

Im Gegensatz zur seismischen Erkundung beruht die Schwereerkundung auf der Messung natürlicher Felder. Aus deren lokaler Variation wird auf Dichteunterschiede im Untergrund geschlossen, denn Variationen in der Masseverteilung im Untergrund verursachen entsprechende Variationen im Schwerefeld der Erde. Die Messung dieser Variationen auf der Erde, in Bohrungen, auf See sowie vom Flugzeug oder Satelliten aus ermöglicht daher die Identifizierung und Lokalisierung von Massen im Untergrund, deren Dichte von der des Nebengesteins abweicht. Vorrangiges Ziel hierbei ist die Bestimmung der Dichte und geometrischen Form solcher Einlagerungen. Diese Rückschlüsse sind jedoch aus prinzipiellen Gründen immer mehrdeutig, wie auch bei den anderen, hier nicht behandelten magnetischen und elektrischen Potenzialmethoden der Angewandten Geophysik.

Während die Grundidee der Schweremessung, die Messung der Anziehung einer Probemasse im variablen Schwerefeld der Erde, relativ einfach ist, ergeben sich bei der praktischen Durchführung zwei Hauptprobleme. Das erste besteht in der geforderten hohen Genauigkeit: Während ein mittlerer Wert der Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche $9,8 \text{ m s}^{-2}$ ist, müssen bereits in Routineuntersuchungen ihre Variationen auf 10^{-7} genau gemessen werden, was einer Auflösung von etwa $\Delta g = 1 \mu\text{m s}^{-1}$ entspricht. Genauere Untersuchungen erfordern eine um eine weitere Größenordnung höhere Auflösung von 10^{-8} , was etwa einer Schweredifferenz von $\Delta g = 0,1 \mu\text{m s}^{-1}$ entspricht. Darüber hinaus gibt es neben Dichtevariationen noch weitere Faktoren, die Änderungen der Schwere verursachen. Diese müssen identifiziert und ihr Beitrag aus den gemessenen Schwerevariationen entfernt werden. Beispielsweise verursachen Änderungen der Geländehöhe Schwerevariationen, da einerseits die Messpunkte näher oder weiter vom Erdmittelpunkt entfernt sind und andererseits sich weniger oder mehr Masse zwischen ihnen und dem Erdmittelpunkt befindet. Daher muss die Höhenlage der Messpunkte mit angemessener Genauigkeit bekannt sein, häufig auf mindestens 2 cm. Diese hohe Genauigkeit kann mit Hilfe des GPS-Systems in differenziellem Modus erreicht werden. In entlegenen Regionen kann GPS jedoch womöglich nicht verfügbar sein.

Das zweite Hauptproblem liegt in der Komplexität des Untergrunds: Alle Massen in der Umgebung eines Messpunkts beeinflussen die dort gemessene Schwerkraftbeschleunigung. Daher wird immer versucht, den Einfluss jener Massen, die nicht von Interesse sind, vom Messwert abzuziehen, um so den Effekt der interessierenden sog. Störkörper zu isolieren und besser herauszuarbeiten. Dies gelingt natürlich in der Regel nur bis zu einem gewissen Grad und nie vollständig. Dies liegt wiederum an der Mehrdeutigkeit der Methode, welche es mit sich bringt, dass dieselbe Schwerkraftanomalie von einer Vielzahl von Körpern unterschiedlicher Masse und Form verursacht werden kann.

Schwere- und Magnetfeldmessungen besitzen eine Reihe von Ähnlichkeiten: Beide sind sog. Potenzialmethoden, da die gemessenen Felder konservativ sind, also durch Differenzieren aus den zugehörigen magnetischen bzw. Schwerkraftpotenzialen abgeleitet werden können. In beiden Erkundungsmethoden werden sehr kleine Felddifferenzen eines sehr viel größeren Kraftfelds bestimmt, das sich zudem mit dem Ort und der Zeit verändert. Beide Methoden gestatten auch absolute Feldbestimmungen. Da Dichteunterschiede, relativ zur mittleren Feldstärke, jedoch in der Regel weniger stark sind als Unterschiede in der Magnetisierung, sind Schwerkraftanomalien auch entsprechend kleiner und glatter als magnetische. Daher müssen Schweremessgeräte eine entsprechend höhere Empfindlichkeit (Auflösung) besitzen als Magnetometer: 10^{-8} (10 ppb) im Vergleich zu 10^{-4} (100 ppm). Die für die Gravimetrie erforderlichen Korrekturen und Reduktionen der Messdaten sind die aufwändigsten in der Geophysik überhaupt – dies bezieht sich jedoch nicht auf deren Verarbeitung (*processing*). Sie erfordern jedoch heute dank moderner Rechnertechnik und digitaler Geländemodelle keine große Bearbeitungszeit mehr. Verglichen mit der Magnetik ist der Messfortschritt bei landgestützten Erkundungen klein, und die Kosten der Geländemessungen sind hoch (teure Messgeräte, gut ausgebildetes Personal; siehe Tab. 3.1). Daher erfolgen sie oft von Flugzeugen und Schiffen aus. In der Prospektion auf Kohlenwasserstoffe werden Schweremessungen als Übersichtsmethode vor der wesentlich teureren Seismik eingesetzt, für die Hohlraumortung und als Sekundärmethode bei der Mineralexploration.

Tab. 3.1 Vergleich von Gravimetrie und Magnetik (relative Kosten bezogen auf Messungen an Land)

	Gravimetrie	Magnetik
Anomalie	klein, glatt	groß, variabel
Feldvariation mit Ort und Zeit	klein	groß
Erforderliche Auflösung der Messung	10^{-8}	10^{-4}
Messgenauigkeit	groß	sehr groß
Erforderliche Korrekturen bzw. Reduktionen	umfangreich	gering
Kosten des Feldeinsatzes; Messfortschritt	groß; klein	klein, groß

3.1 Geschichte

Die theoretischen Grundlagen zum Verständnis von Massenanziehung und Schwere (bzw. Schwerkraftbeschleunigung) wurden bereits im 16. und 17. Jahrhundert von Kepler, Galileo und Newton gelegt. Im 17. und 18. Jahrhundert wurde mit Pendelmessungen die Variation der Schwere weltweit untersucht. Insbesondere ihre Abhängigkeit von der geodätischen Breite ermöglichte Rückschlüsse auf die Figur der Erde (siehe z. B. Clauser 2016). Zur Verstärkung der kleinen Variationen der Schwere führte Baron Roland von Eötvös (Osterreich-Ungarn) 1890 Messungen der Schweregradienten mit einer Drehwaage (*torsion balance*) ein. 1922 wurde in den USA das Spindletop-Ölfeld mit einer Drehwaage vermessen. Damit begann die Öl suchung mit geophysikalischen Methoden. Im Spätjahr 1924 bestätigte eine fünfige Testbohrung am Nash-Salzstock im Landkreis Brazoria in Texas die vorangegangene Schwereinterpretation. Dies markiert das erste Auffinden von Kohlenwasserstoffen mit Hilfe von Geophysik. In der zweiten Hälfte der 1920er folgten intensive Schwerevermessungen mit Drehwaagen. Mit einem speziell für Messungen auf See konstruierten Doppelpendel unternahm der Niederländer Felix Andries Vening-Meinesz Messungen auf Schiffen und Unterseebooten. 1929 wurde das erste tragbare Pendel eingesetzt und 1932 die ersten statischen und astatischen (Feder-)Gravimeter. 1934 beschrieb der US-amerikanische Physiker Lucien LaCoste (1908–1995) das erste Gravimeter nach dem Prinzip der Nulllängen-Feder (*zero-length spring*; vgl. Abschn. 3.2.2). Die ersten auf diesem Prinzip beruhenden Gravimeter erschienen 1939. Um 1940 waren die Gravimeter so stabil und einfach zu handhaben geworden, dass die tragbaren Pendel und Drehwaagen außer Gebrauch gerieten. In den folgenden Jahren wurden Gravimeter an die Anforderungen an Messungen auf Schiffen, Flugzeugen und in Bohrungen angepasst. Die Messung und Interpretation der Variation der Laufbahn von Satelliten hat seit etwa 1980 unser Wissen von der Figur der Erde als Ganzes beträchtlich erweitert. Auch wurden die im Zusammenhang mit den Satelliten-Missionen neue, hochgenaue Geräte zur Messung des Schweregradienten entwickelt, die auch bei geophysikalischen Erkundungen von Flugzeugen aus eingesetzt werden.

In den 1940ern wurden grafische und auf numerischen Gittern basierende Methoden zur Isolierung einzelner Anomalien entwickelt. Auch wurden die Schwereanomalien von Störkörpern einfacher Geometrie berechnet. Mit der explosionsartig wachsenden Leistungsfähigkeit der seit etwa 1960 zunehmend eingesetzten elektronischen Rechner wuchsen die Interpretationsmöglichkeiten beträchtlich: 2D- und 3D-Modellrechnungen des Vorwärtsproblems und die Inversion der Potenzialfelder – allein oder kombiniert mit anderen geophysikalischen Daten – sind heute Stand der Technik. Letztendlich besteht das Ziel jedoch noch immer in der Lösung der Umkehraufgabe, vorzugsweise als gemeinsame Inversion mehrerer geophysikalischer Verfahren. Die dominierende Wirkung der Massenanziehung für alle Geoprozesse im Vergleich zu den beträchtlich stärkeren zwischen- und inneratomaren Bindungs- und Abstoßungskräften beruht zum einen darauf, dass

das Gravitationsfeld nur Quellen (die Masse) und keine Senken kennt und sich daher alle Feldwirkungen gleichsinnig verstärkend überlagern. Andererseits besitzt die Massenanziehung mit 10^{12} m eine Reichweite, welche die der nächst weit reichenden Kraft, der Atombindung im Kristallgitter bzw. der zwischenmolekularen Bindung, um mehr als 21 Grbenordnungen übertrifft.

3.2 Massenanziehung und Schwere

Der englische Physiker und Mathematiker Sir Isaac Newton (1642–1727) formulierte in seinen dreibändigen, im Jahr 1687 erschienenen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, seine berühmten beiden Bewegungsgesetze sowie das allgemeine Gravitationsgesetz. Dieses beschreibt den Zusammenhang zwischen (Gravitations-)Kraft, Masse und (Schwere-)Beschleunigung. Stellen die ersten beiden newtonschen Bewegungsgesetze Verallgemeinerungen der Beobachtungen und Ergebnisse von Galileo dar, so folgert er aus Keplers empirischem dritten Gesetz¹, dass die Anziehungskraft zwischen Planeten und Zentralgestirn proportional zu den Massen ist und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes. Seine Genialität lag in der Erkenntnis, dass dieselbe Kraft für den Fall des Apfels vom Baum auf den Boden verantwortlich ist, wie für den Umlauf des Mondes um die Erde. Somit konnte er das anhand der Planetenumlufe um ihr Zentralgestirn abgeleitete Gesetz auf Punktmassen m und M (Abb. 3.1) bertragen und so das allgemeine Gravitationsgesetz formulieren:

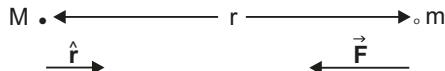
$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\vec{r}}, \quad (3.1)$$

wo r der Abstand der Massen ist und $\hat{\vec{r}}$ der Einheitsvektor in radialer Richtung, welcher vom Ursprung des Bezugssystems bei M weg weist. \vec{F} wirkt also immer in Richtung auf die anziehende Masse M.

G ist die universelle Gravitationskonstante, welche zu Newtons Lebzeiten mit den technischen Mitteln des 17. Jahrhunderts nicht bestimmt werden konnte. Dies gelang erstmals dem Briten Henry Cavendish im Jahr 1798. Der aktuell gültige Wert ist (CODATA 2014):

$$G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ (bzw. m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{).} \quad (3.2)$$

Abb. 3.1 Newtonsches Gravitationsgesetz zur Anziehungs kraft \vec{F} zwischen zwei Massen m und M



¹Fr alle Planeten ist das Verhältnis aus dem Quadrat ihrer Umlaufzeit T und der dritten Potenz der großen Halbachse a ihrer Umlaufbahn konstant und beträgt T^2/a^3 .

Die Gravitationskonstante ist noch immer äußerst schwer zu bestimmen: Im Gegensatz zu den meisten anderen physikalischen Konstanten, die mit einer Reproduzierbarkeit von etwa 10^{-6} bestimmt werden, liegt diese für G nur bei 10^{-4} .

Kraftfelder werden in der Physik oft definiert als jene Kräfte, welche auf eine Einheitsgröße oder -menge eines Materials wirken. So wird z. B. das elektrische Kraftfeld eines geladenen Körpers an einem bestimmten Ort durch die Kraft definiert, die es dort auf eine Einheitsladung ausübt. In gleicher Weise wird das Schwerkraftfeld in der Umgebung einer anziehenden Masse durch die Kraft definiert, die es auf eine Einheitsmasse ausübt. Geophysikalische Anwendungen betrachten jedoch weniger die Schwerkraft \vec{F} als die Gravitationsbeschleunigung $\vec{g} = \vec{F}/m$, mit der die Masse m durch die Masse M angezogen wird:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \quad (3.3)$$

Genau genommen ist die auf der Erde wirkende Schwerkraftbeschleunigung die vektorielle Summe aus Gravitationsbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung. Diese weicht aber nur wenig von der Schwerkraftbeschleunigung ab. Die Gravimetrie als Prospektionsmethode interpretiert jedoch im Wesentlichen Schwerkreanomalien, d. h. Differenzen zur sog. Normalschwere, der Normalkomponente der Schwerkraftbeschleunigung des Referenzellipsoids, eines geodätischen Referenzkörpers (vgl. Abschn. 3.2.2). Die SI-Einheit für die Beschleunigung ist m s^{-2} . Im heute nicht mehr gebräuchlichen cgs-System wurde die entsprechende Grundeinheit 1 Gal = $1 \text{ cm s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ nach Galileo Galilei benannt. Variationen der Gravitationsbeschleunigung der Erde werden heute üblicherweise in $\mu\text{m s}^{-2}$ ausgedrückt (früher in mGal = $10 \mu\text{m s}^{-2}$). Die Auflösung heutiger Messgeräte ist besser als $0,05 \mu\text{m s}^{-2}$ (bzw. 5 μGal). Bei einer mittleren Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche von $9,8 \text{ m s}^{-2} \approx 10 \text{ m s}^{-2}$ ergibt dies eine Empfindlichkeit der Messgeräte von $\Delta g/g \approx 5 \times 10^{-9}$, also von ca. fünf Milliardsteln.

3.2.1 Potenzielle Energie, Schwerkraftpotenzial

Potenzielle Energie dE_p ist definiert als die Arbeit $-dW$, die aufgewendet werden muss, um eine Masse um die Strecke $d\vec{r}$ gegen das Schwerkraftfeld zu bewegen (negatives Vorzeichen: Arbeit wird geleistet):

$$dE_p = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.4)$$

Das Schwerkraftpotenzial U wird nun definiert als die potenzielle Energie einer Einheitsmasse in einem Schwerkraftfeld. Somit ist die potenzielle Energie E_p einer Masse m im Schwerkraftfeld $E_p = mU$, und ihre Änderung dE_p ist bei konstanter Masse m gleich $dE_p = m dU$. Unter Beachtung von $\vec{F} = m\vec{g}$ ergibt dies, eingesetzt in Gl. 3.4: $dE_p = m dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -m\vec{g} \cdot d\vec{r}$. Hieraus folgt für \vec{g} :

$$\vec{g} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -\mathbf{grad} U = -\nabla U. \quad (3.5)$$

Gleichsetzen von Gl. 3.3 und 3.5 ergibt das Schwerepotenzial einer Punktmasse M:

$$\frac{dU}{dr} = G \frac{M}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad U = \int dU = GM \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{GM}{r}. \quad (3.6)$$

Die Wahl der Vorzeichen in Gl. 3.5 und 3.6 ergibt sich aus den oben angegebenen Gründen. Prinzipiell können jedoch beide Male die Vorzeichen positiv gewählt werden, wie dies in der Geodäsie gebräuchlich ist. Dies trifft auch zu, wenn z positiv nach unten weist, wie es in der Geophysik oft vereinbart wird.

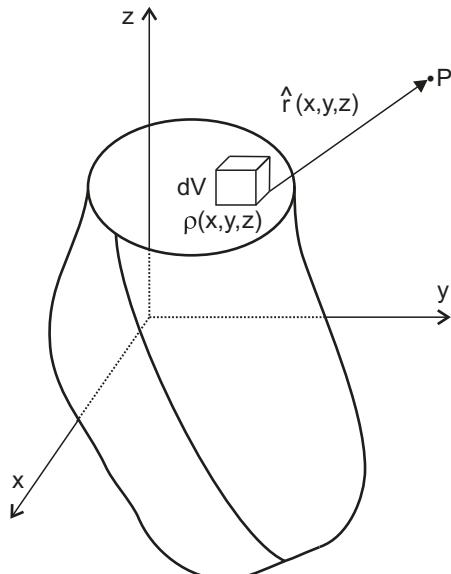
Punktmassen sind natürlich eher von theoretischem Interesse. Man kann sich einen Festkörper jedoch aus unzähligen Punktmassen zusammengesetzt denken. Die Schwerbeschleunigung an einem Punkt P ergibt sich dann als vektorielle Überlagerung (Summe) der Beiträge aller Punktmassen. Für die in einer Entfernung r_i von P gelegenen Punktmassen M_i (Abb. 3.2) ergibt sich damit:

$$\vec{g} = -G \sum_i \frac{M_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i, \quad (3.7)$$

wobei $\hat{\mathbf{r}}_i$ nach außen weist. Je nach der Form des Körpers kann die Berechnung der Vektorsumme in Gl. 3.7 beliebig kompliziert werden. Ein alternativer Zugang zur Lösung dieses Problems ergibt sich, indem man zunächst das Schwerepotenzial U berechnet:

$$U = -G \sum_i \frac{M_i}{r_i} \quad (3.8)$$

Abb. 3.2 Schwerkraeung eines Körpers als Überlagerung der Schwerwirkungen seiner Elementarvolumina



und dieses dann wie in Gl. 3.5 differenziert, um die Schwerkraftbeschleunigung zu erhalten. Die Skalarsumme in Gl. 3.8 ist in der Regel einfacher zu berechnen als die Vektorsumme in Gl. 3.7. Der Übergang zu einer kontinuierlichen Masseverteilung ergibt sich, wenn das Volumen in diskrete Teilgebiete konstanter Dichte aufgeteilt, die Masse dieser Teilgebiete ermittelt und ihr Beitrag zum Potenzial an einem äußeren Punkt P berechnet wird. Sei $\rho(x,y,z)$ die Dichte an einem Punkt mit den Koordinaten (x,y,z) und $r(x,y,z)$ seine Entfernung zum Punkt P (Abb. 3.2). Dann ist das Schwerepotenzial des Körpers an diesem Punkt:

$$U = -G \int_x \int_y \int_z \frac{\rho(x,y,z)}{r(x,y,z)} dx dy dz. \quad (3.9)$$

Gl. 3.9 ist das Schwerepotenzial außerhalb einer Vollkugel homogener Dichte. Es ist identisch mit dem Schwerepotenzial, das sich für den Fall ergibt, dass die gesamte Masse M_K der Kugel mit Radius R punktförmig in deren Zentrum konzentriert ist:

$$U(r) = -G \frac{M_K}{r}; \quad r \geq R. \quad (3.10)$$

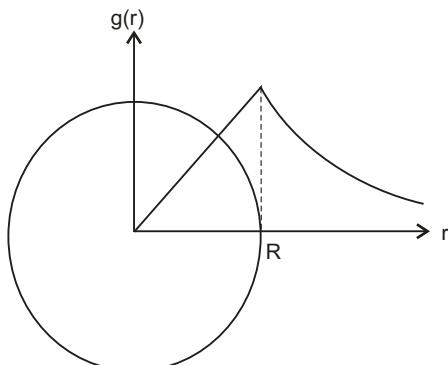
Die Ableitung von U nach dem Abstand r ergibt die Schwerkraftbeschleunigung außerhalb und auf der Kugel:

$$r \geq R: \vec{g}(r) = -\frac{dU}{dr} \hat{r} = -\frac{M_K}{r^2} \hat{r} = \vec{g}_R \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (3.11)$$

$$r = R: \vec{g}_R = -G \frac{M_K}{R^2} \hat{r}, \quad (3.12)$$

Innerhalb der Kugel nimmt das Potenzial dagegen quadratisch mit dem Radius ab (siehe z. B. Clauser 2016, S. 145). Folglich nimmt die Schwerkraftbeschleunigung in einer homogenen Vollkugel vom Zentrum zum Radius linear zu, um außerhalb mit dem Kehrwert des Abstandsquadrats abzufallen (Abb. 3.3). Der reale Verlauf der Schwerkraftbeschleunigung in der Erde weicht hiervon jedoch wegen der Heterogenität des Mantels ab.

Abb. 3.3 Schwerkraftbeschleunigung einer homogenen Kugel als Funktion des Radius r
(R: Kugelradius)



Das Potenzial U genügt einer elliptischen Differentialgleichung. Diese besitzt im Gegensatz zur hyperbolischen (vgl. Abschn. 2.1.3) zwei imaginäre Charakteristiken. Randwertprobleme treten an die Stelle von Anfangswertproblemen. Für geophysikalische Anwendungen haben Potenzialfelder den Nachteil, dass sie keine eindeutigen Rückschlüsse auf ihre Quellen erlauben. Denn ganz allgemein kann ein Kraftfeld \vec{A} aus dem Gradienten seines Potenzials berechnet werden, wenn es wirbelfrei ist, wenn also gilt: $\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = 0$. Hieraus folgt unmittelbar, dass Potenziale nur bis auf eine Konstante bestimmt sind. Somit können theoretisch beliebig viele Masseverteilungen die beobachtete Schwere verursachen. Dennoch ist nach dem stokeschen Integralsatz das Schwerepotenzial einer berandeten Masseverteilung eindeutig durch seine Werte auf der Berandung bestimmt, wenn es eine harmonische Funktion ist². Als harmonische Funktionen F werden Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta F = 0$ bezeichnet³. Dies trifft auf das Schwerepotenzial Gl. 3.10 auf bzw. außerhalb der Erde zu: Definiert beispielsweise $r' = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}$ den Abstand zwischen einem Aufpunkt $P(x, y, z)$ und Massepunkten $P_M(x_M, y_M, z_M)$ auf bzw. außerhalb der Erde, so verschwindet die Summe der zweifachen Ortsableitungen des Gravitationspotenzials (vgl. Aufg. (1) in Abschn. 3.6). Dieses erfüllt also die Laplace-Gleichung und ist somit eine harmonische Funktion. Daher ist das Gravitationspotenzial eindeutig durch Vorgabe seiner Werte auf der Erdoberfläche bestimmt. Die Schwerebeschleunigung kann somit aus ihm durch Bildung des Gradienten berechnet werden. Dennoch existieren beliebig viele Masseverteilungen innerhalb der Erde mit dem gleichen, durch die harmonische Funktion U bestimmten Schwerepotenzial.

Für viele Fragestellungen sind mittlerweile Messungen der Schweregradienten, auch als Schwere-Gradiometrie (*full tensor gravity*) bezeichnet, ein wichtiges Hilfsmittel. Ursprünglich zur Unterstützung der Navigation von Unterseebooten entwickelt, wird sie intensiv bei Befliegungen zur Erkundung von Lagerstätten (Kohlenwasserstoffe und Erze) eingesetzt. Durch die Bildung der Schweregradienten treten Anomalien schärfer hervor als in der Schwere selbst. Beispiele von auf diese Weise erkundeten geologischen Strukturen sind beispielsweise Salzstöcke, Verwerfungen, Riffe, Kimberlit-Schlote usw. Andere Anwendungen reichen von der Suche nach Hohlräumen im Untergrund bis hin zur GOCE-Raumfahrtmission (2009–2013)⁴ zur Erkundung von Schwereanomalien mit einer Genauigkeit von $10 \mu\text{m s}^{-2}$.

Zur Messung der Komponenten des Schweregradienten wird jede Komponente gleichzeitig durch zwei in festem Abstand befindliche Sensoren aufgezeichnet. Die Messungen von Schiffen, Flugzeugen und Satelliten (GOCE) aus erfordern hochgenaue und schnellen Messungen. Entsprechende Messgeräte gibt es seit den 1990er-Jahren. Durch Bildung von Differenzen der Schwere wird der Einfluss von

²Beweise hierfür finden sich z. B. bei Blakely (1996, S. 22–23); Heiskanen und Moritz (1967, S. 15–18).

³In kartesischen Koordinaten: $\Delta F = \partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + \partial^2 F / \partial z^2$.

⁴http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/GOCE

Beschleunigungen aus den Messsignalen beseitigt, die durch die Bewegung der Plattform – Schiff, Flugzeug, Satellit – verursacht werden. Zudem erübrigt sich durch sie auch die Reduktion der Messwerte (vgl. Abschn. 3.3.1).

Für bestimmte Fragestellungen sind auch höhere als die erste Ableitung des Schwerepotenzials nützlich. Die Vertikalkomponente g_z der Schwere, die sog. Vertikalschwere, ist die von Gravimetern in der Regel gemessene Größe. In kartesischen Koordinaten erhält man sie aus Gl. 3.9 für konstante Dichte ρ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sowie $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{2z}{2r} \right) = -\frac{z}{r^3}$:

$$g_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = G \rho \int_x \int_y \int_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dx dy dz = -G \rho \int_x \int_y \int_z \frac{z}{r^3} dx dy dz. \quad (3.13)$$

Die erste vertikale Ableitung dieser Vertikalschwere lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_z}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -G \rho \int_x \int_y \int_z \left(\frac{r^3 - z^3}{r^6} \right) dx dy dz \\ &= -G \rho \int_x \int_y \int_z \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Auch die zweite Ableitung der Vertikalschwere wird gelegentlich gemessen (siehe z. B. Telford et al. 1990, S. 9). Sie lautet:

$$\frac{\partial^2 g_z}{\partial z^2} = -\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = -3 G \rho \int_x \int_y \int_z \left(\frac{5z^3}{r^7} - \frac{3z}{r^5} \right) dx dy dz. \quad (3.15)$$

Diese zweite Ableitung wird in Schwereinterpretationen häufig zum besseren Herausheben von Anomalien sowie zur Feldfortsetzung nach oben und unten verwendet. Ableitungen wirken wie Hochpassfilter – durch die Erhöhung der Potenz des Abstands im Nenner verstärken sie den Einfluss von oberflächennahen Effekten. Da der Schwereeffekt umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat variiert, variieren die erste und zweite Ableitung umgekehrt proportional zur dritten bzw. vierten Potenz des (vertikalen) Abstands.

3.2.2 Normalschwere

Die Erkundung des Untergrunds mit den Methoden der Gravimetrie besteht in der Suche nach sog. Störkörpern, deren Dichtedifferenz zum umgebenden Gestein eine Änderung der Schwerkraftbeschleunigung bewirkt. Hierzu definiert man Schweranomalien⁵ als Differenz zwischen einer lokal gemessenen Schwerkraftbeschleunigung

⁵In der Geodäsie wird dies als Schwerestörung (*gravity disturbance*) bezeichnet.

und der eines geodätischen Bezugskörpers. Dieser muss einerseits möglichst einfach sein, andererseits bestmöglich die Form der Erde beschreiben. Zudem soll sein Schwerkfeld dem durch alle Massen der Erde (inklusive der Ozeane und Atmosphäre) wirkenden Schwerkfeld der Erde entsprechen. Da die Erde kein starrer Körper ist, stellte sich ihre Oberfläche über lange Zeiten hinweg auf die kombinierte Wirkung aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft ein. Daher kann die Erdoberfläche nicht durch einen einfachen geometrischen Körper nachgebildet werden. Aus diesem Grund hat die Bestimmung eines optimalen Bezugskörpers Mathematiker, Physiker und Geodäten seit dem 17. Jahrhundert beschäftigt.

Als am besten geeigneter geodätischer Bezugskörper, der die Oberfläche der Erde und ihr äußeres Schwerkfeld befriedigend nachbildet, hat sich ein abgeplattetes Rotationsellipsoid erwiesen, dessen Oberfläche eine Niveaumenge seines eigenen Schwerkelds darstellt. Damit ist nach dem stokeschen Satz (siehe auch Abschn. 3.5.4) das Schwerkfeld im Außenraum dieses Niveaumengoids eindeutig definiert. Eine Anpassung seiner Parameter an die Geometrie einer mittleren Niveaumenge des Schwerkelds der Erde, das sog. Geoid, sowie an ihr äußeres Schwerkfeld ergibt ein mittleres Erdellipsoid. Dieses ist an den Polen etwas abgeplattet und besitzt einen kleinen Äquatorwulst. Ein solches „Internationales Referenzellipsoid“ wurde erstmals auf den Generalversammlungen der *International Union of Geodesy and Geophysics* (IUGG) in 1924 Madrid und 1930 in Stockholm definiert. Seitdem wurde es mehrfach überarbeitet und aktualisiert. Seine aktuellste Version, das *Geodetic Reference System 1980* (GRS80), geht auf den Kongress der *International Association of Geodesy* (IAG) 1980 in Canberra zurück (Moritz 1988, 2000). Das GRS80 verwendet die folgenden vier Größen zur Definition des Referenzellipsoids: (1) Die große Halbachse a der Ellipse eines Längenkreises, den Äquatorradius der Erde; (2) die geozentrische Schwerkonstante $G M_E$, das Produkt aus Gravitationskonstante und Masse der Erde; (3) die dynamische Abplattung (bzw. den dynamischen Formfaktor; *dynamical form factor*) $J_2 = (C - A)/(M_E a^2) = 108\,236 \times 10^{-8}$, wobei A und C die äquatorialen und polaren Trägheitsmomente des Referenzellipsoids bzgl. seiner großen und kleinen Halbachsen sind; (4) die Umdrehungsrate Ω der Erde (Tab. 3.2).

Das kurze Zeit später und ebenfalls weit verbreitete *World Geodetic System 1984* (WGS84) (NIMA 2000) ist ein geodätisches Bezugssystem für die Bahndaten der GPS-Satelliten⁶ und die aus deren Beobachtung abgeleiteten Positions- und

⁶Erdumspannendes Satellitensystem zur hochgenauen Ortung, Navigation und Zeitmessung. GPS arbeitet mit 24 Satelliten (21 Betriebs- und drei Ersatzsatelliten) auf sechs Erdumlaufbahnen in ca. 20 000 km Höhe. Die Satellitenbahnen sind so aufeinander abgestimmt, dass von jedem Punkt der Erde aus zu jedem Zeitpunkt Sichtverbindung zu mindestens vier Satelliten besteht. Jeder Satellit sendet für ihn charakteristische Signale. Dazu gehören ein atomuhrgesteuertes Zeitsignal, Positionsinformationen und Daten, die eine Korrektur von Zeit- und Übertragungsfehlern sowie von Effekten der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie ermöglichen. Ein GPS-Empfänger berechnet aus den gleichzeitig registrierten Signalen dreier Satelliten die Signal-Laufzeiten und bestimmt daraus seine Position relativ zum WGS84-Niveaumengoid auf wenige Zentimeter genau. Mit einem vierten Satelliten lassen sich unter Ausnutzung des Dopplereffekts Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des GPS-Empfängers bestimmen (Brockhaus-Enzyklopädie Online 2010).

Tab. 3.2 Daten des Referenzellipsoids GRS80 (Moritz 1988, 2000). Die fett gedruckten Größen sind die Definitionsparameter des Referenzellipsoids, die übrigen die abgeleiteten

Größe	Wert
große Halbachse (Äquator-Radius der Erde)	a: 6 378 137 m
dynamische Abplattung	$J_2:(C - A)/(M_E a^2) = 108\,263 \times 10^{-8}$; A, C: polares bzw. äquatoriales Trägheitsmoment des Referenzellipsoids
geozentrische Schwerkonstante	$G M_E: 3\,986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ (G: Gravitationskonstante; M_E : Masse der Erde)
Umdrehungsrate der Erde	$\Omega: 7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$
Kleine Halbachse (Pol-Radius der Erde)	c: 6 356 752,3141 m
geometrische Abplattung der Erde	f: $(a - c)/a = 1/298, 257\,222\,101$
Quadrierte erste Exzentrizität	$e^2: 2f - f^2 = (a^2 - c^2)/a^2 = 6,694\,380\,022\,90 \times 10^{-3}$
Radius der volumengleichen Kugel: $\sqrt[3]{a^2 c}$	$r_E: 6\,371\,000,790\,0 \text{ m}$
Radius der Kugel gleicher Oberfläche	6 371 007,180 9 m
mittlerer Radius	$(2a + b)/3: 6\,371\,008,771\,4 \text{ m}$
Normalschwerebeschleunigung, am Äquator	$\gamma_a: 9,780\,326\,771\,5 \text{ m s}^{-2}$
am Pol	$\gamma_c: 9,832\,186\,368\,5 \text{ m s}^{-2}$
Schwereabplattung der Erde	$\beta: (\gamma_c - \gamma_a)/\gamma_a = 5,302\,440\,112 \times 10^{-3}$
Normalschwerekonstante	$k: (c \gamma_c - a \gamma_a)/(a \gamma_a) = 1,931\,851\,353 \times 10^{-3}$

Navigationsdaten (Koordinaten, Geschwindigkeit und Azimut) für Punkte und Fahrzeuge auf und über der Erdoberfläche. Das Referenzellipsoid des WGS84 ist praktisch mit dem des GRS80 identisch und wird in der Gravimetrie häufig als Bezugssystem verwendet. Zur Definition des WGS84 werden dieselben Größen wie im GRS80 verwendet, mit Ausnahme der dynamischen Abplattung J, die durch die geometrische Abplattung $f = (a-c)/a$ ersetzt wird. Aus diesen vier Definitionsgrößen werden alle anderen Parameter abgeleitet, wie z. B. die kleine (polare) Halbachse c des Ellipsoids sowie der Radius r_E der volumengleichen Kugel und weitere Größen (Tab. 3.3).

