

Clase 1: Introducción a la Probabilidad y Métodos de Conteo.

Harvard Statistics 110: Probability.

Resumen

El concepto de probabilidad ha ido cambiando desde que comenzó a formalizarse, pero su idea central se ha mantenido casi intacta, es por ello que en esta primera clase estudiaremos su primera definición (en ocasiones etiquetada como “ingenua” o como “clásica”). También revisaremos algunos métodos de conteo que facilitan su cálculo.

1. Definición de probabilidad.

Muchas veces nos gustaría conocer de antemano el resultado de una acción que queremos realizar. Como no podemos saberlo de forma exacta, definimos ciertos escenarios y establecemos qué tan posible es que cada uno ocurra. El área de la matemática que describe numéricamente esa (in)certidumbre se conoce como **Probabilidad**.

Las primeras descripciones matemáticas de las probabilidades tienen su origen en los juegos de azar. Aquello se puede ver, por ejemplo, en la correspondencia realizada entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal alrededor del año 1654.

No obstante, lo que se conoce como la “definición ingenua (o clásica) de la probabilidad” es adjudicada a Gerolamo Cardano un siglo antes de Fermat y Pascal. Para entenderla, debemos tener un conocimiento básico sobre teoría de conjuntos que veremos a continuación.

1.1. Breve revisión sobre teoría de conjuntos.

1.1.1. Conjuntos.

Un **conjunto** es una colección abstracta y **no ordenada** de distintos objetos llamados **elementos** o miembros.

Una manera común de expresar un conjunto es usando el **método de Roster**, que consiste en enlistar todos sus elementos adentro de unos $\{ \}$. Por ejemplo, es posible escribir a los miembros 1, 2 y 7 de un conjunto A como:

$$A = \{1, 2, 7\}$$

Otra forma de denotar a un conjunto es indicando la propiedad que cumplen sus elementos. Dicho método se conoce como **constructor de conjunto** (*set builder*)¹. A continuación tenemos un conjunto V de enteros positivos menores a 15.

$$V = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 15\}$$

El símbolo \in indica la pertenencia de un objeto a un conjunto y su opuesto es denotado como \notin . Por otra parte, $|$ se lee de forma literal como “tal que”.

El **conjunto que no tiene elementos** se conoce como **conjunto vacío** (o nulo) y se expresa como \emptyset , mientras que el que tiene **solo uno** (por ejemplo, $\{a\}$) se llama **singleton**.

1.1.2. Subconjuntos y complemento de un conjunto.

Un conjunto B es un **subconjunto** de A ($B \subseteq A$) **si todos sus elementos también son parte de A** . Si se cumple que $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$, entonces $A = B$. En cambio, si $B \subseteq A$ y $A \not\subseteq B$, entonces B es un **subconjunto propio** de A ($A \subset B$).

Dos consecuencias de lo señalado sobre los subconjuntos son que $A \subseteq A$ (i.e, todo conjunto es un subconjunto de sí mismo) y que $\emptyset \subset A$ para todo A .²

El **complemento** de A , A^c , es el conjunto de elementos que **no son parte de A** .

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

1.1.3. Operaciones sobre conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto que contiene a todos los **elementos de A o B o ambos** recibe el nombre de **unión** de A y B y es denotado como $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

¹Herbert Enderton en *Elements of Set Theory* lo llama **método de abstracción** (1977: 4).

²Es una **verdad vacua** (*vacuous truth*): Esta afirmación sería falsa solo si $x \in \emptyset$ para $x \notin A$, pero eso es imposible ya que \emptyset no tiene elementos. Por lo tanto, al no ser falsa, solo puede ser verdadera para todo A . Este razonamiento es usado por Paul Halmos en *Naive Set Theory* (1974: 8).

La **intersección** de A y B , $A \cap B$, corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen **tanto a A como a B** .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Si no hay elementos en común entre A y B o, en otras palabras, si $A \cap B = \emptyset$, se concluye que son **conjuntos disjuntos**.

Es posible considerar la unión o intersección de una **cantidad infinita de conjuntos**.

La **unión** de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el conjunto del cual son parte todos los elementos que son **miembros de al menos un A_n** .

