Clase 19. Fórmulas de los Determinantes y los Cofactores.

Curso 'Linear Algebra' del MIT.

Resumen

En esta ocasión estudiaremos dos fórmulas para calcular el determinante de una matriz de 2×2 y de $n \times n$, basándonos en las propiedades vistas en la clase anterior (principalmente, las tres primeras). La primera la nombraremos como la "Gran Fórmula" y la segunda se calcula usando Cofactores.

1. Determinante de una matriz 2×2.

El determinante de una matriz A de 2×2 como la que vemos a continuación es, junto con la de 1×1 ($\det([a]) = a$), muy fácil de recordar:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

El problema es que si la memorizamos, no nos será de mucha ayuda para conocer determinantes de mayor tamaño. Es por ello que, por medio de las **propiedades 1, 2 y 3** de éstos, buscaremos una manera de llegar a la fórmula del de 2×2 que será generalizable a los de $n \times n$.

Si el $\det(A)$ lo escribimos como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} + 0 & 0 + a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix},$$

por la propiedad 3.b) es posible expresarlo de la siguiente forma:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

De modo similar, si mantenemos constantes las segundas filas de ambos determinantes y las primeras las reescribimos como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} + 0 & 0 + a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ 0 + a_{2,1} & a_{2,2} + 0 \end{vmatrix}$$

Entonces, por la propiedad 3.b):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{vmatrix}$$

Como vimos en la clase pasada, una consecuencia de la propiedad 10 es que los determinantes con al menos una columna completa de ceros, se igualan a cero. Por lo tanto:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{vmatrix}$$

Usando la propiedad 3.a) en ambos determinantes de la derecha, podemos reescribir esta ecuación como

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Por la propiedad 1 sabemos que el determinante de una matriz identidad es 1 y, por medio de la propiedad 2, el determinante de una matriz permutación cambia de signo según si se hace un número par o impar de veces. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}a_{2,2} \cdot (1) + a_{1,2}a_{2,1} \cdot (-1) \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{aligned}$$

2. Determinante de una matriz de $n \times n$.

Existen varias maneras de encontrar el determinante de una matriz de $n \times n$. Acá veremos dos: la “Gran Fórmula” y el método del Cofactor.

2.1 La Gran Fórmula.

Anteriormente vimos que, al aplicar la propiedad 3.b) en una matriz A de 2×2, terminamos con cuatro determinantes en el lado derecho de la ecuación:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{vmatrix}$$

En general, cuando se aplica esta lógica en cualquier matriz de $n \times n$, en esta etapa siempre quedan n^n determinantes. No obstante, debido a que algunos de ellos terminan con una columna completa de ceros, solo permanecen $n!$. Por ejemplo, en la de 2×2 persisten $2! = 2$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{vmatrix}$$

Quedan $n!$ determinantes porque son solo aquellos que consisten de **una entrada en cada fila y columna**. Si hay más de una entrada en una de ellas, el determinante se cancela. Por lo tanto, estos últimos **representan una forma de ordenar sus entradas entre cada columna**.

Por ejemplo, en el determinante de una matriz de 3×3 permanecen $3! = 6$ en su suma, porque, en su forma más simple, es posible ordenar sus entradas entre sus columnas esa cantidad de veces.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, la secuencia de columnas $(1,\ 2,\ 3)$ de una matriz de 3×3 se **permuta** seis (o $3! = 6$) veces.

Recordemos que, en el paso siguiente, aplicamos la propiedad 3.a) en cada determinante de la suma que vimos arriba. Esto resulta en una **adición de los productos entre las entradas**

y matrices de permutación, con una siendo una **matriz identidad**. Por la propiedad 2, $n!/2$ pasan a ser menores a cero (i.e, negativos).

