Clase 21: Aplicación de las Integrales: Nuevas Funciones y Áreas entre dos Curvas.

MIT 18.01: Single Variable Calculus.

Resumen

Desde esta clase comenzaremos a ver aplicaciones de la integral. En primer lugar, usaremos el TFC 2 para continuar buscando nuevas funciones a partir de ella. Luego, ayudados del TFC 1 calcularemos el área que se genera entre dos curvas.

1. Buscando funciones "nuevas" (continuación).

1.1. Función Logaritmo.

En la clase anterior resolvimos la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{1}{x}$$

a partir del TFC 2 y teniendo como condición inicial $L(1) = 0$:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

También señalamos que estas funciones resultantes son "nuevas" o que no pueden ser expresadas en forma de otras ya conocidas.

Ahora vamos a usar a esta $L(x)$ como la definición del logaritmo y buscaremos sus propiedades a partir de esta función, que está en forma de integral.

Intentemos conocer la forma de $L(x)$. Por medio del TFC 2 podemos asegurarnos que:

$$L'(x) = \frac{1}{x}$$

Como vemos, $L'(x)$ no puede ser igual a cero, por lo que no tiene puntos críticos. Por otra parte, en el punto de la condición inicial, $L'(1) = 1$. De hecho, en general:

$$L'(x) = \frac{1}{x}\begin{cases} x < 0, & L'(x) < 0 \\ x > 0, & L'(x) > 0 \end{cases}$$

Lo que nos muestra cuándo $L(x)$ crece o decrece.

También podemos ver la concavidad de $L(x)$ a partir de su segunda derivada:

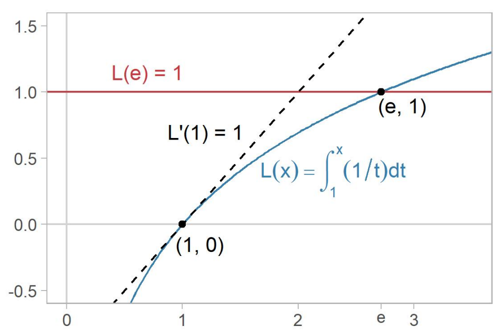
$$L''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Al igual que $L'(x)$, $L''(x)$ no puede ser igual a cero y, además, siempre será negativa, lo que implica que $L(x)$ no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia abajo para todo x en los $\mathbb{R}$.

En cuanto a sus límites, $L(x) \to -\infty$ a medida que $x \to 0$ y, mientras $x \to \infty$, $L(x) \to \infty$.

Por medio de $L(x)$ también podemos **definir el número** e como un valor tal que $L(e) = 1$.

A continuación tenemos una gráfica de $L(x)$ que considera toda la información que recopilamos más la definición de e.



Veamos que $L(x) < 0$ cuando $0 < x < 1$. Un motivo es que $L(1) = 0$ y que es una función creciente. Pero otra razón se da a partir de una de las propiedades de las integrales:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0$$

El lado derecho de la igualdad derecha es correcta porque:

$$\int_x^1 \frac{1}{t}dt > 0$$

puesto que $x < 1$, lo que es dado por el orden de los límites. En consecuencia:

$$-\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$$

Ahora, a partir de $L(x)$, tratemos de demostrar la siguiente igualdad:

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

La función $L(ab)$ podemos escribirla a partir de la definición de $L(x)$ y podemos igualarla como una suma de ella misma descompuesta en dos integrales:

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$$

Observemos que al menos se cumple que:

$$L(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt \qquad\qquad L(a) = \int_1^a \frac{1}{t} dt$$

Nos falta ver si, efectivamente:

$$L(b) \stackrel{??}{=} \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$$

Para ello, usemos el método de cambio de variables a partir de los límites de la integral del lado derecho. Veamos que ambos son múltiplos de a (a y ab). Por lo tanto, como estrategia podemos establecer que:

$$t = au \qquad\qquad dt = adu$$

donde u es la nueva variable que usaremos.

Recordemos que, al cambiar variables, no solo escribimos de forma distinta lo que está adentro de la integral, sino que también sus límites. Como $t = au$, entonces para que $t = a$, $u = 1$. Así mismo, para que $t = ab$, $u = b$. Por consiguiente:

$$L(b) = \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{au} adu = \int_1^b \frac{1}{u} du$$

Así, demostramos que $L(ab) = L(a) + L(b)$, la cual es la propiedad de los logaritmos $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

1.2. Función Error.

Otra función nueva que analizaremos, es:

$$L(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

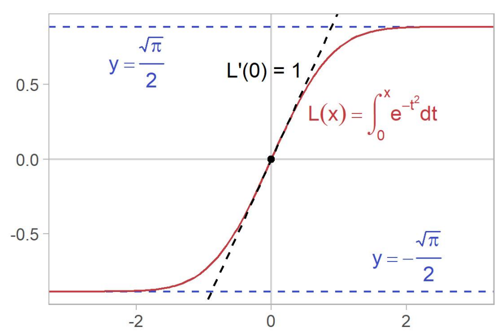
Por el TFC 2, podemos afirmar que $L'(x) = e^{-x^2}$ y, a su vez, que $L''(x) = -2xe^{-x^2}$. Además, cuando $x = 0$, $L(0) = 0$ (i.e, es su condición inicial) y $L'(0) = e^{0^2} = 1$.

