Clase 23. Ecuaciones Diferenciales y la Matriz Exponencial.

Curso ‘Linear Algebra’ del MIT.

Resumen

La potencia de una matriz, así como sus eigenvalores y eigenvectores, pueden llegar a ser muy útiles para resolver **sistemas de ecuaciones diferenciales**. En esta clase nos centraremos en aquellas de primer orden y nos encontraremos con una nueva matriz llamada **Matriz exponencial**, la cual es parte de la solución de dicho sistema.

1. Ecuaciones Diferenciales (*Differential Equations*).

Las ecuaciones diferenciales son aquellas que involucran a una(s) función(es) y sus **derivadas**. La **solución general** corresponde a una familia de funciones que difieren por una constante y que satisfacen a la derivada de la ecuación original.

Por ejemplo, resolvamos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

usando el método de separación de variables[1]. Para ello, multipliquemos por $(1/y)$ y por dx, lo que nos lleva a lo siguiente:

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

Luego, integremos esta ecuación.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$$

$$\ln(|y|) = x^2 + C$$

[1]Existen mejores técnicas, pero usaré ésta porque es la que manejo hasta ahora. En los apuntes sobre integrales del curso de Cálculo de una Variable hay más detalles de ella.

Al usar la definición del logaritmo natural para encontrar a x, obtenemos la siguiente solución general.

$$y = \exp(x^2 + C) = \exp(x^2) \cdot \exp(C) = C \cdot \exp(x^2)$$

Para comprobar que esta solución satisface a la ecuación original, simplemente la derivamos.

$$\frac{dy}{dx} = (2x) \cdot C \exp(x^2) = 2xy$$

Si queremos obtener una **solución particular** de una ecuación diferencial, debemos definir una **condición inicial** la cual es un punto (x_0, y_0) por donde pasa la curva de una de las ecuaciones. Para ello, lo reemplazamos en ella para conocer el valor de C en aquel lugar y, posteriormente, se sustituye la constante en la ecuación general.

Por ejemplo, supongamos que nos interesa una solución de $y = C \cdot \exp(x^2)$ que pase por $(2,\ 2)$. Primero, hacemos el reemplazo en esta ecuación para obtener a C.

$$\begin{aligned} 2 &= C \cdot \exp(2^2) \\ \frac{2}{\exp(4)} &= C \\ 2 \cdot \exp(-4) &= C \end{aligned}$$

Luego, reemplazamos a C en la solución general para conocer una particular que pasa por $(2,\ 2)$.

$$y = (2 \cdot \exp(-4)) \cdot \exp(x^2) = 2 \cdot \exp(x^2 - 4)$$

En esta ocasión nos concentraremos en **ecuaciones diferenciales lineales de primer orden**, las cuales siguen la siguiente forma:

$$P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = G(x);\ (P(x) \neq 0)$$

donde:

1. **Lineal** $\rightarrow$ Puede ser escrita como una combinación lineal de la derivada de y.
2. **Primer orden** $\rightarrow$ La derivada mayor es de primer orden.

En particular, estaremos enfocados en **sistemas** de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden **no homogéneas y con coeficientes constantes**. En otras palabras, donde $P(x)$, $Q(x)$ y $G(x)$ son constantes, sumado a que $G(x) \neq 0$ (i.e, no homogénea).

1.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

En esta clase nuestro interés se centra en la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dt} = u$$

la cual tiene como solución general:

$$u(t) = C \cdot \exp(t)$$

Esta ecuación se caracteriza por el hecho de que, al multiplicar el lado derecho por un factor a, la variable t de la solución general aumenta por el mismo valor.

$$\frac{du}{dt} = au \Rightarrow u(t) = C \cdot \exp(at)$$

Ahora veamos el siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes**.

