Clase 3. Matrices y la Matriz Inversa.

MIT 18.02: Multivariable Calculus.

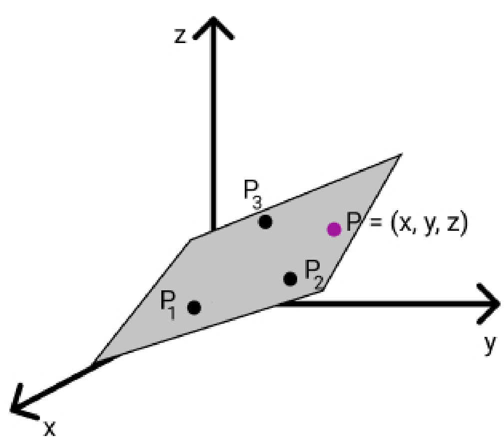
Resumen

Iniciamos esta clase viendo un último ejemplo donde ocupamos tanto los determinantes como el producto cruz y, en el resto de ella, nos centraremos en estudiar de forma introductoria a las matrices y, en particular, a la matriz inversa.

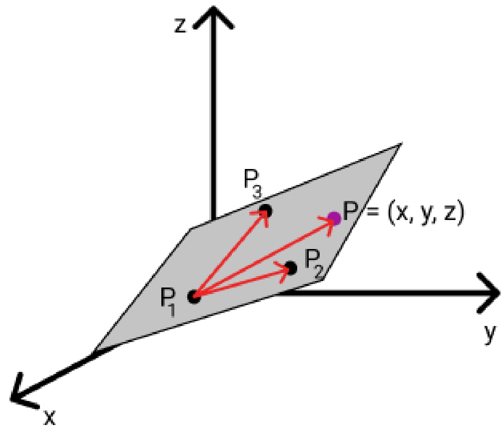
1. Continuación Determinantes y Producto Cruz.

Para terminar nuestro estudio sobre los determinantes y el producto cruz visto la clase anterior, revisemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Considere un plano en un espacio constituido por los puntos P_1, P_2 y P_3. ¿Cuál es la condición para que un cuarto punto $P = (x,\ y,\ z)$ pertenezca al mismo plano?



Solución. Para comenzar, podemos trabajar este problema trazando vectores entre los puntos como vemos a continuación.

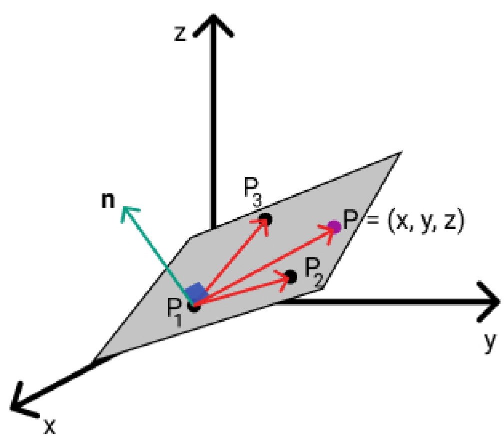


Como recordaremos de la clase pasada, el valor absoluto del determinante entre tres vectores en el espacio es igual al volumen de un paralelepipedo. Si aplicamos lo señalado a este ejemplo, para que P esté en el plano, el sólido que se forma entre los tres debería ser plano o, en otras palabras, no tener volumen. Por lo tanto, debería cumplirse que:

$$\det(\overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

para que P esté en el plano.

Otra manera de resolver este ejemplo, es trazar un vector normal $\mathbf{n}$ (i.e, perpendicular al plano) tal que $\overrightarrow{P_1P} \perp \mathbf{n}$.



Lo primero que debemos hacer, es buscar al vector $\mathbf{n}$, el cual podemos obtener a partir del producto cruz entre $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \mathbf{n}$$

Por lo tanto, para que P esté en el plano, debe cumplirse que el producto punto entre $\mathbf{n}$ y

$\overrightarrow{P_1P}$ sea igual a cero.

