MAT02262 - Estatística Demográfica I

Tábuas de vida: a estrutura (continuação)

Rodrigo Citton P. dos Reis
citton.padilha@ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Porto Alegre, 2024

Relembrando

Relembrando

Tábua de Vida de uma Geração vs. Tábua de Vida de Coorte Sintética

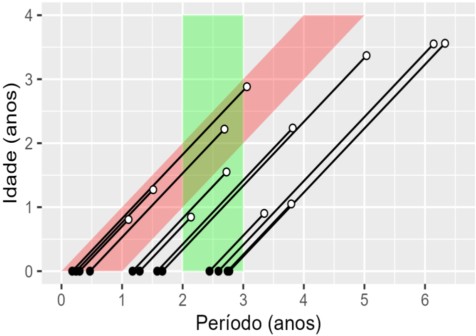

Figura 1: Diagrama de Lexis.

Tábua de Vida de Coorte Sintética

Esta tábua considera a experiência de mortalidade de uma dada população, num período curto de tempo (ano), e projeta a duração de vida, de cada indivíduo, baseada nas probabilidades reais de morte, numa **coorte hipotética** de nascidos vivos.

- Há, então, um padrão fictício de condições de mortalidade, dado que nenhuma coorte realmente experimentou ou experimentará este modelo particular de mortalidade.

Tábua de Vida de Coorte Sintética

- Este tipo de tábua responde também às indagações mencionadas anteriormente, levando-se em conta as seguintes pressuposições:
  - a **mortalidade**, em cada idade, mantém-se **constante** e igual à do ano-calendário, no qual a tábua é baseada;
  - a **população** exposta é **estacionária**, isto é, o número anual de nascidos vivos é igual ao número de mortes; o saldo migratório é nulo, ano após ano.

Tábuas de vida: a estrutura

Até o momento, os coeficientes específicos de mortalidade foram considerados como uma das melhores **medidas de mortalidade**, pois estimam o **risco de morrer**.

- No entanto, esses coeficientes não respondem à indagação:

Qual a probabilidade

de uma pessoa com idade exata x, no início de um determinado ano, vir a falecer neste mesmo ano?

Tábuas de vida: a estrutura

Assim, para o cálculo da probabilidade de morrer (q_x) adotam-se as seguintes estimativas:

a) para indivíduos com **idade igual ou superior a dois anos**:

$$q_x = \frac{D_x}{P_x + \frac{D_x}{2}}.$$

Tábuas de vida: a estrutura

b) para indivíduos com **idade inferior a dois anos**:

b1) menores de um ano, **sexo masculino**

$$q_0 = \frac{D_0}{P_0 + 0,863 D_0};$$

b2) menores de um ano, **sexo feminino**

$$q_0 = \frac{D_0}{P_0 + 0,826 D_0};$$

Tábuas de vida: a estrutura

b3) indivíduos com **um ano de idade**

$$q_1 = \frac{D_1}{P_1 + 0,70 D_1}.$$

Tábuas de vida: a estrutura

- Quando se constrói uma tábua de sobrevivência do **tipo abreviada**, isto é, os grupos etários são de tamanho igual a cinco ou dez anos, há necessidade de modificações, pois o que se pretende é estimar a probabilidade de um indivíduo do grupo etário $x \vdash x + n$ vir a falecer, durante o período que estaria nesse grupo (período de n anos).

Tábuas de vida: a estrutura

- Portanto, deve-se multiplicar o número de óbitos (D_x) por n.
- Tal probabilidade será, então:

$$_nq_x = \frac{_nO_x}{_nP_x + \frac{_nO_X}{2}},$$

em que:

$$_nO_x = n \times {_nD_x}.$$

- As estimativas das probabilidades de morrer, para os residentes masculinos no Município de São Paulo, em 1970, estão apresentadas na tabela a seguir.