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots = \{x \mid x \in A_n \text{ para algún } n\}$$

Mientras que la **intersección** de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el conjunto que contiene a los elementos que son **miembros de todos los A_n** .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots = \{x \mid x \in A_n \text{ para todo } n\}$$

Un conjunto M es una **Partición** de otro conjunto A si consiste de una colección $A_k \subseteq M$, para $k = 1, 2, \dots, n$, donde:

1. $\bigcup_{k=1}^n A_k = M$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

De las operaciones entre conjuntos se extraen las siguientes propiedades o leyes.

| Propiedad/Ley | Unión | Intersección |
|---------------|--|--|
| Conmutativa | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| Asociativa | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| Distributiva | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| de Morgan | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ | $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ |

1.1.4. Cardinalidad de un conjunto.

La **cardinalidad** o tamaño de un conjunto A , $|A|$, es un valor que indica la **cantidad de elementos** que pertenecen a A .

Solo es posible obtener la cardinalidad de un conjunto **finito**. Para aquellos que son **infinitos** existen dos tipos:

1. **Infinitos contables**: Si su tamaño es igual a la del conjunto de los **enteros positivos**.
2. **Infinitos incontables**.

Si dos conjuntos A y B son **finitos**, es posible calcular la cardinalidad de su **unión** como:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1.1.5. Pares no ordenados y ordenados.

Un **par no ordenado** (*unordered pair*) $\{a, b\}$ es aquel conjunto que consiste exactamente de dos elementos distintos , a y b , **no ordenados**. Esta última característica quiere decir que:

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Un **par ordenado** (*ordered pair*) (a, b) es una lista **ordenada** de solo dos elementos distintos a y b . Estos últimos se indican por su posición: a es la primera coordenada y b la segunda de (a, b) . Por otra parte, se lo categoriza como “**ordenado**” si se cumple la siguiente condición:

$$(a, b) = (b, a) \iff a = b \text{ y } b = a$$

1.1.6. Multiconjuntos, tuplas y sucesiones.

Los **multiconjuntos** son una colección **no ordenada finita o infinita** de objetos que **pueden repetirse**.

Las **tuplas** corresponden a **listas finitas ordenadas** de objetos distintos o **repetidos**. Se las menciona como “ **n -tupla**” si consisten de n elementos.

En cuanto a las **sucesiones** (o secuencias), son una colección **ordenada finita o infinita de objetos** que pueden tener **elementos repetidos**.

1.1.7. Producto cartesiano.

El **producto cartesiano** entre dos conjuntos A y B , $A \times B$, es el conjunto de **todos los pares ordenados** que pueden formarse entre **los elementos de ambos**.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

1.2. Definición “ingenua” de probabilidad.

Consideremos los siguientes conceptos:

- **Espacio Muestral:** Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento³.
- **Evento:** Es un subconjunto del espacio muestral.

Sean S el espacio muestral de un experimento, $A \subseteq S$ un evento de éste y $P : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. La **definición ingenua** de las probabilidades indica que si se cumple que:

1. El espacio muestral (S) es **finito**.
2. Cada resultado tiene la **misma posibilidad de ocurrir**.

Entonces la probabilidad de A , $P(A)$, corresponde al cociente:

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de resultados favorables a } A}{\text{N}^\circ \text{ de resultados posibles}} = \frac{|A|}{|S|}$$

Se cataloga como “ingenua” esta definición de probabilidad porque, en la práctica, sus supuestos no son tan sencillos de alcanzar, pero debe ser entendida en su contexto de origen. Ha sido adjudicada al polimata italiano Gerolamo Cardano en el siglo XVI, quien la usó para ganar en el juego de apuestas⁴. Ahí es más posible que ambas condiciones se reunan.

La definición ingenua de probabilidad sigue siendo usada en la actualidad y las otras que veremos a lo largo del curso se construyen a partir de ella. Su uso **correcto** dependerá de cómo lo justifiquemos a partir de los supuestos de cada una.

2. Métodos de conteo.

La definición de probabilidad estudiada hasta ahora requiere las cardinalidades del espacio muestral y de su evento. Contar los elementos de ambos conjuntos es sencillo en experimentos

³Entiéndase la palabra “experimento” como cualquier suceso del cual se obtienen resultados.

⁴Larsen y Marx (2018). *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*. Pp 9 y 16.

simples⁵, pero se hace más tedioso para casos más complejos. Afortunadamente, en el área de la matemática llamada Combinatoria existen técnicas que facilitan este proceso.