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$$

Veamos, además, que la operación de arriba también corresponde a un triple producto:

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

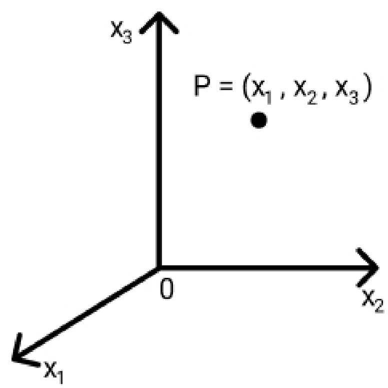
Y en la Clase 2 estudiamos que esta multiplicación de vectores es igual al volumen de un paralelepipedo en el espacio. En consecuencia, es válido señalar que:

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = \det(\overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

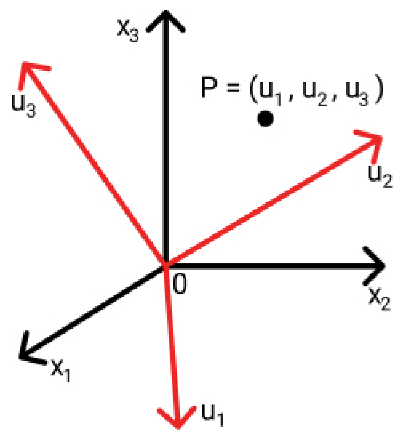
mostrándonos que ambas soluciones son correctas.

2. Matrices.

Sea el punto $P = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, el cual se encuentra en el siguiente espacio de coordenadas.



Suponga que, por necesidad, cambiamos las coordenadas del espacio y el punto P queda ubicado en $(u_1,\ u_2,\ u_3)$.



Las coordenadas u_1, u_2 y u_3 podemos expresarlas en función de x_1, x_2 y x_3 como el de a continuación:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = u_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = u_2 \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = u_3 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones de arriba podemos escribirlo como el siguiente **producto matricial**:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

La matriz **A** se conoce como **matriz de coeficientes**, ya que contiene las constantes o coeficientes del sistema de ecuaciones, mientras que los vectores **x** y **u** reciben el nombre de **vectores columna**.

En general y como acabamos de ver, una **matriz** es simplemente un arreglo rectangular de números, símbolos o expresiones ordenados en filas y columnas.

Cuando trabajamos con matrices, es habitual señalar su dimensión en la forma $n \times m$, donde n indica la cantidad de filas y m la de columnas. Para el caso de **A**, podemos ver que es de 3×3 dimensiones y, al ser $n = m$, recibe el nombre de **Matriz Cuadrada**. Si $n \neq m$, entonces se la categoriza como **Matriz Rectangular**.

Las **filas** y **columnas** de una matriz también se suelen interpretar como vectores. Los primeros reciben el nombre de **vectores fila** y son de $1 \times m$ dimensiones, mientras que los segundos se conocen como **vectores columna** y son de $n \times 1$ dimensiones. Como vimos, los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ corresponde a estos últimos, ya que son de 3×1.

Al trabajar de forma algebraica con una matriz $\mathbf{B}$ cualquiera, sus entradas se denotan en la forma $b_{i,j}$, donde i es el número de fila en el que se encuentra b y j el número de columna. El conteo se hace de arriba hacia abajo para i y de izquierda a derecha para j. Por ejemplo, la entrada $a_{2,3} = 5$ en $\mathbf{A}$ porque dicho valor está en su segunda fila y tercera columna.

Un conjunto de **matrices** son **iguales** si sus **dimensiones y entradas** también lo son.

2.1. Operaciones aritméticas con y entre matrices.

2.1.1. Adición y sustracción entre matrices.

Es posible **sumar y restar matrices** solo si son de **dimensiones iguales**. Cuando se cumple dicho requisito, aplicamos dichas operaciones entre las entradas de ellas y resulta en una nueva matriz.

Formalmente, sean dos matrices $\mathbf{V} = [v_{i,j}]$ y $\mathbf{W} = [w_{i,j}]$ de iguales dimensiones. Entonces:

$$\mathbf{V} \pm \mathbf{W} = [v_{i,j} \pm w_{i,j}]$$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+1 \\ 3+9 & 5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Multiplicación escalar de una matriz.

Al igual que al trabajar con vectores, la **multiplicación entre un escalar a una matriz** corresponde al producto entre dicho número y cada entrada de esta última.

$$c \cdot \mathbf{W} = [c \cdot w_{i,j}] \qquad (c = \text{constante})$$

2.1.3. Producto matricial.

El **producto matricial** o producto entre matrices es más restrictivo. Se puede realizar siempre que **la cantidad de columnas de la matriz de la izquierda sea igual a la cantidad de filas de la ubicada a la derecha**, puesto que es equivalente al **producto punto** entre los vectores fila de la primera y los vectores columna de la segunda.

