

Das weitaus meiste Geld für angewandte Geophysik wird für die Suche nach Erdöl und Erdgas ausgegeben, und hiervon allein ca. 90 % für die seismische Erkundung, überwiegend mit Reflexionsseismik. Industrielle Seismik wird heute wegen ihres großen logistischen und finanziellen Aufwands überwiegend von einigen wenigen internationalen seismischen Kontraktoren im Auftrag multinationaler Erdöl- und Erdgaskonzerne betrieben. Die seismische Erkundung des flachen Untergrunds sowie von Bauwerken erfordert dagegen einen wesentlich geringeren Aufwand. Sie wird daher heute auch von kleinen bis mittelständischen Firmen betrieben.

## 2.1 Geschichte

Die ersten Experimente zur Bestimmung seismischer Geschwindigkeiten mit „künstlichen Erdbeben“ führte der irische Ingenieur Robert Mallet (UK) im Jahr 1845 durch. Der schottische Physiker und Mathematiker Cargill Gilston Knott (UK) formulierte 1899 die Theorie von Reflexion und Brechung seismischer Wellen an Grenzflächen. Die deutschen Geophysiker Karl Bernhard Zoeppritz und Emil Wiechert führten diese Arbeiten fort und gaben 1907 Ausdrücke für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten seismischer Wellen an Grenzflächen an.

### Robert Mallet

Robert Mallet, FRS, 1810–1881; irischer Geophysiker, Bauingenieur mit bahnbrechenden Arbeiten in der frühen Erdbebenforschung. Er prägte u. a. die Fachbegriffe Seismologie, Isoseistenkarte und Epizentrum.



Robert Mallet (NN, 2011)

Nach seiner Schulzeit am Trinity College in Dublin, die er als Zwanzigjähriger beendete, trat er in die Eisengießerei seines Vaters ein. Diese lieferte Eisen-guss für Eisenbahnen, Leuchttürme und Brücken. Im Jahr 1832 wurde er als nur Zweiundzwanzigjähriger in die Royal Irish Academy gewählt und 1838 auf Lebenszeit in die Royal Geological Society of Ireland, deren Präsident er zwischen 1846 und 1848 war. 1846 veröffentlichte er sein Hauptwerk, *The Dynamics of Earthquakes*, eine der Grundlagen der modernen Seismologie. In den Jahren 1852–1858 erstellte er gemeinsam mit seinem Sohn John William Mallet den Erdbebenkatalog der *British Association for the Advancement of Science*. Dieser führte die bekannten Erdbeben auf und beschrieb ihre Auswirkungen. Überdies unternahm er Explosionsexperimente zur Bestimmung der Laufzeit seismischer Wellen in Locker- und Festgestein.

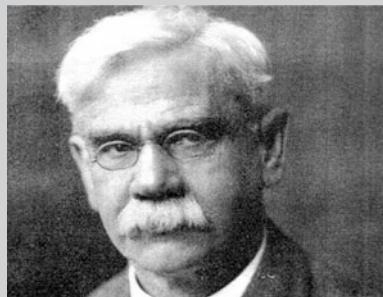
Nach Wikipedia ([2016b](#))

### Cargill Gilston Knott

Cargill Gilston Knott, 1856–1922; schottischer Physiker, angewandter Mathematiker und Pionier der Seismologie. Er studierte Physik an der University of Edinburgh, wo er 1879 promoviert wurde. 1883 wurde er auf Empfehlung von Lord Kelvin zum Professor an der Universität Tokio berufen. Dort sollte er zusammen mit anderen ausländischen Wissenschaftlern Erdbeben erforschen. Zu diesen gehörten der Physiker James Alfred Ewing,

der Ingenieur Thomas Lomar Gray und der Geologe und spätere Seismologe John Milne, die gemeinsam den ersten Seismografen entwickelten.

Knott lehrte Mathematik und Physik und baute mit Milne und Gray sowie dem Japaner Fusakichi Omori ein Seismografen-Netzwerk auf. Knott wandte die Fourier-Analyse auf die Bearbeitung der seismischen Zeitreihen an und unternahm eine geomagnetische Kartierung von Japan mit dem Geophysiker Tanakadate Aikitsu. 1891 kehrte er nach Edinburgh zurück, wo er *reader* für angewandte Mathematik an der Universität wurde. In der Seismologie ist er für die 1899 veröffentlichten Gleichungen bekannt, welche die Reflexion von seismischen Wellen an Gesteinsschichten beschreiben.



Cargill Gilston Knott (Penicuik 2012)

Er war Fellow der Royal Society (1920) und der Royal Society of Edinburgh (1880) und Präsident der Scottish Meteorological Society. 1891 verlieh ihm der japanische Kaiser den Orden der aufgehenden Sonne.

Nach Wikipedia ([2016a](#))

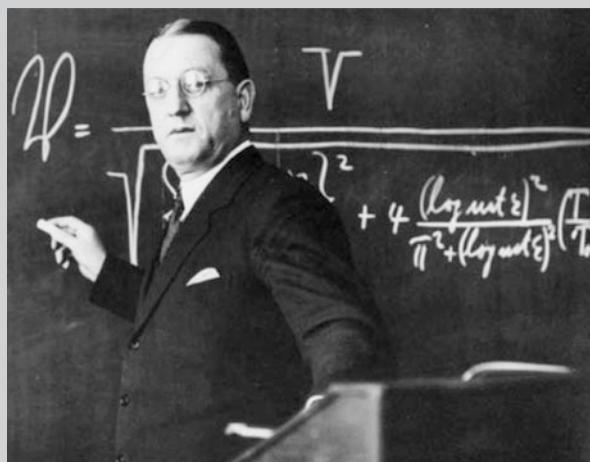
Die Arbeiten von Knott, Wiechert und Zoepritz waren grundlegend für die nach dem ersten Weltkrieg einsetzende Entwicklung der Explorationsseismik. Im Dezember 1919 beantragte der deutsche Seismologe Ludger Mintrop ein Patent auf die Refraktionsmethode, gründete die Firma „Seismos“ und rüstete zwei Messtrupps aus, die in Mexiko und im Gebiet der Golfküste der USA tätig waren. Die Entdeckung des Salzstocks bei Orchard in Oklahoma im Jahr 1924 löste eine intensive refraktionsseismische Aktivität aus, die in den folgenden sechs Jahren zur Entdeckung fast aller flachen Salzstöcke in diesem Gebiet führte. Damit konnten diese klassischen Erdöl-Fallenstrukturen erstmalig von der Erdoberfläche aus mit geophysikalischen Methoden gefunden werden.

### Ludger Mintrop

Ludger Mintrop, 1880–1956; deutscher Markscheider und Geophysiker, Professor an der Universität Breslau, den Technischen Hochschulen Breslau und

Aachen und seit 1920 Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina. Als Assistent des Markscheiders Karl Haussmann an der Technischen Hochschule Aachen verlegte er die 1905 in einem Steinkohlebergwerk nördlich von Aachen installierte Seismometerstation in die alte Bergschule im Aachener Stadtgebiet. Als eine der ersten in Deutschland war sie mit Wiechert-Seismografen ausgestattet, wurde im 2. Weltkrieg beschädigt, 2004 demontiert und in die Erdbebenstation Bensberg der Universität zu Köln verlagert.

Als Schüler des Seismologen Emil Wiechert in Göttingen erkannte Mintrop als einer der Ersten die Bedeutung von elastischen Wellen für die Erkundung des Untergrunds und entwickelte für seismische Feldmessungen geeignete mobile Seismografen. Mit dem im Dezember 1919 angemeldeten Reichspatent über das *Verfahren zur Ermittlung des Aufbaus von Gebirgschichten* begründete er die Refraktionsseismik. 1921 etablierte Mintrop die Seismos GmbH als Ausgründung (*spin-off*) zur wirtschaftlichen Verwertung seiner akademischen Forschungsergebnisse. Diese unternahm erste seismische Kartierungen an norddeutschen Salzstöcken und den Erdölvorkommen bei Wietze nördlich von Hannover. International erzielte er den Durchbruch mit der seismischen Entdeckung des Orchard-Salzstocks in Texas, dem im folgenden Jahrzehnt ein rasanter Aufschwung der angewandten Seismik und eine erfolgreiche weltweite Geschäftstätigkeit der Seismos folgten. Mintrop gehörte 1922 zu den Gründungsmitgliedern der Deutschen Seismologischen Gesellschaft (der späteren Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft). Im Jahr 1955 erhielt er das *Große Verdienstkreuz* des Verdienstordens der Bundesrepublik Deutschland.