Tábuas de vida: a estrutura

Tabela 8.1. **Probabilidade de morrer, segundo grupos etários, população masculina do Município de São Paulo, 1970.**

Grupos etários (em anos)	População em 1/7/1970 $_nP_x$	Óbitos $_nD_x$	Óbitos esperados $_nO_x$	Expostos a morrer $_nE_x$	Probabilidade de morrer $_nq_x$
0	66 163	6 578	6 578	71 840	0,09157
1	60 223	338	338	60 460	0,00559
2	65 101	183	183	65 192	0,00281
3	66 889	117	117	66 948	0,00175
4	68 392	79	79	68 432	0,00115
5 ⊢ 10	334 692	256	1 280	335 332	0,00382
10 ⊢ 15	300 761	222	1 110	301 316	0,00368
15 ⊢ 20	275 881	383	1 915	276 839	0,00692
20 ⊢ 25	298 175	600	3 000	299 675	0,01001
25 ⊢ 30	256 425	708	3 540	258 195	0,01371
30 ⊢ 35	225 343	851	4 255	227 471	0,01871
35 ⊢ 40	199 436	996	4 980	201 926	0,02466
40 ⊢ 45	182 523	1 240	6 200	185 623	0,03340
45 ⊢ 50	138 689	1 320	6 600	141 989	0,04648
50 ⊢ 55	105 660	1 504	7 520	109 420	0,06873
55 ⊢ 60	83 668	1 662	8 310	87 823	0,09462
60 ⊢ 65	64 066	1 961	9 805	68 969	0,14217
65 ⊢ 70	43 796	1 971	9 855	48 724	0,20226
70 ⊢ 75	27 285	1 902	9 510	32 040	0,29682
75 ⊢ 80	13 211	1 360	6 800	16 611	0,40937
80 ⊢ 85	6 766	873	4 365	8 949	0,48779
85 e +	4 717	650	4 717	4 717	1,00000

A estrutura da tábua de vida: os elementos

A estrutura da tábua de vida: os elementos

A tábua de vida é formada por sete colunas, onde estão dispostas as variáveis de estudo e os respectivos resultados.

Tabela 8.2. **Tábua de vida para os residentes masculinos no Município de São Paulo, 1970.**

(1) Grupo etário (anos)	(2) Nº de sobreviventes que iniciaram a idade X ℓ_x	(3) Probabilidade de morte no intervalo $_nq_x$	(4) Nº de mortes no intervalo $_nd_x$	(5) Nº de anos vividos no intervalo $_nL_x$	(6) Total de anos vividos a partir da idade x T_x	(7) Esperança de vida e_x
0	100 000	0,09157	9 157	92 098	6 012 048	60,12
1	90 843	0,00559	508	90 487	5 919 950	65,17
2	90 335	0,00281	254	90 208	5 829 463	64,53
3	90 081	0,00175	158	90 002	5 739 255	63,71
4	89 923	0,00115	103	89 872	5 649 253	62,82
5 ⊢ 10	89 820	0,00382	343	448 243	5 559 381	61,89
10 ⊢ 15	89 477	0,00368	329	446 563	5 111 138	57,12
15 ⊢ 20	89 148	0,00692	617	444 198	4 664 575	52,32
20 ⊢ 25	88 531	0,01001	886	440 440	4 220 377	47,67
25 ⊢ 30	87 645	0,01371	1 202	435 220	3 779 937	43,13
30 ⊢ 35	86 443	0,01871	1 617	428 173	3 344 717	38,69
35 ⊢ 40	84 826	0,02466	2 092	418 900	2 916 544	34,38
40 ⊢ 45	82 734	0,03340	2 763	406 763	2 497 644	39,19
45 ⊢ 50	79 971	0,04648	3 717	390 563	2 090 881	26,15
50 ⊢ 55	76 254	0,06873	5 241	368 168	1 700 318	22,30
55 ⊢ 60	71 013	0,09462	6 719	338 268	1 332 150	18,76
60 ⊢ 65	64 294	0,14217	9 141	298 618	993 882	15,46
65 ⊢ 70	55 153	0,20226	11 155	247 878	695 264	12,61
70 ⊢ 75	43 998	0,29682	13 059	187 343	447 386	10,17
75 ⊢ 80	30 939	0,40937	12 665	123 033	260 043	8,41
80 ⊢ 85	18 274	0,48779	8 914	69 085	137 010	7,50
85 e +	9 360	1,00000	9 360	67 925	67 925	7,26

Elementos

- **Coluna 1:** $(x, x+n)$ - ***Intervalo de idade ou grupo etário.***

Cada intervalo é definido por duas idades exatas, exceto o último grupo etário, que é aberto à direita.

Elementos

- **Coluna 2: ℓ_x - *Número de sobreviventes que iniciam a idade x.***

O primeiro valor desta variável é **uma raiz arbitrária** (ℓ_0) e, no presente caso, é utilizada a raiz, **cem mil nascidos vivos (tamanho da coorte hipotética)**, que serão submetidos às probabilidades de morte calculadas anteriormente **(tabela 8.1)**.