Verschiedene Betrachtungen im Zusammenhang mit Ellipsoiden verwenden statt der Breite φ bzw. Kobreite θ des Kugelkoordinatensystems andere Breitenparameter, die jeweils in der Meridianebene gemessen werden (Abb. 3.4): Die *geodätische Breite* ϕ eines Aufpunkts P ist der Winkel zwischen der Äquatorebene des Ellipsoids und der Flächennormalen im Aufpunkt. Die *reduzierte Breite* ϕ' ergibt sich durch Projektion des Aufpunkts P auf den Punkt Q auf dem mitelpunktsgleichen Kreis mit dem Radius a der großen Halbachse der Ellipse. Die

Tab. 3.3 Daten des Referenzellipsoids WGS84 (NIMA 2000). Die fett gedruckten Größen sind die Definitionsparameter des Referenzellipsoids, die übrigen die abgeleiteten

Größe	Wert
große Halbachse (Äquator-Radius der Erde)	a: 6 378 137 m
geometrische Abplattung der Erde	f: (a - c)/a = 1/298,257 223 563
geozentrische Schwerekonstante	G M_E: 3 986 004,418 × 10⁸ m³ s⁻² (G: Gravitationskonstante; M _E : Masse der Erde)
Umdrehungsrate der Erde	Ω: 7 292 115 × 10⁻¹¹ rad s⁻¹
Kleine Halbachse (Pol-Radius der Erde)	c: 6 356 752,314 1 m
Quadrierte erste Exzentrizität	e ² : 2f - f ² = (a ² - c ²)/a ² = 6,694 379 990 14 × 10 ⁻³
Radius der volumengleichen Kugel: $\sqrt[3]{a^2 c}$	r _E : 6 371 000,790 0 m
Radius der Kugel gleicher Oberfläche	6 371 007,180 9 m
mittlerer Radius	(2a + b)/3: 6 371 008,771 4 m
Normalschwerebeschleunigung, am Äquator	γ _a : 9,780 325 335 9 m s ⁻²
am Pol	γ _c : 9,832 184 937 8 m s ⁻²
Schwereabplattung der Erde	β: (γ _c - γ _a)/γ _a = 5,302 440 112 × 10 ⁻³
Normalschwerekonstante	k: (c γ _c - a γ _a)/(a γ _a) = 1,931 852 652 41 × 10 ⁻³

geozentrische Breite $φ''$ schließlich ist der Winkel zwischen der Äquatorebene des Ellipsoids und dem Radius von ihrem Mittelpunkt zum Aufpunkt P. Diese drei Winkel verhalten sich zueinander wie:

$$\tan(φ) = (a/c) \tan(φ') = 1,003 364 \tan(φ') = (a/c)^2 \tan(φ'') = 1,006 740 \tan(φ''). \quad (3.16)$$

Somit ist die geodätische immer größer als die geozentrische Breite. Ihre Differenz erreicht bei einer geodätischen Breite von $φ = 45^\circ$ mit $0,19^\circ = 11,4'$ ihr Maximum und verschwindet an den Polen und am Äquator. Wie in Abb. 3.4 ersichtlich, können Breite $φ''$ und Radius r der geozentrischen Koordinaten aus der reduzierten Breite $φ'$, der großen Halbachse a der Ellipse und der geometrischen Abplattung f berechnet werden:

$$\begin{aligned} φ'' &= φ' - f \sin(2φ') = φ' - 0,19 \sin(2φ') \text{ (°)}; \\ r &\approx a(1 - f \sin^2(φ')) = \underbrace{6 378,137}_a - \underbrace{21,385}_{a-c} \sin^2(φ') \text{ (km)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

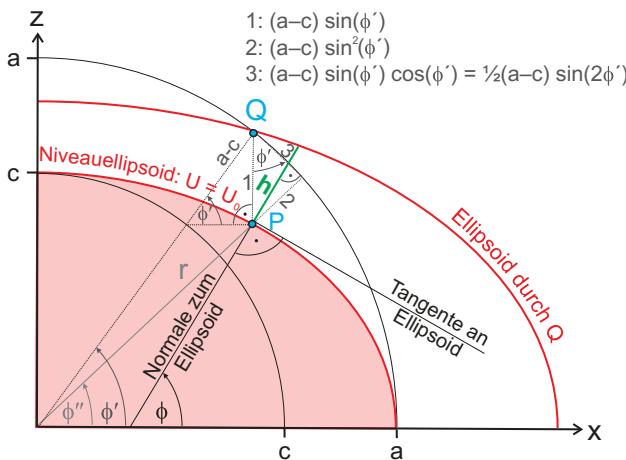


Abb. 3.4 Geodätische, reduzierte und geozentrische Breiten ϕ , ϕ' und ϕ'' eines Aufpunkts P im radialen Abstand r vom Mittelpunkt eines Ellipsoids mit den großen und kleinen Halbachsen a und c, sowie Höhe h zwischen P und dem Ellipsoid durch den senkrecht darüber liegenden Punkt Q. (Clauser 2016)

Der Beschleunigungsquotient m aus Zentrifugalbeschleunigung $a_z = \Omega^2 r_E = 0,033877759 \text{ m s}^{-2}$ und Gravitationsbeschleunigung $a_g = G M_E / r_E^2 = 9,819\,623\,032 \text{ m s}^{-2}$ einer volumengleichen Kugel der Masse und Umdrehungsrate der Erde hat einen Wert von

$$m = a_z / a_g = \Omega^2 r_E^3 / G M_E = 0,003\,45 = \frac{1}{289,854\,571\,5}. \quad (3.18)$$

Dieser weicht um weniger als 3 % von dem im WGS84 definierten Wert der geometrischen Abplattung $f = 1/298,257\,223\,563$ ab. Somit kann diese weitgehend auf das Verhältnis der Gravitations- zur Zentrifugalkraft zurückgeführt werden. Da die Zentrifugalbeschleunigung $a_z = \Omega^2 x$ im Abstand x von der Drehachse (und nicht vom Erdmittelpunkt) weg weist, variiert sie mit der geodätischen Breite ϕ bzw. der Kobreite $\theta = 90^\circ - \phi$. Integration der Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_z = (\partial U_z / \partial x) \hat{x} = \Omega^2 x \hat{x}$ (\hat{x} : nach außen gerichteter Einheitsvektor), ergibt das zugehörige Zentrifugalpotenzial U_z als Funktion der Breite ϕ bzw. Kobreite θ :

$$U_z = -\frac{1}{2} \Omega^2 x^2 = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2(\theta) = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2(\phi). \quad (3.19)$$

Die Äquator- und Polradien a bzw. c unterscheiden sich mit 21,384 686 km um weniger als 4 %. Der Radius r_E der volumengleichen Kugel unterscheidet sich von diesen um $r_E - c = 14,248\,476 \text{ km}$ bzw. $a - r_E = 7,136\,210 \text{ km}$. Daher weicht die

reine Gravitationsbeschleunigung \vec{a}_g von der Lotlinie ab. Dagegen steht der Vektor der effektiven Schwerebeschleunigung $\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_z = \vec{a}_g + \Omega^2 x \hat{x}$ überall auf der mit der Umdrehungsrate Ω rotierenden Erde lotrecht auf der Niveaumöglichkeit an dieser Stelle, dem Geoid. Diese mathematische Erdfigur gleicht näherungsweise dem mittleren Niveau der freien Ozeane (ohne Einfluss der Gezeiten), welches unter den Kontinenten fortgesetzt wird, etwa im Sinn eines Systems verbundener, wassergefüllter Kanäle. Da \vec{g} senkrecht auf der Oberfläche des Geoids steht und nicht wie \vec{a}_g auf der Oberfläche der volumengleichen Kugel, spannt \vec{g} mit allen Punkten mit Ausnahme der Pole und längs des Äquators einen leicht größeren Winkel mit der Äquatorebene auf als \vec{a}_g . Diese Differenz erreicht bei der mittleren geodätischen Breite von $\phi = 45^\circ$ ihr Maximum und verschwindet an den Polen und am Äquator. Die Abweichung des Betrags der effektiven Schwerebeschleunigung \vec{g} von \vec{a}_g ist jedoch gering, denn die maximale Zentrifugalbeschleunigung beträgt am Äquator lediglich:

$$a_z = \Omega^2 a = \left(\frac{2 \pi}{1 \text{ Sternentag}} \right)^2 a = \left(\frac{2 \pi}{86164 \text{ s}} \right)^2 637813.7 \text{ m} = 0,033915779 \text{ m s}^{-2}.$$

Dies ist weniger als 4 % der reinen Gravitationsbeschleunigung und in der effektiven Schwerebeschleunigung \vec{g} bereits enthalten.

Natürlich bleibt auch das Referenzellipsoid eine Näherung. Insbesondere vermag es nicht die Variationen der Masseverteilung innerhalb der Erde wiederzugeben. Die physikalische Äquipotenzialfläche der Erde, welche dies leistet, ist das Geoid. Dieses weicht daher, wenn auch nur geringfügig, vom Referenzellipsoid ab. Hierbei bewirken Massenüberschüsse oberhalb wie unterhalb des Referenzellipsoide eine Anhebung des Geoids über das Referenzellipsoid ([Abb. 3.5](#)).

Die Lösung der Laplace-Gleichung in Ellipsoidkoordinaten (reduzierte Breite ϕ' , Länge λ und kleine Halbachse c) führt auf ellipsoidische harmonische Funktionen. Hinzufügen des Zentrifugalpotenzials und Berücksichtigung von Rotationssym-

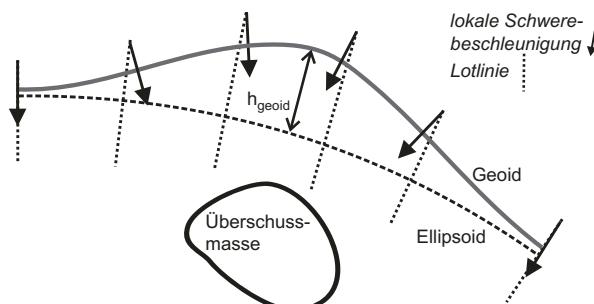


Abb. 3.5 Abweichung des Geoids vom Referenzellipsoid verursacht durch Massenüberschuss im Untergrund ([Clauser 2016](#))

metrie sowie der Bedingung eines Niveauellipsoids mit Halbachsen a und c ergibt schließlich das Normalschwerepotenzial U_0 (Torge 2003):

$$U_0 = \frac{G M_E}{\sqrt{a^2 - c^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right) + \frac{1}{3} \Omega^2 a^2. \quad (3.20)$$

Die auf dem Referenzellipsoid senkrecht stehende Komponente des Gradienten dieses Potenzials ist die Normalschwere(beschleunigung). Führt man statt der reduzierten die geodätische Breite ein, so ergibt die Formel von Somigliana die von der geodätischen Breite ϕ abhängige und auf dem Referenzellipsoid senkrecht stehende Normalschwere γ_0 . (siehe z. B. Moritz 2000; Torge 2003). Diese ist die in der Geophysik genutzte Bezugssgröße zur Definition von Schwereanomalien:

$$\gamma_0(\phi) = \frac{a \gamma_a \cos^2(\phi) + c \gamma_c \sin^2(\phi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + c^2 \sin^2(\phi)}} = \gamma_a \frac{1 + k \sin^2(\phi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}}. \quad (3.21)$$

Hierbei sind a und c sowie γ_a und γ_c die großen und kleinen Halbachsen des (GRS80- oder WGS84-) Referenzellipsoide bzw. die Normalschwerewerte am Äquator und am Pol. Ebenfalls in GRS80 bzw. WGS84 definiert sind die Normalschwerekonstante k und die erste numerische Exzentrizität e :

$$k = \frac{c \gamma_c}{a \gamma_a} - 1 \quad \text{bzw. } e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \quad (3.22)$$

(numerische Werte aller genannten Konstanten: siehe Tab. 3.2 bzw. Tab. 3.3). Eine Reihenentwicklung von Gl. 3.21 mit den Konstanten des GRS80-Referenzellipsoide ergibt:

$$\begin{aligned} \gamma_0(\phi) &= \gamma_a [1 + \underbrace{0,005\,279\,041\,4}_{\beta_1} \sin^2(\phi) + 0,000\,023\,271\,8 \sin^4(\phi) \\ &\quad + 0,000\,000\,126\,2 \sin^6(\phi) + 0,000\,000\,000\,7 \sin^8(\phi)] (m s^{-2}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sie wurde letztmals 1980 auf dem IAG-Kongress in Canberra verfeinert und reproduziert γ_0 mit einem relativen Fehler von $\Delta g/g = 10^{-10}$ bzw. $\Delta g = 0,001 \mu\text{m s}^{-2}$. Anomalien, die bzgl. der älteren Reihenentwicklung der Normalschwere von 1930 (GRS30) und 1967 (GRS67) berechnet wurden, können wie folgt in die GRS80 Formel umgerechnet werden [Moritz 1988, 2000]:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{1980} - \gamma_0^{1930} &= -163 + 137 \sin^2(\phi) (\mu\text{m s}^{-2}), \\ \gamma_0^{1980} - \gamma_0^{1967} &= 8,316 + 0,782 \sin^2(\phi) - 0,007 \sin^4(\phi) (\mu\text{m s}^{-2}). \end{aligned}$$

Gl. 3.21 und 3.23 definieren die Normalschwere $\gamma(\phi)$ für jede geodätische Breite ϕ . Dies erfordert eine genaue Positionsbestimmung. Die Variation der Normalschwere $\gamma(\phi)$ mit der geodätischen Position ergibt sich aus ihrer Ableitung nach

der geodätischen Breite. Hierbei können die Terme mit höherer als quadratischer Ordnung in Gl. 3.23 vernachlässigt werden, da sie das Ergebnis im Rahmen der Messgenauigkeit der Gravimeter von $0,05 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$ nicht beeinflussen. Somit ergibt die Ableitung $\partial\gamma_0/\partial\phi = \gamma_a \beta_1 2 \sin(\phi) \cos(\phi) = \gamma_a \beta_1 \sin(2\phi)$. Damit und mit der Normalschwere am Äquator $\gamma_a = 9,780\,326\,771\,5 \text{ m s}^{-2}$ sowie mit $\beta_1 = 0,005\,279\,041\,4$ (Gl. 3.23) erhält man:

$$\frac{\partial\gamma_0}{\partial\phi} = 51\,631 \sin(2\phi) (\mu\text{m s}^{-2} \text{ rad}^{-1}).$$

Rechnet man $\partial\phi$ um von Bogenmaß auf km bzgl. eines mittleren Erdradius von $\bar{r}_E = \sqrt[3]{a^2} c = 6\,371,000\,790\,0 \text{ km}$ (Tab. 3.2 und 3.3), so erhält man:

$$\frac{\partial\gamma_0}{\partial\phi} = 8,104 \sin(2\phi) (\mu\text{m s}^{-2} \text{ km}_{N-S}^{-1}). \quad (3.24)$$

Daraus folgt, dass der Positionsfehler eines Messpunkts entlang eines Meridians geringer als 6 m sein muss, damit der durch diesen verursachte maximale Fehler der Schweren unterhalb der Genauigkeit der Geräteauflösung von $0,05 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$ liegt. Mit GPS wird heute die horizontale Position auf $0,3 \text{ m} - 2,5 \text{ m}$ und die Höhe auf $0,2 \text{ m} - 5 \text{ m}$ genau ermittelt (Hofmann-Wellenhof und Moritz 2006, S. 184; Torge 2003, S. 136). Mit differenziellem GPS in Echtzeit werden Genauigkeiten von $2 \text{ cm} - 5 \text{ cm}$ erreicht. Eine nachgeschaltete Datenbearbeitung ermöglicht sogar Genauigkeiten von einigen Millimetern (Torge 2003, S. 231; Bruyninx et al. 2011). Wird die geodätische Breite auf fünf Dezimalstellen genau registriert, so ist die Position hinreichend genau bestimmt, damit der Beitrag des Positionsfehlers unter die Genauigkeit der Schweremessung fällt.

3.2.3 Lösung der Laplace-Gleichung für das Gravitationspotenzial

Das Schwerkraftpotenzial setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: dem Gravitationspotenzial U_g der reinen Massenanziehung und aus dem Zentrifugalpotenzial U_z (Gl. 3.19):

$$U = U_g + U_z. \quad (3.25)$$

Das Gravitationspotenzial U_g unterscheidet sich für eine sphäroidale Erde von dem einer Punktmasse (Gl. 3.6) und wird aus der Lösung der Laplace-Gleichung (siehe Fußnote 3). $\nabla \cdot \nabla U_g = \nabla^2 U_g = \Delta U_g = 0$ gewonnen. In Kugelkoordinaten (r, θ, λ) , wobei $\theta = 90^\circ - \varphi$ bzw. $\theta = \pi/2 - \varphi$ die zur Breite φ komplementäre Kobreite und λ die Länge ist, lautet die Laplace-Gleichung für das Gravitationspotenzial (siehe z. B. Clauser 2016):

$$\Delta U_g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U_g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U_g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_g}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (3.26)$$

Tab. 3.4 Werte der legendreschen Polynome $P_\ell(\cos(\theta))$ bzw. $P_\ell(\mu)$ bis zum Grad $\ell = 4$ ($\mu = \cos(\theta)$)

Grad ℓ	$P_\ell(\cos(\theta))$	$P_\ell(\mu)$
0	1	1
1	$\cos(\theta)$	μ
2	$\frac{1}{4}(3\cos(2\theta) + 1)$	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$
3	$\frac{1}{8}(5\cos(3\theta) + 3\cos(\theta))$	$\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$
4	$\frac{1}{64}(35\cos(4\theta) + 20\cos(2\theta) + 9)$	$\frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3\mu)$

Ihre Lösung nach der Methode der Trennung der Variablen (in zwei entweder nur vom Radius oder von der Kobreite abhängige Terme) führt auf einen Ausdruck, der zum einen zwischen innerhalb oder außerhalb der Erde gelegenen Quellen unterscheidet. Zum anderen enthält er eine Fourier-Reihenentwicklung nach der Länge und eine Entwicklung mit zugeordneten Kugelfunktionen nach der Kobreite (zur Lösung der Laplace-Gleichung und zur Kugelfunktionsentwicklung siehe z. B. Blakely 1996; Pavlis 2011; Clauser 2016). Für die Entwicklung des Schwerkraftfeldes an der Erdoberfläche entfallen im Folgenden jene Terme, die von äußeren Quellen herrühren, denn die gemessenen Schweredaten werden im Rahmen der weiteren Bearbeitung durch eine Gezeitenkorrektur um die durch andere Himmelskörper ausgeübten Schwerbeschleunigungen bereinigt.

Das Potenzial eines homogenen, abgeplatteten Rotationsellipsoids der Masse M_E mit großen und kleinen Halbachsen a und c und dem Koordinatenursprung im Massenzentrum ist aus der Potenzialtheorie bekannt. Setzt man Symmetrie zur Äquatorebene voraus und ersetzt $\cos(\theta)$ durch μ , so entfallen die zonalen Glieder $P_\ell(\cos(\theta)) = P_\ell(\mu)$ der legendreschen Polynome (Tab. 3.4) für ungerade ℓ . Liegt zudem Rotationssymmetrie vor, so verschwinden zudem die tesseralen zugeordneten Kugelfunktionen $P_\ell^m(\cos(\theta))$. In diesem Fall variiert das Potenzial nicht mehr mit der Länge λ , sondern nur noch mit dem Radius r und der Breite φ (bzw. Kobreite θ).

Für äußere Aufpunkte ($r > a$) und mit $\mu = \cos(\theta)$ vereinfacht sich damit eine Entwicklung des Gravitationspotenzials U_g nach Kugelflächenfunktionen zu einer Entwicklung nach legendreschen Polynomen (siehe z. B. Blakely 1996; Pavlis 2011; Clauser 2016):

$$\begin{aligned}
 U_g(\theta, \lambda) &= -\frac{GM_E}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^\ell c_\ell P_\ell(\mu) \\
 &= -\frac{GM_E}{r} \left[\underbrace{c_0 P_0(\mu)}_1 + \underbrace{\left(\frac{a}{r}\right) c_1 P_1(\mu)}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\left(\frac{a}{r}\right)^2 c_2 P_2(\mu)}_{\frac{1}{2}(3\cos^2(\theta)-1)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left(\frac{a}{r}\right)^3 c_3 P_3(\mu)}_{\frac{1}{8}(5\cos^3(\theta)-3\cos(\theta))} + \underbrace{\left(\frac{a}{r}\right)^4 c_4 P_4(\mu)}_{\frac{1}{64}(35\cos^4(\theta)-30\cos^2(\theta)+3\cos(\theta))/64} + \dots \right]. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist θ die Kobreite im Kugelkoordinatensystem (r, θ, λ), die der Kobreite der geozentrischen Breite ϕ'' entspricht, die mit Gl. 3.16 in die geografische (bzw. geodätische) Breite ϕ oder die reduzierte Breite ϕ' umgerechnet werden kann (Abb. 3.4). Die Koeffizienten in (Gl. 3.27) beschreiben hierbei die Gewichtung der einzelnen Terme. Der erste Summand ($\ell = 0$) dieser Entwicklung beschreibt das Potenzial $G M_E/r$ eines Monopols – daher ist $c_0 = 1$. Der zweite Term ($\ell = 1$) beschreibt einen nach Norden weisenden ($\theta = 0$) zentralen Dipol. Da der Koordinatenursprung im Massezentrum liegt, muss bei der vorausgesetzten homogenen Masseverteilung der Koeffizient verschwinden, da Nord- und Südhalbkugel von gleicher Masse sind. Ebenso verschwinden alle anderen ungeradzahligen Koeffizienten, die Multipolpotenziale höherer Ordnungen beschreiben: $0 = c_1 = c_3 = c_5 = \dots$. Damit ist der dritte Term ($\ell = 2$) mit dem Koeffizienten c_2 der niedrigste Term der Entwicklung. Er beschreibt die Abweichung des Sphäroids von einer Kugel durch den Äquatorwulst und die Polabplattung. Somit vereinfacht sich Gl. 3.27 für $r > a$ zu:

$$U_g = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell} c_{2\ell} P_{2\ell}(\mu) \right]. \quad (3.28)$$

Hinzufügen des Zentrifugalpotenzials (Gl. 3.19) ergibt das gemeinsame Schwerepotenzial der Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigungen:

$$U = U_g + U_z = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell} c_{2\ell} P_{2\ell}(\mu) \right] - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \sin^2(\theta). \quad (3.29)$$

Die Koeffizienten $c_{2\ell}$ in (Gl. 3.29) werden mit Hilfe von Daten aus der Satellitengeodäsie bestimmt. Dabei kann c_2 durch die dynamische Abplattung J_2 der Erde ausgedrückt werden: $c_2 = -J_2 = -(C - A)/(M_E a^2)$, wobei C und A die Hauptträgheitsmomente der Erde bzgl. ihrer polaren und äquatorialen Radien c und a sind. Im GRS80 sind die folgenden Werte festgelegt: $J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$; $J_4 = -237,091\,222 \times 10^{-8}$; $J_6 = 0,608\,347 \times 10^{-8}$; $J_8 = 0,001\,427 \times 10^{-8}$. Abbrechen der Entwicklung nach dem quadratischen Term ($\ell = 1$) und Einsetzen des Beschleunigungsquotienten aus äquatorialer Zentrifugal- und Gravitationsbeschleunigung $m = a_z/a_g = \Omega^2 r^3/G M_E$ (Gl. 3.18) sowie des legendreschen Polynoms $P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$ (Tab. 3.4) ergibt:

$$U = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 \underbrace{\left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right)}_{P_2(\cos \theta)} + \frac{\Omega^2 r^3}{2GM_E} \sin^2(\theta) \right]. \quad (3.30)$$

Benutzt man statt der Kobreite ($\theta = 90^\circ - \phi$) die Breite, so gilt: $\cos(\theta) = \sin(\phi)$ und $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\phi)$. Zusätzlich wird im Folgenden die geozentrische

Breite ϕ'' durch die geodätische Breite ϕ ersetzt. Entsprechend müssen daher bei der Anwendung der Formeln die geozentrischen Breiten mit Gl. 3.17 in geodätische umgerechnet werden.

Für oberflächennahe Aufpunkte kann man bei den kleinen Korrekturgrößen in der Klammer mit $r = a$ den Radius durch den Äquatorradius annähern. Auflösen nach r und Identifizieren des Potenzials U mit dem Potenzial U_0 des Niveauellipsoids ergibt eine Näherung für dessen Ortsvektor r_0 ($f = (a-c)/a$: geometrische Abplattung; $m = a_z/a_g$: Beschleunigungsquotient Gl. 3.18):

$$\begin{aligned} r_0 &\approx -\frac{GM_E}{U_0} \left[1 - J_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2(\phi) - \frac{1}{2} \right) + \frac{m}{2} (1 - \sin^2(\phi)) \right] \\ &= -\frac{GM_E}{U_0} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{J_2}{2} + \frac{m}{2} \right) - \left(\frac{3J_2}{2} + \frac{m}{2} \right) \sin^2(\phi) \right]}_{\frac{a}{(GM_E/U_0)}} = a (1 - f \sin^2(\phi)). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da das Niveauellipsoid nahezu sphärische Äquipotenzialflächen besitzt, erhält man die Normalschwere γ näherungsweise durch Ableiten von Gl. 3.30 nach r und, wie oben, Annähern des Radius r durch den Äquatorradius a bei den kleinen Korrekturgrößen in der Klammer:

$$\gamma \approx \frac{GM_E}{r^2} \underbrace{\left[1 - 3J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right]}_{P_2(\cos \theta)} - \underbrace{\frac{\Omega^2 r_E^2}{GM_E}}_m \sin^2(\theta). \quad (3.32)$$

Um die Normalschwere γ_0 auf dem Niveauellipsoid zu erhalten, setzt man für den Radius r den mittleren Ausdruck aus Gl. 3.31 ein, entwickelt den Nenner in eine Potenzreihe und vernachlässigt die nichtlinearen Glieder. Wie oben ersetzt man die Kobreite durch die Breite ($\theta = 90^\circ - \phi$; $\cos(\theta) = \sin(\phi)$; $\sin^2(\theta) = 1 - \sin^2(\phi)$) und erhält als Näherung der Normalschwere die newtonsche Schwereformel:

$$\gamma_0(\phi) = \frac{U_0^2}{GM_E} \underbrace{\left[\left(1 - 2m + \frac{1}{2}J_2 \right) + \left(2m - \frac{3}{2}J_2 \right) \sin^2(\phi) \right]}_{\frac{\gamma_a}{(U_0^2/GM_E)}} = \gamma_a (1 + \beta \sin^2(\phi)), \quad (3.33)$$

wobei β die analog zur geometrischen Abplattung definierte Schwereabplattung der Erde als Funktion der Normalschwere am Äquator und am Pol ist:

$$\beta = (\gamma_c - \gamma_a)/\gamma_a. \quad (3.34)$$

Einsetzen von $\phi = 0^\circ$ bzw. 90° ergab in Gl. 3.31 die Ausdrücke für die Äquator- bzw. Polradien a bzw. c . Setzt man entsprechend in Gl. 3.33 wiederum $\phi = 0^\circ$ bzw.

90°, so erhält man die Normalschwere am Äquator bzw. Pol. Entwickelt man die Nenner der sich daraus ergebenden Ausdrücke für f bzw. β in Potenzreihen und vernachlässigt wiederum die nichtlinearen Glieder, so erhält man näherungsweise:

$$f \approx \frac{m}{2} + \frac{3}{2} J_2 \text{ sowie } \beta \approx 2m - \frac{3}{2} J_2. \quad (3.35)$$

Hieraus folgt das für die klassische Geodäsie zentrale Theorem des französischen Astronomen und Mathematikers Alexis Claude Clairaut (1713–1765):

$$f + \beta = \frac{a - c}{a} + \frac{\gamma_c - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{5}{2} m = \frac{5}{2} \frac{\Omega^2 a^3}{GM_E}. \quad (3.36)$$

Die Bedeutung des clairautschen Theorems besteht darin, dass es die geometrischen und Schwereabplattungen f und β mit dem Beschleunigungsquotienten m (Gl. 3.18) aus äquatorialer Zentrifugal- und Gravitationsbeschleunigung verknüpft. Die weitreichende Folgerung aus dieser in linearer Näherung gültigen Beziehung besteht darin, dass die geometrische Abplattung der Erde aus rein dynamischen, durch Schweremessungen zugänglichen Größen bestimmt werden kann. Näherungen höherer Ordnung, die auch die Abweichung der wahren Schwere von der Normalschwere berücksichtigen, werden der Genauigkeit heutiger Schweredaten besser gerecht. Sie ändern aber nichts an diesem fundamentalen Zusammenhang, der es ermöglichte, die Figur der Erde aus Schweremessungen zu bestimmen.

Zur Berechnung der Normalschwere im erdnahen Außenraum als Funktion von Breite und Höhe genügt eine Taylor-Entwicklung des Normalschwerepotenzials nach der Höhe h bis zum quadratischen Glied (siehe z. B. Torge 2003, S. 96–98; Kertz 1969, S. 93–94):

$$\gamma(h, \phi) = \gamma_0 \left[1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2(\phi)) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right], \quad (3.37)$$

wobei f die geometrische Abplattung ist und m der Beschleunigungsquotient aus äquatorialer Zentrifugal- und Gravitationsbeschleunigung. Der lineare Term dieser Näherung berücksichtigt bereits die Krümmung des Ellipsoids, der quadratische dagegen geht von einer sphärischen Geometrie aus. Hierbei kann h entweder die orthometrische oder ellipsoidische Höhe bezeichnen (zur Definition der Höhen siehe Abschn. 3.3.1.3). Auf eine Ableitung von Gl. 3.37 wird hier verzichtet – man findet sie z. B. bei Torge (2003), S. 93–98 und Hofmann-Wellenhof und Moritz (2006), S. 81–82. Für größere Höhen existieren entsprechende Ableitungen für $\gamma(h, \phi)$ aus dem Normalschwerepotenzial U_0 als Lösung der Laplace-Gleichung in Ellipsoidkoordinaten (siehe z. B. Hofmann-Wellenhof und Moritz 2006, S. 64–81). Eine Lösung in geschlossener Form wurde von Li und Götze (2001) angegeben.

3.2.4 Messung der Schwere

Zu Absolutmessungen der Schwere wurden zunächst Pendel eingesetzt, nach dem Prinzip des 1817 vom englischen Physiker Henry Kater eingeführten Reversionspendels. Mit diesem wurden die Beschränkungen überwunden, welche in der Abweichung eines realen Pendels von einem mathematischen Pendel (reibungsfrei gelagerte, punktförmige Masse an masselosem Faden) begründet sind. Das Reversionspendel besteht aus einem steifen, etwa 50 cm langen Stab aus Metall oder Quarz, auf dem eine bewegliche Masse angebracht ist. An beiden Stabenden befinden sich Schneidenlager. Die Schwingungsdauer des Pendels um diese beiden Drehpunkte wird gemessen und die Masse solange verschoben, bis beide Perioden gleich sind. Für diesen Fall entspricht der Abstand ℓ zwischen den beiden Schneiden der Länge eines mathematischen Pendels derselben Schwingungsperiode T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g_z}} \quad \text{bzw.} \quad g_z = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}. \quad (3.38)$$

Hieraus kann g_z bei bekanntem ℓ aus den gemessenen Schwingungsperioden T bestimmt werden. Die Empfindlichkeit (Relativgenauigkeit bzw. Auflösung) dg/g des Reversionspendels ergibt sich mit g_z aus Gl. 3.38 aus der Ableitung nach der Schwingungsperiode $\frac{dg_z}{dT} = -2 \frac{4\pi^2 \ell}{T^3} = -\frac{8\pi^2 \ell}{T^3}$ zu:

$$\frac{dg_z}{g_z} = -\frac{8\pi^2 \ell}{T^3} \frac{T^2}{4\pi^2 \ell} dT = -2 \frac{dT}{T}. \quad (3.39)$$

Da nachfolgend immer von der Vertikalschwere die Rede sein wird, wird im Weiteren der Index „z“ weggelassen und g statt g_z geschrieben.

Um eine Genauigkeit von $\Delta g = 10 \mu\text{m s}^{-2}$ zu erreichen, welche einer Empfindlichkeit von 10^{-6} entspricht, muss somit eine Periode von 1s auf $0,5 \mu\text{s}$ genau bestimmt werden. Dies ist mit Atomuhren problemlos möglich. Stehen diese nicht zur Verfügung, muss über eine große Anzahl von Perioden gemittelt werden. Dies war bis in die 1930er-Jahre bei Feldmessungen die Regel, weshalb eine Messung etwa eine halbe Stunde benötigte. Immerhin diente der von Kühnen und Furtwängler 1898–1904 in Potsdam mit dem Reversionspendel bestimmte Wert von 1909–1971 als internationaler Basiswert, bis er durch das *International Gravity Standardization Net* (ISGN71) abgelöst wurde (Morelli et al. 1974). Heutzutage erfolgen Absolutmessungen im Vakuum nach den Methoden des freien Falls bzw. Wurfs und Falls genauer als $\Delta g = 0,02 \mu\text{m s}^{-2}$, wobei der Abstand mit Michelson-Interferometrie und die Zeit mit Fotozellen und hochgenauen Uhren gemessen wird (siehe z. B. Torge 2003, S. 155–178; Lowrie 2007, S. 74–75; Berckhemer 1997, S. 34–35). In Observatorien wird stationär die zeitliche Veränderung des Schwerefelds beobachtet. Supraleitende Gravimeter ermöglichen hochgenaue Messungen, bei denen eine supraleitende Hohlkugel im Magnetfeld einer ebenfalls supraleitenden Spule im Schwebezustand gehalten wird. Kräfte, die durch Beschleunigungsänderungen auf diese Probemasse einwirken, werden durch ein Regelsystem kompensiert (Nullmessung). Aus den Strömen dieses Regelsystems werden die Schwerevariationen mit einer Auflösung von weniger als $0,0001 \mu\text{m s}^{-2}$ berechnet.

In der Angewandten Geophysik werden für relative Schweremessungen ausschließlich hochempfindliche Federwaagen eingesetzt, sogenannte Gravimeter. Sie sind eine direkte Anwendung des hookeschen Gesetzes ([Gl. 2.5](#)) in der Form

$$F = m g = -k(S - S_0), \quad (3.40)$$

wobei k die Federkonstante ist, S_0 die Länge der Feder im Ruhezustand und S die der ausgelenkten Feder. Nach diesem Prinzip konstruierte Gravimeter nennt man stabil oder statisch. Astasierte Gravimeter sind empfindlicher als die stabilen. Heute werden ausschließlich diese eingesetzt. Die Astasierung bewirkt, dass die wirksame Federkonstante möglichst klein wird. Dies wird erreicht, indem eine Zusatzkraft in der gleichen Richtung wie die Schwerkraft wirkt, also der Rückstellkraft der Feder entgegengerichtet ist. Dies wird über die Konstruktion der Feder bewirkt: Wird die Federlänge S_0 minimal (im Idealfall gleich null), so ist die Rückstellkraft F in [Gl. 3.40](#) proportional zur physischen Federlänge statt zur Federlängung. Die von LaCoste (USA) 1934 eingeführte Nulllängen-Feder (*zero-length spring*) ist daher in allen modernen Gravimetern gebräuchlich. Wird eine Spiralfeder gedehnt, so wird ihre (Quarz-)Faser tordiert. Die Gesamtdrehung der Faser entspricht der Längung der Feder als Ganzes. Bei der Herstellung von Nulllängen-Federn erhalten diese daher eine Vortordierung, sodass sie eine Tendenz zur Längung besitzen. Ein Schwerezuwachs dehnt die Feder gegen ihre Rückstellkraft, aber die Längung wird durch die Vortordierung verstärkt.

[Abb. 3.6](#) zeigt als Beispiel das Messprinzip eines LaCoste–Romberg-Gravimeters sowie das Gerät selbst im Betrieb. Die Messung erfolgt als Nullmessung, und der Aufbau des leichten und robusten Geräts erfordert lediglich die Aufstellung auf einer nivellierten Platte. Eine Messung benötigt nur wenige Minuten. Die Auflösung des Geräts beträgt $0,1 \mu\text{m s}^{-2}$. Wegen seiner hohen Empfindlichkeit reagiert es auch empfindlich auf Änderung seiner eigenen Eigenschaften. Daher wird es durch Batterieheizung auf konstanter Temperatur gehalten.

Für Messungen von Schiffen oder Flugzeugen aus werden spezielle stabile Gravimeter verwendet. Diese besitzen keine Astasierung, sondern eine starke Dämpfung der Gehängeschwingung zur Unterdrückung des Seegangs bzw. der Beschleunigungen während eines Flugs.

Relativmessungen der Schwere in unterschiedlichen Gebieten sind nur miteinander vergleichbar, wenn sie an Punkte bekannter absoluter Schwere angebunden werden. Bis 1971 diente hierzu die Potsdamer Schwereformel (s. o.) sowie die unterschiedlichen nationalen Vermessungsnetze. In Deutschland ist dies das Deutsche Schweregrundnetz 1994 (DSGN 94)⁷, welches aus 30 Stationen mit jeweils mindestens zwei Unterstationen (sog. Exzentren) besteht ([Abb. 3.7](#)). An den Hauptstationen des DSGN 94 ist die Schwerebeschleunigung mit einer absoluten Genauigkeit von $\pm 0,05 \mu\text{m s}^{-2}$ bestimmt, an den Unterstationen mit $\pm 0,07 \mu\text{m s}^{-2}$. Gestützt auf ca. 16 000 Messpunkte, den Schwerefestpunkten, stellt das 1996 etablierte Deutsche Hauptschwerenetz (DHSN 96) eine Verdichtung des Deutschen

⁷<https://www.bkg.bund.de/DE/Ueber-das-BKG/Geodäsie/Schwere/Schwere-Deutschland/schwere-deutsch.html>

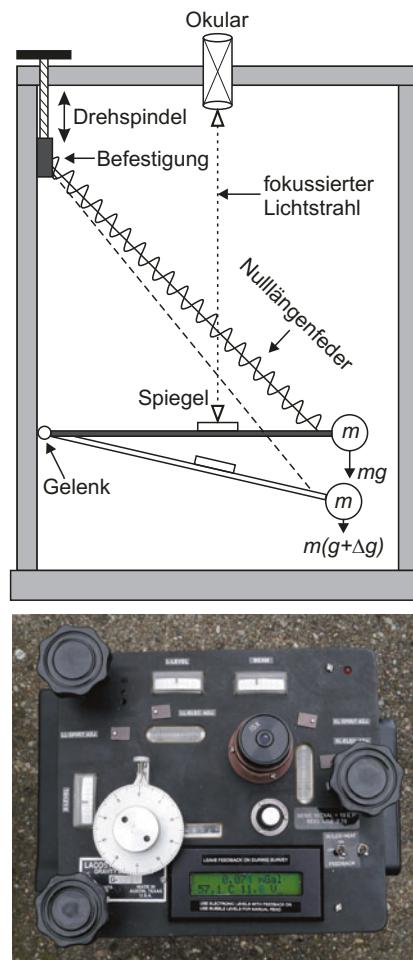


Abb. 3.6 Astasieres Gravimeter; oben: Funktionsprinzip; unten: LaCoste–Romberg–Gravimeter (nach Lowrie 2007; Foto: Detlef Vogel, LIAG Hannover)

Schweregrundnetzes DGSN 94 dar. Der quadratische Mittelwert der Standardabweichungen der Schwerewerte im DHSN 96 beträgt $\pm 5 \text{ nm s}^{-2}$.

In Deutschland werden die genannten Schwerenette von den Landesvermessungsämtern der einzelnen Bundesländer unterhalten und betrieben sowie vom Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (BKG) mit Hauptsitz in Frankfurt am Main. In anderen Ländern existieren vergleichbare Einrichtungen. Auf internationaler Ebene sind die Daten des *International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN-71)* die Bezugsgrößen. Es umfasst weltweit mehr als 1 854 Messstationen der Schwerkraftbeschleunigung mit einem jeweils geringeren Standardfehler als $\pm 0,5 \mu\text{m s}^{-2}$.

Deutsches Schweregrundnetz 1994



Abb. 3.7 Die 30 Hauptstationen des Deutschen Schweregrundnetzes von 1994 (DSGN94); schwarze Punkte: Ergänzungsmessungen mit Absolutgravimeter JIL Ag-3 (Torge et al. 1999)

3.3 Bearbeitung von Schweredaten

Die mit Gravimetern gemessenen Relativwerte der Schwerkraftbeschleunigung sind einer Reihe von Einflüssen unterworfen, die von Ort zu Ort und mit der Zeit variieren. Um Anomalien vergleichen und deren rein geologische Ursachen analysieren zu können, werden diese Einflüsse durch eine Reihe von Korrekturen und Reduktionen erfasst und berücksichtigt.

