Clase 7. Resolviendo $Ax = 0$. Variables Pivote y Soluciones Especiales.

Curso 'Linear Algebra' del MIT.

Ahora y en la siguiente sección, comenzaremos a buscar soluciones de subespacios vectoriales. En esta ocasión nos concentraremos en el **espacio nulo**, intentando resolver $Ax = 0$. Producto de lo anterior, nos toparemos con 3 nuevos conceptos: el **rango** (*rank*) de una matriz y las matrices en forma **escalonada** y **escalonada reducida**. Estas dos últimas resultan de haber aplicado el método de eliminación de Gauss a la matriz A.

7.1 Calculando el Espacio Nulo.

Tratemos de calcular el espacio nulo o, en otras palabras, buscar las soluciones de un sistema $Ax = 0$. A continuación tenemos la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Observemos que no todas las filas y columnas de A son independientes. En particular, la tercera fila es la suma de las dos anteriores, mientras que la segunda columna es multiplo de 2 (o el doble) de la primera.

Para resolver $Ax = 0$ usaremos el método (algoritmo) de eliminación de Gauss. Algo a destacar es que no alteraremos el espacio nulo, puesto que solo iremos intercambiando o simplificando entradas. Por otra parte, la aplicaremos a una matriz rectangular y, debido a la dependencia lineal señalada antes, nos encontraremos con entradas pivotes iguales a cero.

El procedimiento será el siguiente:

1. Multiplicar por 2 la primera fila y restar la segunda con la primera.

2. Multiplicar por 3 la primera fila y restar la tercera con la primera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Veamos que en la matriz resultante $a_{1,1} \neq 0$ (primera pivote), pero $a_{2,2} = 0$ (segunda pivote) y no podemos intercambiar filas porque $a_{3,2} = 0$ (i.e, quedamos igual). Lo que podemos hacer es tomar como segundo pivote a $a_{2,3} = 2$, lo que implica que debemos agregar un tercer paso para que $a_{3,3} = 0$.

3 Restar la tercera fila a la segunda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz U también es conocida como de **forma escalonada**, donde los "escalones" son los pivotes y, como vimos, es la que **resulta de haber aplicado el método de eliminación de Gauss** a una matriz de coeficientes A.

De ahora en adelante tomaremos en cuenta la **cantidad de entradas pivotes** de una matriz, la cual recibe el nombre de **Rango** (*rank*) y se denota como r. Es decir, el rango de A es $r = 2$ porque solo tiene dos entradas pivote (ambas en negrita en U).

7.2 Columnas Pivote y Columnas Libres.

Recordemos que el espacio nulo de U es el mismo de A, por tanto lo buscaremos resolviendo $Ux = 0$. Lo que haremos es catalogar sus columnas en dos tipos: **Columnas Pivotes** y **Columnas Libres**.

Las **columnas pivotes** de una matriz son aquellas donde sus entradas pivotes no son iguales a cero, mientras que en las **columnas libres** sí lo son. Se las denominan como "**libres**" porque al buscar los componentes de $\vec{x}$ (i.e, las soluciones del sistema), a éstas **podemos asignarles cualquier valor**, aunque los más recomendados son el 1 y el 0.

En el caso de U, sabemos que tiene dos columnas pivotes (columnas 1 y 3, en negrita) y dos libres (columnas 2 y 4):

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{2} & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que hacemos es aplicar el **método de sustitución hacia atrás** y estableciendo que $x_2 = 1$ y $x_4 = 0$ del vector $\vec{x}$, las cuales son las que multiplican a las columnas libres.

$$Ux = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_1 + 2(1) + 2x_3 + 2(0) &= 0 \\ 0(x_1) + 0(1) + 2x_3 + 4(0) &= 0 \\ 0(x_1) + 0(1) + 0x_3 + 0(0) &= 0 \end{aligned}$$

Debido a que la tercera fila consiste solo de ceros, descartémosla y busquemos el valor de x_3 a partir de la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 0(x_1) + 0(1) + 2x_3 + 4(0) &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de $x_3 = 0$ busquemos x_1 en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x_1 + 2(1) + 2(0) + 2(0) &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, **un** vector del espacio nulo de U (i.e, una solución a $Ux = 0$) es el vector columna $\vec{x} = \langle -2,\ 1,\ 0,\ 0 \rangle$, el cual podemos escalar por un valor $c \in \mathbb{R}$.