Ludger Mintrop an der Universität Breslau im Jahr 1935 (Keppner 2006)

Ab 1930 gewann die Reflexionsmethode zunehmend an Bedeutung, die für die Abbildung anderer Strukturen geeigneter (und vielseitiger) ist. Sie geht auf die Pionierarbeit von Reginald Fessenden um 1913 zurück, der nach dem Untergang der *Titanic* im Jahr 1912 Methoden zur Wassertiefenbestimmung und Ortung von Eisbergen mit Schallwellen entwickelte. In den 1920ern entwickelte John Clarence Karcher<sup>1</sup> einen Reflexionsseismografen für den Geländeeinsatz. Weitere wichtige Akteure bei der Entwicklung der Reflexionsmethode waren die US-Amerikaner William. P. Haseman, Engelhardt August Eckhardt und Burton McCollum. Doch erst 1927, mit dem ersten kommerziellen Einsatz der Reflexionsmethode im Mand-Feld in Oklahoma, begann die Reflexionsseismik an Popularität zu gewinnen. Heute hat sie die Refraktionsseismik bis auf bestimmte Einsatzgebiete weitgehend verdrängt. Bei der ersten Kampagne in Oklahoma verursachte die Reflexion an der Grenze zwischen dem Sylvan-Ton mit langsameren und dem Viola-Kalkstein mit schnelleren seismischen Geschwindigkeiten charakteristische Einsätze. Die Korrelation bestimmter Einsätze in Mehrkanal-Aufzeichnungen wird auch heute zur Identifizierung von Reflektoren genutzt, allerdings nach einer ausführlichen vorangegangenen Signalverarbeitung.

Im Jahr 1937 wurden von Frank Rieber (USA) über die Einzelkurven hinaus Dichteschriebe (und Fotozellen zur Reproduktion) eingeführt. Aber erst mit der kommerziellen Verfügbarkeit von Magnetband wurde 1953 eine anschließende Signalverarbeitung möglich. Moderne Techniken der digitalen Informationsverarbeitung wurden mit Beginn des *Geophysical Analysis Group Project* am MIT 1953 eingeführt. Und bereits 1956 wurde die *CDP-(common depth point)-* bzw. *CMP-(common midpoint)-*Methode patentiert. Die mit dieser Methode eingeführte Mehrfachüberdeckung ermöglichte verschiedene neue Methoden zur Reduktion der Störpegel, einschließlich der Signaturen von multiplen Reflexionen. Dies führt zu einer verbesserten Datenqualität und schafft die Voraussetzung für die Bestimmung von Geschwindigkeiten aus den Krümmungen der Laufzeitkurven von Reflexionen (siehe u. a. [Abschn. 2.4.1](#)).

<sup>1</sup>John Clarence Karcher, 1894–1978; US-amerikanischer Geophysiker und Geschäftsmann, der den Reflexions-Seismografen erfand (Patente 1919 angemeldet) und vermarktetete. Karcher arbeitete zunächst für das *Bureau of Standards*, schloss sich aber dann der *Western Electric Company* an, wo er an Telegrafenkabeln zur Verlegung in der Tiefsee arbeitete. 1921 wurde er Vizepräsident der *Geophysical Research Corporation (GRC)* in Tulsa, einer Tochtergesellschaft von *Amerada*, einer der zu ihrer Zeit führenden Firmen zur Erkundung und Ausbeutung von Kohlenwasserstoff-Lagerstätten. Während der folgenden fünf Jahre führte GRC die seismische Reflexionsmethode ein. Zusammen mit Eugene McDermott gründete er im Jahr 1930 die Firma *Geophysical Service Inc.*, eine der ersten seismischen Erkundungs-Dienstleiter für die Erdölindustrie, aus der heraus sich später die Firma *Texas Instruments* entwickeln sollte.

## 2.2 Seismische Wellen und ihre Ausbreitung

Seismische Wellen sind zeitlich begrenzte (transiente) elastische Auslenkungen von Materie, welche sich räumlich und zeitlich quasi-periodisch ausbreiten. Darin gleichen sie vielen anderen Wellenphänomenen.

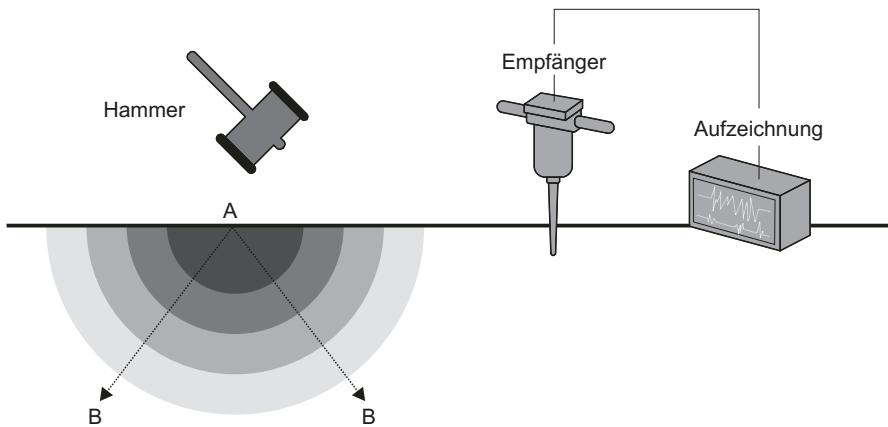
### 2.2.1 Wellen im täglichen Leben

Wasserwellen sind sog. Oberflächenwellen, welche sich, mit der Tiefe stark gedämpft, an der Oberfläche ausbreiten. Konzentrische Wasserwellen könnten im Prinzip zur Entfernungsmessung benutzt werden. Ganz analog werden seismische Wellen zur Bestimmung der Epizentren von Erdbeben und deren Herdentfernung sowie der Struktur der Erde genutzt (siehe z. B. Clauser 2016). Dies setzt voraus, dass die Wellenausbreitung in der Erde und die damit verbundenen physikalischen Prozesse verstanden sind. Die dafür entwickelten Methoden sind häufig übertragbar auf die Erkundung von Strukturen in der Oberkruste.

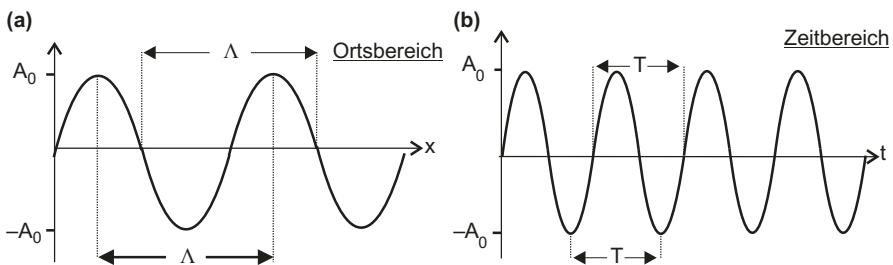
Ein simples Beispiel zeigt Abb. 2.1: Die Entfernung zwischen Quelle und Empfänger kann bestimmt werden, wenn die Wellengeschwindigkeit im Untergrund bekannt ist (z. B. aus Labormessungen an Gesteinsproben) und die Zeitdifferenz zwischen Hammerschlag und Eintreffen der Welle am Empfänger gemessen werden kann. Ähnlich wie sich bei Gewittern Blitz (mit Lichtgeschwindigkeit  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ) und Donner (mit Schallgeschwindigkeit in Luft  $v = 330 \text{ m s}^{-1}$ ) unterschiedlich schnell ausbreiten, macht man sich in der Seismologie die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten verschiedener seismischer Wellen zunutze. In der angewandten Seismik wird mit künstlichen Quellen gearbeitet (Hammerschlag, Fallgewichte, Rüttler, pneumatische Quellen, Sprengungen), sodass der Zeitpunkt der Signalauslösung an der jeweiligen seismischen Quelle meist bekannt ist. Die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten und Eigenschaften der verschiedenen Wellenarten werden dann zur Gewinnung spezieller Informationen genutzt, ebenso wie die unterschiedlichen elastischen Eigenschaften der verschiedenen Gesteine und Materialien.