3.3.1 Korrektur und Reduktion von Messwerten der Schwerkraftbeschleunigung

Vor einer weiteren Reduktion der Messwerte werden zunächst Korrekturen angebracht, welche zeitlich und räumlich variable Effekte beseitigen: Die Driftkorrektur δg_D korrigiert den Instrumentengang und berücksichtigt die Wirkung der Gezeiten. Luftdruckvariationen beeinflussen den Messwert von Gravimetern ebenfalls. Korrekturen werden mit $-0,03 \mu\text{m s}^{-2}$ pro hPa angebracht. Umwelteinflüsse wie Bodenunruhe (auch seismische, meist aber Verkehr, Wind oder Brandung) werden durch Unterdrückung von Frequenzen zwischen 0,1 Hz–2 Hz sowie oberhalb von 10 Hz eliminiert. Somit sind sehr kleine Standardabweichungen von Schweremessungen von lediglich $0,040 \mu\text{m s}^{-2}$ erreichbar. Erfolgen Schweremessungen von bewegten Plattformen aus, wie z. B. Schiffe, Flugzeuge oder Satelliten, so tritt eine zusätzliche Beschleunigung hinzu, die Eötvös-Beschleunigung. Deren Einfluss wird durch die Eötvös-Korrektur $\delta g_{\text{Eötvös}}$ von den Messwerten abgezogen.

Anschließend werden die gemessenen Schwerkraftbeschleunigungen durch entsprechende Reduktionen vergleichbar gemacht, welche örtlich variable Einflüsse unterschiedlicher Faktoren beseitigen. Die Freiluftreduktion δg_F berücksichtigt zunächst den Einfluss unterschiedlicher Messpunktthöhen im Schwerefeld der Erde. Sodann vermindert die Geländereduktion δg_T die Messdaten um die Gravitationswirkung von Massenüberschüssen (Bergen) bzw. -defiziten (Tälern) oberhalb bzw. unterhalb eines Messpunkts. Schließlich berücksichtigen die Bouguer-Reduktion δg_B und die atmosphärische Reduktion δg_A die Gravitationswirkung der danach ebenen bzw. sphärischen Krustenplatte oberhalb des Bezugsniveaus sowie die einer ggf. zwischen Messpunktthöhe und Bezugsniveau befindlichen Luftsicht.

3.3.1.1 Korrektur zeitlicher Variationen: Instrumentengang und Gezeiten

Wie die meisten empfindlichen Messgeräte weisen auch Gravimeter einen Instrumentengang auf. Dieser wird einerseits durch Temperaturschwankungen verursacht, andererseits bewirkt die natürliche Alterung eine Änderung der elastischen Eigenschaften des Federsystems mit der Zeit. Dies wird bei Schweremessungen in geeigneter Weise korrigiert – entweder durch Parallelregistrierung oder durch Wiederholungsmessungen an einem Bezugspunkt. Aus der Variation der Schwerkraft mit der Zeit am Bezugspunkt wird eine Gangkurve bestimmt und deren

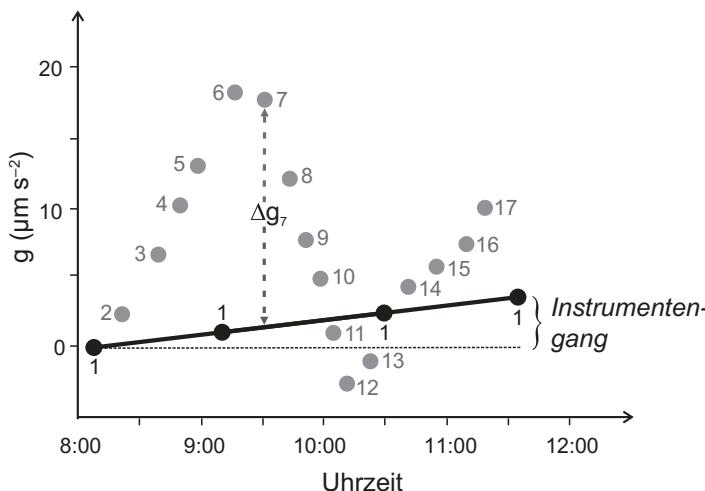


Abb. 3.8 Gangkorrektur von Schweremessungen durch Wiederholungsmessungen an einer Basisstation (nach Lowrie 2007). Die schwarzen Punkte sind zeitliche Wiederholungsmessungen der Schwerebeschleunigung an der Basisstation 1. Die grauen Punkte sind die zu unterschiedlichen Zeiten an den Messstationen 2 bis 17 aufgezeichneten Messwerte der Schwerebeschleunigung. So ist z. B. Δg_7 der gangkorrigierte Wert der um 9:30 Uhr erfolgten Messung an der Station 7. Die Gangkorrektur an den anderen Stationen erfolgt entsprechend

Werte zu den jeweiligen Messzeiten von den Messwerten an den Beobachtungspunkten abgezogen (Abb. 3.8).

Weitere Variationen der Schwerebeschleunigung mit der Zeit werden durch die Gezeiten bewirkt. Die Theorie der Gezeiten ist gut bekannt, und ihre zeitabhängige Wirkung auf die Schwere kann für jeden Ort und Zeitpunkt mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Der Maximaleffekt der kombinierten Mond- und Sonnengezeiten auf die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche beträgt etwa $3 \mu\text{m s}^{-2}$. Somit ist der Gezeiteneffekt groß in Hinsicht auf die Auflösung moderner Gravimeter von $0,05 \mu\text{m s}^{-2}$.

Die Korrektur kann rechnerisch (z. B. Longman 1959) oder mit tabellierten Werten erfolgen. Auch gibt es Programme zur Berechnung der Erdgezeiten und ihrer Analyse (z. B. Van Camp und Vauterin 2005), die im Internet vom *International Center for Earth Tides* (ICET)⁸ bezogen werden können. Alternativ kann die Gezeitengang zusammen mit der Gangkorrektur angebracht werden, wenn der Gezeitengang an einer Basisstation registriert wird. Erfolgen die Messungen nur mit einem Gerät und deshalb am Basispunkt zu diskreten Zeiten, so ist damit nur eine stückweise lineare Näherung des Gezeitengangs möglich, was aber oft ausreicht. Instrumentengang und Gezeiteneinfluss werden in der Driftkorrektur δg_D zusammengefasst, welche vom Messwert abgezogen wird.

⁸<https://webdevel.upf.pf/ICET/home.html>

3.3.1.2 Eötvös-Korrektur

Wird die Schwere von bewegten Plattformen aus gemessen, so wirken zusätzliche Kräfte aufgrund der Wechselwirkung zwischen der Erdumdrehung und der Relativbewegung des Fahrzeugs, auf dem die Messung stattfindet. Die radial nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Scheibe des Radius r ist:

$$a_z = \Omega^2 r = \frac{v^2}{r}, \quad (3.41)$$

wobei v die lineare, ostwärts gerichtete Bahngeschwindigkeit an diesem Punkt ist und $\Omega = v/r$ die zugehörige Winkelgeschwindigkeit am Rand der Scheibe. Die Zentrifugalbeschleunigung eines auf der Oberfläche der Erde ($r = r_E$) auf einer Breite ϕ ruhenden Punkts (Abb. 3.9) beträgt somit:

$$a_z = \frac{v^2}{r_E \cos(\phi)}. \quad (3.42)$$

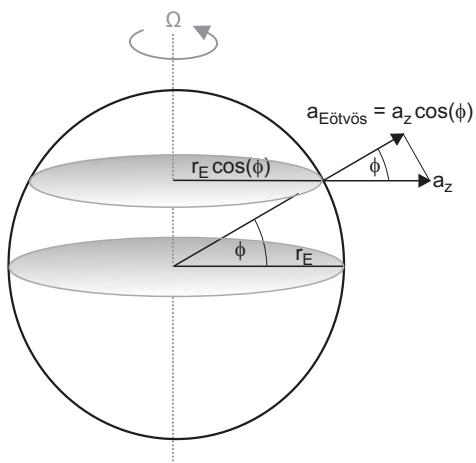
Ihre vertikale (radiale) Komponente ist die Eötvös-Beschleunigung $a_{\text{Eötvös}} = a_z \cos(\phi) = v^2/r_E$. Für Messungen an auf der Erdoberfläche ruhenden Stationen wird die breitenabhängige Schwereverminderung bereits in der Formel von Somigliana (Gl. 3.21 und 3.23) bzw. der newtonschen Schwereformel (Gl. 3.33) zur Berechnung der Normalschwere berücksichtigt. Für Messungen auf bewegten Schiffen und Flugzeugen jedoch vermehrt deren ostwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponente V_E die Zentrifugalbeschleunigung:

$$a_z = \frac{(v + V_E)^2}{r_E \cos(\phi)}. \quad (3.43)$$

Deren Vertikalkomponente ist wiederum gleich $(v + V_E)^2/r_E$. Wegen ihrer entlang eines Meridians nach Norden bzw. Süden verlaufenden Bahn verursacht die

Abb. 3.9 Zentrifugalbeschleunigung

a_z eines Punkts an der Erdoberfläche und ihre Vertikalkomponente, die Eötvös-Beschleunigung $a_{\text{Eötvös}}$



Nordkomponente der Geschwindigkeit V_N ebenfalls eine Zentrifugalbeschleunigung. Analog zu oben ist deren Vertikalkomponente gleich V_N^2/r_E . Die gesamte durch die Fahrzeuggeschwindigkeit $\vec{V} = \vec{V}_E + \vec{V}_N$ und die Erdumdrehung Ω verursachte vertikale Beschleunigung beträgt somit:

$$\frac{(v + V_E)^2 + V_N^2}{r_E} = \frac{v^2 + 2vV_E + \overbrace{V_E^2 + V_N^2}^{V^2}}{r_E}.$$

Für eine Fahrtgeschwindigkeit $V = \sqrt{V_E^2 + V_N^2}$ ergibt sich somit die durch die Fahrzeugbewegung verursachte vertikale Zusatzbeschleunigung zu:

$$\delta g_{Eötvös} = \frac{2vV_E + V^2}{r_E}. \quad (3.44)$$

Setzt man für $v = \Omega r_E \cos(\phi)$ und für $V_E = V \sin(\alpha)$, wo α der Winkel des Kurses bzgl. Nord ist (Abb. 3.10), so ergibt sich für die Eötvös-Korrektur $\delta g_{Eötvös}$:

$$\delta g_{Eötvös} = 2\Omega V \cos(\phi) \sin(\alpha) + \frac{V^2}{r_E}. \quad (3.45)$$

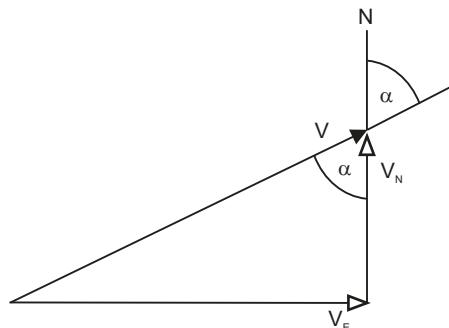
Hieraus folgt⁹ mit $\Omega = 2\pi/86\,164 = 7,292\,1 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$; $r_E = 6\,371 \text{ km}$; $1 \text{ kn} = 0,514\,79 \text{ m s}^{-1}$:

$$\delta g_{Eötvös} = 75,08 V \cos(\phi) \sin(\alpha) + 0,041\,6 V^2 (\mu\text{m s}^{-2}) \text{ für } V \text{ in kn} \quad (3.46)$$

$$\delta g_{Eötvös} = 40,51 V' \cos(\phi) \sin(\alpha) + 0,012\,11 V'^2 (\mu\text{m s}^{-2}) \text{ für } V' \text{ in km h}^{-1}. \quad (3.47)$$

Die Fehler der Eötvös-Korrektur $d(\delta g_{Eötvös})$ aufgrund der Fehler dV' (km h^{-1}) und $d\alpha$ ($^\circ$) in Geschwindigkeit und Kurswinkel ist:

Abb. 3.10 Zur Eötvös-Korrektur für Schwerewerte, die auf einer mit der Geschwindigkeit V bewegten Plattform gemessen wurden (α : Kurswinkel)



⁹Die siderische Periode der Erdumdrehung (bzgl. der Fixsterne) beträgt 86 164 s. Ein Sternentag ist somit um knapp vier Minuten kürzer als ein Sonnentag (86 400 s).

$$\begin{aligned} d(\delta g_{\text{Eötvös}}) = & (40,51 \cos(\phi) \sin(\alpha) + 0,024\,22 V') dV' \\ & + (40,51 V' \cos(\phi) \cos(\alpha)) d\alpha (\mu\text{m s}^{-2}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Auf einer Breite von 45° bei einer Geschwindigkeit von 10 km h^{-1} verursachen eine Geschwindigkeitsänderung von $0,2 \text{ km h}^{-1}$ und eine Kursänderung von $0,5^\circ$ für einen östlichen Kurs ($\alpha = 90^\circ$) eine Änderung der Eötvös-Korrektur von $d(\delta g_{\text{Eötvös}}) < 6 \mu\text{m s}^{-2}$ und für einen nördlichen Kurs ($\alpha = 0^\circ$) von $d(\delta g_{\text{Eötvös}}) < 3 \mu\text{m s}^{-2}$.

Um eine Genauigkeit von $10 \mu\text{m s}^{-2}$ zu erreichen, müssen Kurs und Geschwindigkeit eines Schiffes also sehr gut kontrolliert und eingehalten werden. Dies gilt umso mehr für Messungen aus Hubschraubern oder Flugzeugen. Dies ist jedoch mit den heutigen technischen Möglichkeiten von Navigation und Steuerung erreichbar. Die Eötvös-Korrektur erreicht für Messungen auf Schiffen Werte von $350 \mu\text{m s}^{-2}$. Bei Messungen vom Flugzeug aus, wo Geschwindigkeiten von über 90 km h^{-1} (50 kn) bei Befliegungen üblich sind, erreicht die Eötvös-Korrektur sogar Werte von bis zu 4 mm s^{-2} .

3.3.1.3 Freiluftreduktion δg_F und Geländereduktion δg_T

Die Topografie einer Landschaft wirkt sich mehrfach auf die Schwerebeschleunigung aus: Zum einen verringert sich die Schwerkraft der Erde mit dem Kehrwert des quadrierten radialen Abstands von ihrem Mittelpunkt. Andererseits vermindern Berge und Täler als Überschussmassen bzw. Massendefizite oberhalb bzw. unterhalb eines Messpunkts die dortige Schwerebeschleunigung (Abb. 3.11).

Im Unterschied zur Geodäsie dienen Variationen der Dichte im Untergrund in der angewandten Geophysik im Wesentlichen dazu, die zugehörigen Schweredifferenzen in Hinsicht auf Lagerstätten zu interpretieren. Daher erfolgen heute alle Reduktionen relativ zu den über das GPS (siehe Fußnote 6) zugänglichen ellipsoidischen Höhen h_{topo} über dem Niveaumodell (Abb. 3.12). Bevor hochgenaue Positions- und Höhenbestimmungen durch das GPS verfügbar waren, wurden in den Reduktionen stattdessen orthometrische Höhen H_{topo} (über NN) verwendet. Der damit verbundene, als indirekter Effekt bezeichnete Fehler war hinnehmbar, solange nur Schweredifferenzen zwischen benachbarten Orten interessierten. Denn die globalen Variationen des Geoids von maximal etwa $\pm 100 \text{ m}$ sind sehr langwellig. Die klassische geodätische Bestimmung der orthometrischen Höhen H_{topo} erforderte ein aufwändiges Nivellement, das dank GPS heute bei den meisten

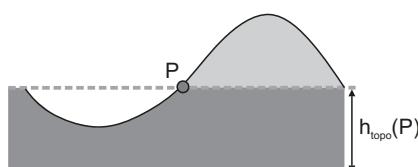


Abb. 3.11 Die Schwerebeschleunigung an einem Punkt P wird vermindert durch Berge und Täler in seiner Umgebung oberhalb bzw. unterhalb seiner ellipsoidischen Höhe $h_{\text{topo}}(P)$

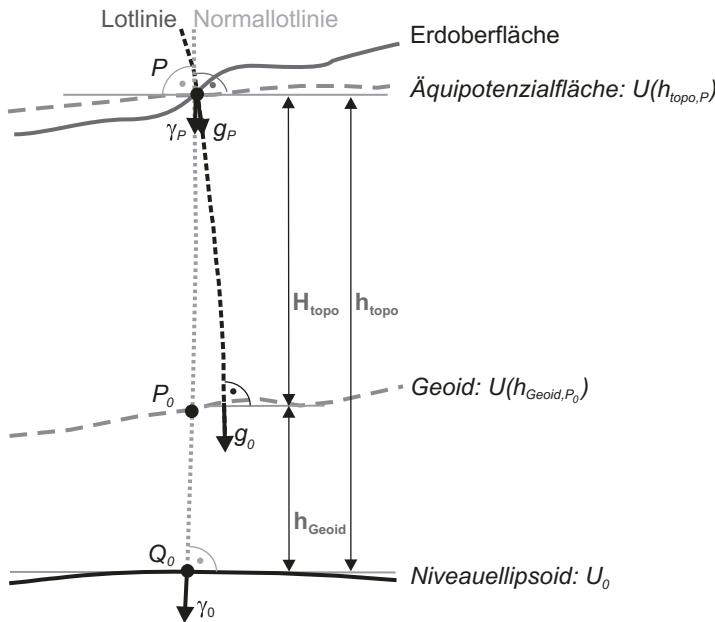


Abb. 3.12 Definition unterschiedlicher Bezugshöhen: Ellipsoidische Höhe h_{topo} über dem Niveauellipsoid; orthometrische Höhe H_{topo} über dem Geoid (Höhe über NN); ellipsoidische Höhe h_{Geoid} des Geoids über dem Niveauellipsoid

geophysikalischen Anwendungen entfallen kann. Denn da sich die GPS-Bahndaten auf das WGS84-Niveauellipsoid beziehen, liefert das GPS im Unterschied zu einem geodätischen Nivellement unmittelbar ellipsoidische Höhen h_{topo} . Diese können mit differenziellem GPS in Echtzeit auf 2 cm–5 cm genau bestimmt werden, mit nachgeschalteter Datenbearbeitung sogar auf einige Millimeter genau (Torge 2003, S. 231; Bruyninx et al. 2011). Mit Hilfe der Beziehungen $h_{\text{topo}} = H_{\text{topo}} + h_{\text{Geoid}}$ können jedoch die ellipsoidischen Höhen h_{topo} in orthometrische Höhen H_{topo} umgerechnet werden, wenn die Geoidhöhen h_{Geoid} bekannt sind. Umgekehrt können Geoidhöhen bestimmt werden, wenn orthometrische Höhen aus einem Nivellement bekannt sind.

Freiluftreduktion δg_F

Die Freiluftreduktion dient dazu, den Effekt der Abnahme der Schwerebeschleunigung mit der Höhe zu berücksichtigen. Zur Berechnung der Normalschwere im erdnahen Außenraum als Funktion von Breite und Höhe genügt eine Taylor-Entwicklung des Normalschwerepotenzials nach der Höhe h bis zum quadratischen Glied (siehe Gl. 3.37):

$$\gamma(h, \phi) = \gamma_0 \left[1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2(\phi)) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right].$$

Die Freiluftreduktion berechnet sich dann mit Gl. 3.37 und 3.33: $\gamma_0 \approx \gamma_a (1 + \beta \sin^2(\phi))$, als Differenz der Normalschweren in der ellipsoidischen Messpunktthöhe h_{topo} und auf dem Niveaumassoid:

$$\begin{aligned}\delta g_F(h_{topo}, \phi) &= \gamma(h_{topo}, \phi) - \gamma_0 \\ &= -\frac{2\gamma_a}{a} \left[1 + f + m + \left(\frac{5}{2}m - 3f \right) \sin^2(\phi) \right] h_{topo} + \frac{3\gamma_a}{a^2} h_{topo}^2 \\ &= -[3,087\,691 - 0,004\,398 \sin^2(\phi)] h_{topo} \\ &\quad + 7,212\,5 \times 10^{-7} h_{topo}^2 \quad (\text{in } \mu\text{m s}^{-2}),\end{aligned}\quad (3.49)$$

wobei für a, γ_a , m und f die Werte des GRS80 (Tab. 3.2) verwendet wurden. Gl. 3.49 gilt außer bei sehr großen Höhenunterschieden. In solchen Fällen muss eine höhere Näherung verwendet werden.

Wertet man Gl. 3.49 nur für den in h linearen Term und eine mittlere Breite von 45° aus, so erhält man den für viele Anwendungen in der Geophysik hinreichend genauen Näherungswert $\delta g_F \approx -3,086$ h ($\mu\text{m s}^{-2}$). Für eine der Geräteauflösung entsprechende Genauigkeit von $0,05 \mu\text{m s}^{-2}$ muss hierbei die Höhe genauer als auf 1,6 cm bekannt sein.

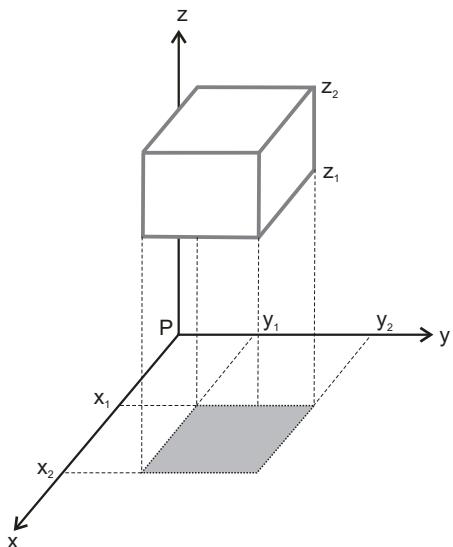
Geländereduktion δg_T

Die Geländereduktion (*terrain reduction*) δg_T berücksichtigt die Gravitationswirkung von Massen oberhalb und Massendefiziten unterhalb eines Messpunkts, insbesondere in Form von Bergen bzw. Tälern. Sie wird aus der Schwerkraftwirkung der in vertikale Prismen diskretisierten Topografie berechnet. Diese kann sowohl mit Methoden im Ortsbereich als auch mit spektralen Methoden im Wellenzahlbereich ermittelt werden.

Methoden im Ortsbereich berechnen die Schwerkraftbeschleunigung, welche durch Massen oberhalb des Messpunkts (z. B. Berge) auf diesen ausgeübt wird bzw. wegen ihres Fehlens (z. B. Täler) unterhalb des Messpunkts ausbleibt. Bevor digitale Geländemodelle (s. u.) verfügbar waren, musste hierfür die Umgebung eines Messpunkts in ein polares Gitter diskretisiert und dessen Hohlzylindersegmenten eine mittlere Höhe und Dichte zugewiesen werden. Dann wurde die Schwerkraftbeschleunigung jedes einzelnen Hohlzylindermantelstücks am Messpunkt aus dessen Dichte und Höhe berechnet und alle Beiträge summiert. Dieses sehr aufwändige manuelle Verfahren wurde mittlerweile ersetzt durch die Verwendung digitaler Geländemodelle. Die heute in rechtwinkligen Koordinaten vorliegenden digitalen Geländemodelle erlauben eine Berechnung der Gravitationswirkung von Rechteckquader in kartesischen Koordinaten. Sind Grundfläche bzw. Höhe eines solchen Quaders $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ bzw. $(z_2 - z_1)$ (Abb. 3.13) und seine Dichte ρ_i , so ist sein Gravitationspotenzial am Punkt P im Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gleich:

$$U_g = \rho_i G \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx dy dz}{r}.$$

Abb. 3.13 Zur vertikalen Schwereanomalie verursacht durch einen Rechteckquader



Durch Ableiten dieses Volumenintegrals nach z erhält man die Vertikalkomponente der Gravitationsbeschleunigung an einem im Ursprung des Koordinatensystems gelegenen Punkt (Torge 2003, S. 236 ; Banerjee und Das Gupta 1977; Nagy et al. 2000):

$$\delta g_{T_i}(h_{topo}) = \rho_i G \underbrace{\left[x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right]}_{T_i} \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} = \rho_i T_i. \quad (3.50)$$

Die Geländereduktion (*terrain reduction*) δg_T an einem Ort ergibt sich dann durch Aufsummieren der Gravitationsbeschleunigungen δg_{T_i} aller N Rechteckquader in einer bestimmten Umgebung um diesen Ort:

$$\delta g_T(h_{topo}) = \sum_i^N \delta g_{T_i} = \sum_i^N \rho_i T_i. \quad (3.51)$$

Digitale Geländemodelle

Digitale Geländemodelle (DGM), auch als digitale Höhenmodelle (DHM) bezeichnet, sind Datensätze der Höhe von Geländepunkten auf einem (meist regelmäßigen) Gitter. Die Dichte des Gitters variiert stark zwischen globalen und regionalen Datensätzen. Das deutsche Amtliche Topographisch-Kartographische Informationssystem (ATKIS) enthält Daten im Maßstab von 1 : 10 000 bis zu 1 : 100 000. Die amtlichen digitalen Geländemodelle

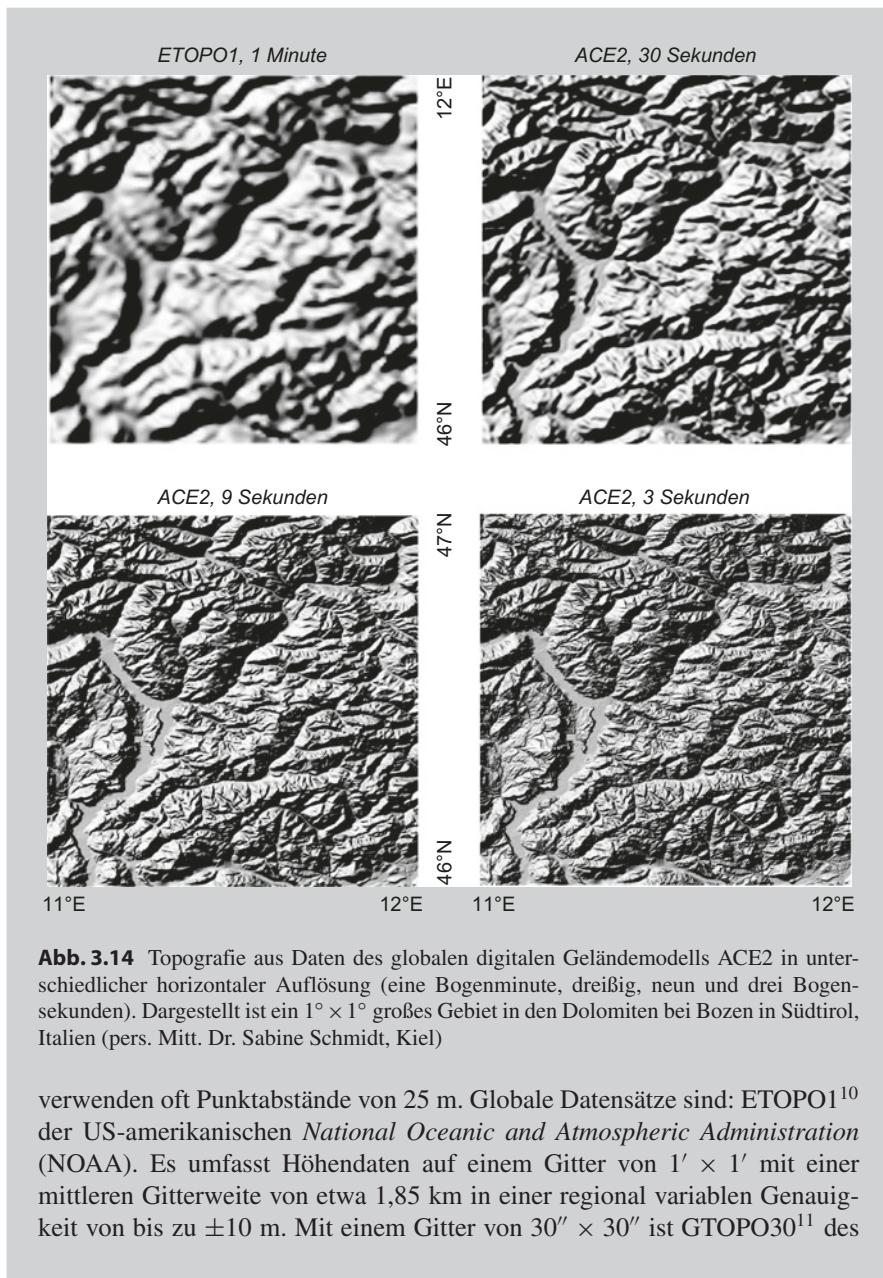


Abb. 3.14 Topografie aus Daten des globalen digitalen Geländemodells ACE2 in unterschiedlicher horizontaler Auflösung (eine Bogenminute, dreißig, neun und drei Bogensekunden). Dargestellt ist ein $1^\circ \times 1^\circ$ großes Gebiet in den Dolomiten bei Bozen in Südtirol, Italien (pers. Mitt. Dr. Sabine Schmidt, Kiel)

verwenden oft Punktabstände von 25 m. Globale Datensätze sind: ETOPO1¹⁰ der US-amerikanischen *National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA). Es umfasst Höhendaten auf einem Gitter von $1' \times 1'$ mit einer mittleren Gitterweite von etwa 1,85 km in einer regional variablen Genauigkeit von bis zu ± 10 m. Mit einem Gitter von $30'' \times 30''$ ist GTOPO30¹¹ des

¹⁰ETOPO1: <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>

¹¹GTOPO30: <http://eros.usgs.gov/elevation-products>

United States Geological Survey (USGS) mit einer Gitterweite von etwa 925 m noch höher aufgelöst. Eine noch höhere Auflösung von 30 m bzw. 90 m besitzen die auf einem Gitter von $1'' \times 1''$ bzw. $3'' \times 3''$ vom Space Shuttle *Endeavour* der US-amerikanischen *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) im Jahr 2000 aufgezeichneten Fernerkundungsdaten der *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM)¹². Durch Kombination bisheriger digitaler Geländemodelle mit über 100 Millionen Höhendaten, die aus Satelliten-Höhenmessungen abgeleitet wurden, stellt ACE (Altimeter Corrected Elevations) bzw. ACE2¹³ zwischen $81,5^{\circ}\text{N}$ und $81,5^{\circ}\text{S}$ hochgenaue globale digitale Geländemodelle zur Verfügung. Deren horizontale Auflösung beträgt $30'', 9''$ oder $3''$; Letzteres entspricht am Äquator bzw. auf einer Breite von 45° einer horizontalen Auflösung von ca. 93 m bzw. 66 m (Abb. 3.14). Für die Landmasse zwischen 54°S und 60°N stellt das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) eine hochauflöste Version zur Verfügung, deren Genauigkeit horizontal ± 20 m und vertikal ± 16 m absolut beträgt, bei einer Auflösung von horizontal ± 25 m und vertikal ± 1 m. Die NASA stellt ebenfalls auf der Basis von Daten des *Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer* (ASTER)¹⁴ ein DGM auf einem Gitter von $100\text{ m} \times 100\text{ m}$ zur Verfügung mit einer horizontalen und vertikalen Genauigkeit von mindestens ± 10 m. Der seit dem 21.06.2010 im Umlauf befindliche deutsche Radarsatellit *TerraSAR-X-Add-on for Digital Elevation Measurements* (TanDEM-X)¹⁵ des DLR verfügt bei einer Abtastbreite von 10 km, 30 km und 100 km über ein abgestuftes Auflösungsvermögen von 1 m, 3 m und 16 m bei einer genaueren Höhenauflösung als 2 m.

Anschaulich gesprochen füllt die Geländereduktion Täler auf, trägt Berge ab und ebnet damit die Topografie zu einer Platte homogener Dichte ein. Somit ist die Geländereduktion δg_T stets positiv, da sich sowohl durch das Auffüllen als auch das Abtragen dieser Massen die Schwerkraftbeschleunigung am Messpunkt vergrößert. Für Abstände von mehr als 22 km wird der Effekt der Topografie mit wenigen Ausnahmen vernachlässigbar klein. Innerhalb eines Radius von 2 m um den Messpunkt sollte die Topografie konstant sein.

Spektrale Methoden erfordern eine Transformation der topografischen Daten – entweder mit der zweidimensionalen Fourier-Transformation in den Wellenzahlbereich (vgl. Abschn. 2.4.2 sowie z. B. Blakely 1996, S. 258–310 für eine Einführung).

¹²SRTM: <https://lta.cr.usgs.gov/SRTM>

¹³ACE2: <http://tethys.eaprs.cse.dmu.ac.uk/ACE2>

¹⁴ASTER: https://lpdaac.usgs.gov/dataset_discovery/aster

¹⁵TanDEM-X: http://www.dlr.de/rd/desktopdefault.aspx/tabid-2440/3586_read-16692/

hung) oder mit der Wavelet-Transformation in den Orts-Wellenzahlbereich (vgl. Abschn. 2.4.2.6 sowie z. B. Keller (2004); Radunović (2009) für eine Einführung).

Die vertikale Schwerebeschleunigung $g(P)$ am Punkt $P(x,y,z)$ ist gegeben durch das Volumenintegral des Produkts der DichteVerteilung $\rho(Q)$ der vertikalen Prismen an den zwischen den Höhen z_1 und z_2 gelegenen Quellpunkten $Q(x,y)$ einerseits und der Vertikalbeschleunigung $a_z(P,Q)$ am Punkt P durch eine Punktmasse am Punkt Q andererseits:

$$g(x,y,z) = \int_V \rho(x',y') a_z(x-x',y-y',z-z') dx' dy' dz'. \text{ Damit gilt:}$$

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x',y') \underbrace{\left(\int_{z_1}^{z_2} a_z(x-x',y-y',z-z') dz' \right)}_{\xi(x-x',y-y')} dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x',y') \xi(x-x',y-y') dx' dy', \end{aligned} \quad (3.52)$$

wobei $\xi(x-x',y-y')$ den Beitrag eines von (x',y',z_1) bis (x',y',z_2) reichenden vertikalen Linienelements darstellt (siehe z. B. Blakely 1996, S. 284). Die Gl. 3.52 definiert die zweidimensionale Konvolution der Dichte mit der Funktion ξ . Durch Fourier-Transformation vereinfacht sich dieses Konvolutionsintegral zu dem wesentlich weniger aufwändig zu berechnenden Produkt der zweidimensionalen Fourier-Transformierten von ρ und ξ . Dies macht die Ermittlung der Gravitationswirkung topografischer Massen im Frequenzbereich attraktiv, insbesondere mit der schnellen Fourier-Transformation (FFT). Mit dieser werden die diskreten Daten digitaler Geländemodelle in globale Amplituden- und Phasenspektren im Wellenzahlbereich transformiert (vgl. Abschn. 2.4.2.4). Dort kann dann das Produkt aus den Transformierten der DichteVerteilung und der Funktion $\xi(x-x',y-y')$ einfach und effektiv berechnet werden. Mit der inversen FFT erfolgt sodann die Rücktransformation in den Ortsbereich ebenso effektiv.

Bei allen Vorteilen hinsichtlich der bedeutend geringeren Rechenzeit, welche die Geländereduktion im Spektralbereich verglichen mit einer Integration im Ortsbereich erfordert, gelten einige Einschränkungen. Zum einen setzt die Transformation einer digitalen Topografie in den Wellenzahlbereich mit Hilfe der FFT voraus, dass dieser Bereich in seinen beiden horizontalen Grundintervallen periodisch ist. Die hierdurch in den Randbereichen verursachten Fehler müssen durch Erweitern des Gebiets und Auffüllen mit Nullen zu einem gewissen Maß unterdrückt werden. Zum anderen dürfen die Steigungen in der Topografie nicht zu steil sein. Dies entspricht einer linearen Näherung bei der Geländereduktion (Forsberg 1985). Bei zu steiler Topografie kann diese jedoch zu großen Fehlern bei der Reduktion führen. Wie am Beispiel der zentralen Anden auf der Basis eines digitalen SRTM-Geländemodells mit einer horizontalen Auflösung von drei Bogensekunden gezeigt wurde, kann dieser Fehler im Extremfall bis zu $500 \mu\text{m s}^{-2}$ erreichen (Gomez et al. 2013). Die Berechnung der Geländereduktion mit Hilfe der FFT kann beispielsweise mit dem

Programmpaket GRAVSOFT (Forsberg und Tscherning 2008) erfolgen, kontinuierlich weiterentwickelt seit den 1970er-Jahren zunächst am Geodätischen und dann am Geophysikalischen (Niels-Bohr-)Institut der Universität Kopenhagen.

Für die Berechnung des Effekts der topografischen Massen auf die bei Befliegungen gemessenen Komponenten des Schweregradienten-Tensors gilt diese Einschränkung in viel geringerem Maß (Jekeli und Zhu 2006; Pedersen et al. 2015). Denn da die Berechnungen für eine oberhalb der Topografie gelegene Ebene erfolgen, also in einem gewissen Abstand von den topografischen Massen, wirkt dies wie bei der Feldfortsetzung nach oben wie ein Tiefpassfilter. Eine entsprechende Feldfortsetzung nach unten ergibt sodann den Effekt der topografischen Massen auf einer gekrümmten Erdoberfläche (Pedersen et al. 2015).

