PORTFÓLIO

Fundamentos de Variáveis Complexas Para Engenharia

Professora Tatiane Evangelista
Aluno Rodrigo Evangelista Aguiar de Souza – 180130366

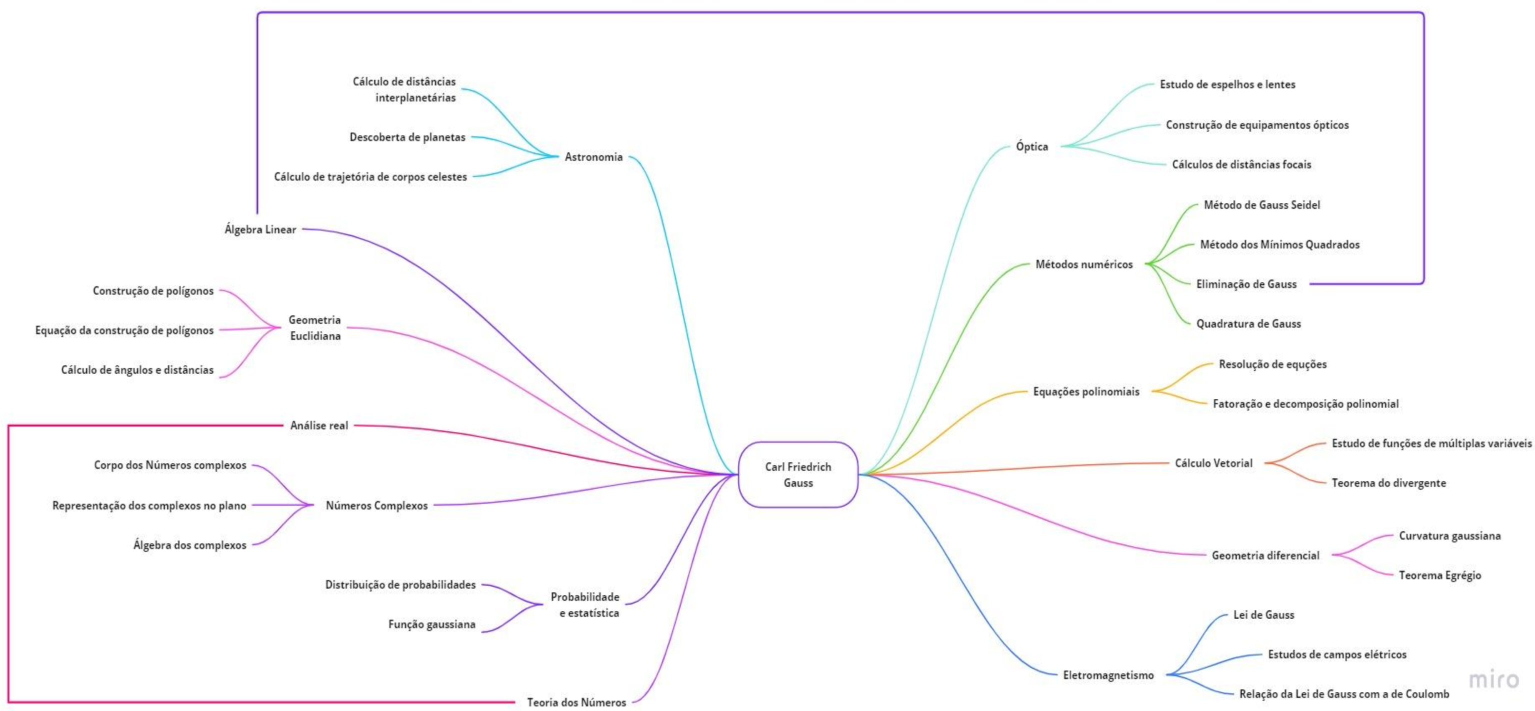
For the things of this world cannot be made known without a knowledge of mathematics.

Roger Bacon
Philosopher and Scientist, 1214-1292

Vamos ajudar o Bisonho a entender os números complexos? Para isso, precisaremos de uma baita revisão.
Vou deixar aqui um probleminha para resolvermos ao final do nosso estudo, onde vamos aplicae todos os nossos conhecimentos para conseguir solucioná-lo. Hmmmmmmmm já estou com uma baita fome, vou deixar aqui o problema e correr pra fazer um lanche antes de começarmos a estudar. Bem, vamos la, o problema a ser resolvido é $\sin(x) = 5$

Vou lanchar e já volto para nosso estudo, até breve amigão!

Voltei, e agora de barriga cheia. Vamos começar o nosso estudo apresentando para o Bisonho um dos pais dos números complexos, e um dos principais matemáticos de toda a história. O nome dele é Gauss, e embora muitos outros cientistas tenham contribuído para o desenvolvimento da teoria dos complexos, Gauss fez as descobertas que mais utilizamos atualmente, como a representação dos complexos no plano e as operações fundamentais decorrentes disso. Abaixo é possível encontrar um pouquinho de toda contribuição de Gauss na Matemática. É tanta coisa que quase não dá pra ler. Então, não se esqueça de dar um zoom na imagem.



O GÊNIO POR TRÁS DA LENDA

Princeps mathematicorum

INTRODUÇÃO

Houve um tempo em que o que se conhece hoje era apenas um vislumbre da mais pura imaginação humana, onde o desconhecido era por vezes interpretado e transmitido apenas por reis e nobres que detinham poder. Nesse tempo, o mundo foi sacudido pela matemática de maior beleza e elegância até então criada, onde Newton impactava a todos com as fundamentações imortalizadas em sua obra, *Principia*. Essa ferramenta propiciou avanços colossais na ciência em escala nunca antes vista, e elevou todos os paradigmas até então bem fundamentados para um patamar que muitos pensaram jamais ser possível de superar. Novamente estavam errados, mas, desta vez, isentos de culpa. Ninguém poderia imaginar que décadas depois o mundo seria impactado por descobertas que sequer foram compreendidas em sua totalidade ainda hoje. Ninguém poderia imaginar que surgiriam demonstrações e teoremas tão belos, elegantes e profundos que reafirmariam o papel da matemática como linguagem divina do universo. Ninguém jamais imaginaria que toda a matemática onipotente por trás destas impactantes descobertas seria proveniente de um simples garoto camponês. Um garoto com pensamentos e ideias nunca antes vistos, com uma maneira tão profunda e diferente de observar a natureza, que mesmo quase 200 anos após sua morte, são poucos e privilegiados aqueles que detém a capacidade de compreensão de suas ideias. Esse garoto é quem mais tarde todos conheceram pelo nome de Gauss, e seus feitos foram tão grandiosos e espantosos que muitas vezes são até mesmo confundidos com lendas. Feitos tão poderosos e ainda hoje insuperáveis que fizeram por merecer o nome que lhe atribuíram: o príncipe da matemática. Aqui, são apresentadas algumas destas grandiosas ideias. Não para serem debatidas, mas sim, contempladas em sua totalidade apenas pela sua beleza

CAMPOS DE ATUAÇÃO

- Geometria Euclidiana
- Álgebra abstrata
- Números complexos
- Teoria dos números
- Probabilidade e estatística
- Geometria diferencial
- Cálculo vetorial
- Equações polinomiais
- Métodos numéricos
- Óptica
- Distâncias interplanetárias
- Eletromagnetismo
- Álgebra linear

Gauss era filho de camponeses, o que naquela época asseguraria que ele não teria ascensão social sem que ao menos se destacasse em algum campo de apreciação da nobreza. São frequentes os boatos de que desde muito cedo Gauss aprendeu a contra antes mesmo do que a falar, e que na escola se sentia entediado pela constante falta de desafio.

Ao longo de seu crescimento, as habilidades de Gauss foram se tornando cada vez mais notáveis, o que chegou aos ouvidos do Duque Ferdinand. A partir de então, a educação de Gauss foi financiada, onde ele passou a estudar em colégios de ótima qualidade.

São inúmeras as contribuições de Gauss para a ciência ao longo de sua vida. Seus feitos são tão notáveis que revolucionaram quase todas as áreas em que contribuiu, não atoa ele recebendo o título de príncipe da matemática. Aqui, serão destacados os principais trabalhos realizados por Gauss.

