

UNIVERSITY OF BRASILIA

GAMA FACULTY

AEROSPACE ENGINEERING

**MINI-PROJETO DE
MECÂNICA DE ESTRUTURAS AEROESPACIAIS**

Topic: Fuselagem (Opção nº2)

Executer: Rodrigo Evangelista Aguiar de Souza, 18/0130366

Application data: 03/10/2021

BRASILIA
2021

1. INTRODUÇÃO

Os avanços tecnológicos proporcionaram um refinamento nas tecnologias utilizadas na construção de fuselagem de aeronaves, onde tais fuselagens passaram a ser constituídas de dois elementos principais, sendo eles a fuselagem de revestimento externo (“skin”), feita em Alumínio, e as longarinas longitudinais através da seção transversal que compõe a fuselagem. Os cálculos de tensões normal e de distribuição de cisalhamento ao longo destas estruturas podem se tornar complexos, e exigem algumas simplificações para reduzir o tamanho dos cálculos, onde, portanto, faz-se necessário utilizar idealizações estruturais. Tal idealização estrutural substitui as longarinas por “booms”, onde as tensões normais que atuam na estrutura global são suportadas pelos booms, e as tensões de cisalhamento são suportadas pela skin. Vale ressaltar que na idealização estrutural substituindo as longarinas pelos booms, as tensões de cisalhamento são desconsideradas nos booms, visto que nas longarinas, esses valores são desprezíveis em comparação com os valores de cisalhamento suportados pela skin.

Neste trabalho, as distribuições de tensões normais nas longarinas (booms) e de cisalhamento na skin serão analisados. Para isso, é proposto a idealização estrutural discutida na obra do autor Megson [1] em uma estrutura de fuselagem, onde então são utilizadas equações de tensão normal e de distribuição de cisalhamento para cálculo das grandezas desejadas. As equações a serem utilizadas e desenvolvidas no trabalho são mostradas abaixo.

$$(1) \quad \sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \quad \text{Equação da tensão normal}$$

$$(2) q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \sum_{r=1}^n B_r y_r - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \sum_{r=1}^n B_r x_r + q_{s,0}$$

Fluxo de cisalhamento na skin

Antes de calcular o fluxo de cisalhamento pela equação (2), é necessário primeiramente calcular o $q_{s,0}$, que pode ser obtido pela equação de torsão dada abaixo.

$$(3) \quad T = \oint q_b p \, ds + 2A_T q_{s,0} \quad \text{Torsão aplicada}$$

2. PROBLEMA

O problema proposto consiste em encontrar as distribuições de tensão normal e cisalhamento de maneira analítica condizentes com a estrutura abaixo, elaborada no software Catia V5 R21. As medidas adotadas se encontram na figura 1 destacadas em vermelho, enquanto que o design da estrutura se encontra nas figuras 2 e os dados da longarina são mostrados na figura 3.

Parameters, units	Options									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Diameter of fuselage D, mm	720	730	740	750	760	800	820	840	860	880
Moment Mx, kN·m	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235
Load F, kN	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
Distance of load application d, mm	142	144	146	148	150	162	164	166	168	170
Number of z-sections z	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Skin thickness t_{st} , mm	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
Width of z-section w, mm	24	24	24	24	24	26	26	26	26	26
Height of z-section h, mm	28	28	28	28	28	30	30	30	30	30
Thickness of z-section t, mm	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figura 1. Parâmetros adotados na geometria

