# MAT02025 - Amostragem 1

## Amostragem probabilística

Rodrigo Citton P. dos Reis
citton.padilha@ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Porto Alegre, 2021

# Teoria da amostragem

# O papel da teoria da amostragem

- O objetivo da teoria da amostragem é **aperfeiçoar processos de seleção de amostras e de avaliação** que proporcionem, aos menores custos possíveis, estimativas suficientemente precisas para os propósitos em vista.
- Para aplicar este princípio, devemos ser capazes de prever, para qualquer procedimento de amostragem que esteja sendo considerado, a **precisão** e o **custo esperados**.

# O papel da teoria da amostragem

- No que diz respeito à precisão, não podemos predizer exatamente o quão grande um erro estará presente em uma estimativa em qualquer situação específica, **pois isso exigiria um conhecimento do verdadeiro valor para a população**.
- Em vez disso, a precisão de um procedimento de amostragem é avaliada examinando a **distribuição de frequência gerada para a estimativa**[1] se o **procedimento for aplicado repetidamente**[2] à mesma população.
- Esta é a técnica padrão pela qual a precisão é avaliada na teoria estatística.

[1] Também chamada de **distribuição amostral**, ou ainda, **distribuição de aleatorização**.

[2] Paradigma clássico: princípio da repetitibilidade.

# O papel da teoria da amostragem

- Uma simplificação adicional é introduzida: com amostras de tamanhos comuns na prática, muitas vezes há boas razões para supor que as estimativas da amostra são aproximadamente distribuídas de acordo com o modelo normal.
- Por exemplo, seja $\hat{\theta}$ um estimador para um parâmetro $\theta$, então, sob certas condições, é razoável supor que $\hat{\theta} \dot{\sim} N\left(\mu_{\hat{\theta}}, \sigma^2_{\hat{\theta}}\right)$, ou seja,

$$f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\hat{\theta}}}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2_{\hat{\theta}}}\left(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}}\right)^2\right\}.$$

# O papel da teoria da amostragem

- Com uma estimativa normalmente distribuída, toda a forma da distribuição de frequência é conhecida se conhecermos a média e o desvio padrão (ou a variância).
- Uma parte considerável da teoria do levantamento por amostragem está preocupada em encontrar fórmulas para essas médias e variâncias.

# O papel da teoria da amostragem

- Existem duas diferenças entre a teoria padrão de levantamentos por amostragem e a teoria clássica de amostragem conforme ensinada em livros sobre estatística.
- Na **teoria clássica**, as medições que são feitas nas unidades de amostragem na população são geralmente assumidas seguir uma distribuição de frequência, por exemplo, a distribuição normal, de forma matemática conhecida, à parte de certos parâmetros populacionais, como a média e a variância cujos valores têm a ser estimado a partir dos dados da amostra[3].

**Exemplo**

A altura da população segue uma distribuição normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ desconhecidas.

[3] Inferência baseada no modelo.

# O papel da teoria da amostragem

- Na teoria e levantamentos por amostragem, por outro lado, a atitude tem sido assumir apenas informações muito limitadas sobre essa distribuição de frequência.
- Em particular, sua forma matemática não é considerada conhecida, de modo que a abordagem pode ser descrita como livre de modelo ou livre de distribuição[4].

[4] Inferência baseada no delineamento.

# O papel da teoria da amostragem

- Uma segunda diferença é que **as populações** no trabalho de levantamento **contêm um número finito de unidades**.
- Os resultados são um pouco mais complicados quando a amostragem é de uma população finita em vez de infinita.
- Para fins práticos, essas diferenças nos resultados para populações finitas e infinitas podem frequentemente ser ignoradas.
- Casos em que não seja assim serão apontados.

# Amostragem probabilística

# Amostragem probabilística

- Dentre os vários processos existentes para a obtenção de amostras, a amostragem probabilística caracteriza-se por garantir, *a priori*, que todo elemento pertencente à população de estudo possua probabilidade, **conhecida e diferente de zero**, de pertencer à amostra sorteada.
- A identificação, direta ou indireta, dos elementos e o sorteio deles fundamentam as propriedades matemáticas desse tipo de processo.

# Amostragem probabilística: propriedades

1. Podemos definir o conjunto de amostras distintas, $S_1, S_2, \ldots, S_v$, que o procedimento é capaz de selecionar se aplicado a uma população específica.
   - Isso significa que podemos dizer exatamente quais unidades de amostragem pertencem a $S_1$, a $S_2$, e assim por diante.
   - Por exemplo, suponha que a população contenha seis unidades, numeradas de 1 a 6. Um procedimento comum para escolher uma amostra de tamanho 2 fornece três candidatos possíveis: $S_1 = (1, 4)$; $S_2 = (2, 5)$; $S_3 = (3, 6)$. Observe que nem todas as amostras possíveis de tamanho 2 precisam ser incluídas.