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \cdots + a_{1,n}u_n \\
\frac{du_2}{dt} &= a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \cdots + a_{2,n}u_n \\
&\vdots \\
\frac{du_n}{dt} &= a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \cdots + a_{n,n}u_n
\end{aligned}$$

Es posible escribir este sistema en forma matricial, estableciendo que:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}; \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales inicial podemos reescribirlo del siguiente modo:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}$$

Como se puede apreciar, es similar a la ecuación diferencial $u'(t) = au(t)$ que vimos antes y su solución general también es parecida a la de ella:

$$\vec{u} = \exp(\lambda t) \cdot \vec{x}$$

En este caso, λ es el eigenvalor de A y $\vec{x}$ su eigenvector[2]. Podemos comprobarlo al reemplazar al vector $\vec{u}$ en la ecuación diferencial.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}$$
$$\frac{d}{dt}\exp(\lambda t) \cdot \vec{x} = A \cdot \exp(\lambda t) \cdot \vec{x}$$

El eigenvector $\vec{x}$ consiste de entradas constantes, de manera que podemos dejarlo de lado en la derivada del lado izquierdo de la ecuación diferencial.

$$\lambda \cdot \exp(\lambda t) \cdot \vec{x} = A \cdot \exp(\lambda t) \cdot \vec{x}$$
$$\lambda\vec{x} = A\vec{x}$$

Que hayamos obtenido la definición del eigenvalor y eigenvector de una matriz en esta ecuación diferencial no es una coincidencia. Su origen proviene, justamente, para resolver sistemas cuadrados del tipo $\vec{u}\,'(t) = A\vec{u}(t)$.

Por otra parte, esto nos muestra que es posible llevar un problema de ecuaciones diferenciales a uno de álgebra lineal, el cual además permite facilitar el cálculo de sus soluciones.

Ejemplo 1. Calcule las soluciones particulares del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para $\vec{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2$$
$$\frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2$$

Solución. Comencemos pasando las constantes de los lados derechos de las ecuaciones a una matriz A de coeficientes.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Si nos damos cuenta, el $\det(A) = 0$. Es decir, la matriz A es singular y, por consiguiente, uno de sus eigenvalores es $\lambda_1 = 0$. En ese sentido, el otro corresponde a $\lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = -3$. Lo

[2]En esta clase nos centraremos solo en sistemas cuadrados, de manera que A siempre será de $n \times n$.

anterior podemos comprobarlo al calcular las raíces del polinomio característico.

Debido a que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos dar por sentado que cada eigenvalor tiene su eigenvector asociado y, en consecuencia, que estos últimos son linealmente independientes entre sí.

Calculemos al eigenvector $\vec{x}_1$ el cual tiene asociado a $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{aligned}(A - I\lambda_1)\vec{x}_1 &= \vec{0}\\ A\vec{x}_1 &= \vec{0}\end{aligned}$$

Es claro que, al pasar a la matriz $A \to U$, la segunda entrada pivote será igual a cero.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Por lo tanto:

$$U\vec{x}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al conocer a la entrada x_1 podemos concluir que el eigenvector $\vec{x}_1$ es:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Continuemos con el eigenvalor $\vec{x}_2$ de $\lambda_2 = -3$.

$$(A - I\lambda_2)\vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al pasar a $(A - I\lambda_2) \to U$, obtenemos que:

$$(A - I\lambda_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Por lo tanto, al calcular el espacio nulo de U o, en otras palabras, al buscar una base para el eigenespacio en:

$$U\vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el eigenvector $\vec{x}_2$ corresponde a:

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En ese sentido, hemos obtenido un **conjunto de soluciones** de $\vec{u}$.

$$\vec{u}_1 = \vec{x}_1 \exp(\lambda_1 t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(0t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{u}_2 = \vec{x}_2 \exp(\lambda_2 t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(-3t)$$

Cuando tenemos un conjunto de soluciones, la **solución general** de un sistema de ecuaciones diferenciales se rige bajo el **principio de superposición**. En otras palabras, $\vec{u}$ corresponde a una combinación lineal de dicho conjunto.

$$\vec{u}(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(-3t)$$

Nuestro propósito es buscar una **solución particular** del sistema a partir de $\vec{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aquello lo hacemos al igual que con una ecuación diferencial: buscamos los valores de las constantes c_1 y c_2 para los cuales se cumple la condición inicial.

