Clase 28. Integración por Sustitución Trigonométrica Inversa y Completando el Cuadrado.

MIT 18.01: Single Variable Calculus.

Resumen

En esta clase continuamos con la técnica de integración por sustitución trigonométrica, pero ahora añadiendo a los recíprocos de las funciones seno, coseno y tangente. Además, usaremos el método de completar el cuadrado en los casos donde el integrando no nos permite reemplazarlo directamente por una función trigonométrica.

1. Identidades Trigonométricas (resumen 2).

Recordemos las siguientes identidades trigonométricas usadas en la clase pasada:

$$(1)\ \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$(2)\ \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta); \quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$(3)\ \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}; \quad \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

A ellas sumemos ahora la siguiente:

$$(4)\ \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Debido a que añadimos a la función secante, agreguemos las fórmulas de las funciones recíproco del seno y coseno.

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad\qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Hagamos lo mismo con la función tangente y su recíproco.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad\qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Usando la regla del cuociente encontramos las derivadas de las funciones trigonométricas que acabamos de ver.

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$$
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$$

En el caso de las integrales de funciones trigonométricas, podemos encontrarnos con las siguientes:

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C \qquad\qquad \int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$
$$\int \csc(x)dx = -\ln(|\csc(x) + \cot(x)|) + C \qquad\qquad \int \sec(x)dx = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + C$$
$$\int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|) + C \qquad\qquad \int \cot(x)dx = \ln(|\sin(x)|) + C$$

Las integrales de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son sencillas y casi obvias de obtener, pero esto no sucede para el resto de las que vemos ahí. No obstante, con la ayuda del método de sustitución directa[1] es posible conocerlas. Veámoslo para los casos de $\tan(x)$ y $\sec(x)$.

Inicialmente, la integral de la $\tan(x)$ podemos reescribirla como:

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

Para resolverla, podemos usar el método de sustitución directa. La idea es reemplazar una de las dos funciones trigonométricas por una variable nueva u. Si hacemos la prueba, veremos que es más conveniente hacer con el $\cos(x)$, por lo tanto estableceremos que:

$$u = \cos(x) \qquad\qquad du = -\sin(x)dx$$

implicando lo siguiente:

$$\int \tan(x)dx = \int -\frac{1}{u}du = -\int \frac{1}{u}du = -\ln(u) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C$$

[1]La nombraré así para diferenciarla de la sustitución trigonométrica.

En el caso de la integral de la $\sec(x)$ existen distintas maneras de resolverla. Acá usaremos el enfoque dado por el matemático James Gregory. Su idea fue comenzar multiplicando el integrando por $(\sec(x) + \tan(x))/(\sec(x) + \tan(x))$:

$$\int \sec(x)dx = \int \left[\sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)}\right] dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx$$

Luego, usamos el método de sustitución definiendo a la variable u como:

$$u = \sec(x) + \tan(x)$$

Esto implica que du será:

$$du = \frac{d}{dx}[\sec(x) + \tan(x)]dx = \left[\frac{d}{dx}\sec(x) + \frac{d}{dx}\tan(x)\right] dx = \left[\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)\right] dx$$

Haciendo el reemplazo, obtenemos que:

$$\int \sec(x) = \frac{1}{u}du = \ln(|u|) + C = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + C$$

2. Integración por Sustitución Trigonométrica.

En la sección anterior hicimos una revisión de funciones trigonométricas distintas a las del seno y coseno, porque nos serán útiles para usar el método de sustitución.

Algo que no estudiamos la clase anterior, es que si estamos en presencia de una integral cuyo integrando contiene a $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$, para $a \in \mathbb{R}$, se hace conveniente usar una de las sustituciones trigonométricas que vemos en la siguiente tabla:

Expresión	Sustitución	Identidad Obtenida	Expresión Final
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin(\theta)$	$\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$	$a\cos(\theta)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\cos(\theta)$	$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$	$a\sin(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan(\theta)$	$\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$	$a\sec(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	$\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$	$a\tan(\theta)$

Ejemplo 1. Calcule usando el método de sustitución:

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}\right) dx$$

Solución Dado que tenemos una raíz cuadrada de la forma $\sqrt{a + x^2}$ en el denominador del integrando, donde $a = 1$, podemos hacer la siguiente sustitución trigonométrica:

$$x = \tan(\theta) \qquad\qquad dx = \sec^2(\theta)d\theta$$

Como vimos en la tabla de arriba, esta sustitución permite deshacernos de la raíz cuadrada ya que nos lleva a la identidad trigonométrica $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) dx &= \int \left(\frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta)\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}\right) d\theta \\
&= \int \left(\frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta)}}\right) d\theta \\
&= \int \left(\frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta)\sec(\theta)}\right) d\theta \\
\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) dx &= \int \left(\frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)}\right) d\theta
\end{aligned}$$

Para facilitar el cálculo de esta integral, lo mejor es seguir simplificando el integrando en funciones que solo contengan al $\mathrm{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$.

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \int \left(\frac{\frac{1}{\cos(\theta)}}{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}\right) d\theta = \int \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta$$

Ahora podemos hacer una sustitución directa para llevar a la integral a una expresión mucho más sencilla, definiendo que:

$$u = \sin(\theta) \qquad\qquad du = \cos(\theta)d\theta$$

Lo que nos lleva a:

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{u^2}\right) du = -\frac{1}{u} + C$$

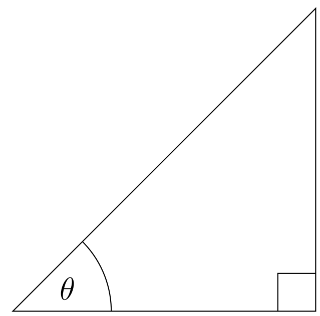
En este ejemplo hemos realizado dos sustituciones. Ahora nuestro objetivo es volver a la variable original y, para ello, comenzamos desde el último reemplazo, donde $u = \sin(\theta)$.

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) dx = -\frac{1}{\sin(\theta)} + C = -\csc(\theta) + C$$

Para restituir la sustitución trigonométrica, podemos seguir dos caminos, pero ambos se basan en el hecho de que $x = \tan(\theta)$. El primero es usar la función inversa de la tangente, señalando que $\theta = \arctan(x)$. Por lo tanto:

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \right) dx = -\csc(\arctan(x)) + C$$

El otro camino es una solución geométrica, ya que usamos un triángulo rectángulo.



Recordemos que anteriormente definimos:

$$x = \tan(\theta)$$

A partir del triángulo rectángulo que vemos arriba, se cumple que:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{OP}}{\text{ADY}}$$

donde OP = lado opuesto a θ y ADY = lado adyacente a θ.

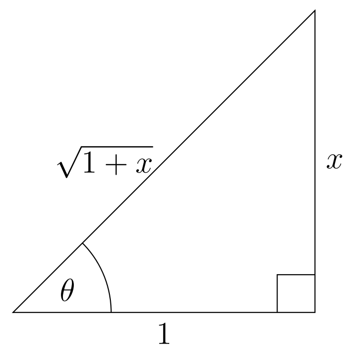
Usando estas dos igualdades con respecto a la función tangente, podemos establecer que:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{OP}}{\text{ADY}} = \frac{x}{1}$$

Como ahora conocemos las medidas de los catetos del triángulo rectángulo, podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener la hipotenusa que denotaremos como HIP.

$$\text{HIP} = \sqrt{1+x^2}$$

Llevemos toda esta información al triángulo rectángulo.



Nuestro propósito es llevar a la antiderivada

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \right) dx = -\csc(\theta) + C$$

a su variable inicial y, para ello, usaremos las medidas del triángulo rectángulo que acabamos de construir para calcular la $\csc(\theta)$:

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{\text{HIP}}{\text{OP}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

En consecuencia:

$$\int \left(\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \right) dx = -\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right) + C$$

Las dos respuestas que obtuvimos para este ejemplo son correctas (usando la inversa de la tangente y el triángulo rectángulo), dependerá de nosotros cuál es más útil (o nos acomoda más) para la tarea que buscamos realizar.