•FUNÇÃO GAUSSIANA

A função gaussiana é caracterizada por uma constante que multiplica uma função exponencial, onde a base da exponencial é o número de Euler. O gráfico da gaussiana possui o formato em forma de sino, e possui diversas aplicações. As aplicações mais comuns são em cálculo de distribuições normais, mais especificamente na modelagem de diversos fenômenos naturais, pois grande parte destes possui distribuição normal semelhante a gaussiana. Como exemplo, cita-se as distribuições estatísticas que dependem de variáveis aleatórias, a colisão de moléculas de gases, fenômenos de física quântica baseados no princípio de Heisenberg e alguns fenômenos de reações químicas.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

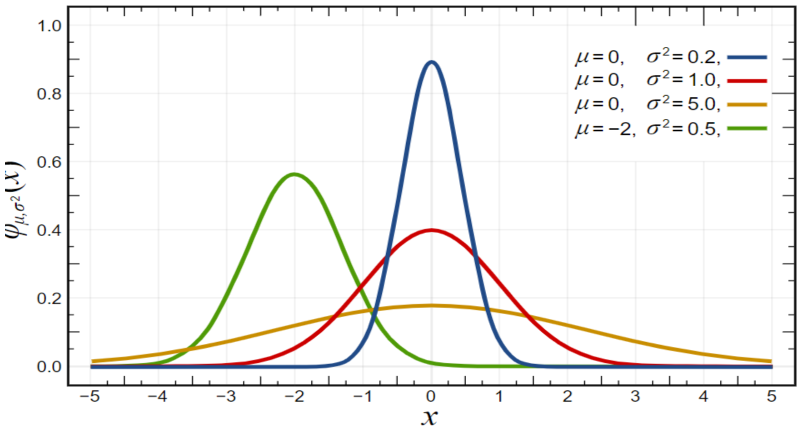


Figura 1. a) Função gaussiana. b) Gráfico da gaussiana para diferentes parâmetros

•MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é um procedimento de otimização matemática que se objetiva a encontrar o melhor ajuste de curvas possível para um dado conjunto de pontos discretos. Como o nome já diz, o método funciona minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre o valor anaclítico e os dados medidos em experimento, onde estas diferenças são chamadas de resíduos.

Em 1809, Gauss havia publicado um método que calculava a órbita de corpos celestes, onde o método utilizava o método dos mínimos quadrados. Isso gerou uma disputa intelectual com Legendre, que havia publicado a primeira versão do método em 1805. Entretanto, Gauss assombrou à todos alegando que já possuía a definição formal do método desde 1795, e não somente isso, Gauss conectou o método com todos os princípios da probabilidade e à distribuição normal. Uma das primeiras demonstrações de poder do método foi no cálculo de trajetória futura do recém-descoberto asteroide Ceres. Em 1 de janeiro de 1801, o astrônomo italiano Giuseppe Piazzi descobriu Ceres e foi capaz de rastrear seu caminho por 40 dias antes que se perdesse no brilho do sol. Com base nesses dados, os astrônomos desejavam determinar a localização de Ceres depois que ela emergiu atrás do sol, sem resolver as complicadas equações não lineares de Kepler do movimento planetário. As únicas previsões que permitiram com sucesso ao astrônomo húngaro Franz Xaver von Zach realocar Ceres foram aquelas realizadas por Gauss, de 24 anos, usando análise de mínimos quadrados.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\dots$	y_{n-1}	y_n

$$\begin{aligned}
SX &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n && = \sum x_i \\
SY &= y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n && = \sum y_i \\
XY &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n && = \sum x_i y_i \\
SX2 &= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \ldots + (x_n)^2 && = \sum x_i^2 \\
SX3 &= (x_1)^3 + (x_2)^3 + (x_3)^3 + \ldots + (x_n)^3 && = \sum x_i^3 \\
SX4 &= (x_1)^4 + (x_2)^4 + (x_3)^4 + \ldots + (x_n)^4 && = \sum x_i^4 \\
SX5 &= (x_1)^5 + (x_2)^5 + (x_3)^5 + \ldots + (x_n)^5 && = \sum x_i^5 \\
SX6 &= (x_1)^6 + (x_2)^6 + (x_3)^6 + \ldots + (x_n)^6 && = \sum x_i^6 \\
SX2Y &= (x_1)^2 y_1 + (x_2)^2 y_2 + \ldots + (x_n)^2 y_n && = \sum x_i^2 y_i \\
SX3Y &= (x_1)^3 y_1 + (x_2)^3 y_2 + \ldots + (x_n)^3 y_n && = \sum x_i^3 y_i
\end{aligned}$$

Função	Nome da curva
$y = a_0 + a_1 x$	Reta
$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	Parábola
$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	Cúbica

RETA

$$\begin{pmatrix} n & SX \\ SX & SX2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SY \\ SXY \end{pmatrix}$$

CÚBICA

$$\begin{pmatrix} n & SX & SX2 & SX3 \\ SX & SX2 & SX3 & SX4 \\ SX2 & SX3 & SX4 & SX5 \\ SX3 & SX4 & SX5 & SX6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SY \\ SXY \\ SX2Y \\ SX2Y \end{pmatrix}$$

PARÁBOLA

$$\begin{pmatrix} n & SX & SX2 \\ SX & SX2 & SX3 \\ SX2 & SX3 & SX4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SY \\ SXY \\ SX2Y \end{pmatrix}$$

Figura 2. Descrição do MMQ

•ÓPTICA E ELETROMAGNETISMO

No campo da óptica e ondulatória, Gauss estudou excessivamente espelhos e lentes de diversos formatos. Seus estudos se conduziram especificamente sobre o que hoje chamamos de espelhos côncavos e convexos e também lentes esféricas, onde Gauss fez não somente experimentos, mas também deduziu equações analíticas para cálculo de alguns parâmetros, conforme abaixo.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$

f - Distância focal da lente ou espelho
p - Distância do objeto em relação ao espelho
p' - Distância da imagem do objeto em relação ao espelho

Figura 3. Lei de Gauss para o estudo da óptica

Uma das maiores contribuições de Gauss foi no campo do Eletromagnetismo, onde a Lei de Gauss criada pelo mesmo estabelece uma relação entre o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada e as cargas que estão no interior dessa superfície. Tamanha é a importância dessa lei que posteriormente ela veio a compor as quatro equações de Maxwell. Seu maior campo de aplicações ocorre ondem simetrias de campos elétricos, com destaque para superfícies esféricas, cilíndricas e planas.

Forma diferencial

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Forma integral

$$\Phi_E = \oint_{S'} E\, dA$$

Figura 4. Lei de Gauss do Eletromagnetismo

•ÁLGEBRA

No campo da álgebra, as descobertas de Gauss são utilizadas ainda hoje com extrema frequência, como destaque para o método da eliminação de Gauss e o método de Gauss Jacobi. Estes métodos consistem em procedimentos algébricos para resoluções de sistemas lineares na forma Ax = b. Entretanto, no campo da álgebra, a teoria mais impressionante imposta por Gauss foi a demonstração do Teorema fundamental da Álgebra. Esse teorema afirma que como o corpo dos números complexos é algebricamente fechado e, portanto, tal como com qualquer outro corpo algebricamente fechado, a equação p(z)=0 tem n soluções não necessariamente distintas para n≥1. Gauss também utilizou combinações de vários outros métodos para calcular distâncias interplanetárias tremendamente difícil para diversos astrônomos.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \quad (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \quad (L_2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \quad (L_3) \end{aligned} \Rightarrow [A|b]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} L_2^{(1)} &\leftarrow L_2 - k.L_1 \\ L_3^{(1)} &\leftarrow L_3 - w.L_1 \end{aligned} \Rightarrow [A|b]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

$$L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - v.L_2^{(1)}$$

$$[A|b]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= b_3^{(2)}/a_{33}^{(2)}\ ,\ a_{33}^{(2)} \neq 0 \\ x_2 &= (b_2^{(2)} - (a_{23}^{(2)}x_3))/a_{22}^{(2)} \\ x_1 &= (b_1^{(2)} - (a_{12}^{(2)}x_2) - a_{13}^{(2)}x_3)/a_{11}^{(2)} \end{aligned}$$

Figura 5. Método da eliminação de Gauss

•NÚMEROS COMPLEXOS

Gauss foi considerado um dos pais dos números complexos dado sua grande importância no desenvolvimento deste campo. Além da prova do Teorema Fundamental da Álgebra que também impactou diretamente o estudo de números complexos, ele também foi responsável pela representação geométrica dos complexos no plano de Gauss. A partir disso, desenvolveu-se toda a álgebra e geometria convencional aplicada nos números complexos até os dias atuais.

