

# Procesamiento de Imágenes mediante Variación Total

Joaquín Mir Macías, Miguel Montes Lorenzo, Manuel Rodríguez Villegas

Octubre 2025

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Problema de la Braquistócrona</b>	<b>2</b>
<b>3. Procesamiento de Imágenes</b>	<b>5</b>
3.1. Modelo de Rudin–Osher–Fatemi . . . . .	5
<b>4. Ejemplo Aplicado</b>	<b>6</b>
<b>5. Aplicación en Imágenes Médicas</b>	<b>8</b>
5.1. Método Clásico (Rudin–Osher–Fatemi) . . . . .	8
5.2. Método con Adaptación Espacial . . . . .	9
5.3. Método de Orden Superior (Regularizadores) . . . . .	10
<b>6. Conclusión</b>	<b>11</b>

## 1. Introducción

El cálculo de variaciones constituye una de las herramientas fundamentales en matemáticas aplicadas cuando se desea optimizar una cantidad que depende de una función desconocida. A diferencia del cálculo diferencial clásico, centrado en maximizar o minimizar funciones de unas pocas variables reales, en cálculo variacional la incógnita es una función completa y el objetivo consiste en estudiar un funcional que asigna un valor real a cada función admisible. Este enfoque permite modelar de forma natural sistemas físicos, geométricos o de procesado de señal cuyo comportamiento global viene descrito mediante integrales de energía.

Un ejemplo histórico que ilustra esta idea es el problema de la braquistócrona, planteado por Johann Bernoulli en 1696. El problema consiste en determinar qué curva recorre una partícula sometida únicamente a la gravedad cuando desciende entre dos puntos en el menor tiempo posible. Aunque la intuición podría sugerir que la solución es un segmento recto, el análisis variacional conduce a una ecuación diferencial cuya solución es una cicloide. Esta formulación motivó el desarrollo sistemático del cálculo de variaciones y de herramientas fundamentales como la ecuación de Euler–Lagrange y la forma de Beltrami, que siguen siendo pilares de la teoría moderna.

En las últimas décadas, estas mismas ideas se han vuelto especialmente relevantes en el procesamiento de imágenes. Muchas tareas clásicas, como la reducción de ruido, la recuperación de contornos, la segmentación o el *inpainting*, pueden expresarse mediante funcionales que equilibran dos efectos complementarios, la fidelidad a los datos observados y la regularidad o suavidad que se desea imponer sobre la imagen restaurada. En este contexto, la variación total (TV) ha demostrado ser un regularizador especialmente eficaz, ya que elimina ruido preservando discontinuidades relevantes, algo que no ocurre con modelos cuadráticos más tradicionales.

El modelo de Rudin, Osher y Fatemi (ROF), propuesto en 1992, es uno de los ejemplos más influyentes de este enfoque. El modelo busca una imagen restaurada mediante la minimización de un funcional que combina la variación total con un término de fidelidad en norma  $L^2$ . La presencia del término TV permite preservar bordes nítidos, mientras que el parámetro de regularización controla el equilibrio entre suavizado y fidelidad a la imagen original. A pesar de su formulación sencilla, el impacto del modelo ROF ha sido notable en teoría y en aplicaciones, y ha dado lugar a numerosas extensiones que se utilizan hoy en día en visión por computador

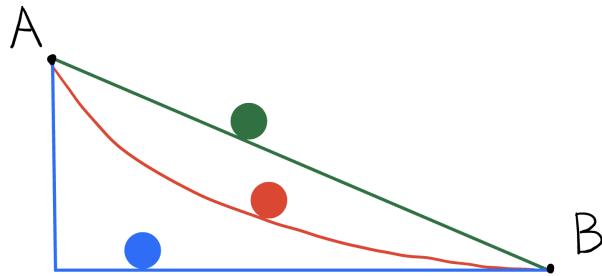
y procesamiento de imágenes médicas.

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo las herramientas del cálculo de variaciones, introducidas a través del problema de la braquistócrona, conducen de manera natural a modelos modernos de restauración de imágenes. Para ello, comenzamos revisando el planteamiento del problema clásico y la deducción de la ecuación de Euler–Lagrange. A continuación, presentamos el modelo ROF y analizamos su interpretación geométrica, sus propiedades fundamentales y el efecto de sus parámetros. Finalmente, aplicamos diferentes métodos basados en variación total, tanto el modelo clásico como extensiones recientes, a imágenes sintéticas y médicas, lo que permite comparar su comportamiento y discutir ventajas e inconvenientes de cada enfoque.

