Clase 23. Aplicación de las Integrales: Valor Promedio y Probabilidades.

MIT 18.01: Single Variable Calculus.

Resumen

Otra aplicación relevante de las integrales, es en el cálculo del valor promedio de un conjunto infinito de valores. A partir de aquel, veremos el promedio ponderado y la probabilidad de un evento interpretada a partir de este último.

1. Valor Promedio.

En la Clase 20 vimos parcialmente el valor promedio de una función y se encuentra muy vinculado a la definición de la integral definida.

Sea $f(x)$ una función continua en $a \leq x \leq b$, donde:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Si $n \to \infty$, obtenemos el **valor promedio continuo** de $f(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Demostración. La definición de la integral definida está dada por:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right) = \int_a^b f(x)dx$$

donde Δx es el ancho de los n intervalos adentro de $[a,\ b]$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Multipliquemos a la definición de la integral por el recíproco del ancho de $[a,\ b]$.

$$\frac{1}{b-a} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

El lado izquierdo es equivalente a:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{b-a} \cdot f(x_i)\Delta x \right] \right)$$

Y $\Delta x = (b-a)/n$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{b-a} \cdot f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right] \right) &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \\ \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f(x_i) \right) &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right) &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \quad \text{(Q.E.D)} \end{aligned}$$

La idea del valor promedio continuo es la misma a la del cálculo de la media aritmética: Sumamos un conjunto de valores numéricos y lo dividimos por su cantidad. No obstante, en el primero tenemos infinitos valores, por tanto tomamos un intervalo que los incluyan y, luego, calculamos el cociente entre la integral y el ancho de dicho intervalo.

La similitud entre la media aritmética y el valor promedio continuo podemos verlo al calcularlos usando una función continua. Por ejemplo, el promedio de 5 valores de salida de $f(x) = c$ ($c =$ constante y $x \in \mathbb{R}$) es igual a c:

$$\frac{c+c+c+c+c}{5} = \frac{5c}{5} = c$$

Lo mismo ocurre si calculamos el promedio de infinitos valores de salida de $f(x) = c$:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b c dx = \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) \cdot c = c$$

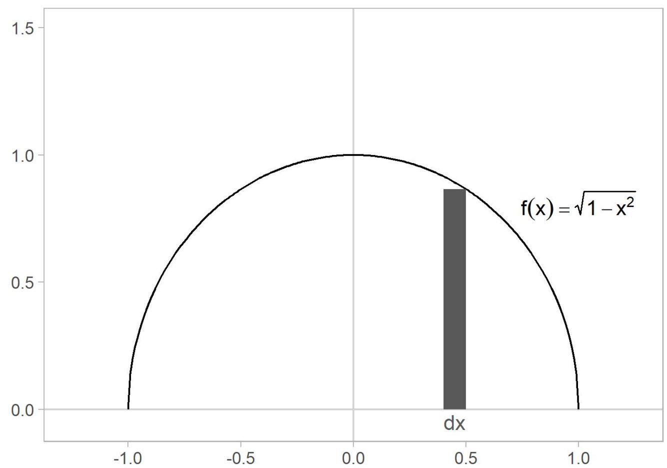
1.1. Ambigüedad del Valor Promedio.

El valor promedio siempre dependerá de la variable con la que lo estemos calculando. En otras palabras, según la medida que usemos obtendremos un resultado que será distinto para otra.

Ejercicio 1. Calcule la altura promedio de un semicírculo unitario positivo con respecto a x.

Solución. La ecuación del círclo unitario es $x^2 + y^2 = 1$ y, al despejar y, resulta en $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Como estamos trabajando con la mitad positiva, usaremos $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, donde $y = f(x)$.

Lo siguiente es graficar la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, remarcando la variable con la que mediremos su altura promedio.