Así, en $t = 0$ tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(-3 \cdot 0) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos reescribir esta ecuación como

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

La **matriz** que vemos en la ecuación de arriba corresponde a la de **eigenvectores** S. Como $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son linealmente independientes, podemos dar por asegurado que existe S^{-1}. Para conocerla, usemos el método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \Longrightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Luego, multipliquemos a S^{-1} a la izquierda de ambos lados de la ecuación.

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

En otras palabras:

$$c_1 = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{1}{3}$$

Por consiguiente, al reemplazar a c_1 y c_2 en la solución general, obtenemos que para $t = 0$ la **solución particular** es:

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \exp(-3t) \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \cdot \exp(-3t) \end{aligned}$$

2. Comportamiento de la solución de una ecuación diferencial.

En una ecuación diferencial estamos calculando las funciones que nos permiten obtener una tasa de cambio continua/instantánea conocida. En ese sentido, al obtener una solución podríamos estar interesados en evaluar su comportamiento en determinados contextos.

Analicemos la solución general del ejemplo anterior. Para ello, asumamos que t es una variable de tiempo, de manera que $t \geq 0$ siempre.

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \cdot \exp(-3t)$$

Hasta ahora sabemos qué valores toma el sistema al inicio o en $t = 0$. En forma escalar, los valores de las dos funciones son $u_1(0) = 1$ y $u_2(0) = 0$.

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\exp(-3 \cdot 0) = 1 \\ u_2(0) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\exp(-3 \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, como las funciones de la solución general van en constante cambio, sería interesante saber cómo se comportan a medida que el tiempo $t \to \infty$. Aquello podemos observarlo al evaluar el límite de $\exp(-3t)$, donde

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-3t) = 0$$

Por lo tanto:

$$\vec{u}(\infty) \approx \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

En "lenguaje" de ecuaciones diferenciales decimos que el sistema alcanza un **estado estable** (*steady state*) a medida que tiende al infinito y éste corresponde al vector $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

2.1 Información dada por los Eigenvalores.

Los **eigenvalores** de A también nos entregan información sobre el comportamiento que puede tener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales.

1. Estabilidad. Esta condición corresponde a los valores para los cuales $u(t) \to 0$ para cualquier condición inicial. Aquello se cumple cuando $\exp(\lambda t) \to 0$ y esto sucede en la siguiente situación:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$$

donde Re es la parte real de los eigenvalores λ_i, ya que no olvidemos que pueden ser números complejos[3].

Supongamos que $\lambda_i = a + bi$ (i.e, un número complejo). Esto significa que en la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\exp(\lambda_i t) = \exp([a + bi]t) = \exp(at) \cdot \exp(bit)$$

donde $\mathrm{Re}(\lambda_i) = at$ y $\mathrm{Im}(\lambda_i) = bit$ (la parte imaginaria).

La idea es evaluar qué ocurre con la solución general $u(t)$ a medida que el tiempo t avanza (i.e, $t \to \infty$). Veamos qué ocurre con la parte imaginaria $\exp(bit)$.

A partir de la fórmula de Euler[4] podemos establecer que:

$$\exp(bit) = \cos(bt) + i\sin(bt)$$

[3]Como lo vimos en la Clase 21.

[4]$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Como el propósito es ver a qué valor crece $\exp(bit)$, entonces usamos su valor absoluto.

$$|\exp(bit)|$$

Debido a que el valor absoluto de un número complejo es $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, entonces:

$$|\exp(bit)| = \sqrt{\cos^2(bt)+\sin^2(bt)} = \sqrt{1} = 1$$

En otras palabras, independiente del valor que tome t, $\text{Im}(\lambda_i) = \exp(bit) = 1$.

$$\exp(\lambda_i t) = \exp([a+bi]t) = \exp(at)\cdot 1 = \exp(at); \quad \text{para cualquier } t \geq 0$$

Por consiguiente, la única posibilidad de que el sistema alcance **estabilidad**[5] o, en otras palabras, que $u(t) \to 0$, es que

$$\text{Re}(\lambda_i) = at < 0$$

puesto que en aquel caso $\exp(\lambda_i t) \to 0$.