## 2. Problema de la Braquistócrona

La formulación y posterior resolución del problema de la braquistócrona supusieron el comienzo del cálculo de variaciones, donde se busca encontrar extremos relativos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional.

Dados los puntos A y B en el plano vertical, el problema de la braquistócrona consiste en encontrar la curva que sigue una partícula que se desplaza de A a B en el mínimo tiempo posible, únicamente bajo el efecto de la gravedad.



**Figura 1:** Posibles soluciones al problema de la braquistócrona.

Fue planteado por Johann Bernoulli en 1696 y resuelto por Newton en 1697, aunque otros cinco matemáticos (Johann y Jakob Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital y Tschirnhaus) también interv vinieron en la solución.

### Planteamiento

Para hallar la solución, tenemos que minimizar el tiempo empleado por la partícula. Para ello, representamos el tiempo en función del espacio recorrido y la velocidad de la partícula.

Si la curva que describe la trayectoria se expresa como  $y = y(x)$ , la longitud de arco entre  $x_a$  y  $x_b$  es

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

con la notación  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Partiendo del principio de la conservación de la energía, sabemos que la energía cinética y la energía potencial deben ser iguales en todo momento. Por tanto, si  $y$  es la altura vertical medida desde el punto de partida, la energía del sistema viene dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \implies v = \sqrt{2gy},$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $v$  la velocidad del cuerpo en el punto considerado.

El tiempo que tarda la partícula en desplazarse entre dos puntos viene dado por  $t = \frac{s}{v}$ . Para utilizar la expresión integral del espacio recorrido, podemos expresar el tiempo diferencial como  $dt = \frac{ds}{v}$  y obtener el tiempo total integrando. Sustituyendo  $ds$  y  $v$  obtenemos el funcional del tiempo:

$$t = \mathcal{T}[y] = \int_{s_a}^{s_b} \frac{ds}{v} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{y(x)}} dx = \int_{x_a}^{x_b} f(y(x), y'(x)) dx,$$

donde hemos definido

$$f(y, y') := \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Dado que buscamos un extremo del funcional, la función  $y(x)$  debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Observamos que la función  $f(y, y')$  no depende explícitamente de  $x$  (es decir,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ). Esto nos permite hallar una primera integral del movimiento.

Calculamos la derivada total de  $f$  respecto a  $x$  utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , nos queda:

$$\frac{df}{dx} = y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

De la ecuación de Euler-Lagrange, despejamos  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Sustituyendo esto en la expresión de la derivada total:

$$\frac{df}{dx} = y' \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] + y'' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Reconocemos que el lado derecho es la derivada de un producto  $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$ :

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Reagrupando términos:

$$\frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Esto implica que el término entre paréntesis es constante. Esta es la llamada Identidad de Beltrami:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C.$$

Calculamos las derivadas necesarias:

$$f(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}$$

Sustituyendo, llegamos a:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

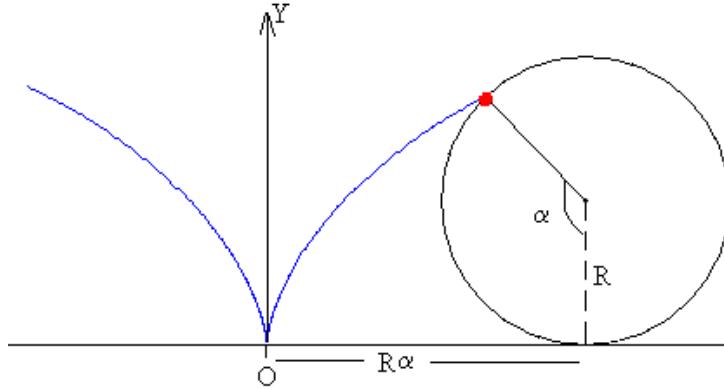
Despejando  $y'$ :

$$1 + y'^2 = \frac{1}{2gC^2y} \implies \frac{dy}{dx} = y' = \pm \sqrt{\frac{1}{2gC^2y} - 1}.$$

## Solución paramétrica: cicloide

La solución que cumple  $y(0) = 0$  puede expresarse mediante parámetros angulares utilizando la expresión de la cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{4gC^2}(\theta - \sin \theta), \\ y(\theta) = \frac{1}{4gC^2}(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad \theta \in [0, \theta_f].$$



**Figura 2:** Construcción de la curva cicloide.

Verificamos que esta curva satisface la ecuación para  $y'$ . Calculando derivadas respecto de  $\theta$ :