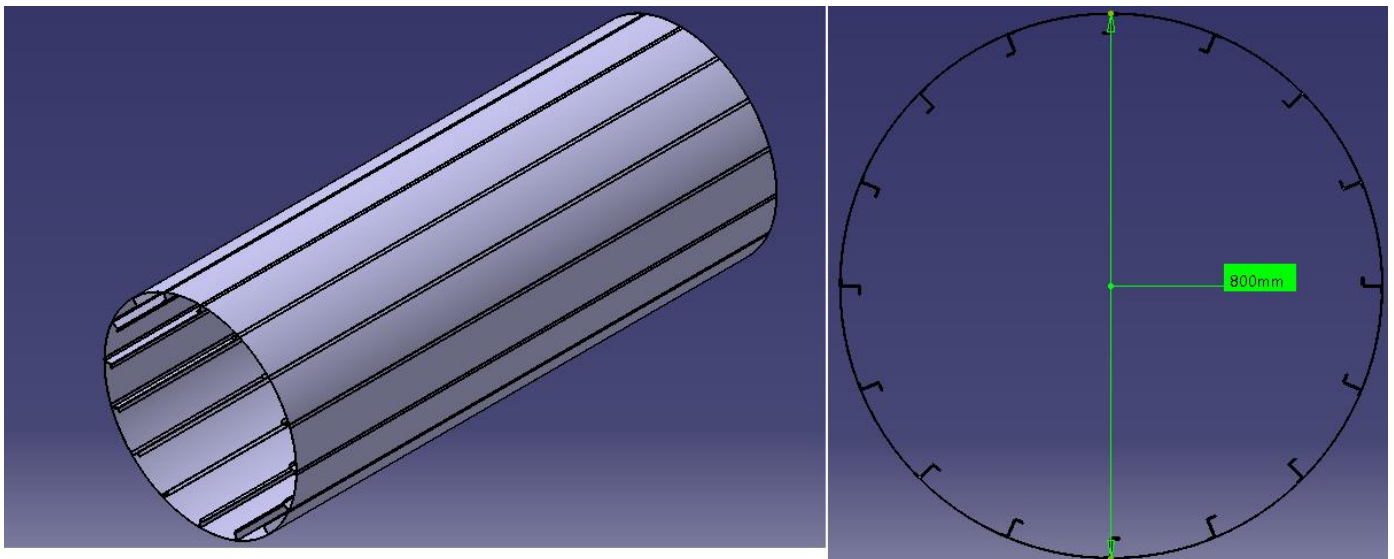


Figura 2: Longarina abordada no miniprojeto

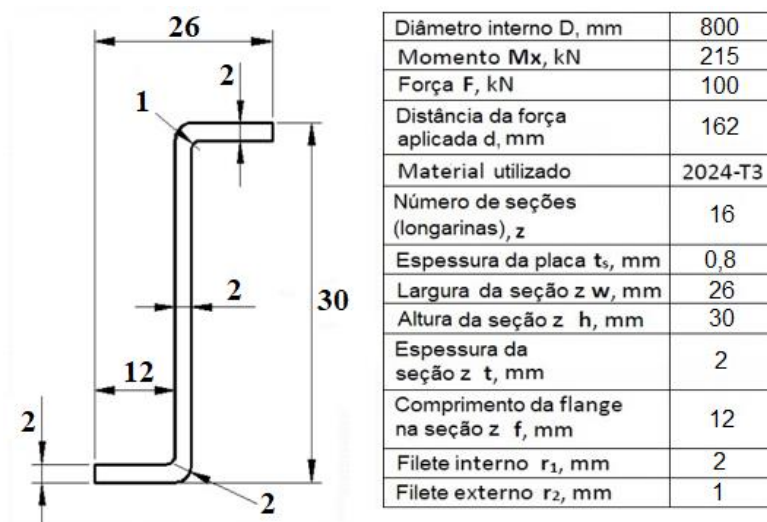


Figura 3: Dados geométricos da longarina e dados gerais do problema

A seção transversal possui diâmetro de 800mm e espessura de 0,8 mm, onde por dentro, é possível observar a presença de 16 longarinas longitudinais. Além de suas dimensões mostradas nas imagens acima, a estrutura é sujeita a duas cargas, sendo elas um momento $M_x = 215 \text{ kNm}$ atuando no plano vertical de simetria e uma força vertical constante de intensidade $F = 100 \text{ kN}$ apontando para cima, aplicada a uma distância $d = 162 \text{ mm}$ do momento, conforme pode ser observado na figura 4 abaixo.