Apliquemos la fórmula del valor promedio continuo para obtener la altura promedio del semicírculo, que denotaremos como h_p. Como la estamos calculando con respecto a x, entonces lo haremos adentro del intervalo $[-1,\ 1]$ (es unitaria).

$$h_p = \frac{1}{1-(-1)} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

De momento no sabemos calcular la antiderivada[1] de $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$, pero podemos deducir que es el área del semicírculo, el cual es igual a $(\pi \cdot r^2)/2$ donde r es el radio. Como este es unitario, entonces $r = 1$. Por lo tanto:

$$h_p = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

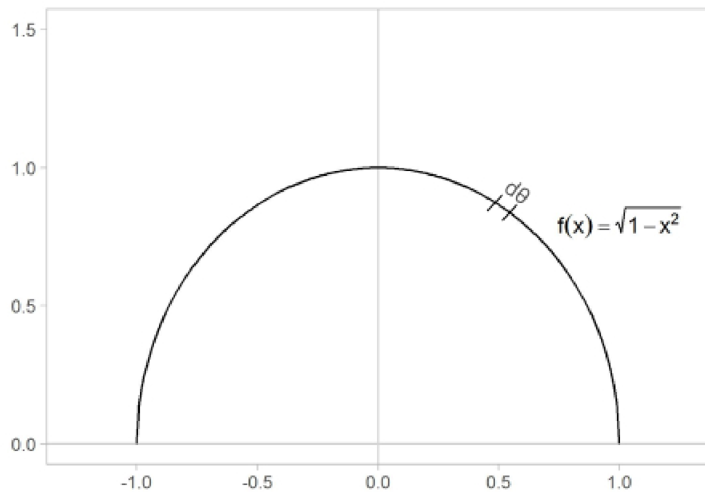
Así, la altura promedio de un semicírculo unitario positivo con respecto a x, es igual a $(\pi/4)$

[1] Necesitamos saber técnicas de integración, las cuales veremos en próximas clases.

Ejercicio 2. Calcule la altura promedio de un semicírculo unitario positivo con respecto a su longitud de arco θ.

Solución. Si bien estamos calculando lo mismo que en el ejercicio anterior, al hacerlo a partir de la longitud de arco del semicírculo va a implicar que obtengamos una altura promedio distinta.

Intuitivamente, lo que haremos es dividir el área bajo la curva del semicírculo a partir del arco y en longitudes iguales.



La longitud de arco s se calcula como $s = \theta \cdot r$, donde θ es el ángulo en radianes tomado desde el centro de un círculo y r es su radio. Como estamos trabajando con un semicírculo unitario, entonces $s = \theta$. Si, por ejemplo, dividimos el arco desde $\theta = 0$ en tres partes, de largo $s = \pi/6$, sus distancias serán ese mismo valor:

$$\left|\frac{\pi}{6} - 0\right| = \left|\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right| = \left|\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6}$$

No obstante, cuando calculamos las mismas distancias con respecto a x, éstas no son iguales.

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(0)\right| \neq \left|\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| \neq \left|\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

Lo anterior explica por qué la altura promedio que calcularemos acá será distinta a la del ejercicio anterior.

Cuando trabajamos en relación a θ en un (semi)círculo unitario, la distancia vertical es $y = \sin(\theta) - 0 = \sin(\theta)$, con $y = f(x)$. En cuanto a la altura promedio calculada a partir del valor promedio continuo, estará en el intervalo $[0,\ \pi]$. Con todo, resulta en:

$$\frac{1}{\pi - 0} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

y veamos que

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx > \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta$$

aunque ambos son las alturas promedios del semicírculo unitario, pero medidos con respecto a distintas variables.

1.2. Promedio Ponderado.

En ciertas ocasiones queremos calcular el promedio de una cantidad determinada de valores, pero en su contexto algunos tienen mayor relevancia que otros. En esos casos conviene usar el **promedio ponderado**, el cual se calcula como:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot w(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)}$$

donde $w(x_i)$ es el valor que le dará el "peso" o relevancia relativa a cada $f(x_i)$.

Ejemplo. En la siguiente tabla se encuentran las notas que obtuvo una estudiante en un curso, cada una con una ponderación distinta. Calcule su promedio final.