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{4gC^2}(1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{4gC^2} \sin \theta,$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$$

Si sustituimos

$$y(\theta) = \frac{1}{4gC^2}(1 - \cos \theta)$$

en la expresión

$$\sqrt{\frac{1}{2gC^2y} - 1},$$

nos queda:

$$\frac{1}{2gC^2y} = \frac{1}{2gC^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{\frac{4gC^2}{2}} = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

Restando 1:

$$\frac{1}{2gC^2y} - 1 = \frac{2}{1 - \cos \theta} - 1 = \frac{2 - (1 - \cos \theta)}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Haciendo la raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{1}{2gC^2y} - 1} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}.$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1}{2gC^2y} - 1},$$

y la parametrización por la cicloide satisface la condición impuesta por el primer integral.

### 3. Procesamiento de Imágenes

Una vez analizado el desarrollo teórico de un problema de cálculo variacional, profundicemos en una de las múltiples aplicaciones en la vida real: el procesamiento de imágenes.

#### 3.1. Modelo de Rudin–Osher–Fatemi

Dada una imagen ruidosa  $f(x, y)$ , se desea obtener una versión más suave  $u(x, y)$  que conserve una gran similitud con la imagen original pero que elimine gran parte del ruido presente. El modelo propuesto por Rudin, Osher y Fatemi [2] (1992) se basa en minimizar el siguiente funcional

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx dy + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy, \quad (1)$$

donde el primer término mide la fidelidad a los datos y el segundo, la variación total (TV), actúa como término de regularización.

El término de fidelidad ayuda a que la nueva imagen permanezca cerca de la imagen original  $f$ . El término de variación total penaliza la magnitud del gradiente, controlando la rugosidad de la imagen sin castigar en exceso las discontinuidades.

A diferencia de la regularización cuadrática  $\int |\nabla u|^2$ , la penalización lineal en  $|\nabla u|$  permite la existencia de saltos finitos en  $u$ . Esto provoca que se supriman oscilaciones de alta frecuencia, normalmente relacionadas con el ruido, y que se preserven los bordes significativos.

El parámetro  $\lambda > 0$  controla el equilibrio entre suavizado y fidelidad: valores grandes de  $\lambda$  producen una imagen muy lisa, eliminando grande parte del ruido pero difuminando significativamente la imagen (tratando que  $|\nabla u|$  sea lo más bajo posible), mientras que valores pequeños dejan más ruido. Como veremos posteriormente, su ajuste óptimo depende del nivel de ruido en la imagen.

Este método también conlleva una serie de limitaciones, entre las que destacan la pérdida de contraste en objetos pequeños homogéneos o artefactos de *staircasing* (zonas planas separadas por saltos).

#### Derivación de la condición de Euler–Lagrange

Consideremos el funcional (1). La condición de estacionariedad se obtiene imponiendo que la variación de  $J[u]$  se anule para toda función de variación  $\eta$  tal que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

El término de fidelidad queda de la siguiente manera:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2} \int (u + \varepsilon\eta - f)^2 dx dy = \int (u - f) \eta dx dy.$$

Por otro lado, suponiendo  $\nabla u \neq 0$  en la región de interés, el término de variación total queda en:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int |\nabla(u + \varepsilon\eta)| = \int \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \eta dx dy.$$

Aplicando integración por partes y descartando el término de frontera por las condiciones de contorno, obtenemos

$$\int \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \eta = - \int \nabla \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \eta dx dy.$$

Sumando ambos términos y exigiendo que la variación total sea nula para toda  $\eta$ , se obtiene

$$\int \left[ (u - f) - \lambda \nabla \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] \eta dx dy = 0.$$

Por la arbitrariedad de  $\eta$ , la condición de Euler–Lagrange se cumple:

$$(u - f) - \lambda \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0. \quad (2)$$

Esta es la ecuación fundamental del modelo de Rudin–Osher–Fatemi en su formulación clásica.

### Interpretación geométrica del término de curvatura

El vector

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

representa la dirección normal unitaria a las curvas de nivel de  $u$ . Su divergencia,

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

corresponde a la curvatura media de dichas curvas en dos dimensiones.

En la ecuación (2), este término provoca un efecto de suavizado: reduce la curvatura de contornos pequeños (eliminando ruido fino) pero no obliga a eliminar discontinuidades grandes, lo que permite conservar bordes nítidos.

