Clase 10. Los Cuatro Principales Subespacios Vectoriales.

Curso 'Linear Algebra' del MIT.

Además del **espacio columna** y el **espacio nulo**, existen otros dos subespacios vectoriales igual de relevantes: el **espacio fila** y el **espacio nulo izquierdo**. Estos son los cuatro subespacios principales del Álgebra Lineal, por lo tanto en esta clase profundizaremos en ellos y, preliminarmente, en el **espacio matriz**, otro subespacio "vectorial".

10.1 Espacio Fila.

Cada fila de una matriz A es, a su vez, un vector fila y todas sus combinaciones lineales conforman el subespacio vectorial conocido como **Espacio Fila**.

El espacio fila de A es equivalente al **espacio columna de** A^T, por ese motivo se lo denota como $C(A^T)$.

Si la matriz A es de $n \times m$, los vectores que forman el $C(A^T)$ están en $\mathbb{R}^m$ dimensiones (i.e, m componentes).

10.1.1 Base y Dimensión de un Espacio Fila.

Para que los vectores que **generan** el $C(A^T)$ sean una **base**, necesitan ser linealmente independientes, lo cual evaluamos identificando sus entradas pivotes por medio de operaciones de reducción de filas en A (i.e, eliminación de Gauss).

Las filas de A que contienen una entrada pivote, las denominamos como **filas pivote**.

Por lo tanto y al igual que en el $C(A)$, la **dimensión** del $C(A^T)$ corresponde al **rango** r de A.

$$\dim(C(A^T)) = r = \dim(C(A))$$

Cuando pasamos $A \to R$ por medio del método de Gauss, se cumple que A y R tienen el mismo espacio fila ($C(A^T) = C(R^T)$), pero distinto espacio columna ($C(A) \neq C(R)$). Esto se debe a que las operaciones de simplificación se aplican a las filas de A y no a sus columnas, por tanto las primeras no se alterarán en R, mientras que las segundas sí.

Una ventaja que los vectores fila de A generen tanto el $C(A^T)$ como el $C(R^T)$[1], es que a partir de aquello podemos identificar los que serán **una base de** $C(A^T)$, los cuales corresponderán a **las primeras** r (rango de A) **filas de** R.

Recordemos que R es de forma triangular hacia arriba (*upper triangular*) puesto que su antecesora es U. Por tanto, sus entradas pivotes siempre estarán en sus primeras filas. Esto significa que aquellos vectores fila son linealmente independientes y, a su vez, generan el $C(R^T) = C(A^T)$. Por consiguiente, son una base de $C(A^T)$.

Veamos lo anterior a partir del siguiente ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanto a partir de A como de R, podemos ver que el rango de A es $r = 2$. Por lo tanto, de antemano podemos constatar que la $\dim(C(A^T)) = 2$. Sabemos que $C(A^T) = C(R^T)$, pero de los vectores fila que generan ambos subespacios, los que constituyen una base son los dos primeros de R, tal como lo estudiamos anteriormente.

En ese sentido, dos filas cualesquiera de A pueden constituir una base salvo la primera con la tercera, pero la "mejor" son las dos primeras de R, las cuales son las mismas de A y, por consiguiente, están tanto en el $C(A^T)$ como en el $C(R^T)$.

10.2 Espacio Nulo Izquierdo.

También es posible calcular un espacio nulo con las filas de A, el cual es conocido como el **Espacio Nulo Izquierdo** y se denota como $N(A^T)$.

El $N(A^T)$ corresponde a las soluciones agrupados en un vector $\vec{y}$ de la ecuación:

$$A^T y = 0$$

[1] Y viceversa con los mismos vectores de R

Se agrega la palabra "izquierdo" a este espacio nulo, porque si queremos trabajar con A, calculamos la transpuesta en toda la ecuación, conllevando a que el vector de soluciones $\vec{y}$ (en este caso, transpuesta) queda en aquella posición:

$$y^T A = 0^T$$

Asumiendo aún que A es de $n \times m$, los vectores que conforman el $N(A^T)$ son de $\mathbb{R}^n$ dimensiones (i.e, n componentes).

10.2.1 Una Forma Alternativa de Calcular el $N(A^T)$.

Como señalamos, la forma común de encontrar los vectores que generan el $N(A^T)$ es resolviendo la ecuación $A^T y = 0$. Pero otra manera, es trabajando con A como una matriz aumentada (la que denotamos como A_{Au}), donde el lado derecho es una matriz identidad. Es decir, de la forma $[A|I]$.

