# Clase 6. Espacio Columna y Espacio Nulo.

Curso 'Linear Algebra' del MIT.

Para esta sexta clase entramos más en detalle sobre el subespacio vectorial, concentrándonos en el espacio columna (que ya vimos un poco en la clase anterior) y en el espacio nulo. Iremos aplicando los requisitos para que sean un subespacio que vimos en la clase cinco y empezaremos a usar sistemas de ecuaciones lineales como ejemplos para ello[1].

## 6.1 Repaso: Subespacio Vectorial.

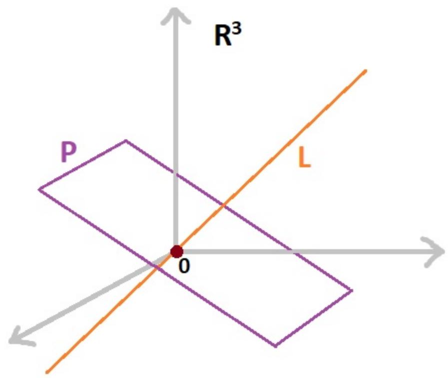
Recordemos que, para que un conjunto de vectores sea un espacio vectorial, tanto los vectores $c\vec{v}$ y $d\vec{w}$ como **todas sus combinaciones lineales** $c\vec{v} + d\vec{w}$ **deben estar en el mismo espacio**. El requisito es el mismo para los **subespacios vectoriales**, a los cuales se incluye que deben estar **adentro de un espacio vectorial** y contener el **vector cero** $\vec{0}$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ podemos tener los siguientes subespacios:

(1) Todo el conjunto $\mathbb{R}^3$.
(2) Un plano al infinito que pasa a través de $\vec{0}$.
(3) Una línea al infinito que pasa a través de $\vec{0}$.
(4) El vector $\vec{0}$.

**Ejercicio.** En la siguiente imagen tenemos un plano $P$ y una línea $L$, los cuales son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

[1]Recomiendo revisar los apuntes sobre el espacio y subespacio vectorial de la clase cinco en caso de necesitar ayuda.




(a) ¿La unión $P \cup L$ (todos los vectores en $P$ o $L$ o ambos) es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

(b) ¿La intersección $P \cap L$ (todos los vectores solo en $P$ y $L$) es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

**Solución.** El conjunto $P \cup L$ de (a) **no es un subespacio de** $\mathbb{R}^3$, porque si bien hay lugares donde los vectores de $L$ coinciden en el de $P$, en otros ésto no ocurre. Por ejemplo, si tomamos un vector de $L$ que se encuentra entre dicho subespacio y el de $P$; y otro que está en $P$ y los sumamos, el vector resultante estará afuera de la unión. Por lo tanto, deja de cumplirse que sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

En cuanto a $P \cap L$ de (b), primero podemos observar en el gráfico que dicha intersección o que el único punto que $P$ y $L$ tienen en común es $(0,\ 0,\ 0)$ y, además, sabemos que $\vec{0}$ es un subespacio por sí mismo. En ese sentido, $P \cap L$ **sí es un subespacio de** $\mathbb{R}^3$.

De hecho, podemos ir más allá del ejemplo y señalar que **la intersección de dos subespacios cualesquiera también es un subespacio vectorial**.

Por ejemplo, sean $S$ y $T$ dos subespacios vectoriales. Si tomamos dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la intersección $S \cap T$, ambos estarán tanto en $S$ como en $T$, por lo tanto el vector $\vec{v} + \vec{w}$ también se encontrará en $S \cap T$. Del mismo modo, si escalamos este último por $c$, el vector $c(\vec{v} + \vec{w})$ estará tanto en $S$ como en $T$ y, por consiguiente, en $S \cap T$. En consecuencia, $S \cap T$ es un subespacio vectorial porque sus combinaciones lineales están en el mismo espacio. Probablemente sea más pequeño que $S$ y $T$, pero lo es.

## 6.2 Espacio Columna (Continuación).

A continuación tenemos una matriz $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Asumamos que todas las combinaciones lineales de las columnas de $A$ forman un **espacio columna** $C(A)$, el cual es un subespacio vectorial y, en este caso, de $\mathbb{R}^4$, puesto que cada una tiene cuatro componentes[2].

Debido a que $A$ solo tiene cuatro columnas, es imposible que $C(A)$ pueda llenar todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Digamos que $A$ es la matriz de coeficientes del sistema $Ax = b$, donde:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Como vemos, los vectores columna $\vec{b}$ corresponden a todas las combinaciones lineales de $Ax$. Por tanto, una forma de encontrar las soluciones de este sistema (i.e, los componentes de $\vec{x}$), es buscar todos aquellos $\vec{b}$ que resulten de dichas combinaciones. No obstante, esto implica que no serán todos los de $\mathbb{R}^4$, sino **solo aquellos que pertenezcan al** $C(A)$. Esto nos muestra que este espacio columna es un subespacio más chico que el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

El ejemplo anterior nos muestra la **relevancia del espacio columna**: Al saber que las columnas de una matriz de coeficientes forman un subespacio vectorial, podemos tener certeza que las **soluciones del sistema** están en aquel conjunto de vectores que resultan de todas las **combinaciones lineales entre dichas columnas y el vector de incógnitas**.

