

MAT02018 - Estatística Descritiva

Medidas de tendência central (continuação)

Rodrigo Citton P. dos Reis
citton.padilha@ufrgs.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Porto Alegre, 2021



Introdução

Introdução

- ▶ Nestas notas de aula, vamos apresentar outros tipos de **médias**:
 - ▶ A **média ponderada**;
 - ▶ A **média Geométrica**;
 - ▶ A **média harmônica**.
- ▶ Tais conceitos/métodos serão apresentados em um contexto muito simples e pouco realista.
- ▶ Estes métodos serão retomados em um contexto mais apropriado quando discutirmos as questões associadas ao tópico de **Números Índices**.

Média ponderada

Média ponderada

- ▶ A **média (aritmética) ponderada** é a soma dos produtos dos dados (x) pelos respectivos **pesos** (p), dividida pela soma dos pesos.
- ▶ A **média ponderada** é muito usada para notas escolares e de concursos quando se dá maior peso (o que corresponde maior importância) a determinada(s) prova(s).

Média ponderada

- ▶ Para entender como se calcula a média ponderada, imagine que a avaliação referente a uma disciplina de Estatística será realizada de acordo com o nível de exigência de cada atividade (tabela a seguir).

Avaliação	Peso	Nota
Participação no Fórum	1	
Seminário	2	
Prova	3	

- ▶ De certa forma, uma boa nota na prova é mais importante do que participar das discussões fórum do Moodle desta disciplina.

Média ponderada

- Assim, um aluno qualquer tem o seguinte desempenho no semestre.

Avaliação	Peso (p_i)	Nota (x_i)
Participação no Fórum	1	10
Seminário	2	8
Prova	3	6

- O desempenho deste aluno na prova não foi tão bom.
 - O que poderíamos falar a respeito da sua aprovação?
- Como vimos anteriormente, a média aritmética nos fornece uma medida resumo do desempenho deste aluno.
- Porém, neste caso a soma simples das notas das avaliações não é possível, pois a prova vale três vezes a nota da discussão no fórum.
- É preciso pesar (ponderar) os valores das notas.

Média ponderada

- Utilizando p_i para denotar o peso referente a cada valor x_i , a média aritmética é definida por

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i p_i}.$$

Média ponderada

- ▶ Retomando o nosso exemplo, teríamos que a média ponderada das atividades de avaliação seria

$$\begin{aligned}\bar{x}_p &= \frac{(\text{Nota}_1) \times (\text{Peso}_1) + (\text{Nota}_2) \times (\text{Peso}_2) + (\text{Nota}_3) \times (\text{Peso}_3)}{(\text{Peso}_1) + (\text{Peso}_2) + (\text{Peso}_3)} \\ &= \frac{(10) \times (1) + (8) \times (2) + (6) \times (3)}{(1) + (2) + (3)} \\ &= \frac{44}{6} = 7,33.\end{aligned}$$

Observação

- ▶ Se consideramos o **mesmo peso** para cada dado observado, percebemos que a média aritmética é um caso particular da média ponderada quando $p_i = p$.

Média ponderada

- ▶ **Sua vez:** imagine que a avaliação no semestre de “Estatística Descritiva” é feita considerando que as “Avaliações da Área 1” têm peso 1 (cada uma) e as “Avaliações da Área 2 e 3” tem peso 2.
- ▶ Digamos que um aluno apresentou notas 8 e 5 para as duas avaliações da área 1, e 5 e 6 para as atividades das áreas 2 e 3.
 - ▶ Calcule a média ponderada das notas.
 - ▶ Se para atingir a aprovação é necessária uma média 6, este aluno seria aprovado?
 - ▶ Calcule a média aritmética simples (considerando o mesmo peso para as três avaliações).
 - ▶ Compare os resultados.

Média geométrica

Média geométrica

- ▶ A **média geométrica** é dada pela raiz n -ésima do produtório¹ de um conjunto de n elementos².
- ▶ Representando o conjunto de elementos por x_1, x_2, \dots, x_n , a média geométrica é dada por

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

¹O produtório será denotado pela letra grega Π e indica que os elementos do conjunto devem ser multiplicados: $\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$.

²Em nosso contexto, estes elementos podem ser observações de uma variável.

Média geométrica

- ▶ A média geométrica é utilizada, basicamente, quando há variações percentuais em sequência.
- ▶ **Exemplo:** suponha que uma certa loja teve aumento de 20% nas vendas em um mês, 12% no mês seguinte, e 7% no terceiro mês.
 - ▶ A média geométrica nos fornece o aumento médio nos três meses observados.
 - ▶ Assim, se representamos por x a variação nas vendas mensais desta loja, temos $x_1 = 1,2$ (20%), $x_2 = 1,12$ (12%) e $x_3 = 1,07$ (7%).

Média geométrica

- ▶ A média geométrica deste conjunto de observações é dada por

$$G = \sqrt[3]{1,2 \times 1,12 \times 1,07} = \sqrt[3]{1,43808} \approx 1,13.$$

- ▶ Assim, a média percentual de aumento de vendas da loja nos três meses observados foi de aproximadamente 13%.

Média geométrica

- ▶ Note que a raiz n -ésima de um valor $\sqrt[n]{a}$ pode ser escrita como uma potência fracionária $a^{1/n}$.
 - ▶ Assim, a média geométrica pode ser reescrita da seguinte forma

$$G = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

Média geométrica

- ▶ Tomando o logaritmo³ nos dois lados da expressão acima, temos

$$\log G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

- ▶ Ou seja, o **logaritmo da média geométrica** é igual a **média aritmética da log-transformada** da variável x .
 - ▶ Consequentemente, temos que $G = \exp [\bar{x}_{(\log)}]$, em que $\bar{x}_{(\log)}$ é a **média aritmética da log-transformada** de x .

³Logaritmo natural.

Média harmônica

Média harmônica

- ▶ A **média harmônica** de um conjunto de n elementos é o **inverso da média aritmética dos inversos** desses elementos.
- ▶ Representando o conjunto de elementos por x_1, x_2, \dots, x_n , a média harmônica é dada por

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Média harmônica

- ▶ Como exemplo, considere as notas das três avaliações apresentadas da **Seção da Média ponderada**. A média harmônica das três avaliações é dada por

$$H = \frac{3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{0,3916667} \approx 7,65.$$

- ▶ Note que a média aritmética simples é 8. Se substituíssemos a nota 10 por uma nota 9, e a nota 6 por uma nota 7, a média aritmética simples continuaria 8, porém a média harmônica seria 7,92.
 - ▶ Ou seja, a média harmônica tende a aumentar quando os valores são mais próximos.

Para casa

- ▶ Resolver os exercícios 4 a 11 do Capítulo 8.5 do livro **Fundamentos de Estatística**⁴ (disponível no Sabi+).

⁴Vieira, S. **Fundamentos de Estatística**, Atlas, 2019, p. 136-138.

Próxima aula

- ▶ Médias ponderada, geométrica e harmônica.

Por hoje é só!

Bons estudos!

