

# MAT02035 - Modelos para dados correlacionados

## Dados longitudinais: conceitos básicos

Rodrigo Citton P. dos Reis  
citton.padilha@ufrgs.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Porto Alegre, 2022

## Objetivos da análise longitudinal

# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ Há muita **heterogeneidade** natural entre os indivíduos em termos de como as doenças se desenvolvem e progridem.



- ▶ Um delineamento de estudo longitudinal permite a descoberta de características individuais que podem explicar essas **diferenças interindividuais** nas **mudanças nos resultados** de saúde **ao longo do tempo**.

# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ A característica que distingue o delineamento longitudinal é que os participantes do estudo são medidos repetidamente ao longo da duração do estudo, permitindo assim a avaliação direta de **mudanças na variável resposta ao longo do tempo**.
- ▶ Em estudos transversais não é possível avaliar as mudanças individuais com base em uma única “fotografia” da resposta do indivíduo em um determinado momento.

# Objetivos da análise longitudinal

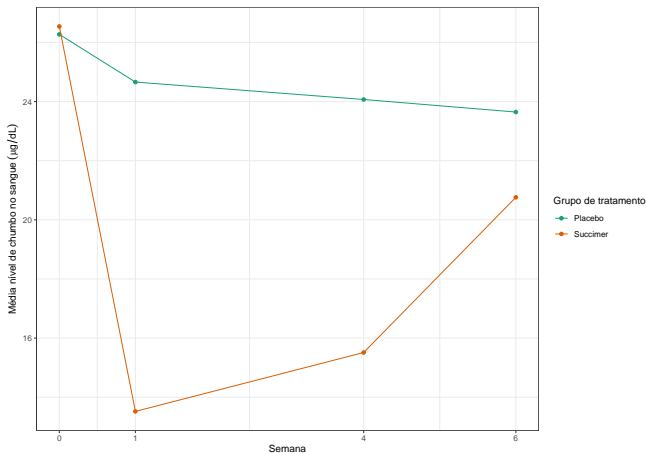
- ▶ Assim, a característica definidora de um estudo longitudinal é que **duas ou mais observações da variável resposta**, realizadas em momentos diferentes, são obtidas em pelo menos alguns dos participantes do estudo.
  - ▶ Normalmente, os delineamentos de estudo longitudinal exigem um **número fixo de medidas repetidas** a serem feitas **em todos os participantes** do estudo **em um conjunto de pontos de tempo comuns**.
  - ▶ As ocasiões de medição não são necessariamente distribuídas uniformemente ao longo da duração do estudo.

# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ O objetivo principal de um estudo longitudinal é caracterizar a mudança na resposta ao longo do tempo.
- ▶ Também é interessante determinar se essas mudanças dentro de cada indivíduo na resposta estão relacionadas a covariáveis selecionadas.

# Objetivos da análise longitudinal

## Relembrando: exemplo TLC



# Objetivos da análise longitudinal

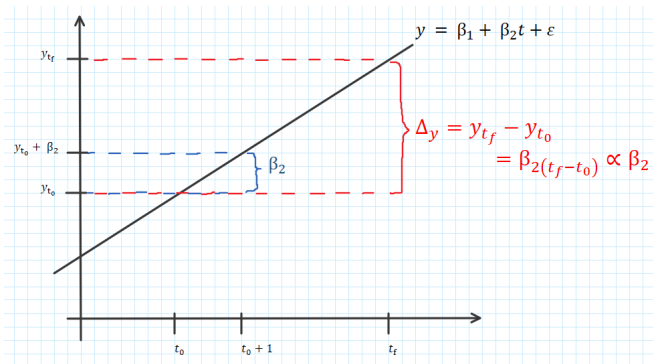
- ▶ Na forma mais elementar, uma medida da **mudança observada dentro de indivíduo** na resposta pode ser conceituada em termos de “**escores de mudança**” ou “**escores de diferença**”.
  - ▶ Por exemplo, as diferenças ( $\Delta_y$ ) entre as medidas de pós-tratamento e pré-tratamento na resposta:

$$\Delta_y = y_{t_f} - y_{t_0}.$$



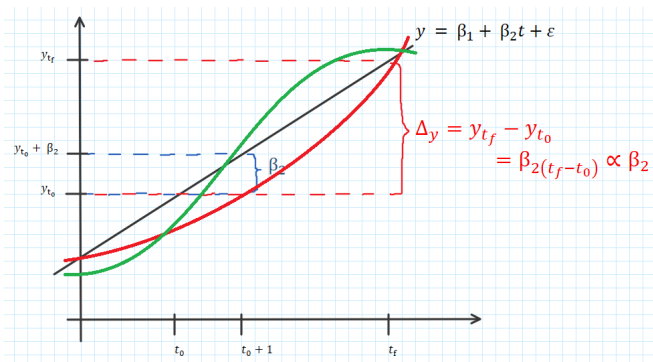
# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ Essa noção simples de mudança intraindividual se estende naturalmente de “escores de diferença” a “**trajetórias de resposta**” mais gerais ao longo do tempo.



## Objetivos da análise longitudinal

- ▶ No entanto, outros tipos de trajetórias de resposta, por exemplo, **lineares por partes** ou **curvilíneas**, podem ser usados para suavizar parcimoniosamente e resumir as mudanças intraindividuais na resposta ao longo da duração do estudo.



# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ Uma análise longitudinal das mudanças dentro de indivíduo procede em dois estágios conceitualmente distintos.
  1. A mudança individual na resposta é caracterizada em termos de algum resumo apropriado das mudanças nas medidas repetidas em cada indivíduo durante o período de observação (por exemplo, usando “escores de diferença” ou alguma forma de “trajetória de resposta”).
  2. Essas estimativas de mudanças individuais são relacionadas a diferenças interindividuais em covariáveis selecionadas.

# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ Embora essas duas etapas da análise sejam conceitualmente distintas, elas podem ser **combinadas em um modelo estatístico** para dados longitudinais.
- ▶ Um único modelo estatístico para dados longitudinais pode ser usado tanto para (1) capturar como os indivíduos mudam ao longo do tempo quanto para (2) relacionar mudanças individuais na resposta a covariáveis selecionadas.

# Objetivos da análise longitudinal

- ▶ Um estudo longitudinal pode estimar como os indivíduos mudam e também o fazem **com grande precisão**, pois cada indivíduo age como seu próprio controle.
  - ▶ Ao comparar as respostas de cada indivíduo em duas ou mais ocasiões, uma análise longitudinal pode remover fontes alheias, mas inevitáveis, de variabilidade entre indivíduos.

# Características definidoras dos dados longitudinais

## Terminologia: indivíduos e tempos

- ▶ Em um estudo longitudinal, os participantes, ou, mais geralmente, as unidades em estudo, são referidas como **indivíduos** ou **sujeitos**.
  - ▶ Em muitos, mas não em todos, estudos longitudinais, os indivíduos são sujeitos humanos.
  - ▶ Em outros estudos longitudinais, os indivíduos podem ser animais ou objetos.
- ▶ Em um estudo longitudinal os indivíduos são medidos repetidamente em diferentes **ocasiões** ou **tempos**.
- ▶ Assim, adotando a terminologia introduzida até agora, a característica definidora de um estudo longitudinal é que as medidas da variável resposta são obtidas nos mesmos indivíduos em diversas ocasiões.

## Terminologia: dados balanceados

- ▶ O número de observações repetidas e seu tempo (momento de ocorrência) podem variar muito de um estudo longitudinal para outro.
- ▶ Por exemplo, um ensaio clínico delineado para examinar a eficácia de um novo agente analgésico pode realizar medidas repetidas de uma escala de dor autorreferida na linha de base e ao final de seis intervalos de 15 minutos.
    - ▶ Isso resultaria em **sete medidas** repetidas que são **igualmente separadas** no tempo.
  - ▶ Por outro lado, um estudo observacional do crescimento humano pode fazer medições de altura e peso em intervalos de 3 meses, do nascimento até a idade de 2 anos, seguido por observações anuais desde a infância até a idade adulta jovem.
    - ▶ Por delineamento, este último estudo resultaria em uma **sequência de medidas** repetidas de altura e peso que são **separadas de forma desigual** no tempo.