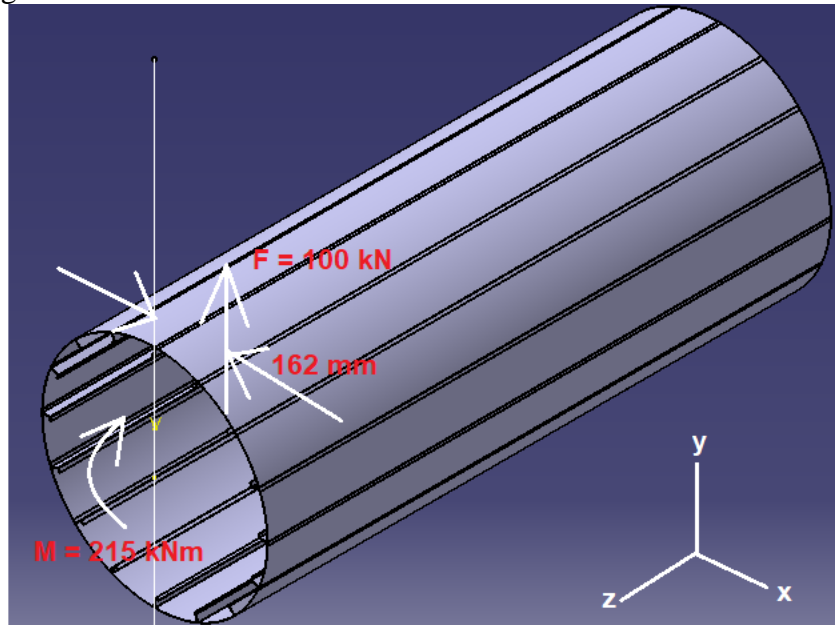


Figura 4: Carregamentos aplicados na estrutura analisada

3. SOLUÇÃO

Esta seção destina-se a apresentação dos resultados obtidos na análise da fuselagem de maneira analítica, além de representar graficamente tais valores encontrados.

3.1 Idealização estrutural e cálculo da tensão normal

As 16 longarinas da estrutura mostrada na figura 2 podem ser idealizadas, sendo substituídas por “booms” que são considerados presos na casca da fuselagem para efeitos de simplificação dos cálculos. A figura 5 mostra a representação dos booms na fuselagem, enumerados de 1 a 16 para melhor localização.

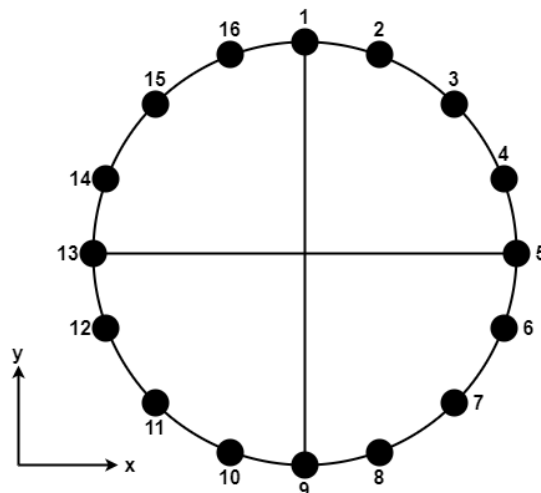


Figura 5: Idealização estrutural da fuselagem

Antes de se adentrar nos cálculos de tensões, é primeiramente necessário calcular os parâmetros geométricos como áreas, comprimentos, distâncias e momentos de inércia, para então aplicar a equação (1).

Pela análise da equação (1) e da figura 4, observa-se que não há momento em y, logo, $M_y = 0$. O foco é primeiramente determinar a tensão normal nas longarinas, onde observa-se que as mesmas são simétricas umas às outras, fazendo com que o produto de inércia I_{xy} seja nulo. Portanto, a equação (1) para cálculo de tensões normais pode ser reduzida conforme abaixo.

$$(4) \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y$$

O momento de inércia I_{xx} será calculado conforme a equação abaixo, onde $n = 16$ representa o número de longarinas, y é a distância da seção até o centróide e B é a área da seção z, calculada pela equação (6).

$$(5) \quad I_{xx} = \sum_{i=1}^n B_i y_i^2$$

$$(6) \quad B_i = A + \frac{t_D b}{6} \left(\frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_1} \right) + \frac{t_D b}{6} \left(\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_1} \right)$$

Na equação (6) apresentada, A é a área total da longarina, que pode ser calculada com o auxílio da figura 3. t_D é a espessura da fuselagem e b é a distância adjacente das barras. As tensões normais podem ser calculadas conforme relação de proporção mostrada abaixo.

$$\sigma_{i+1} = \frac{M y_{i+1}}{I} ; \sigma_{i-1} = \frac{M y_{i-1}}{I} \rightarrow \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_{i-1}} = \frac{y_{i+1}}{y_{i-1}}$$