# Amostragem probabilística: propriedades

2. A cada amostra possível, $S_j$, é atribuído uma probabilidade conhecida de seleção, $\pi_j$.
3. Selecionamos uma das $S_j$ por um processo aleatório em que cada $S_j$ recebe sua adequada probabilidade $\pi_j$ de ser selecionada.
    - No exemplo, podemos atribuir **probabilidades iguais** às três amostras. Em seguida, o sorteio em si pode ser feito escolhendo um **número aleatório**[5] entre 1 e 3. Se este número for $\ell$, $S_\ell$ é a amostra retirada.

[5] Veja o material suplementar sobre números aleatórios no Moodle.

# Amostragem probabilística: propriedades

4. O método para calcular a estimativa da amostra deve ser conhecido e deve levar a uma estimativa única para qualquer amostra específica.
    - Podemos declarar, por exemplo, que a estimativa deve ser a média das medidas nas unidades individuais da amostra.

# Amostragem probabilística: propriedades

- Para qualquer procedimento de amostragem que satisfaça essas propriedades, podemos calcular a distribuição de frequência das estimativas que ele gera, **se aplicado repetidamente à mesma população**.
- Sabemos com que frequência qualquer amostra particular $S_j$ será selecionada, e sabemos como calcular a estimativa a partir dos dados em $S_j$.
- Portanto, é evidente que uma teoria de amostragem pode ser desenvolvida para qualquer procedimento desse tipo, embora os detalhes do desenvolvimento possam ser complexos.
- O termo **amostragem probabilística** se refere a um método desse tipo.

# Amostragem probabilística: propriedades

- Na prática, raramente extraímos uma amostra probabilística escrevendo $S_j$ e $\pi_j$ conforme descrito acima.
- Isso é insuportavelmente trabalhoso com uma grande população, onde um procedimento de amostragem pode produzir bilhões de amostras possíveis.
- O sorteio é mais comumente feito especificando-se as **probabilidades de inclusão para as unidades individuais**, e sorteando as unidades, uma por uma ou em grupos, até que o tamanho e tipo de amostra desejados sejam construídos.
- Para os propósitos de uma teoria, é suficiente saber que podemos escrever o $S_j$ e $\pi_j$ se quiséssemos e tivéssemos tempo ilimitado.

# Exercício

# Exercício

Considere, a título de ilustração, uma população composta dos elementos $(A, B, C, D, E, F)$ **(Ana, Bruno, Carlos, Dorcina, Emília, Fernando)**, nos quais se observou a característica $X$ **(idade)**. Então, $N = 6$ e $X$ é uma variável discreta (idade em anos). Logo, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Os valores podem ser vistos na tabela a seguir

| Elementos | $i$ | $X_i$ |
|---|---|---|
| A | 1 | 2 |
| B | 2 | 4 |
| C | 3 | 6 |
| D | 4 | 8 |
| E | 5 | 10 |
| F | 6 | 12 |

# Exercício

Utilizando um sorteio **com reposição** de uma amostra de **dois elementos** dessa população, responda:

1. Liste as possíveis amostras. Qual o nome é dado a esta lista?
2. Qual a probabilidade de cada amostra ser selecionada? É preciso realizar alguma suposição para atribuição destas probabilidades?
3. Calcule a média amostral de $X$ ($\bar{x}_j = \frac{1}{2}\sum_{i \in S_j} X_i$) para cada amostra.
4. Faça o gráfico da distribuição de frequências da média amostral.

# Exercício

| $S_j$ | Amostras | $\pi_j$ | $(x_1, x_2)$ | $\bar{x}_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| $\vdots$ | | | | |