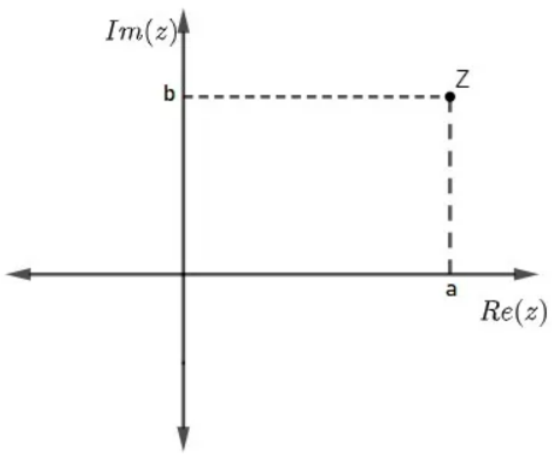
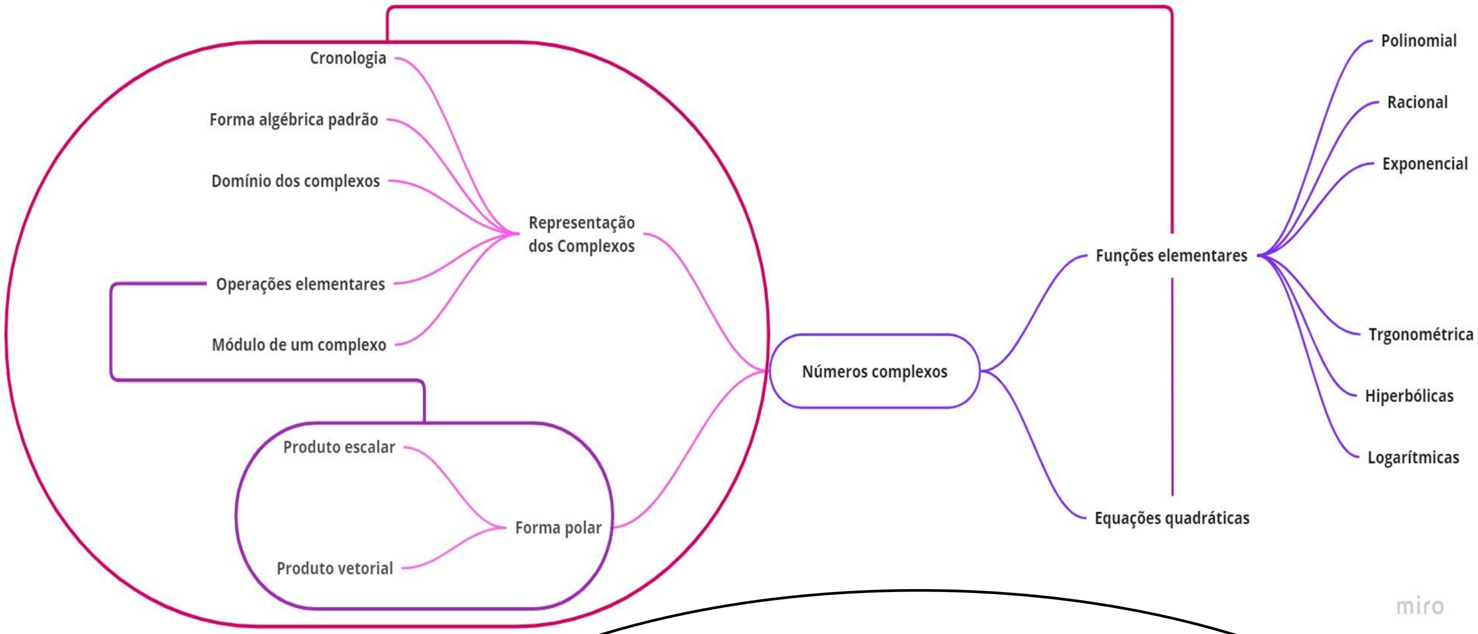


Figura 6. Plano de Argand-Gauss

MAPA MENTAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS



Olha eu aqui de novo. Vamos então continuar o nosso estudo dando uma olhadinha nesse mapa mental aí em cima. Podemos ver que iniciamos com a cronologia dos grandes matemáticos que desenvolveram a teoria dos complexos. Conhecendo isso, passamos para as definições iniciais de um número complexo e das continhas básicas que podemos fazer, como adição, subtração, multiplicação e divisão. Depois de entender tudo isso, damos uma olhadinha em módulo e nos produtos escalar e vetorial, para somente então terminar o básico do básico. Depois de saber isso, estudamos toda a álgebra das funções elementares que já conhecemos.

Nossa, QUANTA COISA. Mas calma. Vamos dar uma estudada mais detalhada, e depois vamos resolver a lista de exercícios deixada pela professora Tati.

Lista 1

Rodrigo Evangelista Aguiar de Souza 18/0130366

Questão 01

a) $Z = 17 - 2i + 8i - 5 + 4i$

$z = (17-5) + (-2+8+4)i = 12 + 10i$

b) $(1+7i)\left(\dfrac{8-i}{4+3i}\right) \rightsquigarrow Z = \dfrac{(1+7i)(8-i)}{(4+3i)} = \dfrac{8 - i + 56i + 7}{4+3i} = \dfrac{15+55i}{4+3i}\left(\dfrac{4-3i}{4-3i}\right)$

$Z = \dfrac{60 - 45i + 220i + 165}{25} = \dfrac{225 + 175i}{25} = 9 + 7i$

c) $(1+i)^3 = Z \rightsquigarrow Z = (1+i)^2(1+i) = (1+2i-1)(1+i) = 2i(1+i) = 2i - 2$

$Z = -2 + 2i$

d) $Z = 3\underbrace{\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2}_{A} - 2\underbrace{\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3}_{B} \rightsquigarrow$ Resolvendo A:

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = \dfrac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{\cancel{1}-2i\cancel{-1}} = \dfrac{2i}{-2i} = -1$

Resolvendo B: $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = \dfrac{\cancel{1}-2i\cancel{-1}}{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = -1\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$

$B = -1\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)\left(\dfrac{1-i}{1-i}\right) = -1\left(\dfrac{\cancel{1}-2i\cancel{-1}}{2}\right) = i$

- Substituindo os valores em z, temos:

$Z = 3A - 2B = 3(-1) - 2(i) = -3 - 2i$

e) $(1+i)^{2014} = (1+i)^{4(503)+2} = \left[(1+i)^4\right]^{503} \cdot (1+i)^2 = \left[(1+i)^2\right]^{1006} \cdot (1+i)^2$

Sabendo que $(1+i)^2 = \cancel{1} + 2i - \cancel{1} = 2i$, temos:

$z = (2i)^{1006} \cdot 2i = [(2i)^2]^{503} \cdot 2i$

$= (-4)^{503}\, 2i = -1^{503} \cdot (2^2)^{503} \cdot 2i = -1 \cdot 2^{1006} \cdot 2 \cdot i = -2^{1007}\, i$

Questão 02

Sejam $z = a+bi$ e $\bar{z} = a-bi$

a) $2z - 5\bar{z} + \overline{8-i} + 3 + 4i = 0 \rightarrow 2(a+bi) - 5(a-bi) + 8 + i + 3 + 4i = 0$

$$\underbrace{(2a-5a+8+3)}_{-3a+11} + i\underbrace{(2b+5b+1+4)}_{7b+5} = 0$$

$-3a+11 = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{11}{3}}$

$7b+5 = 0 \rightarrow \boxed{b = \frac{-5}{7}}$

Resposta

b) $i(z+2\bar{z}) = \frac{3}{1-i} \rightarrow i(a+bi+2a-2bi)(1-i) = 3 \rightarrow i(3a-bi)(1-i) = 3$

$\rightarrow (3ai - bi^2)(1-i) = 3 \rightarrow 3ai - bi^2 - 3ai^2 + bi^3 - 3 = 0$

Substituindo $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, temos: $3ai + b + 3a - bi - 3 = 0$

$$\underbrace{(3a+b-3)}_{I} + i\underbrace{(3a-bi)}_{II} = 0$$

Da equação :

$\begin{cases} 3a - b = 0 \rightarrow \boxed{3a = b} \\ 3a + b - 3 = 0 \rightarrow b + b = 3 \rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2} \therefore a = \frac{1}{2}} \end{cases}$

Resposta.

