

MAT02025 - Amostragem 1

Conceitos básicos de probabilidade e inferência estatística: uma
revisão

Rodrigo Citton P. dos Reis
citton.padilha@ufrgs.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Porto Alegre, 2022

Probabilidade

Introdução

- ▶ **Fenômeno aleatório:** situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza.
- ▶ **Fenômeno aleatório** *versus* **Fenômeno determinístico.**
- ▶ Exemplos de fenômenos aleatórios:
 - ▶ Uma partida de futebol.
 - ▶ Eleições para presidente.
 - ▶ O preço do combustível no próximo mês.
 - ▶ Vida (duração) da bateria de um dispositivo móvel.

Espaço amostral e eventos

- ▶ **Espaço amostral:** é o conjunto de **todos os resultados possíveis** de um certo fenômeno aleatório.
 - ▶ Ele será representado pela letra grega Ω (**ômega**).

Espaço amostral e eventos

- ▶ **Eventos:** Os subconjuntos de Ω são denominados **eventos** e representamos pelas letras latinas maiúsculas A, B, \dots
 - ▶ O subconjunto vazio será denotado por \emptyset .
 - ▶ Dizemos que um evento **ocorre** quando um dos resultados que o compõem ocorre.

Probabilidade

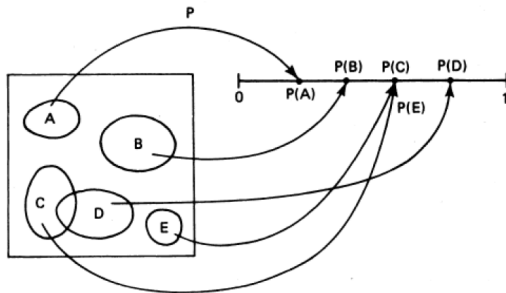
- ▶ Vamos considerar **probabilidade** como sendo uma função $\Pr(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, conforme a definição a seguir.

Probabilidade

Uma função $\Pr(\cdot)$ se satisfaz as condições:

- ▶ **(A1)** $0 \leq \Pr(A) \leq 1$, para qualquer evento $A \subset \Omega$;
- ▶ **(A2)** $\Pr(\Omega) = 1$;
- ▶ **(A3)** $\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$, com A_i 's disjuntos.
 - ▶ $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$, com A e B disjuntos.

Probabilidade



Variáveis aleatórias

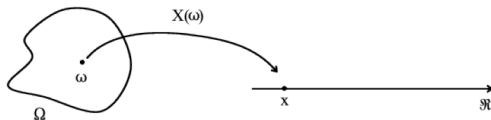
Variável aleatória

Definição

Sejam \mathcal{E} um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento. Uma **função** X , que associe a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$, é denominada **variável aleatória**.

- **Exemplo:** Suponha-se que uma lâmpada tenha sido posta em um soquete. O experimento termina quando a lâmpada se queima.
 - Qual será um possível resultado, ω ?
 - Qual será espaço amostral consequente?
 - Qual será a variável aleatória X de interesse?
 - Quais serão os possíveis valores de X ?
 - "Onde está a aleatoriedade de X "?

Variável aleatória



Variável aleatória discreta

Definição

Uma quantidade X , associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada de **variável aleatória discreta**, se assume valores num conjunto enumerável, com certa probabilidade.

- **Exemplo:** Observa-se o sexo das crianças em famílias com três filhos.

Denotamos m para o sexo masculino e f para o sexo feminino. Existem oito possibilidades para uma família de três filhos. Estas possibilidades são listadas no espaço amostral:

$$\Omega = \{(mmm), (mmf), (mfm), (fmm), (mff), (fmf), (ffm), (fff)\}.$$

Variável aleatória discreta

Definimos

- X : número de crianças do sexo masculino (m).
- A cada possível resultado do espaço amostral, X associa um valor numérico

Ω	mmm	mmf	mfm	fmm	mff	fmf	ffm	fff
X	3	2	2	2	1	1	1	0

- Note que X assume valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ que é enumerável, portanto X é **variável aleatória discreta**.

Variável aleatória discreta

- **Pergunta:** com qual probabilidade X assume os valores $\{0, 1, 2, 3\}$?
- Cada resultado possível do espaço amostral tem probabilidade $\frac{1}{8}$ de acontecer, então:

$$\Pr(X = 0) = \Pr(fff) = \frac{1}{8}$$

- A probabilidade da **variável aleatória** X assumir o valor zero é a mesma probabilidade do evento (fff) ocorrer. Da mesma forma:

$$\Pr(X = 1) =$$

=

=

$$\Pr(X = 2) =$$

=

$$\Pr(X = 3) =$$

=

Variável aleatória discreta

Função discreta de probabilidade

- Resumindo:

X	0	1	2	3
$\Pr(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Distribuição de probabilidade

Variável aleatória discreta

Função discreta de probabilidade

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta e x_1, x_2, x_3, \dots , seus diferentes valores. A função que atribui a cada valor da variável aleatória sua probabilidade é denominada de **função discreta de probabilidade** ou, simplesmente **função de probabilidade**.

Variável aleatória discreta

Função discreta de probabilidade

- A notação a ser utilizada é:

$$\Pr(X = x_i) = p(x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$$

ou ainda,

X	x_1	x_2	x_3	\dots
p_i	p_1	p_2	p_3	\dots

- Uma função de probabilidade satisfaz:

① $0 \leq p_i \leq 1$

② $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \dots = 1$

- **No exemplo:**

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) \\ &= 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1. \end{aligned}$$

Variável aleatória discreta

Exemplo: lançamento de dois dados

- Dois dados são lançados, de forma independente.