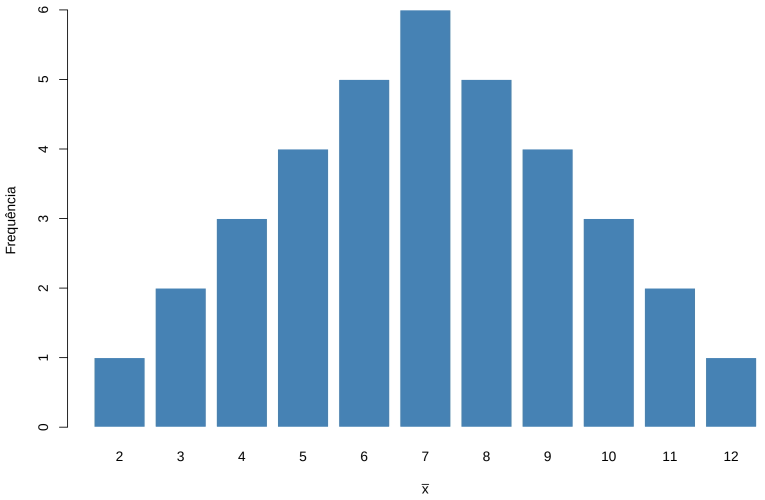
# Exercício

| $S_j$ | Amostras | $\pi_j$ | $(x_1, x_2)$ | $\bar{x}_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (A, A) | $1/36$ | (2, 2) | 2 |
| 2 | (B, A) | $1/36$ | (4, 2) | 3 |
| 3 | (C, A) | $1/36$ | (6, 2) | 4 |
| 4 | (D, A) | $1/36$ | (8, 2) | 5 |
| 5 | (E, A) | $1/36$ | (10, 2) | 6 |
| 6 | (F, A) | $1/36$ | (12, 2) | 7 |
| 7 | (A, B) | $1/36$ | (2, 4) | 3 |
| 8 | (B, B) | $1/36$ | (4, 4) | 4 |
| 9 | (C, B) | $1/36$ | (6, 4) | 5 |
| 10 | (D, B) | $1/36$ | (8, 4) | 6 |
| 11 | (E, B) | $1/36$ | (10, 4) | 7 |
| 12 | (F, B) | $1/36$ | (12, 4) | 8 |
| 13 | (A, C) | $1/36$ | (2, 6) | 4 |
| 14 | (B, C) | $1/36$ | (4, 6) | 5 |
| 15 | (C, C) | $1/36$ | (6, 6) | 6 |
| 16 | (D, C) | $1/36$ | (8, 6) | 7 |
| 17 | (E, C) | $1/36$ | (10, 6) | 8 |
| 18 | (F, C) | $1/36$ | (12, 6) | 9 |
| 19 | (A, D) | $1/36$ | (2, 8) | 5 |
| 20 | (B, D) | $1/36$ | (4, 8) | 6 |
| 21 | (C, D) | $1/36$ | (6, 8) | 7 |

# Exercício

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | (D, D) | 1/36 | (8, 8) | 8 |
| 23 | (E, D) | 1/36 | (10, 8) | 9 |
| 24 | (F, D) | 1/36 | (12, 8) | 10 |
| 25 | (A, E) | 1/36 | (2, 10) | 6 |
| 26 | (B, E) | 1/36 | (4, 10) | 7 |
| 27 | (C, E) | 1/36 | (6, 10) | 8 |
| 28 | (D, E) | 1/36 | (8, 10) | 9 |
| 29 | (E, E) | 1/36 | (10, 10) | 10 |
| 30 | (F, E) | 1/36 | (12, 10) | 11 |
| 31 | (A, F) | 1/36 | (2, 12) | 7 |
| 32 | (B, F) | 1/36 | (4, 12) | 8 |
| 33 | (C, F) | 1/36 | (6, 12) | 9 |
| 34 | (D, F) | 1/36 | (8, 12) | 10 |
| 35 | (E, F) | 1/36 | (10, 12) | 11 |
| 36 | (F, F) | 1/36 | (12, 12) | 12 |

# Exercício

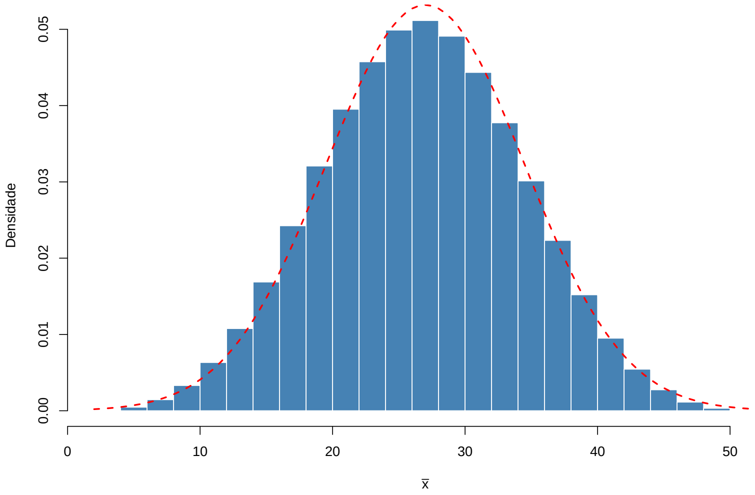


# Exercício

Extras:

5. Onde você já viu este esquema de sorteio?
6. Discuta de onde vem a distribuição de $\bar{x}$.
7. Imagine $N = 26$ e amostras de tamanho 4.

# Exercício



# Amostragem não-probabilística

# Alternativas à amostragem probabilística

Alguns tipos comuns de amostragem não-probabilística:

1. **Amostragem convencional:** a amostra é restrita a uma parte da população que é facilmente acessível. Ex: uma amostra de carvão de um vagão aberto pode ser retirada da parte superior de 6 a 9 polegadas.
2. **Amostragem acidental ou a esmo:** a amostra é selecionada **ao acaso**. Ex: ao escolher 10 coelhos de uma grande gaiola em um laboratório, o investigador pode pegar aqueles em que suas mãos repousam, sem um planejamento consciente.
3. **Amostragem por cotas:** no caso de uma população pequena, mas heterogênea, o amostrador inspeciona o conjunto da população e escolhe uma pequena amostra de unidades "típicas" - isto é, unidades que estão próximas de sua impressão da média da população.

# Alternativas à amostragem probabilística

4. **Amostragem de voluntários:** a amostra é constituída essencialmente por voluntários, em estudos em que o processo de medição é desagradável ou incômodo para a pessoa que está sendo medida.

# Para casa

- Repita o exercício da aula, mas agora utilizando um sorteio **sem reposição** de uma amostra de **dois elementos** daquela população.

# Próxima aula

- Distribuição normal, viés e EQM.

# Por hoje é só!

## Bons estudos!