## Terminologia: dados balanceados

- ▶ Em ambos os exemplos, o **número** e o **momento** das medições repetidas **são os mesmos** para todos os indivíduos, independentemente das ocasiões de medição serem igualmente ou desigualmente distribuídas ao longo da duração do estudo.
- ▶ Empregando a terminologia estatística emprestada do campo do delineamento experimental, nos referimos aos últimos estudos como sendo **“balanceados”** (equilibrados) ao longo do tempo.

# Terminologia: dados balanceados

## Exemplo TLC

**Table 1:** Níveis de chumbo no sangue de dez crianças do estudo TLC

ID	Grupo	Linha de base	Semana 1	Semana 4	Semana 6
44	Succimer	26.8	20.4	19.3	23.8
46	Placebo	35.4	30.4	26.5	28.1

## Exemplo ensaio clínico medicamento anti-epilético

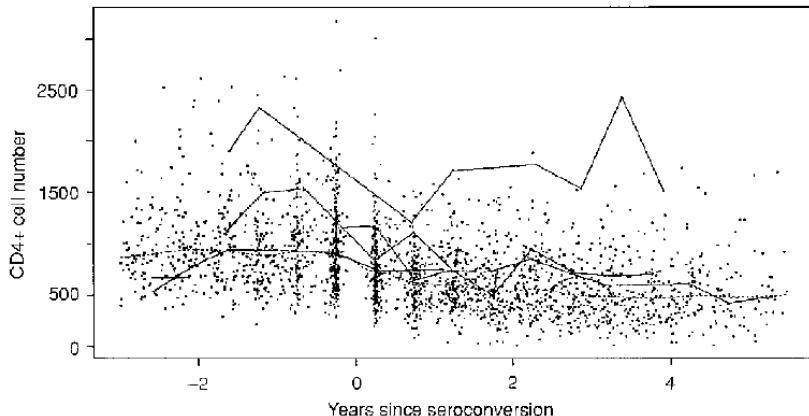
**Table 2:** Número de convulsões por semana

ID	Grupo	Linha de base	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4
43	Progabide	46	11	14	25	15
9	Placebo	23	5	6	6	5

## Terminologia: dados balanceados

- ▶ É uma característica dos estudos longitudinais, especialmente aqueles em que as medidas repetidas se estendem por um período relativamente longo, que alguns indivíduos perderão sua visita programada ou data de observação.
- ▶ Em alguns estudos, isso pode exigir que as observações sejam feitas algum tempo antes ou depois do momento programado.
  - ▶ Consequentemente, a sequência dos tempos de observação não é mais comum a todos os indivíduos no estudo.
- ▶ Nesse caso, nos referimos aos dados como “**desbalanceados**” ao longo do tempo.

## Terminologia: dados balanceados



## Terminologia: dados ausentes

- ▶ **Dados ausentes** são um problema comum e desafiador em estudos longitudinais.
  - ▶ A ocorrência de dados ausentes em estudos longitudinais é a regra, e não a exceção.
- ▶ Por exemplo, os participantes do estudo nem sempre aparecem para uma observação agendada, ou podem simplesmente deixar o estudo antes de sua conclusão (**padrão dropout**).
- ▶ Quando faltam algumas observações, os dados são necessariamente desbalanceados ao longo do tempo, uma vez que nem todos os indivíduos têm o mesmo número de medidas repetidas obtidas em um conjunto comum de ocasiões.

## Terminologia: dados ausentes

- ▶ Para distinguir dados ausentes em um estudo longitudinal de outros tipos de dados desbalanceados, esses conjuntos de dados são geralmente chamados de “**incompletos**”.
  - ▶ Essa distinção é importante e enfatiza o fato de que uma medida pretendida em um indivíduo não pôde ser obtida.
- ▶ Uma das consequências da falta de balanceamento e/ou ausência de dados é que requer alguns cuidados para recuperar a mudança dentro de cada indivíduo.