Por ejemplo, sean dos matrices:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} \\ w_{2,1} & w_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} (w_{1,1} \cdot v_{1,1}) + (w_{1,2} \cdot v_{2,1}) & (w_{1,1} \cdot v_{1,2}) + (w_{1,2} \cdot v_{2,2}) \\ (w_{2,1} \cdot v_{1,1}) + (w_{2,2} \cdot v_{2,1}) & (w_{2,1} \cdot v_{1,2}) + (w_{2,2} \cdot v_{2,2}) \end{bmatrix}$$

En general, se cumple que si $\mathbf{W}$ es de $k \times m$ y $\mathbf{V}$ es de $m \times p$, entonces $\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}$ será una matriz de $k \times p$ dimensiones.

Por otra parte, el producto matricial representa la **transformación lineal** de la matriz ubicada en la derecha a partir de la que está en la izquierda. Por ejemplo, en $\mathbf{VW}$ se refiere a que pasamos a $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{VW}$ por medio de $\mathbf{V}$.

Otro ejemplo de una transformación lineal, es el producto matricial que vimos al inicio de esta sección:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}$$

Como vemos, podemos interpretar la operación de arriba como haber transformado a $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}$ a partir de la matriz $\mathbf{A}$. Además, la ecuación se cumple porque $\mathbf{A}$ es de 3×3 y $\mathbf{x}$ es de 3×1, lo que implica que $\mathbf{u}$ debe ser de 3×1, lo cual vimos que es verdadero.

Ahora, suponga que es posible calcular el producto entre las matrices $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ y $\mathbf{Z}$. De ellas es posible obtener las siguientes **propiedades** de esta operación:

$$\begin{aligned} &\text{Asociativa} \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{WZ}) = (\mathbf{VW})\mathbf{Z} \\ &\text{Distributiva (1)} \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{W} + \mathbf{Z}) = \mathbf{VW} + \mathbf{VZ} \\ &\text{Distributiva (2)} \rightarrow (\mathbf{W} + \mathbf{Z})\mathbf{V} = \mathbf{WV} + \mathbf{ZV} \end{aligned}$$

Separamos la propiedad distributiva en dos partes, porque el **orden de los factores importa** en la multiplicación entre matrices. Esto se debe, principalmente, a la condición de las dimensiones de una y otra. Es por ello que **no necesariamente existe la propiedad conmutativa** en esta operación. Es decir:

$$\mathbf{VW} \neq \mathbf{WV}$$

La propiedad conmutativa se da solo en un caso, el cual revisaremos más adelante.

2.2. Matriz Identidad.

Es posible encontrar distintos tipos de matrices y una de ellas es la **Matriz Identidad I**, la cual se caracteriza por ser **cuadrada** y porque su diagonal principal[1] consiste solo de unos y el resto son ceros. Por ejemplo, a continuación tenemos una de 3×3.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad suele ser muy buscada al trabajar con matrices, porque corresponde a un **neutro multiplicativo**. Es decir, sean dos matrices $\mathbf{V}$ de $k \times n$ y $\mathbf{I}$ de $n \times n$, entonces:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

Un ejemplo donde podemos encontrarnos una matriz identidad, es en la siguiente matriz de rotación $\mathbf{R}$.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz $\mathbf{R}$ permite hacer rotar objetos (sean matrices o vectores) de dos filas en 90° en dirección contra las manillas del reloj. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Lo interesante es que si multiplicamos a $\mathbf{R}$ por sí misma, obtenemos a $-\mathbf{I}$,

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}$$

donde $-\mathbf{I}$ corresponde a una matriz de rotación que hace girar a objetos con respecto a su eje en 180° en dirección contra las manillas del reloj.

2.3. Matriz Inversa.

Hemos señalado que la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$ representa la transformación lineal de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$ a partir de $\mathbf{A}$. En ciertas ocasiones es posible hacer el trabajo inverso, pasando a $\mathbf{u} \to \mathbf{x}$ por medio

[1] Es decir, las entradas que van en diagonal desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha.

de una matriz denotada como $\mathbf{A}^{-1}$ y que recibe el nombre de **Matriz Inversa** de $\mathbf{A}$.

Las matrices inversas solo existen en **matrices cuadradas**. Es decir, $\mathbf{A}$ debe ser de $n \times n$ para que exista $\mathbf{A}^{-1}$.

Ahora bien, si $\mathbf{A}$ es de $n \times n$, la **principal condición** para que exista $\mathbf{A}^{-1}$ es que:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Lo que nos muestra la igualdad de arriba es que, cuando existe $\mathbf{A}^{-1}$, podemos revertir o anular la transformación realizada por medio de $\mathbf{A}$ al ser multiplicada por su inversa, ya que termina siendo igual a $\mathbf{I}$ y lo mismo ocurre en sentido contrario, revirtiendo la transformación realizada por $\mathbf{A}^{-1}$ al ser multiplicada por $\mathbf{A}$.