Alternativ zur Fourier-Transformation kann man aus digitalen Geländemodellen mit der Wavelet-Transformation lokale Amplituden- und Phasenspektren im Orts-Wellenzahlbereich berechnen. Mit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation (vgl. Abschn. 2.4.2.6) geht man hierbei wie folgt vor: Für einen bestimmten Skalierungsfaktor s ist die Wavelet-Transformierte $F(s,u)$ proportional zur Topografiehöhe $h(u)$. Aus dem Mutter-Wavelet werden Wavelet-Basisfunktionen $\psi_{s_n,u}(t)$ erzeugt, wobei man die s_n oft durch Reskalierung aus der Grundintervall s_0 mittels eines Potenzgesetzes gewinnt:

$$s_n = s_0 \cdot 2^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.53)$$

Abb. 3.15 zeigt beispielhaft eine Wavelet-Analyse der Topografie entlang eines Profils in der Antarktis (Malamud und Turcotte 2001).

Wie zuvor für die Fourier-Transformation beschrieben, können also mit der Wavelet-Transformation die diskreten Daten digitaler Geländemodelle in globale Amplituden- und Phasenspektren im Orts-Wellenzahlbereich transformiert werden. Dort wird wiederum das Produkt aus den Transformierten der DichteVerteilung und der Funktion $\xi(x-x',y-y')$ gebildet und mit der inversen Wavelet-Transformation zurück in den Ortsbereich transformiert. Konkrete Anwendungen der Wavelet-Transformation für die Berechnung der Geländereduktion werden von El-Habiby und Sideris (2007) und Jekeli (2011) beschrieben. Eine allgemeine Einführung in die Theorie der Wavelets mit geophysikalischen Anwendungen auf das Schwere- und Magnetfeld der Erde findet sich bei Keller (2004).

3.3.1.4 Bouguer-Reduktion δg_B und atmosphärische Reduktion δg_A

Die *Bouguer*-Reduktion δg_B berücksichtigt die Gravitationswirkung einer symmetrisch um den Messpunkt gelegenen, ebenen Kugelschale konstanter Dichte, deren Dicke h gerade der Höhe des Messpunkts über dem Niveauellipsoid entspricht. Man erhält sie, indem man die vertikale Gravitationsbeschleunigung durch ein Volumenelement $d\delta g = Gz dV/r^3$ in Kugelkoordinaten in den Grenzen von $r_E \leq r \leq r_E + h$ für den Radius, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ für die Länge und $0 \leq \theta \leq \Theta$ für die Kobreite integriert (Jung 1961):

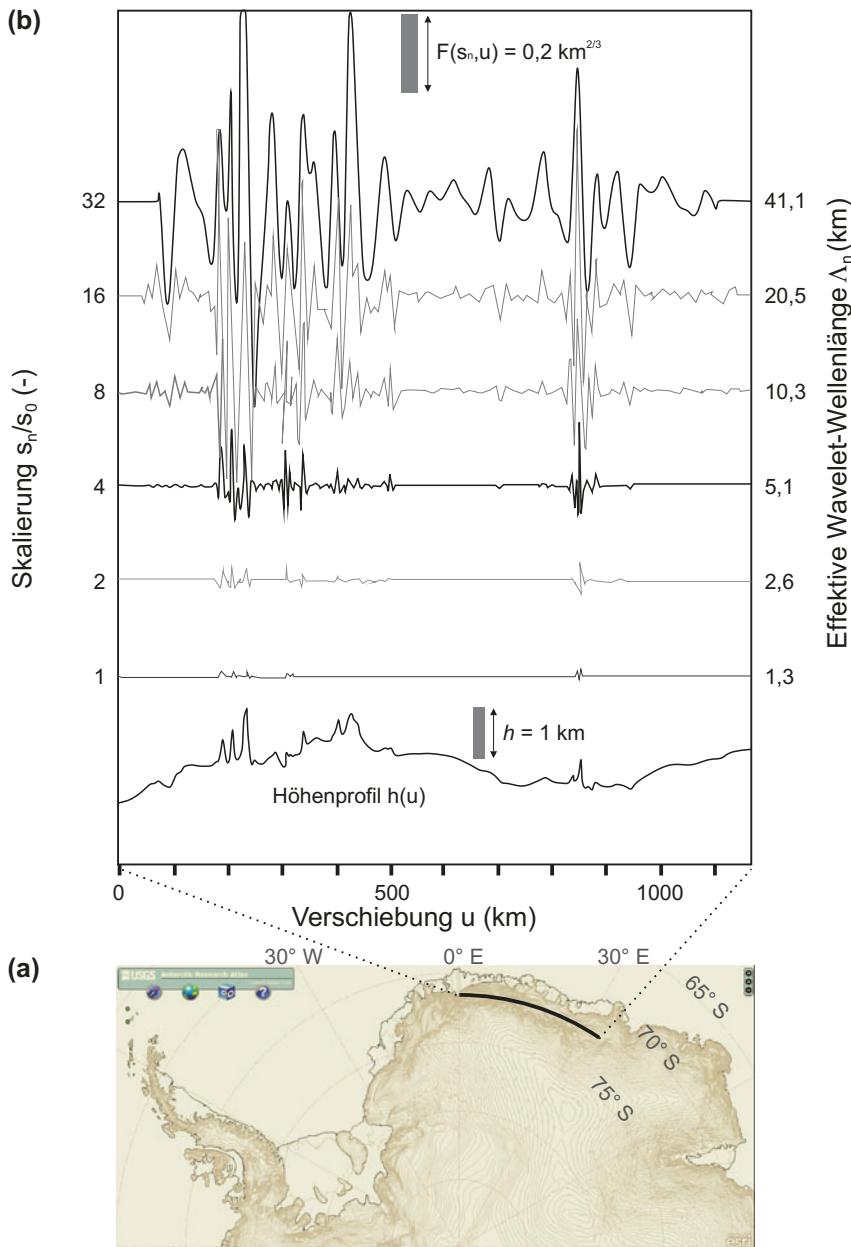
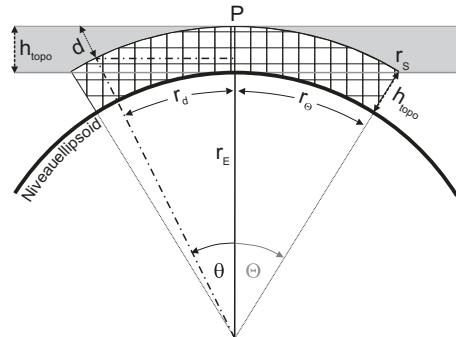


Abb. 3.15 (a) Topografische Karte der Antarktis mit Verlauf des Höhenprofils von 90°E bis 34°E entlang der Breite 71,9°S (nach USGS 2016); (b) Wavelet-Analyse des Höhenprofils in (a) für unterschiedliche Werte des normierten Skalierungsfaktors $s_n/s_0 = 1, 2, 4, 8, 16, 32$, bzgl. eines horizontalen Abtastintervalls $s_0 = 0,29 \text{ km} \pm 0,03 \text{ km}$ (linke Y-Achse). Die rechte Y-Achse ist bzgl. der zugehörigen effektiven Wellenlängen λ_n skaliert (nach Malamud und Turcotte 2001)

Abb. 3.16 Bouguer-Reduktion am Punkt P für eine auf dem Niveauellipsoid aufliegende, rotationssymmetrische Kugelschale (schräffiert) bzw. eine horizontale Platte (dunkelgrau) der Dicke h_{topo} (unmaßstäblich; nach Jung 1961)



$$\delta g_B = 2 \pi G \rho h_{\text{topo}} \left[1 - \frac{(r_E + h) \cos(\Theta) - r_E}{\sqrt{(r_E + h)^2 + r_E^2 - 2(r_E + h)r_E \cos(\Theta)}} \right]. \quad (3.54)$$

Hierbei ist Θ der halbe Öffnungswinkel des die Kugelschale begrenzenden Kegels mit Spitze im Erdmittelpunkt (Abb. 3.16). Insbesondere ergibt sich für eine geschlossene Kugelschale ($\Theta = \pi$): $\delta g_B = 4 \pi G \rho h_{\text{topo}}$. Der Krümmungsradius der Kugelschale wird durch

$$r_s \approx r_\Theta = r_E \Theta = r_E \arccos \left(\frac{r_E}{r_E + h_{\text{topo}}} \right) \approx \sqrt{2 r_E h_{\text{topo}}} \quad (3.55)$$

angenähert, da einerseits der Winkel Θ klein und andererseits $h \ll r_E$ ist.

Die Bouguer-Reduktion wird für Höhen oberhalb des Niveauellipsoids abgezogen, für Höhen unterhalb des Bezugsniveaus addiert.

Mit $\cos(\theta) = (r_E + h_{\text{topo}})/(r_E + h_{\text{topo}} + d)$ folgt für die Absenkung d der Oberfläche der Kugelschale relativ zur Horizontalen am Punkt P: $d = (r_E + h_{\text{topo}})/\cos(\theta) - (r_E + h_{\text{topo}}) = (r_E + h_{\text{topo}})(1 - \cos(\theta))/\cos(\theta)$. Mit einer Potenzreihenentwicklung des Kosinus erhält man: $\cos(\theta) = \cos(r_d/r_E) \approx 1 - \frac{1}{2}(r_d/r_E)^2$ und damit für die Absenkung der Oberfläche der Kugelschale:

$$d = (r_E + h_{\text{topo}}) \frac{1 - \cos(\theta)}{\cos(\theta)} \approx \frac{r_d^2}{2 r_E}, \quad (3.56)$$

wobei $h_{\text{topo}} \ll r_E$ vernachlässigt wurde. Die Tab. 3.5 zeigt jeweils zusammengehörende Radien, Erstreckungen und Absenkungen.

Im einfachsten Fall wird die Kugelschale durch eine horizontale Kreisscheibe mit Dichte ρ und unendlichem Radius um den Messpunkt angenähert. Deren Schwere erhält man aus der Schwere eines Hohlzylindermantelstückes des Winkels φ der Höhe h , der Dichte ρ zwischen den Radien r_1 und r_2 :

Tab. 3.5 Plattendicken h_{topo} und zugehörige Krümmungsradien r_Θ sowie Krümmungsradien r_d und zugehörige vertikale Absenkungen d der Kugelschale einer sphärischen Bouguer-Reduktion

$h_{\text{topo}} \text{ (m)}$	$r_\Theta \text{ (km)}$	$r_d \text{ (km)}$	$d \text{ (m)}$
10	11,29	2	0,31
20	15,96	5	1,96
50	25,24	10	7,85
100	38,70	20	31,39
200	50,48	50	196,20
500	79,82	100	784,81
1000	112,88	200	3139,22
2000	159,64	500	19 620,15
5000	252,41		
10 000	356,96		

$$\begin{aligned} \delta g &= G \rho \int_0^\varphi d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \int_0^h \frac{z \, dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r \, dr = -G \rho \varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r}{(r^2 + h^2)^{1/2}} - 1 \right) dr \\ &= G \rho \varphi \left(\left(\sqrt{r_1^2 + h^2} - r_1 \right) - \left(\sqrt{r_2^2 + h^2} - r_2 \right) \right) \\ &= G \rho \varphi \left(r_2 - r_1 + \left(\sqrt{r_1^2 + h^2} \right) - \left(\sqrt{r_2^2 + h^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Setzt man für die Kreisscheibe $\varphi = 2\pi$, $h = h_{\text{topo}}$, $r_1 = 0$ und $r_2 = r$ ein, so erhält man:

$$\delta g = G \rho 2\pi \left[h_{\text{topo}} - \left(\sqrt{r^2 + h_{\text{topo}}^2} - r \right) \right].$$

Strebt r gegen unendlich, so strebt die runde Klammer gegen null, und man erhält die Bouguer-Reduktion δg_{B_A} für eine ebene horizontale Platte:

$$\delta g_{B_A} = 2\pi G \rho h_{\text{topo}} = 0,000\,419\,3 \rho h_{\text{topo}} \quad (\mu\text{m s}^{-2}). \quad (3.57)$$

Dies ist genau die Hälfte der sphärischen Reduktion nach Gl. 3.54 für eine geschlossene Kugelschale ($\Theta = \pi$) und identisch mit der für eine Halbkugelschale ($\Theta = \pi/2$).

Für marine Messdaten (oder solche von großen, tiefen Binnenseen) muss die geringere Dichte des Wassers bei der ebenen Bouguer-Reduktion für die Wasserschicht berücksichtigt werden. Da die gemessene Schwere den Effekt des Meerwassers bereits beinhaltet, muss bei der ebenen Bouguer-Reduktion für einen Ozean oder großen Binnensee der mittleren Tiefe h_W die um die Meer- bzw. Süßwasserdichte $\rho_W = 1\,030 \text{ kg m}^{-3}$ bzw. $\rho_W = 1\,000 \text{ kg m}^{-3}$ reduzierte Dichte $\rho' = \rho - \rho_W$ verwendet werden:

$$\delta g_{B_A} = 0,000\,419\,3 (\rho - \rho_W) h_W \quad (\mu\text{m s}^{-2}). \quad (3.58)$$

Mathematisch wird hierbei Wasser durch Gestein ersetzt. Dies bewirkt, dass die mit der Bouguer-Reduktion berechneten Bouguer-Anomalien (vgl. Abschn. 3.3.3.2) in den meisten Meeresgebieten stark positiv sind.

Vergleicht man Gl. 3.54 und 3.57, so erkennt man, dass der erste Term von δg_B identisch mit δg_{B_A} ist. Der zweite Term in Gl. 3.54 berücksichtigt zusätzlich die Krümmung des Niveauellipsoids mittels Korrekturen für die entsprechenden Überschuss- bzw. Defizitmassen. In einer alternativen Vorgehensweise erfolgen diese beiden Schritte getrennt: die Plattenreduktion Gl. 3.57 im ersten, als *Bullard A* bezeichneten Schritt, sodann deren Korrektur in Bezug auf eine Kugelschale im zweiten, als *Bullard B* bezeichneten (LaFehr 1991):

$$\begin{aligned}\delta g_{B_B} &= 2\pi G \rho (c_1 h_{topo} - c_2 (r_E + h_{topo})) \\ &= 0,000\,419\,3 \rho (c_1 h_{topo} - c_2 (r_E + h_{topo})) \quad (\mu\text{m s}^{-2}),\end{aligned}\quad (3.59)$$

wobei c_1 und c_2 dimensionslose Konstanten sind, die von r_E und vom Winkel Θ (Abb. 3.16) abhängen. Die Korrektur wird oft bis zu einer Kreisbogenlänge $r_\Theta = 166,7$ km vorgenommen, da dort in mittleren Breite der Korrekturterm δg_{B_B} minimal wird (Nabighian et al. 2005). Der erste Term von δg_B bzw. δg_{B_A} liefert den weitaus größten Beitrag zur Bouguer-Reduktion – für Stationen in 8 848 m Höhe auf dem Mt. Everest bzw. in 10 994 m Wassertiefe im Challenger-Tief des Marianen-Grabens würden sich Reduktionswerte von $9\,906 \mu\text{m s}^{-2}$ bzw. $-7\,560 \mu\text{m s}^{-2}$ ergeben. Dagegen variieren die Beiträge von δg_{B_B} für Höhen zwischen $0 \text{ m} \leq h_{topo} \leq 6\,300 \text{ m}$ lediglich zwischen $-47,7 \mu\text{m s}^{-2} \leq \delta g_{B_B} \leq 15,2 \mu\text{m s}^{-2}$, wobei sich das Maximum bei einer Höhe von 2 100 m ergibt (jeweils für eine Dichte von $\rho = 2\,670 \text{ kg m}^{-3}$; LaFehr 1991).

Von Satelliten oder Flugzeugen in großer Höhe aus gemessene Schweredaten enthalten zudem auch die Schwereanziehung der atmosphärischen Luftmassen. Daraus muss die Gravitationswirkung der zwischen Messpunkt und Referenzellipsoid gelegenen Luftsicht von der Normalschwere am Messpunkt abgezogen werden. Dies leistet die atmosphärische Reduktion δg_A ,

$$\delta g_A = 8,74 - 9,9 \times 10^{-4} h_{topo} + 3,56 \times 10^{-8} h_{topo}^2 \quad (\mu\text{m s}^{-2}), \quad (3.60)$$

für Höhen bis zu 10 km mit einer Genauigkeit von $0,1 \mu\text{m s}^{-2}$ (Hackney 2011). Der Beitrag dieser Reduktion liegt für einen Messpunkt in einer Höhe von 1 km bei $8,7 \mu\text{m s}^{-2}$, und damit deutlich über der Messgenauigkeit der Gravimeter von $0,05 \mu\text{m s}^{-2}$. Er ist jedoch klein, verglichen mit den Unsicherheiten der Geländereduktion von $\pm 20 \mu\text{m s}^{-2}$ bis zu $\pm 50 \mu\text{m s}^{-2}$, je nach Größe der Höhenunterschiede.

Freiluft- und Bouguer-Reduktion werden auch zu einer einzigen Höhenreduktion δg_H kombiniert, da beide mit der Höhe über dem Niveauellipsoid variieren. Sie wirken sich immer gegensinnig aus. Für die ebene Bouguer-Plattenreduktion δg_{B_A} ergibt sich

$$\delta g_H = \delta g_F - \delta g_{B_A} = (3,080 - 0,000\,419\,3 \rho) h_{topo} \quad (\mu\text{m s}^{-2}). \quad (3.61)$$

Setzt man $\rho = 2\,670 \text{ kg m}^{-3}$ als mittlere Dichte für Krustengesteine ein, so ergibt diese kombinierte Höhenreduktion einen Wert von:

$$\delta g_H = 1,97 h_{topo} \quad (\mu\text{m s}^{-2}). \quad (3.62)$$

Dieser Wert muss zum Messwert addiert oder von ihm subtrahiert werden, je nachdem, ob die Stationshöhe über oder unter dem Niveauellipsoid liegt.

Nach Anbringen aller vorgenannten Korrekturen und Reduktionen sollte die Bouguer-Anomalie nur noch mit lateralen Dichteunterschieden unterhalb der Bouguer-Platte korrelieren. Eine positive Bouguer-Anomalie deutet somit auf eine Einlagerung höherer Dichte hin, wie z. B. Erze, während umgekehrt eine negative Bouguer-Anomalie auf einer Einlagerung niedrigerer Dichte, wie z. B. Steinsalz oder Hohlräume hinweist. Bouguer-Anomalien in den Ozeanen sind in der Regel positiv, was darauf hindeutet, dass die Mantelgesteine unter der ozeanischen Kruste dichter sind als die darüberliegenden Krustengesteine. Die oft unter Gebirgsketten angetroffenen negativen Bouguer-Anomalien weisen dagegen darauf hin, dass deren Gesteine weniger dicht sind als im umgebenden Mantel. Dies steht im Zusammenhang mit den überwiegend aus sauren und geringer dichten Gesteinen wie Graniten und Gneisen bestehenden Gebirgwurzeln.

3.3.2 Isostasie

Isostatische Kompensation ist ein wichtiges Konzept für die Interpretation regionaler Anomalien. Sie beschreibt den Ausgleich des Gewichts von Gebirgen geringerer Dichte im dichten Mantel. Konkret bedeutet isostatische Kompensation, dass das flächennormierte Gewicht von auf einer Ausgleichsfläche ruhenden Gesteinssäule überall gleich ist ([Abb. 3.17](#)).

Dies kann erreicht werden, indem beispielsweise ein Gebirge niedrigerer Dichte mit seiner Wurzel in den dichten Mantel eintaucht – vergleichbar einem im Meerwasser schwimmenden Eisberg (Airy-Modell). Alternativ wird dieser Ausgleich erreicht, indem die Dichte des Gebirges proportional zu seiner Höhe abnimmt (Pratt Modell)¹⁶. Beide Modelle sind vorstellbar, auch Mischformen sind möglich. Ganz allgemein gilt, dass im Fall eines vollständig von der darunterliegenden Platte getragenen Gebirges die Bouguer-Anomalie über das Gebirge hinweg überall identisch verschwinden würde. Die zugehörige Freiluftanomalie würde jedoch stark mit der Topografie korrelieren ([Abb. 3.18a](#)).

¹⁶Diese zwei Isostasie-Modelle sind nach den beiden britischen Forschern benannt, die sie unabhängig voneinander im Jahr 1855 publiziert hatten: George Bidell Airy (1801–1892) war *astronomer royal* und für 45 Jahre Direktor des Observatoriums in Greenwich. John Henry Pratt (1809–1871) war ein in Indien tätiger anglikanischer Geistlicher und Mathematiker, der zur Erklärung der von ihm bei trigonometrischen Messungen erkannten Lotabweichung durch den Himalaya postulierte, dass die Dichte der Erdkruste im Himalaya geringer sei als in der vorgelagerten Ebene.

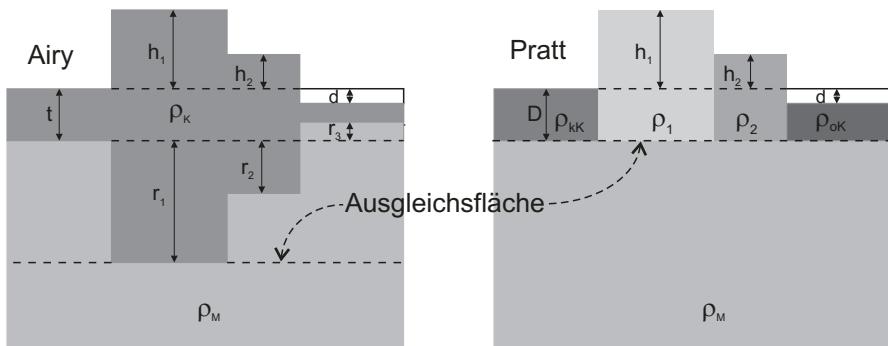


Abb. 3.17 Isostasiemodelle nach Airy und Pratt; ρ_M ist die Manteldichte; ρ_K bzw. ρ_{KK} und ρ_{oK} sind die Dichten der Kruste bzw. der kontinentalen und ozeanischen Kruste; t und D sind die Krustenmächtigkeit, d die Wassertiefe über der ozeanischen Kruste, h_1 und h_2 die Höhen der Topografie; r_1 , r_2 und r_3 bzw. ρ_1 und ρ_2 sind die Tiefen der Gebirgswurzeln (Airy) bzw. die Gebirgsdichten (Pratt) (Clauser 2016)

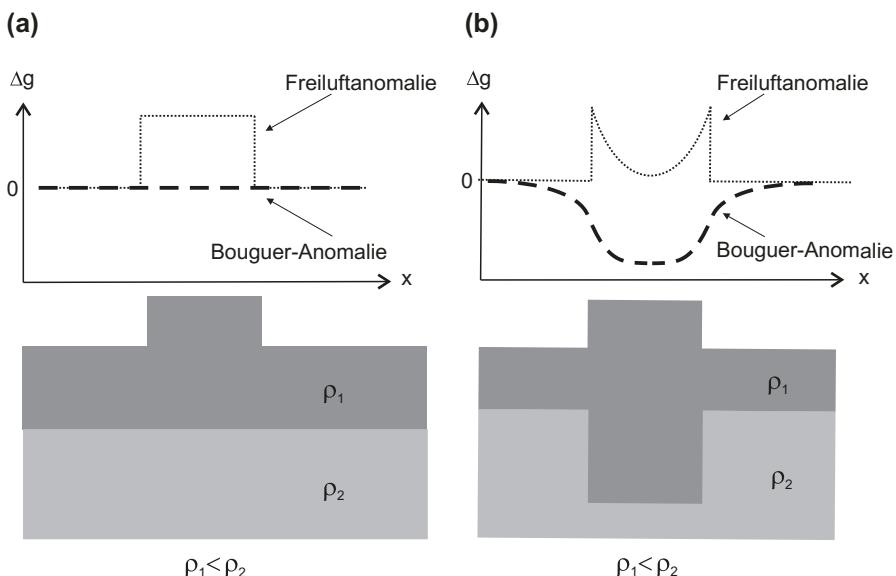


Abb. 3.18 Idealisierter Verlauf (weil scharfkantige Verläufe in Wirklichkeit nicht beobachtet werden) der Freiluft- (· · · · ·) und Bouguer-Anomalien (— · — · —) für ein (a) isostatisch unzureichendes Gebirge ohne Wurzel und (b) isostatisch ausgeglichenes Gebirge mit Wurzel (Clauser 2016)

Dies ist z. B. annähernd für den Harz der Fall. Dagegen besitzen Gebirge mit einer in den Mantel reichenden Wurzel ausgeprägte negative Bouguer-Anomalien und nur an ihren Rändern positive Freiluftanomalien (Abb. 3.18b). Ihr Gewicht ist weitgehend isostatisch kompensiert – die Alpen, Anden, Rocky Mountains und der Himalaya bilden hierfür eindrucksvolle Beispiele.

3.3.3 Darstellung der reduzierten Schwerewerte

In der Geophysik wird die Differenz Δg_P zwischen dem am Messpunkt P auf der Höhe h und geodätischen Breite ϕ aufgezeichneten Messwert g_P und dem dortigen Wert $\gamma_P(h, \phi)$ der Normalschwere

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_P(h, \phi) \quad (3.63)$$

als Schwereanomalie bezeichnet¹⁷. Zu ihrer Berechnung wird der mit der Höhe h und geodätischen Breite ϕ variierende Wert der Normalschwere $\gamma_P(h, \phi)$ am Messpunkt P mit Hilfe der Normalschwere γ_0 auf dem Niveaumodell (GRS80 bzw. WGS84) sowie einer Anzahl von Reduktionen bestimmt:

$$\gamma_P(h, \phi) = \gamma_0 - \delta g_F - \delta g_T + \delta g_B - g_A. \quad (3.64)$$

Durch diese werden die Messwerte auf ein einheitliches Niveau, eine ebene Topografie und einheitliche mittlere Krustendichte reduziert. Im Einzelnen berücksichtigt die Freiluftreduktion δg_F den Einfluss unterschiedlicher Messpunkthöhen im Schwerefeld der Erde auf die gemessene Schwerebeschleunigung. Die Geländereduktion δg_T ebnnet sodann die Topografie rechnerisch ein. Hierzu bereinigt sie den Messwert am Punkt P von Schwerebeschleunigungen, die durch Massenüberschüsse bzw. -defizite ober- bzw. unterhalb des Messpunkts in Form benachbarter Berge und Täler verursacht werden. Die Bouguer-Reduktion δg_B schließlich bereinigt die Schwerebeschleunigungen um den Beitrag der (durch die Geländereduktion eingeebneten) ebenen bzw. sphärischen Schicht zwischen Mess- und Bezugsniveau. Früher war Letzteres meist das Geoid (bzw. NN), seit der Verfügbarkeit hochgenauer GPS-Höhendaten ist dies jedoch das Niveaumodell. Bei Messungen von Flugzeugen oder aus dem Weltall berücksichtigt die atmosphärische Reduktion δg_A die Schwereanziehung durch die zwischen Bezugshorizont und Messpunkt gelegene Luftsicht. Diese Reduktion ist zwar bei Satellitendaten prinzipiell erforderlich, da die aus ihnen bestimmte Normalschwere die Schwereanziehung der atmosphärischen Luftmassen beinhaltet. Sie erbringt aber häufig keinen signifikanten Beitrag.

Nach Anbringen der erforderlichen Reduktionen werden die Schwerebeschleunigungen in Form zweier Anomalien dargestellt: Nach der Freiluft- (und manchmal auch der atmosphärischen) Reduktion als Freiluftanomalie Δg_F und nach den Gelände- und Bouguer-Reduktionen δg_T und δg_B als Bouguer-Anomalie Δg_B .

Moderne Tabellenkalkulations-Programme (z. B. Holom und Oldow 2007) oder Java-Programme (z. B. Schmidt 2005) fassen die beschriebenen Korrekturen und Reduktionsschritte für gängige Gravimetertypen zusammen. In Verbindung mit den GPS-Höhendaten erleichtert dies die Ermittlung der Freiluft- und Bouguer-Anomalien erheblich.

¹⁷In der Geodäsie wird Δg_P als Schwerestörung bezeichnet.

3.3.3.1 Freiluftanomalie Δg_F

Die Freiluftanomalie Δg_F ist die Differenz zwischen der um die Driftkorrektur δg_D und ggf. Eötvös-Korrektur $\delta g_{\text{Eötvös}}$ bereinigten vertikalen Schwerebeschleunigung g_P und der Normalschwere $\gamma_P(h, \phi)$ am Messpunkt P (Abb. 3.11). Diese wird hierbei entweder nach Gl. 3.37 berechnet oder aus der um den Betrag der höhen- und breitenabhängigen Freiluftreduktion $\delta g_F(h, \phi)$ (Gl. 3.49) verminderten Normalschwere γ :

$$\Delta g_F(h_{\text{topo}}, \phi) = g_P(h_{\text{topo}}, \phi) - \gamma_P(h_{\text{topo}}, \phi) = g_P(h_{\text{topo}}, \phi) - (\gamma_0 - \delta g_F(h_{\text{topo}}, \phi)). \quad (3.65)$$

Bevor hinreichend genaue GPS-Positionsbestimmungen von Punkten auf der Erdoberfläche möglich waren, erfolgte die Freiluftreduktion δg_F anders als in Gl. 3.65 mit orthometrischen Höhen H_{topo} . Die Freiluftanomalie ist hierbei definiert als Differenz der am Punkt P gemessenen und auf das Geoid reduzierten Schwere g_{P_0} und der Normalschwere auf dem Niveaumipsoid γ_0 (Abb. 3.12):

$$\Delta g_F(H_{\text{topo}}, \phi) = g_{P_0} - \gamma_0 = g_P - (\gamma_0 - \delta g_F(H_{\text{topo}}, \phi)). \quad (3.66)$$

Der Unterschied zwischen Gl. 3.65 und 3.66 liegt darin, dass Letztere zur Differenzenbildung zum Messwert am Punkt P die Normalschwere auf dem Geoid und nicht am Punkt P verwendet sowie in den unterschiedlichen Bezugshorizonten für die Höhenangabe: h_{topo} bezieht sich auf das Niveaumipsoid, H_{topo} dagegen auf das Geoid. Der erste Aspekt ist ein prinzipieller Unterschied, der allerdings wegen der maximalen Höhenschwankungen des Geoids von ca. ± 100 m einen Fehler von maximal $\pm 300 \mu\text{m s}^{-2}$ verursachen kann. Dies wird als indirekter Effekt bezeichnet und muss ggf. bei der Verwendung von Gl. 3.66 durch eine entsprechende Korrektur beseitigt werden. Bei kleinräumigen geophysikalischen Erkundungen von Lagerstätten fällt dieser Fehler dagegen nicht ins Gewicht: Geoidschwankungen dieser Größenordnung besitzen große Wellenzahlen und wirken sich daher bei der Ermittlung relativer Anomalien durch Differenzenbildung nicht aus. Deshalb könnte bei solchen Untersuchungen ggf. auch noch Gl. 3.66 verwendet werden. Doch mit der Verfügbarkeit hochgenauer GPS-Höhendaten gibt es eigentlich keinen sachlichen Grund mehr, statt Gl. 3.65 und ellipsoidischer GPS-Höhen die Gl. 3.66 und orthometrische Höhen zu verwenden.

3.3.3.2 Bouguer-Anomalie Δg_B

Die Bouguer-Anomalie Δg_B bringt an der Freiluftanomalie zusätzlich die Gelände-, Bouguer- und ggf. atmosphärischen Reduktionen δg_T , δg_B und δg_A an:

$$\begin{aligned} \Delta g_B(h_{\text{topo}}, \phi) &= \Delta g_F + \delta g_T(h_{\text{topo}}) - \delta g_B(h_{\text{topo}}) - \delta g_A(h_{\text{topo}}) \\ &= g_P(h_{\text{topo}}, \phi) - (\gamma_P(h_{\text{topo}}, \phi) - \delta g_F(h_{\text{topo}}, \phi) - \delta g_T(h_{\text{topo}}) \\ &\quad + \delta g_B(h_{\text{topo}}) + \delta g_A(h_{\text{topo}})). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dies bereinigt die Messwerte um die Gravitationswirkung der nach Anbringen der Geländereduktion zwischen Messpunkthöhe dem Referenzellipsoid gelegenen

ebenen bzw. sphärischen Krustenplatte sowie um jene einer ggf. zwischen Messpunktthöhe und Referenzellipsoid befindlichen Luftsicht. Die Bouguer-Anomalie wird somit nur noch durch Dichteunterschiede unterhalb der Bouguer-Platte bestimmt. Diese können in der Lagerstättenerkundung beispielsweise durch Erzlägerstätten oder Salzstöße bewirkt werden oder durch eine variable Topografie des Grundgebirges unter einem Sedimentbecken.

3.3.3.3 Isostatische Anomalie Δg_i :

Mit Ausnahme geodynamisch aktiver Zonen herrscht in der Lithosphäre ein isostatisches Gleichgewicht. Somit wirkt in der Ausgleichstiefe im Erdmantel überall derselbe Auflastdruck. Dieser Gleichgewichtszustand wird durch die plastische Asthenosphäre herbeigeführt. Wo dies nicht der Fall ist, wird durch eine isostatische Anomalie Δg_i angezeigt. Diese ist die Differenz zwischen der Bouguer-Anomalie Δg_B und der Anomalie einer Struktur im isostatischen Gleichgewicht Δg_G :

$$\Delta g_i = \Delta g_B - \Delta g_G. \quad (3.68)$$

Negative isostatische Anomalien entstehen, wenn der Betrag der Bouguer-Anomalie größer ist als jener der berechneten Anomalie – man nennt sie dann überkompensiert. Dagegen entstehen positive isostatische Anomalien, wenn der Betrag der Bouguer-Anomalie kleiner ist als jener der berechneten Anomalie – man nennt sie dann unterkompensiert. Nur im isostatischen Gleichgewicht verschwindet Δg_i gänzlich.

Man kann Δg_G auf unterschiedliche Weise bestimmen, z. B. als auf große Wellenzahlen beschränkter Teil einer Kugelfunktionsentwicklung des Schwerefelds, oder sie für eine vorgegebene Topografie, Geometrie sowie Dichte der Kruste nach einem isostatischen Modell berechnen, z. B. nach Airy oder Pratt (vgl. z. B. Clauser 2016). Isostatischer Ausgleich erfolgt jedoch nicht rein lokal, sondern auch regional. Dabei werden „kleine“ Auflasten wie etwa Tiefseeberge und submarine Kuppen (*Guyots*), vulkanische Inselketten wie beispielsweise Hawaii oder kleine Gebirge wie der Harz von der unterlagernden Lithosphäre mitgetragen und regional teilweise kompensiert (Abb. 3.19).

Unmittelbar unter der Auflast besteht somit kein vollständiger isostatischer Ausgleich. Dieses Modell der regionalen Kompenstation wurde zuerst vom niederländischen Geophysiker und Geodäten Felix Andries Vening-Meinesz (1939) vorgeschlagen. Neigungsmessungen in der Nähe von wurzelfreien Gebirgen weisen demnach eine deutliche Lotabweichung in Richtung des Gebirges mit seiner zusätzlichen Masse auf. Ein klassisches Beispiel ist wiederum der Harz. Auf einem Profil von Braunschweig bis in den Harz hinein treten Lotabweichungen von bis zu 10 Bogensekunden auf. Entsprechend hebt sich das Geoid nach Süden über den Harz hinweg um rund ein bis zwei Meter (Abb. 3.20a). Dies geht mit einer starken positiven Freiluftanomalie von etwa $400 \mu\text{m s}^{-2}$ einher (Abb. 3.20b). Beides sind Anzeichen dafür, dass der Harz keine Gebirgswurzel besitzt, welche z. B. mit ihrer geringeren Dichte einen isostatischen Ausgleich für seine auf der Kruste aufliegenden Überschussmassen bewirken würde.

Abb. 3.19 Isostatisch nicht ausgeglichenes Gebirge und regionaler isostatischer Ausgleich über die Biegesteifigkeit der Lithosphäre

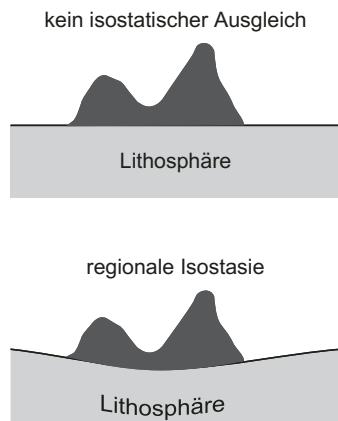
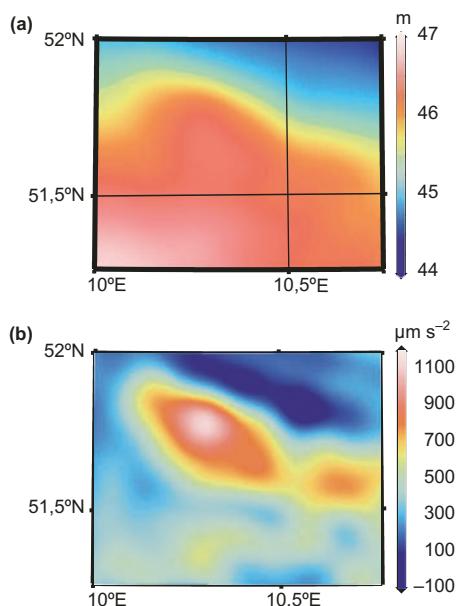


Abb. 3.20 Geoid (a) und Freiluftanomalie (b) im Gebiet des Harzes, berechnet relativ zur Normalschwere des WGS84-Niveauellipsoids aus Kugelfunktionsentwicklungen des Modells EGM2008 bis zum Grad $\ell = 2190$ und zur Ordnung $m = 2159$ (EGM2008 Development Team 2013). Hierfür wurden die Schwere- und Höhendaten der um den Einfluss der Gezeiten bereinigten Versionen der Modelle auf Gitter mit 0,2 bzw. 0,1 Bogenminuten interpoliert, was Gitterweiten von ca. 370 m bzw. 185 m entspricht (nach Clauser 2016)



Die folgenden beiden Beispiele illustrieren die Wirkung der unterschiedlichen Reduktionen und die Darstellung der Schweredaten in Form von Freiluft-, Bouguer- und isostatischen Anomalien. Das erste Beispiel zeigt die Topografie und das Schwerefeld der Ostalpen entlang des in den Jahren 1998 und 1999 aufgenommenen seismischen TRANSALP-Profil. Die Ergebnisse der Schweremessungen und ihrer Modellierung sind in Abb. 3.21 dargestellt.

