Clase 37. Series Infinitas I: Introducción y pruebas de convergencia.

MIT 18.01: Single Variable Calculus

Resumen

Otro gran tema al trabajar con el concepto del infinito en cálculo es el de las **Series Infinitas**. Estudiaremos en qué consisten, casos especiales (geométrica, telescópica y p) y distintos métodos para evaluar su convergencia (ignorando a qué valor) o divergencia.

1. Series Infinitas.

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una **sucesión infinita**. La **suma de todos sus términos** recibe el nombre de **Serie Infinita** o simplemente **Serie**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Habitualmente, cuando tenemos un grupo finito de números y nos interesa la suma entre ellos, simplemente la calculamos todo de una vez. Por ejemplo, la adición entre 1, 2 y 4 solemos resolverla como:

$$1 + 2 + 4 = 7$$

Sin embargo, el método usado arriba para calcular la suma de una sucesión se va complicando a medida que aumenta la cantidad de términos y en una **serie** es **imposible de aplicar** por la infinidad de éstos. Es por ello que, como alternativa, se considera la **suma de sus n primeros términos** conocida como **Suma Parcial**.

Formalmente, si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión infinita, su **suma parcial** s_n corresponde a:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

La suma parcial s_n también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Como vemos, según el n que se defina, se obtiene una **sucesión** $\{s_n\}$ cuyas entradas son las **sumas acumuladas** de las sumas parciales de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\{s_n\} = \{s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots,\ s_n\}$$

Esto implica que el **último término** de $\{s_n\}$ (i.e, el n-ésimo) es la **suma parcial total**.

La idea de trabajar una serie a partir de sumas parciales es que, si se **detecta un patrón** en ella, se puede **describir al n-ésimo término de $\{s_n\}$ mediante una fórmula**. Esto es fundamental, ya que permite **evaluar su límite al infinito**.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

y como los términos de $\{s_n\}$ son una parte de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Es decir, una **serie infinita** se puede definir como el **límite de sus sumas parciales**.

Si la **sucesión de sumas parciales** $\{s_n\}$ es **convergente** a un valor real L, entonces se afirma que la **serie** de $\{a_n\}$ es **convergente** a dicho L. En otras palabras,

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} s_n = L, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Recordemos, además, que una sucesión es convergente cuando es monótona y acotada.[1] En ese sentido, también es posible afirmar que si $\{s_n\}$ cumple con dichas características, converge a L y, por consiguiente, también lo hace $\sum a_n$.

[1] Para más detalles, revisar los apuntes "Sucesiones: Repaso".

Por otra parte, si $\{s_n\}$ es **divergente** (sea que no converja a un valor o tienda al infinito), se concluye que **la serie es divergente**.

1.1. Prueba del n-ésimo término para una serie divergente.

Un criterio sencillo para evaluar si una serie **diverge o no** es la **prueba del n-ésimo término para una serie divergente**, que se basa en el siguiente teorema.

Teorema 1. Si la serie de una sucesión $\{a_n\}$ **converge**, entonces $a_n \to 0$ mientras $n \to \infty$.

Demostración. Asumamos que la serie de $\{a_n\}$ es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = L$$

Veamos que:

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

Por otra parte, debido a que s_{n-1} y s_n son parte de la misma serie, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = L$$

ya que $(n-1) \to \infty$ mientras $n \to \infty$.

Despejemos a a_n en la ecuación $s_n = s_{n-1} + a_n$.

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

Finalmente, tomemos el límite en la ecuación de arriba.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L - L = 0 \qquad \text{(Q. E. D)}$$

El **reverso** de este teorema **no siempre es verdadero**. Es decir, que el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **no es condición suficiente** para que $\sum a_n$ **sea convergente**. No obstante, es útil para **probar su divergencia** ya que:

$$\text{si } \nexists \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \text{si } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

entonces **la serie $\sum a_n$ es divergente**. A lo anterior se conoce como la **prueba del n-ésimo término de una serie divergente**.

2. Algunas series conocidas.

Al trabajar con series, lo ideal es encontrar una fórmula que describa su n-ésima suma parcial. Como no es algo fácil de lograr, lo habitual es observar si sigue el patrón de alguna ya formalizada. Acá estudiaremos a estas últimas junto con sus pruebas de convergencia/divergencia.