En zonas homogéneas, el gradiente es pequeño y la ecuación difunde la intensidad, promediando los valores y eliminando ruido. En los bordes, donde  $|\nabla u|$  es grande, el término de curvatura se atenúa y evita la difusión transversal, preservando así los contornos. La clave es el factor de normalización, que hace que el término de curvatura tenga más importancia de la que cabría esperar con gradientes muy pequeños y que a su vez se normalice con gradientes muy grandes, evitando que el suavizado traspase bordes.

En la práctica, cuando  $|\nabla u|$  es muy pequeño, el cociente  $\nabla u / |\nabla u|$  se vuelve inestable. Para evitar singularidades, se utiliza la regularización

$$|\nabla u| \approx \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Esto garantiza estabilidad numérica y permite resolver (2) mediante esquemas iterativos.

Una forma práctica de obtener  $u$  consiste en realizar un descenso de gradiente del funcional  $J[u]$  en un tiempo artificial  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(f - u).$$

El estado estacionario (cuando  $\partial_t u = 0$ ) coincide con la ecuación de Euler–Lagrange (2). Esta ecuación puede interpretarse como una difusión no lineal: difunde dentro de regiones homogéneas y se detiene en bordes.

En discretización finita, este flujo produce una secuencia  $u^k$  que converge hacia el minimizador  $u_\lambda$ . En la práctica, se utiliza un esquema de diferencias finitas o bien el método de proyección dual de Chambolle, ampliamente adoptado por su estabilidad y rapidez.

Extensiones comunes incluyen:

- Modelos anisotrópicos, donde se pondera la difusión en direcciones preferentes.
- ROF con fidelidad  $L^1$ , más robusto ante ruido impulsivo (puntos blancos y negros aleatorios).
- Modelos de segundo orden (TGV, Total Generalized Variation) que reducen el efecto de “escalonado” (*staircasing*, cuando aparecen líneas escalonadas en los bordes de una imagen).

## 4. Ejemplo Aplicado

En este sección se explora en profundidad la potencia de este método en un caso de uso cotidiano.

Empezamos con una imagen  $f$  en escala de grises con rango de valores en  $[0, 255]$  contaminada con ruido gaussiano aditivo. A continuación se muestran los resultados cualitativos del modelo ROF con distintos valores de  $\lambda$ :

- $\lambda = 0,8$ : la imagen  $u_\lambda$  es muy similar a  $f$ ; la eliminación de ruido es leve.
- $\lambda = 0,05$ : el ruido se reduce significativamente, manteniendo contornos y estructuras esenciales.
- $\lambda = 0,01$ : los detalles finos desaparecen, obteniendo una imagen *cartoonizada*, donde sólo permanecen las estructuras globales.



**Figura 3:** Resultado del modelo ROF aplicado a la imagen *Lena*. Izquierda: imagen original ruidosa  $f$ . Derecha: resultado  $u_\lambda$  para  $\lambda = 0,05$ .

En segundo lugar, comparamos el rendimiento del método de Rudin-Osher-Fatemi, utilizando su implementación en Python de `tv_chambolle`, con un filtro de ruido gaussiano en una tarea de eliminación de ruido.

Denoising Comparison: Gaussian vs. TV



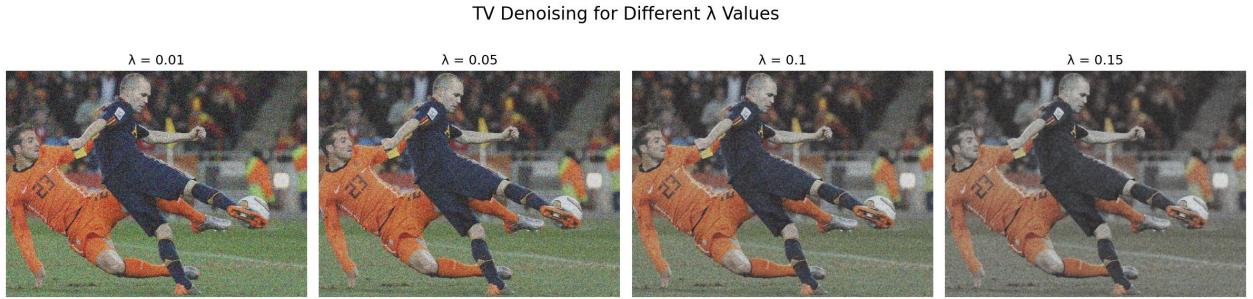
**Figura 4:** Comparativa con un método de filtro gaussiano.

