

3.3. Número de condición de una matriz.

Consideremos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de solución \mathbf{u} . Queremos controlar qué cambios se producen en la solución cuando hacemos pequeños cambios en las componentes de \mathbf{b} o de A . Empecemos por tomar un cambio $\Delta\mathbf{b}$ en \mathbf{b} . Entonces la solución cambiará a $\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$, y se tiene

$$A(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}, A\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{b}.$$

Por tanto, el cambio en la solución se estima en $A^{-1}\Delta\mathbf{b}$. Si tomamos una norma vectorial y la norma matricial subordinada, entonces

$$\|\Delta\mathbf{u}\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|.$$

Por otro lado, $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{u}\|$, de donde $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Medimos el error relativo, y obtenemos

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Así, la variación en el error relativo de la solución está asociada a la cantidad $\|A\| \|A^{-1}\|$.

Definición 3.3.1. Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada y A una matriz inversible. Entonces el número

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

se denomina número de condición o condicionamiento de la matriz A respecto a $\|\cdot\|$.

No hay problema en extender la definición a cualquier norma matricial.

Consideremos ahora cambios en la matriz A .

Teorema 3.3.2. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial subordinada, A matriz inversible y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Si

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}, (A + \Delta A)(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{b}$$

entonces

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Demostración. De $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ llegamos a

$$\Delta A(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) + A\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}, \Delta\mathbf{u} = -A^{-1}(\Delta A)(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}).$$

Entonces

$$\|\Delta \mathbf{u}\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}\|, \frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

□

Teorema 3.3.3. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial subordinada, A matriz inversible y $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$. Si

$$(A + \Delta A)(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$$

entonces

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Demostración. [BF98, p.468].

□

Proposición 3.3.4. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial subordinada y A una matriz inversible. Entonces

1. $\text{cond}(A) \geq 1$.
2. $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$.
3. $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Demostración. Como la norma es subordinada,

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

Por otro lado,

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \|A^{-1}\| \|A\| = \text{cond}(A^{-1}).$$

Si λ es no nulo, entonces

$$\text{cond}(\lambda A) = \|\lambda A\| \|(\lambda A)^{-1}\| = |\lambda| \|A\| |\lambda^{-1}| \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

□

Proposición 3.3.5. Sea A una matriz inversible. Entonces

$$\text{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_n(A^*A)}{\lambda_1(A^*A)}}$$

donde $\lambda_n(A^*A)$, $\lambda_1(A^*A)$ son, respectivamente, los autovalores mayor y menor de la matriz A^*A .

Demostración. Como A es regular, la matriz A^*A es hermitiana y sus autovalores reales son todos positivos. Si $\mathbf{w} \in V$, no nulo, entonces

$$\mathbf{w}^* A^* A \mathbf{w} = \|A\mathbf{w}\|_2^2 > 0$$

porque A es inversible. Si λ es autovalor de A^*A , con \mathbf{v} autovector asociado, entonces

$$0 < \mathbf{v}^* A^* A \mathbf{v} = \lambda \|\mathbf{v}\|_2^2$$

de donde $\lambda > 0$. Sabemos que

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \lambda_n(A^*A)$$

y

$$\|A^{-1}\|_2^2 = \rho((A^{-1})^* A^{-1}) = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \rho((A^*A)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1(A^*A)}.$$

□

Lema 3.3.6. Sea A matriz hermitiana no singular, con autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Entonces

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Demostración. Recordemos que $\rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1}$. Entonces

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

□

Nota 3.3.7. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial subordinada y A matriz hermitiana. Entonces

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \rho(A)\rho(A^{-1}) = \text{cond}_2(A).$$

Entonces, para matrices hermitianas, cond_2 es el menor de todos.

Lema 3.3.8. Si U es unitaria y A es una matriz arbitraria, entonces $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(UA) = \text{cond}_2(AU) = \text{cond}_2(U^*AU)$, es decir, cond_2 es invariante por transformaciones unitarias, y $\text{cond}_2(U) = 1$.

Demostración.

□

Nota 3.3.9. 1. El número de condición de una matriz es siempre un número mayor que 1, por lo que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ estará tanto mejor condicionado cuanto más próximo a 1 esté dicho $\text{cond}(A)$.

2. Si A es una matriz unitaria, el sistema estará siempre bien condicionado respecto a cond_2 .

Ejemplo 3.3.10. Consideremos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

y supongamos que tenemos una variación en \mathbf{b} dada por

$$\Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}.$$

La solución exacta del sistema es

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mientras que la del sistema alterado $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

Para la norma $\|\cdot\|_2$ calculamos los errores relativos y tenemos

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \approx 8,2, \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \approx 0,003.$$

Esto era de esperar porque $\text{cond}_2(A) \approx 2984,1$.

Nota 3.3.11. El cálculo del número de condición a partir de la definición implica a la inversa de la matriz, por lo que no es un buen método. En la práctica, se suele calcular como subproducto del proceso de resolución de un sistema. También se suelen dar cotas a $\|A^{-1}\|$

Nota 3.3.12. Una regla del pulgar sobre la influencia del número de condición sobre la validez de la solución es la siguiente. Supongamos que se usa eliminación gaussiana con pivoteo parcial sobre un sistema bien escalado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con aritmética de t -dígitos en coma flotante. Supongamos también que no hay otras fuentes de error. Entonces, si $\text{cond}(A)$ es del orden de 10^p , la solución calculada es precisa con $t - p$ dígitos significativos. En otras palabras, esperamos una pérdida de unos p dígitos. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} ,835x + ,667y &= ,168 \\ ,333x + ,266y &= ,067. \end{aligned}$$

Entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -266000 & 667000 \\ 333000 & -835000 \end{pmatrix}, \|A\|_1 = 1,168, \|A^{-1}\|_1 = 1502000, \\ \text{cond}_1(A) = 1754336 \approx 1,7 \times 10^6.$$

El valor de $\text{cond}_1(A)$ no es tan importante como su orden de magnitud. Lo anterior indica que el cambio relativo en la solución puede ser del orden de un millón de veces el cambio relativo en A . Así, si usamos eliminación gaussiana con 8 dígitos para resolver el sistema, únicamente podemos esperar $t - p = 8 - 6 = 2$ dígitos significativos. Esto no significa que podamos tener suerte y alcancemos mayor precisión.