Weitere, allen vertraute Wellenphänomene neben der Ausbreitung von Schall (besseres Hören unter Wasser) und Licht (Ankertrosse erscheint unter Wasser abgeknickt) sind elektromagnetische Wellen (Radio, Fernsehen, Funktelefonie), Mikrowellen (zur medizinischen Wärmebehandlung und zum Kochen). Allen diesen Wellenphänomenen ist gemein, dass sie zeitlich begrenzte, quasi-periodische Vorgänge in Raum und Zeit sind.

Wellenfronten sind jene Orte im Wellenfeld, an denen sich die Partikel in der gleichen Phase befinden, d. h. dem gleichen Auslenkungszustand. In einem homogenen und isotropen Medium ist die Ausbreitungsrichtung einer Welle immer senkrecht zur Wellenfront. Wellenstrahlen symbolisieren die Ausbreitungsrichtung. Dies erlaubt viele Analoga zu den Methoden der Strahlenoptik bei der Untersuchung von Reflexion und Brechung an Materialgrenzen. Strahlen sind aber keine unmittelbar wahrnehmbaren physikalischen Erscheinungsformen elastischer Wellen wie die



**Abb. 2.1** Erzeugung einer elastischen Welle durch Hammerschlag; Grauschattierung: Wellenfronten; Pfeile von A nach B: zwei exemplarisch dargestellte Wellenstrahlen



**Abb. 2.2** Auslenkung eines Partikels in Raum (a) und Zeit (b) beim Durchgang einer seismischen Welle ( $\Lambda$ : Wellenlänge; T: Periode; Clauser 2016)

Fronten, deren Ausbreitung sie symbolisieren. Dies unterscheidet sie von optischen Strahlen.

[Abb. 2.2a](#) zeigt das Muster der Partikelauslenkung durch das in [Abb. 2.1](#) dargestellte Wellenfeld im Ortsbereich entlang des Profils von A nach B zu einem bestimmten Zeitpunkt; [Abb. 2.2b](#) zeigt den zeitlichen Verlauf der Partikelauslenkung desselben Wellenfeldes im Zeitbereich an einem bestimmten Ort.

Die Frequenz f beschreibt die zeitliche Periodizität der Welle. Sie ist über die Periode T definiert:

$$f = \frac{1}{T}, \quad (\text{in } \text{s}^{-1} \text{ bzw. Hz}); \quad (2.1)$$

die Kreisfrequenz  $\omega$  normiert die Periode zusätzlich auf  $2\pi$ , den Umfang des Einheitskreises:

$$\omega = \frac{1}{T/2\pi} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{in rad s}^{-1}). \quad (2.2)$$

Die Wellenzahl  $k$  beschreibt die örtliche Periodizität der Welle. Sie ist über die Wellenlänge  $\Lambda$  definiert:

$$k = \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (2.3)$$

Somit entspricht die Wellenzahl im Ortsbereich der Kreisfrequenz im Zeitbereich.

Mit der durch den Quotienten aus Weg (Wellenlänge  $\Lambda$ ) und Zeit (Periode  $T$ ) definierten Geschwindigkeit  $v$  folgt:

$$v = \frac{\Lambda}{T} = \Lambda f. \quad (2.4)$$

## 2.2.2 Elastizität

Wenn Partikel nach einer Auslenkung in ihre Ruhposition zurückkehren, spricht man von elastischem Verhalten. Sind die damit einhergehenden Stauchungen, Dehnungen und Scherungen infinitesimal klein, so werden die Beziehungen zwischen mechanischen Spannungen und diesen infinitesimalen Verformungen durch die lineare Elastizitätstheorie beschrieben. Diese nutzt die Tatsache, dass eine Taylor-Entwicklung einer solchen infinitesimalen Verformung gut durch ihre erste Näherung beschrieben wird, in welcher Terme höherer Ordnung als der linearen vernachlässigt werden. Eine solche lineare Näherung ist das nach dem englischen Physiker Robert Hooke (1635–1703) benannte hookesche Gesetz [Gl. 2.5](#). Es formuliert den Zusammenhang zwischen der wirksamen mechanischen Normalspannung (*normal stress*)  $\sigma$  = Kraft/Fläche (in  $\text{N m}^{-2} = \text{Pa}$ ) und der dimensionslosen Dehnung (*strain*)  $\epsilon$  = Längenänderung/Länge =  $\Delta\ell/\ell$  ([Abb. 2.3](#)):

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{bzw.} \quad \epsilon = \frac{1}{E}\sigma. \quad (2.5)$$

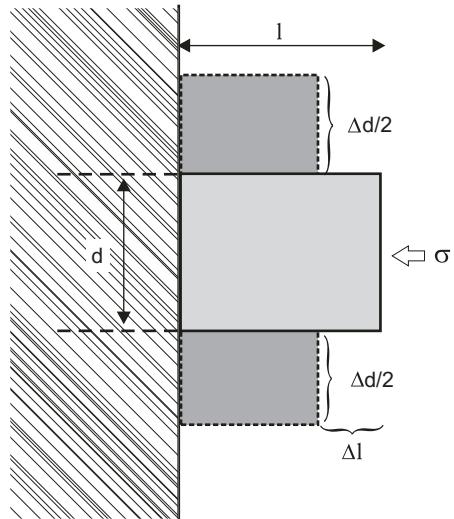
In der in der Physik (und Seismik) üblichen Richtungskonvention sind jeweils Zugspannungen und Dehnungen positiv, Druckspannungen und Stauchungen negativ.

Der Proportionalitätsfaktor  $E$  ist der Elastizitätsmodul (*Young's modulus*), ein Maß für die Steifigkeit des Materials. Die skalare Form des hookeschen Gesetzes setzt voraus, dass die skalare Druck- bzw. Zugspannung  $\sigma$  in derselben Richtung wirkt, in der auch die skalare Dehnung  $\epsilon$  erfolgt. Dies ist die Vereinfachung des vom französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) aufgestellten allgemeineren Zusammenhangs, der keine Kollinearität von Ursache und Wirkung voraussetzt. Er fasst die Normalspannungen in Druckrichtung und die tangential angreifenden Scherspannungen zu einem Spannungstensor  $\underline{\sigma} = \sigma_{ij}$  zusammen, der durch den Elastizitätstensor vierter Stufe  $\mathbf{E}_{ijkl}$  mit dem Dehnungstensor  $\underline{\epsilon}_{kl}$  verknüpft ist:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{E}_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2.6)$$

mit  $[E] = [\sigma]/[\epsilon] = \text{Pa}$  (zu Vektoren und Tensoren sowie einigen Rechenregeln vgl. [Abschn. 4.1](#) im Anhang). Hierbei bezeichnet die Komponente  $\sigma_{ij}$  des Spannungstensors die Projektion der Kraft, die auf eine senkrecht zur  $i$ -Achse liegende

**Abb. 2.3** Zur Definition des Elastizitätsmoduls und der Poisson-Zahl (Clauser 2016)



Einheitsfläche wirkt, auf die j-Achse. Entsprechend bezeichnet die Komponente  $\varepsilon_{ij}$  des Dehnungstensors die Projektion der Dehnung einer zur i-Achse parallelen Einheitsstrecke auf die j-Achse.