Debido a la importancia de un espacio columna, siempre es bueno analizarla de forma descriptiva. Estas son características en las que profundizaremos en posteriores clases, pero hagamos el ejercicio ahora. Volvamos a la matriz $A$.

[2]En ese sentido, podemos generalizar que si las columnas de una matriz $n \times m$ forman un espacio columna donde sus entradas pertenecen a los reales, podemos concluir que su espacio vectorial pariente es $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Una característica de $A$, es que su tercera columna corresponde a la suma de las dos anteriores. En dicho caso, decimos que los **vectores columnas** de $A$ son **linealmente dependientes**.

La **dependencia lineal** es cuando un vector de un conjunto de ellos **resulta de la combinación lineal de éstos**.

Saber que las columnas de $A$ son linealmente dependientes es relevante para el $C(A)$, porque significa que la tercera columna no añade nada nuevo a este subespacio. Es probable que el producto entre dicha columna y un escalar vaya en la misma dirección y/o sentido de una de las otras dos columnas. En ese sentido, **podemos deshechar** (*throw away*) **alguna de estas columnas y seguiremos obteniendo el mismo espacio columna** $C(A)$. Por ejemplo:

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Los vectores columna de una matriz que son linealmente independientes, también las nombramos como **columnas pivotes**[3]. Por lo tanto, las dos primeras columnas (de izq. a der) de $A$ son pivotes, mientras que la tercera no lo es. Es habitual que se descarten aquellos vectores columna que no lo son.

En consecuencia, es posible describir el espacio columna $C(A)$ como un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de **dos dimensiones**. También, en próximas clases profundizaremos sobre cómo conocer la dimensión de un subespacio.

## 6.3 Espacio Nulo.

El espacio nulo es un subespacio vectorial que contiene **todos los vectores columna $\vec{x}$ que nos permiten obtener la igualdad** $Ax = 0$. Dicho de otro modo, son todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales cuyos lados derechos son iguales a cero. Suele denotarse como $N(A)$.

[3]No confundir con las entradas pivotes.

Continuemos con el ejemplo anterior, pero ahora establezcamos que $\vec{b}$ es el vector cero.

$$Ax = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algo que podemos observar en este caso, es que el espacio nulo (en caso de serlo) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, porque el vector $\vec{x}$ es de tres dimensiones[4].

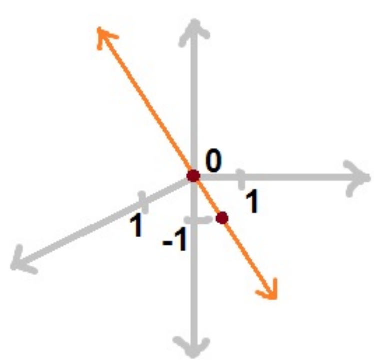
Entonces, la idea es buscar las soluciones de $Ax$ cuyas combinaciones lineales sean el vector cero. Algunos casos para el vector columna $\vec{x}$ de este ejemplo pueden ser:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \cdots$$

En otras palabras, podemos generalizar que[5]:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Y, por tanto, el subespacio $N(A)$ es una **línea** en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\langle 0,\ 0,\ 0 \rangle$ y se alarga al infinito en ambos sentidos, similar al que vemos a continuación.




[4]También podemos generalizar que si una matriz de coeficientes $A$ es de $n \times m$ con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, entonces el espacio nulo será un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

[5]De hecho, el $-1$ puede ser cualquiera de los tres componentes, pero siempre solo uno.

Todo lo anterior podemos generalizarlo, señalando que **las soluciones para** $Ax = 0$ (i.e, los componentes de $\vec{x}$) **siempre producirán un subespacio**, lo cual podemos demostrarlo de la siguiente manera:

Si $Av = 0$ y $Aw = 0$, entonces:

$$A(v + w) = 0$$

En otras palabras, si tanto $\vec{v}$ como $\vec{w}$ están en el subespacio, entonces el vector resultante de su suma $\vec{v} + \vec{w}$ también lo está, y podemos comprobarlo resolviendo la igualdad de arriba.

Recordemos que en la multiplicación entre matrices podemos aplicar la propiedad distributiva. Esto implica que:

$$\begin{aligned} A(v + w) &= 0 \\ Av + Aw &= 0 \\ 0 + 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

También podemos verlo con un escalar $c$, tal que:

$$A(cv) = 0$$

Y debido a que el producto entre $A$ y $\vec{v}$ está definido, entonces:

$$\begin{aligned} c(Av) &= 0 \\ c0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que el espacio nulo es un subespacio, porque podemos tanto sumarlos entre ellos, calcular el producto de ellos con un escalar y así como obtener la suma de estos últimos, todos los cuales están en el mismo espacio vectorial e incluye al vector cero.

**Ejercicio.** ¿El vector columna $\vec{x}$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales forma un subespacio vectorial?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**Solución.** Si fuese una matriz más grande, podríamos responder aquello aplicando el método de eliminación, pero como es chica podemos observarlo de inmediato. En síntesis, **no**

**forma un subespacio vectorial** porque el vector $\vec{x}$ **no incluye al vector cero**. Podemos realizar combinaciones lineales, pero no incluirá a dicho vector.