Die Abb. 3.21a,b zeigen das Untersuchungsgebiet mit seiner Topografie und den Orten bzw. Profilen mit Messungen der vertikalen Schwerbeschleunigung. In den Abb. 3.21c,d sind die daraus berechneten Freiluft- und Bouguer-Anomalien Δg_F

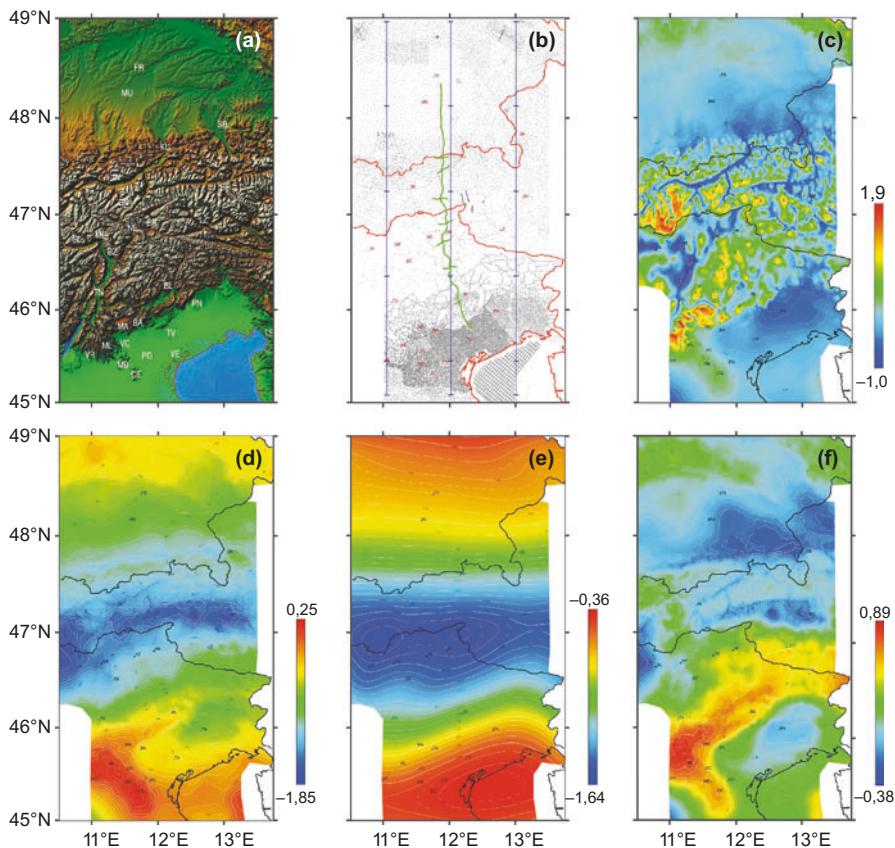


Abb. 3.21 Vertikale Schwerebeschleunigung und ihre Anomalien ($\mu\text{m s}^{-2}$) in den Ostalpen; (a) Topografie der Ostalpen; (b) Lage der kontinentalen Schwerestationen (Punkte), der marinen Schwereprofile (Raster) und des seismischen TRANSALP-Profil mit seinen Querprofilen (grüne Linien); (c) Freiluftanomalie Δg_F ; (d) Bouguer-Anomalie Δg_B ; (e) Für eine isostatisch ausgeglichen Gebirgswurzel nach Airy berechnetes Schwerefeld Δg_G ; (f) Isostatische Schwereanomalie $\Delta g_i = \Delta g - \Delta g_G$ bzgl. dem nach Airy für eine isostatisch ausgeglichen Gebirgswurzel berechneten Schwerefeld Δg_G (Clauser 2016) nach © Zanolla et al. 2006; Orte zur Orientierung – BA: Bassano del Grappa, BH: Bad Hofgastein, BL: Belluno, BN: Brenner, BR: Bruneck, BZ: Bozen, CE: Colli Euganei, FR: Freising, IN: Innsbruck, KU: Kufstein, LZ: Lienz, MA: Marosticano, MB: Monti Berici, ME: Meran, ML: Monti Lessini, MU: München, NE: Neustift, PD: Padua, PN: Pordenone, SB: Salzburg, SL: Schlanders, TN: Trient, TS: Triest, TV: Treviso, VE: Venedig, VC: Vicenza, VR: Verona)

und Δg_B dargestellt. Die Freiluftanomalie korreliert deutlich mit der Topografie, während die Bouguer-Anomalie deutliche Minima am Südrand des Molassebeckens und im Po-Becken sowie – sehr stark ausgeprägt – unter den Zentralalpen aufweist. Ein starkes Maximum markiert den Übergang zum Apennin. Abb. 3.21e zeigt die Anomalie Δg_G für eine Gebirgswurzel im (nach Airy) isostatischen Gleichgewicht, berechnet entsprechend der Topografie, einer aus der Seismik abgeleiteten

Struktur der Kruste sowie einem entsprechenden dreidimensionalen Dichtemodell. Schließlich zeigt Abb. 3.21f die nach Gl. 3.68 berechnete isostatische Anomalie Δg_i , welche eine – im Sinne des Airy-Modells – Unterkompensation der alpinen Gebirgswurzel sowie der sedimentären Molasse- und Po-Becken zeigt. Ebenso auffällig ist die Residualanomalie im Süden, im Gebiet der tertiären, venezianischen Vulkanprovinz, welche nur teilweise durch die dichten magmatischen Gesteine erklärt werden kann und zusätzlich tiefere Quellen erfordert, beispielsweise eine Hochlage der Kruste-Mantel-Grenze bzw. Mohorovičić-Diskontinuität („Moho“).

Das zweite Beispiel zeigt die Topografie und gemessene Schwere g_p in den zentralen Anden Südamerikas (Abb. 3.22a,b). Die in Abb. 3.22c dargestellte Normalschwere γ_0 weist – wie erwartet – eine deutliche Abnahme in Richtung des Äquators auf. Aufgrund der Hochgebirgstopografie ist der Beitrag der Freiluftreduktion δg_F (Abb. 3.22d) deutlich größer als jener der Bouguer-Reduktion δg_B (Abb. 3.22e). Daher ist auch die Freiluftanomalie Δg_F deutlich durch die Topografie bestimmt (Abb. 3.22g). Dagegen bildet die Bouguer-Anomalie Δg_B deutlich die geringer dichte Gebirgswurzel der Anden ab (Abb. 3.22h). Die in Abb. 3.22i dargestellte isostatische Anomalie Δg_i zeigt schließlich an, dass sich bei den Anden noch kein vollständiger isostatischer Ausgleich eingestellt hat, der die Gebirgsbildung steuernde Subduktionsprozess also noch andauert.

3.4 Bestimmung der Gesteinsdichte

Die Gelände- und die Bouguer-Plattenreduktion erfordern die Kenntnis einer mittleren Dichte für die berücksichtigten Krustenanteile. Diese ist zunächst häufig nur als Mittelwert von Krustengesteinen ($\bar{\rho}_K = 2\,670 \text{ kg m}^{-3}$) bekannt. Wie bei vielen anderen physikalischen Eigenschaften besteht auch bei der Dichte kein direkter Zusammenhang zwischen der Gesteinsart und einer bestimmten Eigenschaft. Daher geben nach Gesteinsarten zusammengestellte Tabellen auch nur einen groben Überblick (Abb. 3.23). Ihre große Streubreite weist darauf hin, dass andere Faktoren als die Zugehörigkeit zu einer Gesteinsart diese Eigenschaft ganz wesentlich beeinflussen. Im Fall der Dichte ist dies neben der mineralogischen Zusammensetzung vor allem die Porosität. Der Porenraum, so klein er in der Regel gegenüber dem festen Mineralgerüst auch sein mag, beeinflusst die Gesamtdichte stark aufgrund der niedrigen Dichte seiner Saturanden (Luft: $1,3 \text{ kg m}^{-3}$; Wasser: $1\,000 \text{ kg m}^{-3}$; Erdöl: $600 \text{ kg m}^{-3} – 900 \text{ kg m}^{-3}$).

3.4.1 Labormessungen

Unter Berücksichtigung von Aspekten der Repräsentativität und Frische (bzw. Verwitterung) ist es daher meist sinnvoll, die Dichte an einer Anzahl von Proben im Labor zu bestimmen. Idealerweise stammen diese aus Bohrkernen, zumindest aber aus Handstücken, die man mit Hilfe einer geologischen Karte an möglichst unverwitterten Aufschlüssen gewinnt. Die Messung der Dichte erfolgt im einfachsten Fall

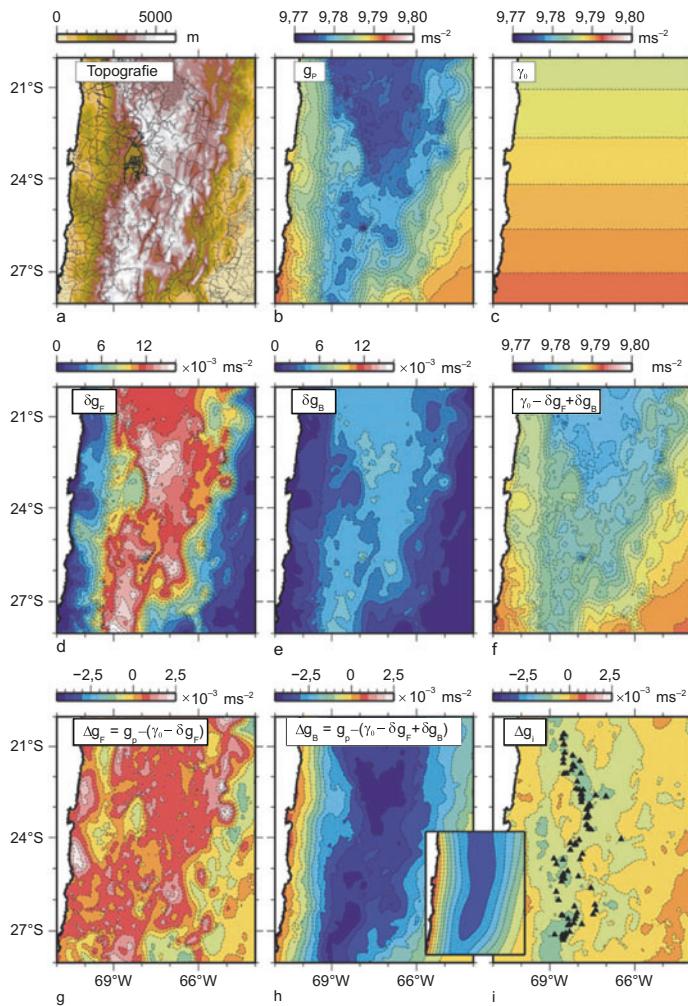
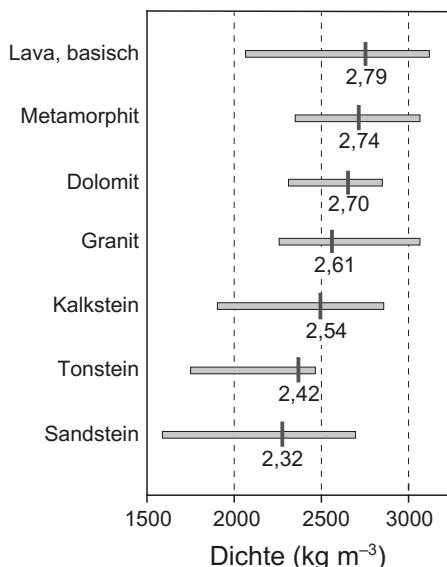


Abb. 3.22 Vertikale Schwerebeschleunigung und ihre Anomalien in den zentralen Anden Südamerikas (nach Schmidt und Götz 2006 in Hackney 2011); (a) Topografie aus dem digitalen Geländemodell GTOPO30³⁸ – Punkte bezeichnen die Orte von Schweremessungen, für die die unterschiedlichen Reduktionen berechnet und auf ein Gitter der Weite von einer Bogenminute interpoliert wurden; (b) gemessene vertikale Schwerebeschleunigung g_p ; (c) Normalschwere γ_0 auf der Oberfläche des GRS80 Referenzellipsoids – man erkennt deutlich die Abhängigkeit von der Breite; (d) Freiluftreduktion δg_p – berücksichtigt die Abnahme der Normalschwere mit der Messpunktthöhe über dem Referenzellipsoid; (e) Bouguer-Reduktion δg_B – berücksichtigt die Schwerebeschleunigung durch Gesteinsmassen zwischen Messpunkt und Referenzellipsoid; (f) für die Ermittlung der in Teilbild h gezeigten Bouguer-Anomalie Δg_B von der gemessenen Schwere abzuziehender Reduktionswert; (g) Freiluferomalie Δg_F ; (h) Bouguer-Anomalie Δg_B (Differenz der Teilbilder b und f) – beinhaltet keine Geländereduktion, deren Effekt auf diesem Maßstab nicht sichtbar wäre; (i) isostatische Anomalie Δg_i , als Differenz aus Bouguer-Anomalie und einem isostatischen Regionalfeld (Nebenbild zwischen den Teilbildern h und i), berechnet unter der Annahme einer regionalen isostatischen Kompensation der Anden-Topografie mit einer elastischen Dicke von 20 km (Dreiecke: aktive Vulkane)

Abb. 3.23 Typische Mittelwerte und Schwankungsbreiten der Dichte von kristallinen und Sedimentgesteinen (nach Lowrie 2007; Daten: Dobrin und Savit 1990)



nach der archimedischen Auftriebsmethode. Bei dieser wird zunächst die luftgesättigte Gesteinsprobe in Luft und dann die wassergesättigte Probe in Wasser gewogen. Die Dichte ρ des Gesteins ergibt sich danach aus den in Luft bzw. Wasser bestimmten Gewichten W_L und W_W , den Dichten von Mineralgerüst ρ_M und Wasser ρ_W , dem Probenvolumen V sowie der Porosität ϕ :

$$W_L = \rho_M (1 - \phi) V g; W_W = (\rho_M - \rho_W) (1 - \phi) V g. \quad (3.69)$$

Mit $W_L - W_W = \rho_W (1 - \phi) \cdot V g$ erhält man die Reindichte des Mineralgerüsts (*skeleton density*) aus:

$$\rho_M = \frac{\rho_W W_L}{W_L - W_W}. \quad (3.70)$$

Sie ist auf das Volumen des Mineralgerüsts $(1 - \phi) \cdot V$ bezogen, im Gegensatz zur Rohdichte (*bulk density*), die – auf das Gesamtvolumen bezogen – auch den Porenanteil enthält.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Dichte bietet die Pyknometrie. Dabei werden Roh- bzw. Reindichte jeweils aus dem Verhältnis von Probenmasse und Gesamtvolumen V_{gesamt} bzw. Volumen des Mineralgerüsts $V_{\text{gesamt}} - V_{\text{Hohlraum}} = (1 - \phi) \cdot V_{\text{gesamt}}$ bestimmt. Das Hohlraumvolumen wird hierbei mit einem Gaspyknometer auf Grundlage der allgemeinen Gasgleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, wo p der Druck ist, n die Stoffmenge, R die ideale Gaskonstante und T die Temperatur. In der Gaspyknometrie erfüllt zunächst ein ideales Gas unter dem Druck p_1 eine Probenkammer mit dem Volumen V_1 sowie den Hohlraum der darin befindlichen Gesteinsprobe. Sodann wird diese Probenkammer bei konstanter Temperatur mit einer zweiten,

evakuierten Kammer mit dem Volumen V_2 verbunden. Infolge dieser isothermalen Expansion des Gases sinkt sein Druck auf den Wert p_2 . Da die Temperatur konstant gehalten wird, sind dies auch die Produkte der Drücke und Volumina. Somit gilt: $p_1 (V_1 - V_{\text{gesamt}} + V_{\text{Hohlraum}}) = p_2 (V_1 - V_{\text{gesamt}} + V_{\text{Hohlraum}} + V_2)$. Auflösen nach dem Hohlraumvolumen ergibt:

$$V_{\text{Hohlraum}} = V_{\text{gesamt}} - V_1 + V_2 \frac{p_2}{p_1 - p_2}. \quad (3.71)$$

Das Gesamtvolumen V_{gesamt} erhält man mit Hilfe der Feststoffpyknometrie, bei der die Gesteinsprobe in einer Probenkammer bekannten Volumens in ein feinkörniges Pulver eingebettet wird. Die Differenz der Volumina von Probenkammer und Feststoffpulver ergibt das Gesamtvolumen der Gesteinsprobe. Schließlich ergibt der Quotient aus der durch Wägung bestimmten Probenmasse und den beiden Volumina deren Roh- bzw. Reindichte.

3.4.2 γ - γ -Messungen

Über das bisher Gesagte hinaus kann die Dichte der Gesteine im Labor oder in Bohrungen durch Messung der Streuung von Gammastrahlung bestimmt werden. Die Messung beruht auf dem Prinzip der Compton-Streuung von γ -Strahlen an den vergleichsweise schwach gebundenen Elektronen der äußeren Hülle. Im Jahr 1922 hatte der US-amerikanische Physiker Arthur H. Compton beobachtet, dass die Wellenlänge von an diesen Elektronen gestreuter Strahlung zunimmt. Dieses Phänomen kann nur verstanden werden, wenn man den Partikelcharakter der Strahlung heranzieht und sie als Strom masseloser Teilchen gequantelter Energie, der Gammaquanten bzw. Photonen betrachtet. Die Energie E eines Photons ist umgekehrt proportional zu seiner Wellenlänge: $E = h\nu = hc/\lambda$, wo h das plancksche Wirkungsquantum ist, c die Lichtgeschwindigkeit, ν die Frequenz und $\lambda = c/\nu$ die Wellenlänge. Bei einem Zusammenstoß eines Photons mit einem Elektron wird Energie vom Photon auf das Elektron übertragen, etwa wie beim Zusammenprall zweier Billardkugeln. Das gestreute Photon besitzt danach geringere Energie und folglich eine größere Wellenlänge. Auf dieser Grundlage kann die sog. γ -Dichte im Labor an Kernen (Abb. 3.24) oder in Bohrungen mit der Dichte- bzw. γ - γ -Bohrlochsonde bestimmt werden.

Die Bohrlochsonden enthalten eine radioaktive γ -Quelle (meist ^{137}Cs), deren Strahlung aus einem engen Schlitz austritt (Abb. 3.25a). Die Photonen dieser Strahlung werden von den äußeren Elektronen der Atome in Bohrlochnähe gestreut. Ein Szintillationszähler misst die Stärke der zurückgestreuten Strahlung, die ebenfalls nur durch einen engen Schlitz in den Zähler eintreten kann. Bei der Bohrlochsonde sitzt der Zähler etwa 45 cm–60 cm über der Quelle. Eine Bleiabschirmung zwischen Quelle und Zähler sowie das Anpressen der Sonde an die Bohrlochwand durch einen Federbügel stellen sicher, dass nur die aus der Gesteinsformation zurückgestreute Strahlung gezählt wird. Die Intensität I nach Durchstrahlen eines Absorbers der Dicke x folgt aus:

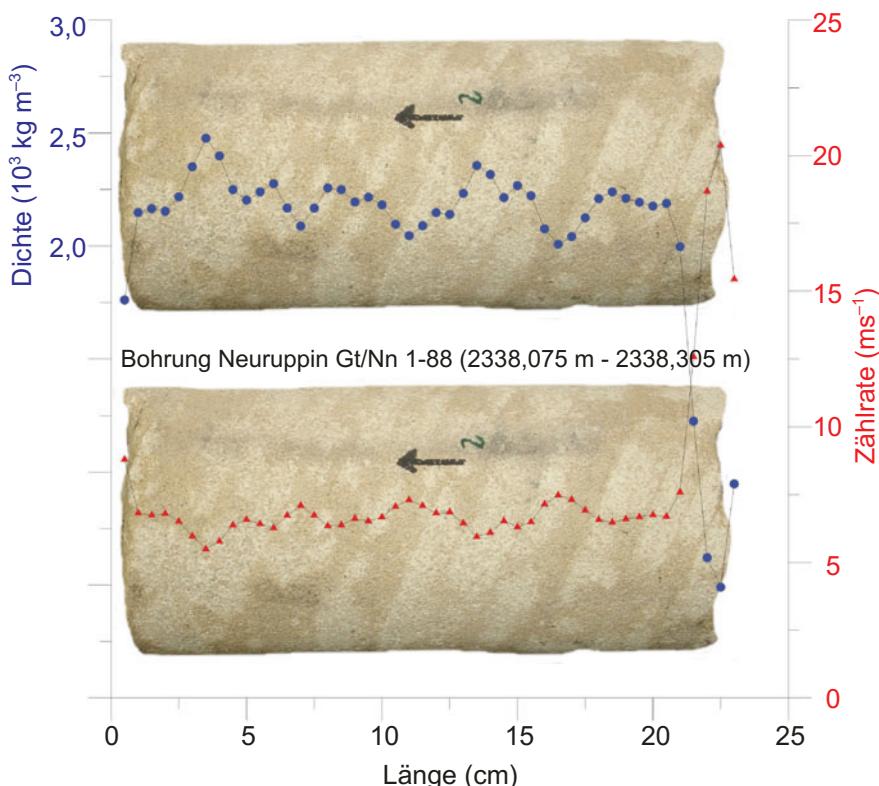


Abb. 3.24 Bestimmung der γ -Dichte an einem Bohrkern aus der Zählrate der zurück gestreuten γ -Strahlung

$$I(x) = I_0 e^{-\mu_C x}, \quad (3.72)$$

wobei I_0 die Intensität vor Durchstrahlen des Absorbers ist und μ_C der Compton-Absorptionskoeffizient. Dieser ist proportional zur Elektronendichte und damit zur Kernladungszahl Z : $\mu_C \propto Z$. Dagegen ist die Gesteinsdichte ρ proportional zur Atommassenzahl A : $\rho \propto A$. Aus $\mu_C/Z \propto \rho/A$ folgt schließlich: $\mu_C \propto \rho (Z/A)$.

Kalibrierte γ - γ -Logs liefern die Rohdichte des Gesteins in den ersten 15 cm der Formation, in welche die γ -Strahlung eindringt. Hieraus kann unter Kenntnis der Reindichten des Korngerüsts und des Porenfluids (Gas, Wasser, Erdöl) unter Zugrundelegung eines Mischungsgesetzes die Porosität berechnet werden. Tab. 3.6 führt die Mischungsgesetze für einige gängige Mehrphasen-Modelle auf.

Abb. 3.24 zeigt eine entsprechende Dichtemessung an einem Sandsteinkern, dessen Porenraum mit dem dichteren Mineral Anhydrit verfüllt ist, und Abb. 3.25b vergleicht ein schematisches γ -Log, das in Hinsicht auf die Gesteinsdichte kalibriert wurde, mit der korrespondierenden lithologischen Säule.

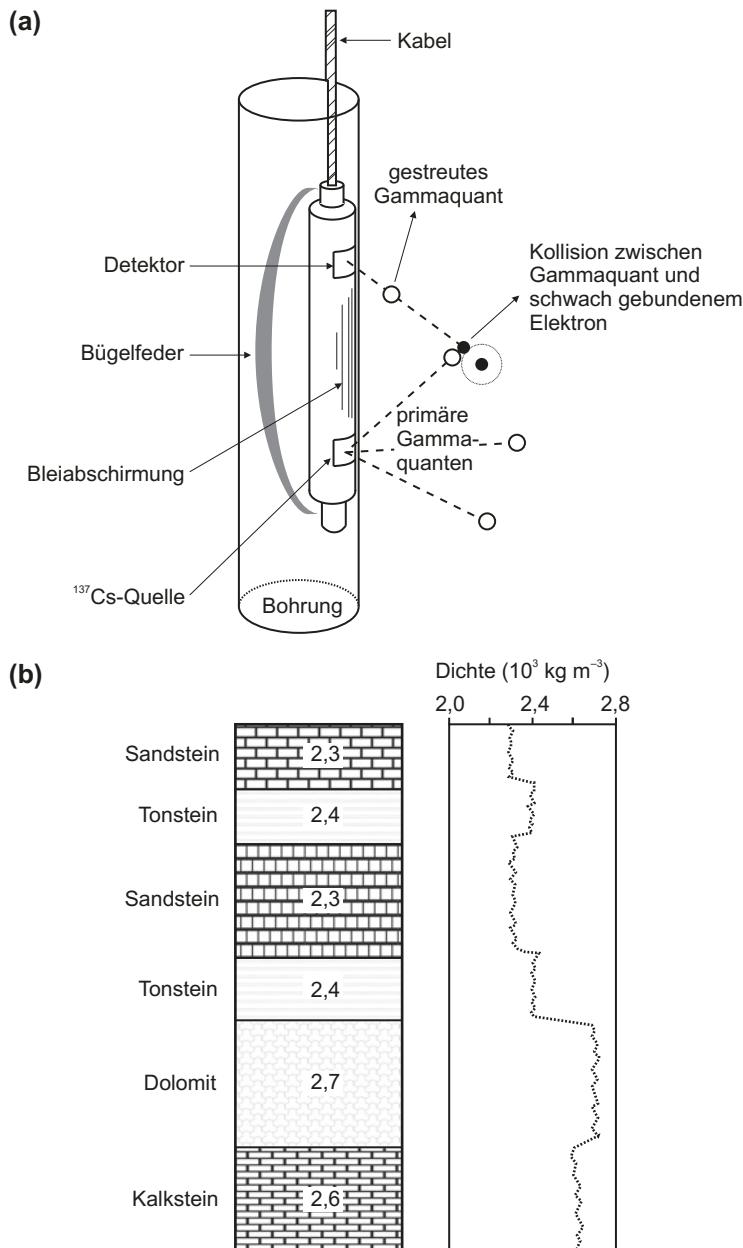


Abb. 3.25 γ - γ -Dichtemessung in einer Bohrung; (a) Schematischer Aufbau der Bohrlochsonde; (b) Lithologische Säule mit Gesteinsdichten in 10^3 kg m^{-3} und zugehöriges kalibriertes Gammadichte-Log (nach Lowrie 2007)

Tab. 3.6 Mischungsgesetze für verschiedene Mehrphasen-Modelle mit Relativanteilen n_i ($1 = \sum n_i$) am Gesamtvolumen (ϕ : Porosität)

Mittelwert	Formel	N=2; Wasser (ϕ) und Gesteins-Matrix (1- ϕ)	Physikalisches Analogon
arithmetisch	$\rho_{ari} = \sum_{i=1}^N n_i \rho_i$	$\rho_{ari} = \phi \rho_w + (1 - \phi) \rho_M$	Reihenschaltung
harmonisch	$\rho_{har} = \left(\sum_{n=1}^N \frac{n_i}{\rho_i} \right)^{-1}$	$\rho_{har} = \frac{\rho_w \rho_M}{\phi \rho_M + (1 - \phi) \rho_w}$	Parallelschaltung
geometrisch	$\rho_{geo} = \prod_{i=1}^N \rho_i^{n_i}$	$\rho_{geo} = \rho_w^\phi \rho_M^{(1-\phi)}$	in Flüssigkeit suspendierte Körner
Quadratwurzel	$\rho_{\sqrt{}} = \left(\sum_{i=1}^N n_i \sqrt{\rho_i} \right)^2$	$\rho_{\sqrt{}} = (\phi \sqrt{\rho_w} + (1 - \phi) \sqrt{\rho_M})^2$	Flüssigkeits-einschlüsse in fester Matrix

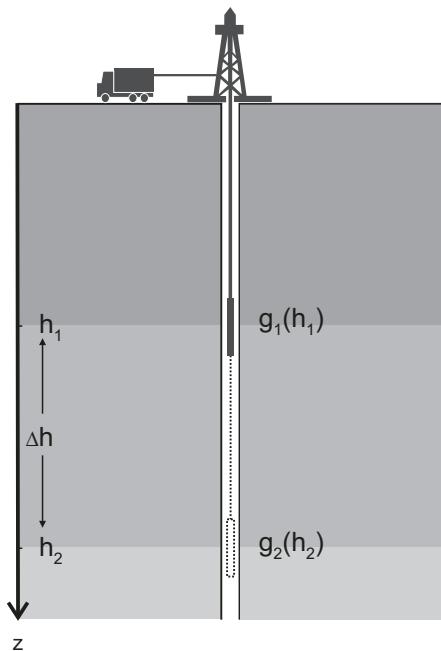
3.4.3 Schweremessungen in Bohrungen

Bohrlochgravimetrie ist eine weitere Methode, mit der die Formationsdichte in der Umgebung einer Bohrung bestimmt werden kann. Mit ihr sind wesentlich größere Eindringtiefen erreichbar als mit der γ - γ -Dichtemessung. Zur Bohrlochgravimetrie kommen an ein enges Bohrloch, erhöhte Drücke und Temperaturen angepasste Gravimeter zum Einsatz, z. B. ein LaCoste–Romberg-Gravimeter oder auf anderen Messprinzipien beruhende Geräte. Sie besitzen alle eine Auflösung von $0,1 \mu\text{m s}^{-2}$. Ihr Einsatz zur Bestimmung der Dichte aus Bohrlochmessungen beruht auf einer Anwendung der Höhenreduktion δg_H (Gl. 3.61), einer Kombination aus Freiluft- bzw. Bouguer-Plattenreduktion im Vollraum. Sind g_1 und g_2 die in einer Höhe h_1 bzw. h_2 über dem Referenzellipsoid gemessenen Schwerebeschleunigungen, so wird ihre Differenz durch die unterschiedlichen Messhöhen und das Material zwischen diesen verursacht (Abb. 3.26). Zunächst ist g_2 wegen der größeren Nähe zum Referenzellipsoid größer als g_1 , und zwar um den Betrag der Höhenreduktion δg_H (Abb. 3.26) für die auf der Höhe h_2 gemessene Schwere g_2 : $\delta g_H = (3,080 - 0,000\,419\,\rho) \Delta h$ ($\mu\text{m s}^{-2}$; ρ in kg m^{-3}), mit $\Delta h = h_1 - h_2$.

Zum anderen erfährt das Gravimeter aber auf dem Niveau h_2 eine nach oben gerichtete Bouguer-Anziehung durch die Massen zwischen den beiden Niveaus. Dies vermindert die auf der Höhe h_2 gemessene Schwere. Um dies auszugleichen, muss die auf der Höhe h_2 gemessene Schwere g_2 entsprechend (Gl. 3.57) um $\delta g_{BA} = 0,000\,419\,\rho \Delta h$ ($\mu\text{m s}^{-2}$; ρ in kg m^{-3}) vermehrt werden. Die Differenz $\Delta g = g_1 - g_2$ der beiden reduzierten Schwerewerte g_1 und g_2 ist dann nach Reduktion auf die Höhe h_2 :

$$\begin{aligned} \Delta g &= (3,080 - 0,000\,419\,\rho) \Delta h - 0,000\,419\,\rho \Delta h \\ &= (3,080 - 0,000\,838\,\rho) \Delta h \quad (\mu\text{m s}^{-2}); \quad \rho \text{ in } \text{kg m}^{-3}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Abb. 3.26 Zur Dichtebestimmung mit Hilfe der Bohrlochgravimetrie



Hieraus ergibt sich die Rohdichte des Gesteinspakets nach Umformung zu:

$$\rho = 3\,675,4 - 1\,193,3 \frac{\Delta g}{\Delta h} \quad (\text{kg m}^{-3}); \quad \Delta g \text{ in } \mu\text{m s}^{-2}.$$

Wird die Schwere auf $0,1 \mu\text{m s}^{-2}$ genau über ein Tiefenintervall von $\Delta h = 10 \text{ m}$ gemessen, so kann die Dichte auf $\pm 12 \text{ kg m}^{-3}$ genau bestimmt werden. Mehr als 90 % der Schwerevariation in einer Bohrung wird durch Material innerhalb eines Radius von $5\Delta h$ um die Bohrung verursacht. Für ein Tiefeninkrement von $\Delta h = 10 \text{ m}$ zwischen zwei Messungen ergibt dies einen Einflussradius von 50 m. Dies ist, bei geringerer Tiefenauflösung, eine wesentlich größere Eindringtiefe als die der γ - γ -Messung. Daher sind störende Effekte durch die Bohrung selbst vernachlässigbar. Abb. 3.27 zeigt als Anwendungsbeispiel die Bestimmung eines Dichteprofils in der KTB-Hauptbohrung, als diese bis 6 000 m Tiefe gebohrt worden war (Endteufe: 9 100 m).

3.4.4 Dichtebestimmung nach Nettleton

Die Dichte oberflächennaher Gesteine unterhalb der Topografie kann nach Nettleton (1939) mit Hilfe einer Methode bestimmt werden, welche die Form der Bouguer-Anomalie mit dem Verlauf der Topografie längs eines Profils vergleicht. Sie beruht auf der kombinierten Höhenreduktion $\delta g_H = \delta g_F - \delta g_{B_A}$ (Gl. 3.61)

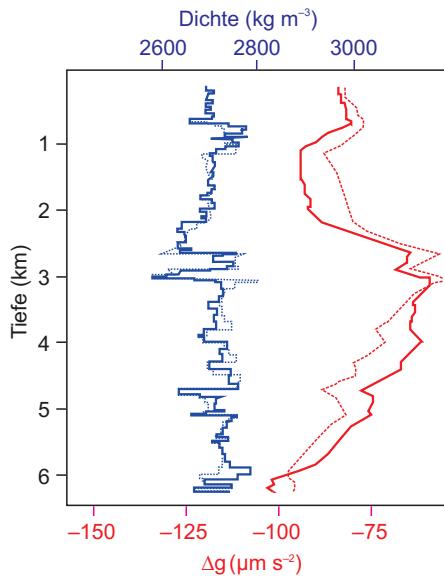


Abb. 3.27 Bestimmung eines Tiefenprofils der Gesteinsdichte (Genauigkeit: $\pm 10 \text{ kg m}^{-3}$) mit Bohrlochgravimetrie an 109 Punkten in der KTB-Hauptbohrung zwischen 650 m und 6 000 m Tiefe (pers. Mitt. Hans-Jürgen Götze, Kiel; Daten: Bosum et al. 1997). Der Messpunktabstand betrug generell 50 m, bei raschem Wechsel der Lithologie 10 m. In Rot: gemessene Schwerkbeschleunigung Δg (Linie) bzw. auf Grundlage eines dreidimensionalen Dichtemodells modellierte Schwerkbeschleunigung (Punkte). In Blau: Dichte aus gemessener Schwerkbeschleunigung (Linie) bzw. aus dem Dichtemodell berechnet (Punkte)

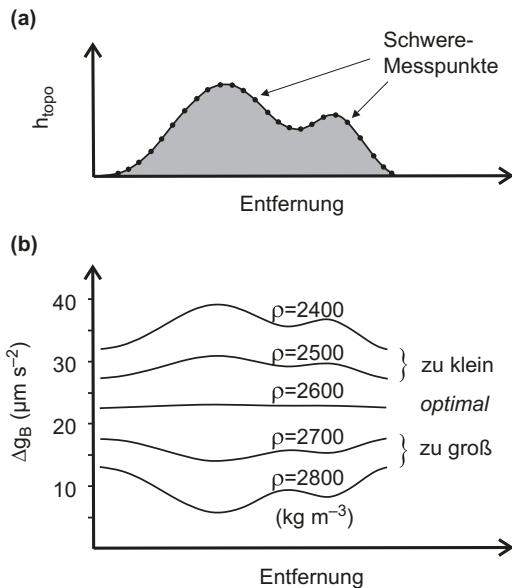
und der Geländereduktion δg_T (Gl. 3.51), die beide eine Funktion der Dichte sind. Da die Geländereduktion weniger beiträgt als die Bouguer-Plattenreduktion, wird sie jedoch häufig vernachlässigt. Das Vorgehen basiert auf einer iterativen Anpassung der für die kombinierte Höhenreduktion verwendeten Gesteinsdichte mit dem Ziel, die Korrelation der Bouguer-Anomalie Δg_B mit der Topografie zu eliminieren (Abb. 3.28). Ist die gewählte Reduktionsdichte zu klein, so ergibt sich eine positive Korrelation mit der Topografie – im umgekehrten Fall eine negative.

Die optimale Dichte ist diejenige, für die sich die geringste Korrelation ergibt. Diese graphische Methode wurde von Jung (1953) in Formeln gekleidet, indem er den Korrelationskoeffizienten zwischen Bouguer-Anomalie Δg_B (Gl. 3.67) und Topografie h zu null setzt. Die mittlere Rohdichte ergibt sich dann zu:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\sum (\Delta g_B - \bar{\Delta g}_B) (h - \bar{h})}{\sum (h - \bar{h}) [0,000\,419\,1 (h - \bar{h}) + (T - \bar{T})]}, \quad (3.74)$$

wo die Δg_B in $\mu\text{m s}^{-2}$ angegeben ist, die Höhe h in m und die Dichte in kg m^{-3} . Mit δg_T aus Gl. 3.51 erhält man $T = \delta g_T / \rho_m$, wo ρ_m eine mittlere Dichte der Topografie ist; Größen mit Überstrich (z. B. \bar{T}) bezeichnen Mittelwerte. In Gl. 3.74 wird somit zu einem vorgegebenen Schätzwert der Dichte ρ_0 ein Korrekturterm addiert, um die wahre Dichte ρ zu ermitteln.