Observando la imagen de la Figura 4, nos damos cuenta de las principales diferencias entre ambos métodos. El filtro gaussiano, en primer lugar, proporciona un color más parecido al original pero al mismo tiempo permite que mucho ruido permanezca en la imagen. Por otro lado, el método de variación total consigue eliminar el ruido de manera mucho más significativa a cambio de perder algo de color, debido probablemente al balance entre fidelidad y limitación del gradiente. En ambos casos se han utilizado valores del parámetro que proporcionan el resultado más robusto visualmente.

El análisis de sensibilidad del parámetro  $\lambda$  en la Figura 5 nos ayuda a entender mejor las implicaciones de distintos valores y cuándo nos interesa utilizar uno u otro.

Así, observamos claramente la importancia de  $\lambda$  sobre el color de la imagen resultante. Si bien un valor muy bajo nos va a conservar el color de manera muy eficaz, también provocará que la mayor parte del ruido siga ahí, ya que el término del gradiente está muy penalizado y prácticamente toda la señal de minimización viene de la fidelidad a la imagen original.

Al aumentar  $\lambda$  y dar más importancia a la limitación del gradiente, vemos que el ruido es mucho más difuminado, pero acabamos perdiendo tanto color que solo puede merecer la pena si trabajamos con imágenes en blanco y negro.



**Figura 5:** Análisis de sensibilidad del parámetro  $\lambda$ .

## 5. Aplicación en Imágenes Médicas

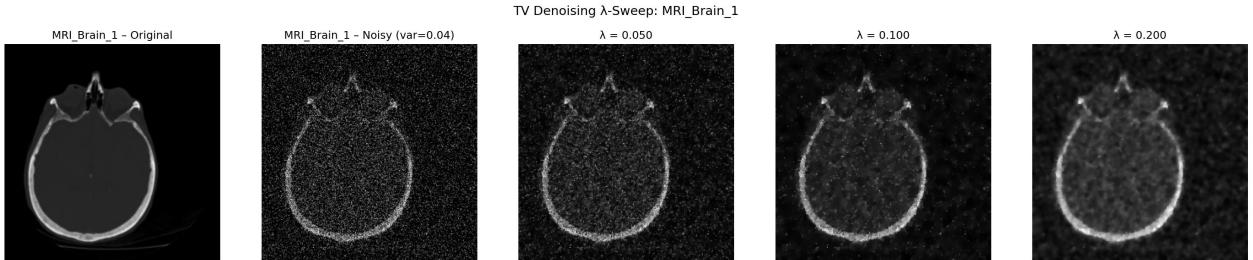
A continuación se presenta una de las aplicaciones de mayor interés del procesamiento de imágenes: reducción de ruido en imágenes médicas. En muchas ocasiones, los escáneres médicos presentan un alto nivel de ruido debido al difícil proceso de obtención de dichos datos, normalmente a través de rayos-X. Por esta razón, la eliminación de ruido se convierte en un paso fundamental previo al análisis por parte de un doctor o de un sistema de visión por ordenador [3].

En esta sección aplicamos el método de reducción de ruido explicado previamente sobre escáneres del cerebro y de los pulmones. Además, comparamos tres variantes y discutimos en qué casos es más conveniente utilizar una u otra.

### 5.1. Método Clásico (Rudin-Osher-Fatemi)

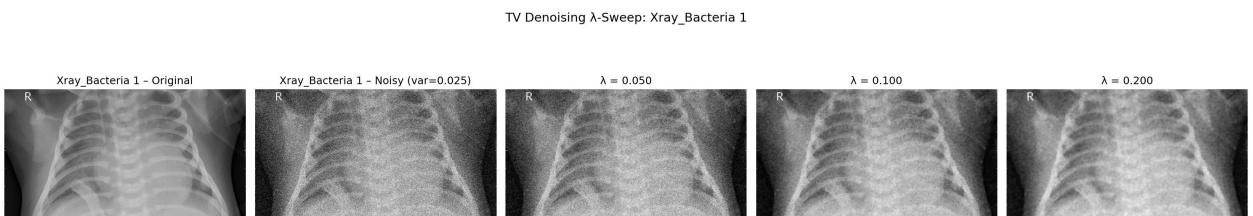
En primera instancia empleamos el método Rudin-Osher-Fatemi original sobre escáneres médicos. En función del parámetro  $\lambda$  obtendremos un resultado con más ruido pero bordes mejor conservados, o un ruido más reducido a costa de perder algo de definición.

Así, distinguimos tres casos en los que el parámetro  $\lambda$  óptimo puede ser diferente.