Por consiguiente, podemos resumir el cálculo de un determinante para una matriz A de $n \times n$ y de entradas $a_{i,j}$ a partir de la siguiente **Gran Fórmula**:

$$\det(A) = \sum_{(j_1,\cdots,j_n)} \pm a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$$

donde $(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n)$ son todas las **permutaciones** de las columnas $(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ y el signo $\pm$ representa la **cantidad de intercambios de fila que realiza cada matriz permutación** en los sumandos.

Volvamos al caso de la matriz de 3×3. Efectivamente, es posible realizar $3!$ veces las columnas de su determinante y, por lo tanto, sumar esa cantidad de sumandos; y $3!/2 = 3$ de ellos son menores a cero.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\det(A) &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar, las permutaciones de las columnas $(1,\ 2,\ 3)$ son:

$$(1,\ 2,\ 3) = (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$$

Ejemplo 1. Calcule el determinante de la siguiente matriz A usando la Gran Fórmula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Al ser A una matriz de 4×4, su determinante consistirá de $4! = 24$ términos. No obstante, en este caso podemos ahorrar tiempo y reducir esa cantidad, porque muchas de sus entradas son iguales a cero, por lo que no es necesario considerarlas. Por lo tanto, consideremos solo las columnas y filas donde éstas son iguales a 1.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1) + 1(1) \\ \det(A) &= 0 \end{aligned}$$

Como el $\det(A) = 0$, por la propiedad 8 podemos confirmar que A es una matriz singular o no invertible.

2.2 Método de los Cofactores.

Regresemos a la fórmula del determinante de una matriz A de 3×3.

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

Si observamos bien, notaremos que **cada entrada se repite** dos veces en los sumandos. En realidad, lo hacen en $(n-1)!$ ocasiones. Esto nos da la posibilidad de **factorizarlos con respecto a una de sus filas**.

Por ejemplo, factoricemos el lado derecho de la ecuación de arriba a partir de las entradas de la primera fila (o fila 1) del $\det(A)$.

$$\det(A) = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1})$$

Veamos que cada paréntesis sigue la forma de la fórmula de un determinante de 2×2.

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Solo por conveniencia, reescribamos el lado derecho de la siguiente manera:

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}\right) + a_{1,2} \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}\right) + a_{1,3} \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}\right)$$

Los determinantes que se pueden apreciar en los paréntesis, reciben el nombre de **Menores** (*Minors*) y se denotan como $M_{i,j}$; mientras que los números que resultan del producto entre éstos y los ± 1 se conoce como **Cofactores** $C_{i,j}$.

Básicamente, los **menores** son **determinantes de submatrices de la matriz original** que se forman de las entradas que no se encuentran en la fila y columna de aquella que factorizamos según su fila. En consecuencia, son de $(n-1)\times(n-1)$ dimensiones. A continuación ilustramos de mejor manera esta idea con la ecuación anterior.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{vmatrix}$$

En cuanto a los **cofactores**, el signo de éstos sigue el siguiente patrón: Si la suma entre el número de fila y el número de columna de la entrada que hemos factorizado es un número par, entonces es de signo positivo; y si es impar, pasa a ser de signo negativo. De forma más resumida, se señala que:

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$$

donde i y j representan el número de fila y columna de la entrada $a_{i,j}$ que decidimos factorizar inicialmente según su fila en la matriz A.

Por lo tanto, el determinante de la matriz A de 3×3 podemos obtenerlo a partir de la siguiente fórmula:

$$\det(A) = a_{1,1}C_{1,1} + a_{1,2}C_{1,2} + a_{1,3}C_{1,3}$$

La factorización por la fila que hemos señalado, formalmente se conoce como **expansión**. Por ejemplo, en el caso del determinante que calculamos arriba lo indicamos como "el determinante de A expandido por la primera fila".

Así, podemos resumir la fórmula del determinante de una matriz de $n \times n$ usando **cofactores** como:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}C_{i,j}$$

donde i se mantiene fijo según la fila por la cual queramos expandir este determinante.