## Terminologia: dados ausentes

- ▶ Por exemplo, considere uma configuração em que cada indivíduo é medido em cada uma das  $n$  ocasiões.
  - ▶ Em seguida, considere traçar a resposta média em cada ocasião.
  - ▶ Diferenças na resposta média ao longo do tempo medem a mudança dentro de cada indivíduo.
  - ▶ Isso ocorre porque a diferença nas médias também é a média das diferenças quando cada indivíduo é medido em todas as ocasiões.

## Terminologia: dados ausentes

- ▶ Quando há dados ausentes, um gráfico da resposta média sobre o tempo pode ser enganador.
  - ▶ Mudanças ao longo do tempo podem refletir o padrão de ausência de dados, e não de mudança individual.
- ▶ Como discutiremos ao longo do curso, será necessário examinar cuidadosamente as suposições e a adequação da análise para determinar a validade das inferências com delineamentos desbalanceados e/ou ocorrência de dados ausentes.



## Terminologia: correlação

- ▶ Um aspecto dos dados longitudinais que aparece com destaque em sua análise estatística é que as medidas repetidas no mesmo indivíduo são geralmente **positivamente correlacionadas**.
- ▶ As observações correlacionadas são uma característica positiva dos dados longitudinais porque fornecem estimativas mais precisas da taxa de mudança ou o efeito das covariáveis nessa taxa de mudança do que seria obtido a partir de um número igual de observações independentes de indivíduos diferentes.
- ▶ No entanto, a correlação entre medidas repetidas viola a suposição de independência que é fundamental em tantas técnicas de regressão padrão.

## Notação: variável resposta

- ▶ Seja  $Y_{ij}$  a variável resposta para o  $i$ -ésimo indivíduo ( $i = 1, \dots, N$ ) na  $j$ -ésima ocasião do tempo ( $j = 1, \dots, n$ ).
  - ▶ Variável aleatória:  $Y_{ij}$
  - ▶ Realização da variável aleatória:  $y_{ij}$

Indivíduo	Ocasião				
	1	2	3	...	n
1	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	...	$y_{1n}$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	...	$y_{2n}$
.	.	.	.	...	.
.	.	.	.	...	.
.	.	.	.	...	.
$N$	$y_{N1}$	$y_{N2}$	$y_{N3}$	...	$y_{Nn}$

## Notação: variável resposta

- ▶ As  $n$  medidas repetidas da variável resposta em cada indivíduo pode ser agrupada em um vetor resposta  $n \times 1$ , denotado por

$$Y_i = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in} \end{pmatrix}.$$

- ▶ Uma forma equivalente é dada por

$$Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in})'.$$

## Notação: resposta média

- ▶ Na análise de dados de um estudo longitudinal, o principal interesse está na resposta média.
  - ▶ Mudanças ao longo do tempo na resposta média.
  - ▶ Como estas mudanças dependem de covariáveis (grupo de tratamento, exposições).
- ▶ Denotamos a média ou o valor esperado de cada resposta  $Y_{ij}$  por

$$\mu_j = E(Y_{ij}).$$

- ▶ Podemos pensar em  $\mu_j$  como uma média sobre uma grande **população** de indivíduos na  $j$ -ésima ocasião do tempo.

## Notação: resposta média

- ▶ Em muitos estudos longitudinais o principal objetivo é relacionar mudanças na resposta média sobre o tempo à covariáveis.
- ▶ Para permitir adicionalmente que a resposta média e as mudanças na resposta média variem de indivíduo para indivíduo em função de covariáveis de nível individual, utilizaremos a seguinte notação

$$\mu_{ij} = E(Y_{ij}).$$

- ▶ Aqui, o valor esperado denota uma média sobre uma grande **subpopulação** de indivíduos que compartilham valores semelhantes das covariáveis (por exemplo, indivíduos designados para o grupo de tratamento ativo, sujeitos não expostos) na  $j$ -ésima ocasião do tempo.
  - ▶ Diremos que  $\mu_{ij}$  é a resposta média condicional na  $j$ -ésima ocasião, em que o termo condicional é usado para denotar a dependência da média nas covariáveis.