A estrutura geral apresenta simetria ao longo dos seus 2 eixos que passam pelo centro. Outra consideração importante é que as distâncias dos booms com o eixo do centróide são equivalentes tanto na parte superior quanto inferior, formando, portanto, pares de momentos de inércia tanto para o lado esquerdo quanto para o direito, com exceção das marcações 1, 9, 5 e 13 que se localizam exatamente no meio da fuselagem. Portanto, as seguintes relações podem ser estabelecidas.

$$\begin{aligned} B_1 &= B_9 \\ B_2 &= B_8 = B_{10} = B_{16} \\ B_3 &= B_7 = B_{11} = B_{15} \\ B_4 &= B_6 = B_{12} = B_{14} \\ B_5 &= B_{13} \end{aligned}$$

Tendo sido adotadas as devidas considerações, simplificações e idealizações, os cálculos serão agora efetuados seguindo o passo a passo mostrado abaixo.

- 1) Comprimento da fuselagem: $L = \pi \times D = 800\pi = 2513,27mm$
- 2) Cálculo do b: Dividir L pelo número de longarinas (no caso, 16). $b = 157,08mm$
- 3) Área da seção: $A = 2 \times (2 \times 12) + (2 \times 30) = 108mm^2$
- 4) Distâncias do centróide:

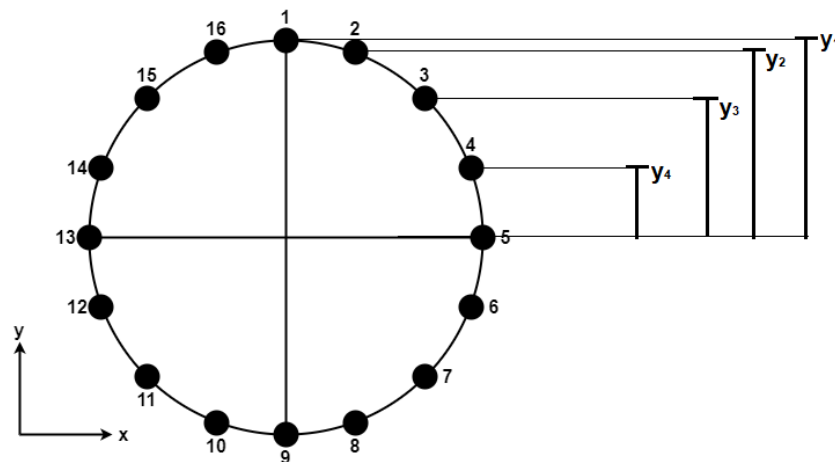


Figura 6: Localização das distâncias y dos booms em relação ao centroide da seção

Para calcular as distâncias y , basta utilizar o raio interno (400mm) e realizar a trigonometria simples com o início do centroide da fuselagem. Vale ressaltar que $y_5 = 0$.

Como há 16 barras, tem-se que $360^\circ/16 = 22,5^\circ$ de angulação entre uma barra e outra começando pelo boom 1, com ângulo igual a 90° .

$$\begin{aligned}y_1 &= 400 \times \sin 90^\circ = 400 \text{ mm} \\y_2 &= 400 \times \sin 67,5^\circ = 369,55 \text{ mm} \\y_3 &= 400 \times \sin 45^\circ = 282,84 \text{ mm} \\y_4 &= 400 \times \sin 22,5^\circ = 153,07 \text{ mm}\end{aligned}$$

5) Cálculo dos B's:

$$\begin{aligned}B_1 &= 108 + \frac{0,8 \times 157,08}{6} \left(2 + \frac{369,55}{400} \right) + \frac{0,8 \times 157,08}{6} \left(2 + \frac{369,55}{400} \right) \\B_1 &= 108 + 2 \times \left[\frac{0,8 \times 157,08}{6} \left(2 + \frac{369,55}{400} \right) \right] = 230,48 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

Conforme citado anteriormente, todos os booms apresentam simetria entre si, portanto, as áreas de todos os booms serão as mesmas, ou seja, $B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_{16} = 230,48 \text{ mm}^2$.

