Clase 8. Resolviendo $Ax = b$.

Curso 'Linear Algebra' del MIT.

Ya que somos capaces de resolver el espacio nulo de una matriz A de coeficientes, ahora lo haremos con $Ax = b$. Veremos la condición para poder resolver este sistema, cómo encontrar una solución particular a partir del vector $\vec{b}$ que elijamos y que al incluir el $N(A)$ podemos conocer la solución completa, en caso de que exista. También, que por medio del rango de A podemos saber de antemano la existencia de soluciones y su cantidad.

8.1 Solución Completa de $Ax = b$.

Volvamos a trabajar con el mismo sistema de ecuaciones lineales de la clase anterior, pero ahora sin conocer los componentes de $\vec{b}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$$

Que es lo mismo a:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Veamos que la **tercera fila** de A es **la suma de la primera con la segunda**. Esto implica que b_3 **necesariamente debe ser** $b_3 = b_1 + b_2$, en caso contrario no podremos resolver el sistema de ecuaciones. En otras palabras, **para que el sistema sea soluble, $\vec{b}$ debe estar en el** $C(A)$.

Lo anterior también podemos descubrirlo a partir del método de eliminación gaussiano. Como necesitamos que $\vec{b}$ se mantenga inalterado, lo integramos en A haciendo que sea una **Matriz Aumentada**[1].

$$A_{\text{aum}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right]$$

Para que $A_{\text{aum}} \to U_{\text{aum}}$, realizaremos los siguientes pasos:

1. Multiplicar por 2 la primera fila y restar la segunda con la primera.
2. Multiplicar por 3 la primera fila y restar la tercera con la primera.
3. Restar la tercera fila a la segunda.

$$A_{\text{aum}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 & 2b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 6 & 6 & 3b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right] \Longrightarrow U_{\text{aum}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

Primero, veamos que las primeras cuatro entradas de la tercera fila de U_{aum} son ceros como producto de la dependencia lineal de dicha fila en A. Es la manera en que podemos confirmar aquello a partir del método de Gauss. Por otra parte, necesariamente $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ debido a que las anteriores entradas son ceros. Por lo tanto, si despejamos b_3 en esa ecuación, se confirma que $b_3 = b_1 + b_2$.

Si, por ejemplo, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, implica que:

$$U_{\text{aum}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 - 2(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 - 5 - 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

[1] Recordemos que es de la forma $A_{\text{aum}} = [A|b]$

8.1.1 Condición para que el sistema lineal pueda ser resuelto.

Esto nos muestra que, efectivamente, el **vector $\vec{b}$ debe resultar de las combinaciones lineales de las columnas de** A (i.e, es necesario que $\vec{b} \in C(A)$) para que el sistema de ecuaciones lineales pueda ser resuelto.

En ese sentido, si de una combinación (i.e, sumas y productos) de filas se obtiene un vector fila que corresponde a $\vec{0}$, entonces la misma combinación entre los componentes de $\vec{b}$ debe ser igual a cero para que podamos resolver $Ax = b$.

8.1.2 Buscando una Solución Particular para $Ax = b$.

Sigamos trabajando con $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, ya que pertenece al $C(A)$. Para resolver $Ax = b$, lo primero que hacemos es buscar una solución para dicho $\vec{b}$, que podemos entender como una **solución particular**. Para ello:

1. Identificamos las columnas libres y pivotes de A.
2. Establecemos que los componentes libres de $\vec{x}$ sean iguales a cero.
3. Resolvemos $Ax = b$ para las componentes pivotes de $\vec{x}$.

A partir de U_{aum} podemos determinar que las columnas pivotes de A son la primera y tercera, mientras que la segunda y cuarta son libres. Por lo tanto, usemos U y el vector $\vec{b}$ de U_{aum} para encontrar la solución particular de $Ax = b$.

$$Ux = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo anterior podemos escribirlo como:

$$\begin{cases} x_1 + 2(0) + 2x_3 + 2(0) = 1 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 + 4(0) = 3 \end{cases}$$

Aplicando el **método de sustitución hacia atrás**, veremos que $x_3 = 3/2$ (a partir de la segunda ecuación) y, por consiguiente, que $x_1 = -2$ (por medio de la primera ecuación). Por lo tanto, la solución particular de $Ax = b$ ($\vec{x}_{\text{part}}$) que obtenemos para el vector $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ es:

$$\vec{x}_{\text{part}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.1.3 La suma entre la Solución Particular y las del $N(A)$.

Por ahora solo tenemos una parte de la solución de $Ax = b$ ($\vec{x}_{\text{part}}$). Para encontrarla completa, debemos **sumar los $\vec{x}$ del $N(A)$ ($\vec{x}_{N(A)}$) a la solución particular**.

Recordemos que estamos trabajando con la misma matriz A de la clase anterior, cuyo espacio nulo corresponde a:

$$N(A) = c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la **solución completa de** $Ax = b$ ($\vec{x}_{\text{comp}}$) es:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\text{comp}} &= \vec{x}_{\text{part}} + \vec{x}_{N(A)} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lo anterior se demuestra de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Ax_{\text{part}} = b \\ Ax_{N(A)} = 0 \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones, entonces:

$$\begin{aligned} Ax_{\text{part}} + Ax_{N(A)} &= b + 0 \\ A(x_{\text{part}} + x_{N(A)}) &= b \\ A\vec{x}_{\text{comp}} &= b \quad \text{(Q. E. D)} \end{aligned}$$

Algo a tener encuenta es que $\vec{x}_{\text{part}}$ **NO es un subespacio vectorial**. Uno de los principales motivos, es que no incluye al vector $\vec{0}$. Por otra parte, como vimos arriba solo permite realizar una combinación lineal. El resto las realizamos con $\vec{x}_{N(A)}$, que **sí es un subespacio vectorial** ($N(A)$).