Abb. 3.28 Bestimmung der Gesteinsdichte nach Nettleton; (a) Schweremessungen an Punkten über einen Berg hinweg; (b) Bouguer-Anomalie Δg_B berechnet mit unterschiedlichen Dichten. Die optimale Dichte ergibt die geringste Korrelation zwischen Topografie und Schwereanomalie (nach Lowrie 2007)



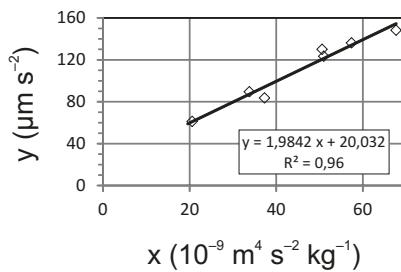
3.4.5 Bestimmung der Dichte aus der Freiluftanomalie

Eine andere Art der Bestimmung einer mittleren Rohdichte ergibt sich aus der Umformulierung der Gl. 3.67 für die Bouguer-Anomalie Δg_B , indem die von einer konstanten mittleren Dichte unabhängigen Terme gegen die von ihr abhängigen Terme aufgetragen werden (Parasnis 1952). Hierbei werden bei der Freiluftreduktion nur lineare Terme berücksichtigt, die Bouguer-Reduktion einer ebenen Platte verwendet sowie die Geländereduktion $\Sigma \rho_i T_i$ (Gl. 3.50) und $T^* = (\sum \rho_i T_i) / \bar{\rho}$ mit einer mittleren Reduktionsdichte $\bar{\rho}$:

$$\begin{aligned}
 & g_P(h_{\text{topo}}, \phi) - \gamma_P(h_{\text{topo}}, \phi) + \underbrace{\delta g_F(h_{\text{topo}}, \phi)}_{3,08\,769\,1\,h_{\text{topo}}} \\
 &= \Delta g_B(h_{\text{topo}}, \phi) + \underbrace{\delta g_{B_A}(h_{\text{topo}})}_{2\pi G \rho h_{\text{topo}}} - \underbrace{\delta g_T(h_{\text{topo}})}_{T^* \rho}, \\
 & \underbrace{g_P(h_{\text{topo}}, \phi) - \gamma_P(h_{\text{topo}}, \phi) + 3,08\,769\,1\,h_{\text{topo}}}_{\Delta g_F} \\
 &= \Delta g_B(h_{\text{topo}}, \phi) + \underbrace{(0,000\,419\,3\,h_{\text{topo}} - T^*) \rho}_x.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Dies ergibt für jeden Messpunkt eine Gerade $\Delta g_F = \Delta g_B + x \rho$ mit jeweils unterschiedlichem Achsenabschnitt Δg_B , aber derselben Steigung ρ . Eine im Sinn der kleinsten Fehlerquadrate mittlere Dichte ρ_m für die Bouguer-Plattenreduktion kann also aus der Steigung einer linearen Regression von Δg_F als Funktion von $x = (0,000\,419\,3\,h_{\text{topo}} - T^*)$ gewonnen werden. Hierbei wird die Bouguer-Anomalie

Abb. 3.29 Bestimmung einer mittleren Krustendichte aus der linearen Regression von Werten der Freiluftanomalie $\Delta g_F = y$ als Funktion von $x = 0,000\ 419\ 3 h_{\text{topo}} - T^*$ (Daten: Parasnis 1952)



Δg_B als Mittelwert mit Zufallsfehler betrachtet. Die Berechnung der Geländereduktion δg_T erfordert allerdings ihrerseits die Angabe von Dichten. Daher wird bei der Berechnung von x bzw. T^* in Gl. 3.75 die jeweilige Geländereduktion durch die mittlere Reduktionsdichte $\bar{\rho}$ dividiert. Abb. 3.29 zeigt ein Beispiel einer solchen Auftragung von Freiluftanomalien Δg_F als Funktion der Differenz der entsprechenden Bouguer- und Geländereduktionen (also von $x = 0,000\ 419\ 3 h_{\text{topo}} - T^*$). Ihre lineare Regression ergibt mit einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 96\%$ eine mittlere Gesteinsdichte von $1\ 984\ \text{kg m}^{-3}$.

3.4.6 Schätzung der Gesteinsdichte aus seismischen Geschwindigkeiten

Messungen an wassergesättigten Proben von Sedimenten und Sedimentgesteinen sowie von metamorphen und Ergussgesteinen im Labor weisen auf einen Zusammenhang zwischen Dichte und seismischen P- und S-Wellengeschwindigkeiten hin (Abb. 3.30). Die Beziehung ist zwar empirisch, aber deutlich. Doch streuen die Werte um die bestangepasste Ausgleichskurve. Diese kann daher am besten zur Ermittlung einer mittleren Dichte größerer Krustenblöcke verwendet werden. Zudem muss die aus Messungen bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck abgeleitete Kurve ggf. an die erhöhten In-situ-Drücke und -Temperaturen angepasst werden. Trotzdem bleibt die Beziehung zwischen seismischen Geschwindigkeiten und Dichte empirisch, da der gefundene Zusammenhang nicht abschließend mit einer petrophysikalischen Theorie erklärt werden kann.

Ein solcher Zusammenhang wurde für wasserfreie magmatische Tiefengesteine auf der Basis thermodynamischer Betrachtungen und sorgfältiger druck- und temperaturabhängiger Laborexperimente für die Temperatur und Druckbereiche $800\ ^\circ\text{C} < T < 1\ 300\ ^\circ\text{C}$ und $0,1\ \text{GPa} < p < 3\ \text{GPa}$ ermittelt (Sobolev und Babeyko 1994). Es zeigte sich, dass Dichte und elastische Gesteinseigenschaften in hohem Maß durch deren chemische Zusammensetzung bestimmt sind, insbesondere durch den SiO_2 -Gehalt. Die Korrelation zwischen Dichte und P-Wellengeschwindigkeit ist hoch und weist zwei Trends auf – einerseits für ultramafische, eisenarme Gesteine und andererseits für alle anderen untersuchten Gesteine.

Die Ermittlung von Dichten ρ aus der seismischen Geschwindigkeit α von Kompressionswellen erfolgt in drei Schritten. Zunächst werden die druck- und

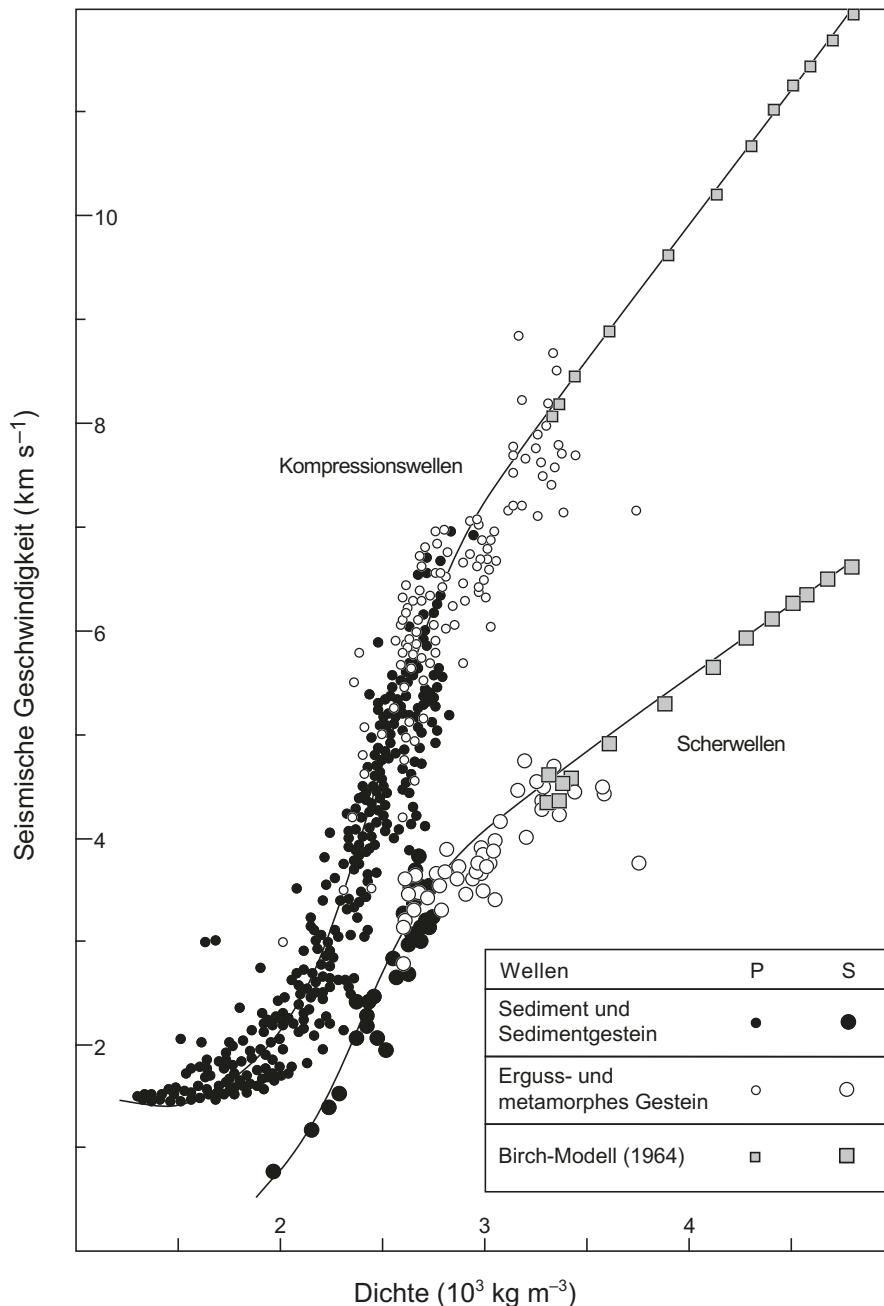


Abb. 3.30 Empirischer Zusammenhang zwischen Dichte und seismischen P- sowie S-Wellengeschwindigkeiten, gemessen an wassergesättigten Sedimenten sowie wassergesättigten Sediment-, Erguss- und metamorphen Gesteinen (nach Lowrie 2007; Daten: Ludwig et al. 1970)

temperaturabhängigen In-situ-Werte von α in der Tiefe z auf Atmosphärendruck $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ und Zimmertemperatur $T_0 = 25^\circ\text{C}$ umgerechnet:

$$\alpha_0 = \alpha(z) - \frac{\partial \alpha}{\partial p}(p(z) - p_0) - \frac{\partial \alpha}{\partial T}(T(z) - T_0), \quad (3.76)$$

mit den folgenden Werten für die partiellen Ableitungen der P-Wellengeschwindigkeit nach dem Druck bzw. der Temperatur: $\partial \alpha / \partial p = 120 \text{ m s}^{-1} \text{ GPa}^{-1}$ und $\partial \alpha / \partial T = 0,45 \text{ m s}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Danach wird die zugehörige Dichte in kg m^{-3} bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur berechnet:

$$\rho_0 = 0,446 \alpha_0 - 0,074 \quad \text{für } 6\,050 \text{ m s}^{-1} < \alpha_0 < 6\,950 \text{ m s}^{-1},$$

$$\rho_0 = 0,487 \alpha_0 - 0,359 \quad \text{für } 6\,950 \text{ m s}^{-1} < \alpha_0 < 7\,800 \text{ m s}^{-1},$$

Schließlich wird diese Dichte auf In-situ-Bedingungen in der Tiefe z umgerechnet:

$$\rho_{in situ} = \rho_0 - \frac{\partial \rho}{\partial p}(p - p_0) - \frac{\partial \rho}{\partial T}(T - T_0). \quad (3.77)$$

Hierfür müssen die partiellen Ableitungen der Dichte nach dem Druck ($\partial \rho / \partial p$) bzw. der Temperatur ($\partial \rho / \partial T$) bekannt sein. Sobolev und Babeyko (1994) ermittelten für die von ihnen untersuchten wasserfreien, magmatischen Tiefengesteine (von Granit bis Lherzolit) hierfür $\partial \rho / \partial p = 60 \text{ kg m}^{-3} \text{ GPa}^{-1}$ und $\partial \rho / \partial T = -0,09 \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Schließlich müssen noch die In-situ-Werte $p(z)$ für den Druck sowie $T(z)$ für die Temperatur in der Tiefe z ermittelt werden. Der In-situ-Druck $p(z)$ kann aus dem lithostatischen Druckgradienten $\partial p / \partial z = \rho g$ berechnet werden:

$$p(z) = p_0 + \frac{\partial p}{\partial z} z. \quad (3.78)$$

Falls keine gemessenen Temperaturen verfügbar sind, müssen diese aus der Temperatur T_0 und der Wärmestromdichte q_0 an der Erdoberfläche sowie repräsentativen Werten für die Wärmeleitfähigkeit λ und die Wärmeproduktionsrate A eindimensional in die Tiefe z extrapoliert werden:

$$T(z) = T_0 + q_0 \frac{z}{\lambda} - A \frac{z^2}{2\lambda}. \quad (3.79)$$

Im Temperatur- und Druckbereich der Kalibration ihrer Messungen schätzen Sobolev und Babeyko (1994) die Genauigkeit einer mit Gl. 3.77 bestimmten Dichte auf $\pm 10 \text{ kg m}^{-3}$.

Für Krustengesteine ermittelten Yang et al. (2014) die Variation der Ge steinsdichte bei Zimmertemperatur an anstehenden Gesteinen aus tektonischen Störungen in Sandstein, Siltstein, Tonstein, Tuff, Karbonaten und Granit und passten die Kurven für Drücke unterhalb eines Schwellwerts p_S logarithmisch, oberhalb linear an:

$$(a) \rho_{in situ} = a \cdot \ln\left(\frac{p}{1 \text{ MPa}}\right) + b, \quad p < p_S, \quad (3.80)$$

$$(b) \rho_{in situ} = \rho_0 - \frac{\partial \rho}{\partial p}(p - p_0), \quad p > p_S.$$

Die Druckschwellwerte lagen zwischen 207 MPa–380 MPa, was Tiefen von etwa 10 km–18,5 km entspricht, also etwa der Grenze zwischen kontinentaler Ober- und Unterkruste. Im nichtlinearen (Oberkrusten-)Bereich variieren die Werte der Koeffizienten a und b in Gl. 3.80a von $94,7 \text{ kg m}^{-3} < a < 177,3 \text{ kg m}^{-3}$ (Mittelwert: $138,9 \text{ kg m}^{-3}$) und $1\,341 \text{ kg m}^{-3} < b < 2\,069 \text{ kg m}^{-3}$ (Mittelwert: $1\,689 \text{ kg m}^{-3}$). Im linearen (Unterkrusten-)Bereich variieren die Werte der Druckableitung der Dichte in Gl. 3.80b von $259 \text{ kg m}^{-3} \text{ GPa}^{-1} < \partial \rho / \partial p < 502 \text{ kg m}^{-3} \text{ GPa}^{-1}$ (Mittelwert: $335 \text{ kg m}^{-3} \text{ GPa}^{-1}$).

3.5 Interpretation von Schweredaten

Die Interpretation von Schweredaten dient dazu, von einer inhomogenen Dichteverteilung im Untergrund herrührende Schwereanomalien geologisch zu deuten. Die Dichtevariation wird dabei als Differenz $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ zwischen der Dichte ρ einer Einlagerung und der mittleren Dichte ρ_0 in deren Umgebung ausgedrückt. Massenüberschüsse weisen somit einen positiven Dichtekontrast auf, Massendefizite einen negativen. Die damit verbundenen Schwereanomalien sind somit gleichfalls positiv bzw. negativ: Das Vorzeichen der Anomalie ist dasselbe wie das des verursachenden Dichtekontrasts und zeigt an, ob die Dichte des sog. Störkörpers größer oder geringer ist als die seiner Umgebung.

Die Form einer durch einen Störkörper bewirkten Schwereanomalie wird beeinflusst durch dessen Ausmaß, Dichtekontrast und Tiefenlage. Ihre horizontale Reichweite wird oft als Wellenlänge bezeichnet. Diese ist ein Maß für die Tiefenlage des Störkörpers. Große, tief liegende Körper verursachen breite (langwellige) Anomalien von meist kleiner Amplitude. Dagegen verursachen kleine, flach liegende Körper enge (kurzwellige), scharf abgegrenzte Anomalien. Bouguer-Anomalien setzen sich in aller Regel aus Anteilen unterschiedlicher Quellen zusammen. Die langwirksamen Anteile durch Dichtekontraste in größerer Tiefe nennt man regionale Anomalien. Sie stehen im Zusammenhang mit den Großstrukturen in der Erdkruste unter den Hauptmerkmalen der Topografie wie Gebirgsketten, Ozeanrücken und Subduktionszonen. Ebenfalls langwellige Anomalien verursachen die Füllungen der Sedimentbecken mit ihren im Vergleich zum Grundgebirge geringeren Dichten. Kurzwellige lokale (Residual-)Anomalien werden durch anomale Massen nahe der Oberfläche verursacht, welche ggf. für eine wirtschaftliche Nutzung von Interesse sind. Ihre Interpretation erfordert in jedem Fall geologische Kenntnisse. In erodierten präkambrischen Schilden, wie z. B. in Kanada und Skandinavien, mögen sehr kurzwellige Anomalien auf oberflächennahe Vererzungungen hindeuten. In Sedimentbecken können Anomalien kurzer bis mittlerer Wellenlänge von Strukturen herrühren, welche mit den Lagerstätten von Kohlenwasserstoffen in Verbindung stehen.

3.5.1 Trennung von regionalen und lokalen Anomalien

Die Trennung der lokalen von den regionalen Anomalien ist ein wesentlicher Schritt in der Interpretation von Schweredaten, seien sie auf Profilen oder flächenhaft

vermessen. Für diese Aufgabe steht eine Fülle von Techniken zur Verfügung, deren Komplexität von reiner visueller Inspektion bis hin zur rechnergestützten Datenverarbeitung reicht.

3.5.1.1 Visuelle Analyse

Die einfachste Art, den Beitrag einer regionalen Anomalie von einem Schwerprofil abzuziehen, besteht in der Anpassung eines regionalen Trends und der punktweisen Subtraktion dieses visuellen Trends von den einzelnen Punkten der Bouguer-Anomalie. Dies gestattet es einem Bearbeiter, die regionale Kurve so anzupassen, dass die lokale Anomalie das Vorzeichen erhält, das seiner Interpretation der DichteVerteilung entspricht (Abb. 3.31). Dieser Ansatz kann auch auf Karten übertragen werden, indem die Höhenlinien einer Bouguer-Anomalienkarte (ggf. auch von Hand) geglättet werden. Aus der Differenz der beiden Karten, welche auf einem vorgegebenen Raster bestimmt wird, wird eine Karte der lokalen Anomalie erstellt. Da dieses subjektive Verfahren jedoch von der Erfahrung und Geschicklichkeit bei der Bearbeitung abhängt, wird es trotz seiner didaktischen Anschaulichkeit praktisch nicht mehr benutzt.

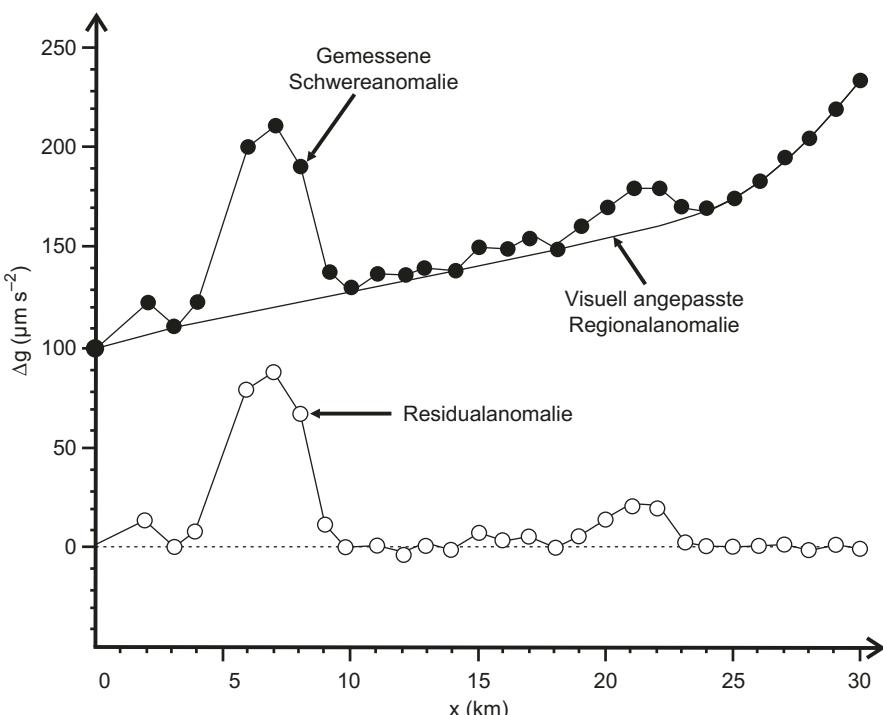


Abb. 3.31 Visuelle Anpassung einer Regionalanomalie zur Ermittlung einer lokalen Residualanomalie (nach Lowrie 2007)

3.5.1.2 Polynominterpolation und Trendflächenanalyse

Eine objektivere Methode zur Ermittlung und Eliminierung eines regionalen Trends Δg_R bietet die Anpassung geeigneter Polynome bzw. Polynomflächen, sog. Trendflächen:

$$\Delta g_R(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (3.81)$$

$$\Delta g_R(x, y) = a_0 + a_1x + b_1y + a_2x^2 + b_2y^2 + \dots + a_nx^n + b_ny^n. \quad (3.82)$$

Die Koeffizienten a_i bzw. b_i werden hierbei aus einer Anpassung des Polynoms an die Bouguer-Anomalie nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Dies ergibt die in diesem Sinn optimalen Werte der Koeffizienten. Die Methode muss jedoch mit Bedacht eingesetzt werden, da die Anpassung umso besser wird, je höher die Ordnung des Polynoms ist. Aus prinzipiellen Gründen ergibt ein Polynom vom Grad $(n - 1)$ sogar eine perfekte Anpassung der n Messwerte. Dies ist jedoch nicht das Ziel. Im Gegenteil wird in der Regel der Polynomgrad möglichst klein gewählt, damit das Polynom auf diese Weise den Regionaltrend gerade noch erfasst. Zusätzlich ist zu beachten, dass eine mit der Methode der kleinsten Quadrate angepasste Kurve um den Mittelwert der Schwerewerte variieren muss, so dass die Residualwerte in gleicher Weise zwischen positiven und negativen Werten schwanken: Jedes Residualextremum wird von Extrema des anderen Vorzeichens eingerahmt. Sie werden aber alle von derselben anomalen Masse hervorgerufen und besitzen für sich allein keine Bedeutung (Abb. 3.32).

3.5.1.3 Fourier-Analyse und Filtertechniken

Die in Abschn. 2.3.2 dargestellten Methoden der digitalen Datenverarbeitung können auch zur Analyse von Schweredaten verwendet werden: Fourier-Analyse, Fourier-Transformation, z-Transformation, Wavelet-Transformation und digitale Filtertechniken. Der einzige Unterschied liegt darin, dass anstelle der zeitlichen Periode T die räumliche Wellenlänge Λ tritt, und anstelle der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ (Gl. 2.113) die Wellenzahl $k = 2\pi/\Lambda$. Die Abb. 3.33 zeigt ein synthetisches Beispiel anhand eines Felds (Abb. 3.33c), das durch Überlagerung zweier um 90° phasenverschobener Kosinus- bzw. Sinusfunktionen unterschiedlicher Wellenzahl erzeugt wurde (Abb. 3.33a,b). Folgerichtig weist das zweidimensionale Amplitudenspektrum (Abb. 3.33d) dieses Summenfelds (Abb. 3.33c) in Richtung der beiden Wellenzahlachsen nur jeweils eine (periodisch wiederholte) Spitze auf. Reale Messdaten mit einem größeren Wellenzahlgehalt besitzen natürlich ein umfangreicheres Spektrum, das zusätzlich auch noch Beiträge von Rauschen und Messfehlern enthält.

Bei der Fourier-Analyse von Schweredaten wird die Schwereanomalie zerlegt in eine Überlagerung räumlicher Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Wellenlänge in Richtung der beiden horizontalen Koordinaten. Die auf diese Weise bestimmte zweidimensionale Fourier-Transformierte der Schwereanomalie wird dann durch geeignete digitale Filterung (vgl. Abschn. 2.4.2) um die Regionalanomalie bereinigt. Die Rücktransformation der gefilterten Transformierten in den Ortsbereich ergibt dann die gesuchte Schwereanomalie.

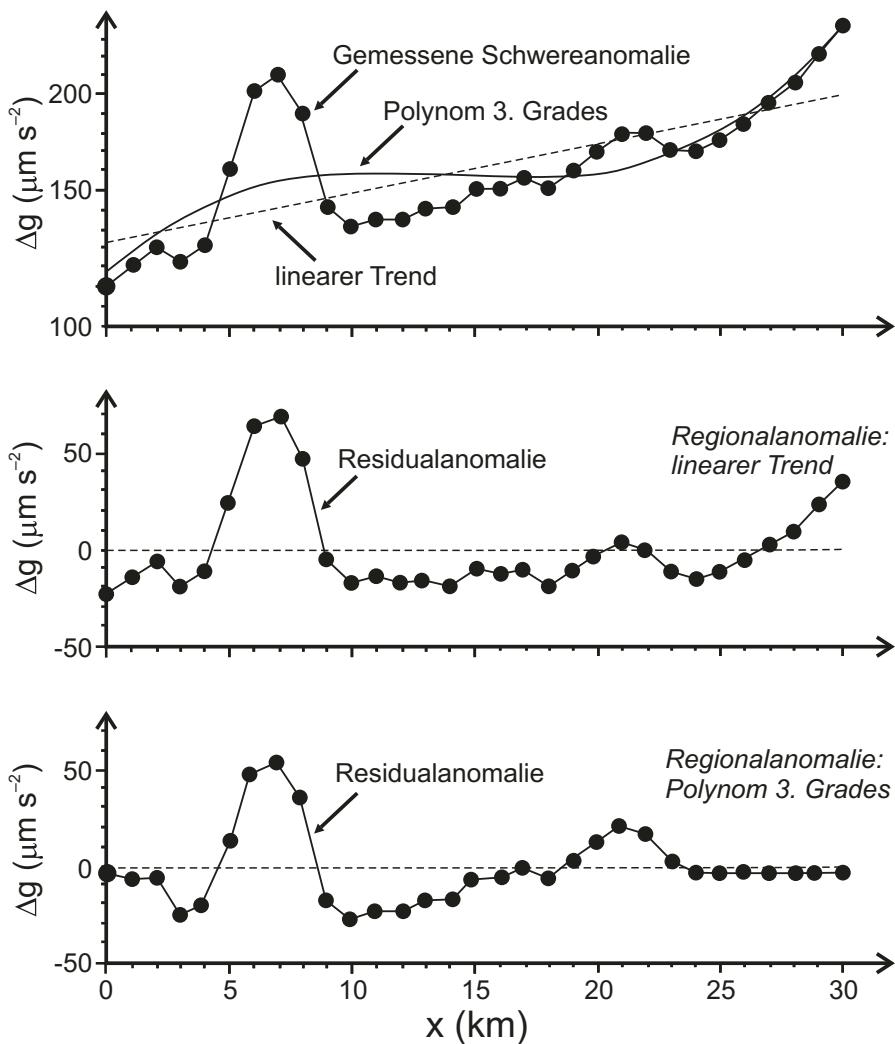


Abb. 3.32 Ermittlung einer Residualanomalie durch Reduktion der Messwerte um einen linearen Trend und ein Polynom 3. Grades (nach Lowrie 2007)

Hierbei sind die Gleichungen für die zweidimensionale Fourier-Transformation (Gl. 2.122 und 2.124) völlig analog zu jenen der eindimensionalen (Gl. 2.112 und 2.115): Die Schwereanomalie $\Delta g(x,y)$ tritt an die Stelle der Zeitfunktion $g(t)$. Der Koeffizient a_0 (der Mittelwert der Daten) wird zu Null, wenn die Anomalie trendbereinigt wurde. Der Vorteil einer Filterung im Wellenzahlbereich liegt für Schweredaten wie im Fall der seismischen Zeitreihen darin, dass die Filterung im Wellenzahlbereich lediglich eine Multiplikation mit der Transformierten der Filterfunktion erfordert und nicht, wie im Ortsbereich, eine Konvolution der Schweredaten mit der Filterfunktion.

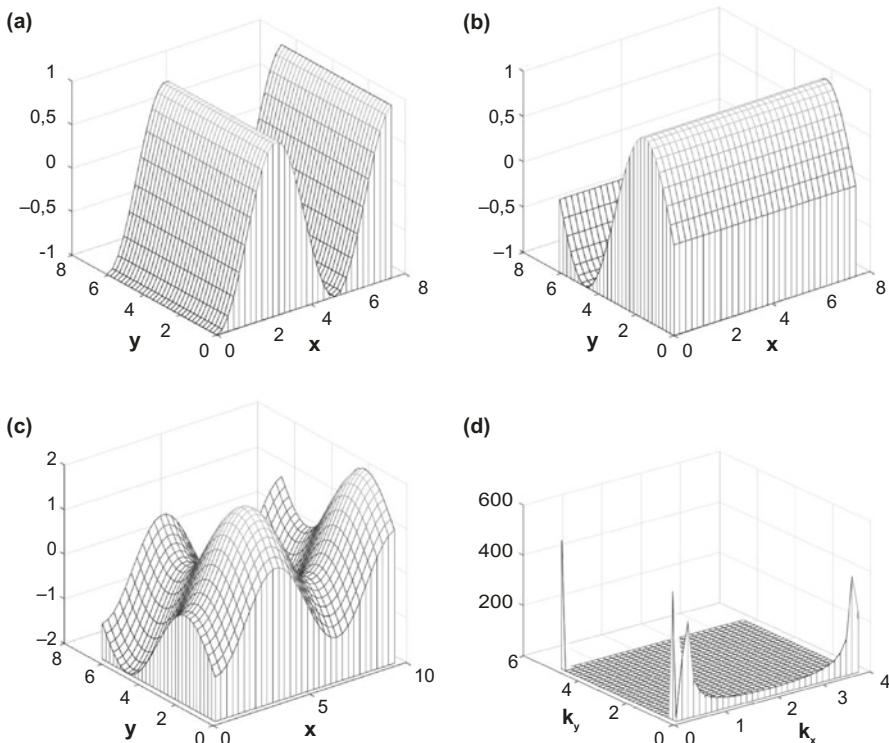


Abb. 3.33 Zweidimensionale Fourier-Analyse. Überlagerung zweier räumlicher Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Wellenlänge ($j = 1, \dots, 32$): (a) In X-Richtung: $\sin(2\pi j/21 - \pi/2)$; (b) In Y-Richtung: $\cos(2\pi j/36 - \pi/2)$; (c) Summe der beiden Felder in X- und Y-Richtung; (d) Amplitudenspektrum der Fourier-Transformierten des Summenfelds in (c)

Mit der Transformation in den Wellenzahlbereich stehen all jene Möglichkeiten der digitalen Datenverarbeitung, insbesondere aber zur Filterung zur Verfügung, welche in [Abschn. 2.3.2](#) vorgestellt wurden. Als Beispiel dient die Tiefpassfilterung im Wellenzahlbereich der in [Abb. 3.34](#) gezeigten Bouguer-Schwere $\Delta g_B(x,y)$ in den Ostalpen entlang des seismischen TRANSALP-Profil.

[Abb. 3.35](#) zeigt das Ergebnis einer Tiefpassfilterung mit einer Grenzwellenlänge von 90 km. Hierbei wurden die beiden Ecken des Rechteckfilters mit der linken bzw. rechten Hälfte einer gaußschen Glockenkurve geglättet, um Überschwingungen (gibbssches Phänomen) zu vermeiden. Dies bewirkt eine effektive Grenzwellenlänge von 70 km. Das durch die Tiefpassfilterung geglättete Regionalfeld legt nahe, dass der Dichtekontrast an der Moho die Hauptquelle der Bouguer-Anomalie der Ostalpen ist.

[Abb. 3.36](#) zeigt dagegen das Ergebnis einer Hochpassfilterung derselben Bouguer-Anomalie ([Abb. 3.34](#)). Das hochpassgefilterte Residualfeld unterscheidet sich deutlich vom Originalfeld. Offensichtlich wird nur ein geringer Teil des Schwerefelds durch krusteninterne bzw. oberflächennahe Strukturen verursacht.

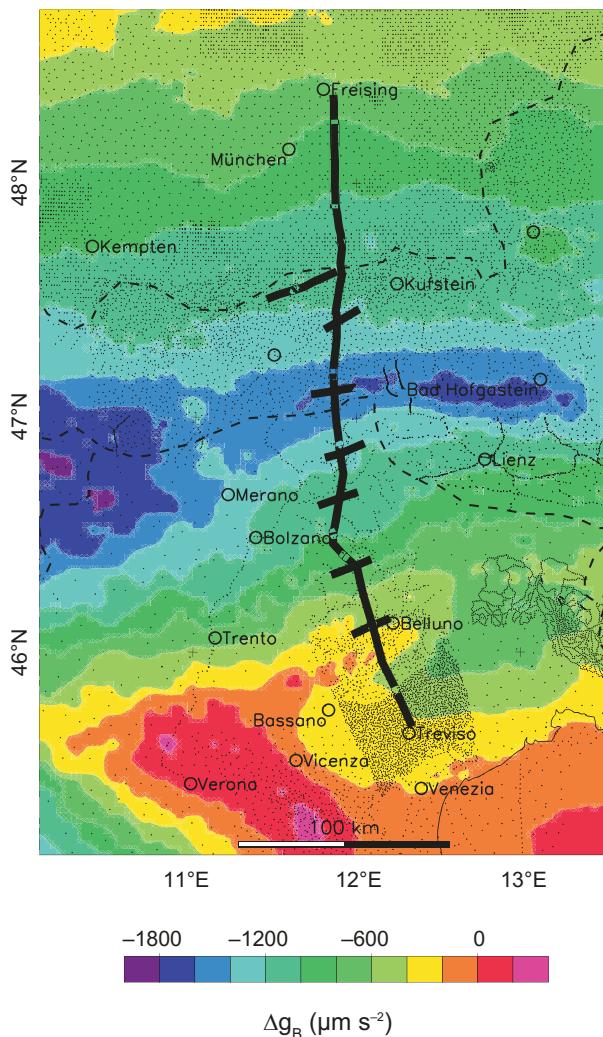


Abb. 3.34 Bouguer-Anomalie in den Ostalpen entlang des seismischen TRANSALP-Profilen (schwarze Linie). Die schwarzen Punkte zeigen die Lage der Schweremessstationen (nach Ebbing 2002)

Die Unterdrückung des langwelligen Regionalfelds lässt jedoch kleinräumige, lokale Anomalien sichtbar werden, von denen einige bestimmten tektonischen Einheiten zugeordnet werden können, wie beispielsweise das Tauern-Fenster, das Periadriatische Lineament sowie die Inntalstörung (Ebbing 2002).

Ein Problem bei der Analyse durch Wellenlängenfilterung entsteht dann, wenn oberflächennahe Strukturen, wie im Fall der Ostalpen, eine große horizontale, aber nur sehr geringe vertikale Ausdehnung besitzen. In diesem Fall wird ihr Einfluss auf das Schwerefeld nicht genügend stark gefiltert und der Effekt fälschlicherweise der Krusten-Mantel-Grenze zugeordnet.

