

MAT02025 - Amostragem 1

AAS: propriedades dos estimadores

Rodrigo Citton P. dos Reis
citton.padilha@ufrgs.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Porto Alegre, 2021



Relembrando

Amostragem aleatória simples

A **amostragem aleatória simples**¹ (AAS) é um processo para selecionar n unidades de N de modo que cada uma das ${}_NC_n$ amostras distintas tenha uma **chance igual de ser extraída**.

¹Também conhecida como **amostragem casual simples** ou **amostragem acidental irrestrita**

Definições e notação

- ▶ As letras **maiúsculas** referem-se às características da população e as **minúsculas** às da amostra.
 - ▶ Para totais e médias, temos as seguintes definições.

Característica	População	Amostra
Total	$Y_T = \sum_{i=1}^N Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$	$y_T = \sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$
Média	$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N}$	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$

Definições e notação

- ▶ A estimativa das três primeiras quantidades será discutida na primeira parte desta área.
- ▶ O símbolo “ $\hat{}$ ” denota uma estimativa de uma característica da população feita a partir de uma amostra.
- ▶ De acordo com a relação acima, temos:

	Representação da estimativa
Média da população \bar{Y}	$\hat{\bar{Y}} = \bar{y} = \sum_{i=1}^n Y_i / n$
Total da população Y_T	$\hat{Y}_T = N\bar{y} = N \sum_{i=1}^n Y_i / n$
Índice da população R	$\hat{R} = \sum_{i=1}^n Y_i / \sum_{i=1}^n X_i$

Propriedades dos estimadores

Propriedades dos estimadores

- ▶ Como vimos, um método de estimativa é **imparcial (não viciado, não enviesado, não tendencioso)** se o valor médio da estimativa, **tomado em todas as amostras possíveis de dado tamanho n** , for exatamente igual ao valor verdadeiro da população.
- ▶ Se o método tiver que ser imparcial, irrestritamente, este resultado deve ser válido para qualquer população de valores finitos, Y_i , e para qualquer que seja n .
- ▶ Para investigar se \bar{y} é imparcial com a amostragem aleatória simples, calculamos o valor de \bar{y} para todas as amostras ${}_nC_n$ e encontramos a média das estimativas.
- ▶ O símbolo E denota essa média sobre todas as amostras possíveis.

Propriedades dos estimadores

Teorema

O valor média da amostra \bar{y} é uma estimativa sem tendência para \bar{Y} .

Propriedades dos estimadores

Demonstração. Por definição,

$$\begin{aligned}
 E(\bar{y}) &= \sum_{j=1}^{N C_n} [\bar{y}_j \times \pi_j] \\
 &= \sum_{j=1}^{N C_n} \left[\bar{y}_j \times \frac{1}{N C_n} \right] \quad (\pi_j = 1/N C_n) \\
 &= \frac{1}{N!/[n!(N-n)!]} \sum_{j=1}^{N C_n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_j(i) \right] \\
 &= \frac{1}{n[N!/[n!(N-n)!]} \sum_{j=1}^{N C_n} [Y_1(i) + Y_2(i) + \dots + Y_n(i)]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Propriedades dos estimadores

- ▶ Para avaliar essa soma, encontramos em quantas amostras qualquer valor específico Y_j aparece.
- ▶ Uma vez que existem $(N - 1)$ outras unidades disponíveis para o resto da amostra e $(n - 1)$ outros locais para preencher a amostra, o número de amostras contendo Y_j é

$${}_{N-1}C_{n-1} = \frac{(N - 1)!}{(n - 1)!(N - n)!}.$$

Propriedades dos estimadores

► Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N C_n} [Y_1(i) + Y_2(i) + \dots + Y_n(i)] &= {}_{N-1}C_{n-1} \times Y_1 + {}_{N-1}C_{n-1} \times Y_2 + \dots {}_{N-1}C_{n-1} \times Y_N \\&= {}_{N-1}C_{n-1} \times (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) \\&= {}_{N-1}C_{n-1} \times \sum_{j=1}^N Y_j \\&= \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \sum_{j=1}^N Y_j.\end{aligned}\tag{2}$$

Propriedades dos estimadores

- Combinando (2) com (1), temos

$$\begin{aligned}
 E(\bar{y}) &= \frac{n!(N-n)!}{nN!} \times \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \sum_{j=1}^N Y_j \\
 &= \frac{n(n-1)!(N-n)!}{nN(N-1)!} \times \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \sum_{j=1}^N Y_j \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j = \bar{Y}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Propriedades dos estimadores

Corolário

$\hat{Y}_T = N\bar{y}$ é um estimador imparcial do valor total populacional Y_T .

- **Para casa:** utilize o **Teorema** apresentado na aula para demonstrar o **Corolário**.

Um outro método de demonstração

Outro método de demonstração

- ▶ **Cornfield (1944)**¹ sugeriu um método para verificar os principais resultados das amostras aleatórias simples, sem reposição, que nos permite utilizar os resultados padronizados da teoria das populações infinitas.
- ▶ Seja a_i uma variável aleatória, e que assume o valor 1 se a i -ésima unidade for selecionada para a amostra, e assume valor 0 em caso contrário².

¹Cornfield, J. (1944). *On Samples from Finite Populations*. Journal of the American Statistical Association, 39(226), 236.

²Alguns autores utilizam a notação $Y_i = a_i Y_i^{obs} + (1 - a_i) Y_i^{aus}$, em que *obs* e *aus* representam **observado** e **ausente**, respectivamente.

Outro método de demonstração

Exemplo

Considere mais uma vez a população de tamanho $N = 6$, e $Y_1 = 2$, $Y_2 = 4$, $Y_3 = 6$, $Y_4 = 8$, $Y_5 = 10$, $Y_6 = 12$, e uma amostra aleatória simples, sem reposição, de tamanho $n = 2$. Então,

Sorteio	Probabilidade	Amostra	Indicadores de seleção					
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1/15	(2, 4)	1	1	0	0	0	0
2	1/15	(2, 6)	1	0	1	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
15	1/15	(10, 12)	0	0	0	0	1	1

Outro método de demonstração

- ▶ A **média amostral** pode ser expressa por

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N a_i Y_i,$$

em que o somatório abrange todas as N unidades da população.

Outro método de demonstração

- ▶ Nessa expressão, os a_i são **variáveis aleatórias**, e os Y_i constituem **um conjunto de números fixos**.
- ▶ Note que

$$\begin{aligned}\Pr(a_i = 1) &= \frac{\text{\#amostras que incluem o } i\text{-ésimo elemento}}{\text{\#amostras que podem ser sorteadas}} \\ &= \frac{{}_{N-1}C_{n-1}}{{}_NC_n} \\ &= \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{n}{N}.\end{aligned}$$

- ▶ E consequentemente, $\Pr(a_i = 0) = 1 - \frac{n}{N}$.

Outro método de demonstração

- Dessa forma, a_i se distribui como uma variável binomial, em uma única tentativa³, com $P = n/N$. Portanto,

$$E(a_i) = P = \frac{n}{N}, \quad \text{Var}(a_i) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

³Ou seja, uma variável com distribuição Bernoulli.

Outro método de demonstração

► Assim,

$$E(\bar{y}) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N a_i Y_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N E[a_i] Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N P Y_i = \bar{Y}.$$

Para casa

- ▶ Refaça as demonstrações da aula de hoje.

Próxima aula

- ▶ Variâncias dos estimadores.

Por hoje é só!

Bons estudos!

