Clase 4. Ecuaciones de Planos y Sistemas Cuadrados de Ecuaciones.

MIT 18.02: Multivariable Calculus.

Resumen

A partir de lo que hemos aprendido sobre vectores y matrices, profundizaremos sobre ecuaciones de planos y sistemas cuadrados de estos últimos. Estudiaremos la cantidad de soluciones que pueden tener tanto desde un enfoque geométrico como matricial, por medio del determinante de la matriz de coeficientes.

1. Ecuaciones de planos.

Un **plano** en el espacio está definido por la siguiente ecuación lineal:

$$Ax + By + Cz = D$$

donde A, B, C y D son constantes (o escalares).

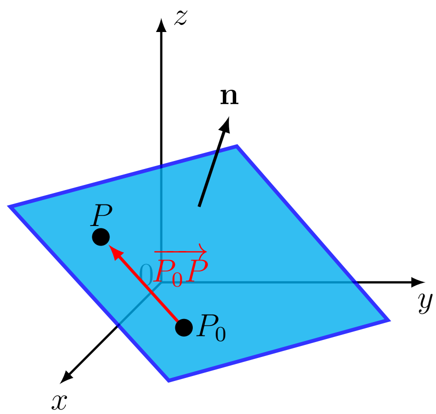
Para conocer la ecuación de un plano, necesitamos **dos elementos**:

1. Un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ por el cual pasa el plano.
2. Un vector $\mathbf{n}$ ortogonal al plano o **vector normal**.

A nivel geométrico, la **dirección** del vector normal **indica el nivel de inclinación del plano**. En ese sentido, coincide con ser $\mathbf{n} = \langle A,\ B,\ C\rangle$.

Teniendo a $\mathbf{n}$ y a P_0, consideremos un segundo punto $P(x,\ y,\ z)$ ubicado en cualquier lugar del plano y construyamos el vector:

$$\overrightarrow{P_0P} = \langle x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\rangle$$



Como $\overrightarrow{P_0P}$ se ubica en el plano, debe cumplirse que:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Esta igualdad se conoce como la **ecuación vectorial del plano**. Al resolver el producto punto se obtiene la **ecuación cartesiana del plano**.

$$\langle A,\ B,\ C\rangle \cdot \langle x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\rangle = 0$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Para conocer la ecuación general del plano que vimos al inicio de esta sección, solo tenemos que continuar resolviendo el lado izquierdo de la ecuación cartesiana de la siguiente manera:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$
$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Como P_0 y $\mathbf{n}$ son constantes, podemos establecer que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$. Por lo tanto,

$$Ax + By + Cz = D$$

Ejemplo 1. Encuentre la ecuación de un plano que pasa por el punto $P_0(2,\ 1,\ -1)$ y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \langle 1,\ 5,\ 10\rangle$.

Solución. Como P_0 y $\mathbf{n}$ están en el plano, podemos usar su ecuación cartesiana para resolver este ejemplo.

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x-2) + 5 \cdot (y-1) + 10 \cdot (z-(-1)) &= 0 \\ x + 5y + 10z + 3 &= 0 \\ x + 5y + 10z &= -3 \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Evalúe si $\mathbf{v} = \langle 1,\ 2,\ -1 \rangle$ y el plano $x + y + 3z = 5$ son ortogonales, paralelos o no poseen ninguna de las dos características entre sí.

Solución. Definamos al vector $\mathbf{n} = \langle 1,\ 1,\ 3 \rangle$ ortogonal al plano $x + y + 3z = 5$. Con esta información podemos evaluar que:

- Si $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v}$ es paralelo al plano.
- Si $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal al plano.

Sea θ el ángulo formado entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{v}$. Las conjeturas de arriba se pueden probar mediante

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{n}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos(\theta)$$

Si $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ porque $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. En cambio, si $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$ significa que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \pm ||\mathbf{n}|| \cdot ||\mathbf{v}||$, ya que $\cos(0) = 1$ y $\cos(\pi) = -1$. A continuación lo evaluamos.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \langle 1,\ 1,\ 3 \rangle \cdot \langle 1,\ 2,\ -1 \rangle = 1 + 2 - 3 = 0$$

Por lo tanto, $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$. Esto implica que $\mathbf{v}$ es paralelo al plano $x + y + 3z = 5$.

1.1. Relevancia del vector normal.

El **vector normal** de un plano es relevante porque indica la dirección de su inclinación. Además, si es ortogonal a más de uno, significa que estas superficies son paralelas entre sí.

Si conocemos la ecuación del plano, podemos buscar a su vector normal calculando el producto cruz dos vectores que pertenezcan a éste.

Ejemplo[1] 2. Obtenga la ecuación de un plano que pasa por los puntos $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(2,\ 0,\ 0)$ y $C(0,\ 3,\ 0)$.

[1]Fuente: Thomas (2010). *Cálculo. Varias Variables.* Pp. 692.