Richard Brualdi en *Introductory Combinatorics* indica cuatro reglas básicas (o principios) de conteo: De la adición, del producto, de la sustracción y de la división (2009: 27-35). En esta clase nos centraremos fundamentalmente en la segunda, que también es posible encontrarla como “teorema fundamental de conteo”⁶ o “principio básico de conteo”⁷.

2.1. Regla del producto.

La **regla del producto** señala que si un conjunto S consiste de k -tuplas (a_1, \dots, a_k) donde:

- El primer término $a_1 \in X$ donde $|X| = n_1$ (i.e, hay n_1 opciones de a_1).
- Para cada a_1 hay n_2 opciones de a_2 .
- Para cada a_2 hay n_3 opciones de a_3 .
- ...
- Para cada a_{k-1} hay n_k opciones de a_k .

entonces:

$$|S| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^k n_i$$

Este tipo de conjuntos es muy común en procesos que pueden ser divididos en **etapas**.

Ejemplo 1. Una persona debe armar su horario de clases donde cada día debe contar con una hora para la mañana y otra para la tarde (en ese orden). La cantidad de horas disponibles para ambas jornadas son:

- 3 en la mañana.
- 4 en la tarde.

¿Cuántos horarios puede formar con las horas disponibles?

Solución. Como cada hora de la mañana debe tener una de las de la tarde, podemos resolver este problema separándolo en dos partes.

⁵Pensemos en los clásicos casos de los lanzamientos de una moneda o un dado, asumiendo que ambos objetos no están cargados a un resultado.

⁶Casella y Berger (2002). *Statistical Inference*. Pp. 13.

⁷Ross (2012). *A First Course in Probability*. Pp. 2.

En primer lugar, podemos elegir tres horas para la mañana. Denotémoslas como M_i y digamos que son parte de un conjunto X .

$$X = \{M_1, M_2, M_3\}$$

Luego, para cada M_i tenemos cuatro horas de la tarde, T_j , disponibles. Por lo tanto, si definimos que H es el conjunto de todos los horarios formados, usando la regla del producto podemos calcular su tamaño como:

$$|H| = 3 \cdot 4 = 12$$

donde:

$$H = \left\{ \begin{array}{l} (M_1, T_1), (M_1, T_2), (M_1, T_3), (M_1, T_4), \\ (M_2, T_1), (M_2, T_2), (M_2, T_3), (M_2, T_4), \\ (M_3, T_1), (M_3, T_2), (M_3, T_3), (M_3, T_4) \end{array} \right\}$$

En otras palabras, podemos formar 12 horarios entre las 3 horas disponibles de la mañana y las 4 de la tarde.

Para este tipo de problemas, suele ser útil ayudarse con un **diagrama de árbol** como el que se observa a continuación.

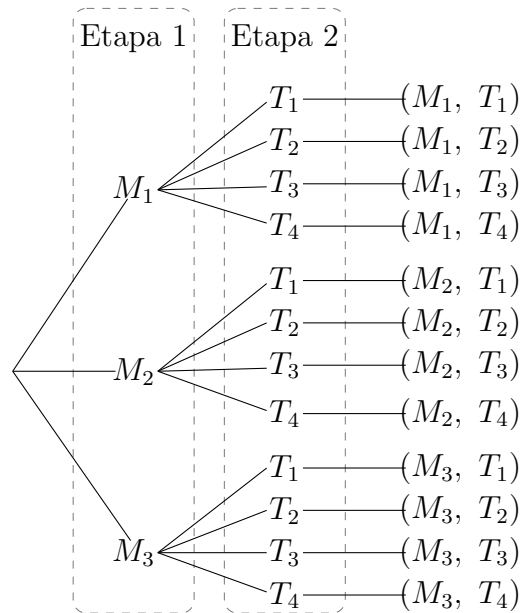


Figura 1: Diagrama de árbol del ejemplo 1.

Mediante la regla del producto podemos obtener fórmulas para contar las formas de ordenar (permutar) o de agrupar (combinar) los elementos de un conjunto. A continuación las vemos.

2.2. Permutaciones.

Un caso habitual en los problemas de conteo, es calcular la **cantidad de veces que podemos ordenar los elementos de un conjunto**. Las tuplas resultantes de este proceso reciben el nombre de **Permutaciones**.

Por ejemplo, digamos que $V = \{a, b, c\}$. De este conjunto podemos obtener uno nuevo X con las seis permutaciones que es posible conseguir con los elementos del primero.

$$X = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$$

donde $|X| = 6$.