Com os valores dos B's calculados, calcula-se agora o momento de inércia I_{xx} , que corresponde ao somatório da equação (5), e o cálculo é mostrado abaixo.

$$\begin{aligned}I_{xx} &= (2 \times 230,48 \times 400^2) + (4 \times 230,48 \times 369,55^2) + (4 \times 230,48 \times 282,84^2) \\&\quad + (4 \times 230,48 \times 153,07^2) = 2,95 \times 10^8 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Uma vez já encontrado o valor da inércia, as tensões normais nos booms podem ser calculadas utilizando a equação (4). Os resultados podem ser observados na tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Distribuição de tensões normais nas longarinas ao longo da estrutura

Longarina	$y(\text{mm})$	$\sigma(\text{N/mm}^2)$
1	400	291,53
2, 16	369,55	269,33
3, 15	282,84	206,14

4, 14	153,07	111,56
5, 13	0	0
6, 12	-153,07	-111,56
7, 11	-282,84	-206,14
8, 10	-369,55	-269,33
9	-400	-291,53

Pela análise das tensões na tabela 1, nota-se que os valores máximos de tensão normal ocorrem nos booms 1 e 9, onde em ambos os booms as tensões possuem o mesmo módulo, mas sinais diferentes. Sendo assim, a tensão máxima no boom 1 é de 291,53 MPa (N/mm^2 equivale a MPa) e indica tração, enquanto que a tensão no boom 9 é de -291,53 MPa e indica compressão.

3.2 Cálculo da distribuição de cisalhamento

Para o cálculo do fluxo de cisalhamento, será utilizada a equação (2). Levando novamente em consideração que o momento em y e o produto de inércia serão nulos, ou seja, $M_y = 0$ e $I_{xy} = 0$, e que pelos dados do problema que $S_x = 0$ e $S_y = 100kN$, a equação (2) pode ser reescrita conforme abaixo de acordo com a literatura.

$$(7) \quad q_b = q_s - q_{s,0} = -\frac{S_y}{I_{xx}} \sum_{r=1}^n B_r y_r$$

Dadas as devidas considerações realizadas, pode-se calcular o termo for a do somatório, e a equação (7) fica então conforme abaixo.

$$(8) \quad q_b = q_s - q_{s,0} = -\frac{100 \times 10^3 N}{2,95 \times 10^8 mm^4} \sum_{r=1}^n B_r y_r$$

$$(9) \quad q_b = q_s - q_{s,0} = -3,39 \times 10^{-4} \frac{N}{mm^4} \sum_{r=1}^n B_r y_r$$

Portanto, para aplicação da equação (9) o problema abordado é o de uma carga de 100 kN aplicado a uma distância de 162 mm, conforme mostrado na figura 7.

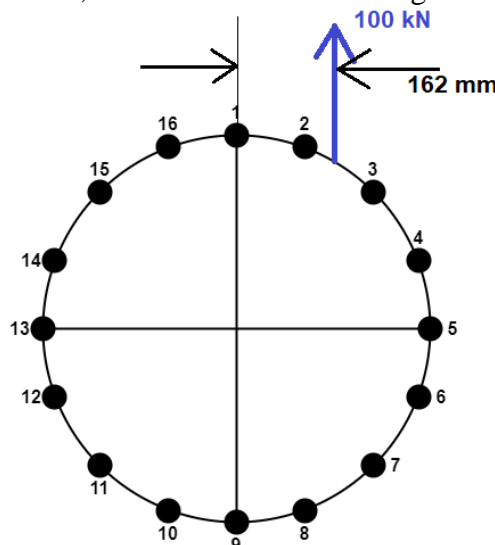


Figura 7: Esquemático da carga aplicada na fuselagem

Para o cálculo do fluxo de cisalhamento q_s , deve-se primeiramente determinar os valores q_b e $q_{s,0}$. O passo a passo da solução é mostrado logo a seguir.

1) Para seções abertas $q_{s,0} = 0$. Caso a seção seja fechada, o valor será diferente de 0, onde portanto, para encontrar $q_{s,0}$ cortamos um dos painéis que ligam os booms conforme a figura 8 abaixo, onde a seção passa a ser aberta, e calculamos primeiramente os respectivos q_b .

