Clase 5. Ecuaciones Paramétricas de Rectas y Curvas.

MIT 18.02: Multivariable Calculus.

Resumen

Cuando una figura es definida por coordenadas que dependen de una variable llamada **parámetro**, las expresiones resultantes se conocen como **ecuaciones paramétricas**. En esta clase las estudiaremos tanto en rectas como en curvas.

1. Ecuaciones paramétricas de una recta.

Suponga que buscamos una recta en el espacio cartesiano, pero sin tener que considerar los infinitos puntos que la forman. Podemos elegir un punto y definir sus coordenadas como una función lineal de otra variable. Al graficarla, obtendremos dicha figura expresada como si fuese la trayectoria de una particula en movimiento.

Cuando las coordenadas de un punto son expresadas en términos de otra variable conocida como **parámetro**, las reglas que la definen se conocen como **ecuaciones paramétricas**.

En general, si $(x,\ y,\ z)$ es un punto en $\mathbb{R}^3$, para un parámetro t podemos definirlo como la siguiente ecuación paramétrica:

$$(x(t),\ y(t),\ z(t))$$

En esta sección nos centraremos en las ecuaciones paramétricas de una recta.

Ejemplo 1. Considere una partícula en movimiento a largo de una línea que pasa por los puntos $Q_0 = (-1,\ 2,\ 2)$ y $Q_1 = (1,\ 3,\ -1)$ a una rapidez constante y en un tiempo t, donde Q_0 es su posición en $t = 0$. Calcule su ubicación en el tiempo t.

Solución. Como la partícula se mueve en términos de t, podemos definir su posición como $Q(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$.

Por otra parte, debido a que la partícula se mueve a una rapidez lineal constante, es válido asumir que Q_1 es su posición en $t = 1$. Esto implica que $Q(t)$ estará a t veces la distancia de Q_0 y Q_1. Si definimos a los vectores $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ y $\overrightarrow{Q_0Q(t)}$, lo último señalado se puede expresar como:

$$\overrightarrow{Q_0Q(t)} = t \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$$
$$\langle x(t) - (-1),\ y(t) - 2,\ z(t) - 2\rangle = t \cdot \langle 1 - (-1),\ 3 - 2,\ -1 - 2\rangle$$
$$\langle x(t) + 1,\ y(t) - 2,\ z(t) - 2\rangle = \langle 2t,\ t,\ -3t\rangle$$

Los componentes de ambos vectores son iguales. Es decir,

$$\begin{array}{ccc} 2t = x(t) + 1 & t = y(t) - 2 & -3t = z(t) - 2 \\ x(t) = 2t - 1 & y(t) = t + 2 & z(t) = -3t + 2 \end{array}$$

Por lo tanto, la posición de la partícula en términos de t están dadas por las ecuaciones paramétricas:

$$Q(t) = (2t - 1,\ t + 2,\ -3t + 2)$$

Ejemplo 2. Evalúe si el plano $x + 2y + 4z = 7$ es intersectado por la línea que pasa por los puntos $Q_0 = (-1,\ 2,\ 2)$ y $Q_1 = (1,\ 3,\ -1)$. De ser así, señale en qué lugar se cruzan.

Solución. Para conocer a la recta que intersecta al plano señalado en el ejemplo, podemos parametrizar un punto $Q(t)$ mediante Q_0 y Q_1. Como son los mismos del ejemplo anterior, entonces:

$$Q(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (2t - 1,\ t + 2,\ -3t + 2)$$

Por lo tanto, la trayectoria de $Q(t)$ forma una linea. Para evaluar si intersecta al plano $x + 2y + 4z = 7$, expresémosla mediante este punto.

$$x(t) + 2y(t) + 4z(t) = 7$$
$$2t - 1 + 2(t + 2) + 4(-3t + 2) = 7$$

Al resolver esta ecuación para t, surgen tres opciones que se resumen en la siguiente tabla:

t	Igualdad	Comportamiento de Línea	Intersección: Cantidad de puntos
Existe	-	Intersecta al plano	Uno
No existe	Se cumple	Pertenece al plano	Todos los de la línea
No existe	No se cumple	Paralela al plano	Ninguno

Si obtenemos un valor para t (primera fila de la tabla), quiere decir que el plano intersecta a la línea en un punto, el que se puede conocer al reemplazarlo en las ecuaciones paramétricas.