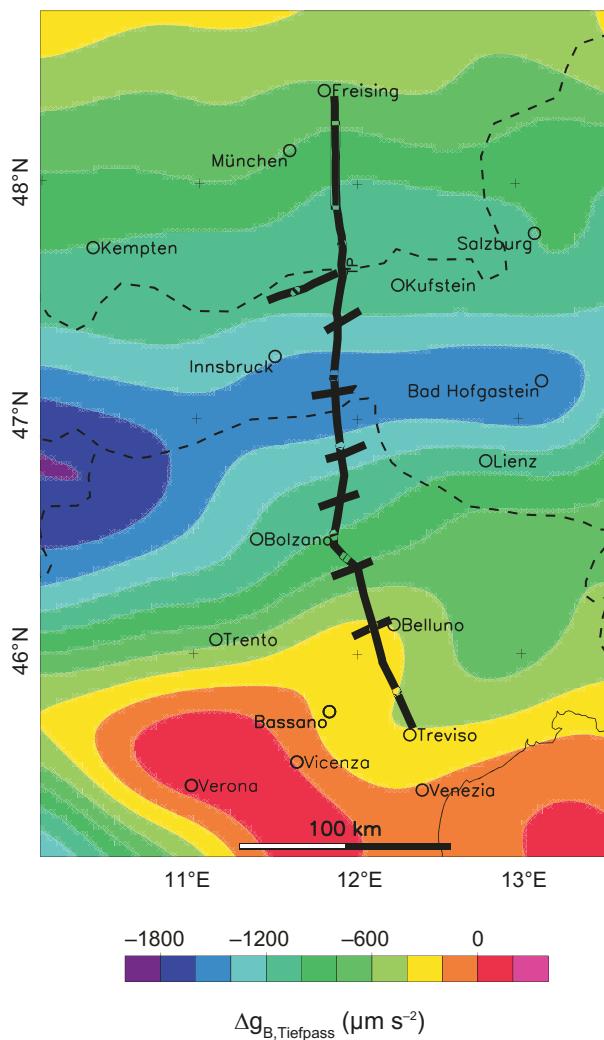


Abb. 3.35 Tiefpassfilterung der in Abb. 3.34 dargestellten Bouguer-Anomalie in den Ostalpen (90 km Grenzwellenlänge bzw. 70 km effektive Grenzwellenlänge). Das Ergebnis zeigt den regionalen Anteil der Anomalie, da der Tiefpass die Schwerkraftwirkung lokaler Inhomogenitäten in der Oberkruste herausfiltert (nach Ebbing 2002)

3.5.1.4 Wavelet-Analyse von Schweredaten

Wie in Abschn. 2.4.2.6 erläutert, ermöglicht die Wavelet-Transformation sowohl die Analyse des Wellenzahlspektrums eines Schwerefelds als auch die Lokalisierung seiner jeweiligen spektralen Anteile im Raum. Zur Interpretation eines entsprechenden Skalogramms hilft ein Vergleich zwischen den Signaturen einiger einfacher geometrischer Störkörper, deren Schwereanomalie auch aus analytischen Lösungen

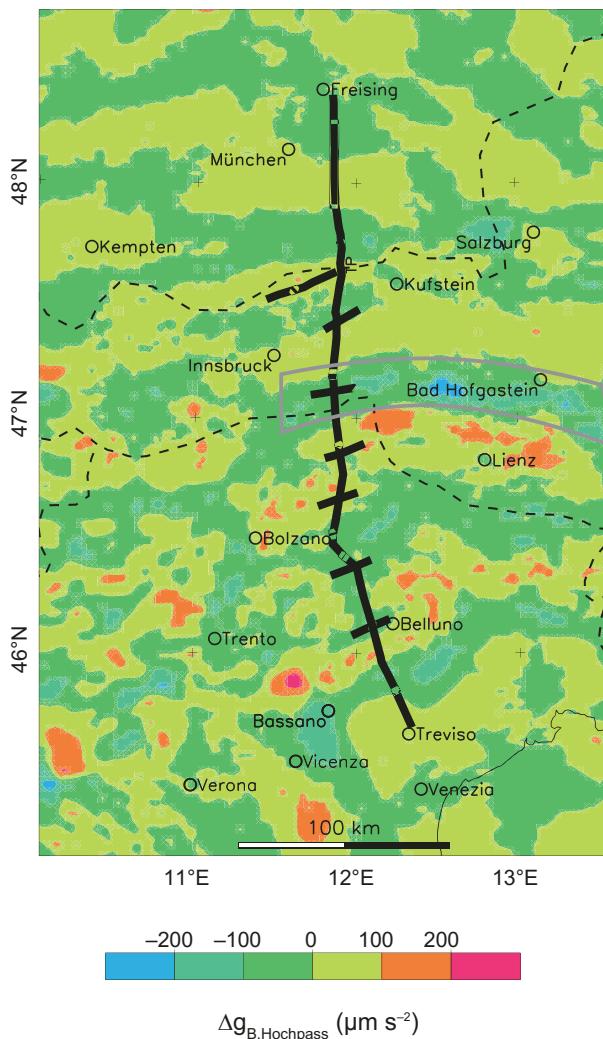


Abb. 3.36 Hochpassfilterung der in Abb. 3.34 dargestellten Bouguer-Anomalie in den Ostalpen (90 km Grenzwellenlänge bzw. 70 km effektive Grenzwellenlänge). Das Ergebnis zeigt den lokalen Anteil der Anomalie (grauer Umriss: Tauern-Fenster), da der Hochpass die Schwerewirkung regionaler Inhomogenitäten herausfiltert (nach Ebbing 2002)

bekannt sind (vgl. Abschn. 3.5.2) – Kugel, Quader, unendlicher horizontaler Zylinder, unendliches horizontales Prisma, horizontale Platte und Stufe (Abb. 3.37). Sind die Signaturen von Kugel, Quader sowie der unendlichen horizontalen Zylinder und Prismen jeweils recht ähnlich, so unterscheiden sie sich jedoch deutlich von jenen einer horizontalen Platte und einer Stufe.

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation ermöglicht die Analyse der Tiefenlage und relativen Dichtekontraste komplexer Störkörper. Abb. 3.38 illustriert

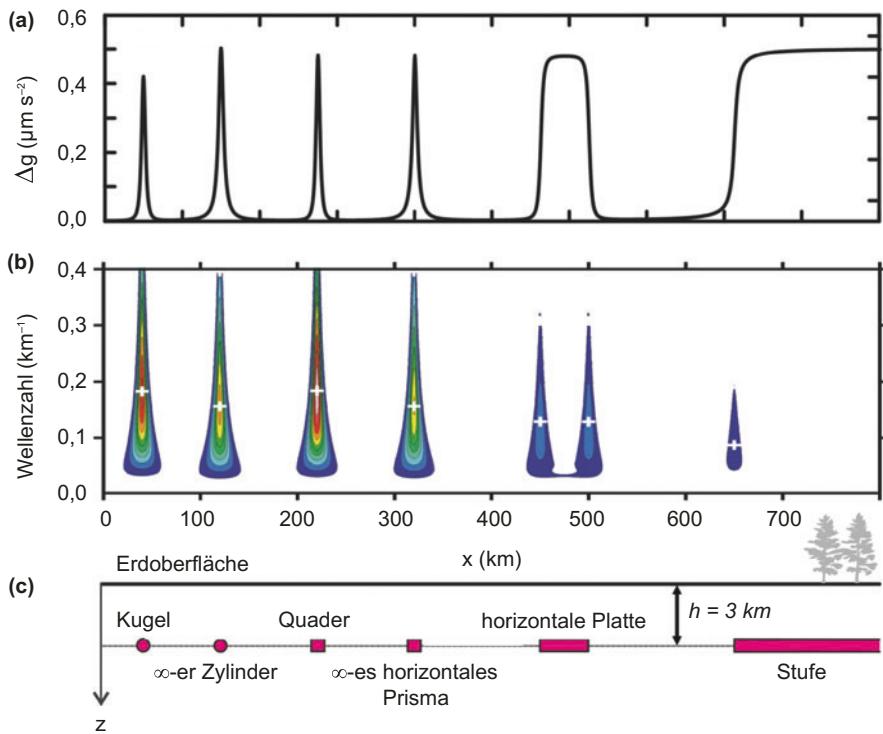


Abb. 3.37 (a) Schwereanomalien Δg der in (c) dargestellten einfachen geometrischen Störkörper; (b) Skalogramme der in (a) dargestellten Anomalien – weiße Kreuze markieren die jeweiligen Maxima; (c) Störkörper einfacher Geometrie in einer Tiefe von 3 km (nach Li et al. 2013)

dies anhand der Bouguer-Anomalie im nordwestafrikanischen Tschad-Becken (Abb. 3.38a). Die Skalogramme der in Abb. 3.38b–d gezeigten Profile der Bouguer-Schwereanomalien Δg_B zeigen eine horizontal wie vertikal variable Struktur des Betrags der jeweiligen Wavelet-Transformierten sowie der Tiefenlage ihrer jeweiligen Maxima, die mit den entsprechenden Maxima von Δg_B korrelieren. Somit zeigen sie die Lage und Stärke der jeweiligen Dichtekontraste an und können zur Eingrenzung möglicher Dichteveerteilungen in Vorwärts-Modellrechnungen verwendet werden (vgl. Abschn. 3.5.4).

3.5.2 Schwereanomalien einiger einfacher geometrischer Körper

Für eine Reihe einfacher geometrischer Körper existieren analytische Lösungen für die durch sie bewirkte Schwereanomalie an der Erdoberfläche (z. B. Jung 1961; Telford et al. 1990; Burger 1992; Lowrie 2007; Parasnis 1997; Jacoby und Smilde 2009). Natürlich sind im strengen Sinn im Untergrund keine Kugeln, Zylinder, Platten oder Ähnliches eingelagert. Mit hinreichender Genauigkeit lassen sich aber viele geologische Strukturen sinnvoll durch solche Körper annähern

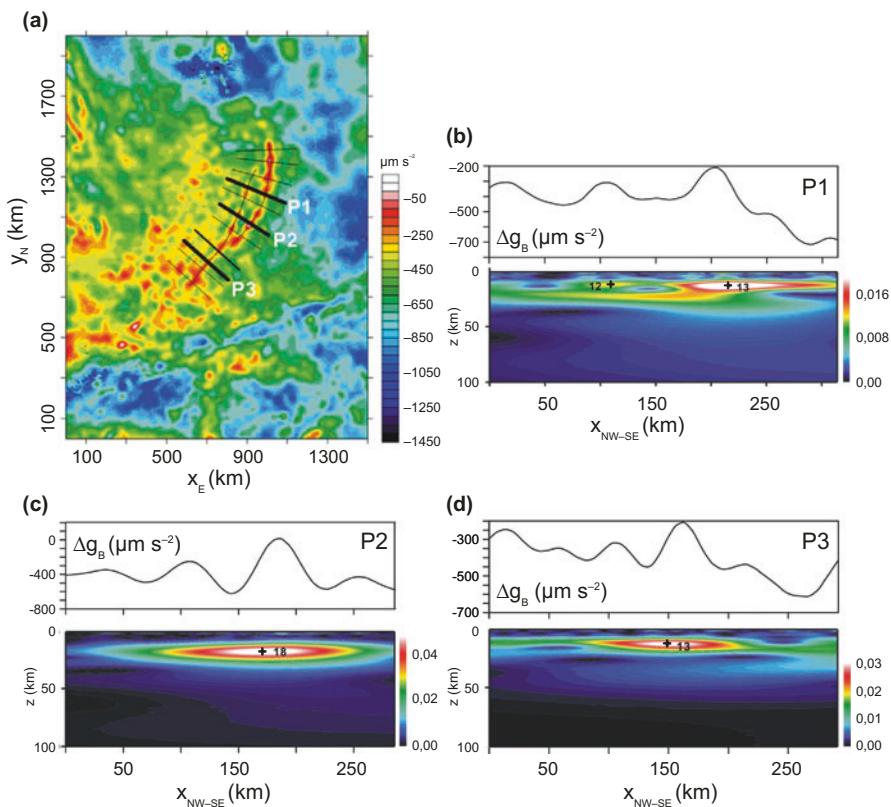


Abb. 3.38 (a) Bouguer-Schwereanomalie Δg_B im Tschad-Becken im westlichen Nordafrika zwischen 5°N und 22°N sowie 10°E und 25°E . Dicke schwarze Striche bezeichnen die Profile P1–P3 in den Teilbildern (b)–(d); (b)–(d) Profile der Bouguer-Schwereanomalien Δg_B entlang der Profile P1–P3 in (a) sowie zugehörige Skalogramme der kontinuierlichen Wavelet-Transformationen. Farbige Isoflächen zeigen den normierten Betrag der Wavelet-Transformierten, schwarze Kreuze und Zahlen markieren die Tiefenlage der jeweiligen Maxima (nach Li et al. 2013)

(Abb. 3.39). Die folgenden Formeln für Kugel, vertikale und horizontale Zylinder, horizontales Prisma mit viereckigem Querschnitt und Rechteckquader dienen daher insbesondere als überschlägige Faustformeln für erste, schnelle Schätzungen. Die eigentliche Auswertung von Schweredaten erfolgt jedoch heute mittels numerischer Modellrechnungen in zwei und drei Dimensionen (vgl. Abschn. 3.5.4).

3.5.2.1 Kugel

Mit einer Kugel können Diapire, Intrusionen wie granitische Batholithen oder Plutone aus Tiefengestein, Erzkörper und Höhlen angenähert werden. Eine Kugel mit Radius R , welche zur Umgebungsichte einen Kontrast $\Delta\rho$ (und somit eine anomale Masse ΔM) besitzt und deren Zentrum im Abstand a unter der Erdoberfläche liegt (Abb. 3.39a), verursacht eine Schwereanomalie $G \Delta M / r^2$. Zur Berechnung ihrer vertikalen Komponente muss die Schwereanomalie auf die Vertikale projiziert,

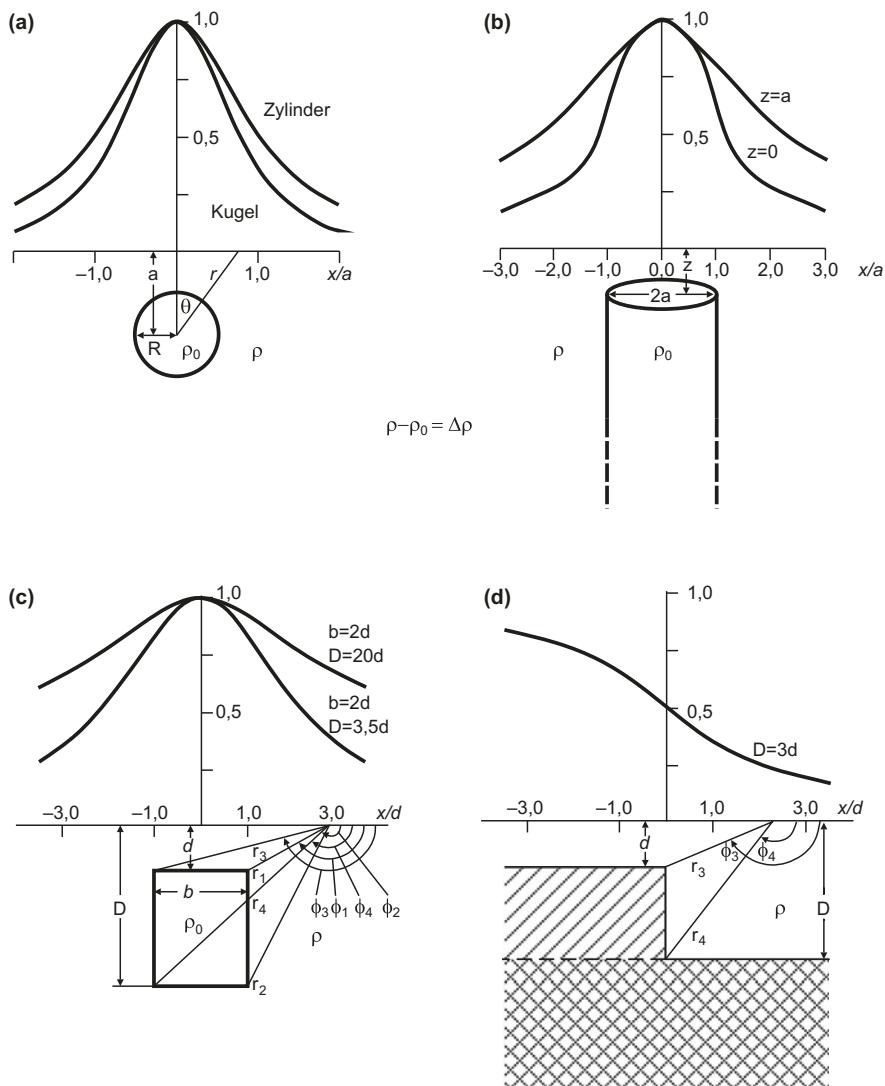


Abb. 3.39 Auf ihren Maximalwert normierte vertikale Schwereanomalien auf Profilen über einige Körper einfacher Geometrie: (a) Kugel bzw. horizontaler Zylinder; (b) vertikaler Zylinder; (c) unendlich langes, horizontales Prisma viereckigen Querschnitts; (d) unendlich langes, horizontales Prisma, dessen eine vertikale Seite ins Unendliche verschoben ist. Alle Kurven und Maßstäbe sind für die gezeigten Geometrien exakt (nach Parasnis 1997)

also mit $\cos(\theta) = a/r$ multipliziert werden. Hierbei ist $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ der Betrag des Abstands von der Profilposition x zum Kugelmittelpunkt. Damit ist die vertikale Schwereanomalie:

$$\Delta g = GM \frac{\cos(\theta)}{r^2} = \underbrace{G \frac{4\pi}{3}}_{2,795 \times 10^{-10}} R^3 \Delta \rho \frac{\cos(\theta)}{r^2} = G \frac{4\pi}{3} R^3 \Delta \rho \frac{a}{r^3} = \overbrace{G \frac{4\pi}{3} \frac{R^3 \Delta \rho}{a^2}}^{\Delta g_{\max}}, \text{ mit } (1+x^2/a^2)^{3/2}, \quad (3.83)$$

$$\Delta g_{\max} = 0,000\,279\,52 \frac{R^3 \Delta \rho}{a^2} \quad (\mu\text{m s}^{-2}); \quad \Delta \rho \text{ in kg m}^{-3}, \quad R \text{ und } a \text{ in m.} \quad (3.84)$$

Der Winkel θ wird durch den Radiusvektor r vom Kugelmittelpunkt zum Aufpunkt an der Profilposition x und der Vertikalen aufgespannt. Man erkennt, dass der Maximalwert der Anomalie mit dem Quadrat der Tiefe des Kugelmittelpunkts abnimmt. Die Tiefenlage ergibt sich aus der Halbwertsbreite $b_{1/2} = x_{1/2} - (-x_{1/2}) = 2x_{1/2}$, also der Breite der Anomalie bei der Hälfte ihres Maximalwerts $\Delta g_{1/2} = \Delta g_{\max}/2$:

$\Delta g_{\max}/2 = \Delta g_{\max} \left(1 + \frac{x_{1/2}^2}{a^2}\right)^{-3/2}$. Hieraus folgt: $\frac{1}{2} = \left(1 + \frac{x_{1/2}^2}{a^2}\right)^{-3/2}$ bzw. $4^{1/3} = 1 + \frac{x_{1/2}^2}{a^2}$. Daraus erhält man $x_{1/2}^2 = (4^{1/3} - 1)a^2$ und somit die Tiefenlage des Kugelmittelpunkts als Funktion der halben Halbwertsbreite $x_{1/2} = b_{1/2}/2$ aus $a = x_{1/2}/\sqrt{(4^{1/3} - 1)}$:

$$a = 1,305 x_{1/2} = 0,652 b_{1/2}. \quad (3.85)$$

Auf dieselbe Weise lässt sich auch die anomale Masse $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta \rho$ schätzen. Setzt man in Gl. 3.83 wiederum a/r für $\cos(\theta)$ ein, so erhält man die Anomalie am Ort der Halbwertsbreite $x_{1/2}$: $\Delta g_{\max}/2 = GM \frac{a}{r_{1/2}^3} = GM \frac{a}{(a^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}}$. Hieraus ergibt sich die anomale Masse zu:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Delta g_{\max}}{2G} \frac{(a^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}}{a} = \frac{\Delta g_{\max}}{2G} \frac{\{(1,305^2 + 1)x_{1/2}^2\}^{3/2}}{1,305 x_{1/2}} \\ &= \frac{\Delta g_{\max}}{2G} \frac{(1,305^2 + 1)^{3/2} x_{1/2}^2}{1,305} = 2,551\,6 \times 10^{10} \Delta g_{\max} x_{1/2}^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Masse M in Kilogramm bzw. Tonnen:

$$M = 25\,516 \Delta g_{\max} x_{1/2}^2 \text{ (kg)} = 25,516 \Delta g_{\max} x_{1/2}^2 \text{ (t)}; \quad \Delta g_{\max} \text{ in } \mu\text{m s}^{-2}, \quad x_{1/2} \text{ in m.} \quad (3.86)$$

Somit kann aus der Halbwertsbreite und dem Maximalwert der Anomalie auch die Masse des Störkörpers geschätzt werden. Hieraus kann z. B. bei einer Erzlagerstätte

auf der Grundlage eines entsprechendes Mischungsgesetzes (Tab. 3.6) zwischen Erzanteil und taubem Gestein der Erzgehalt ermittelt werden.

3.5.2.2 Unendlicher horizontaler Zylinder

Der horizontale Zylinder ist eine nützliche Näherung für Formen wie Antikinalen, Synkinalen, längliche Intrusionen oder Bergwerksstollen. Die Achse eines unendlich langen horizontalen Zylinders mit Radius R , welcher zur Umgebungsdichte einen Kontrast $\Delta\rho$ (und somit eine anomale Masse ΔM) besitzt, liege im Abstand a unter der Erdoberfläche (Abb. 3.39a). Mit den Beziehungen $r_1 = r \cos(\phi)$; $\ell = r \sin(\phi) = r_1 \sin(\phi)/\cos(\phi)$ (Abb. 3.40a) folgt: $d\ell = r_1 d\phi/\cos^2(\phi)$. Damit bewirkt ein Segment der Länge $d\ell$ des zur y -Achse parallelen horizontalen Zylinders am Punkt P im Abstand r (Abb. 3.40) eine Schwerebeschleunigung von $\delta g_r = G \Delta\rho \pi R^2 d\ell/r^2 = G \Delta\rho \pi R^2 r_1 d\phi/(r^2 \cos^2(\phi)) = G \Delta\rho \pi R^2 d\phi/r_1$. Die Komponente entlang r_1 ist gleich $dg_1 = \delta g_r \cos(\phi) = G \Delta\rho \pi R^2 \cos(\phi) d\phi/r_1$ (Abb. 3.40b). Deren Vertikalkomponente ist: $d(\Delta g) = dg_1 \cos(\theta) = dg_1 (a/r_1) = G \Delta\rho \pi R^2 a \cos(\phi) d\phi/r_1^2$ (Abb. 3.40c). Integration von $\cos(\phi)$ zwischen $\pm\pi/2$ ergibt den Faktor 2. Damit ist die vertikale Schwereanomalie Δg :

$$\Delta g = \frac{4,1928 \times 10^{-10}}{\overbrace{2\pi G}^{4,1928 \times 10^{-10}} \overbrace{R^2 \Delta\rho a}^{R^2 \Delta\rho a}} = \overbrace{\frac{2\pi G R^2 \Delta\rho}{a}}^{\Delta g_{\max}} / (1 + x^2/a^2). \quad (3.87)$$

Hieraus folgt:

$$\Delta g_{\max} = 0,000\,419\,28 \frac{R^2 \Delta\rho}{a} (\mu\text{m s}^{-2}). \quad (3.88)$$

Die Anomalie (Gl. 3.88) eines Zylinders ist größer als jene der Kugel (Gl. 3.84), wegen der angenommenen unendlichen horizontalen Ausdehnung des Zylinders. Aus demselben Grund nimmt sie auch mit der Entfernung weniger stark ab. Aus der Halbwertsbreite lässt sich wie für die Kugel die Tiefe zum Zylinderzentrum ableiten: Aus $\frac{\Delta g_{\max}}{2} = \frac{\Delta g_{\max}}{1 + x_{1/2}^2/a^2}$ folgt:

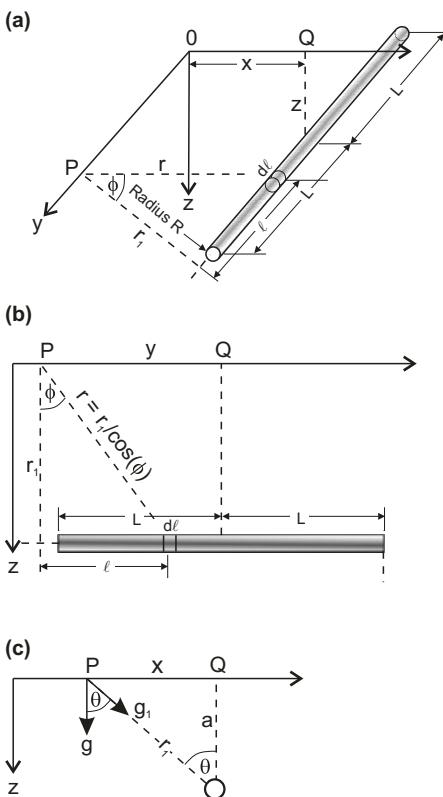
$$a = x_{1/2} \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{b_{1/2}}{2}. \quad (3.89)$$

Die Masse $M = \pi R^2 \Delta\rho$ pro Einheitslänge des Zylinders lässt sich ebenfalls aus Maximalwert und Halbwertsbreite berechnen: $\Delta g_{\max}/2 = 2 G M a/r_{1/2}^2 = 2 G M a/(a^2 + x_{1/2}^2)$. Hieraus folgt mit (Gl. 3.89):

$$M = \Delta g_{\max} \frac{a^2 + x_{1/2}^2}{4 G a} = \frac{2 \Delta g_{\max} x_{1/2}^2}{4 G x_{1/2}} = \frac{\Delta g_{\max} x_{1/2}}{2 G} = 7,492\,9 \times 10^9 \Delta g_{\max} x_{1/2}, \text{ also :}$$

$$M = 7\,492,88 \Delta g_{\max} x_{1/2} (\text{kg}) = 7,492\,88 \Delta g_{\max} x_{1/2} (\text{t}); \Delta g_{\max} \text{ in } \mu\text{m s}^{-2}, x_{1/2} \text{ in m.} \quad (3.90)$$

Abb. 3.40 Zur Berechnung der vertikalen Schwereanomalie verursacht durch einen unendlichen horizontalen Zylinder (nach Telford et al. 1990): (a) Aufsicht (x–y-Ebene); (b) Vertikalschnitt (y–z-Ebene); (c) Vertikalschnitt (x–z-Ebene)



3.5.2.3 Vertikaler Zylinder

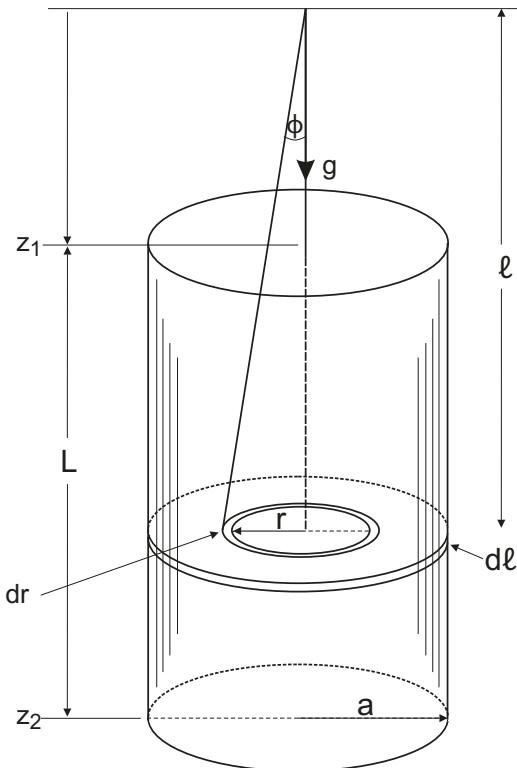
Der vertikale Zylinder ist eine nützliche Näherung für Formen wie Salzstöcke, Schläuche oder Bergwerksschächte (Abb. 3.39b). Die Schwereanomalie über der Achse eines vertikalen Zylinders wird berechnet, indem man die Schwerkraft einer Scheibe der Dicke $d\ell$ berechnet und dann über die Tiefe integriert (Abb. 3.41). Hierzu wird zunächst die Schwerkraft eines Rings der Breite dr und Höhe $d\ell$ berechnet. Dessen Masse ist $\delta m = 2\pi\Delta\rho r dr d\ell$, und somit ist mit $r = \ell \tan(\phi)$, $dr = (\ell d\phi)/(\cos^2(\phi))$ und $\cos(\phi) = \ell/(r^2 + \ell^2)^{1/2}$ seine vertikale Schwerkraftbeschleunigung:

$$\delta g = G \delta m \frac{\cos(\phi)}{r^2 + \ell^2} = 2\pi G \Delta\rho r d\ell \frac{r dr}{r^2 + \ell^2} \cos(\phi) = 2\pi G \Delta\rho d\ell \sin(\phi) d\phi.$$

Zur Ermittlung der Schwerkraft einer einzelnen Kreisscheibe der Dicke $d\ell$ wird nun zunächst zwischen $\phi_1 = 0$ bis $\phi_2 = \arctan(a/\ell)$ integriert:

$\int_0^{\arctan(a/\ell)} \sin(\phi) d\phi = 1 - \cos(\arctan(a/\ell))$. Mit $\cos(\arctan(a/\ell)) = \ell/\sqrt{\ell^2 + a^2}$ ergibt die Integration über die Dicke der Kreisscheibe zwischen $\ell = z_1$ und $\ell = z_2$ die Schwerkraft des gesamten Zylinders:

Abb. 3.41 Zur Berechnung der vertikalen Schwereanomalie, verursacht durch einen vertikalen Zylinder (nach Telford et al. 1990)



$$\Delta g = 2\pi G \Delta \rho \int_{z_1}^{z_2} \left(1 - \ell/\sqrt{\ell^2 + a^2} \right) dl, \text{ also:}$$

$$\Delta g = \underbrace{2\pi G}_{4,1928 \times 10^{-10}} \Delta \rho \left(\underbrace{\frac{z_2 - z_1}{\text{Zylinder-dicke}} + \underbrace{\sqrt{(z_1^2 + a^2)}}_{\text{Abstand Aufpunkt - oberer Zylinderradius}} - \underbrace{\sqrt{(z_2^2 + a^2)}}_{\text{Abstand Aufpunkt - unterer Zylinderradius}} \right). \quad (3.91)$$

Strebt z_2 gegen unendlich, so kürzen sich der erste und der letzte Term in der Klammer, und man erhält die Schwereanomalie für einen unendlichen Zylinder:

$$\Delta g = 2\pi G \Delta \rho \left(\sqrt{z_1^2 + a^2} - z_1 \right). \quad (3.92)$$

Strebt zudem z_1 für einen bis an die Oberfläche reichenden Zylinder gegen null, so vereinfacht sich der Ausdruck weiter zu:

$$\Delta g = 2\pi G \Delta \rho a = 4,1928 \times 10^{-10} \Delta \rho a. \quad (3.93)$$

Hieraus folgt:

$$\Delta g = 0,000\,419\,28 \Delta\rho a (\mu\text{m s}^{-2}); \Delta\rho \text{ in kg m}^{-3}, a \text{ in m.}$$

3.5.2.4 Unendlich langes, horizontales Prisma mit viereckigem Querschnitt

Mit einem horizontalen Prisma viereckigen Querschnitts lässt sich eine Reihe geologischer Formen annähern, wie z. B. Rücken oder Falte, Graben oder Erosionskanal, Versatz oder Verwerfung und eine unendliche Platte. Die Schwereanomalie eines solchen horizontalen Prismas der Breite b und Tiefe d bzw. D zur Ober- bzw. Unterkante sowie den Winkeln ϕ_1 bis ϕ_4 zwischen der Horizontalen und den Ecken des vertikalen Prismaquerschnitts (Abb. 3.39c) ist gegeben durch (Parasnis 1997, S. 78–81; Telford et al. 1990, S. 40–44.):

$$\Delta g = \underbrace{\frac{2G}{1,334\,6 \times 10^{-10}}}_{\Delta\rho} \left[x \ln \left(\frac{r_1 r_4}{r_2 r_3} \right) + b \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + D(\phi_2 - \phi_4) - d(\phi_1 - \phi_3) \right]. \quad (3.94)$$

Die Näherung für einen Horst oder eine Falte der Breite b erhält man, wenn sich die untere Begrenzungsfläche in der Horizontalen unendlich weit ausdehnt. Ansonsten ändert sich Gl. 3.94 nicht weiter, solange das Material unterhalb der unteren Begrenzung des horizontalen Prismas dieselbe Dichte wie dieses besitzt.

Einen Graben oder verschüttetes Tal mit steilen Seiten und der Breite b nähert man an, indem sich die obere Begrenzungsfläche in der Horizontalen unendlich weit ausdehnt und die sich daraus ergebende Platte an der Oberfläche die gleiche Dichte wie das Prisma besitzt. Wieder bleibt die Gl. 3.94 unverändert, und der Effekt der Platte an der Oberfläche erscheint als ein dem des horizontalen Prismas überlagelter regionaler Trend.

Einen Versatz oder eine Verwerfung kann man annähern, indem eine vertikale Seite des Prismas ins Unendliche verschoben wird: Dann ist das Prisma der einfach schraffierte Bereich in Abb. 3.39d. Die zugehörige Anomalie ergibt sich, wenn man $r_1 = r_2$ und $\phi_1 = \phi_2 = \pi$ setzt. In diesem Fall bezeichnet $\Delta\rho$ den Kontrast zwischen den einfach und nicht schraffierten Bereichen. Unter der Annahme, dass das kreuzschraffierte Liegende eine einheitliche Dichte besitzt, ist die resultierende Schwereanomalie

$$\Delta g = \underbrace{\frac{2G}{1,334\,6 \times 10^{-10}}}_{\Delta\rho} [\pi(D-d) - D\phi_4 + d\phi_3], \quad (3.95)$$

wobei der Ursprung für x direkt über dem vertikalen Versatz liegt. Wenn beide schraffierten Bereiche die gleiche Dichte besitzen, liegt entweder eine verschüttete Erosionskante oder eine Verwerfung vor. Der Versatz der Verwerfung ist $D-d$ und die Gesamtvariation von Δg über die Verwerfung hinweg ist $2\pi G \Delta\rho (D-d)$ (vgl. Gl. 3.96).

Die Schwerkraftwirkung einer unendlichen Platte erhält man schließlich, wenn die vertikalen Begrenzungsfächen zu beiden Seiten ins Unendliche verschoben werden, also r_1 gegen r_2 , r_3 gegen r_4 ; ϕ_1 und ϕ_2 gegen π sowie ϕ_3 und ϕ_4 gegen null streben. Dann reduziert sich Gl. 3.94 zu

$$\Delta g = 2\pi G \Delta\rho (D - d). \quad (3.96)$$

Die Anomalie einer unendlichen Platte hängt somit nur von ihrer Dicke $D-d$ ab, nicht jedoch von der Tiefe d zu ihrer Oberkante. Damit liefert Gl. 3.96 die Grundlage für die Bouguer-Plattenreduktion.

3.5.2.5 Rechteckquader

Ähnlich wie mit einer Kugel können mit einem Rechteckquader Diapire, Intrusionen wie granitische Batholithen oder Plutone aus Tiefengestein, Erzkörper und Höhlen angenähert werden. Neben der Approximation geologischer Körper wird der Rechteckquader aber vor allem zum Aufbau mehrdimensionaler diskreter Untergrundmodelle mit jeweils variablen Relativdichten verwendet. Dies ermöglicht die numerische Simulation der Schwerkraftwirkung beliebiger Untergrundgeometrien in zwei bzw. drei Dimensionen.

Sind die Grundfläche und Höhe eines Quaders durch $(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)$ und $(z_2 - z_1)$ gegeben (Abb. 3.13), so ist die vertikale Schwerkraftbeschleunigung am Ursprung des Koordinatensystems, verursacht durch den Dichtekontrast $\Delta\rho$ dieses Rechteckquaders zum Umgebungsgestein, durch Gl. 3.50 gegeben (Banerjee und Das Gupta 1977; Nagy et al. 2000):

$$\Delta g = \Delta\rho G \left[x \ln(y + r) + y \ln(x + r) - z \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right]_{x_1}^{x_2}_{y_1}^{y_2}_{z_1}^{z_2}. \quad (3.97)$$

3.5.2.6 Tiefenschätzung für dreidimensionale Körper

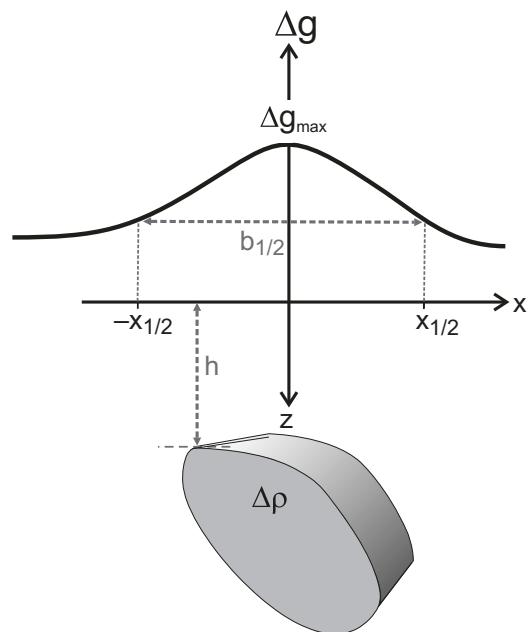
Ähnlich wie in der Magnetik gibt es eine Reihe verschiedener Schätzformeln für die Tiefe h zur Oberkante eines dreidimensionalen Störkörpers, dessen Dichte um $\Delta\rho$ von der Dichte ρ des umgebenden Gebirges abweicht. Die einfachste Formel schätzt die Tiefe aus der Halbwertsbreite $b_{1/2}$ der Anomalie:

$$h' = b_{1/2}/2. \quad (3.98)$$

Eine Reihe von Autoren schlagen Verbesserungen für diese einfachste Schätzformel vor. Die von Dürbaum 1974 angegebene erfordert im Gegensatz zu anderen keine Angabe über die Tiefe zur Unterkante des Störkörpers (Abb. 3.42) und berechnet sich mit Hilfe zweier Funktionen $F(G_{1/2})$ und $G_{1/2}$ als Korrektur des einfachsten Schätzwerts h' aus der Halbwertsbreite (Gl. 3.98):

$$h = F(G_{1/2}) h' = F(G_{1/2}) b_{1/2}/2. \quad (3.99)$$

Abb. 3.42 Zur Tiefenschätzung aus der Halbwertsbreite $b_{1/2}$ (nach Dürbaum 1974)



Tab. 3.7 Multiplikationsfaktor $F(G_{1/2})$ zur Berechnung der Tiefe zur Oberkante eines dreidimensionalen Störkörpers aus dem Halbwertsbreitenfaktor $G_{1/2}$ seiner Anomalie nach Gl. 3.99

$G_{1/2}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$F(G_{1/2})$	1,0	0,7	0,54	0,41	0,31	0,23	0,15

Die Funktion $G_{1/2}$ berechnet sich aus dem Maximalwert der Schwereanomalie Δg_{\max} , dem Dichtekontrast $\Delta \rho$ und der Halbwertsbreite $b_{1/2}$. Sie erfordert somit über das Schwereprofil lediglich die Angabe des Dichtekontrastes:

$$G_{1/2} = 7500 \frac{\Delta g_{\max}}{\Delta \rho b_{1/2}}; \quad \Delta \rho \text{ in } \text{kg m}^{-3}, \quad b_{1/2} \text{ in m}, \quad \Delta g_{\max} \text{ in } \mu\text{m s}^{-2}. \quad (3.100)$$

Zur Berechnung der Tiefe h mit Gl. 3.99 dienen dann die in Tab. 3.7 aufgeführten Werte der Funktion $F(G_{1/2})$ für unterschiedliche Argumente $G_{1/2}$:

3.5.3 Euler-Dekonvolution

Die Euler-Dekonvolution wurde ursprünglich zur Erkundung oberflächennaher Strukturen eingesetzt, später aber auch auf tektonisch oder topografisch anspruchsvollere Gebiete angewendet (Keating 1998; Ebbing 2002). Sie erlaubt eine schnelle erste Interpretation von magnetischen und Schweredaten, wobei ihre Stärke in der Abgrenzung von Kontaktzonen und einer Tiefenschätzung der Störkörper liegt.