Solución. Construyamos a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \langle 2-0,\ 0-0,\ 0-1\rangle \\ &= \langle 2,\ 0,\ -1\rangle\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \langle 0-0,\ 3-0,\ 0-1\rangle \\ &= \langle 0,\ 3,\ -1\rangle\end{aligned}$$

Luego, calculemos el producto cruz entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (0-(-3))\hat{\mathbf{e}}_1 - (-2-0)\hat{\mathbf{e}}_2 + (6-0)\hat{\mathbf{e}}_1 = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 + 6\hat{\mathbf{e}}_3$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \langle 3,\ 2,\ 6\rangle$ es ortogonal al plano que buscamos conocer. Para obtenerlo, podemos usar la ecuación cartesiana del plano con dicho vector.

$$\begin{aligned} 3\cdot(x-0) + 2\cdot(y-0) + 6\cdot(z-1) &= 0 \\ 3x + 2y + 6z - 6 &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

2. Sistemas cuadrados de ecuaciones lineales.

Un **sistema cuadrado de ecuaciones lineales** es aquel que consiste de n ecuaciones y n incógnitas. Para conocer sus soluciones, aplicaremos lo estudiado sobre matrices en la clase anterior. Nos concentraremos en aquellos de 3×3.

2.1. Cantidad de soluciones de un sistema lineal de 3x3.

Considere un sistema de ecuaciones lineales de 3×3. A nivel geométrico, cada igualdad forma un plano y la solución indica si se intersectan estas figuras así como en la cantidad de puntos que lo hace. En la siguiente imagen se resume aquello.

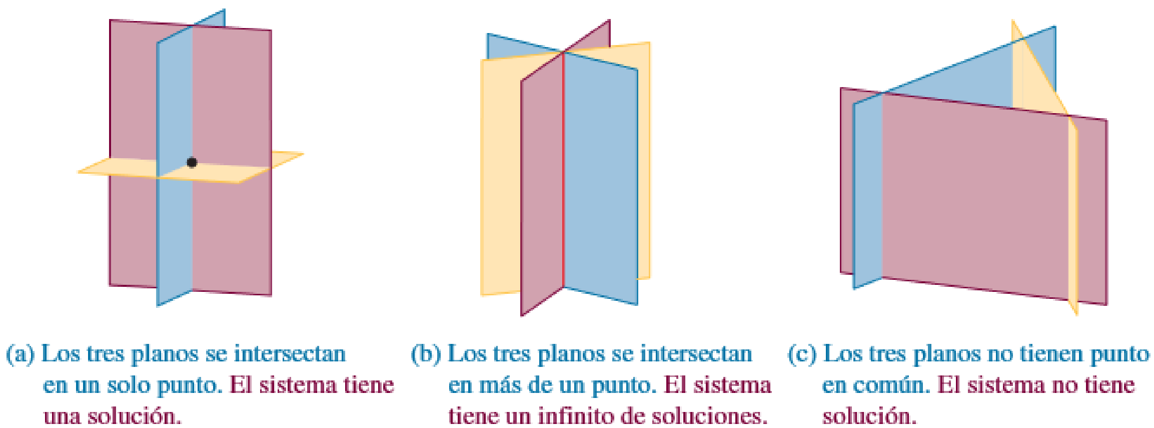


Figura 1: Stewart, et. al (2017). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo.* Pp. 643.

Profundicemos un poco en la búsqueda de las soluciones de un sistema cuadrado usando matrices.

2.2. Soluciones de un sistema lineal cuadrado usando matrices.

En la clase anterior vimos que un sistema de ecuaciones lineales puede ser representado como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si el sistema es cuadrado, la matriz $\mathbf{A}$ también lo será y, por tanto, podemos buscar su inversa. Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, significa que el sistema tiene **una única solución** dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

En un sistema de 3×3 quiere decir que los tres planos se intersectan en el punto dado por las componentes de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Ahora, como estudiamos en la clase anterior, la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ existe siempre que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Si el $\det(\mathbf{A}) = 0$ y el sistema es de 3×3, se abren dos posibilidades para sus soluciones:

1. Que tenga infinitas soluciones (los planos se cruzan en una misma recta) o
2. Que no tenga solución.

Veamos, como ejemplo, el siguiente **sistema homogéneo de ecuaciones lineales**[2]:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Este sistema siempre será consistente[3] porque una de sus soluciones es el punto $(0,\ 0,\ 0)$, también conocida como "solución trivial".

Es posible que el sistema homogéneo de arriba tenga más de una solución. Aquello se puede evaluar mediante el determinante de su matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Si el $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces existe $\mathbf{A}^{-1}$ y su solución será el vector $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

En otras palabras, los tres planos del sistema se intersectan en el origen.

En cambio, si el $\det(\mathbf{A}) = 0$ quiere decir que este sistema homogéneo tiene **infinitas soluciones**, las que forman una recta en la intersección de los planos. Otra forma de interpretar este caso, es considerar a las filas de $\mathbf{A}$ como los vectores normales de los tres planos.

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2,\ \mathbf{n}_3) = 0$$

Como el $\det(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2,\ \mathbf{n}_3) = 0$, significa que los tres vectores forman un paralelelpipedo sin volumen o un plano del cual son parte.

Si graficamos a $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_3$ en sus planos mientras se intersectan, al calcular el producto cruz entre dos de ellos veremos que será un vector paralelo a la recta de las soluciones, lo que significa que es ortogonal a los $\mathbf{n}_i$ y paralelo a los planos.

Así, las soluciones de un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de 3×3 se pueden resumir como:

$\det(\mathbf{A})$	Cantidad de Soluciones	Solución	Intersección de los tres planos
$\neq 0$	Una	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	En un punto
$= 0$	Infinitas	-	En una recta
$= 0$	Ninguna	-	No coinciden en un lugar

[2]Un sistema homogéneo es aquel donde los valores de la derecha de las ecuaciones son **iguales a cero**.
[3]Es decir, tiene al menos una solución.