La matriz inversa es muy buscada, porque nos permite **encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales**. En particular, si multiplicamos al sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$ por $\mathbf{A}^{-1}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \\
(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \\
\mathbf{Ix} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si existe $\mathbf{A}^{-1}$ y conocemos los valores de $\mathbf{u}$, podemos encontrar las soluciones contenidas en $\mathbf{x}$ transformando (o revirtiendo) de $\mathbf{u} \to \mathbf{x}$ a partir de $\mathbf{A}^{-1}$.

2.3.1. Calculando una Matriz Inversa para matrices pequeñas.

Existen distintas formas para encontrar la inversa de una matriz cuadrada (cuando existe). Acá veremos una que es eficiente cuando es de menor tamaño[2].

Como recordaremos, las columnas de una matriz podemos interpretarlas como vectores fila. Es decir, podemos conformar una matriz a partir de ellos. Por lo tanto, también podemos calcular el determinante de igual manera a como lo estudiamos en la clase anterior.

[2]Para aquellas de mayor tamaño, es más eficiente obtenerlas por medio del Método (o algoritmo) de Eliminación de Gauss, que estudiamos con mayor detalle en Álgebra Lineal.

En general, en **toda matriz cuadrada** es posible calcular su determinante. Para el caso de las de 2×2, lo calculamos como:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}; \qquad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Para una matriz de $n \times n$, con $n > 2$, obtenemos su determinante a partir de un proceso conocido como **expansión** por una columna o fila de ella. Consiste en la suma de las productos entre cada entrada de la fila o columna que decidimos expandir y un valor conocido como **Cofactor**, que se denota como $C_{i,j}$.

Por ejemplo, a continuación tenemos el determinante de una $\mathbf{A}$ de 3×3 expandida por su segunda columna.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,2} \cdot C_{1,2} + a_{2,2} \cdot C_{2,2} + a_{3,2} \cdot C_{3,2}$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Cuando expandimos por la segunda columna, para cada entrada de ella es posible formar determinantes de 2×2, los cuales se conocen como **Menores** (*Minors*, en inglés) y que se denota como $M_{i,j}$. Por ejemplo, al expandir a $\mathbf{A}$ por su segunda columna, el menor $M_{3,2}$ corresponde a:

$$M_{3,2} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

puesto está conformado por las entradas de $\mathbf{A}$ que no están en negrita, que son las que sobran de la expansión.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{a_{1,2}} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ \mathbf{a_{3,1}} & \mathbf{a_{3,2}} & \mathbf{a_{3,3}} \end{bmatrix}$$

En ese sentido, el **cofactor** $C_{i,j}$ es el producto entre $(-1)^{i+j}$ y el valor de su menor $M_{i,j}$ correspondiente.

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$$

Por lo tanto, podemos reescribir la fórmula del determinante de $\mathbf{A}$ expandido por su segunda fila como:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,2} \cdot (-1)^{1+2} M_{1+2} + a_{2,2} \cdot (-1)^{2+2} M_{2+2} + a_{3,2} \cdot (-1)^{3+2} M_{3+2}$$

Con los cofactores $C_{i,j}$ es posible conformar una matriz conocida como **Matriz de Cofactores** denotada como $\mathbf{C}$.

Ahora que sabemos calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ y que conocemos a la matriz de cofactores $\mathbf{C}$, podemos ver cómo se calcula la inversa de una matriz.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada e invertible, su inversa $\mathbf{A}^{-1}$ podemos conocerla como el producto entre el recíproco de su determinante y la **Matriz Adjunta** de $\mathbf{A}$, que se denota como $\text{Adj}(\mathbf{A})$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A})$$

La **Transposición** es la operación de pasar las filas a columnas o viceversa de una matriz o vector y se suele denotar como $\mathbf{A}^T$ o $\mathbf{A}'$. A continuación tenemos dos ejemplos que la ilustran.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hemos señalado la transposición porque la **Matriz Adjunta** de $\mathbf{A}$, $\text{Adj}(\mathbf{A})$, corresponde a **matriz de cofactores transpuesta** denotada como $\mathbf{C}^T$. Por lo tanto, la fórmula de la matriz inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ podemos reescribirla como:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{C}^T$$

Esta fórmula implica, además, que si el $\det(\mathbf{A}) = 0$, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ **NO existe**.