2.1. Serie geométrica.

Una sucesión geométrica (o progresión geométrica) es aquella donde todos sus términos $a \neq 0$ tienen un mismo factor $r \neq 0$, conocido como **razón común**.

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \cdots; \qquad \forall a,\ r \in \mathbb{R}$$

El n-ésimo término de una sucesión geométrica, a_n, está dada por:

$$a_n = ar^{n-1}$$

En ese sentido, la **Serie Geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Es posible asegurar que una serie geométrica será **divergente** si $r = \pm 1$. En el caso $r = 1$ es posible verlo en su n-ésima suma parcial.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a(1)^{i-1} = a + a(1) + a(1^2) + a(1^3) + \cdots + a(1^{n-1}) = na$$

Al calcular el límite de s_n vemos que diverge y, en consecuencia, también lo hace la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(1)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a(1)^{i-1} = \lim_{n\to\infty} na = \pm\infty$$

Por otra parte, la serie geométrica también **diverge** cuando $r = -1$ porque los términos de $\{s_n\}$, dados por $\sum_{i=1}^{n} a(-1)^{i-1}$, se alternan entre a y 0 como se observa a continuación.

$$\begin{aligned} s_1 &= a & \qquad s_3 &= s_2 + a = a \\ s_2 &= s_1 + (-a) = 0 & \qquad s_4 &= s_3 + (-a) = 0 \\ & & &\vdots \end{aligned}$$

Por consiguiente, el $\lim_{n\to\infty} s_n$ será **divergente** al no aproximarse a un único valor y, como consecuencia de aquello, también lo será la $\sum_{n=1}^{\infty} a(-1)^{n-1}$.

Ahora bien, existe una manera para conocer cuándo **converge** una serie geométrica y a qué valor. Para ello, consideremos la n-ésima suma parcial de su forma general.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

La idea es buscar una fórmula para s_n. Para ello, comencemos multiplicándola por r.

$$rs_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

Luego, restemos rs_n a s_n.

$$s_n - rs_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n) = a - ar^n$$

Finalmente, factoricemos en ambos lados de $s_n - rs_n = a - ar^n$ por sus términos comunes y despejemos a s_n para, de esa manera, obtener su fórmula.

$$\begin{aligned} s_n(1-r) &= a(1-r^n) \\ s_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

La fórmula de s_n es válida cuando $r \neq 1$. Así, descartamos esa razón común que, como también sabemos, lleva a que la serie sea divergente.

Ahora tomemos el límite de s_n para saber cuándo converge y a qué valor.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right)$$

$\{s_n\}$ será convergente según el r elegido, ya que determinará si $\lim_{n\to\infty} r^n$ es un valor finito.

Si $r = -1$, r^n tomará alternadamente los valores ± 1 mientras $n \to \infty$ y, en consecuencia, $\{s_n\}$ será **divergente**, lo que va en concordancia con lo estudiado antes.

De hecho, es posible observar que:

1. $\forall r \geq 1$, $\{s_n\}$ **diverge** porque el $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.
2. $\forall r \leq -1$, $\{s_n\}$ **diverge** porque r^n toma valores alternados de distinto signo a medida que $n \to \infty$ sin aproximarse a un único valor.

No obstante, para cualquier $|r| < 1$ (i.e, $-1 < r < 1$) ocurre que:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

Por lo tanto, en dicho caso:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}(1-0) = \frac{a}{1-r}$$

Así, **toda serie geométrica converge** a $a/(1-r)$ siempre que su razón común $|r| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} \iff |r| < 1$$

Y **diverge** cuando $|r| \geq 1$ (i.e, si $r \leq -1$ o $r \geq 1$).

2.2. Serie telescópica.

Una **serie telescópica** es aquella que se expresa como la suma de las diferencias de los términos consecutivos de una sucesión.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$

Para comprender mejor la serie telescópica, observemos su n-ésima suma parcial, s_n.

$$s_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})$$

Al expandir s_n se identifica la **principal característica** de las series telescópicas: Gran parte de sus **términos intermedios** se **cancelan**. La suma parcial vista arriba resulta en:

$$s_n = a_1 - a_{n+1}$$

Como se observa arriba, la ventaja de las series telescópicas es que nos entrega una expresión sencilla de s_n. Así, al tomar su límite se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Por lo tanto, **toda serie telescópica converge** si el $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Esto se explica porque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1},$$

ya que $a_n,\ a_{n+1} \in \{(a_n - a_{n+1})\}$, lo que implica que ambos convergen al mismo valor o divergen de la misma manera.