# Dependência e Correlação

- ▶ Na estatística, as noções de dependência e independência têm significados precisos.
- ▶ Duas variáveis são consideradas independentes se a distribuição condicional de uma delas não depender da outra.
- ▶ Por exemplo, o nível de colesterol LDL seria considerado independente do sexo se a distribuição do nível de colesterol LDL fosse a mesma para em indivíduos do sexo feminino e masculino.

# Dependência e Correlação

- ▶ Muitas técnicas estatísticas (por exemplo, regressão linear e análise de variância para uma resposta única e univariada) assumem que as **observações** do estudo são realizações de variáveis aleatórias que são **independentes** umas das outras.
- ▶ Esta suposição será bastante razoável:
  1. Quando o delineamento do estudo exigir que uma observação seja obtida de cada indivíduo e os indivíduos sejam selecionados aleatoriamente de uma população maior.
  2. Quando o estudo exige que uma observação seja obtida de cada indivíduo e os indivíduos sejam aleatoriamente designados para diferentes condições de tratamento.

# Dependência e Correlação

- ▶ Além disso, a suposição de observações independentes pode ser justificada em bases puramente físicas ou científicas, quando as respostas de indivíduos distintos no estudo são consideradas como completamente não relacionadas entre si.
  - ▶ Ou seja, a resposta de um indivíduo não influencia nem é influenciada pela resposta do outro.



# Dependência e Correlação

- ▶ No caso em que mais de uma única observação é obtida no mesmo indivíduo, a suposição de observações independentes é simplesmente **insustentável**.
- ▶ Ou seja, a resposta de um indivíduo em uma ocasião é muito provável que seja preditiva da resposta do mesmo indivíduo em uma ocasião futura.
  - ▶ Por exemplo, um indivíduo com um alto nível de colesterol LDL em uma ocasião é muito provável que também tenha um alto nível de colesterol LDL na próxima ocasião.
- ▶ Além disso, com uma **variável resposta quantitativa**, essa dependência entre as medidas repetidas no mesmo indivíduo pode ser caracterizada pela sua **correlação**.

## Dependência e Correlação

- ▶ Considere um delineamento longitudinal simples que é balanceado e completo, com  $n$  medidas repetidas da variável resposta em um conjunto comum de ocasiões em  $N$  indivíduos.
- ▶ Se denotamos a **média condicional** de  $Y_{ij}$  por  $\mu_{ij} = E(Y_{ij})$ , então a **variância condicional** de  $Y_{ij}$  é definida como

$$\sigma_j^2 = E\{Y_{ij} - E(Y_{ij})\}^2 = E(Y_{ij} - \mu_{ij})^2.$$

- ▶ O **desvio-padrão** condicional  $\sigma_j = \sqrt{\sigma_j^2}$ .
- ▶ **Observação:** note que assumimos que a variância pode variar de ocasião para ocasião ( $\sigma_j^2$ ).

# Dependência e Correlação

A **covariância condicional** entre as respostas em duas diferentes ocasiões,  $Y_{ij}$  e  $Y_{ik}$ , é denotada por

$$\sigma_{jk} = E \{ (Y_{ij} - \mu_{ij})(Y_{ik} - \mu_{ik}) \},$$

e fornece uma medida de **dependência linear** entre  $Y_{ij}$  e  $Y_{ik}$ , dado as covariáveis.

- ▶ A covariância entre  $Y_{ij}$  e  $Y_{ik}$  pode assumir valores positivos ou negativos.
- ▶ Quando a covariância é zero, então não há dependência linear entre as respostas nas duas ocasiões (dado as covariáveis).
- ▶ A magnitude da covariância é de difícil interpretação.