Questão 03

$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, Calcular $1+z+z^2$

Resolução: $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}_{A}$

Resolvendo A:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{-2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1 + \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] + \left[\frac{-2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{4}\right)}_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0} + i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{0}$$

Resposta: $1+z+z^2=0$

Questão 04

Existem z e w tal que $|z| = |w| = 1$ (1) e $|z+w| = \sqrt{5}$ (2) ?

Resolução: • Sejam $z = a+bi$ e $w = c+di$. Se $|z| = |w|$, então vale que $a=c$ e $b=d$

• $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \rightarrow$ Se isso for verdadeiro, $a^2 = \frac{1}{2} = b^2$ ∴ temos $a=b=\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z=w$

• Calculando os módulos, temos que: $|z|+|w| = |z|+|z| = 2|z| = 2$

• Utilizando a desigualdade triangular, a mesma fornece que $|z+w| < |z|+|w|$ e, portanto, $|z+w| < 2$.

Como $2 < \sqrt{5}$, a hipótese $|z+w| = \sqrt{5}$ não é satisfeita

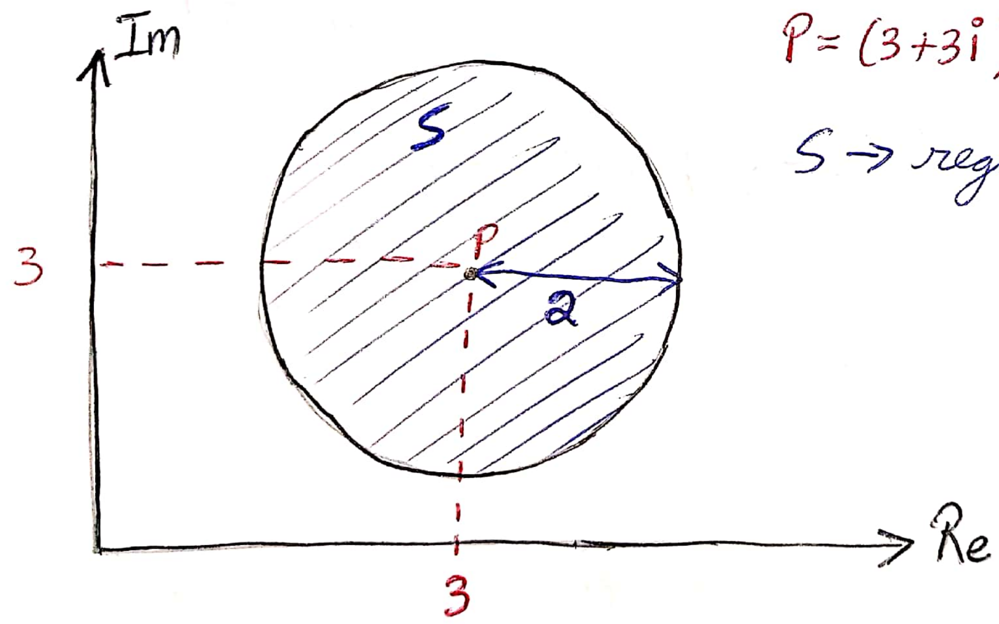
Resposta: Como as hipóteses 1 e 2 não são satisfeitas simultaneamente, então não existem z e w.

Questão 05 Representar no plano complexo

1) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 - 3i| < 2 \}$

O módulo representa a distância entre z e o complexo $3+3i$. Reescrevendo A:

$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (3+3i)| < 2 \}$



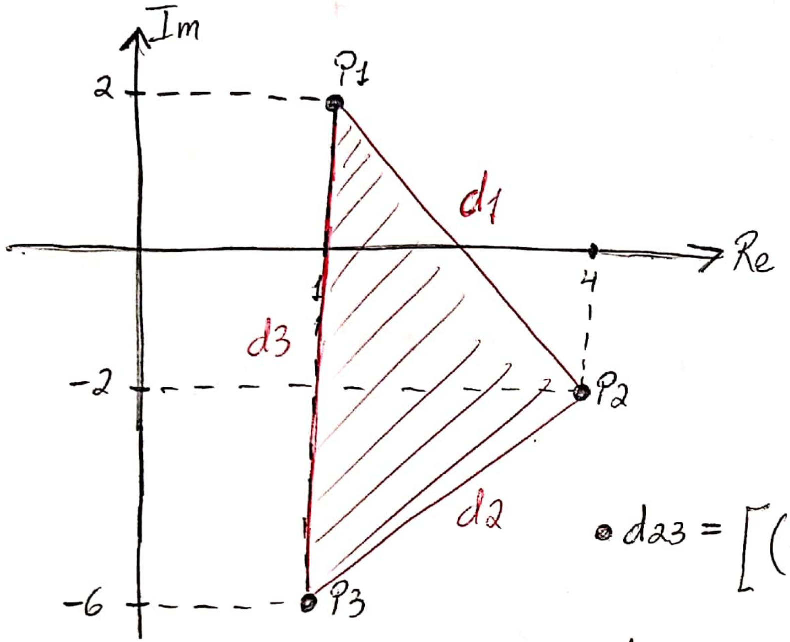
$P = (3+3i)$

$S \rightarrow$ região S onde z está contido.

Questão 06

$Z_1 = 1+2i$
$Z_2 = 4-2i$
$Z_3 = 1-6i$

No plano complexo, os números são representados por conjuntos de pontos P_1, P_2 e P_3, respectivamente, onde $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (4,-2)$ e $P_3 = (1-6)$



$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

↳ Distância entre 2 pontos

- $d_{12} = \left[(1-4)^2 + (2-(-2))^2\right]^{1/2}$

★ $d_{12} = \left[9 + 16\right]^{1/2} = 5$

- $d_{23} = \left[(4-1)^2 + (-2-(-6))^2\right]^{1/2} = \left[9+16\right]^{1/2} = 25$

- $d_{13} = \left[(1-1)^2 + (2-(-6))^2\right]^{1/2} = 8$

$(d_1 = d_2) \neq d_3$ ⤳ Triângulo isósceles

Questão 07

$z = 1+i$
$w = -1+2i$

a) $|w - 3z|^2 \rightarrow = |-1+2i-3(1+i)|^2 = |(-1+3)+i(2-3)|^2 = |-4-i|^2$

Se $P = -4-i$ ⤳ $|P| = \sqrt{-4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$ $\therefore$ $|w-3z|^2 = 17$

b) $|z\overline{w} + w\overline{z}| = |(1+i)(-1-2i) + (-1+2i)(1-i)| = |(-1-2i-i+2) + (-1+i+2i+2)|$

$= |2+0i| = 2$

Questão 08 Escrever os complexos em sua forma trigonométrica.

a) $z = -5+5i$ $\quad \theta = Tan^{-1}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = Tan^{-1}(-1)$

• No intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos que $\theta = \frac{7\pi}{4}$ rad ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$

• $|z| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$$z = 5\sqrt{2}\left[Cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\ Sin\left(7\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

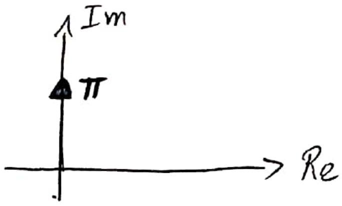
b) $z = -3-3\sqrt{3}\,i$

$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{-3}\right) = Tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$|z| = \sqrt{(-3)^2+(-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = 6$

$$z = 6\left[Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ Sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

c) $z = \pi i$



• $\theta = Tan^{-1}\left(\frac{\pi}{0}\right) \approx \frac{\pi}{2}$ $\quad$ • $|z| = \pi$

$$z = \pi\left[Cos\ \frac{\pi}{2} + i\ Sin\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Parte 2

1) a) $Z = -5+5i$

• $|Z| = \sqrt{(-5)^2+(5^2)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ • $\sin\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\cos\theta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ Ângulo no 2º quadrante do círculo trigonométrico.