En consecuencia, si $a_n \to L$ mientras $n \to \infty$, **la serie telescópica convergerá al valor**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_n = a_1 - L$$

2.3. Series p y armónica.

Toda serie cuyos términos son los recíprocos de n elevados a una constante p recibe el nombre de **Serie p**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

La serie p **converge** siempre que $p > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = L \iff p > 1$$

y **diverge** si $p \leq 1$.

La prueba de convergencia de la serie p se puede demostrar a partir de la prueba de la integral. Esta la estudiaremos en la siguiente sección.

La serie p, con $p = 1$, se conoce como **Serie Armónica** y se caracteriza por ser **divergente**, ya que su suma crece infinitamente mientras n también lo hace.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

La serie armónica es un ejemplo de que no está garantizado que una serie converja solo porque los términos de su sucesión tiendan a cero mientras $n \to \infty$.

3. Pruebas de convergencia para series no negativas.

No siempre se trabajará con una serie que siga los patrones de las vistas en la sección previa, aunque si los términos de ésta son no negativos y solo queremos saber si converge o no (ignorando a qué valor), podemos usar las pruebas que se estudiarán a continuación.

3.1. Series no negativas.

Una **serie no negativa** es la suma de una sucesión infinita $\{a_n\}$ cuyos términos son todos mayores o iguales a cero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \text{serie no negativa} \iff a_n \geq 0;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

La principal característica de las series no negativas es que la sucesión de sus **sumas parciales**, $\{s_n\}$, siempre será **monótona no decreciente**.

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n$$

Esto implica que $\{s_n\}$ tendrá una **cota inferior** m definida para todos sus términos.

$$s_n \geq m;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por lo tanto, una serie no negativa será **convergente** si la sucesión $\{s_n\}$ también tiene una **cota superior** M (i.e, si está acotada) ya que, por el **Teorema de la sucesión monótona**[2], se garantiza que tiene una **cota superior mínima** $\sup\{s_n\} = L$ que es igual a su límite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n\} = \lim_{n\to\infty} s_n = L$$

En ese sentido, si la sucesión $\{s_n\}$ **no tiene una cota superior**, entonces **diverge al infinito** y **también lo hace la serie no negativa**.

Las pruebas de convergencia que veremos a continuación basan su explicación en la búsqueda de la cota superior de la serie no negativa que se está analizando.

3.2. Prueba de la integral.

Sea $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ una serie no negativa donde $a_n = f(n),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Si se cumple que, para todo $x \geq N$ (o en el intervalo $[N,\ \infty)$), la función $f(x)$ es:

- **No negativa** (i.e, $f(x) \geq 0$ en $N \leq x < \infty$).
- Eventualmente **no creciente** (i.e, $f(N) \geq f(N+1) \geq \ldots$).
- **Continua**.

[2] Para más detalles, revisar apuntes de "Sucesiones: Repaso".

es posible probar la convergencia de aquella serie a partir de la **Prueba de la integral**. Bajo dichas condiciones, esta señala que:

1. Si $\int_N^\infty f(x)dx$ **converge**, entonces $\sum_{n=N}^\infty a_n$ **converge**.
2. Si $\int_N^\infty f(x)dx$ **diverge**, entonces $\sum_{n=N}^\infty a_n$ **diverge**.