Im allgemeisten Fall besitzt der Elastizitätstensor 81 Komponenten. Doch von diesen sind maximal 36 unabhängig, da die Spannungs- und Dehnungstensoren  $\sigma_{ij}$  und  $\varepsilon_{kl}$  beide symmetrisch sind und jeweils sechs unabhängige Elemente besitzen. Von diesen entfallen weitere 15 durch zusätzliche Symmetrien, wie eine vertiefte Betrachtung ergibt: Da bei der Berechnung der Dehnungsenergie und der Bewegungsgleichung die Tensorelemente  $E_{ijkl}$  und  $E_{klij}$  niemals einzeln auftreten, sondern nur als Summe, können sie ohne Einschränkung der Allgemeinheit als gleich angenommen werden:  $E_{ijkl} = E_{klij}$  (siehe Kap. 4.2 im Anhang). Im allgemeisten Fall besitzt der Elastizitätstensor somit 21 unabhängige Elemente. Im Fall von Transversal- bzw. Schichtungs-Isotropie sind noch fünf Konstanten linear unabhängig, bei kubischen Kristallen drei und bei isotropem Material schließlich nur noch zwei.

Ist der Probekörper starr ummantelt, kann bei axialer Belastung keine Querdehnung auftreten. Dann gilt statt Gl. 2.5:

$$\sigma = M \varepsilon. \quad (2.7)$$

Der Modul  $M$  ist für diesen Belastungsfall größer als  $E$ : Das Material ist weniger kompressibel, da es nicht seitlich nachgeben kann.

Bei einaxialer Stauchung kommt es neben der Längenverkürzung  $\Delta\ell$  auch zu einer Vergrößerung des Probendurchmessers  $d$ . Das Querdehnungsverhältnis  $\nu$  wird nach dem französischen Mathematiker Siméon Denis Poisson (1781–1840) als Poisson-Zahl (*Poisson's ratio*) bezeichnet (Gl. 2.8):

$$\nu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta\ell/\ell} \leq \underbrace{0,5}_{\text{Flüssigkeiten}} \quad [-]. \quad (2.8)$$

Für die Krusten- und Mantelgesteine gilt  $\nu = 0,2\text{--}0,4$ . Sie sind in guter Näherung „ideal elastische Körper“, indem sie auf eine einwirkende Kraft ohne Verzögerung mit Verformung reagieren (siehe z. B. Norm DIN 13316 1980). Für Gase und Flüssigkeiten mit verschwindendem Schermodul nimmt die Poisson-Zahl ihren Maximalwert von  $\nu = 0,5$  an. Eine untere Grenze ist  $\nu = 0$  für alle „normalen“ Materialien also jene, die bei einer Stauchung senkrecht zur Stauchungsrichtung expandieren. Poisson selbst charakterisierte einen ideal elastischen Körper durch einen Wert von  $\nu = \frac{1}{4}$  (siehe Kertz 1969, S. 43), für den sich einfache Beziehungen zwischen dem Scher- und Kompressionsmodul sowie den Geschwindigkeiten von Kompressions- und Scherwellen ergeben (siehe Gl. 2.12 bzw. Gl. 2.20).

Negative Poisson-Zahlen kennzeichnen dagegen jene als auxetisch (*auxetic*) bezeichneten Materialien (bestimmte Pyrite, Cadmium-Einkristalle,  $\alpha$ -Cristobalit sowie einige spezielle makroskopische Waben- und Schaumstrukturen), die bei einer Streckung senkrecht zur Streckungsrichtung breiter bzw. bei einer Stauchung senkrecht zur Stauchungsrichtung dünner werden. Der Wertebereich der Poisson-Zahl ist nach unten durch  $-1 < \nu$  begrenzt. Damit beträgt der gesamte Wertebereich der Poisson-Zahl  $-1 < \nu \leq \frac{1}{2}$  (zur Ableitung des Wertebereichs der Poisson-Zahl siehe Kap. 4.3 im Anhang).

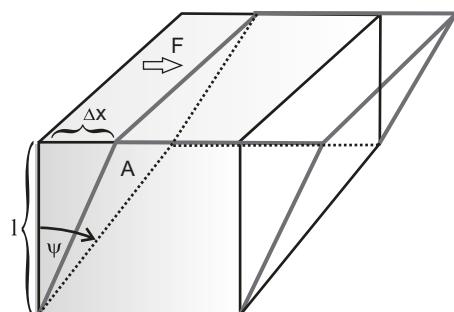
Steht ein Körper unter allseitig gleichem (hydrostatischem) Druck  $p$ , so verändert er sein Volumen ohne Formänderung um  $\Delta V$ . Mit dem Kompressionsmodul  $K$  (*bulk modulus*), einem Maß der Inkompressibilität, und der relativen Volumenänderung bzw. Dilatation  $\Delta_V = \Delta V / V$  gilt dann in Analogie zu Gl. 2.5:

$$p = -K \frac{\Delta V}{V} = -K \Delta_V. \quad (2.9)$$

Greift an der Stirnfläche  $A$  eine Kraft  $F$  tangential an, so wird eine Scher- bzw. Schubspannung  $\sigma_s = F / A$  erzeugt (Abb. 2.4). In diesem Fall ändert der Körper bei konstantem Volumen seine Gestalt durch Scherung. In der linearen Elastizitätstheorie vermittelt der Schub- oder Schermodul  $G$  (*rigidity modulus, shear modulus*) den Zusammenhang zwischen Scher- bzw. Schubspannung (*shear stress*)  $\sigma_s$  und (infinitesimaler) Scherung (*shear*)  $\psi$ . Mit  $\Delta x / l = \tan(\psi) \approx \psi$  gilt:

$$\sigma_s = G\psi \text{ (Pa).} \quad (2.10)$$

**Abb. 2.4** Zur Definition des Schermoduls (Clauser 2016)



Von den fünf vorgenannten elastischen Konstanten sind im homogenen, isotropen Material nur zwei voneinander unabhängig. Die anderen können hieraus berechnet werden (siehe Tab. 2.1), beispielsweise K, M und G aus E und v:

$$K = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-2v)}; \quad M = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} = K + \frac{4}{3}G; \quad G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+v)} = \frac{3}{2} \frac{K(1-2v)}{(1+v)}. \quad (2.11)$$

Da E (bzw. M) und G immer positiv sind, muss die Poisson-Zahl größer als -1 sein. Für eine Poisson-Zahl von  $v = 1/4$  gilt:

$$K = \frac{2}{3}E; \quad M = \frac{6}{5}E; \quad G = \frac{3}{5}K. \quad (2.12)$$

Ebenfalls verwendet werden die laméschen Konstanten<sup>2</sup>  $\lambda$  und  $\mu$  bzgl. der elastischen Verformung, wobei  $\mu = G$  der Schermodul ist, und für  $\lambda$  gilt:

$$\lambda = \frac{E v}{(1+v)(1-2v)} \quad (\text{Pa}). \quad (2.13)$$

Insgesamt gelten zwischen den fünf elastischen Konstanten E, v,  $\lambda$ , G und K die in (Tab. 2.1) aufgeführten Beziehungen.