La cantidad de permutaciones se puede obtener mediante la **regla del producto**, ya que es un proceso que puede ser dividido en etapas. Veámoslo con el ejemplo anterior.

Para la primera entrada de cada permutación en X tenemos tres opciones. Luego, para cada una de ellas tenemos dos opciones que irán en la segunda entrada. Finalmente, solo es posible elegir un elemento para completar las 3-tuplas.⁸ En consecuencia,

$$|X| = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

En general, la **cantidad de permutaciones de todos los elementos** de un conjunto finito de tamaño $n \in \mathbb{Z}$ siempre será igual al producto de los enteros positivos menores o iguales a n . Dicha operación se denota como $n!$ y recibe el nombre de **n factorial**.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i$$

En ese sentido, $|X| = 3!$ ya que $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

En este curso (a menos que se indique lo contrario) asumiremos la convención de que $0! = 1$.

2.2.1. Permutaciones de r elementos.

También es posible generar permutaciones de tamaño menor al del conjunto inicial.

Por ejemplo, digamos que tenemos una caja llena de pelotas rojas, azules, verdes, naranjas y blancas y nos interesa saber cuántos pares de **distinto** color podemos formar.

Hay cinco colores para la primera pelota y, al elegir una de ellas, quedaremos con cuatro

⁸También podemos ayudarnos con un diagrama de árbol. En este caso debe consistir de tres etapas.

restantes para la segunda, ya que deben ser distintas. Por lo tanto, si X es el conjunto que agrupa a estas permutaciones, su tamaño será igual a:

$$|X| = 5 \cdot 4 = 20$$

Es decir, podemos formar 20 pares de pelotas de distinto color.

Es posible generalizar el proceso de conteo del ejemplo anterior. Sean n la cantidad de elementos de un conjunto A , r el número de sus objetos que permutaremos, con $1 \leq r \leq n$, y B el conjunto de estos últimos. Veremos que:

$$|B| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (r - 1))$$

ya que para la primera entrada de las permutaciones tenemos n opciones, para cada una de ellas tenemos $n - 1$ restantes y si seguimos hasta la r -ésima, quedaremos con $(n - (r - 1))$ alternativas. Como $(n - (r - 1)) = (n - r + 1)$, la igualdad de arriba podemos escribirla como:

$$|B| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$$

Lo que acabamos de calcular se conoce como la **r -permutación** de un conjunto de n elementos y se denota como $P(n, r)$.⁹

La cantidad de pares de pelotas de distintos colores que vimos en el ejemplo anterior es igual a la 2-permutación de un conjunto de 5 objetos:

$$|X| = P(5, 2) = 5 \cdot (5 - 2 + 1) = 20$$

La r -permutación de un conjunto también suele obtenerse usando factoriales. Usemos el ejemplo anterior para ilustrarlo mejor.

$$|X| = 5 \cdot 4$$

Si multiplicamos por $3!/3!$ esta igualdad obtendremos que:

$$|X| = (5 \cdot 4) \cdot \frac{3!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5 - 2)!} = 20$$

⁹También es posible encontrarlo como ${}_nP_r$, $P_{n,r}$ y nP_r .

Por lo tanto, la r -permutación de un conjunto de tamaño igual a n corresponde a

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$$

Es posible demostrar esta última igualdad expandiendo los factoriales de su lado izquierdo.

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-r)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(r-1)) \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \quad (\text{Q. E. D}) \end{aligned}$$

Por otra parte, observemos que si $r = n$, entonces:

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Es decir, se cumple que la cantidad de permutaciones de todos los elementos de un conjunto es igual a $n!$.

Como es más fácil de recordar, de ahora en adelante trabajaremos con la fórmula de $P(n, r)$ que es definida usando factoriales.

2.2.2. Permutaciones de r elementos con reemplazo.

Hasta ahora hemos considerado permutaciones de un conjunto que no contienen elementos repetidos. Si relajamos esta condición, es posible encontrar una generalización matemática muy sencilla.

