Clase 2. Los Determinantes y el Producto Cruz.

MIT 18.02: Multivariable Calculus.

Resumen

Para comenzar, haremos una revisión breve de otra aplicación del producto punto al calcular el componente de un vector a lo largo (o en dirección) de otro. Posteriormente, nos concentraremos en estudiar los determinantes y el producto cruz.

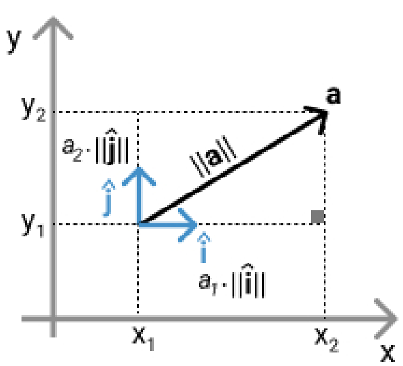
1. Componente de un vector a lo largo de otro.

El producto punto, además de ser útil para evaluar si dos vectores son ortogonales o para conocer la magnitud de uno de ellos, también es de ayuda para obtener el componente de un vector en dirección de (o a lo largo de) otro.

En la clase anterior estudiamos que es posible representar a un vector como la combinación lineal entre sus componentes y vectores unitarios estándar. Por ejemplo:

$$\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} = \langle a_1,\ a_2\rangle$$

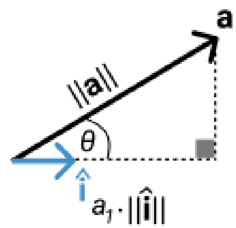
donde $a_1 = |x_2 - x_1|$, $a_2 = |y_2 - y_1|$, $\hat{\mathbf{i}} = \langle 1,\ 0\rangle$ y $\hat{\mathbf{j}} = \langle 0,\ 1\rangle$. A continuación lo vemos de forma gráfica:



En ese sentido, podemos decir que a_1 es el componente del vector **a** que va en la dirección de $\hat{\mathbf{i}}$. Lo mismo se aplica para a_2, pero con respecto a $\hat{\mathbf{j}}$.

Ahora, si bien en este caso es fácil conocer a los componentes[1] de $\mathbf{a}$, busquemos una forma de calcularlos.

Veamos en el componente a_1. Como pudimos observar en el gráfico de arriba, entre $\mathbf{a}$ y $\hat{\mathbf{i}}$ se forma el siguiente triángulo rectángulo:



Nuestro interés es conocer a $a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||$. Si conocemos el $\angle\theta$ y al tener el triángulo rectángulo, podemos obtener este lado a partir del $\cos(\theta)$.

$$\cos(\theta) = \frac{a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||}{||\mathbf{a}||}$$
$$||\mathbf{a}|| \cdot \cos(\theta) = a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||$$

Esta fórmula es útil si conocemos a $\angle\theta$. Si no es el caso, recordemos que es el ángulo entre dos vectores: $\mathbf{a}$ y $\hat{\mathbf{i}}$. Por lo tanto, podemos usar la fórmula geométrica del producto punto y despejar el $\cos(\theta)$ en ella.

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}} = ||\mathbf{a}|| \cdot ||\hat{\mathbf{i}}|| \cdot \cos(\theta)$$
$$\frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}}}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||} = \cos(\theta)$$

Luego, reemplacemos el $\cos(\theta)$ en la ecuación de $a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||$.

$$||\mathbf{a}|| \cdot \cos(\theta) = a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||$$
$$||\mathbf{a}|| \cdot \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}}}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||}\right) = a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||$$
$$\frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}}}{||\hat{\mathbf{i}}||} = a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}||$$

Esta fórmula la podemos generalizar para cualquier par de vectores.

Si tenemos dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no nulos, podemos conocer el componente c del primero a lo

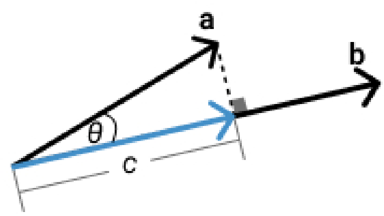
[1] $a_1 \cdot ||\hat{\mathbf{i}}|| = a_1$ porque $||\hat{\mathbf{i}}|| = 1$. Lo mismo con a_2.

largo del segundo por medio de estas dos fórmulas:

$$c = ||\mathbf{a}|| \cdot \cos(\theta) \qquad \text{o} \qquad c = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||} = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||} \right)$$

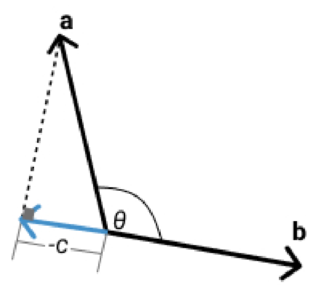
donde c es un **escalar**.