$\theta = \operatorname{arctg}(-1) = 135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

$Z = 5\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$ Resposta

b) $-3-3\sqrt{3}i = Z$ • $|Z| = \sqrt{(-3)^2+(-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = 6$

• $\sin\theta = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\cos\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ ∴ Ângulo no 3º quadrante do círculo trigonométrico

$\theta = Tg^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = Tg^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}$ rad ou 240°.

$Z = 6\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$ Resposta

c) $Z = \pi i$

• $|Z| = \pi$ • $\sin\theta = \frac{\pi}{\pi} = 1$ • $\cos\theta = \frac{0}{\pi} = 0$ • $Tg\,\theta \to \infty$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$Z = \pi\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$ Resposta

2) a) $Z_1 \cdot Z_2$

$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1||Z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

↳ Multiplicação de complexos na forma polar

$\circ |z_1| = 2 \quad \circ \theta_1 = \frac{3\pi}{4}$

$\circ |z_2| = 3 \quad \circ \theta_2 = \frac{7\pi}{6}$

$$z_1 \cdot z_2 = |2||3| \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) \right]$$

$\hookrightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} = \frac{18\pi + 28\pi}{24} = \frac{46\pi}{24} = \frac{23\pi}{12}$

$\hookrightarrow |2||3| = 6$

Resposta: $z_1 \cdot z_2 = 6 \left[\cos \frac{23}{12}\pi + i \sin \frac{23\pi}{12} \right]$

b) $\frac{z_3}{z_2}$ $\qquad \frac{z_3}{z_2} = \frac{|z_3|}{|z_2|} \left[\cos(\theta_3 - \theta_2) + i \sin(\theta_3 - \theta_2) \right]$

↳ Divisão de complexos na forma polar.

$|z_3| = 4 \quad \circ \theta_3 = \frac{31\pi}{3}$

$|z_2| = 3 \quad \circ \theta_2 = \frac{7\pi}{6}$

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{|4|}{|3|} \left[\cos\left(\frac{31\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{31\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right) \right]$$

$\hookrightarrow \frac{|4|}{|3|} = 1,25$

$\hookrightarrow \frac{31\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} = \frac{(62 - 7)\pi}{6} = \frac{55\pi}{6}$

Resposta: $\frac{z_3}{z_2} = 1,25 \left[\cos\left(\frac{55\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{55\pi}{6}\right) \right]$

c) $z_1 \cdot \overline{z}_3$

• $\overline{z}_3 = 4\left(\cos\frac{31\pi}{3} - i\sin\frac{31\pi}{3}\right)$ → Lembrando que $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, temos que:

$\overline{z}_3 = 4\left(\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-31\pi}{3}\right)\right)$ → Lembrando que $\cos\theta = \cos(-\theta)$, temos que:

$\overline{z}_3 = 4\left[\cos\left(\frac{-31\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-31\pi}{3}\right)\right]$

• $z_1 \cdot \overline{z}_3 = |z_1||z_3|\left[\cos(\theta_1 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_3)\right]$, onde $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta_3 = -\frac{31\pi}{3}$

• $\theta_1 + \theta_3 = \frac{3\pi}{4} - \frac{31\pi}{3} = \frac{9\pi - 124\pi}{12} = \frac{-115\pi}{12}$

$z_1 \cdot \overline{z}_3 = 8\left[\cos\left(\frac{-115\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-115\pi}{12}\right)\right]$

→ $\frac{-115\pi}{12} = 23\left(\frac{-5\pi}{12}\right) = 23$ voltas no círculo

→ $\frac{-5\pi}{12}$ ângulo no 4º quadrante

$\therefore \left[\cos(\theta) = \cos(-\theta)\right] > 0$ e usando a propriedade de função ímpar, temos $\left[\sin(-\theta) = -\sin(\theta)\right] > 0$

Resultado: $z_1 \cdot \overline{z}_3 = 8\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$ Resposta

d) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)\left[\cos\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right) + i\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right)\right]$ → Teorema.

• $|z_1| = 2$, $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$

• $|z_2| = 3$, $\theta_2 = \frac{7\pi}{6}$

• $|z_3| = 4$, $\theta_3 = \frac{31\pi}{3}$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{6}+\frac{31\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{6}+\frac{31\pi}{3}\right)\right]$$

$$\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{6}+\frac{31\pi}{3} = \frac{9\pi+14\pi+124\pi}{12} = \frac{147}{12}\pi = 49\frac{\pi}{4}$$

∴ partindo de $\frac{\pi}{4}$ e dando 49 voltas completas, retornando no mesmo ponto.

Resposta: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 24\left[\cos\frac{147\pi}{12} + i\sin\frac{147\pi}{12}\right] = 24\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

3) $W \cdot Z = |W||Z|\left[\cos(\theta_W+\theta_Z) + i\sin(\theta_W+\theta_Z)\right]$

Para $W \cdot Z = K$, $K>0$, $\theta_W+\theta_Z = 0$ ∴ $\underline{\theta_W = -\theta_Z}$ e $\underbrace{Re(W) = Re(Z) = a}_{II}$

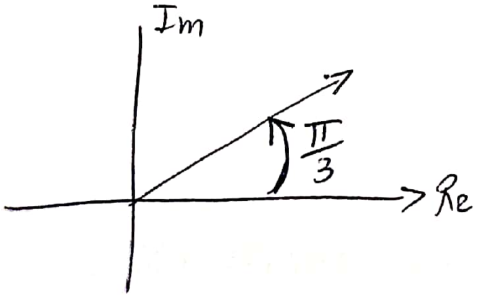
• Se $W = a+bi \rightsquigarrow b = a\,Tg(-\theta_Z)$

★ Lembrando que a tangente é uma função ímpar, onde $Tg(-\theta) = -Tg\,\theta$, temos que $b = -a\,Tg(\theta_Z) = -c = \underbrace{-Im(Z)}_{III}$

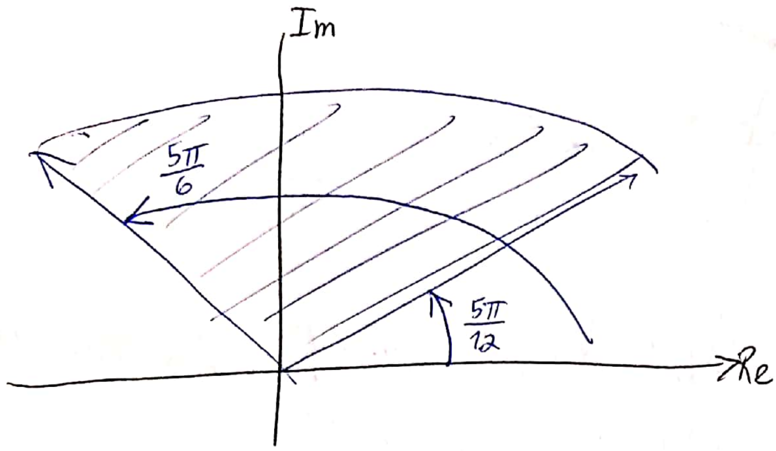
∴ $W = \underbrace{Re(W)}_{II} + i\underbrace{Im(W)}_{III} = Re(Z) - Im(Z) = \bar{Z}$

$|Z||W| = |Z||\bar{Z}| = |Z|^2$ → $|Z| = \sqrt{K}$, $|W| = \sqrt{K}$ Resposta

4) a) Na forma polar, $\theta = \frac{\pi}{3}$, logo, o conjunto será representado no plano por todos os complexos que possuem argumento $\theta = \frac{\pi}{3}$



b) O conjunto é representado por todo z, tal que o argumento seja maior do que $\frac{5\pi}{12}$ e menor do que $\frac{5\pi}{6}$.