Y en cuanto al vector $\vec{x}_{\text{comp}}$ de este ejemplo, **TAMPOCO es un subespacio vectorial**, lo cual podemos explicarlo geométricamente, pero usando nuestra imaginación, porque estamos tratando con vectores en $\mathbb{R}^4$.

El vector $\vec{x}_{N(A)}$ es un subespacio vectorial de 2 dimensiones[2], el cual podemos entenderlo como un plano, pero en 2D. Por sí solo es un subespacio vectorial, pero el ser sumado por $\vec{x}_{\text{part}}$ hace que pase por el punto terminal de este último vector y no por el punto $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$. Por lo tanto, **el vector $\vec{x}_{\text{comp}}$** que es el resultante de la suma entre $\vec{x}_{\text{part}}$ y $\vec{x}_{N(A)}$, **nunca pasará por el origen, lo que lo imposibilita de ser un subespacio vectorial**.

8.2 Cantidad de Soluciones a partir del Rango de A.

Veamos ahora cómo, a partir del **rango de una matriz de coeficientes**, podemos tener conocimiento por adelantado de la cantidad de soluciones de un sistema $Ax = b$, en caso de que exista al menos una.

8.2.1 Rango Columna Completo de una Matriz.

Digamos que tenemos una matriz rectangular A de $n \times m$. Ciertamente podemos suponer que su rango será $r \leq n$ o $r \leq m$, porque por definición[3] no puede ser mayor que la cantidad de filas y/o columnas de A.

Un caso que puede presentarse es que **el rango de la matriz sea igual a su cantidad de columnas**, es decir, que $r = m$. Cuando esto ocurre, decimos que A es una matriz de **Rango Columna Completo** (*Full Column Rank*).

Si A es de rango columna completo, significa que A **no tendrá columnas libres**, por tanto **su espacio nulo solo será el vector cero** (i.e, $N(A) = \vec{0}$). En consecuencia, **la solución completa de $Ax = b$ será su solución particular**.

$$\vec{x}_{\text{comp}} = \vec{x}_{\text{part}} + \vec{x}_{N(A)} = \vec{x}_{\text{part}} + \vec{0} = \vec{x}_{\text{part}}$$

[2]En la siguiente clase profundizaremos sobre la dimensión de un subespacio vectorial.
[3]La cantidad de entradas pivotes de A.

Por lo tanto, cuando $r = m$, $Ax = b$ será de **solución única**: **Tendrá solo una solución**, en caso de que exista, donde $\vec{b}$ será solo la combinación lineal entre las columnas de A y el vector $\vec{x} = \vec{1}$.

En cuanto a la matriz escalonada reducida de A, por lo general será de la forma $R = \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}$, donde I es la matriz identidad.

8.2.2 Rango Fila Completo de una Matriz.

También puede darse el caso en que la matriz A de $n \times m$ tenga rango $r = n$. En este caso decimos que es de **Rango Fila Completo** (*Full Row Rank*).

Si esta matriz A es de $r = n$, significa que tiene n columnas pivotes, $m - r = m - n$ columnas libres y **todas sus filas tienen una entrada pivote**, por tanto **no tendremos un vector fila que sea el** $\vec{0}$. Esto implica que **el** $\vec{b}$ **de** $Ax = b$ **siempre estará en el** $C(A)$, porque sus componentes no tendrán que cumplir algún requisito para que su suma sea igual a cero. Por lo tanto, **el sistema siempre tendrá al menos una solución**.

En otras palabras, podemos darle cualquier valor a los componentes de $\vec{b}$ y, aún así, encontrar una o infinitas soluciones para $Ax = b$.

En este caso, cuando pasamos $A \to R$, esta última matriz estará constituida (pero no siempre en el mismo orden) como $R = [I \;\, L]$, donde L son las columnas libres de A.

8.2.3 Rango Completo de una Matriz.

Ahora digamos que el rango de una matriz de coeficientes A es $r = n = m$. En otras palabras, A es una matriz cuadrada y el rango es igual a su cantidad de filas y columnas. En este caso decimos que es de **Rango Completo** (*Full Rank*).

Cuando una matriz A es de rango completo, una de sus consecuencias es que **tiene una matriz inversa** (i.e, **invertible**). Entonces, si el rango de A es $r = n = m$:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En ese sentido, la matriz escalonada reducida de A siempre será $R = I$.

Otra consecuencia, es que $N(A) = \vec{0}$, porque A también es de rango columna completo, lo que significa que $\vec{x}_{\text{comp}} = \vec{x}_{\text{part}}$.

Y una tercera consecuencia es que al ser A de rango fila completo, entonces siempre tendrá al menos una solución.

Por lo tanto, si la matriz de coeficientes A es de $r = n = m$, entonces:

- A es invertible.
- $Ax = b$ siempre tendrá una única solución, la cual será $\vec{x}_{\text{part}}$.

8.2.4 Síntesis de la relación entre el rango y la cantidad de soluciones de $Ax = b$.

Lo visto en las tres últimas subsecciones podemos resumirlo en la siguiente tabla, donde A es una matriz de coeficientes de $Ax = b$.

Rango de A	$r = n = m$	$r = m < n$	$r = n < m$	$r < n$ o $r < m$
# Soluciones de $Ax = b$	1	0 o 1	∞	0 o ∞
Forma $A \to R$	$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = [I \ L]$	$R = \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, con el rango podemos saber de antemano cuántas soluciones tendrá el sistema $Ax = b$. Si existe al menos una, para conocer sus valores (o los componentes de $\vec{x}$) solo tenemos que resolver el sistema como lo vimos en la sección 8.1.