Como $L'(x) > 0$ para todo x, $L(x)$ siempre estará creciendo. Por otra parte, dicha derivada está definida en todos los $\mathbb{R}$, implicando que no tiene puntos críticos. No obstante, $L''(0) = -2(0)e^{-(0)^2} = 0$, por lo que $x = 0$ es un punto de inflexión en $L(x)$. En particular:

- Cuando $x < 0$, $L''(x) > 0 \to L(x)$ es cóncava hacia arriba.
- Cuando $x > 0$, $L''(x) < 0 \to L(x)$ es cóncava hacia abajo.

Finalmente, $L(x)$ no tiene una asíntota vertical, pero sí dos horizontales, ya que $L(x) \to \pm\sqrt{\pi}/2$ cuando $x \to \pm\infty$.

Con esta información es suficiente para tener la gráfica de $L(x)$.



Una manera más rápida de haber conocido las propiedades de $L(x)$, es haber identificado que es una **función impar**:

$$L(-x) = -L(x)$$

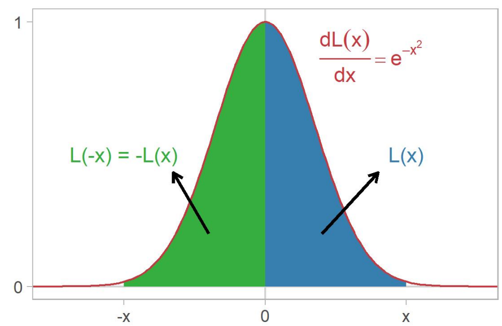
Esto se explica, primero, porque $L'(x)$ es una **función par**:

$$L'(-x) = L'(x)$$

lo que geométricamente significa que es simétrica al eje vertical de un plano cartesiano.

Y, en segundo lugar, $L(x)$ es una función impar debido a que está establecido que la condición inicial de su ecuación $L'(x) = e^{-x^2}$ es el punto $(0,\ 0)$ o $L(0) = 0$. Recordemos que este tipo de funciones son simétricas en el origen del plano cartesiano.

Incluso lo podemos ver con el área bajo la curva de $L'(x)$, donde se cumple que $L(-x) = -L(x)$ debido a que esta derivada es una función par y a que dicha igualdad es equivalente a $\int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2} dt$.



A partir de $L(x)$ se introdujo una nueva función, llamada **función error** y denotada como $\mathrm{erf}(x)$, la cual es $L(x)$ siendo multiplicada por $2/\sqrt{\pi}$.

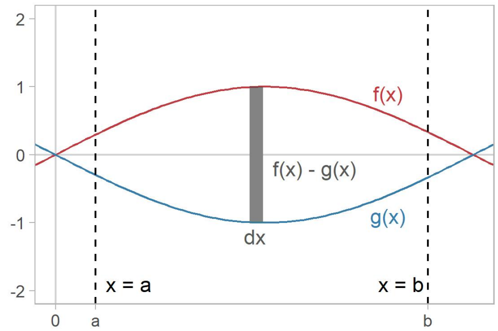
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2. Área entre dos curvas.

La sección anterior aplicamos el TFC 2 para obtener funciones a partir de integrales. Ahora usaremos el TFC 1 de forma geométrica para conocer el área entre dos curvas.

Digamos que nos interesa conocer el área que se forma entre $f(x)$ y $g(x)$, las cuales son continuas para todo x en $\mathbb{R}$. Existen dos métodos para lograrlo, aunque ambos se basan en la idea detrás de la suma de Riemann. Los elegimos según la estrategia que más nos convenga.

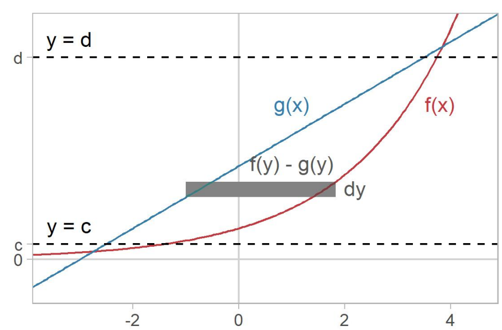
Un método es **dividir el área en rectángulos verticalmente** entre $x = a$ y $x = b$, cuyos anchos son dados por dx y si $f(x) \geq g(x)$, las alturas las medimos como $f(x) - g(x)$.