Für den Elastizitätstensor gilt im isotropen Fall unter Beachtung der Summenkonvention (vgl. Kap. 4.1 im Anhang), bei der über gleiche Indices summiert wird:

$$\mathbf{E}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \boldsymbol{\epsilon}_{kk} + 2G \boldsymbol{\epsilon}_{ij}. \quad (2.14)$$

Die Spur des Dehnungstensors ist die Dilatation  $\Delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  (siehe Gl. 2.42). Hieraus folgt:

$$\sigma_{ii} = \lambda \Delta_V + 2G \boldsymbol{\epsilon}_{ii}, \quad \sigma_{ij} = 2G \boldsymbol{\epsilon}_{ij} \text{ bzw.}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda \Delta_V + 2G \boldsymbol{\epsilon}_{11} & 2G \boldsymbol{\epsilon}_{12} & 2G \boldsymbol{\epsilon}_{13} \\ 2G \boldsymbol{\epsilon}_{21} & \lambda \Delta_V + 2G \boldsymbol{\epsilon}_{22} & 2G \boldsymbol{\epsilon}_{23} \\ 2G \boldsymbol{\epsilon}_{31} & 2G \boldsymbol{\epsilon}_{32} & \lambda \Delta_V + 2G \boldsymbol{\epsilon}_{33} \end{bmatrix}.$$

Je mehr Widerstand ein Material einer Verformung entgegengesetzt, desto größer sind seine elastischen Konstanten. Die Tab. 2.2 zeigt typische Werte für einige Materialien und Gesteine:

<sup>2</sup>Die Koeffizienten  $\mu$  und  $\lambda$  sind die nach dem französischen Mathematiker und Physiker Gabriel Lamé (1795-1870) benannten laméschen Konstanten bzgl. der viskosen Verformung, analog zu den gleichnamigen Koeffizienten der elastischen Verformung in den Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungslehre. Dort bezeichnen  $\lambda$  und  $\mu$  jedoch die Volumen- bzw. Scherviskosität. Trotz desselben Namens handelt es sich jedoch um unterschiedliche Größen: Da die viskose Verformung im Unterschied zur elastischen nicht direkt von der Dehnung, sondern von ihrer Rate abhängt, ist die Einheit der Viskosität Pa s und nicht Pa wie jene der elastischen laméschen Konstanten.

**Tab. 2.1** Beziehungen zwischen Elastizitätsmodul E, Poisson-Zahl  $\nu$ , laméscher Konstante  $\lambda$ , Schermodul G und Kompressionsmodul K (aus Sheriff 2002)

unabhängige Konstanten	berechnete Konstanten				
	E =	$\nu =$	G =	K =	$\lambda =$
E, $\nu$	–	–	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
E, G	–	$\frac{E-2G}{2G}$	–	$\frac{EG}{3(3G-E)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
E, K	–	$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{3KE}{9K-E}$	–	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$
E, $\lambda$	–	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+R}$	$\frac{E-3\lambda+R}{4}$	$\frac{E+3\lambda+R}{6}$	–
$\nu, G$	$2G(1+\nu)$	–	–	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$
$\nu, K$	$3K(1-2\nu)$	–	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	–	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$
$\nu, \lambda$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	–	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	–
G, K	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	–	–	$\frac{3K-2G}{3}$
G, $\lambda$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	–	$\frac{3\lambda+2G}{3}$	–
K, $\lambda$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	–	–

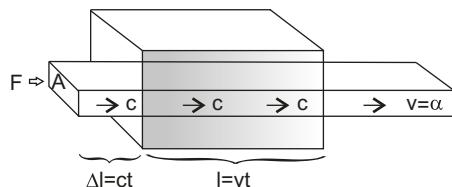
### 2.2.3 Elastische Wellen

Elastische Wellen sind Wellen, die im durchlaufenden Medium örtlich und zeitlich quasi-periodische Auslenkungen bzw. Verformungen verursachen. Im Gegensatz zu den ebenfalls elastischen Kompressionswellen des Schalls in Luft und Wasser gibt es in Festkörpern mehrere Arten von Wellen. Sie unterscheiden sich in der Art der Schwingungsbewegung, der Schwingungsebene (Polarisation) und der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Wellengeschwindigkeit  $v$  bestimmt Ausbreitungsweg und Laufzeit und liefert hierdurch Aufschluss über die durchquerten Strukturen. Ihr Zusammenhang mit den elastischen Parametern lässt sich einfach aus dem hookeschen Gesetz und dem Impulssatz (Gl. 2.15) ableiten:

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow (m \text{ konstant:}) & mdv = Fdt \\ \rightarrow (F \text{ konstant:}) & mv = Ft \end{array} \right. . \quad (2.15)$$

**Tab. 2.2** Elastizitäts- (E), Kompressions- (K) und Schermodul G sowie Poisson-Zahl  $\nu$  für verschiedene Gesteine und Materialien (Daten: Kertz 1969; Gebrände 1982; EPFL undatiert)

Material (Druck in MPa) <sup>3</sup>	E (GPa)	K (GPa)	G(GPa)	$\nu$ (-)
<b>Granit</b> (0/100/500/1 000)	43,0/73,7/83,0/ 85,9	19,8/45,4/ 52,4/56,79	18,8/30,0/ 33,6/34,4	0,14/0,23/ 0,24/0,25
<b>Gabbro</b> (5/100/500/1 000)	111,6/115,8/118,7/ 120,8	94,3/104,3/ 111,4/115,4	42,8/44,0/44,9/ 45,6	0,30/0,32/ 0,32/0,33
<b>Kalkstein</b> (0/100/300/1 000)	79,9/81,7/82,8/ 83,3	66,6/73,1/ 77,0/77,7	30,7/31,1/ 31,4/31,5	0,30/0,31/ 0,32/0,32
<b>Quarzit</b> (0/100/500/1 000)	65,8/90,5/95,9/ 98,9	41,7/39,6/ 43,7/47,4	26,6/40,5/ 42,3/42,9	0,24/0,12/ 0,13/0,15
<b>Sandstein</b> (5,3/10,4/20,8/34,6)	2,67/3,70/ 4,94/5,94	6,71/6,64/ 6,79/7,32	2,18/1,79/ 1,32/0,93	0,43/0,41/ 0,38/0,37
<b>Stahl</b> (0/100/500/1 000)	207,6/209,3/ 212,3/215,2	162,0/166,3/ 170,9/172,4	80,7/81,1/ 82,2/83,3	0,29/0,29/ 0,29/0,29
<b>Naturkautschuk</b>	0,0015–0,0025	–	0,0006–0,0008	0,5
<b>Kork</b>	0,0013–0,005	–	0,0025–0,008	0,05–0,45
<b>Wasser</b>	–	2,0	–	0,5
<b>Eis</b>	9,1	6,4	1,5	0,39
<b>Porzellan</b>	58,2	37,4	23,5	0,24
<b>Quarzglas</b>	75,1	37,8	32,1	0,17
<b>Spiegelglas</b>	70,9	41,1	29,2	0,21

**Abb. 2.5** Kompression eines Stabs (Clauser 2016)

Wirkt eine Kraft  $F$  auf die Stirnfläche  $A$  eines Stabs für den Zeitraum von  $t' = 0$  bis  $t' = t$  ein, so bewegen sich alle Materieteilchen mit der Verschiebungsgeschwindigkeit  $c = \Delta l/t$  nach rechts (Abb. 2.5). Die Kompression soll enden, wenn die Kompressionsfront die Stelle  $l = vt$  erreicht hat. Aus dem hookeschen Gesetz (Gl. 2.5) folgt dann:

$$F = AE \frac{\Delta l}{l} = AE \frac{ct}{vt} = AE \frac{c}{v}. \quad (2.16)$$

<sup>3</sup>Neben der SI-Einheit Pa hält sich in der Literatur hartnäckig das bar als Einheit des Drucks. Die Umrechnung erfolgt über den Faktor  $10^5$ : 1 bar = 0,1 MPa; 1 mbar = 1 hPa; 1 kbar = 0,1 GPa bzw.: 1 Pa = 10  $\mu$ bar; 1 kPa = 10 mbar; 1 MPa = 10 bar; 1 GPa = 10 kbar.

Aus dem Impulssatz (Gl. 2.15) folgt für die mit  $c$  bewegte Masse  $m$  der Dichte  $\rho$ :  $m c = F t$ .