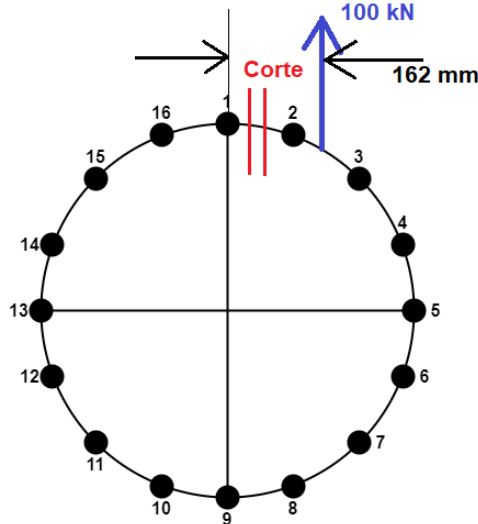


Figura 8: Corte no painel 1-2 para determinação do cisalhamento

O corte realizado irá fazer com que $q_{b,1-2} = q_{b,8-9} = 0$. Considerando ainda que todos os booms possuem o mesmo $B = 230,48 \text{ mm}^2$, o resultado para cálculo q_b é mostrado abaixo na tabela 2.

Tabela 2: Resultados dos q_b para os painéis da fuselagem

Painéis da fuselagem	$y_r (\text{mm})$	$B (\text{mm}^2)$	$y_r B (\text{mm}^3)$	$q_b (\text{N/mm})$
1-2	---	230,48	---	0
2-3	369,55	230,48	85173,88	-28,87
3-4	282,84	230,48	65188,96	-50,97
4-5	153,07	230,48	35279,57	-62,93
5-6	0	230,48	0	-62,93
6-7	-153,07	230,48	-35279,5736	-50,97
7-8	-282,84	230,48	-65188,9632	-28,87
8-9	-369,55	230,48	-85173,884	0
16-1	400	230,48	92192	-31,25
16-15	369,55	230,48	85173,88	-60,13
15-14	282,84	230,48	65188,96	-82,23
14-13	153,07	230,48	35279,57	-94,19
13-12	0	230,48	0	-94,19
12-11	-153,07	230,48	-35279,57	-82,23
11-10	-282,84	230,48	-65188,96	-60,13
10-9	-369,55	230,48	-85173,88	-31,25

A figura 9 mostra a direção do fluxo de cisalhamento q_b ao longo dos painéis, conforme vamos avançando ao longo da circunferência.

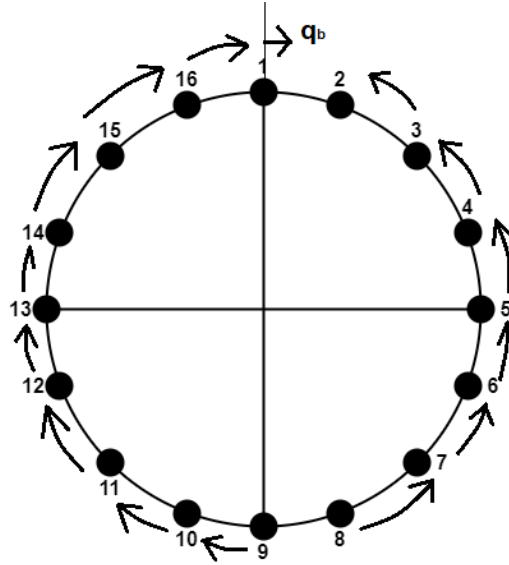


Figura 9: Fluxo de cisalhamento q_b

2) Calcular o valor de $q_{s,0}$ pela equação (3) dada na introdução. Nessa equação, T é a torção aplicada (calculada pelo produto da força pela distância), a integral $\oint q_b p ds$ representa o somatório dos momentos e A_T é a área de seção transversal total da estrutura.

$$\text{Área total da seção transversal: } A_T = \pi R^2 = \pi(400\text{mm})^2 = 5,03 \times 10^5 \text{mm}^2$$

As áreas que separam os booms são iguais, logo $A_{1,2} = A_{2,3} = \dots = A_{1,16}$. Para encontrar estas áreas, basta dividir a área total da seção transversal pelo número de longarinas existentes.

$$A_{1,2} = A_{2,3} = \dots = A_{1,16} = 5,03 \times 10^5 \text{mm}^2 / 16 = 31437,5 \text{mm}^2$$

$$\text{Torque aplicado: } T = 100\text{kN} \times 162\text{mm} = 16200 \times 10^3 \text{Nmm}$$

Da equação 20.10 do livro do autor Meghson é conhecido que $M = 2Aq$. O módulo do valor q é tirado da tabela 2, e seu sinal é dado pelo sentido que aponta. Portanto, assumimos a convenção de que q será positivo no sentido anti-horário e negativo no sentido horário, conforme a localização pela figura 9. Sendo assim, a integral pode ser escrita conforme abaixo.