El componente de un vector sobre otro también se conoce como **proyección escalar** de **a** sobre **b**, porque lo que estamos haciendo es proyectar al primero a lo largo del segundo.



Como vemos, la proyección de **a** sobre **b** es un vector y su magnitud es c, el componente del primero a lo largo o en dirección del segundo.

Por otra parte, si $0 < \theta < 90°$, $c > 0$. En cambio, si $90° < \theta < 180°$, $c < 0$.



En Álgebra Lineal se profundiza más sobre proyecciones.

2. Determinantes.

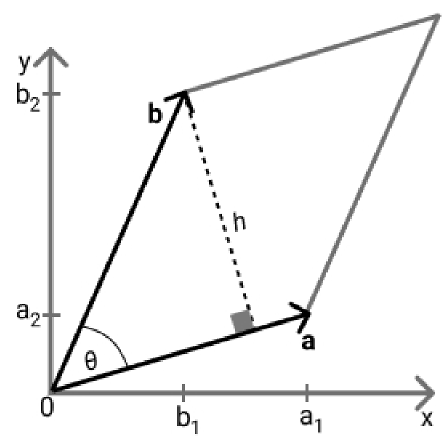
En esta ocasión no profundizaremos en la definición de los **Determinantes**, pero sí es bueno resaltar en que es un **número** (o un escalar) muy utilizado en áreas de la matemática (álgebra lineal, por ejemplo) o la física. Por ahora nos centraremos en su interpretación geométrica y su fórmula la usaremos simbólicamente en la siguiente sección.

2.1. Determinantes en el Plano.

Si tenemos dos vectores no nulos en dos dimensiones $\mathbf{a} = \langle a_1,\ a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1,\ b_2 \rangle$, es posible calcular un número con sus componentes llamado **determinante**:

$$\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

A nivel geométrico, el determinante de **a** y **b** de dos dimensiones coincide con ser el valor absoluto del **área del paralelógramo** que es posible formar entre los dos vectores.



Formalmente, el área de un paralelógramo, que denotaremos como A_P, se calcula como:

$$A_P = \text{base} \cdot \text{altura}$$

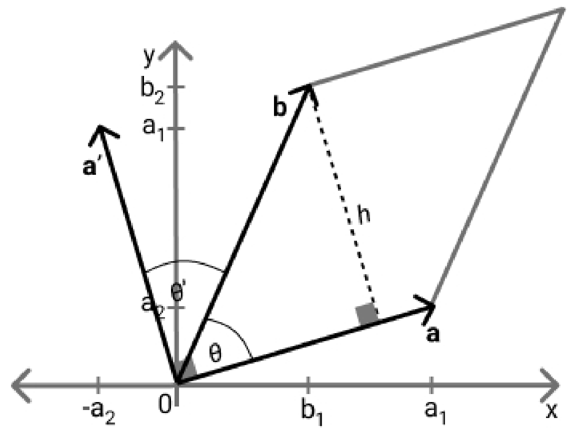
En este caso, la base es $||\mathbf{a}||$ y la altura podemos obtenerla a partir del $\sin(\theta)$:

$$\sin(\theta) = \frac{h}{||\mathbf{b}||}$$
$$||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta) = h$$

Por lo tanto:

$$A_P = ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta)$$

La fórmula de arriba es útil si conocemos al $\angle\theta$, pero nuestra idea es conocer el A_P a partir de las componentes de **a** y **b**. Podríamos trabajar con el producto punto entre ambos, pero necesitamos al $\cos(\cdot)$ y no al $\sin(\cdot)$. Una estrategia que podemos tomar, es rotar al vector **a** en $\pi/2$ radianes (i.e, 90°), obteniendo a $\mathbf{a}' = \langle -a_2,\ a_1 \rangle$.