Mit  $m = \rho A l$  und  $l = v t$  folgt hieraus:  $A l \rho c = A v t \rho c = F t$ . Einsetzen von  $F$  aus Gl. 2.16 ergibt schließlich:

$$v^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{bzw.} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.17)$$

Denkt man sich ein lateral unbegrenztes Medium aus dicht gepackten Stäben aufgebaut, so erfolgt bei der Ausbreitung von Kompressionswellen in diesem Stabbündel keine Querdehnung der Stäbe. Es muss also im Gegensatz zum obigen Gedankenexperiment lediglich  $E$  durch  $M$  ersetzt werden. Dann folgt mit den Beziehungen aus Tab. 2.2 und Gl. 2.11 für die Geschwindigkeit  $\alpha$  der Kompressionswellen:

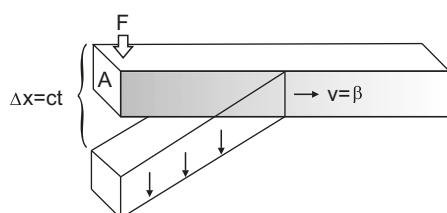
$$\alpha = \sqrt{\frac{M}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}. \quad (2.18)$$

Greift dagegen zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Kraft  $F$  tangential an der Stirnfläche  $A$  an, so breitet sich die resultierende Scherdeformation mit der Geschwindigkeit  $v = \beta$  in Stabrichtung aus (Abb. 2.6). Ersetzt man in den obigen Überlegungen den Elastizitätsmodul  $E$  durch den Schermodul  $G$  und  $\Delta l$  durch  $\Delta x$ , so ergibt sich analog für die Geschwindigkeit  $\beta$  von Scherwellen:

$$\beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho} \frac{(1 - 2\nu)}{2\nu}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1 + \nu)}}. \quad (2.19)$$

Da die Teilchenbewegung bei Kompressionswellen in Ausbreitungsrichtung erfolgt, nennt man diese auch Longitudinalwellen. Bei Scherwellen erfolgt diese senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Daher werden diese als Transversalwellen bezeichnet. Für das Verhältnis der beiden Wellengeschwindigkeiten und die Poisson-Zahl  $\nu$  gilt (siehe Aufg. (1) in Abschn. 2.7):

**Abb. 2.6** Scherung eines Stabs (Clauser 2016)



$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{1-\nu}{1/2-\nu}} \text{ bzw. } \nu = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2\alpha^2 - 2\beta^2}. \quad (2.20)$$

Für eine Poisson-Zahl von  $\nu = \frac{1}{4}$  folgt für das Verhältnis der beiden Wellengeschwindigkeiten  $\alpha/\beta = \sqrt{3} \approx 1,7$ . Da die Longitudinalwelle stets vor der Transversalwelle eintrifft, wird Erstere Primär- oder P-Welle genannt, Letztere Sekundär- oder S-Welle (Abb. 2.7).

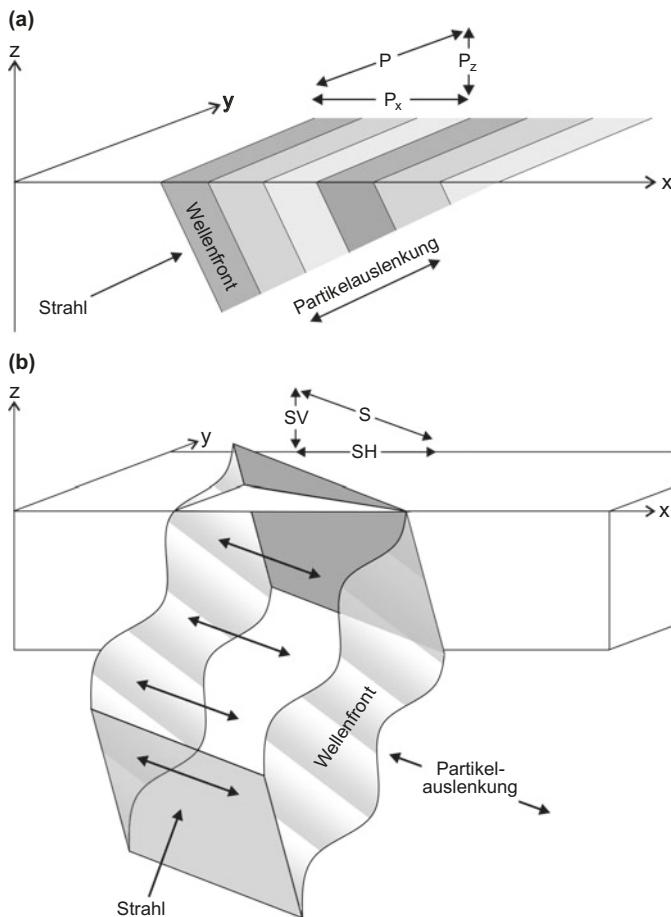
Scherwellen pflanzen sich nicht in Flüssigkeiten oder Gasen fort ( $G = 0$ ). Sie sind tangential zur Wellenfront polarisiert und damit senkrecht zur Strahlrichtung. Es hat sich eingebürgert, die Partikelbewegung von Scherwellen in ihre zueinander senkrechten vertikalen und horizontalen Vektorkomponenten  $S_V$  und  $S_H$  zu zerlegen.  $S_V$  ist dabei die Komponente in der Vertikalebene,  $S_H$  jene in der Horizontalebene (Abb. 2.7b). Im Spezialfall eines horizontal geschichteten Untergrunds können dann auch individuelle  $S_V$ - und  $S_H$ -Wellen physikalisch-mathematisch beschrieben werden. Sowohl Kompressions- als auch Scherwellen sind Raumwellen. Sie breiten sich im Gegensatz zu den Oberflächenwellen im gesamten Raum aus.

Oberflächenwellen, sog. Rayleigh<sup>4</sup>- bzw. Love<sup>5</sup>-Wellen, treten nur in Gegenwart einer freien Oberfläche auf (Abb. 2.8). Ihre Amplituden nehmen mit der Tiefe stark ab. Die Abb. 2.8 und 2.9 veranschaulichen stark überhöht die Auslenkung, die Partikel beim Durchgang von P- und  $S_H$ -Raumwellen bzw. von Rayleigh- und Love-Oberflächenwellen erfahren. Die Benennung der Wellen erfolgte nach den Wissenschaftlern, die diese Wellen theoretisch untersucht bzw. vorhergesagt hatten.

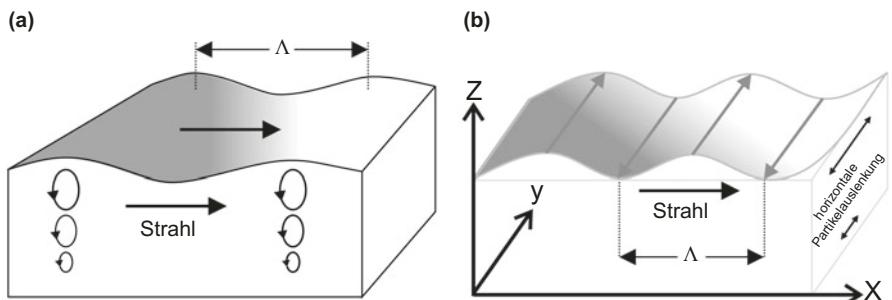
Rayleigh-Wellen ähneln den Wellen im freien Ozean insofern, als die Teilchenbewegung bei beiden elliptisch ist. Während die Rückstellkraft bei den Wasserwellen durch die Schwerebeschleunigung erfolgt, bewirkt dies bei den Rayleigh-Wellen jedoch die Elastizität. Rayleigh-Wellen entstehen an den Oberflächen sowohl von homogenen als auch geschichteten Medien. Da Rayleigh-Wellen aus P- und  $S_V$ -Wellen entstehen, ist ihre Bewegung vertikal in Ausbreitungsrichtung der Welle polarisiert. Oberhalb einer Tiefe von etwa 19 % ihrer Wellenlänge sind Rayleigh-Wellen retrograd polarisiert (siehe Aufg. (2) in Abschn. 2.7), im Gegensatz zu den prograd elliptisch polarisierten Wasserwellen. In dieser Tiefe ist ihre Bewegung rein vertikal, darunter sind sie prograd polarisiert (Abb. 2.10). Wie bei allen Oberflächenwellen ist ihre Amplitude an der Oberfläche maximal und nimmt exponentiell mit der Tiefe ab. Die Geschwindigkeit von Rayleigh-Wellen ist  $v_R \approx 0,9 \beta$ , also etwas geringer als die der Scherwellen. An der Oberfläche einer aus unverwittertem Festgestein bestehenden Schicht (entsprechend einer Poisson-Zahl von  $\nu = \frac{1}{4}$ ) ist  $v_R = 0,9194 \beta$ . Darüber hinaus zeigen Rayleigh-Wellen in einem geschichteten (anders als in einem homogenen) Medium Dispersion. Daher ist ihre Geschwindigkeit nicht konstant, sondern ändert sich mit der Wellenlänge bzw.

