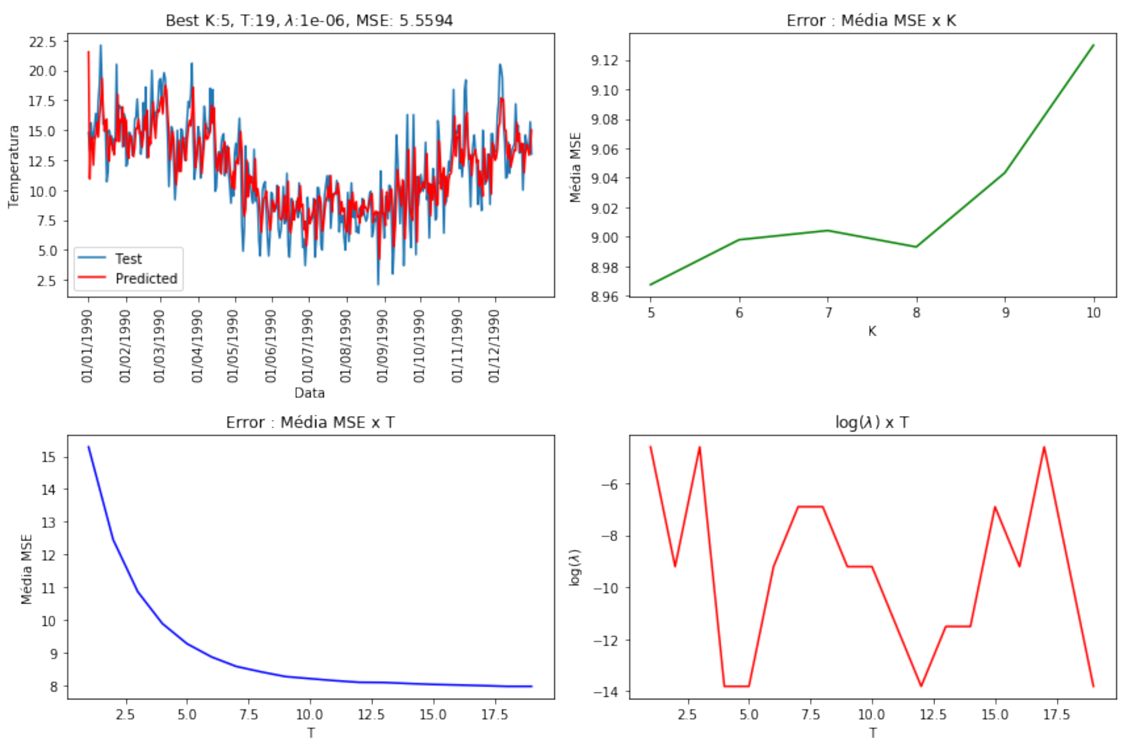
Para validar a quantidade de unidades (ou neurônios) faremos a geração dessas unidades variando de 1 até 100 com seus pesos dentro de uma distribuição uniforme variando de -1 até 1.

Como valores para λ (regularização) será utilizado o seguinte range: 1e+1 até 1e-6, dando espaçamentos de 0.1.

Para a normalização dos dados, evitando a saturação da tangente hiperbólica, os dados serão normalizados entre os valores de mínimo e máximo dos dados (os quais já foram apresentados acima).

```
Valores de regularização testados: 8
[1.e+01 1.e+00 1.e-01 1.e-02 1.e-03 1.e-04 1.e-05 1.e-06]


Melhores resultados:
--------------------
K-Fold            :  2 / 2
K                 :  5
T                 :  19
lambda            :  1e-06
MSE da validação  :  7.038507559126776
```



Abaixo, é apresentado os primeiros 10 itens da iteração total executada. O primeiro item não representa a melhor opção, pois para escolha da melhor opção foi calculada a média dos valores.

	K	K-Fold	Validation Fold	T	Regularizacao	Média MSE
1532	9	1	0	13	0.000010	6.649511
1559	9	2	1	20	0.001000	6.674641
1579	9	3	2	20	0.001000	6.686954
1533	9	1	0	14	0.000010	6.707878
1558	9	2	1	19	0.000001	6.708406
1159	8	1	0	20	0.001000	6.714426
1939	10	2	1	20	0.000100	6.719291
1557	9	2	1	18	0.000100	6.724383
1577	9	3	2	18	0.001000	6.731869
1538	9	1	0	19	0.010000	6.737638