$$c\vec{x} = c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pero $c\vec{x}$ **es solo una parte** del espacio nulo de A. Recordemos que en U existen dos columnas libres, debido a aquello, también podemos establecer que $x_2 = 0$ y $x_4 = 1$ y volver a aplicar el método de sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x_1 + 2(0) + 2x_3 + 2(1) &= 0 \\ 0(x_1) + 0(0) + 2x_3 + 4(1) &= 0 \\ 0(x_1) + 0(0) + 0x_3 + 0(1) &= 0 \end{aligned}$$

Otra vez, cancelamos la tercera ecuación y, a partir de la segunda, buscamos el valor de x_3.

$$\begin{aligned} 0(x_1) + 0(0) + 2x_3 + 4(1) &= 0 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Luego, reemplazamos $x_3 = -2$ en la primera ecuación para encontrar x_1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2(0) + 2(-2) + 2(1) &= 0 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

En consecuencia, otro vector del espacio nulo de A es $\vec{x} = \langle 2,\ 0,\ -2,\ 1\rangle$, el cual también podemos escalar por un número $d \in \mathbb{R}$ sin salirnos de este subespacio vectorial.

$$d\vec{x} = d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos obtener todo el espacio nulo $N(U)$, que consiste de **todas las combinaciones lineales entre $c\vec{x}$ y $d\vec{x}$** adentro de $\mathbb{R}^4$, el cual es el mismo de A.

$$N(A) = N(U) = c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y si unimos los dos vectores columna $\vec{x}$, formamos la **Matriz del Espacio Nulo** N, la cual al multiplicar a A o a U, obtenemos una **Matriz Nula**.

$$AN = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3 Soluciones Especiales.

A los vectores $\vec{x} = \langle -2,\ 1,\ 0,\ 0 \rangle$ y $\vec{x} = \langle 2,\ 0,\ -2,\ 1 \rangle$ podemos entenderlos como **Soluciones Especiales** porque provienen de "números especiales" que asignamos a los componentes de las columnas (variables) libres, que en este caso fueron x_2 y x_4.

Por lo tanto, podemos decir que el espacio nulo $N(U)$ que calculamos son **todas las combinaciones lineales entre las dos soluciones especiales**.

También, si A es una matriz rectangular de $n \times m$ con **Rango** igual a r, entonces:

$$\#\text{Columnas Pivotes de } A = r$$
$$\#\text{Columnas Libres de } A = m - r$$

Y, como vimos anteriormente, la **cantidad de soluciones especiales** está dada por el **número de columnas libres** que tengamos. Por lo tanto:

$$\#\text{Sol. Especiales} = \#\text{Columnas Libres} = m - r$$

Esto implica que la **dimensión de una matriz** N siempre será de $m \times (m - r)$.

7.4 Matriz en Forma Escalada Reducida.

Es posible seguir realizando operaciones en U para llevarla a una **Matriz en Forma Escalonada Reducida**, donde sus **pivotes son todas iguales a uno** y las **entradas por sobre y debajo** de ellas corresponden a **ceros**. La denotamos como R.

Por ejemplo, en el caso de U aún podemos eliminar la entrada $a_{1,3} = 2$ que está arriba de la segunda pivote $a_{2,3} = 2$ y hacer que esta última sea igual a 1. Para ello, realizamos los siguientes pasos:

4. Restar la primera fila a la segunda.
5. Multiplicar la segunda fila por 1/2.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, al aplicar el método de sustitución hacia atrás y estableciendo que $x_2 = 1$ y $x_4 = 0$ y, posteriormente, que $x_2 = 0$ y $x_4 = 1$, obtenemos el **mismo espacio nulo** de A y de U:

$$N(A) = N(U) = N(R) = c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una ventaja de obtener una matriz R es que las **columnas pivotes** son más fáciles de identificar, porque se ubican donde existen las entradas pivotes, que son iguales a 1. Mientras que en aquellas donde ésto no ocurre, podemos deducir que son **columnas libres**.

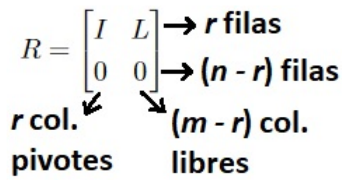
Otra ventaja, es que en ella **podemos encontrar las soluciones especiales casi de forma exacta**.