Veamos que θ' es complementario a θ, donde $\theta + \theta' = \pi/2$, implicando que:

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Debido a que θ y θ' son complementarios, podemos asumir que $\sin(\theta) = \cos(\theta')$. Para demostrarlo, usamos la fórmula de sustracción del coseno[2]:

$$\begin{aligned}
&\sin(\theta) = \cos(\theta') \\
&\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
&\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\theta) \\
&\sin(\theta) = \sin(\theta) \text{ (Q.E.D)}
\end{aligned}$$

Observemos, también, que $||\mathbf{a}'|| = ||\mathbf{a}||$. Por lo tanto, podemos sostener sin alterar nada que:

$$A_P = ||\mathbf{a}'|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \cos(\theta') = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = -a_2 b_1 + a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$$

Ahora bien, **el determinante puede ser positivo o negativo**.

$$\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, el área del paralelógramo A_p es igual al **valor absoluto** del $\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$.

$$A_P = |\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b})|$$

[2]Stewart, et al (2017). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. Pp. 500 y 502.

De modo similar, podemos decir que:

$$\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \pm A_P$$

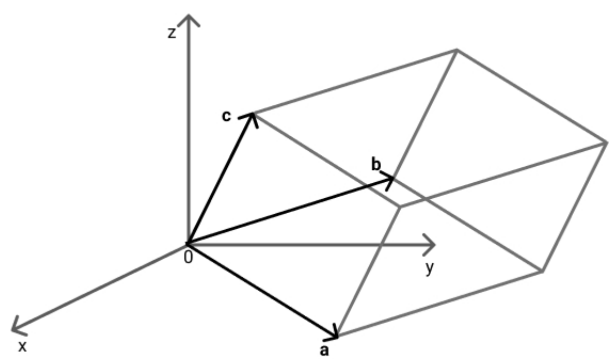
2.2. Determinantes en el Espacio.

Si tenemos tres vectores en tres dimensiones $\mathbf{a} = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1,\ b_2,\ b_3\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1,\ c_2,\ c_3\rangle$, su determinante $\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ se calcula como:

$$\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

El proceso aplicado a esta determinante se conoce como **expansión por la primera fila**. Es un concepto que se entiende mejor al trabajar con matrices, por lo tanto no profundizaremos en ello.

Lo principal a destacar, es que el determinante de tres vectores en el espacio coincide con ser igual al **volumen de un paralelepipedo** (i.e, el sólido del paralelógramo) que se puede formar con ellos.



En particular, denotando al volumen de este paralelepipedo como V_P, podemos decir que:

$$\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \pm V_P$$

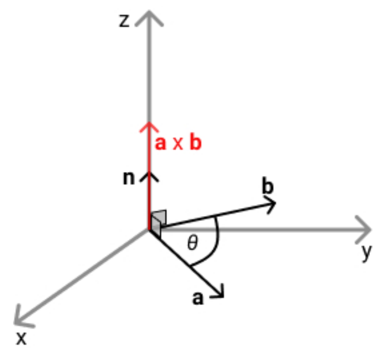
3. Producto Cruz.

Si tenemos dos vectores no nulos y tampoco paralelos **en el espacio** $\mathbf{a} = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1,\ b_2,\ b_3\rangle$, más un tercero unitario $\mathbf{n}$ tal que $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{n} \perp \mathbf{b}$, el **Producto Cruz** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

se define como:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta)) \cdot \mathbf{n}$$

donde θ es el ángulo que se forma entre **a** y **b** al unirlos en sus puntos iniciales.



Una primera caracteristica del producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, es que corresponde a **un vector**. Más específicamente, es **n** escalado por el factor $(||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta))$, lo que implica que:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$$

Otra particularidad de $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, es que **solo se aplica en el espacio**. Es decir, podemos calcular el producto cruz entre dos vectores siempre que **ambos estén en tres dimensiones**.

Una tercera característica del producto cruz, es que será igual al vector **0** si **a** y **b** son **paralelos**. Geométricamente, significa que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. Por lo tanto:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(0)) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\pi)) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

También **a** y **b** serán paralelos si **son iguales**.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

3.1. Magnitud y Dirección del Producto Cruz.

La **magnitud** de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ coincide con ser el **área de un paralelógramo en el espacio**. Recordemos que es el producto escalar $(||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta)) \cdot \mathbf{n}$, por lo tanto:

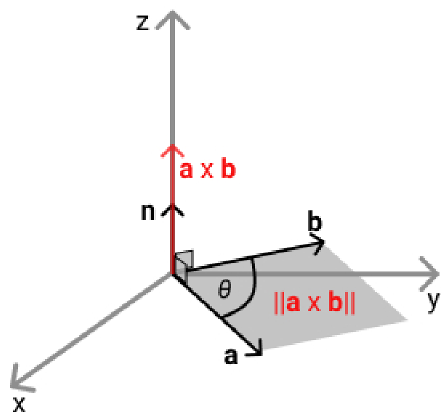
$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = (||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta)) \cdot ||\mathbf{n}||$$

Como **n** es un vector unitario (i.e, $||\mathbf{n}|| = 1$), entonces:

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cdot \sin(\theta)$$

En la sección anterior (pág. 4), vimos que el lado derecho de la expresión de arriba corresponde al área de un paralelógramo generado por dos vectores no nulos **a** y **b**. Es decir:

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = A_P$$



Para conocer la **dirección del producto cruz**, usamos la **regla de la mano derecha**, que consiste en mantenerla abierta de forma opuesta al arco del ángulo, para después cerrarla. La dirección de este vector será el **lugar a donde apunte nuestro dedo pulgar**.