Consideremos la cantidad de 2-permutaciones de un conjunto $M = \{a, b, c\}$ permitiendo que hayan elementos repetidos en los pares ordenados. La consecuencia de este último punto, es que para ambas entradas habrán tres opciones. Por lo tanto, usando la regla del producto:

$$P(3, 2) = |X| = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

donde

$$X = \left\{ \begin{array}{ccc} (a, a), & (a, b), & (a, c) \\ (b, a), & (b, b), & (b, c) \\ (c, a), & (c, b), & (c, c) \end{array} \right\}$$

Se puede generalizar que la cantidad de **r -permutaciones con elementos repetidos** de un conjunto de tamaño n es dado por:

$$P(n, r) = n^r$$

En probabilidades se suele usar la frase “**con reemplazo**” para expresar que habrán **elementos repetidos** en una muestra. En este curso usaremos ambos conceptos como sinónimos.

2.3. Combinaciones.

En ocasiones, más que calcular la cantidad de veces que podemos ordenar los elementos de un conjunto, nos interesa saber **cuántos grupos** podemos formar con ellos. Estos últimos se conocen como **Combinaciones**.

En estricto rigor, las combinaciones son **subconjuntos** de otro conjunto, por lo tanto se diferencian de las permutaciones en que son **objetos no ordenados**.

2.3.1. Combinaciones de r elementos.

Comúnmente nos interesará el número de combinaciones de tamaño menor al del conjunto de origen. En ese caso, para un valor $1 \leq r \leq n$ con n y $r \in \mathbb{Z}$, diremos que estamos calculando la cantidad de **r -combinaciones** de un conjunto de n elementos, denotada como $C(n, r)$.¹⁰

Para calcular cuántas r -combinaciones es posible formar, podemos ayudarnos de la fórmula de las **r -permutaciones sin repetición**.

Al calcular la cantidad de r -permutaciones de un conjunto de n objetos, $P(n, r)$, estamos realizando dos tareas:

1. Crear grupos de r elementos.
2. Ordenar los elementos de cada grupo formado.

Sabemos que la cantidad de grupos de r elementos es expresada por $C(n, r)$. Por otra parte, el número de formas de ordenar los elementos de estos subconjuntos es igual a $P(r, r)$. Como el cálculo de $P(n, r)$ proviene de un proceso de dos etapas, podemos usar la **regla del producto** para expresar que:

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$$

¹⁰También es denotada como ${}_nC_r$, $C_{n,r}$ y nC_r .

Como $P(r, r) = r!$, entonces $P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$. Por lo tanto:

$$C(n, r) = \frac{1}{r!} \cdot P(n, r)$$

Es decir, el **número de r -combinaciones sin elementos repetidos** de un conjunto es la cantidad de sus r -permutaciones dividido por las veces que podemos ordenar estos tuples. Esta última operación permite que contemos como uno solo a objetos del tipo $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Al sustituir a $P(n, r)$ con su fórmula en $C(n, r)$ obtenemos que:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

El lado derecho también recibe el nombre de **coeficiente binomial** y se denota como $\binom{n}{r}$.¹¹

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Veamos que:

$$C(n, n-r) = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-[n-r])!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Por lo tanto,

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

2.3.2. Combinaciones de r elementos con reemplazo.

Calcular las r -combinaciones de un conjunto de tamaño n a partir de sus r -permutaciones es un proceso más tedioso si se permite que hayan **objetos repetidos**. A continuación veremos un método alternativo conocido como “**círculos y barras**” que permitirá reducir este trabajo y, a la vez, obtener una formalización para este tipo de conteo.

Ejemplo 2. Suponga que en una caja hay papeles de igual medida escritos con una de las siguientes letras: E, X, V, Z, U y T . Calcule cuántos pares de letras (repetidos o no) se pueden formar con estos papeles.

Solución. Usar las r -permutaciones del conjunto original desde un inicio implicaría construir $P(6, 2) = 6^2 = 36$ pares ordenados, con $n = 6$ y $r = 2$, y luego contarlos como pares no ordenados. Al no tener una fórmula para este tipo de conteo, tendría que realizarse de forma

¹¹En inglés, el símbolo $\binom{n}{r}$ se lee como “*n choose r*”. Es importante tenerlo en cuenta porque varios softwares calculan este valor mediante una función comúnmente llamada “**choose()**”.

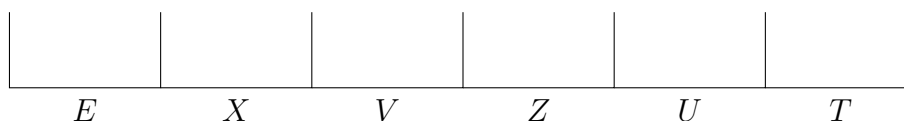
explícita¹², pero es claro que eso tomaría mucho tiempo.