5) Se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, então $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

- $\frac{z}{\bar{z}} = \cos(\theta-(-\theta)) + i\sin(\theta-(-\theta)) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

- $\frac{\bar{z}}{z} = \cos(-\theta-\theta) + i\sin(-\theta-\theta) = \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta) = \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)$

$$\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = \left|\cos 2\theta \cancel{+ i\sin 2\theta} + \cos 2\theta \cancel{- i\sin 2\theta}\right| = |2\cos 2\theta| = \frac{6}{5}$$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \pm\frac{3}{5}$ é conhecido que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\therefore \frac{3}{5} = 2\cos^2\theta - 1 \rightsquigarrow 2\cos^2\theta = \frac{3}{5} + \frac{5}{5} = \frac{8}{5} \rightsquigarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5} \therefore \overbrace{\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}} \text{ (A)}$$

$$-\frac{3}{5} = 2\cos^2\theta - 1 \rightsquigarrow 2\cos^2\theta = -\frac{3}{5} + \frac{5}{5} = \frac{2}{5} \rightsquigarrow \underbrace{\cos^2\theta = \frac{1}{5}}_{\sin^2\theta = \frac{4}{5}} \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (B)}$$

Como $|z| = 10$, temos:

Resposta: $z = 10(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\,i \rightarrow$ Hipótese (A)

$z = 10(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\sqrt{5} + i\,4\sqrt{5} \rightarrow$ Hipótese (B)

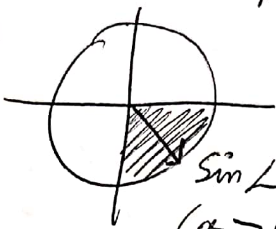
Parte 3

1) $|z| = \left[(10\sqrt{3})^2 + (-10)^2\right]^{1/2} = \sqrt{400} = 20$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{-10}{20} = \frac{-1}{2} \\ \cos\theta &= \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta \in 4^{o} \text{ quadrante}$$

$\theta = Tg^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$\hookrightarrow \theta = Tg^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11\pi}{6}$



$\sin < 0$

$\cos > 0$

$\therefore\ 10\sqrt{3} - 10i = 20\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ (A)

Usando a fórmula de Moivre: $z^n = 20^n\left[\cos\left(\frac{n\,11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{n\,11\pi}{6}\right)\right]$

$$z^n = \underbrace{20^n\cos\left(\frac{11\pi n}{6}\right)}_{Re(z^n)} + \underbrace{20^n i\sin\left(\frac{11\pi n}{6}\right)}_{Im(z^n)}$$

a) Para z^n ser real positivo,

$\frac{11\pi}{6}n = 0 + 2k\pi$

$\hookrightarrow n11\cancel{\pi} = 12k\cancel{\pi} \rightarrow \boxed{n = 12}$

b) Para z^n ser imaginário puro, $\frac{11\pi n}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}$

$11\cancel{\pi}n = 3(\cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi})$

$$\begin{array}{l|l} 11n & 6 \\ \hline 3 & k \end{array}$$

$\rightarrow 11n = 6k + 3 \rightarrow$ $\boxed{n = 3 \rightarrow \text{menor inteiro que resulta em resto } 3}$

2) Sendo $A = \frac{i}{1-i}$, temos: $A = \frac{i}{1-i}\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{i-1}{1+1} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}$

Convertendo p/ a forma polar: $|A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = \frac{+1/2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

2º quadrante

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$ rad

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

↳ Usando a fórmula de Moivre p/ raízes, temos:

$$z^{1/8} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/8}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{8}\right)\right], k = 0, 1, \dots, 7$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/8} = \frac{1}{\sqrt[16]{2}} = \frac{1}{2^{1/16}} = \frac{1}{2^{1/16}} \cdot \frac{2^{15/16}}{2^{15/16}} = \frac{\sqrt[16]{2^{15}}}{2^{16/16}} = \frac{\sqrt[16]{2^{15}}}{2}$$

$$\therefore Z_k = \frac{\sqrt[16]{2^{15}}}{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{8}\right)\right]$$

Resposta

3) Se $Z = \cos\theta + i\sin\theta$, $Z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

↳ Usando as propriedades de funções par e ímpar.

Digitalizado com CamScanner

Sendo assim, temos que $\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$

$$= \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = (\cos n\theta + \cancel{i \sin n\theta}) + \cos n\theta \cancel{- i \sin n\theta} = 2\cos(n\theta)$$

Provado.

4) Se $z = \cos\theta + i\sin\theta$, com $|z| = 1$, temos que:

(A) $z^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$ → fórmula de Moivre.

(B) $z^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta (i\sin\theta) + 4\cos^3\theta (i\sin\theta) + 6\cos^2\theta (i\sin\theta)^2 +$
$+ 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + i^4 \sin^4\theta$

$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta$$

Comparamos as partes reais imaginárias de (A) e (B), obtendo:

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta = \sin\theta\left[4(\cos^3\theta - \sin^2\theta)\right]$$

↳ $\sin\theta = \dfrac{\sin 4\theta}{4(\cos^3\theta - \sin^2\theta)}$ ⊳ onde $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta$

Resposta

5) $x^3 = -1$

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

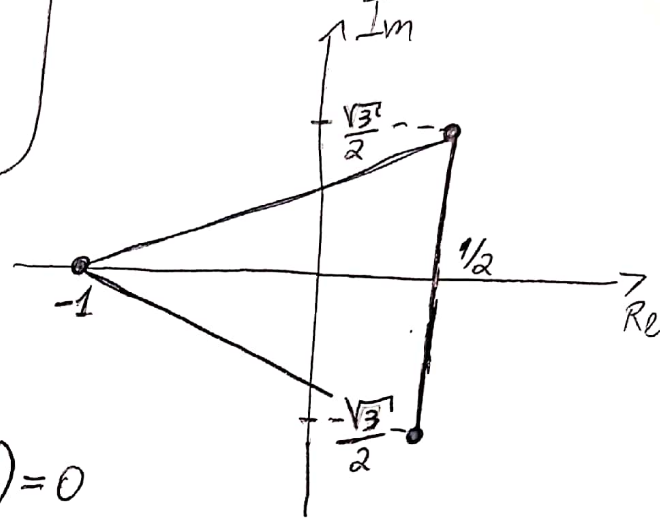
Usando a fórmula de Moivre para raízes, temos:

$$x = \sqrt[3]{-1} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{1/3}$$

$$Z_K = \cos\left(\frac{\pi + 2K\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2K\pi}{3}\right) \qquad K=0,1,2.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &K=0 \rightarrow Z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &K=1 \rightarrow Z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ &K=2 \rightarrow Z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}}$$

Resposta



6) Fazendo $\alpha = z^2 \rightarrow \alpha^2 - (1+2i)\alpha + (i-1) = 0$

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(-1+i) = 1 + \cancel{4i} - \ +4 - \cancel{4i} = 1$$

$$\alpha = \frac{(1+2i) \pm 1}{2}$$

$\alpha = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \rightarrow$ forma polar (I)

$\alpha = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ forma polar. (II)

Como $\alpha = z^2 \rightarrow z = \sqrt{\alpha} = \alpha^{1/n}$

Para a solução (I), temos: $Z_K = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2K\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2K\pi}{2}\right)$, $K=0,1$

Para a solução (II), temos: $Z_K = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2K\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2K\pi}{2}\right)\right]$

$K=0,1.$

Expandindo as soluções, encontramos todas as raízes:

$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$, $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