En cambio, si llega a cancelarse el parámetro t en la ecuación, se puede generar una igualdad válida o una incorrecta (segunda y tercera fila). El primer caso significa que la recta es parte del plano, mientras que la segunda quiere decir que es paralela a este.

Resolvamos la ecuación para t.

$$\begin{aligned}(2t-1)+2(t+2)+4(-3t+2)&=7\\ 2t-1+2t+4-12t+8&=7\\ t&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Así, la recta formada por $Q(t)$ intersecta al plano $x+2y+4z=7$ en un punto. Para conocerlo, reemplazamos a t en sus ecuaciones paramétricas.

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1,\ \left(\frac{1}{2}\right)+2,\ -3\left(\frac{1}{2}\right)+2\right)=\left(0,\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

En consecuencia, la recta formada por $Q(t)=(2t-1,\ t+2,\ -3t+2)$ intersecta al plano $x+2y+4z=7$ en el punto $(0,\ 5/2,\ 1/2)$.

2. Ecuaciones paramétricas de una curva.

También es posible expresar a una **curva** mediante ecuaciones paramétricas. Veamos el caso de una cicloide generada por la trayectoria de un punto en un círculo que se mueve sobre una recta horizontal.[1]

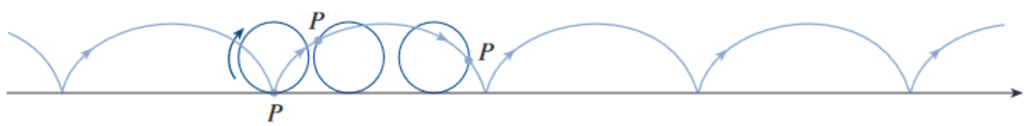
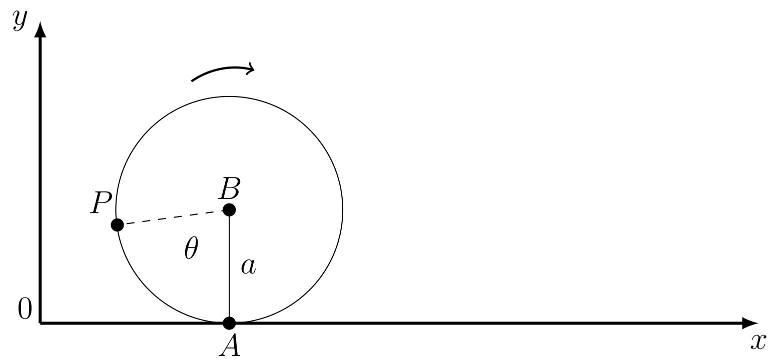


Figura 1: Stewart, J (2017). *Cálculo. Trascendentes Tempranas.* Pp. 643.

Para trazar la cicloide tenemos que conocer la **posición del punto** mientras rueda el círculo. Esto es posible de obtener usando **ecuaciones paramétricas**.

Digamos que tenemos un círculo de radio $r=a$ con centro B y un punto P en su circunferencia, el cual está rodando a una rapidez constante a lo largo del eje x del plano cartesiano[2], donde A es el punto donde toca dicho lugar.

[1]También es posible generar una cicloide a partir del movimiento de un péndulo.
[2]Si fuese un camino, sería uno sin irregularidades o totalmente plano.



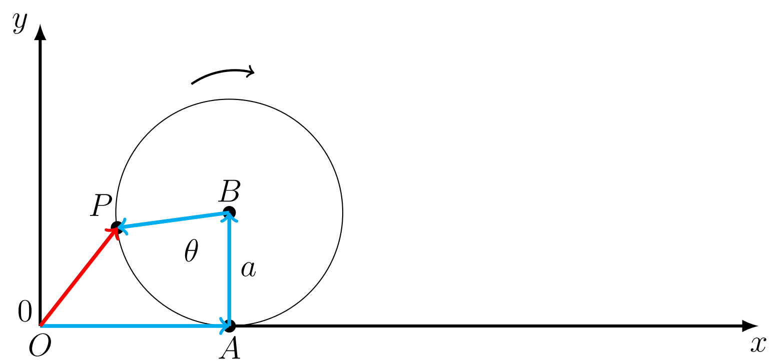
Para conocer las ecuaciones paramétricas de P, usaremos el ángulo θ que se forma entre los radios $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$, puesto que es la variable que indica mejor la posición de este punto mientras rueda el círculo.