$$\begin{aligned} \oint q_b p ds &= \sum 2Aq = 2Aq_{1,2} + 2Aq_{2,3} + 2Aq_{3,4} + \dots = +2Aq_{1,16} \\ &= 2A (q_{1,2} + q_{2,3} + \dots + q_{1,16}) \end{aligned}$$

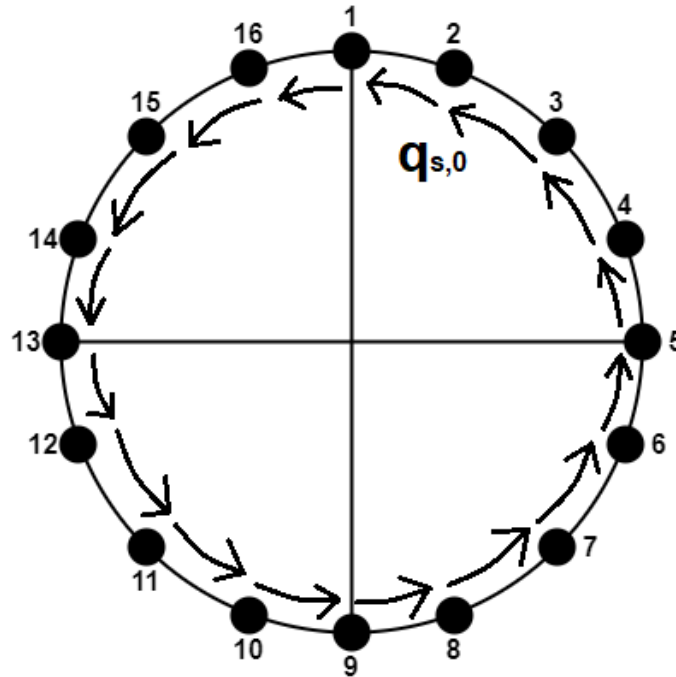
$$\sum 2Aq = 2 \times 31437,5 \text{mm}^2 \times (28,87 + 50,97 + 62,93 + 62,93 + 50,97 + 28,87 - 31,25 - 60,13 - 82,23 - 94,19 - 94,19 - 82,23 - 60,13 - 31,25) \text{N/mm} = -15722522,5 \text{Nmm}$$

Substituindo o valor encontrado na equação (3) e calculando os termos, temos que:

$$q_{s,0} = \frac{T - \oint q_b p \, ds}{2A_T} = \frac{16200 \times 10^3 Nmm - (-15722522,5 Nmm)}{2 \times 5,03 \times 10^5 mm^2}$$

$$q_{s,0} = 31,73 N/mm \text{ Atuando no sentido anti-horário}$$

A orientação de $q_{s,0}$ pode ser visto na figura abaixo.



A distribuição completa do fluxo de cisalhamento é dada pela soma dos valores de q_b e $q_{s,0}$, onde então os valores de q_s podem ser encontrados abaixo através da equação $q_s = q_b + q_{s,0}$, onde q_s com valor negativo indica apenas sentido horário conforme a convenção adotada. Os valores de q_s são mostrados abaixo, e sua distribuição ao longo da fuselagem pode ser observada na figura 10.

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= q_{8,9} = 31,73 N/mm \\ q_{2,3} &= q_{7,8} = 60,60 N/mm \\ q_{3,4} &= q_{6,7} = 82,70 N/mm \\ q_{4,5} &= q_{5,6} = 94,66 N/mm \\ q_{1,16} &= q_{10,9} = 0,00 N/mm \\ q_{16,15} &= q_{11,10} = -28,40 N/mm \\ q_{15,14} &= q_{12,11} = -50,50 N/mm \\ q_{14,13} &= q_{13,12} = -62,46 N/mm \end{aligned}$$