Esta técnica la usamos en la Clase 3 para evaluar si una matriz cuadrada era invertible o no. En particular, vimos que existe A^{-1} en A si, cuando pasamos de $A_{Au} \to R_{Au}$, se cumple que:

$$E[A|I] = [I|A^{-1}]$$

donde E es la matriz elemental de todas las operaciones de reducción de filas.

El punto es que cuando usamos este método en una matriz A rectangular, no solo ocurre que:

$$E[A|I] = [R|E]$$

sino que, además, es posible **identificar las soluciones especiales que generan el $N(A^T)$ en las filas de E**. En otras palabras, va a corresponder a la solución de $y^T A = 0^T$.

Veámoslo en el siguiente ejemplo. Sean A y, por tanto, A^T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comencemos con $A^T y = 0$, pasando en primera instancia de $A^T \to R$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vemos, A^T es de rango $r = 2$, lo que significa que tiene una columna libre y, en este caso, es la tercera. Por consiguiente, establezcamos que $y_3 = 1$ del vector $\vec{y}$.

Al pasar la ecuación:

$$Ry = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_1 + 0 + 1 = 0 \\ 0 + y_2 + 0 = 0 \end{cases}$$

podemos verificar que $y_1 = -1$ e $y_2 = 0$. Por lo tanto, el espacio fila izquierdo de A es:

$$N(A^T) = c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora veámoslo con el método alternativo. A continuación, pasamos $A_{Au} \to R_{Au}$:

$$A_{Au} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow R_{Au} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sabemos que la mitad derecha de R_{Au} es E y la tercera fila de esta última matriz corresponde a $\vec{y}^T$. Si la multiplicamos a A, entonces:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo cual es equivalente a $y^T A = 0^T$.

Entonces, si usamos este método para encontrar los vectores que generan el $N(A^T)$, solo tenemos que evaluar con cuál de los vectores filas de E se cumple que $y^T A = 0^T$.

10.2.2 Base y Dimensión de un $N(A^T)$.

Hemos visto que la forma para buscar el $N(A^T)$ es igual al del $N(A)$: Por medio del método de eliminación de Gauss identificamos las columnas pivotes y las libres de A^T y, luego, encontramos las soluciones especiales.

Por otra parte, sabemos que la cantidad de soluciones especiales de un espacio nulo está determinado por la cantidad de columnas libres de A. Por consiguiente, si A^T es de $m \times n$ (asumiendo que A es de $n \times m$) y su rango es r, la cantidad de soluciones de $N(A^T)$ serán:

$$\#\text{ sol. especiales} = n - r$$

Los vectores que son soluciones especiales no solo generan el $N(A^T)$, sino que también son linealmente independientes. Por lo tanto, constituyen su **base**, implicando que su **dimensión** siempre será:

$$\dim(N(A^T)) = n - r$$

10.3 Resumen de los Cuatro Principales Subespacios Vectoriales.

En la siguiente tabla se resumen las principales características de los cuatro subespacios vectoriales fundamentales del álgebra lineal, donde A es una matriz de $n \times m$ dimensiones, r es su rango y A^T es de $m \times n$.

Subespacio	Notación	Esp. Vectorial	Vectores Base	Dimensión
Esp. Columna	$C(A)$	$\mathbb{R}^n$	Columnas Pivotes	r
Esp. Fila	$C(A^T)$	$\mathbb{R}^m$	Filas Pivotes de A	r
Esp. Nulo	$N(A)$	$\mathbb{R}^m$	Sol. Especiales de $Ax = 0$	$m - r$
Esp. Nulo Izq.	$N(A^T)$	$\mathbb{R}^n$	Sol. Especiales de $A^T y = 0$	$n - r$

10.4 Espacio Matriz (Preliminar).

Si tenemos una matriz cuadrada de 3×3, podemos multiplicarla por valores escalares y sumarlas a otras escaladas de igual dimensión. En otras palabras, podemos realizar **combinaciones lineales** entre ellas al igual que con vectores, pero resultando en otras matrices. El conjunto de todas aquellas combinaciones, se conoce como el **Espacio Matriz** el cual se denota como M.

Si ignoramos el que podemos multiplicarlas entre ellas, las matrices se comportan como vectores, es por ello que al M se lo considera como un espacio "vectorial".

Del espacio matriz se obtienen los siguientes **subespacios "vectoriales"**:

- Todas las Matrices Triangulares Superiores (i.e, U).
- Todas las Matrices Simétricas (i.e, las matrices A tal que $A = A^T$).
- Todas las Matrices Diagonales, que se denotan como D.

El subespacio de las matrices D es la intersección de los dos anteriores y es de 3 dimensiones. Por ejemplo, a continuación tenemos una **base** (*basis*) de ella:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$