Ahora, suponga que $\int_1^\infty f(x)dx = L$. Es **incorrecto dar por hecho** a partir de la prueba de la integral que

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = L,$$

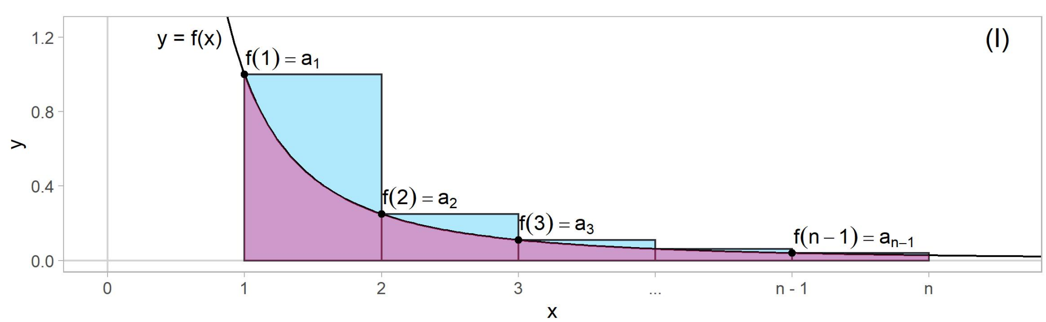
ya que **es posible que tanto la integral como la serie converjan a valores distintos**.

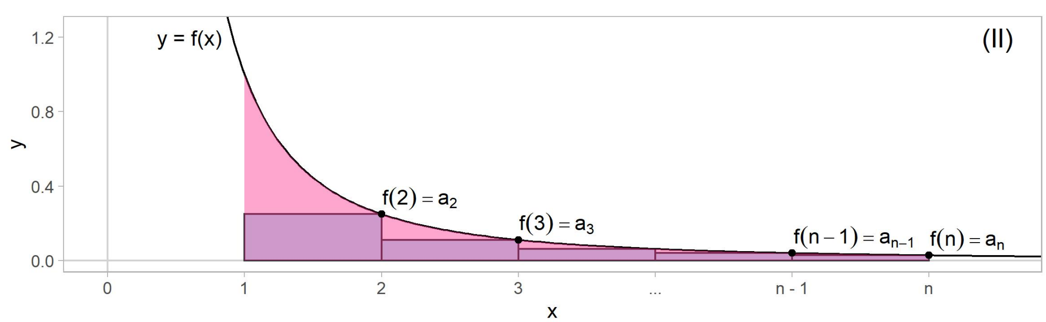
La prueba de la integral es usada para saber si una serie converge o no y lo hace evaluando la cola superior de una función que cumple con las características señaladas arriba.

3.2.1. Demostración de la prueba de la integral.

Definamos que $N = 1$ y que $f(x) \geq 0$ es una función no creciente y continua en $x \geq 1$ donde, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $f(n) = a_n$.

Luego, dividamos el área bajo $f(x)$ entre $[1,\ n]$ en rectángulos de ancho $\Delta x = 1$ y altura $f(n)$ tal que sus puntos iniciales (I) y finales (II) toquen a dicha función.





Mediante los gráficos (I) y (II) se puede estimar que el área bajo $f(x)$ entre $[1,\ n]$ es:

$$\sum_{i=2}^{n} f(i)\Delta x \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)\Delta x$$

donde $f(i) \cdot \Delta x$ es el área de los $(n-1)$ rectángulos.

Debido a que $\Delta x = 1$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

Centrémonos en $\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \int_1^n f(x)dx$. Al sumar $a_1 = f(1)$ en ella obtenemos que

$$a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leq a_1 + \int_{1}^{n} f(x)dx$$

Veamos que $a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = s_n$, donde s_n es la n-ésima **suma parcial** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyos términos están dados por $a_n = f(n)$, con $f(x)$ siendo no negativa y no creciente. Por lo tanto, $\{s_n\}$ es **monótona no decreciente** y tiene una cota inferior m definida.

$$m \leq s_n \leq a_1 + \int_{1}^{n} f(x)dx$$

Por otra parte, como $f(x) \geq 0$, entonces $\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$. Esto implica que:

$$m \leq s_n \leq a_1 + \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Asumamos que $\int_1^{\infty} f(x)dx$ **converge** a un número L. Aquello significa que:

$$m \leq s_n \leq a_1 + L$$

Es decir, $\{s_n\}$ es **acotada** cuando $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. Al ser **monótona** se puede concluir que es **convergente** y también lo es la serie dada por $a_n = f(n)$.

Ahora enfoquémonos en $\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i$, la que también se puede expresar como

$$\int_{1}^{n} f(x)dx \leq s_{n-1}$$

donde s_{n-1} es la $(n-1)$ suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} a_i$ con términos $f(n) = a_n \geq 0$.