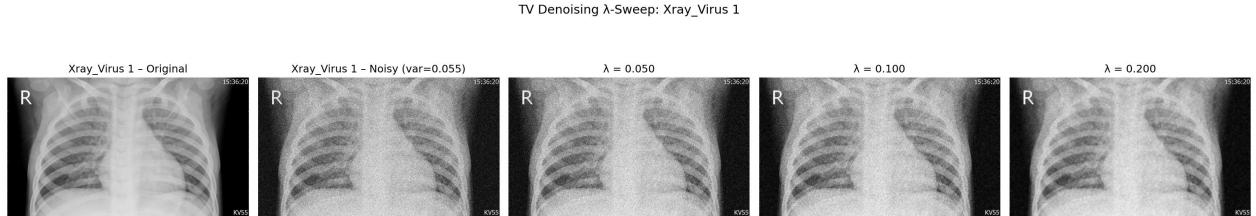
**Figura 6:** Escáner cerebral.

En el escáner cerebral de la Figura 6, donde hay una clara distinción entre tejidos (materia gris y materia blanca), observamos con claridad cómo aumentar  $\lambda$  reduce mucho la definición de la imagen, por lo que es preferible utilizar un valor más bajo que, pese a mantener algo más de ruido, ofrece un resultado con mayor resolución. Las imágenes de escáneres cerebrales han sido obtenidas del paquete `skimage` de Python [4].



**Figura 7:** Escáner pulmonar en presencia de una bacteria.

En el escáner pulmonar de la Figura 7, observamos cómo un  $\lambda$  más pequeño tiene una influencia casi nula en la eliminación de ruido, mientras que valores superiores sí consiguen eliminarlo más satisfactoriamente. En este caso, la pérdida de resolución puede compensar la superior eliminación de ruido, llegando a obtener una imagen casi idéntica a la original.



**Figura 8:** Escáner pulmonar en presencia de un virus.

Por último, observando la tercera imagen (Figura 8), percibimos un efecto similar al anterior, y es que en este tipo de escáneres suele ser preferible perder algo de resolución para obtener una imagen casi completamente libre de ruido. Los escáneres pulmonares han sido obtenidos del dataset público de Kaggle Chest X-Ray Images (Pneumonia) [1].

## 5.2. Método con Adaptación Espacial

Para reducir ruido sin degradar contornos finos en imágenes médicas, consideramos una extensión del modelo ROF con *ponderación espacial*. Definimos el funcional

$$\min_u \left\{ \underbrace{\int_{\Omega} w(x) |\nabla u(x)| dx}_{\text{TV ponderada}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda(x) (u(x) - f(x))^2 dx}_{\text{fidelidad espacial}} \right\},$$

donde  $w : \Omega \rightarrow [0, 1]$  atenúa la regularización cerca de bordes y  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  permite ajustar localmente la fidelidad a datos. La elección típica es  $\lambda(x) \equiv \lambda > 0$  constante y un  $w$  dependiente de un *indicador de borde* estable:

$$w(x) = \exp\left(-\left(\frac{|\nabla(G_\sigma * f)(x)|}{k}\right)^\beta\right), \quad \beta \in [1, 4],$$

donde  $G_\sigma$  es un filtro gaussiano (robustez),  $k > 0$  escala el umbral de borde (p. ej.  $k$  tomado como un percentil del módulo de gradiente) y  $|\nabla(G_\sigma * f)|$  es el módulo del gradiente de la imagen suavizada.

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange, para  $u$  suficientemente regular y  $|\nabla u| \neq 0$  a.e., el subgradiente de la TV ponderada es

$$\partial\left(\int w |\nabla u|\right) = -\nabla \cdot \left(w \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

La condición de estacionariedad del funcional anterior con condiciones de Neumann ( $\nabla u \cdot \nu = 0$  en  $\partial\Omega$ ) conduce a

$$0 = -\nabla \cdot \left(w \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \lambda(x) (u - f),$$

o de forma explícita,

$$\lambda(x) (u - f) - \nabla \cdot \left(w(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0. \quad (3)$$