Os demais valores desta coluna (todos ℓ_x) representam os sobreviventes em cada idade x, de acordo com a mortalidade existente no período considerado.

- A obtenção destes valores está explicada no item "coluna 4".

Elementos

- **Coluna 3:** $_nq_x$ - ***Probabilidades de morte no intervalo etário*** $(x, x+n)$**.**

Como foi visto, é a estimativa do risco de um indivíduo na idade x vir a morrer no intervalo $(x, x+n)$.

Elementos

- **Coluna 4: $_nd_x$ - *Número de mortes no intervalo* $(x, x+n)$.**

Representa o número de mortes da tábua de vida, no intervalo etário.

Os valores são obtidos aplicando-se as probabilidades de morte $(_nq_x)$ aos sobreviventes que iniciam o grupo (ℓ_x).

Elementos

- Assim, se a raiz era igual a 100.000 nascidos vivos, e estes estiverem expostos a uma probabilidade de morrer (q_0) de $0,09157$, virão a morrer 9157 indivíduos $(d_0 = 100.000 \times 0,09157)$.
- Com isto, restarão 90.843 sobreviventes $(100.000 - 9157)$.
- Estes 90.843 indivíduos (ℓ_1) que iniciam a idade de um ano, estariam expostos a um risco de morrer (q_1) igual a $0,00559$.
  - Portanto, morreriam 508 indivíduos $(d_1 = 90.843 \times 0,00559)$, e sobreviveriam (ℓ_2) 90.335 indivíduos $(90.843 - 508)$.

Elementos

Então:

$$
\begin{aligned}
{}_nd_x &= \ell_x \times {}_nq_x \\
\ell_{x+n} &= \ell_x - {}_nd_x.
\end{aligned}
$$

Se: $\ell_0 = 100.000$ nascidos vivos

então, $\ell_1 = 100.000 - 9167 = 90.843$

$\ell_2 = 90.843 - 508 = 90.335$

$\ell_3 = 90.335 - 254 = 90.081$

$\ell_{85 \text{ e } +} = 18.274 - 8914 = 9360$

Elementos

- **Coluna 5:** $_nL_x$ - ***Número de anos vividos no intervalo*** $(x, x+n)$**.**

Cada indivíduo da coorte que sobrevive ao ano contribui com um ano completo, e cada um dos que morrem também contribui com uma parcela de tempo em termos de anos vividos, dado que não morreram todos no início do período.

- A pergunta a ser respondida é: quantos **anos viverão em conjunto** os indivíduos desse grupo etário, antes de passarem para o grupo etário seguinte?

Elementos

Para tanto, há necessidade de considerar duas situações:

a. **Idades inferiores a dois anos**

Como foi visto no cálculo da probabilidade de morrer, grande proporção dos óbitos de menores de dois anos ocorre na primeira metade do ano calendário (0,826 e 0,863 em menores de um ano e 0,70 em crianças de 1 ano).

- Portanto, a contribuição, em anos vividos, dos que vierem a falecer, será:
  - $(1 - 0,826)$ ano para as meninas menores de um ano;
  - $(1 - 0,863)$ ano para os meninos menores de um ano;
  - e $(1 - 0,70)$ ano para os indivíduos que vierem a falecer com um ano de idade.

Elementos

Então, para o cálculo dos anos vividos no intervalo de menores de um ano, no sexo masculino, Município de São Paulo, leva-se em consideração:

- a contribuição de um ano para cada um dos que sobreviveram (ℓ_1), isto é, 90.843 **anos-pessoas**[1] (90.843×1);
- e a contribuição de $0,137$ ano $(1 - 0,863)$ para cada um dos que faleceram com esta idade.

[1] **Anos-pessoas** representam a totalidade de anos vividos pelo conjunto de indivíduos deste grupo etário.