Supongamos que $\int_1^\infty f(x)dx$ **diverge**. Como $f(x) \geq 0$, lo anterior significa que

$$\int_1^\infty f(x)dx = \infty$$

Por lo tanto, a medida que $n \to \infty$, $\{s_{n-1}\}$ será **divergente** ya que $s_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx$ y **la integral diverge** en este contexto. Además, como

$$s_{n-1} \leq s_n$$

debido a que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es no negativa, $\{s_n\}$ será **divergente** y también esta serie.

Así, damos por demostrado que

1. Cuando $\int_N^\infty f(x)dx$ **converge**, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ **converge**.
2. Cuando $\int_N^\infty f(x)dx$ **diverge**, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ **diverge**.

3.2.2. Demostración de la prueba de convergencia de una serie *p*.

En la sección 2.3 se señaló que es posible demostrar la prueba de convergencia de una serie p mediante la prueba de la integral. Veámoslo a continuación.

Como vimos anteriormente, una serie p es de la forma

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

y se caracteriza por ser convergente cuando $p > 1$ y divergente cuando $p \leq 1$.

Establezcamos que $f(x) = 1/x^p$, lo que significa que $f(n) = 1/n^p$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Es posible observar que, para todo $x \geq 1$, $f(x) \geq 0$, continua y no creciente. Esta última característica se puede verificar a partir de su derivada.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^p}\right) = \frac{d}{dx}x^{-p} = -px^{-p-1} = -px^{-(p+1)} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0; \quad \forall x \geq 1$$

Así, podemos usar la prueba de la integral para evaluar la convergencia de una serie p mediante

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

Esta integral impropia de tipo 1 la vimos en la Clase 35 (págs. 5-6), donde para $p = 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \ln(1)) = \infty$$

Y para cualquier p se obtiene que:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{-p+1} \cdot \left[\left(\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} \right) - 1 \right]$$

En consecuencia,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ \infty, & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

ya que cuando $p > 1$, $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = 0$, mientras que $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty$ para todo $p < 1$. Esto nos lleva a concluir, primero, que:

1. $\int_1^{\infty} (1/x^p) dx$ es **convergente** cuando $p > 1$.
2. $\int_1^{\infty} (1/x^p) dx$ es **divergente** cuando $p \leq 1$.

Y, en segundo lugar, que:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ es **convergente** cuando $p > 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ es **divergente** cuando $p \leq 1$.

como consecuencia de la **prueba de la integral**.

3.3. Pruebas por comparación directa y del límite.

Una debilidad de la prueba de la integral, es que no siempre es fácil o posible obtener su antiderivada. No obstante, otra opción para evaluar la convergencia de una serie es **comparándola** con otra semejante a ella y que sabemos que converge o diverge. Este método se conoce como **Prueba por comparación** y se divide en dos: Directa y Del límite.

3.3.1. Comparación directa.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series no negativas. Cuando

$$0 < a_n \leq b_n; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

podemos aplicar la **Prueba por comparación directa**, la que señala que:

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **converge**, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también **converge**.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también **diverge**.

Una forma más intuitiva de recordar la prueba por comparación directa, es la que sigue:

- Si la serie **más grande converge**, entonces la **más chica converge**.
- Si la serie **más chica diverge**, entonces la **más grande converge**.

Demostración. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series con $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, donde

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n \quad \text{y} \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_n$$

En ese sentido, tanto $\{s_n\}$ como $\{t_n\}$ son monótonas no decrecientes y $s_n \leq t_n$ para todo entero positivo n.

Para la primera parte de la prueba por comparación directa, asuma que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **converge**. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = L$$

donde L es un valor finito.

Debido a que $\{s_n\}$ es monótona no decreciente, entonces tiene una cota inferior m. Sumado al hecho de que $s_n \leq t_n$, entonces:

$$m \leq s_n \leq t_n \leq L$$

Como vemos, L es una cota superior de $\{s_n\}$, lo que significa que es **convergente** y también lo es la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Es decir,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** cuando también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ahora demostremos la segunda parte de la prueba por comparación directa asumiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**. Esto implica que $\{s_n\}$ también lo hace.