Das Verfahren beruht auf der eulerschen Homogenitätsgleichung, die eine skalare Funktion f als homogen vom Grad n definiert, wenn für diese gilt: $f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z)$. Da eine durch eine symmetrische Punktquelle bewirkte Schwereanomalie durch $f(x,y,z) = K/r^N$ beschrieben werden kann, sind solche Schwereanomalien homogen vom Grad $n = -N$. Berücksichtigt man ein Basisniveau F_B eines Hintergrundfeldes, so kann die eulersche Homogenitätsgleichung für ein Feld der Feldstärke F wie folgt formuliert werden (Keating 1998; Reid et al. 2014):

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla F = N(F_B - F), \quad (3.101)$$

wobei \vec{x}_0 den Ort der Quellen der Schwereanomalie bezeichnet. Im Fall der Schwere \vec{g} ist $F = g$, im Fall des Magnetfelds \vec{B} ist $F = B$.

Der Homogenitätsgrad $n = -N$ beschreibt den Abfall des Schwefelds mit wachsendem Abstand. Daher wird N auch als Strukturindex (*structural index*, SI) bezeichnet. Dieser charakterisiert die Art und Form eines Störkörpers. Da Schwere- und Magnetfelddaten oft gemeinsam ausgewertet werden, zeigt Tab. 3.8 den Wertebereich des Strukturindex für verschiedene idealisierte Formen von Störkörpern bei Verwendung der Schwere, des Schweregradienten und der Magnetfeldstärke.

Man kann den Strukturindex über die Anzahl der Dimensionen schätzen, über die sich ein Körper ausdehnt. Dann erhält man den Strukturindex, indem man den Wert dieser Dimension vom maximal möglichen Indexwert N des betreffenden Felds abzieht (Schwerefeld: $N=2$). So nimmt beispielsweise der Strukturindex einer Punktmasse bzgl. der Bouguer-Anomalie den Wert $SI = 2$ an, bzgl. des Schweregradienten jedoch $SI = 3$. Die Werte des Strukturindex in Tab. 3.8 sind somit jeweils um eins größer, wenn der Schweregradient statt der Bouguer-Anomalie betrachtet wird. Bei der Anwendung der Euler-Dekonvolution auf ein geologisch kompliziert aufgebautes Gebiet ist die Wahl des richtigen Strukturindex von entscheidender Bedeutung (Reid und Thurston 2014; Reid et al. 2014) und nicht immer trivial.

Zur Lösung von Gl. 3.101 schreibt man die bekannten Größen auf die rechte Seite und die unbekannten auf die linke:

$$\vec{x}_0 \cdot \nabla F + NF_B = \vec{x} \cdot \nabla F + NF \text{ bzw. } \underline{\mathbf{A}} \vec{u} = \underbrace{\underline{\mathbf{A}} \vec{v}}_{\vec{b}}, \quad (3.102)$$

Tab. 3.8 Strukturindex SI verschiedener geometrischer Körper bei Verwendung der Schwere g bzw. des Schweregradienten ∇g oder der Magnetfeldstärke B (Ebbing 2002; Reid und Thurston 2014)

Störkörper	SI (g)	SI (∇g)	SI (B)
Massenpunkt	2	3	3
Massenlinie (vertikal, horizontal)	1	2	2
Platte (vertikal, horizontal)	0	1,5 ... 1	1,5 ... 1
Massenvolumen		1 ... 0	1 ... 0

wobei \vec{u} der Vektor der Unbekannten ist (\vec{x}_0 und F_B), \vec{v} jener der Bekannten (\vec{x} und F) und $\underline{\underline{A}}$ die Matrix mit den Feldgradienten und dem Strukturindex auf der Hauptdiagonalen. Dies ist eine lineare Gleichung mit vier Unbekannten. Löst man Gl. 3.102 auf einem gleichabständigen Gitter der Größe $n \times n$, so erhält man für $n > 2$ ein überbestimmtes Gleichungssystem derselben Form wie Gl. 2.202. Seine Inversion nach den Unbekannten \vec{u} erhält man wie in Gl. 2.203:

$$\vec{u} = [\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}]^{-1} \underline{\underline{A}}^T \vec{b}. \quad (3.103)$$

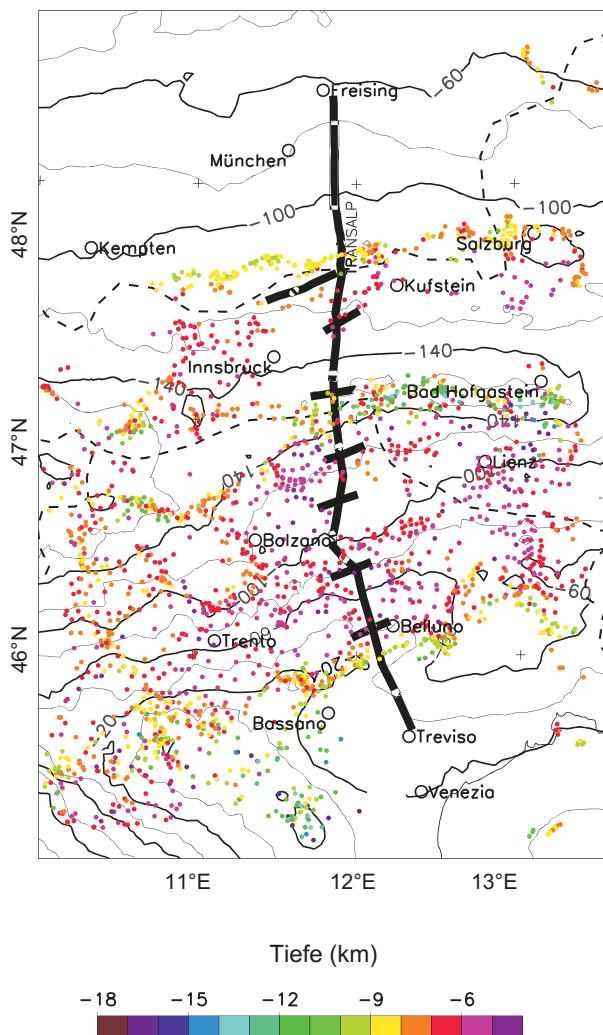


Abb. 3.43 Ergebnis der Euler-Dekonvolution für die (unter der Annahme von Quellfreiheit) auf NN nach unten feldfortgesetzte Bouguer-Anomalie (Isolinien) entlang des TRANSALP-Profil (schwarze Linie mit Querprofilen). Gezeigt werden die besten 10 % der Lösungen für ein Gitter von $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ und einen Strukturindex von $SI = 3$ (nach Ebbing 2002)

Diese Gleichung kann wiederum beispielsweise mit der Methode der Singularwert-Zerlegung (*singular value decomposition*, SVD; siehe z. B. Menke 2012) gelöst werden. Wie im Fall der seismischen Tomografie erfordern stabile Lösungen ggf. einen geeignet gewählten Dämpfungsfaktor oder das Unterdrücken kleiner Singularwerte. Es ist bei der Euler-Dekonvolution auch üblich, die Daten mit der Kovarianzmatrix zu wichtigen (siehe z. B. Keating 1998). Die Abb. 3.43 zeigt ein Beispiel der Anwendung der Methode auf die Bouguer-Anomalie entlang des TRANSALP-Profil.

3.5.4 Numerische Modellrechnungen

Komplexe geologische Strukturen können zum Zweck der numerischen Simulation aus einfachen geometrischen Körpern aufgebaut werden, wie z. B. horizontale Prismen. Ihre zugehörige vertikale Schwereanomalie ist dann die Summe der Anomalien der jeweiligen Polyeder, aus denen sich die Struktur zusammensetzt. Je nach den gewählten finiten Simulationsmethode können diese drei-, vier- oder vieleckige Querschnitte besitzen.

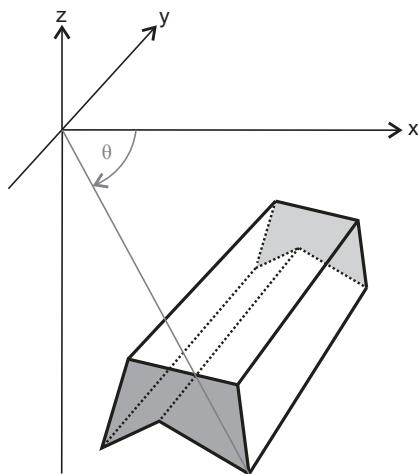
Für zweidimensionale Strukturen, also in Bezug auf ihre Schwerkraftwirkung solche, deren horizontale Dimensionen in Länge und Breite sich mindestens um den Faktor fünf unterscheiden, wurde von Talwani et al. (1959) eine Formel vorgeschlagen, die später von Won und Bevis (1987) noch weiterentwickelt wurde. Sie geht davon aus, dass die Fläche eines vertikalen Querschnitts durch eine geologische Struktur in Prismen beliebigen polygonalen Querschnitts diskretisiert ist, die als beidseitig unendlich ausgedehnt angenommen werden. Die vertikale Schwereanomalie der Struktur ergibt sich dann aus der Überlagerung der Anomalien aller einzelnen Prismen. Dies führt auf die Summation der Integrale über die Seiten jedes geschlossenen Polygons bzw. des geschlossenen Linienintegrals entlang von dessen Umfang (Hubbert 1948). Die vertikale Schwereanomalie eines einzelnen vertikalen Prismas, dessen Dichte um $\Delta\rho$ von der Bezugsdichte abweicht, ist:

$$\Delta g = 2 G \Delta\rho \oint z d\theta, \quad (3.104)$$

wobei der Winkel θ von der Horizontalen und dem Radius vom Ursprung zu einem Punkt auf dem Polygon aufgespannt wird (Abb. 3.44). Zur Lösung dieses Linienintegrals wurden mehrere Wege vorgeschlagen (Talwani et al. 1959; Cady 1980; Won und Bevis 1987), die alle leicht programmierbar sind. Sie eignen sich daher gut für numerische Programme mit grafischer Benutzeroberfläche, die z. T. frei im Internet erhältlich sind (z. B. PACES (2016) mit der Erweiterung von Cady (1980) für endliche Prismen polygonalen Querschnitts, lauffähig auf handelsüblichen PC unter dem Betriebssystem Windows®).

Zur Interpretation gemessener Schwerkraftwerte werden nun die Dichten der Prismen (und ggf. auch ihre Verteilung, Querschnitte und Dimension) im Rahmen von wiederholten Berechnungen der Schwereanomalie so lange variiert, bis das berechnete Ergebnis den Messdaten mit hinreichender Genauigkeit gleicht. Dies ist eine iterative, nichtautomatisierte Inversion der Messdaten mit Hilfe wiederholter

Abb. 3.44 Beidseitig unendliches horizontales Prisma mit beliebigem polygonalem Querschnitt



Vorwärtsrechnungen. Sie ergibt eine optimal zu den Messdaten passende DichteVerteilung im Untergrund. Dieses Inversionsergebnis ist jedoch nicht eindeutig: Wie bereits in Abschn. 3.2.1 erläutert, ist nach dem stokeschen Integralsatz das Schwerepotenzial eindeutig durch seine Werte auf der Erdoberfläche bestimmt. Die vertikale Schwerebeschleunigung kann somit aus der Vertikalkomponente seines Gradienten berechnet werden. Daher existieren jedoch beliebig viele MasseVerteilungen im Untergrund mit dem gleichen Schwerepotenzial. Aufgrund der begrenzten Informationen, die in der Regel über die Geometrie der Strukturen im Untergrund und ihre jeweiligen Dichten existieren, ist es ratsam, das einfachste Untergrundmodell zu bestimmen, welches hinreichend verträglich mit den Daten ist.

Dreidimensionale geologische Strukturen können beispielsweise aus Polyedern, die einen sphärischen Körper approximieren, aufgebaut werden bzw. aus sphärischen Prismen, sog. Tesseroiden. Dies schließt rechtwinklige Prismen mit ein, sowohl in kartesischen als auch Kugelkoordinaten. Die zu jedem solcher rechtwinkliger Quader gehörige vertikale Schwereanomalie wird durch Gl. 3.97 als Funktion seines Dichtekontrasts und Abstands gegeben. Aufsummieren der Beiträge aller Quader an jedem Punkt der Erdoberfläche ergibt wiederum die von der Struktur verursachte vertikale Schwereanomalie. Auch dieser Ansatz eignet sich gut für die numerische Simulation, umgesetzt beispielsweise in dem frei zugänglichen Programm 3GRAINS (Snopek 2005; Snopek und Casten 2006). Mit einer grafischen Benutzeroberfläche versehen, läuft das Programm auf handelsüblichen PCs unter dem Betriebssystem Linux (bzw. einer seiner diversen Distributionen). Es ermöglicht die dreidimensionale Berechnung der Schwereanomalie für eine vorgegebene DichteVerteilung im Untergrund. (Abb. 3.45).

Die Abb. 3.45 zeigt aus didaktischen Gründen bewusst ein Zwischenergebnis der numerischen Modellierung. Die darin erreichte Anpassung von Simulations- und Messergebnissen ist daher noch nicht befriedigend und muss im Zuge weiterer Veränderungen an Geometrie und DichteVerteilung noch verbessert werden, um geologisch sinnvoll interpretiert werden zu können.

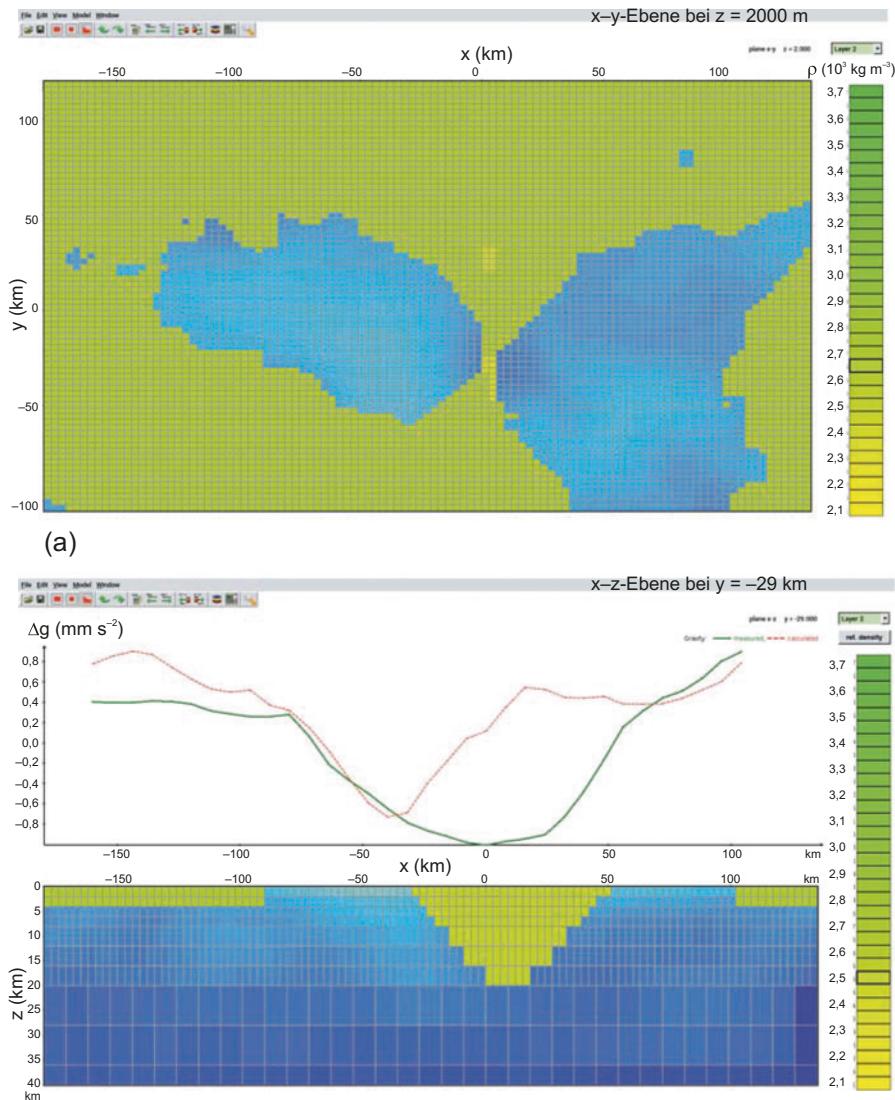


Abb. 3.45 Beispiel einer dreidimensionalen Simulation einer hypothetischen Schwereanomalie mit dem Programm 3GRAINS (Snopek 2005; Snopek und Casten 2006); (a) Horizontal- und Vertikalschnitte durch das dreidimensionale Modell und Struktur der Differenzdichten bzgl. der Referenzdichten von $2,65 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bzw. $2,50 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ sowie Vergleich von gemessener (grün) und berechneter (rot) Schwereanomalie entlang eines Vertikalschnitts bei $y = -29 \text{ km}$; (b) Vergleich von gemessener und berechneter Schwereanomalie an der Erdoberfläche

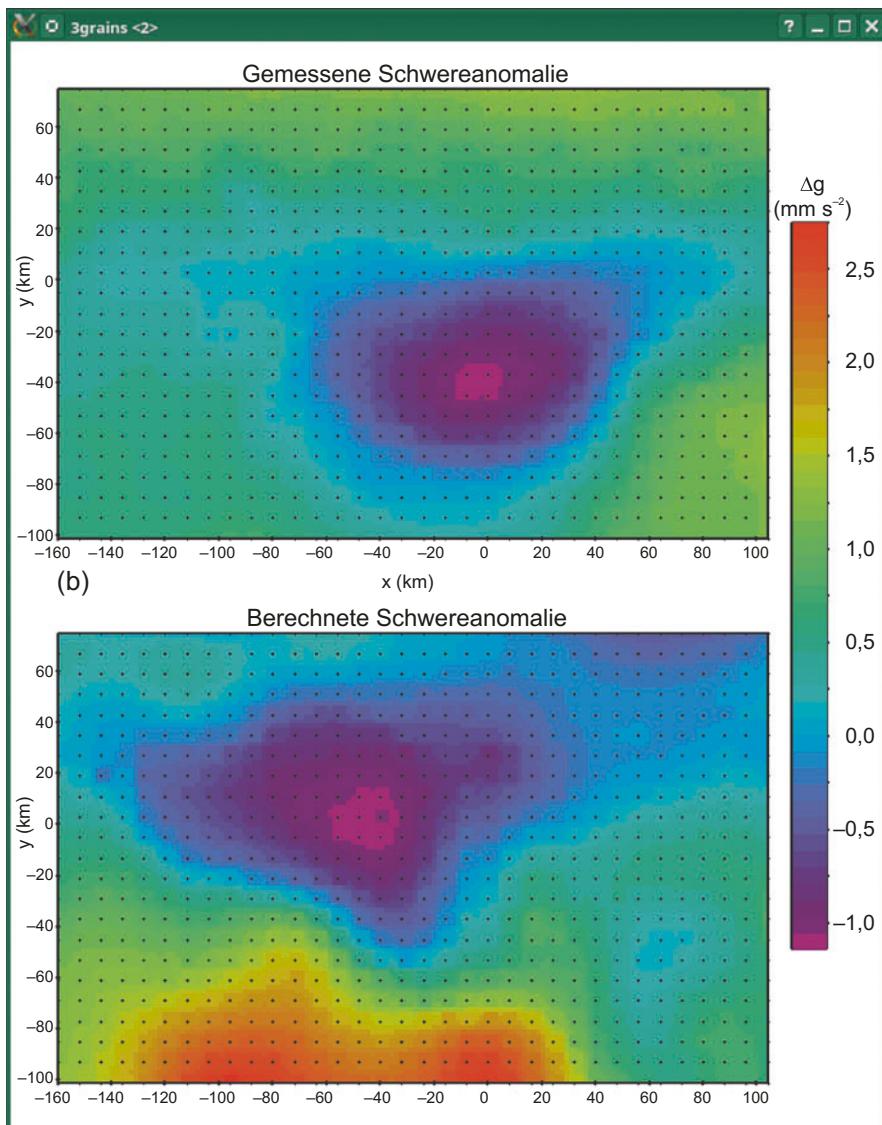


Abb. 3.45 (Fortsetzung)

Ein alternativer Ansatz wurde von Götze (1976) vorgeschlagen, später weiterentwickelt (Götze und Lahmeyer 1988) und in den folgenden Jahrzehnten kontinuierlich zu dem interaktiven Programm Paket IGMAS+ ausgebaut (PotentialGS 2016). Dieses kann unter den Betriebssystemen Windows, Linux und MacOS auf unterschiedlichen Plattformen betrieben werden und setzt voraus, dass der Untergrund in Polyeder mit ebenen Berandungsflächen diskretisiert wird (Abb. 3.46). Die durch solche Polyeder an einem Punkt an der Erdoberfläche

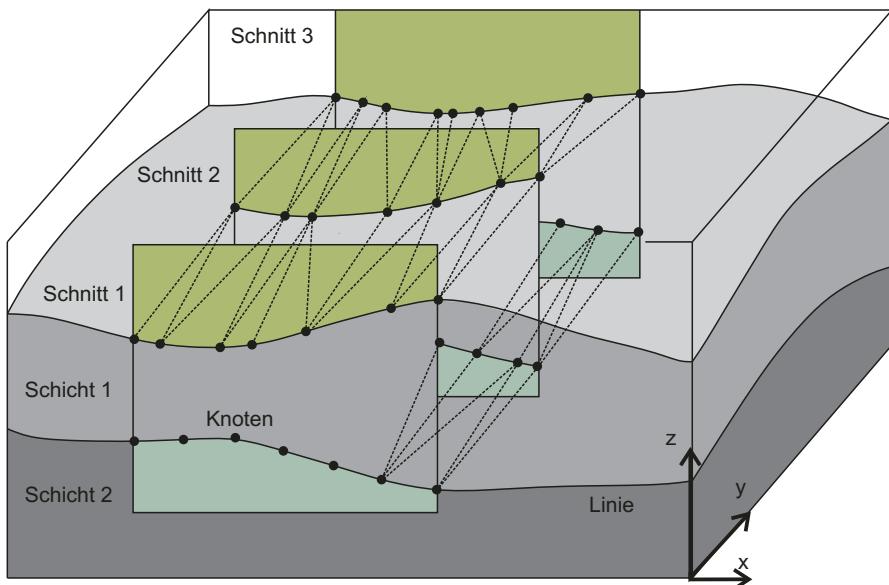


Abb. 3.46 Diskretisierung des Untergrunds in Polyeder mittels Triangulierung der dreidimensionalen Modellgeometrie. Die Oberfläche der geologischen Körper wird mit Hilfe von Dreiecken approximiert, die in den Schnitten (hier: 1–3) durch Knotenpunkte und Linien definiert sind (nach Kuder 2002; Götze und Lahmeyer 1988)

verursachten vertikalen Schwereanomalien werden durch Volumenintegrale ausgedrückt, welche in Summen von Linienelementen überführt werden (Götze und Lahmeyer 1988; Alvers et al. 2014, 2015), ähnlich wie im Fall der Talwani-Formel (Gl. 3.104). Dies ermöglicht die Berechnung des Schwerepotenzials jedes Poyeders und hieraus seiner drei Schwerekomponenten sowie der sechs unabhängigen Komponenten des Schweregradienten. Die vertikale Schwereanomalie der gesamten modellierten Struktur an einem Punkt an der Erdoberfläche ergibt sich dann wiederum durch Aufsummieren der Beiträge aller einzelnen Polyeder.

Abb. 3.47 zeigt beispielhaft eine Anwendung von IGMAS+ auf die dreidimensionale Modellierung der Schwereanomalie im Nordostdeutschen Sedimentbecken (Kuder 2002). Die Abb. 3.47a zeigt die Karte der gemessenen Bouguer-Schwereanomalie. Die Abb. 3.47b vergleicht deren Verlauf auf einem der 38 Vertikalschnitte mit dem Ergebnis einer Simulationsrechnung und zeigt die zugrunde liegende Stratigrafie und DichteVerteilung. Die Abb. 3.47c zeigt die Karte der simulierten Bouguer-Schwereanomalie und Abb. 3.47d die Differenz zwischen dieser und der gemessenen Schwereanomalie. Insbesondere entlang des DEKORP 9601 Reflexionsseismik-Profil ist diese Differenz recht gering, da dort die besten Informationen über die Untergrundstruktur vorliegen.

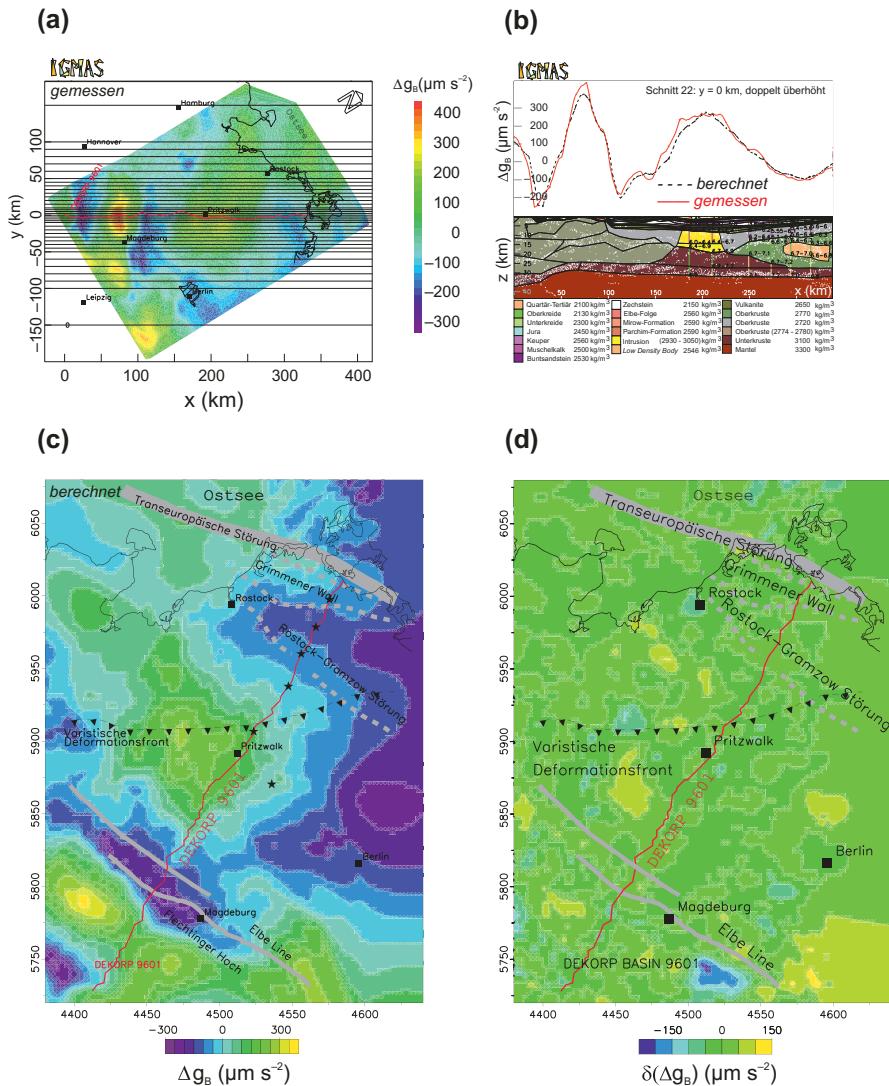


Abb. 3.47 Modellierung der Bouguer-Schwereanomalie des Nordostdeutschen Sedimentbeckens; (a) Karte der gemessenen Bouguer-Schwereanomalie (in $\mu\text{m s}^{-2}$) im Untersuchungsgebiet und Lage der SW-NO verlaufenden Vertikalschnitte. Das parallel zu den Schnitten verlaufende Seismikprofil DEKORP 9601 wird auf den Schnitt bei 0 km projiziert; (b) Vertikalschnitt durch das Modell bei $y = 0,000 \text{ km}$ mit Dichtestruktur sowie aus Reflexionsseismik abgeleiteten Schichtgrenzen mit Geschwindigkeiten in km s^{-1} ; (c) Karte der berechneten Bouguer-Schwereanomalie für das in (b) gezeigte Dichtemodell mit eingezeichneten tektonischen Elementen, dem Verlauf des Reflexionsprofils DEKORP 9601 und den Positionen der Weitwinkelseismik (★); (d) Differenz $\delta(\Delta g_B)$ zwischen gemessener und berechneter Bouguer-Schwereanomalie in (a) und (c) mit eingezeichneten tektonischen Elementen und dem Verlauf des Reflexionsprofils DEKORP 9601 (nach Kuder 2002)

3.6 Aufgaben und Fragen

(1) Das Schwerkraftpotenzial – eine harmonische Funktion?

Weisen Sie nach, dass das Schwerkraftpotenzial $U \propto r^{-1}$ für einen Aufpunkt $P(x,y,z)$ auf bzw. außerhalb einer Kugel (Gl. 3.10) eine harmonische Funktion ist, nicht aber das Schwerkraftpotenzial $U \propto \frac{1}{r} r^2$ für einen Aufpunkt innerhalb einer Kugel.

Hinweis: Verwenden Sie $r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2} = \{ \}^{1/2}$ für den Abstand vom äußeren Aufpunkt $P(x,y,z)$ zu einem Massenpunkt (x_m, y_m, z_m) der Kugel und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \{ \}^{1/2}$ für den Radius vom Zentrum der Kugel zum inneren Aufpunkt.

(2) Der Mond

Ein Ball von 10 kg Masse fällt auf dem Mond in Richtung Boden. Nach einer Sekunde beträgt seine Geschwindigkeit $1,623 \text{ m s}^{-1}$. Der Radius des Mondes beträgt 1 738 km.

- Wie groß sind Masse und mittlere Dichte des Mondes?
- Welche Gravitationskraft übt die Erde auf den Mond aus (Masse der Erde: $M_E = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, mittlere Entfernung Erde–Mond: $r_{E-M} = 384\,400 \text{ km}$)?
- Welche Gravitationskraft übt der Mond auf die Erde aus?

(3) Freier Fall im Schwerefeld der Erde

Bei einem Experiment zur Bestimmung der Erdanziehung fällt ein Gegenstand aus seiner Ruheposition vertikal nach unten.

- Welche Zeit erfordert ein freier Fall über eine Strecke von einem Meter bei einer vertikalen Schwerebeschleunigung von $g_z = 9,81 \text{ m s}^{-2}$?
- Wie groß ist die Geschwindigkeit des Gegenstands nach einem Meter?

(4) Schwereanomalie einer Kugel

Eine Kugel, mit dem Durchmesser d und der Dichte $\rho = 2\,500 \text{ kg m}^{-3}$, erzeugt eine vertikale Schwereanomalie Δg_z .

- Bestimmen Sie die Anomalie direkt über der Kugel an der Erdoberfläche als Funktion der Mittelpunktstiefe a und des Durchmessers d der Kugel.
- Bestimmen Sie eine Formel für die Nachweiggrenze $d(a)$ des Durchmessers einer Kugel als Funktion ihrer Mittelpunktstiefe bei einer Schweremessung. Gehen Sie bei der Schweremessung von einer Gerätegenauigkeit von $0,3 \mu\text{m s}^{-2}$ aus.

(5) Die Gravitationsbeschleunigung

Das Gravitationspotenzial eines Planeten $V = -GM/r$ hängt von seiner Masse M , dem Abstand r zum Mittelpunkt und der Gravitationskonstante G ab.

- Bestimmen Sie allgemein den Vektor der Gravitationsbeschleunigung. Es gilt $\vec{g} = -\text{grad}(V)$.
- Bestimmen Sie den Betrag der Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche des Jupitermonds Europa. Dessen Masse und Radius betragen $4,6 \times 10^{22}$ kg und 1 560 km.

(6) Auswertung einer Schweremessung

Bei einer Schweremessung wird die gesamte Schwere an einem Ort gemessen. Um diese Daten interpretieren und Anomalien erkennen und interpretieren zu können, bedarf es einiger Korrekturen und Reduktionen. Nennen Sie diese und erläutern Sie den Unterschied zwischen Korrektur und Reduktion.

(7) Schweremessungen entlang einer Straße

An drei Punkten entlang einer Straße wurden folgende freiluftkorrigierte Schwerewerte Δg_F bestimmt:

Station	Höhe (m)	Δg_F ($\mu\text{m s}^{-2}$)
1	12	134,5
2	17	139,6
3	27	149,8

- Wie groß ist die Dichte, mit der man die Bouguer-Anomalie entlang der Straße berechnen kann? Gehen Sie davon aus, dass die Dichte im Untergrund konstant ist. Nutzen Sie die Korrelation zwischen Freiluftschwere und Höhe aus.
- Bestimmen Sie unter Verwendung der berechneten Dichte die Bouguer-Reduktion an Station 2.

(8) Schwerepotenzial eines unendlich langen Zylinders

Das Gravitationspotenzial eines unendlich langen horizontalen Zylinders im Untergrund mit Radius R und Dichtekontrast $\Delta\rho$ beträgt im Abstand r zur Mitte des Zylinders (Militzer und Weber 1984):

$$U = -2\pi GR^2 \Delta\rho \ln\left(\frac{r}{R}\right).$$

Leiten Sie für ein Messprofil an der Erdoberfläche senkrecht zur Zylinderachse die Formel für die Anomalie der Vertikalschwere her.

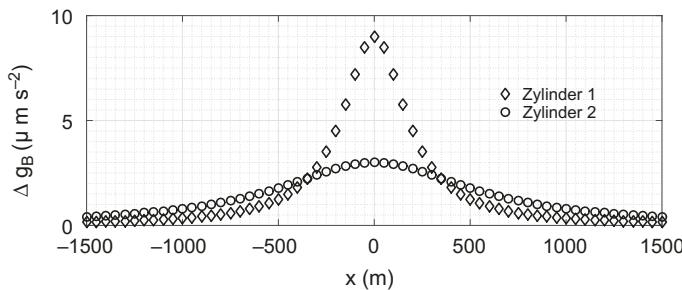


Abb. 3.48 Bouguer-Schwereanomalien auf Profilen senkrecht zum Streichen zweier unendlich langer, in unterschiedlichen Tiefen eingelagerter horizontaler Zylinder

(9) Die Halbwertsbreitenmethode

Für Objekte bestimmter geometrischer Gestalt kann aus Schwereprofilen über den Objekten deren Tieflage und Dichte bestimmt werden.

- a) Leiten Sie für einen senkrecht zum Profil liegenden, horizontalen Zylinder her, wie man seine Mittelpunktstiefe mit Hilfe der Halbwertsbreitenmethode bestimmen kann. Für die Schweranomalie gilt:

$$\Delta g = \frac{2\pi G R^2 \Delta \rho}{a} / \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right).$$

- b) Bestimmen Sie die Mittelpunktstiefe zweier vergrabener Zylinder aus ihren Schweranomalien in [Abb. 3.48](#).

Weiterführende Literatur

- Blakely, R.J.: Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- Götze, H.-J., Mertmann, D., Riller, U., Arndt, J.: Einführung in die Geowissenschaften. UTB Bd. 2106 Eugen Ulmer, Stuttgart (2015)
- Jacoby, W., Smilde, P.L.: Gravity Interpretation: Fundamentals and Application of Gravity Inversion and Geological Interpretation. Springer, Berlin/Heidelberg (2009)
- Keller, W.: Wavelets in Geodesy and Geodynamics. Walter de Gruyter, Berlin (2004)
- Nabighian, M. N., Ander, M. E., Grauch, V. J. S., Hansen, R. O., LaFehr, T. R., Li, Y., Pearson, W. C., Peirce, J. W., Phillips, J. D., Ruder, M. E., 2005. Historical development of the gravity method in exploration, *Geophysics*, 70(6), 63ND-89ND.
- Torge, W.: Geodäsie, 2. Aufl. Walter de Gruyter, Berlin (2003)