# Dependência e Correlação

A correlação condicional entre  $Y_{ij}$  e  $Y_{ik}$  é denotada por

$$\rho_{jk} = \frac{E \{ (Y_{ij} - \mu_{ij})(Y_{ik} - \mu_{ik}) \}}{\sigma_j \sigma_k},$$

em que  $\sigma_j$  e  $\sigma_k$  são os desvios-padrão de  $Y_{ij}$  e  $Y_{ik}$ , respectivamente.

- ▶ A correlação pode variar entre  $-1$  e  $1$ .
- ▶ Correlação positiva implica que uma variável aumenta conforme a outra aumenta.

# Dependência e Correlação

- ▶ Embora duas variáveis que são estatisticamente independentes uma da outra sejam necessariamente não correlacionadas, as variáveis podem ser não correlacionadas sem serem independentes (uma vez que a correlação apenas mede a dependência linear).
- ▶ A independência estatística é uma condição mais forte que a correlação zero.
  - ▶ Implica “nenhuma dependência”, isto é, nenhuma dependência linear ou não linear entre as variáveis.
- ▶ Por outro lado, a correlação quantifica o grau em que duas variáveis são relacionadas ou dependentes, desde que a dependência seja linear.

# Dependência e Correlação

- Quando  $n$  medidas repetidas são coletadas em um vetor  $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in})$ , podemos definir a **matriz de variância-covariância**:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{Var}(Y_{i1}) & \text{Cov}(Y_{i1}, Y_{i2}) & \dots & \text{Cov}(Y_{i1}, Y_{in}) \\ \text{Cov}(Y_{i2}, Y_{i1}) & \text{Var}(Y_{i2}) & \dots & \text{Cov}(Y_{i2}, Y_{in}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(Y_{in}, Y_{i1}) & \text{Cov}(Y_{in}, Y_{i2}) & \dots & \text{Var}(Y_{in}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Dependência e Correlação

- ▶ Note que  $\text{Cov}(Y_{ij}, Y_{ik}) = \sigma_{jk} = \sigma_{kj} = \text{Cov}(Y_{ik}, Y_{ij})$  (**simetria**).
- ▶ Ainda,  $\sigma_{kk} = \text{Cov}(Y_{ik}, Y_{ik}) = \text{Var}(Y_{ik}) = \sigma_k^2$ .
- ▶ Dessa forma podemos nos referir a matriz de variância-covariância de  $Y_i$  como a (matriz) covariância de  $Y_i$ , ou  $\text{Cov}(Y_i)$

$$\text{Cov}(Y_i) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

# Dependência e Correlação

- Também podemos definir a matriz de **correlação**,  $\text{Corr}(Y_i)$

$$\text{Corr}(Y_i) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$



# Comentários

- ▶ Em dados longitudinais, os pressupostos usuais da análise de regressão padrão não são válidos.
- ▶ A heterogeneidade da variância ao longo do tempo pode ser explicada ao permitir que os elementos na diagonal principal da matriz de covariância sejam diferentes.
- ▶ A falta de independência entre as medições repetidas é explicada por permitir que os elementos fora da diagonal das matrizes de covariância e correlação sejam diferentes de zero.

# Comentários

- ▶ Além disso, espera-se que as correlações sejam positivas e a natureza sequencial dos dados longitudinais implica que pode haver um padrão para as correlações.
  - ▶ Por exemplo, espera-se que um par de medidas repetidas que foram obtidas próximas no tempo sejam mais altamente correlacionadas do que um par de medidas repetidas separadas no tempo.
  - ▶ Em geral, espera-se que a correlação entre as medidas repetidas diminua com o aumento da separação de tempo.

# Avisos

- ▶ **Para casa:** ler o Capítulo 1 do livro “**Applied Longitudinal Analysis**”. Caso já tenha lido o Cap. 1, leia o Capítulo 2.
- ▶ **Próxima aula:** Dados longitudinais: exemplo, fontes de variação e consequências de ignorar a correlação entre dados longitudinais.

## Bons estudos!