2.1. Completando el Cuadrado.

En ocasiones nos encontraremos con raíces cuadradas en el integrando donde la expresión al interior de éstas corresponderá a un cuadrado del binomio incompleto, similar a $x^2 + bx$. Si, de igual modo, queremos resolver la integral usando el método de sustitución trigonométrica, una buena alternativa es **completar el cuadrado** y llevarlo a uno perfecto. Para ello, solo sumamos $(b/2)^2$ a dicha expresión, conllevando a que[2]:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

[2]Fuente: Stewart, et al (2017). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo.* Pp 48.

Ejemplo 2. Calcule la siguiente integral:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \right) dx$$

Solución. Nuestro objetivo será calcular esta integral haciendo una sustitución trigonométrica. Primero, como la expresión x^2+4x parece ser un cuadrado del binomio incompleto, vamos a sumarle $(4/2)^2$ para llevarlo a uno perfecto.

$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2} \right)^2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

Ahora bien, la idea es simplificar la expresión de la raíz cuadrada, no modificarla. Por lo tanto, al cuadrado del binomio le sumaremos -4 para mantenerla idéntica a la original.

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}} \right) dx$$

Luego, como siguiente paso para realizar la sustitución trigonométrica, vamos a hacer una sustitución directa, estableciendo que:

$$u = x + 2 \qquad\qquad du = 1dx$$

Por consiguiente:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 - 4}} \right) du$$

Ahora realizaremos la sustitución trigonométrica, definiendo a u como una nueva función y nos guiaremos en la tabla que creamos al inicio de esta sección, en la cual podemos ver que para la expresión de la raíz es más conveniente establecer que:

$$u = 2\sec(\theta) \qquad\qquad du = (2\sec(\theta)\tan(\theta))d\theta$$

El factor 2 que vemos en u se debe que, como vemos en la tabla, estamos asumiendo que $\sqrt{u^2 - 4}$ es de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$. En este caso, $a^2 = 2^2 = 4$.

Así, reescribimos la integral como:

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{4\sec^2(\theta) - 4}} \right) d\theta &= \int \left(\frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{4(\sec^2(\theta) - 1)}} \right) d\theta \\
&= \int \left(\frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{4\tan^2(\theta)}} \right) d\theta \\
&= \int \left(\frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{2\tan(\theta)} \right) d\theta \\
&= \int \sec(\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

En la primera sección resolvimos la integral de la secante. Usando su fórmula, obtenemos lo siguiente:

$$
\int \sec(\theta) d\theta = \ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|) + C
$$

Nuestra próxima tarea es llevar a la antiderivada a su variable original. Anteriormente establecimos que $u = 2\sec(\theta)$. Aprovechemos esta igualdad para obtener a la secante, dividiéndola por 2.

$$
\sec(\theta) = \frac{u}{2}
$$

Lo anterior implica que:

$$
\int \sec(\theta) d\theta = \ln\left(\left| \frac{u}{2} + \tan(\theta) \right| \right) + C
$$

Por otra parte, recordemos que $\sqrt{u^2 - 4}$ terminó siendo igual a $2\tan(\theta)$. Por lo tanto, podemos establecer que:

$$
\sqrt{u^2 - 4} = 2\tan(\theta) \implies \tan(\theta) = \frac{\sqrt{u^2 - 4}}{2}
$$

y por tanto que:

$$
\begin{aligned}
\int \sec(\theta) d\theta &= \ln\left(\left| \frac{u}{2} + \frac{\sqrt{u^2 - 4}}{2} \right| \right) + C \\
&= \ln\left(\left| \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} \right| \right) + C \\
&= \ln(|u + \sqrt{u^2 - 4}|) - \ln(|2|) + C
\end{aligned}
$$

El $\ln(|2|)$ es una constante, de manera que podemos escribir la antiderivada como:

$$
\int \sec(\theta) d\theta = \ln(|u + \sqrt{u^2 - 4}|) + C
$$

Finalmente, solo nos queda volver a la variable original de la sustitución directa. Recordemos que definimos que $u = x + 2$, por lo tanto:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \right) dx = \ln(|x + 2 + \sqrt{(x+2)^2 - 4}|) + C = \ln(|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}|) + C$$

Con esto, damos por resuelto el ejemplo.