Puesto que $s_n \leq t_n$, si $\{s_n\}$ **diverge**, aquello también sucede con $\{t_n\}$. En consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es **divergente** y concluimos que:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es **divergente** cuando también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

De este modo, damos por demostrado la prueba por comparación directa.

3.3.2. Comparación del límite.

Sean dos series no negativas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. La **prueba por comparación del límite** señala

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$, para $0 < L < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **convergen o divergen al mismo tiempo**.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **converge**, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **diverge**, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

Demostración parte 1.[3] Sean dos sucesiones infinitas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n,\ b_n \geq 0$ y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \text{ con } 0 < L < \infty$$

Debido a que existe el límite de (a_n/b_n), eso quiere decir que para un número $\epsilon > 0$ existe un correspondiente entero N tal que, para todo $n > N$,[4]

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon$$

Por las propiedades de las desigualdades de los valores absolutos, la que se encuentra arriba podemos expresarla como:

$$-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon$$

Al sumar L y al multiplicar por b_n a esta desigualdad compuesta, obtenemos lo siguiente:

$$(L - \epsilon) b_n < a_n < (L + \epsilon) b_n$$

En $a_n < (L + \epsilon) b_n$, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **converge**, entonces también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} (L + \epsilon) b_n$. Esto implica por la **prueba por comparación directa** que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente**.

Por otra parte, en $(L - \epsilon) b_n < a_n$, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**, por la **prueba por comparación directa** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es **divergente**.

[3]No pude ubicar una demostración para las partes 2 y 3 de esta prueba. En el texto de Thomas la dejan como tarea, así que algún día intentaré hacerlo (o quizá la encuentre por ahí).

[4]Esto corresponde a la definición precisa del límite de una sucesión.

A partir de los dos últimos párrafos podemos concluir que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L; \text{ donde } 0 < L < \infty$$

las series no negativas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen o divergen al mismo tiempo (Q. E. D).

La ventaja de esta prueba con respecto a la de por comparación directa, es que no debemos revisar que cada término de una sucesión sean menores a todos los de la otra para aplicarla, lo que la hace más rápido de trabajar.

4. Series alternantes.

Es lógico pensar que no todas las series son no negativas. Una de ellas son las **Series alternantes** donde cada término es de signo distinto al anterior[5]. Algunos ejemplos son:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

Una serie alternante como las vistas arriba **converge** si cumple las siguientes condiciones[6]:

1. $0 < a_{n+1} \leq a_n$, para todo n (i.e, $\{a_n\}$ eventualmente debe ser **no creciente**).
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.1. Demostración de la convergencia de una serie alternante.

Considere la siguiente serie alternante, con $0 < a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Si bien no hay certeza sobre el signo del último término de esta serie, se puede observar que los de índice $2n$ siempre son negativos. Por este motivo, veamos sus $\boldsymbol{n}$ **sumas parciales pares**, s_{2n}.

[5] Dicho de otro modo, los términos alternadamente son de signo opuesto.
[6] Estas condiciones se refieren a los términos de $\{a_n\}$ sin considerar el factor $(-1)^n$.

$$
\begin{aligned}
s_2 &= (a_1 - a_2) \\
s_4 &= s_2 + (a_3 - a_4) \\
s_6 &= s_4 + (a_5 - a_6) \\
&\vdots \\
s_{2n} &= s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n})
\end{aligned}
$$

Debido a que $0 < a_{n+1} \leq a_n$ veamos, por ejemplo, que:

$$(a_{2n-1} - a_{2n}) > 0; \text{ para todo } n$$

Producto de aquello, $s_{2n-2} \leq s_{2n}$ porque la suma entre cualquier valor positivo y s_{2n-2} será mayor a este último. Por lo tanto,

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n}$$

Es decir, $\{s_{2n}\}$ es una sucesión **monótona no decreciente** y, por consiguiente, tiene una cota inferior m.

La n-ésima suma parcial par

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

también se puede escribir de la siguiente manera:

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Las restas de los paréntesis son positivas y como cada $a_{n+1} \leq a_n$, entonces:

$$m \leq s_{2n} \leq a_1$$

En otras palabras, a_1 es la cota superior de $\{s_{2n}\}$. Así, por el Teorema de la sucesión monótona se puede afirmar que es **convergente**.