7) $(z-1)^n - z^n = 0 \rightsquigarrow (z-1)^n = z^n \rightsquigarrow \dfrac{(z-1)^n}{z^n} = 1$

$\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n = 1 \rightsquigarrow \left(1 - \dfrac{1}{z}\right)^n = 1$

↳ Extraindo a n-ésima raiz da igualdade mostrada, temos que:

$$1 - \frac{1}{z_k} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \rightsquigarrow \boxed{\frac{1}{z_k} = 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)} \ (1)$$

~~↳ Sabemos que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ e que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Combinando essas equações: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$~~

~~$\cos 2\theta = \cos^2\theta + \cos^2\theta - 1$~~

~~$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ (2)~~

↳ Se $z = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$, então $z^2 = \cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 + 2\sin\theta_0\cos\theta_0 i$

$$= \cos^2\theta_0 - (1 - \cos^2\theta_0) + 2\sin\theta_0\cos\theta_0 i$$

$$z^2 = 2\cos^2\theta_0 - 1 + 2\sin\theta_0\cos\theta_0 i \ (2)$$

Mas, pela fórmula de Moivre, $z^2 = \cos 2\theta_0 + i\sin 2\theta_0$ (3)

Igualando (2) e (3): $\cos 2\theta_0 + i\sin 2\theta_0 = 2\cos^2\theta_0 - 1 + 2\sin\theta_0\cos\theta_0 i$

↳ Pela igualdade das partes reais → $\cos 2\theta_0 = 2\cos^2\theta_0 - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ (4)

Pela igualdade das partes imaginárias → $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$ (5)

Para $\cos 2\theta_0 = 1 - 2\sin^2\theta_0$ Fazemos $\theta = 2\theta_0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\theta}{2}$, para obter que

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \rightarrow \boxed{1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad (6)$$

De maneira análoga para $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$, teremos que:

$$\boxed{\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \quad (7)}$$

Aplicando agora a equação (6), teremos que:

$$\boxed{1 - \cos\frac{2K\pi}{n} = 2\sin^2\frac{K\pi}{n}} \quad (8)$$

Aplicando a equação (7), temos: $\boxed{\sin\frac{2K\pi}{n} = 2\sin\frac{K\pi}{n}\cos\frac{K\pi}{n}}$ (9)

Aplicando os resultados de (8) e (9) na equação (1):

$$\frac{1}{Z_K} = 1 - \cos\frac{2K\pi}{n} - i\sin\frac{2K\pi}{n} = 2\sin^2\frac{K\pi}{n} - i\,2\sin\frac{K\pi}{n}\cos\frac{K\pi}{n}$$

$$\frac{1}{Z_K} = 2\sin\frac{K\pi}{n}\left(\sin\frac{K\pi}{n} - i\cos\frac{K\pi}{n}\right) = -2i\sin\frac{K\pi}{n}\left[\cos\left(\frac{K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{K\pi}{n}\right)\right]$$

$$Z_K = -\frac{1}{2i\sin\left(\frac{K\pi}{n}\right)}\left[\frac{1}{\cos\frac{K\pi}{n} + i\sin\frac{K\pi}{n}}\right]$$

Fazemos $\alpha = \frac{K\pi}{n}$ $\rightsquigarrow$ $Z_K = \frac{-1}{2i\sin\alpha}\left[\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}\right]\frac{(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$

$$Z_K = \frac{-1(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{2i\sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} \rightsquigarrow Z_K = -\frac{1}{2i}\left(\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

Lembrando que $\alpha = \frac{K\pi}{n}$ e que $\frac{1}{\sin\alpha} = \text{Cossec}\,\alpha$, temos a resposta final:

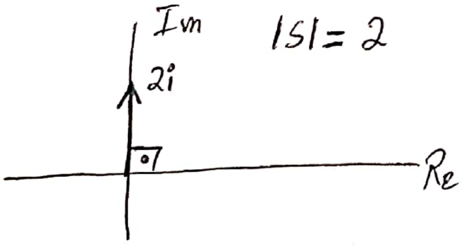
$$Z_K = \frac{i}{2}\,\text{Cossec}\,\frac{K\pi}{n}\left[\cos\frac{K\pi}{n} - i\sin\frac{K\pi}{n}\right], \quad K = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Parte 4

1) (a) $e^{i+1} = e\,e^{i} = e(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\Rightarrow$ Como $\theta = 1$, temos

$e^{i+1} = e(\cos(1) + i\sin(1))$ Resposta.

(b) $2i = 0 + 2i = s$



$|s| = 2$

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{2}{2} = 1\\ \cos\theta &= \frac{0}{2} = 0\end{aligned}\right\} 1^{\text{o}}\text{ quadrante} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Reescrevendo: $s = 2i = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

Usando a definição de função logaritmica complexa:

$\text{Log}(s) = \text{Log}|s| + i\arg(s) = \text{Log}\,2 + i\frac{\pi}{2}$ Resposta

(c) $Log(-i)$ Repetindo o procedimento análogo do item (b)

$s = -i = 0 - i$

$|s| = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ \cos\theta = \dfrac{0}{1} = 0 \end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{2} \qquad s = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$Log(s) = Log|s| + i\arg(s) = \cancel{Log\, 1}_{0} - i\frac{\pi}{2}$$

Resposta: $Log(\ ) = -i\frac{\pi}{2}$

(d) $Log(1+i)$ $\quad s = 1+i$ $\qquad s = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$|s| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Log(s) = Log|s| + i\arg(s) = Log\,\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$ Resposta

(e) $4^i = e^{Ln\, 4^i} = e^{iLn4}$ Usando a fórmula de Euler, temos:

$$e^{iLn4} = \cos(Ln4) + i\sin(Ln4)$$ Resposta

(f) $\sqrt{2}^{\,i} = e^{Ln\sqrt{2}^{\,i}} = e^{iLn\sqrt{2}} = \cos(Ln\sqrt{2}) + i\sin(Ln\sqrt{2})$ Resposta.

(g) $(1+i)^{1+i} = e^{Ln\,(1+i)^{(1+i)}} = e^{(1+i)Ln(1+i)}$

Se $r = 1+i \Rightarrow |r| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

Então, $e^{(1+i)\ln(1+i)} = e^{(1+i)(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})}$

$$(1+i)\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4} = \left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$e^{(1+i)\left(\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}\right)} = \exp\left\{\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \underbrace{e^{\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}}}_{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}\, e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}$$

Agora, aplicamos a fórmula de Euler:

$$(1+i)^{1+i} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\left\{\cos\left[\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right]+i\sin\left[\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

Resposta

(h) $(1+i)^3 = r$

$|r| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ r = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$r^3 = (\sqrt{2})^3\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right] \rightarrow$$ Pela Lei de Moivre

Portanto, $\arg(r^3) = \frac{3\pi}{4}$ Resposta

(i) Pela definição de Cosseno: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Sendo assim, temos que $\cos i = \dfrac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \dfrac{e^{-1}+e}{2}$ Resposta

(j) Sabemos que $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ e $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$Tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{\cancel{2}i \cdot i} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot i}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = -i\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}\right)$$

Fazendo $\theta = -\pi i \rightarrow$ temos:

$$Tg(-\pi i) = -i\left(\frac{e^{+\pi} - e^{-\pi}}{e^{\pi} + e^{-\pi}}\right)$$

Resposta

2) $e^{z} = 1+i \rightsquigarrow z = Ln(\underbrace{1+i}_{r})$ $\therefore$ $z_K = Ln|r| + i\, arg_K(r)$, $K \in \mathbb{Z}$.

• Substituindo os valores, temos:

$|r| = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta_K = \dfrac{\pi}{4} + 2K\pi$

$$\boxed{z_K = Ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right),\ K \in \mathbb{Z}}$$

Resposta

(b) $e^{z} = e^{zi}$ Tirando o Ln na igualdade e lembrando que $\ln a^{b} = b\ln a$, temos que:

$z = iz + 2i\pi K \rightarrow z - iz = 2K\pi i \rightarrow z(1-i) = 2K\pi i$

$$\boxed{Z_K = \frac{2K\pi i}{1-i}\,\frac{(1+i)}{1+i} = (-1+i)K\pi \quad \text{para } K \in \mathbb{Z}}$$

Resposta.