Unamos las columnas pivotes (1 y 3) y las columnas libres (2 y 4) de R como dos matrices distintas (sin considerar a la tercera fila), que llamaremos P y L.

$$P = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Veamos que P es una matriz identidad (I). Por otra parte, al unir las entradas x_1 y x_3 de ambas soluciones especiales $\vec{x}$, se forma una matriz que es equivalente a $-L$. En general, **una matriz escalonada reducida se conforma como bloques de matrices de $P = I$ y de L.**

Por ejemplo, digamos que tenemos una matriz en forma escalonada reducida R de $n \times m$, donde las primeras r columnas son pivotes.



Observemos que I **siempre será de** $r \times r$ **dimensiones**.

Por otra parte, para que se cumpla que $RN = 0$, la matriz N tendrá que ser:

$$N = \begin{bmatrix} -L \\ I \end{bmatrix}$$

Puesto que:

$$\begin{gathered} RN = 0 \\ \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I(-L) + LI \\ 0(-L) + 0I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Lo que esto nos está mostrando, es que las **entradas pivotes**[1] de las **soluciones especiales** siempre serán los **inversos aditivos de las entradas de las columnas libres de** A (i.e, las columnas de $-L$).

Lo anterior podemos comprobarlo al resolver $Rx = 0$. Digamos que los componentes pivotes de $\vec{x}$ son x_P y las libres x_L, entonces:

$$\begin{gathered} Rx = 0 \\ \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ x_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} + x_L \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Descartemos los segundos componentes de los vectores columnas de ambos lados de la ecuación (i.e, los ceros).

$$Ix_P + Lx_L = 0$$

[1] Es decir, las que buscamos al aplicar el método de sustitución hacia atrás habiendo asignado los valores a las entradas libres o "números especiales".

Si sumamos $-Lx_L$ a la ecuación, entonces:

$$Ix_P = -Lx_L$$
$$x_P = -Lx_L$$

Ejercicio. Calcule el espacio nulo de la siguiente matriz[2]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución. Antes de calcular $N(A)$, veamos qué información nos entrega la matriz A. En primer lugar, veamos que la tercera columna es la suma de las dos anteriores. Es decir, es linealmente dependiente mientras que las otras son independientes. Esto implica que el rango de A es $r = 2$.

Como la cantidad de columnas libres es $m - r = 3 - 2 = 1$, por tanto tenemos la misma cantidad de soluciones especiales. En otras palabras, $N(A)$ debería ser el producto entre una constante y solo un vector $\vec{x}$ de soluciones.

Ahora pasemos $A \to U$. Para ello, realicemos los siguientes pasos:

1. Multiplicar por 2 a la primera fila y restar la segunda a la primera, luego la tercera a la primera y, posteriormente, la cuarta a la primera.
2. Intercambiar la cuarta por la tercera fila.
3. Multiplicar por 2 la segunda fila y restar la tercera con la segunda.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[2]Es A^T del ejemplo anterior xd.

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&4&4\\0&0&0\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&4\\0&4&4\\0&0&0\end{bmatrix} \Longrightarrow U = \begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Sigamos operando sobre U para que $U \to R$. Los pasos que realizaremos son:

1. Restar la primera fila a la segunda.
2. Multiplicar por $1/2$ la segunda fila.

$$U = \begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Longrightarrow R = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Finalmente, resolvamos $Rx = 0$. Ya sabemos que solo tenemos una columna libre, por lo que solo debemos asignar un "número especial". Establezcamos que $x_3 = 1$ (si es cero, no obtendríamos información alguna de las soluciones).

$$Rx = 0$$
$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Como sistema de ecuaciones quedaría de la siguiente manera:

$$1x_1 + 0x_2 + 1(1) = 0$$
$$0x_1 + 1x_2 + 1(1) = 0$$

Calculemos x_2 a partir de la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 0x_1 + 1x_2 + 1(1) &= 0 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Y, reemplazando $x_2 = -1$ en la primera ecuación, calculemos x_1.

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0(-1) + 1(1) &= 0 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el espacio nulo de A corresponde a:

$$N(A) = N(U) = N(R) = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$