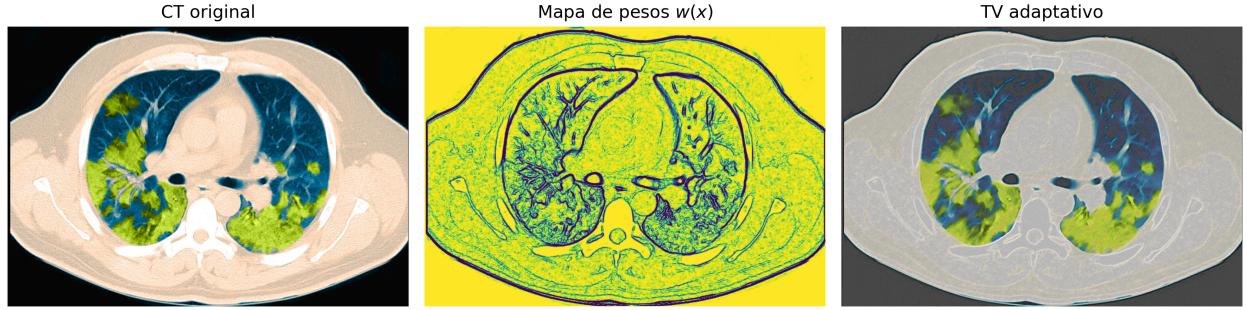
Resolvemos (3) por descenso de gradiente:

$$\partial_t u = \nabla \cdot \left(w \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}}\right) + \lambda(x) (f - u), \quad u(\cdot, 0) = f,$$

donde  $\varepsilon \ll 1$  estabiliza la norma y preserva bordes fuertes. Discretizamos con diferencias finitas y condiciones de Neumann, usando un paso temporal  $\Delta t \in [0.1, 0.25]$  y un número de iteraciones fijo (200–300) hasta convergencia visual.

Para obtener los pesos  $w$ , empezamos calculando  $g_\sigma = G_\sigma * f$ , su gradiente por diferencias finitas y el módulo  $|\nabla g_\sigma|$ . Tomamos  $k$  como el percentil  $p$  de  $|\nabla g_\sigma|$  para adaptar el umbral a cada imagen, y fijamos  $\beta \in [1, 4]$ .

CT color + pesos espaciales + TV adaptativo canal a canal



**Figura 9:** Adaptación Espacial en imagen CT

Así,  $w \approx 1$  en zonas casi planas (más suavizado) y  $w \approx 0$  a lo largo de contornos (suavizado inhibido), lo cual mantiene estructuras anatómicas clave. La Figura 9 muestra un ejemplo de esta aplicación.

Así, como observaciones prácticas podemos destacar:

- En imágenes de RM cerebrales,  $w(x)$  preserva interfaces materia blanca/gris;  $\lambda$  moderado evita sobrealiasado de textura clínica relevante.
- En radiografías de tórax, la atenuación en fisuras y bordes pulmonares permite valores de  $\lambda$  más altos para limpiar ruido sin perder anatomía fina.
- La elección de  $(\sigma, p, \beta)$  gobierna la *selectividad* de bordes.

### 5.3. Método de Orden Superior (Regularizadores)

Por último, estudiamos un método de denoising que introduce regularización de orden superior. La idea es sencilla: en lugar de penalizar únicamente el gradiente de la imagen, como ocurre en ROF, añadimos también un término que penaliza el laplaciano. De esta forma, el modelo tiende a producir transiciones más suaves y evita el efecto de “staircasing”, que aparece con bastante frecuencia cuando se usa variación total clásica. El funcional que queremos minimizar es

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx,$$

donde  $f$  es la imagen ruidosa y los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  controlan la intensidad del suavizado. El término con  $\alpha$  se comporta como una regularización estándar de primer orden mientras que  $\beta$  controla el efecto de segundo orden, que es el que permite eliminar cambios bruscos sin generar regiones por tramos constantes.

Derivando este funcional se obtiene la ecuación de Euler–Lagrange asociada:

$$0 = (u - f) - \alpha \Delta u + \beta \Delta^2 u,$$

donde  $\Delta^2 u$  es el bilaplaciano. Resolver esta ecuación de forma directa no es sencillo, así que utilizamos un descenso de gradiente explícito:

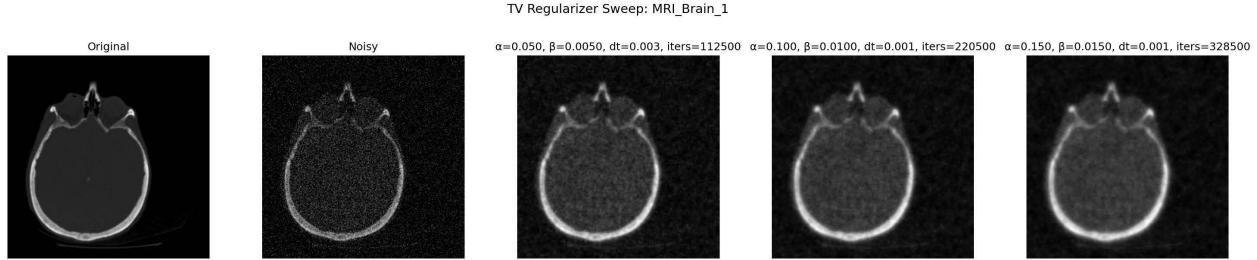
$$\partial_t u = (f - u) + \alpha \Delta u - \beta \Delta^2 u, \quad u(\cdot, 0) = f.$$

Para implementar este método utilizamos diferencias finitas, tanto para el laplaciano como para el bilaplaciano (que calculamos aplicando dos veces el laplaciano). Las condiciones de contorno son de Neumann para mantener la imagen dentro del rango esperado. En la práctica, basta elegir un paso de tiempo pequeño y realizar varias iteraciones hasta que los cambios entre pasos sean mínimos.

Desde el punto de vista práctico, el comportamiento del método es algo mejor que el de los dos previos. El regularizador de orden superior genera imágenes mucho más suaves y sin artefactos, y suele eliminar el ruido de forma bastante uniforme. Como consecuencia, los bordes se vuelven algo menos nítidos, aunque sin perder completamente la estructura general. Esto se nota sobre todo en radiografías, donde los detalles finos desaparecen antes que en el caso del TV adaptativo. En cambio, en escáneres cerebrales, que tienen regiones amplias de intensidad casi constante, el método funciona especialmente bien porque reduce el ruido

sin introducir patrones artificiales.

Como ejemplo, en la Figura 10 mostramos una comparación del método con distintos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . En todos los casos se observa un suavizado más homogéneo respecto al modelo ROF, aunque a costa de perder algo de detalle en los bordes.



**Figura 10:** Resultados del regularizador de orden superior en un escáner cerebral.

## 6. Conclusión

Este trabajo ha trazado un recorrido desde los fundamentos históricos del cálculo de variaciones hasta su aplicación contemporánea en el procesamiento de imágenes mediante la Variación Total. Se ha demostrado cómo herramientas clásicas permiten optimizar funcionales tanto para minimizar el tiempo de descenso en un problema mecánico como para reducir el ruido en una imagen digital. El análisis del modelo de Rudin-Osher-Fatemi ha sido central, mostrando su capacidad para equilibrar la fidelidad a los datos observados y la regularidad de la imagen restaurada.

Los ejemplos prácticos, aplicados tanto a imágenes generales como a escáneres médicos, han validado las propiedades del modelo ROF. El análisis de sensibilidad del parámetro  $\lambda$  ha subrayado el compromiso entre la eliminación de ruido y la preservación de detalles. Se ha constatado que valores de  $\lambda$  más bajos son preferibles en imágenes con estructuras finas, como las resonancias magnéticas cerebrales, mientras que valores más altos pueden ser necesarios en radiografías para compensar niveles de ruido elevados. La comparativa con filtros gaussianos también ha reforzado la superioridad de la TV para eliminar ruido sin difuminar excesivamente los contornos.

Finalmente, el estudio se ha extendido a métodos más avanzados para superar las limitaciones del modelo ROF clásico. Se ha presentado un modelo con adaptación espacial y un regularizador de orden superior que produce resultados más suaves y homogéneos, especialmente útiles en imágenes como las resonancias magnéticas. Este análisis comparativo demuestra que los métodos variacionales ofrecen un conjunto de herramientas potente y flexible, fundamental para los retos actuales en el análisis de imagen médica y la visión por computador.

El código utilizado para los experimentos puede encontrarse en <https://github.com/rdgzmanuel/image-processing>.

## Referencias

- [1] Paultimothy Mooney. Chest x-ray images (pneumonia) dataset. Kaggle dataset, 2018. Accessed: 2025-11-07.
- [2] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1):259–268, 1992.
- [3] Francesco Tonolini, Jack Radford, Alex Turpin, Daniele Faccio, and Roderick Murray-Smith. Variational inference for computational imaging inverse problems, 2020.
- [4] Stéfan van der Walt, Johannes L. Schönberger, Juan Nunez-Iglesias, François Boulogne, Joshua D. Warner, Neil Yager, Emmanuel Gouillart, Tony Yu, and the scikit-image contributors. scikit-image: Image processing in python. *PeerJ*, 2:e453, 2014.