$$P = (x(\theta),\ y(\theta))$$

En cuanto a las ecuaciones de $x(\theta)$ e $y(\theta)$, se obtendrán mediante los componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ que resulta de la suma entre $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BP}$, con O siendo el origen.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

Geométricamente, nos estamos refiriendo a lo siguiente:



Comencemos buscando los componentes de $\overrightarrow{OA}$. Como el punto A está tocando al eje x mientras el círculo rueda a una rapidez constante, quiere decir que estuvo en el origen $O(0,\ 0)$. Por lo tanto, la distancia $d(OA) = |\overrightarrow{OA}|$ será igual a la longitud del arco[3] $\overline{AP}$.

[3]La longitud del arco de un círculo corresponde al producto entre la fracción del ángulo que está subtendido del arco con respecto al ángulo del círculo completo (ambos en radianes) y la circunferencia de este último.

$$\overline{AP} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot (2\pi a) = a \cdot \theta$$

$$\overline{AP} = d(OA) = |\overrightarrow{OA}| = a \cdot \theta$$

Y como $\overrightarrow{OA}$ está horizontalmente en el eje x, entonces sus componentes son:

$$\overrightarrow{OA} = \langle a\theta,\ 0\rangle$$

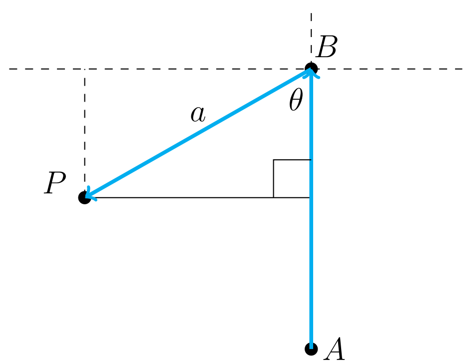
En cuanto a $\overrightarrow{AB}$, como es paralelo a y y su magnitud es igual al radio del círculo, podemos garantizar que sus componentes son:

$$\overrightarrow{AB} = \langle 0,\ a\rangle$$

Con respecto a $\overrightarrow{BP}$, primero veamos que su magnitud es igual al radio del círculo, ya que comprende entre el centro B y el punto P que está en su circunferencia.

$$\left|\overrightarrow{BP}\right| = a$$

Además, entre $\overrightarrow{BP}$ y parte de $\overrightarrow{AB}$, junto con θ, podemos formar un triángulo rectángulo.



Como podemos observar, a partir de los catetos del triángulo rectángulo de arriba podemos conocer los componentes de $\overrightarrow{BP}$ por medio de las funciones trigonométricas $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$.

$$\sin(\theta) = \frac{\text{OP}}{a} \qquad\qquad \cos(\theta) = \frac{\text{ADY}}{a}$$

$$a \cdot \sin(\theta) = \text{OP} \qquad\qquad a \cdot \cos(\theta) = \text{ADY}$$

Ahora bien, veamos que el ángulo θ está en el tercer cuadrante del plano cartesiano que se forma a partir del centro B del círculo, por lo que los valores de OP y ADY serán negativos debido a que el $\sin(\theta) < 0$ y $\cos(\theta) < 0$ en dicho lugar. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{BP} = \langle -a \cdot \sin(\theta),\ -a \cdot \cos(\theta)\rangle$$

Por consiguiente, los componentes de $\overrightarrow{OP}$ son:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \langle a\theta,\ 0\rangle + \langle 0,\ a\rangle + \langle -a\cdot\sin(\theta),\ -a\cdot\cos(\theta)\rangle \\ &= \langle a\theta - a\sin(\theta),\ a - a\cos(\theta)\rangle\end{aligned}$$

y las ecuaciones paramétricas de P con las cuales obtenemos la cicloide, son:

$$P = (a\theta - a\sin(\theta),\ a - a\cos(\theta))$$

donde θ es el parámetro (varía) y a el radio del círculo (se mantiene constante).