<sup>4</sup>John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842–1919; englischer Physiker, erhielt 1904 den Nobelpreis für Physik für die Bestimmung der Dichte der wichtigsten Gase und die Entdeckung des Argons.

<sup>5</sup>Augustus Edward Hough Love, 1863–1940; englischer Mathematiker, bekannt für seine Arbeiten zur Kontinuumsmechanik, insbesondere für sein Lehrbuch zur Elastizitätstheorie; entwickelte 1911 das erste mathematische Modell für die Ausbreitung der nach ihm benannten Oberflächenwellen.

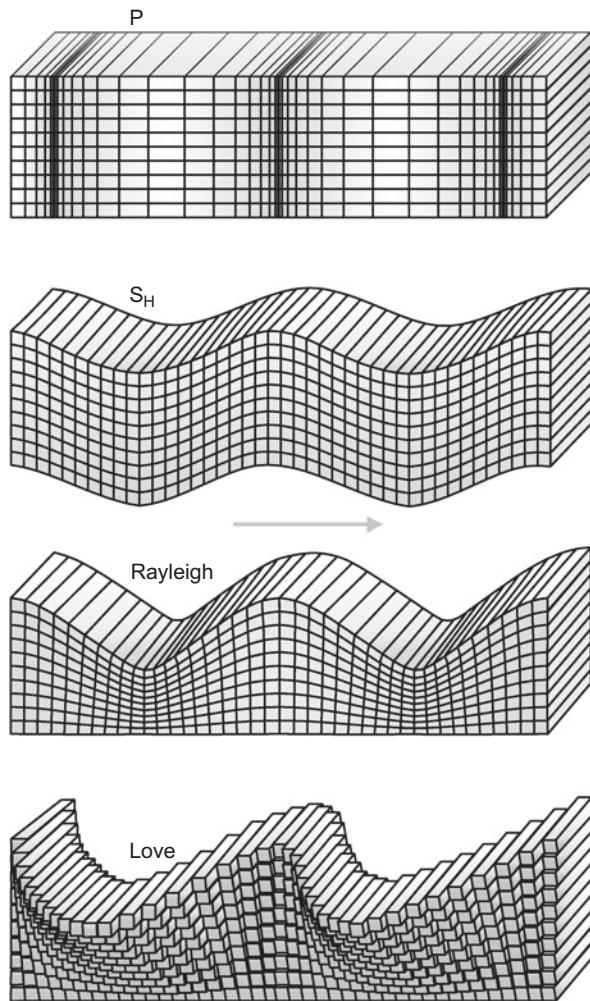


**Abb. 2.7** An der Erdoberfläche anbrandende Raumwellen (nach Burger 1992); (a) Kompressionswelle, (b) Scherwelle



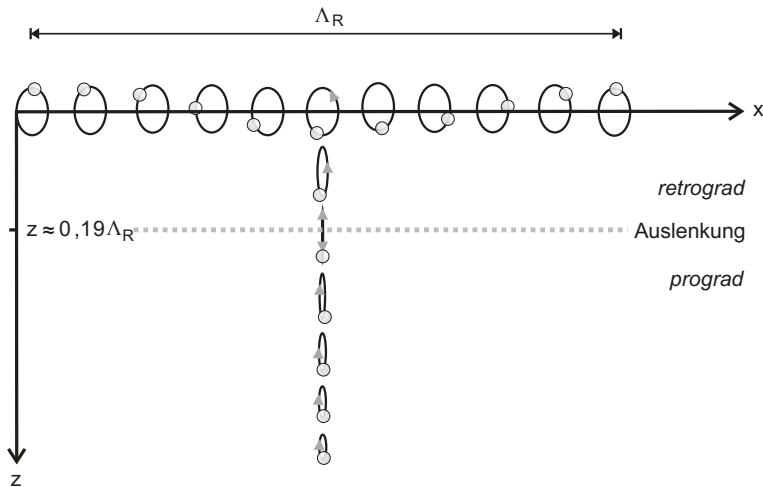
**Abb. 2.8** Ausbreitung von Oberflächenwellen an der Erdoberfläche: (a) Rayleigh-Welle; (b) Love-Welle (nach Burger 1992)

**Abb. 2.9** Elastische Partikel-Auslenkung (stark überhöht) beim Durchgang von P- und  $S_H$ -Raumwellen sowie Rayleigh- und Love-Oberflächenwellen (Clauser 2016)



Frequenz (siehe Gl. 2.25) und in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der P- und S-Wellen sowie der Dichte der geologischen Gesteinsschichten. Die wichtigste Einflussgröße ist dabei die Geschwindigkeit von Scherwellen. Die Mächtigkeit des Schichtpaket, dessen Eigenschaften die Geschwindigkeit der Rayleigh-Wellen bestimmt, entspricht ungefähr 0,4–0,5 Wellenlängen, gerechnet von der Erdoberfläche. Rayleigh-Wellen werden in der Explorationsseismik auch als Bodenunruhe (*ground roll*) bezeichnet. Die Tiefe, in der die Amplitude einer Welle der Wellenlänge  $\Lambda$  auf  $1/e$  abgeklungen ist, wird als Eindringtiefe bezeichnet. Für eine Rayleigh-Welle beträgt sie  $0,4 \Lambda$ .

*Love-Wellen* entstehen nur an der Oberfläche eines Mediums, in dem die Geschwindigkeit der Scherwellen mit der Tiefe zunimmt. Sie treten dann auf, wenn die Geschwindigkeit  $\beta$  von Scherwellen in einer Deckschicht kleiner ist als darunter.



**Abb. 2.10** Elastische Auslenkungen: Retrograde und prograde Umlafrichtung von Rayleigh-Wellen: Mit der Tiefe verringert sich die Auslenkung, und die Umlafrichtung dreht von retrograd auf prograd (Clauser 2016)

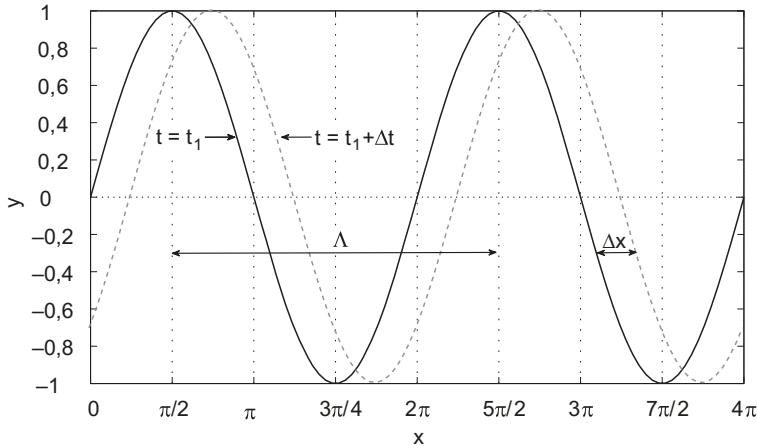
Dann interferieren die von der freien Oberfläche und von der unteren Grenzfläche der Schicht überkritisch reflektierten  $S_H$ -Raumwellen konstruktiv und erzeugen eine horizontal polarisierte Oberflächenwelle. Sie ähneln somit den  $S_H$ -Wellen, jedoch nimmt ihre Amplitude mit der Tiefe ab. Ihre Geschwindigkeit ist für kleine Wellenlängen gleich  $\beta$  in der Deckschicht, für große Wellenlängen gleich  $\beta$  im Liegenden. Love-Wellen sind schneller als Rayleigh-Wellen und zeigen wie diese Dispersion.