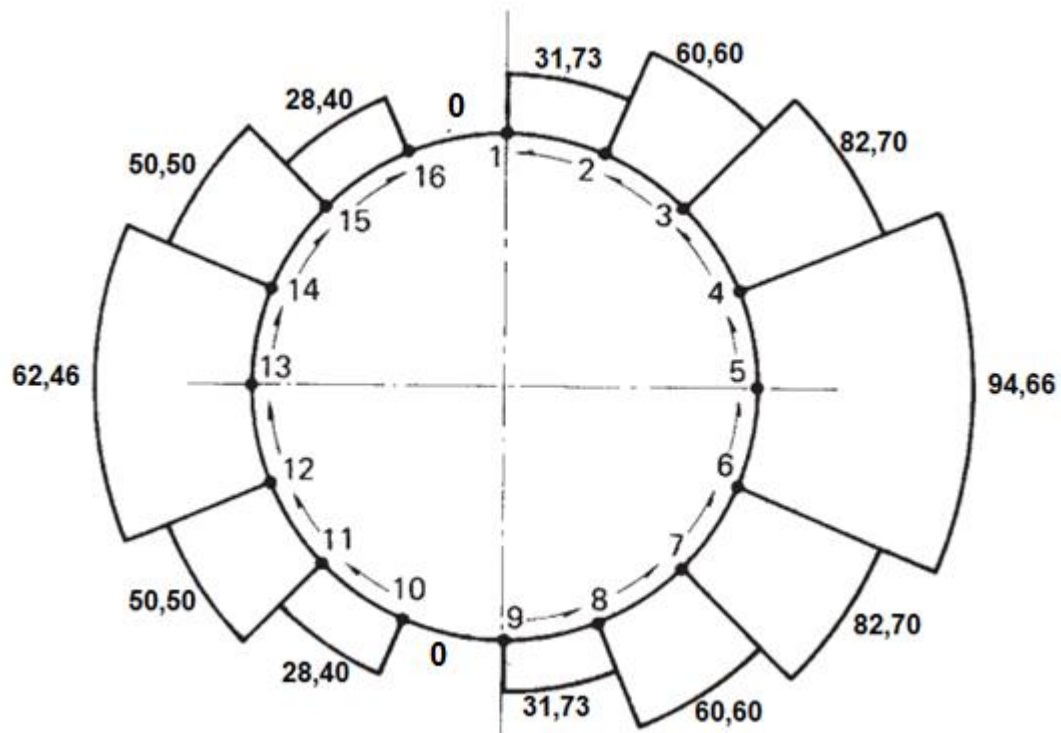


Figura 10: Distribuição de cisalhamento q_s ao longo da fuselagem

Para encontrar a máxima tensão de cisalhamento, o cálculo pode ser feito através da equação $\tau_{max} = \frac{q_{s,max}}{t_{sk}}$, onde $q_{s,max}$ é o máximo q_s que age na fuselagem e t_{sk} é a espessura da fuselagem, que no problema equivale a 0,8 mm. Analisando os valores calculados, temos que $q_{s,max} = q_{4,5} = q_{5,6} = 94,66 \text{ N/mm}$. Sendo assim, a máxima tensão de cisalhamento que atua na fuselagem é dada conforme abaixo.

$$\tau_{max} = \frac{q_{s,max}}{t_{sk}} = \frac{94,66 \text{ N/mm}}{0,8 \text{ mm}} = 118,325 \text{ N/mm}^2 = 118,325 \text{ MPa}$$

4. CONCLUSÃO

O método da idealização estrutural é muito eficaz na análise de estruturas complexas, aproximando a estrutura de uma estrutura simples, facilitando os cálculos das equações e visualização detalhada mais clara. Na seção 22.2 do livro (página 602) do Megson, o autor calcula a resultante da distribuição do fluxo de cisalhamento paralelamente ao eixo y da seção para obter o valor da carga aplicada na idealização estrutural e comparar com o valor dado no enunciado, que é de 100kN. Seguindo o mesmo procedimento, temos:

$$\begin{aligned} &2[(94,66 + 62,46)153,07 + (82,7 + 50,5)(282,84 - 153,07) \\ &\quad + (60,6 + 28,4)(369,55 - 282,84) + (31,73 - 0)(400 - 369,55)]10^{-3} \\ &= 100,0381818 \text{ kN} \end{aligned}$$

O valor da carga encontrada em comparação com o valor de 100kN representou um erro de 0,0381818% , onde portanto, Podemos afirmar que os cálculos estão de acordo.

5. BIBLIOGRAFIA

MEGSON, T.H.G. Thomas Henry Go. Aircraft Structures for Engineering Students, 4. ed. Oxford, USA: Elsevier, 2011.