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = L; \text{ con } L \leq a_1 < \infty$$

Ahora observemos las n **sumas parciales impares**, s_{2n+1}, la cual podemos escribir como

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$$

Para saber si la serie alternante es convergente a partir de las condiciones dadas inicialmente, necesitamos saber si las sumas parciales impares convergen al mismo valor de las pares. Por esta razón, tomemos el límite de s_{2n+1}.

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = L$ y como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = L + 0 = L$$

Esta igualdad nos permite concluir que una serie alternante es **convergente** si:

1. $0 < a_{n+1} \leq a_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Convergencia absoluta de una serie.

Hay ocasiones donde una serie puede tener términos negativos de manera irregular y ser divergente, pero al tomar el **valor absoluto** de éstos, la suma sí se aproxima a un valor finito. En esos casos decimos que es **absolutamente convergente**.

En general, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es **convergente**, donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots$$

Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente sin ser absolutamente convergente**, se señala que es **condicionalmente convergente**.

5.1. Prueba de la convergencia absoluta.

La **prueba de la convergencia absoluta** señala que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. No obstante, el reverso de este criterio[7] no siempre es verdadero.

[7] Es decir, que una serie sea convergente debido a su convergencia absoluta.

Demostración. Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

En ese sentido, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Al sumar $|a_n|$ en esta desigualdad obtenemos que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$. En consecuencia, por la prueba por comparación directa[8], $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ será **convergente**.

Observemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Así, se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** porque es la diferencia de dos series que también lo son (Q. E. D).

5.2. Prueba de la razón.

Podría ser de nuestro interés conocer la tasa de crecimiento o caída de una serie. Para ello, podemos usar la **prueba de la razón**.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con $a_n \neq 0$ para todo n, donde

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

La **prueba de la razón** indica que

1. Si $L < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente**.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
3. Si $L = 1$, **la prueba no es concluyente** porque no permite afirmar si la serie es convergente o divergente.

[8]Podemos aplicar este criterio porque tanto $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ como $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ son no negativas.

Demostración parte 1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con $a_n \neq 0$ para todo n donde

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$$

Lo señalado arriba implica que para un $\epsilon > 0$ existe un N tal que, para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| &< \epsilon \\ -\epsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| &< \epsilon \\ L - \epsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &< L + \epsilon \end{aligned}$$

De aquí en adelante asumamos que escogimos un ϵ tal que $L + \epsilon < 1$.

Ahora centrémonos en $|(a_{n+1}/a_n)| < L + \epsilon$ y multipliquémosla por $|a_n|$.

$$|a_{n+1}| < |a_n|(L + \epsilon)$$

Digamos que $n = N$. En la desigualdad de arriba implica que

$$|a_{N+1}| < |a_N|(L + \epsilon)$$

Luego, cuando $n = N + 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} |a_{(N+1)+1}| &< |a_{N+1}|(L + \epsilon) \\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}|(L + \epsilon) < [(L + \epsilon)|a_N|](L + \epsilon) \\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}|(L + \epsilon) < |a_N|(L + \epsilon)^2 \end{aligned}$$

En otras palabras:

n	$\lvert a_{n+1}\rvert < \lvert a_n\rvert(L + \epsilon)$
N	$\lvert a_{N+1}\rvert < \lvert a_N\rvert(L + \epsilon)$
$N + 1$	$\lvert a_{N+2}\rvert < \lvert a_N\rvert(L + \epsilon)^2$
$N + 2$	$\lvert a_{N+3}\rvert < \lvert a_N\rvert(L + \epsilon)^3$
$\vdots$	$\vdots$
$N + C$	$\lvert a_{N+(C+1)}\rvert < \lvert a_N\rvert(L + \epsilon)^{(C+1)}$

con $C =$ constante.

Establezcamos que $C+1=K$, otra constante. Por lo tanto,

$$|a_{N+K}| < |a_N|(L+\epsilon)^K$$

Ahora, consideremos las series

$$\text{(I)}\ \sum_{K=1}^{\infty} |a_{N+K}| \qquad \text{y} \qquad \text{(II)}\ \sum_{K=1}^{\infty} |a_N|(L+\epsilon)^K$$

Observemos que (II) es una **serie geométrica**. Debido a que su razón común $(L+\epsilon) < 1$, entonces es **convergente**.