2. Estado Estable. Anteriormente vimos que esta condición corresponde a cuando la solución general, en cierto periodo t, toma un valor constante. Incluyendo ahora el caso de tener eigenvalores λ_i complejos, aquello ocurre cuando:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{y} \quad \text{Re}(\lambda_i) < 0,\ \text{para } i > 1$$

3. Crecimiento Infinito. Es posible asegurar que la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales va a crecer sin estabilizarse cuando los eigenvectores son mayores a cero. Para el caso de los complejos, cuando:

$$\text{Re}(\lambda) > 0$$

2.1.1 Estabilidad para A de 2×2.

Una forma sencilla de evaluar la condición de estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales, es a partir de una matriz de 2×2.

Asumamos que existen los eigenvalores de A y que son complejos (de manera que se aplican también a los reales). Esto significa que:

$$\text{Re}(\lambda_1) < 0 \quad \text{y} \quad \text{Re}(\lambda_2) < 0$$

[5] Si el eigenvalor λ_i es real, entonces solo tiene que ser negativo para que haya estabilidad.

Sin calcular los eigenvalores de A sabemos que podemos tener una pista de ellos al calcular su **traza** y **determinante**. Si ambos son negativos, implica que:

$$\text{tr}(A) = \text{Re}(\lambda_1) + \text{Re}(\lambda_2) < 0 \quad \text{y} \quad \det(A) = \text{Re}(\lambda_1) \cdot \text{Re}(\lambda_2) > 0$$

Por lo tanto, podemos garantizar **estabilidad** en el sistema de ecuaciones diferenciales sin conocer los eigenvalores de A si:

1. $\text{tr}(A) < 0$.
2. $\det(A) > 0$.

Las dos condiciones en conjunto deben cumplirse. Con la primera, por si sola, aún la solución general puede tener crecimiento infinito.

3. Desacoplando un Sistema de Ecuaciones Diferenciales.

En la sección 1 resolvimos un sistema de ecuaciones diferenciales utilizando los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes A. Cuando tiene n eigenvectores linealmente independientes, podemos resolver este sistema usando la matriz diagonalizada Λ.

Volvamos al sistema

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}$$

donde A es una matriz de $n \times n$ y tiene n eigenvectores linealmente independientes.

Luego, introduzcamos un vector de incógnitas $\vec{w}$ y establezcamos que:

$$\vec{u}(t) = S\vec{w}$$

con S siendo la matriz de eigenvectores de A.

Reemplacemos a $\vec{u}(t)$ en el sistema de ecuaciones[6].

$$\frac{dS\vec{w}}{dt} = A(S\vec{w})$$
$$S\frac{d\vec{w}}{dt} = A(S\vec{w})$$

[6]No olvidemos que las entradas de S son escalares.

Multipliquemos a la izquierda de ambos lados de la ecuación por S^{-1}.

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = S^{-1}AS\vec{w}$$

La clase anterior estudiamos que podemos diagonalizar a la matriz A como $\Lambda = S^{-1}AS$. Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \Lambda\vec{w}$$

donde:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{bmatrix}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales distinto al inicial $\vec{u}\ '(t)$, el cual tiene la peculiaridad de que **desacopla** o separa el sistema. En otras palabras, cada variable no es dependiente de la otra, como lo era a un comienzo. Veámoslo al escribirlo en forma escalar.

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= \lambda_1 w_1(t) \\ \frac{dw_2}{dt} &= \lambda_2 w_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dw_n}{dt} &= \lambda_n w_n(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada solución general de las ecuaciones diferenciales de arriba será:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ w_2(t) &= c_2 \exp(\lambda_2 t) \\ &\vdots \\ w_n(t) &= c_n \exp(\lambda_n t) \end{aligned}$$

En otras palabras:

$$\vec{w}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ c_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \vdots \\ c_n \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix}$$

Al reemplazar a $\vec{w}(t)$ en la igualdad $\vec{u}(t) = S\vec{w}$, obtenemos la solución general del sistema.

$$\begin{aligned}
\vec{u}(t) &= S\vec{w} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ c_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \vdots \\ c_n \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix} \\
\vec{u}(t) &= c_1 \exp(\lambda_1 t)\vec{x}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t)\vec{x}_2 + \cdots + c_n \exp(\lambda_n t)\vec{x}_n
\end{aligned}$$

Conocer la solución general de esta forma solo es posible si A de $n \times n$ tiene n **eigenvectores linealmente independientes**.