La superficie A entre las dos curvas será la **suma acumulada** del área de los rectángulos.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

En ciertas ocasiones es más conveniente calcular el área entre dos curvas usando el segundo método, que es **dividirlo horizontalmente en rectángulos** entre $y = c$ e $y = d$. Los cambios infinitesimales ahora ocurren en y, por lo que estará dado por dy y usamos las funciones en términos de aquella variable, implicando que si $f(y) \geq g(y)$, la altura de estos cuadriláteros será $f(y) - g(y)$.



En consecuencia, el área A entre $f(x)$ y $g(x)$ se mide como la suma acumulada de las áreas de los rectángulos, pero con respecto a y.

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Para conocer el área entre curvas con cualquiera de los dos métodos, podemos seguir los siguientes pasos:

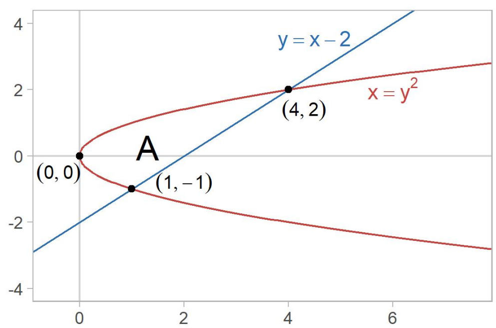
1. Dibujar las curvas.
2. Identificar el integrando y los límites de la integral (**importante**).
3. Calcular la integral usando el TFC 1.

Ejemplo. Calcule el área que se forma entre los puntos de intersección de las funciones $x = y^2$ e $y = x - 2$ usando los dos métodos señalados.

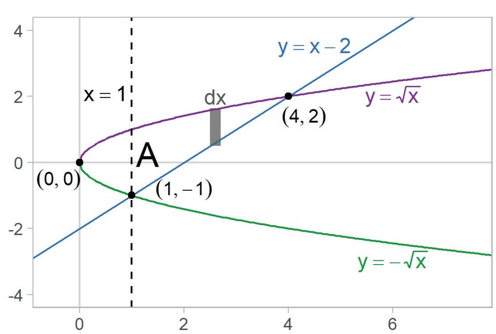
Solución. Para comenzar, veamos en qué puntos las dos funciones se intersectan o, en otras palabras, en qué valores de y son iguales. Si usamos $y = x - 2$, podemos reemplazar x con $x = y^2$, por tanto $y = y^2 - 2$. Al igualar a cero la ecuación, entonces $0 = y^2 - y - 2$, por lo que al factorizar el polinomio de la derecha obtenemos lo siguiente:

$$0 = (y - 2)(y + 1)$$

Así, los valores de y donde se intersectan ambas funciones son $y = -1$ e $y = 2$, mientras que en x (usando cualquiera de las dos) son $x = 1$ y $x = 4$, respectivamente. A continuación tenemos ambas gráficas con los puntos señalados más el origen.



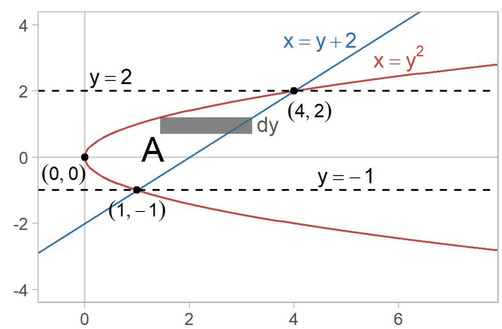
Calculemos el área A comenzando con el primer método (rectángulos verticales). En este caso, las funciones deben estar en términos de x, por lo que en $x = y^2$ tendremos dos fórmulas: $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$. La dificultad es que la curva $y = -\sqrt{x}$ es tanto parte de $x = y^2$ como de $y = x - 2$. Por lo tanto, dividiremos A en dos partes a través de $x = 1$ para evitar ese problema y después las sumaremos.



Entonces, con el primer método calcularemos dos áreas: una desde $x = 0$ hasta $x = 1$ y la otra entre $x = 1$ y $x = 4$. Estos serán los límites de las dos integrales que sumaremos. Por otra parte, en la mitad izquierda las alturas de los rectángulos verticales estará dada por la diferencia entre $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$, mientras que en la derecha será entre $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$. Así, el área A lo calculamos como:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - [-\sqrt{x}])dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - [x-2])dx = 2 \cdot \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 = \frac{9}{2}$$

Ahora usemos el **segundo método** (rectángulos horizontales). En este caso, las funciones están en términos de y, por lo que $y = x - 2$ la trabajamos como $x = y + 2$. Por otra parte, las alturas (anchos) de los rectángulos corresponden solo a la diferencia entre $y+2$ e y^2 y nos movemos verticalmente entre $y = -1$ e $y = 2$, cuyos cambios (ancho vertical) están dados por dy.



Por lo tanto, el área A lo calculamos como:

$$A = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

En este ejemplo usamos ambos métodos, pero no siempre es necesario aquello. Podemos usar uno u otro, según lo que más nos convenga en el momento.