Por otra parte, como $0 < |a_{N+K}| < |a_N|(L+\epsilon)^K$ para todo K, por la **prueba por comparación directa** la serie (I) es **convergente**.

En general, la propiedad de convergencia o divergencia de una serie **no se altera al añadir o quitar términos** de ella. En ese sentido, es válido señalar que:

$$\sum_{K=1}^{\infty} |a_{N+K}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

La igualdad de arriba implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es **convergente**. Así, por la **prueba de la convergencia absoluta**, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** (Q. E. D).

Demostración parte 2. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \neq 0$ para todo n donde

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L; \text{ tal que } 1 < L \leq \infty$$

Si L toma un valor en $(1,\ \infty]$, significa que eventualmente para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$
$$|a_{n+1}| > |a_n|$$

Es decir, cada término de $\{a_n\}$ será mayor a su antecesor. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Por la **prueba del n-ésimo término**, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente** (Q. E. D).

Demostración parte 3. Para ver que la prueba de la razón falla cuando $L=1$, considere las siguientes series p.

$$\text{(I)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad\qquad \text{(II)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Calculemos el límite de la razón $|(a_{n+1}/a_n)|$ en las sucesiones de las dos series vistas arriba.

$$\text{(I)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(1/n)} = 1$$

$$\text{(II)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n^2+1)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(1/n^2)} = 1$$

Los límites de la razón para los términos de ambas series son iguales a 1. Sin embargo, estudiamos anteriormente que la serie (I) es divergente (serie armónica), mientras que (II) es convergente porque $p = 2 > 1$. Esto muestra la falla de la prueba de la razón cuando $L = 1$.

5.3. Prueba de la raíz.

Cuando los términos de una serie involucran **potencias**, el criterio más apropiado para evaluar si converge o diverge es la **prueba de la raíz**.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie donde ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

La prueba de la raíz señala que:

1. Si $L < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente**.
2. Si $1 < L \leq \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
3. Si $L = 1$, se concluye que **la prueba no es concluyente**.

Como veremos a continuación, la demostración de la prueba de la raíz es similar a la de la razón estudiada en la sección anterior.

Demostración parte 1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie donde el límite de sus términos es

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$$

Debido a que existe el límite de arriba, para un $\epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$| \sqrt[n]{|a_n|} - L| < \epsilon$$
$$L - \epsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < L + \epsilon$$

Asumamos que $L + \epsilon < 1$. Si a $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \epsilon < 1$ la elevamos a n, obtenemos que:

$$|a_n| < (L + \epsilon)^n < 1; \; \forall n \geq N$$

De este modo, consideremos las series

$$\text{(I)} \; \sum_{n=N}^{\infty} (L + \epsilon)^n \qquad\qquad \text{(II)} \; \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$$

La serie (I) es una geométrica y **convergente**, ya que su razón común es $(L + \epsilon)^n < 1$. En ese sentido, a partir de la **prueba por comparación directa**, la serie (II) también es **convergente**.

La serie (II) podemos escribirla como parte de otra suma de los mismos términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$$

Como añadir términos a una serie no altera su propiedad de convergencia, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente y, por la **prueba de la convergencia absoluta**, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** (Q. E. D).

Demostración parte 2. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie donde

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$$

El límite de arriba implica que, eventualmente para todo $n \geq N \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1$$
$$|a_n| > 1$$

Es decir, todos los términos de $\{|a_n|\}$ serán mayores a 1. Esto implica que:

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| \neq 0$$

Así, por la **prueba del n-ésimo término**, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente** (Q. E. D).

Demostración parte 3. Considere las series p

$$\text{(I)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad\qquad \text{(II)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Calculemos el límite de la raíz n-ésima de los términos de (I) y (II).

$$\text{(I)} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{(II)} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Como vemos, tanto en (I) como en (II) el límite de las raíces n-ésima de sus términos es igual a 1. Sin embargo, sabemos que (I) es divergente y (II) es convergente, de manera que **la prueba falla en evaluar estos criterios**.