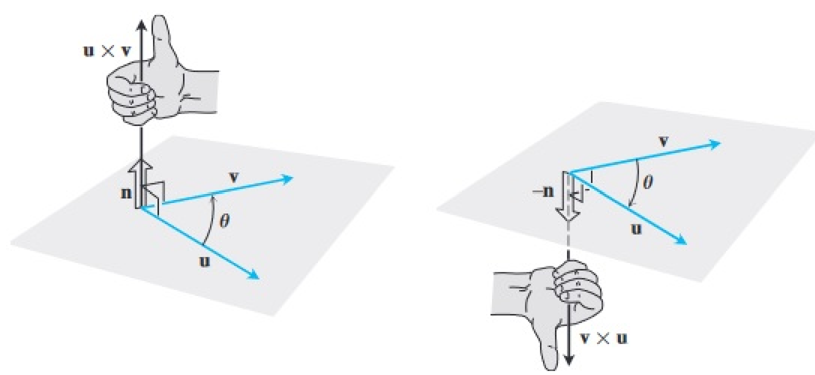


Figura 1: Thomas (2010). *Cálculo. Varias Variables*. Pp. 682-683.

3.2. Propiedades del Producto Cruz.

Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores cualquiera y c y d escalares, el producto cruz cumple con las siguiente propiedades:

1) $(c\mathbf{a}) \times (d\mathbf{b}) = (cd)(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{w}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{w}$

3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ 4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{w} + \mathbf{b} \times \mathbf{w}$

5) $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 6) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{w}$

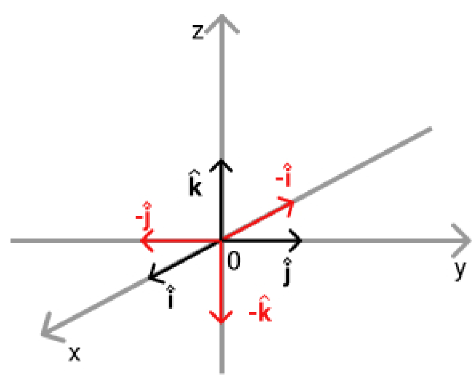
Ahora, sean los vectores unitarios estándar $\hat{\mathbf{i}} = \langle 1,\ 0,\ 0 \rangle$, $\hat{\mathbf{j}} = \langle 0,\ 1,\ 0 \rangle$ y $\hat{\mathbf{k}} = \langle 0,\ 0,\ 1 \rangle$. Aplicando la propiedad 3) vista anteriormente, podemos obtener las siguientes igualdades:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) = \hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}) = \hat{\mathbf{i}}$$
$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{j}}$$

También podemos asegurar que:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

Estas igualdades con los tres vectores unitarios podemos observarlas a continuación:



3.3. Producto Cruz a partir de los componentes.

Hasta ahora sabemos calcular el producto cruz entre dos vectores considerando el ángulo que se forma entre ellos. A partir de las propiedades estudiadas en la subsección anterior, podemos obtener a este vector solo con los componentes de ambos.

Suponga que $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} =& (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times (b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}) \\
=& (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times b_1\hat{\mathbf{i}} + (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times b_2\hat{\mathbf{j}} + (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times b_3\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{a}\times\mathbf{b} =& a_1b_1(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}) + a_2b_1(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}) + a_3b_1(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}) + a_1b_2(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}) + a_2b_2(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}) + a_3b_2(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}) + \\
& a_1b_3(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}) + a_2b_3(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}) + a_3b_3(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}})
\end{aligned}$$