Notas	6.7	6.2	5.0	4.2
Porcentaje	20 %	30 %	30 %	20 %

Solución. En este ejemplo nos piden calcular el promedio ponderado. Acá es mejor trabajar los porcentajes como decimales. Por lo tanto, el promedio final que obtuvo la estudiante es el siguiente:

$$\frac{(6.7 \cdot 0.2) + (6.2 \cdot 0.3) + (5.0 \cdot 0.3) + (4.2 \cdot 0.2)}{0.2 + 0.3 + 0.3 + 0.2} = \frac{5.54}{1} = 5.54$$

Si $n \to \infty$ en el promedio ponderado, obtenemos su versión **continua**:

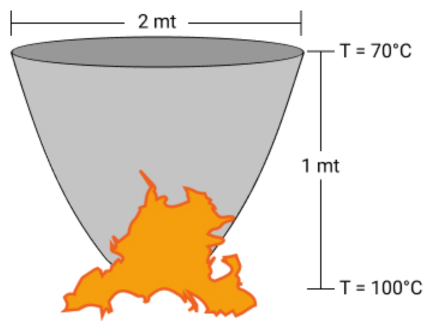
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot w(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)} \right) = \frac{\int_a^b f(x) w(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}$$

1.3. Agua hervida en una caldera.

Al final de la clase anterior calculamos el volumen de 1m de alto y 2m de ancho, que fue de ≈ 1571 Lt. Ahora la volveremos a usar para el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3. Suponga que quiere hervir agua adentro de una caldera. Sin alguna fuente de calor, la temperatura inicial T_0 se mantiene a la del ambiente, que es de 0°C.

Al encender una hoguera abajo de la caldera, la temperatura final del agua T_F varía linealmente en función de la altura h del contenedor como $T_F = (100 - 30h)$°C. Es decir, en el fondo de ella, $T_F = 100$°C y en la parte alta, $T_F = 70$°C.

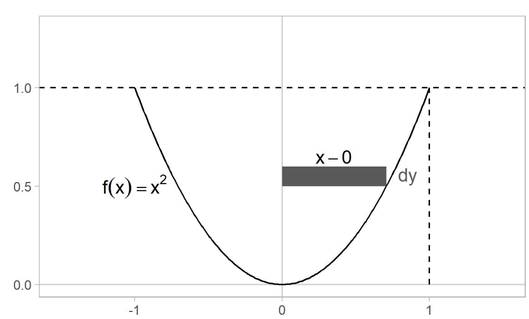


Calcule la cantidad de energía necesaria para llevar el agua a su punto de ebullición a partir de la fórmula $E = T_F \cdot V$, donde E es la energía y V el volumen de la caldera.

Solución. Para obtener la energía E, necesitamos calcular el volumen de la caldera y, para ello, podemos "rebanarla" usando uno de los métodos de los sólidos de revolución visto en la clase anterior.

La caldera podemos modelarla como una parábola $f(x) = x^2$ siendo girada desde su mitad $x \geq 0$ alrededor de $y = f(x)$.

Como la temperatura adentro de la caldera varía con respecto a su altura, la mejor opción es dividir la parábola de forma horizontal, porque se mantendrá constante en cada nivel vertical.



Al hacer girar la mitad $x \geq 0$ de la parábola, el rectángulo que vemos en el gráfico de arriba pasará a ser un **disco**, de manera que podemos usar el volumen de este sólido para calcular el de la caldera, donde el radio de su sección transversal es el largo de la figura inicial y no olvidemos que lo estamos haciendo con respecto a y.

$$V = (\pi r^2)\Delta y = (\pi x^2)\Delta y$$

Y no olvidemos que estamos generando el disco con respecto a y, donde $y = x^2$

$$V = (\pi y)\Delta y$$

Así, la energía necesaria final E_F podemos calcularla como la suma acumulada de las energías de cada rebanada de la caldera, entre $0 \leq y \leq 1$. Veamos que su altura $h = y$ en la parábola.

$$E_F = \int_0^1 E dy = \int_0^1 [T_F \cdot V] dy = \int_0^1 [(100 - 30y) \cdot (\pi y)] dy = \pi \cdot \left[\frac{100y^2}{2} - \frac{30y^3}{3} \right]_0^1 = 40\pi \approx 126$$

Por lo tanto, la cantidad de energía necesaria para hervir el agua adentro de la caldera, es de $\approx 126°\mathrm{C}(\mathrm{m}^3)$.