Variável aleatória discreta

Exemplo: lançamento de dois dados

- O espaço amostral deste experimento é:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6), \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6), \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6), \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6), \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6), \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array} \right\}$$

- Seja X a variável *soma dos dois lançamentos*, ou seja,
 $X = \text{“face do primeiro lançamento”} + \text{“face do segundo lançamento”} .$

Variável aleatória discreta

Exemplo: lançamento de dois dados

- Quando o evento $(1, 1)$ ocorre, X associa a este resultado o valor 2. Da mesma forma temos:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6), \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6), \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6), \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6), \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6), \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array} \right\} \xRightarrow{X} \left\{ \begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \end{array} \right\}$$

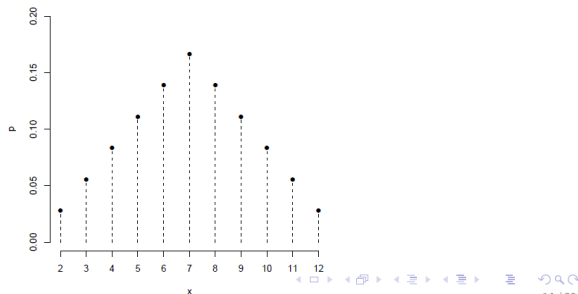
- X assume valores no conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
- A probabilidade dos possíveis resultados em Ω é
 $P[(1, 1)] = P[(1, 2)] = \dots = P[(2, 1)] = P[(2, 2)] = \dots = P[(6, 6)] = 1/36$.
- $P[X = 2] = P[(1, 1)] = 1/36$,
 $P[X = 3] = P[(1, 2) \cup (2, 1)] = 1/36 + 1/36 = 2/36$.

Variável aleatória discreta

Exemplo: lançamento de dois dados

- A função de probabilidade de X é dada por:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



Variável aleatória discreta

Exemplo: lançamento de dois dados

- **Observações:**

- p_i pertence ao intervalo $(0, 1)$ para $i = 1, \dots, 11$ (ex: $p_1 = 1/36 \in (0, 1)$)
- $\sum_{i=1}^{11} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_{11} = 1/36 + 2/36 + \dots + 1/36 = 1$
- A função de probabilidade de X satisfaz às condições 1 e 2, logo é de fato uma função de probabilidade.

- **Pergunta:** Qual a probabilidade da soma dos resultados dos dois lançamentos ser menor do que 6?

$$\begin{aligned}\Pr(X < 6) &= \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ &= 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36.\end{aligned}$$

Valor esperado, variância e desvio padrão

Média

- ▶ A **média**, **valor esperado** ou **esperança** de uma variável X é dada pela expressão:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i$$

- ▶ Uma notação alternativa é representar $E(X)$ por μ_X ou simplesmente μ .

Exemplo

- Considere a variável aleatória X com a seguinte função discreta de probabilidade:

X	-5	10	15	20
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

Temos,

$$\mu = \sum_i x_i p_i = (-5) \times 0,3 + 10 \times 0,2 + 15 \times 0,4 + 20 \times 0,1 = 8,5.$$

Variância

- ▶ Seja X uma variável aleatória com $\Pr(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, k$ e média μ . A **variância** de X é a ponderação pelas respectivas probabilidades, dos desvios relativos à média, elevados ao quadrado, isto é,

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p_i.$$

- ▶ Muitas vezes, denotamos a variância por σ^2 e, se houver possibilidade de confusão, usamos σ_X^2 .
 - ▶ Extraíndo a raiz quadrada da variância obtemos o **desvio-padrão** que é representado por σ ou σ_X

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p_i}.$$

Variância

- Note, que pela definição da variância, concluímos que a variância é o valor esperado de uma nova variável, o desvio quadrado. Isto é,

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2],$$

a qual pode ser convenientemente reescrita na seguinte forma

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i - \mu^2.$$

- Esta última expressão é bastante útil e, para não criar confusão, explicitamos os seus termos.
 - O termo $E(X^2)$ é o valor esperado da variável aleatória X^2 ;
 - $\mu^2 = (E[X])^2$ indica o quadrado do valor esperado de X .

Exemplo

- Considere a variável aleatória X com a seguinte função discreta de probabilidade:

X	-5	10	15	20
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

Temos,

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = (-5)^2 \times 0,3 + 10^2 \times 0,2 + 15^2 \times 0,4 + 20^2 \times 0,1 = 157,5.$$

$$Var(X) = 157,5 - 8,5^2 = 157,5 - 72,5 = 85,25.$$

Propriedades

- Seja X uma variável aleatória e

$$Y = aX + b,$$

então

$$E(Y) = aE(X) + b,$$

e

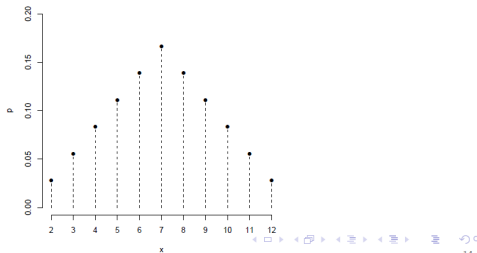
$$\text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X).$$

Exercício

Considere a seguinte função discreta de probabilidade:

- A função de probabilidade de X é dada por:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



- Calcule a média, a variância e o desvio padrão desta variável.

Para casa

- ▶ Revisar os tópicos discutidos nesta aula.
 - ▶ Ler os capítulos 5, 6, 10 e 11 do Livro “Estatística Básica”¹ (disponível no Sabi+).

¹Morettin, P. A. e Bussab, W. O. **Estatística Básica**, Saraiva, 2010.

Próxima aula

- ▶ Revisão de conceitos básicos de **probabilidade e estatística** (continuação).

Por hoje é só!

Bons estudos!