4. Matriz Exponencial.

Hasta ahora hemos visto dos formas para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Ahora revisaremos una tercera que es menos restrictiva que la anterior y es la más usada.

Al inicio señalamos que la ecuación diferencial base de esta clase era:

$$\frac{du}{dt} = au$$

cuya solución general es $u(t) = C\exp(at)$.

Interpretemos la ecuación diferencial de arriba de otra forma, pero sin alterarla, señalando que a es una matriz de 1×1. Todo se mantiene igual, su solución general sigue siendo $u(t) = C\exp(at)$. Lo que sí tendremos que modificar, es el análisis de la función exponencial $\exp(at)$ cuando dicha matriz es de mayor dimensión.

Digamos que el sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}$$

donde A es de $n \times n$ y tiene como solución general:

$$\vec{u}(t) = C\exp(At)$$

Hemos seguido el razonamiento inicial y obtuvimos la expresión de arriba. Probablemente nos preguntemos cómo calculamos un número exponencial elevado a una matriz y esto es menos raro de lo que podríamos pensar.

Formalmente, una **función exponencial** se define como la siguiente **serie de Taylor**.

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por lo tanto, la expresión $\exp(at)$ de la solución general $u(t) = C\exp(at)$ corresponde a:

$$\exp(at) = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$$

Para verificar que satisface a la ecuación diferencial, usemos esta expansión en la solución general y derivémosla.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt}(C\exp(at)) \\
&= C \cdot \frac{d}{dt}\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= C \cdot \left(a + a^2 t + \frac{a^3 t^2}{2!} + \cdots\right) \\
&= C \cdot a \cdot \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \cdots\right) \\
&= a \cdot C\exp(at) \\
\frac{du}{dt} &= au
\end{aligned}$$

En ese sentido, podemos tomarnos de este razonamiento para tener una fórmula que nos permita calcular $\exp(At)$, la cual corresponde a:

$$\exp(At) = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\ ;\ (I = \text{matriz identidad})$$

Como vemos, es una suma de matrices que resulta en otra llamada **Matriz Exponencial**.

Podemos comprobar que la matriz exponencial $\exp(At)$ es parte de la solución general al calcular la derivada de $\vec{u}(t) = C\exp(At)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{d}{dt} C \cdot \exp(At) \\
&= C \cdot \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= C \cdot \left(A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right) \\
&= C \cdot A\left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots\right) \\
&= A \cdot C \exp(At) \\
\frac{d\vec{u}}{dt} &= A\vec{u}
\end{aligned}
$$

Ahora, supongamos que A de $n \times n$ tiene n eigenvectores linealmente independientes. Esto significa que podemos factorizarla como:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

Reemplacemos esta descomposición de A en la serie de Taylor de $\exp(At)$.

$$
\begin{aligned}
\exp(At) &= I + S\Lambda S^{-1}t + \frac{(S\Lambda S^{-1}t)^2}{2!} + \frac{(S\Lambda S^{-1}t)^3}{3!} + \cdots \\
&= I + S\Lambda S^{-1}t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}t^2}{2!} + \frac{S\Lambda^3 S^{-1}t^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}
$$

En el lado derecho de la ecuación, factoricemos por S a la izquierda y por S^{-1} en la derecha.

$$\exp(At) = S\left(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\Lambda^3 t^3}{3!} + \cdots\right) S^{-1}$$

Si nos damos cuenta, el paréntesis del lado derecho de la ecuación de arriba corresponde a:

$$\exp(\Lambda t) = I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\Lambda^3 t^3}{3!} + \cdots$$

Por lo tanto, cuando A tiene n eigenvectores linealmente independientes, la matriz exponencial corresponde a:

$$\exp(At) = S \exp(\Lambda t) S^{-1}$$

Y la solución general del sistema para dicho caso, es:

$$\vec{u}(t) = C \cdot S \exp(\Lambda t) S^{-1}$$

donde

$$\exp(\Lambda t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix}$$