Elementos

Portanto:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \ell_1 + (0,137 \times d_0) \\
L_0 &= 90.843 + (0,137 \times 9157) = 92.098 \text{ anos-pessoas.}
\end{aligned}
$$

O mesmo raciocínio acontece para os anos vividos pelos indivíduos de um ano. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \ell_2 + (0,137 \times d_1) \\
L_1 &= 90.335 + (0,30 \times 508) = 90.487 \text{ anos-pessoas.}
\end{aligned}
$$

Elementos

b. Idades iguais ou superiores a dois anos

Admitindo-se que os óbitos tenham distribuição homogênea no decorrer do ano, deve-se levar em conta, para o cálculo do número de anos vividos, a contribuição de meio ano, em média, para cada um dos indivíduos que faleceram, e agregar a contribuição de um ano para cada sobrevivente. Assim,

$$L_x = \ell_{x+1} + \frac{1}{2} d_x.$$

Elementos

No caso da tábua apresentada na tabela 8.2, os valores foram obtidos da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \ell_3 + \frac{1}{2}d_2 = 90.081 + (0,5 \times 254) = 90.208 \text{ anos-pessoas},\\
L_3 &= \ell_4 + \frac{1}{2}d_3 = 89.923 + (0,5 \times 158) = 90.002 \text{ anos-pessoas},\\
L_4 &= \ell_5 + \frac{1}{2}d_4 = 89.820 + (0,5 \times 153) = 89.872 \text{ anos-pessoas}.
\end{aligned}
$$

Elementos

No caso dos grupos etários de tamanho n, surge a **pergunta:** quantos anos viveriam, em conjunto, os indivíduos deste grupo etário, antes de passarem para o grupo etário seguinte?

- Se iniciam ℓ_x sobreviventes e nenhum falece, eles viveriam $n \times \ell_x$ **anos em conjunto**;
- Mas, como alguns falecem $({}_nd_x)$, tem-se que levar em conta a contribuição desses falecidos, em termos de anos-pessoas, e dos que sobrevivem (ℓ_{x+n}).

Elementos

- Os que falecem contribuem de formas diversas, isto é, alguns falecem no início do período, outros no meio do período ($n/2$ anos), e outros, praticamente, vivem os n anos, podendo-se admitir, então, que, em média, contribuem com anos $n/2$ anos. O cálculo dos anos vividos se resume

$$ {}_nL_x = (n \times \ell_{x+n}) + \left(\frac{n}{2} \times {}_nd_x\right). $$

Elementos

Exemplificando os valores da tábua na tabela 8.2:

$$
\begin{aligned}
{}_5L_5 &= (5 \times \ell_{10}) + \left(\frac{5}{2} \times {}_5d_5\right) = (5 \times 89.477) + (2,5 \times 343) \\
&= 448.243 \text{ anos-pessoas}, \\
{}_5L_{10} &= (5 \times \ell_{15}) + \left(\frac{5}{2} \times {}_5d_{10}\right) = (5 \times 89.148) + (2,5 \times 329) \\
&= 446.563 \text{ anos-pessoas}.
\end{aligned}
$$

Elementos

- Para o último grupo etário é recomendado que

$$L_x = \frac{d_x}{D_x} \times P_x,$$

em que:

- d_x é número de mortes (na coorte sintética) no intervalo etário;
- D_x é número de óbitos na população, no intervalo etário final;
- P_x é a população recenseada ou estimada para o último intervalo etário.

Então:

$$L_{85 \text{ e } +} = \frac{9360}{650} \times 4717 = 67.925 \quad \text{anos-pessoas.}$$

Elementos

- **Coluna 6:** T_x - ***Total de anos vividos além da idade*** x**.**

Este total representa a **soma dos anos vividos** em cada intervalo etário, a partir do intervalo $(x, x + n)$.

Os valores são obtidos acumulando-se os números da *coluna 5*, começando pelo **último grupo etário**.

Elementos

Assim:

$$
\begin{aligned}
T_{85 \text{ e } +} &= L_{85 \text{ e } +}, \\
T_{80} &= T_{85 \text{ e } +} + {}_5L_{80}, \\
T_{75} &= T_{80} + {}_5L_{75}.
\end{aligned}
$$

Elementos

Para o cálculo dos valores da tabela 8.2, procedeu-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T_{85 \text{ e } +} &= 67.925 \quad \text{anos-pessoas,} \\
T_{80} &= T_{85 \text{ e } +} + {}_5L_{80} = 67.925 + 69.085 = 137.010 \quad \text{anos-pessoas,} \\
T_{75} &= T_{80} + {}_5L_{75} = 137.010 + 123.033 = 260.043 \quad \text{anos-pessoas,} \\
T_{0} &= T_{1} + L_{0} = 5.919.950 + 92.098 = 6.012.014 \quad \text{anos-pessoas.}
\end{aligned}$$

Elementos

- Então, a coorte de 100.000 nascidos vivos, do Município de São Paulo, em 1970, **sujeita às condições de mortalidade desta época**, viveriam, em conjunto, um total de 6.012.014 anos-pessoas.