Una forma más eficiente de resolver este problema es usando el método conocido como “**círculos y barras**”. En términos generales, consiste en llevar el conteo de r -combinaciones con repetición a uno sin reemplazo, pero sin alterar el objetivo original.

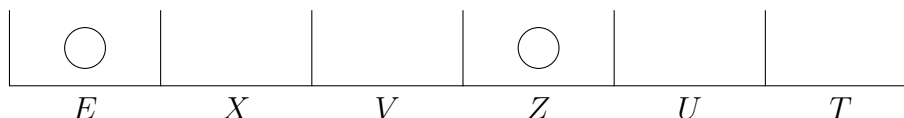
Comencemos usando los siguientes subconjuntos de $\{E, X, V, Z, U, T\}$:

$$\{E, Z\} \qquad \{V, V\}$$

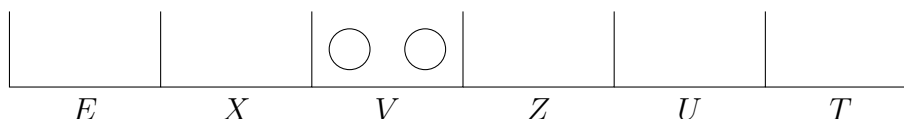
Luego, dibujemos una caja para cada letra de este ejemplo.



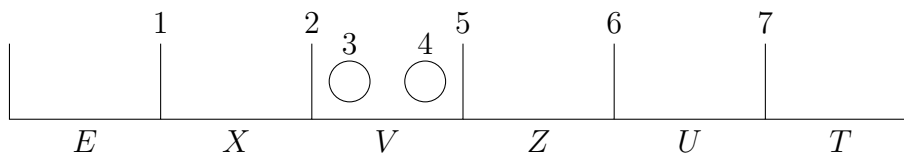
Ubiquemos un círculo en las cajas de las letras que pertenecen al subconjunto $\{E, Z\}$.



Hagamos lo mismo con $\{V, V\}$.



Si continuamos esta tarea con el resto de los pares no-ordenados, veremos que estamos intercambiando posiciones entre los círculos y los separadores internos de las cajas. Estas corresponden a 2-permutaciones (los dos círculos) sin repetición de siete objetos.



Como nuestro interés es calcular cuántos pares de letras podemos formar, el conteo de las 2-permutaciones podemos llevarlo a uno de **2-combinaciones** sin repetición.

$$C(7, 2) = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \binom{7}{2} = 21$$

¹²Por ejemplo, mediante un diagrama de árbol.

Es decir, podemos formar 21 pares con las letras E, X, V, Z, U y T , con repetición incluida.

Usando los valores $n = 6$ y $r = 2$, podemos ver que $7 = 6 + 2 - 1$. Al reemplazar este valor en el coeficiente binomial que acabamos de calcular, obtenemos lo siguiente:

$$C(6 + 2 - 1, 2) = \binom{6 + 2 - 1}{2} = \frac{(6 + 2 - 1)!}{2!((6 + 2 - 1) - 2)!} = \frac{(6 + 2 - 1)!}{2!(6 - 1)!} = 21$$

El procedimiento que acabamos de realizar se puede generalizar a la siguiente fórmula que permite calcular las **r -combinaciones con repetición** (o multiconjuntos) de un conjunto de n elementos.

$$C(n + r - 1, r) = \binom{n + r - 1}{r} = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!}$$

De esta fórmula podemos llegar a la siguiente consecuencia:

$$C(n + r - 1, n - 1) = \binom{n + r - 1}{n - 1} = \frac{(n + r - 1)!}{(n - 1)!([n + r - 1] - [n - 1])!} = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!}$$

Por lo tanto:

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$

2.4. Síntesis sobre métodos de conteo.

Habiendo entendido cada método de conteo estudiado en esta sección, es bueno tener a mano la siguiente tabla que resume sus fórmulas.

| | Orden | Sin reemplazo | Con reemplazo |
|-------------|------------|-------------------------|-----------------------------------|
| Permutación | Importa | $\frac{n!}{(n - r)!}$ | n^r |
| Combinación | No importa | $\frac{n!}{r!(n - r)!}$ | $\frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!}$ |