Apliquemos las igualdades de los vectores unitarios vistas en las propiedades del producto cruz en la ecuación de arriba y reordenémosla.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} =& (a_1b_1)\mathbf{0} + (a_2b_2)\mathbf{0} + (a_3b_3)\mathbf{0} + \\
& (a_2b_3)\hat{\mathbf{i}} - (a_3b_2)\hat{\mathbf{i}} - (a_1b_3)\hat{\mathbf{j}} + (a_3b_1)\hat{\mathbf{j}} + (a_1b_2)\hat{\mathbf{k}} - (a_2b_1)\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{a}\times\mathbf{b} =& (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{i}} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{\mathbf{j}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto cruz entre **a** y **b** calculado a partir de sus componentes se obtiene como:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{i}} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{\mathbf{j}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{k}}$$

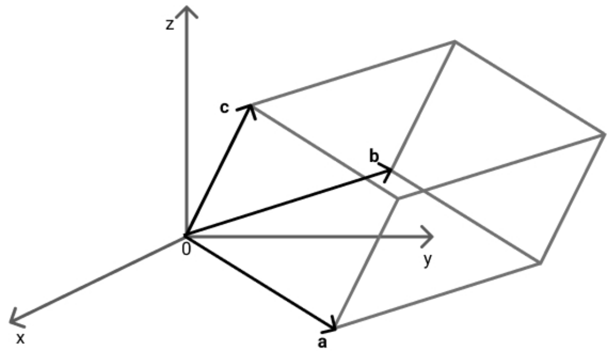
Veamos una forma más sencilla de recordar esta fórmula. Si observamos bien, la ecuación del producto cruz es similar en su forma a la del **determinante en el espacio**, salvo que tenemos vectores en ella. Por lo tanto, es posible escribirla **simbólicamente** como:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Ojo que solo escribimos el producto cruz como un determinante de forma simbólica, ya que éste último, en realidad, nos entrega un valor escalar y no vectorial, pero es útil para recordar más fácilmente su fórmula.

3.4. El Triple Producto Escalar.

Antes de terminar, volvamos a estudiar el volumen de un paralelepipedo V_P generado por **a**, **b** y **c**.



Demostremos que:

$$V_P = |\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})|$$

Demostración. En términos generales, el volumen de un sólido como el paralelepipedo se calcula de la siguiente manera:

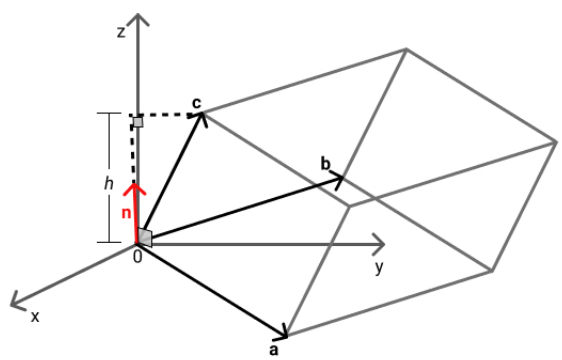
$$V_P = A(\text{base}) \cdot h$$

donde $A(\text{base})$ es el área de su base y h su altura.

La base de este paralelepipedo es un paralelógramo, el cual coincide con estar formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Por lo tanto, su área podemos calcularla como la magnitud del producto cruz entre ambos.

$$A(\text{base}) = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$$

En cuanto a la altura del paralelepipedo, como es perpendicular a su base, podemos obtenerla como el componente c_3 de $\mathbf{c}$ en dirección de un vector $\mathbf{n}$ unitario y ortogonal a dicho plano.



Es decir:

$$h = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}$$

Como el vector unitario $\mathbf{n}$ es perpendicular a la base del paralelepipedo, entonces es equivalente al $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ normalizado, porque al ser ortogonal a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$, también lo es a aquella superficie.

$$h = \mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||}, \quad \text{donde } \mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||} \right)$$

Por lo tanto:

$$V_P = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| \cdot \left(\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||} \right) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

La operación $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ se conoce como **Triple Producto Escalar**, puesto que es el producto punto entre el vector de la izquierda y el producto cruz de la derecha.

Para calcular un triple producto escalar, siempre comenzamos con el producto cruz y después con el producto punto.

Entonces, sean $\mathbf{c} = \langle c_1,\ c_2,\ c_3 \rangle$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle (a_2b_3 - a_3b_2),\ (a_3b_1 - a_1b_3),\ (a_1b_2 - a_2b_1) \rangle$, el volumen del paralelepipedo V_P corresponde a:

$$\begin{aligned}
V_P &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
&= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
V_P &= |\det(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})| \quad \text{(Q. E. D)}
\end{aligned}$$

El volumen del paralelepipedo podemos interpretarlo como el determinante entre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en el espacio, el cual es igual al triple producto entre $\mathbf{c}$ y el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.