Elementos

- **Coluna 7:** e_x - ***Esperança de vida observada na idade*** x.

É o número médio de anos a serem vividos pelas pessoas nas idades $(x, x + n)$.

- É a **coluna de maior interesse prático** da tábua de vida.
- É obtida, dividindo-se os números da coluna 6 $({}_nT_x)$ por aqueles encontrados na coluna 2 (ℓ_x).

Elementos

- Cada e_x resume a experiência de mortalidade dos indivíduos além da idade x, na população em estudo.
- As esperanças de vida decrescem com o aumento da idade;
  - a única exceção é a esperança de vida à idade zero **(também chamada de esperança de vida ao nascer)** que, devido à influência da alta mortalidade infantil, apresenta valor menor do que a esperança de vida a um ano de idade.
- A esperança de vida também é conhecida como **vida média**.

Elementos

Os valores da tabela 8.2 foram obtidos por meio dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{T_0}{\ell_0} = \frac{6.012.014}{100.000} = 60,12 \text{ anos}, \\ e_1 &= \frac{T_1}{\ell_1} = \frac{5.919.950}{90.843} = 65,17 \text{ anos}, \\ e_{85 \text{ e } +} &= \frac{T_{85 \text{ e } +}}{\ell_{85 \text{ e } +}} = \frac{67.925}{9.360} = 7,26 \text{ anos}, \end{aligned}$$

Elementos

- O significado desses valores é que os meninos nascidos no Município de São Paulo, em 1970, viveriam, em média, 60,12 anos se as condições de mortalidade permanecessem as mesmas.
- Os indivíduos com idade de um ano viveriam, em média, mais 65,17 anos.
- E os de 85 anos e mais viveriam, em média, mais 7,26 anos.

Aplicações da tábua de vida

- Esperança de vida como indicador de nível de saúde.
- Avaliação da magnitude de agravos de saúde.
- Em demografia, para a projeção do tamanho de populações.
- Estatística hospitalares.
- Estimativas de probabilidades.

Estimativas de probabilidades

Estimativas de probabilidades

Baseando-se na tábua de vida, podem ser estimadas as seguintes relações:

- **Probabilidade** de um indivíduo morrer entre os $x, x+n$ aniversários, por meio de:

$$\frac{{}_nd_x}{\ell_0}.$$

Recorrendo-se à tabela 8.2, pode-se dizer que a probabilidade do homem paulistano, em 1970, morrer entre o 50º e 55º aniversários é de:

$$\frac{{}_5d_{50}}{\ell_0} = \frac{5241}{100.000} = 0,05241 = 5,24\%.$$

Estimativas de probabilidades

- **Probabilidade** de um indivíduo morrer entre $x \vdash x + n$ aniversários, dado que ele sobreviva até os $x \vdash x + n$ aniversários, medida por:

$$\frac{{}_n d_x}{\ell_x}.$$

No exemplo do homem paulistano, a probabilidade de morrer entre 50 e 55 anos, dado que ele sobreviva até este mesmo grupo etário será:

$$\frac{524}{76.254} = 0,687 = 6,87\%.$$

Estimativas de probabilidades

- **Probabilidade** de um indivíduo morrer, por exemplo, entre 50 e 55 anos, dado que ele sobreviva ao primeiro aniversário; medida pela relação

$$\frac{{}_5d_{50}}{\ell_1}.$$

Com os dados da tabela 0.2,

$$\frac{5241}{90.844} = 0,577 = 5,77\%.$$

Estimativas de probabilidades

- **Proporção dos sobreviventes** no início do grupo etário 50 a 55 anos, que atingirão a idade de 70 anos, medida por:

$$\frac{\ell_{70}}{\ell_{50}}.$$

Para os paulistanos:

$$\frac{43.998}{76.254} = 0,5770 = 57,7\%.$$

Próxima aula

- Métodos de projeção populacional: uma introdução.

Para casa

- Atividade de avaliação da Área 2.
- Ler o capítulo 9 do livro "Métodos Demográficos Uma Visão Desde os Países de Língua Portuguesa"[2].

[2] FOZ, Grupo de. *Métodos Demográficos Uma Visão Desde os Países de Língua Portuguesa*. São Paulo: Blucher, 2021. https://www.blucher.com.br/metodos-demograficos-uma-visao-desde-os-paises-de-lingua-portuguesa_9786555500837

Por hoje é só!

Bons estudos!