Ejercicio 4. Calcule la temperatura final promedio que alcanza el agua adentro de la caldera cuando la hoguera ya está encendida.

Solución. En el ejercicio anterior, vimos que en la energía necesaria para hervir el agua en la caldera, la temperatura final (que está en función de su altura) es amplificada o disminuida por el volumen del contenedor. Por lo tanto, la temperatura promedio, que denotaremos como T_P estará ponderada por dicha medida.

$$T_P = \frac{\int_0^1 [(100 - 30y) \cdot (\pi y)] dy}{\int_0^1 (\pi y) dy}$$

El numerador lo calculamos en el ejercicio previo, que fue igual a $(40\pi)°\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^3$. En cuanto al denominador, lo obtuvimos en la clase pasada, pero ahí usamos el método del caparazón cilíndrico. Con el de los discos (el usado acá) deberíamos obtener el mismo resultado: $(\pi/2)$ m^3.

$$\int_0^1 (\pi y) dy = \pi \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \ \mathrm{m}^3$$

Por lo tanto, la temperatura final ponderada la calculamos como:

$$T_P = \frac{\int_0^1 [(100 - 30y) \cdot (\pi y)] dy}{\int_0^1 (\pi y) dy} = \frac{40\pi}{(\pi/2)} = 80°\text{C}$$

2. Probabilidades.

Posiblemente hemos estudiado que la **probabilidad de un evento** A, $P(A)$, lo calculamos como la proporción:

$$P(A) = \frac{\text{Parte}}{\text{Todo}}$$

Esta proporción también podemos interpretarla como un **promedio ponderado**. Recordemos que cuando es continuo, lo calculamos como:

$$\frac{\int_a^b f(x)w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

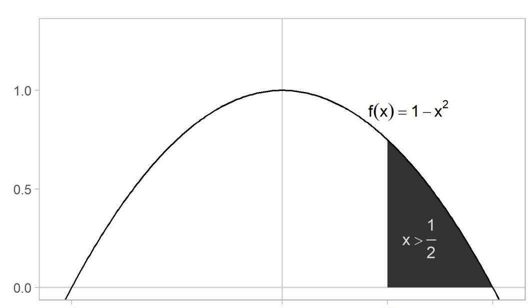
Acá $f(x)$ es constante y toma los números 1 o 0, según si la integral es calculada adentro o no del área del evento. Como el propósito es siempre conocer el primer caso, entonces $f(x) = 1$. Mientras que $w(x)$ es la que refleja la proporción del área con respecto al total.

Así, la probabilidad de un evento se define como sigue:

Definición. Si tomamos aleatoriamente un punto entre $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, la probabilidad de que esté adentro de ese intervalo, $P(x_1 < x < x_2)$, se calcula como:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

Ejemplo 2. Suponga que toma un punto $(x,\ y)$ "aleatoriamente" del intervalo $0 < y < 1-x^2$. Calcule la probabilidad de que x de dicho punto sea mayor a $1/2$.



Solución. Cuando nos dicen que tomamos un punto adentro del intervalo $(0,\ 1-x^2)$ en y, quiere decir que es bajo la curva $f(x) = 1 - x^2$, donde $y = f(x)$, y sobre la recta $y = 0$. Por lo tanto, la probabilidad será el cociente entre el área bajo $f(x)$ para todo $1/2 < x < 1$ y el área total.

$$P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) = \frac{\int_{1/2}^{1}[1 \cdot (1-x^2)]dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx} = \frac{\int_{1/2}^{1}(1-x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx}$$

Para mayor legibilidad, calcularemos las integrales de forma separada:

$$\int_{1/2}^{1}(1-x^2)dx = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = \frac{5}{24} \qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto:

$$P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) = \frac{\int_{1/2}^{1}(1-x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx} = \frac{5/24}{4/3} = \frac{5}{32} \approx 0.17$$