(c) $\cos z = 2 \rightarrow \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2 \rightarrow e^{iz}+e^{-iz} - 4 = 0$

Multiplicando a igualdade por e^{iz}: $(e^{iz})^{2} + e^{0} - 4e^{iz} = 0$

$(e^{iz})^{2} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Para $\alpha = e^{iz} \longrightarrow \alpha^{2} - 4\alpha + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 = 12 = 2\sqrt{3}$

$\alpha = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \alpha_1 = 2-\sqrt{3} \\ \alpha_2 = 2+\sqrt{3} \end{cases}$

Voltando para a exponencial, temos:

$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \rightarrow e^{i(x+iy)} = 2 \pm \sqrt{3} \rightarrow e^{-y+ix} = 2 \pm \sqrt{3}$

$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} e^{-y}\cos x = 2 \pm \sqrt{3} & (1) \\ e^{-y}\sin x = 0 & (2) \end{cases}$

Pela equação (2): $x = 0 + K\pi$, $K = 0, 1, 2, \ldots$

Pela equação (1): $y = 0$

$$\boxed{z = x + iy \rightarrow Z_K = K\pi, \; K = 0, 1, 2, \ldots}$$

Resposta.

4) a) Usando a definição de $\sinh\theta$ para $\theta = iz$, temos:

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = i\sin(z) \rightsquigarrow \sinh(iz) = i\sin(z)$$

Pela propriedade de função ímpar do Seno $\rightarrow \sinh(iz) = -i\sin(z)$

Fazendo a substituição $iz = z$, teremos: $\boxed{\sinh(z) = -i\sin(iz)}$

Provado.

Usando a definição de $\cosh\theta$ p/ $\theta = iz$, temos:

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

Aplicando a substituição $iz = z$, teremos: $\boxed{\cosh(z) = \cos(iz)}$

Provado.

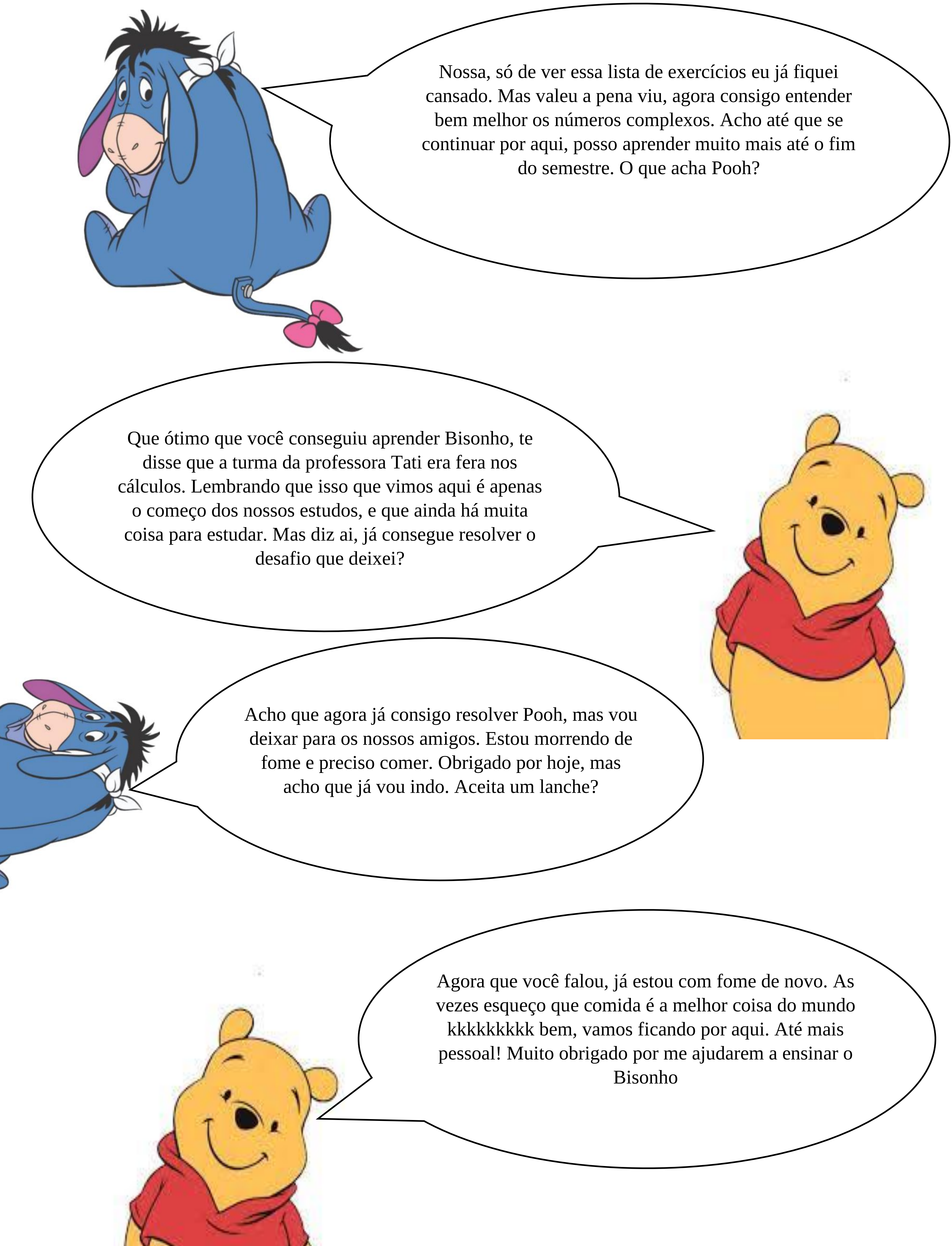
b) Do item anterior, temos:

$\sinh z = -i\sin(iz) \rightsquigarrow \sinh^2(z) = -\sin^2(iz)$ (1)

$\cosh z = \cos iz \rightsquigarrow \cosh^2(z) = \cos^2(iz)$ (2)

$$\underbrace{\cosh^2 z}_{(2)} - \underbrace{\sinh^2 z}_{(1)} = \cos^2(iz) - (-\sin^2(iz)) = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$$

Provado.


Nossa, só de ver essa lista de exercícios eu já fiquei cansado. Mas valeu a pena viu, agora consigo entender bem melhor os números complexos. Acho até que se continuar por aqui, posso aprender muito mais até o fim do semestre. O que acha Pooh?
Que ótimo que você conseguiu aprender Bisonho, te disse que a turma da professora Tati era fera nos cálculos. Lembrando que isso que vimos aqui é apenas o começo dos nossos estudos, e que ainda há muita coisa para estudar. Mas diz ai, já consegue resolver o desafio que deixei?
Acho que agora já consigo resolver Pooh, mas vou deixar para os nossos amigos. Estou morrendo de fome e preciso comer. Obrigado por hoje, mas acho que já vou indo. Aceita um lanche?
Agora que você falou, já estou com fome de novo. As vezes esqueço que comida é a melhor coisa do mundo kkkkkkkkk bem, vamos ficando por aqui. Até mais pessoal! Muito obrigado por me ajudarem a ensinar o Bisonho

BIBLIOGRAFIA

1. https://studiousguy.com/carl-friedrich-gauss-contributions-in-mathematics/
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#Career_and_achievements
3. https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/UGpages/gauss.html#bio
4. https://www.softschools.com/facts/scientists/carl_friedrich_gauss_facts/827/
5. https://www.rpm.org.br/cdrpm/37/2.htm
6. http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/alinear/mmq.html
7. Simmons, J. (1996). The Giant Book of Scientists: The 100 Greatest Minds of All Time. Sydney: The Book Company
8. *Mathematisches Tagebuch 1796–1814*, Ostwaldts Klassiker, Harri Deutsch Verlag 2005, mit Anmerkungen von Neumamn, ISBN 978-3-8171-3402-1 (es gibt auch engl. Übers. mit Anmerkungen von Jeremy Gray, Expositiones Math. 1984)