Stoneley-Wellen entstehen wie Rayleigh-Wellen aus P- und  $S_V$ -Wellen, die sich entlang der Grenzfläche zweier Medien fortpflanzen. Ihre Amplituden nehmen exponentiell mit dem Abstand zur Grenzfläche ab. Ihre Geschwindigkeit zeigt für ein rein aus zwei Schichten bestehendes Medium keine Dispersion, wohl aber für mehrfach geschichtete oder gradierte Medien. Ihr Betrag liegt zwischen dem der langsameren S-Welle und dem der schnelleren Rayleigh-Welle in beiden Medien.

Mathematisch können elastische Wellen durch periodische Wellen beschrieben werden: Die Auslenkung  $\psi$  eines Partikels beim Durchgang einer eindimensionalen, ungedämpften, periodischen harmonischen Welle in X-Richtung,  $e^{i\varphi(x,t)} = \cos(\varphi(x,t)) + i \sin(\varphi(x,t))$ , lässt sich schreiben als:

$$\psi(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{\Lambda} x - \frac{2\pi}{T} t + \varepsilon \right), \quad (2.21)$$

wobei  $A$  die Amplitude ist,  $\varepsilon$  der Phasenwinkel,  $t$  die Zeit,  $x$  der Ort,  $T$  die Periode und  $\Lambda$  die Wellenlänge. Mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  (Gl. 2.2) und der Wellenzahl  $k = 2\pi/\Lambda$  (Gl. 2.3) lautet (Gl. 2.21):



**Abb. 2.11** Lage der Wellenfronten im Raum zu zwei unterschiedlichen Zeiten (Clauser 2016)

$$\psi(x, t) = A \sin \underbrace{(kx - \omega t + \varepsilon)}_{\text{Phase der Welle}}. \quad (2.22)$$

Alle durch  $kx - \omega t = \text{const.}$  verbundenen Raum-Zeit-Punkte besitzen die gleiche Auslenkung  $\psi$  oder Phase. So ist z. B. ein Wellenknoten durch  $kx - \omega t = 0$  definiert (Abb. 2.11). Dieser Knoten läuft in X-Richtung mit der Geschwindigkeit v:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Lambda}{T} = \Lambda f = \frac{\omega}{k}. \quad (2.23)$$

Diese wird daher auch als Phasengeschwindigkeit bezeichnet.

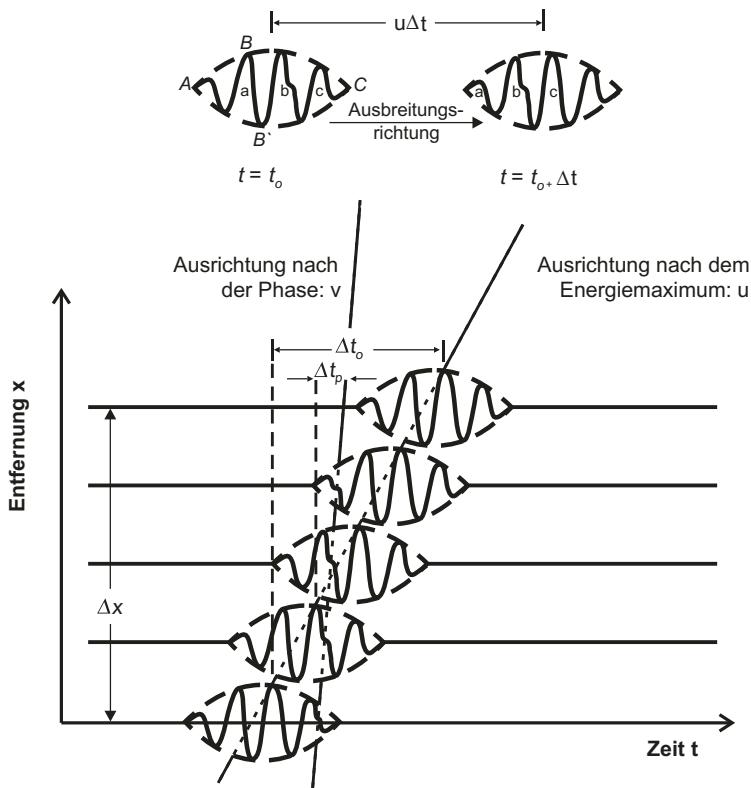
Einsetzen von v aus Gl. 2.23 in Gl. 2.21 ergibt:

$$\psi(x, t) = A \sin \left( \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) + \varepsilon \right). \quad (2.24)$$

Die Phase hat die räumlichen und zeitlichen Periodizitäten  $\Lambda$  und T. Ändert sich die Phasengeschwindigkeit v mit der Frequenz, ist also  $v = \Lambda f \neq \text{const.}$ , so spricht man von Dispersion. In diesem Falle würde eine Wellengruppe (der Träger von Energie bzw. Information) auseinanderlaufen bzw. dispergieren (Abb. 2.12). Zwischen der Gruppengeschwindigkeit u eines Wellenzugs (d. h. einer Gruppe von Phasen) und der Phasengeschwindigkeit v besteht die Beziehung:

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial(vk)}{\partial k} = v + k \frac{\partial v}{\partial k} = v - \Lambda \frac{\partial v}{\partial \Lambda} = \frac{v}{1 - k \frac{\partial v}{\partial \omega}}. \quad (2.25)$$

Für elastische Wellen ist  $\partial v / \partial \Lambda > 0$  (und  $\partial v / \partial \omega < 0$  bzw.  $\partial v / \partial f < 0$ ) und somit die Gruppengeschwindigkeit u stets kleiner als die Phasengeschwindigkeit v. Dieser Fall wird als *normale Dispersion* bezeichnet.



**Abb. 2.12** Gruppengeschwindigkeit  $u$  einer Wellengruppe und Phasengeschwindigkeit  $v$  einer ihrer Wellenphasen (Clauser 2016, nach Telford et al. 1990)

### Zur Beziehung zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

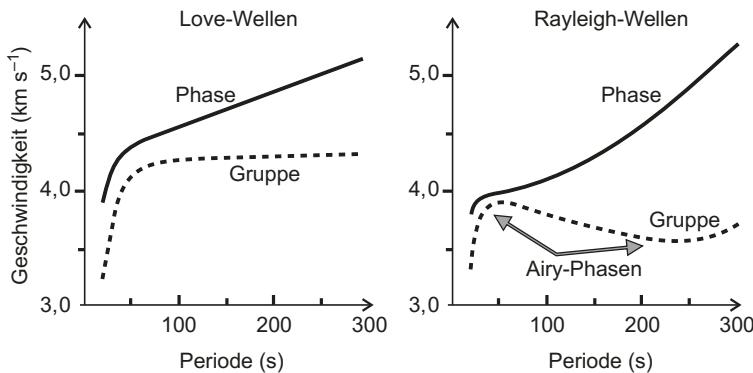
In Gl. 2.25 erhält man für die Ableitung der Phasengeschwindigkeit  $v$  nach der Wellenzahl  $k$ :

$$k \frac{\partial v}{\partial k} = k \frac{\partial \Lambda}{\partial k} \frac{\partial v}{\partial \Lambda} = -\frac{2\pi k}{k^2} \frac{\partial v}{\partial \Lambda} = -\Lambda \frac{\partial v}{\partial \Lambda}.$$

Die Beziehung zwischen Gruppengeschwindigkeit  $u$  und Phasengeschwindigkeit  $v$  ergibt sich aus der Betrachtung des Kehrwerts der Gruppengeschwindigkeit  $u = \partial \omega / \partial k$ :

$$\frac{1}{u} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{\partial \left( \frac{\omega}{v} \right)}{\partial \omega} = \frac{v - \omega \frac{\partial v}{\partial \omega}}{v^2} = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \frac{\partial v}{\partial \omega} = \frac{1}{v} \left( 1 - \underbrace{\frac{\omega}{v}}_k \frac{\partial v}{\partial \omega} \right).$$

Dessen Kehrwert ergibt dann schließlich die rechte Seite der zweiten Zeile von Gl. 2.25:  $u = \frac{v}{1 - k \frac{\partial v}{\partial \omega}}$ .



**Abb. 2.13** Dispersionskurven seismischer Oberflächenwellen. Extrema in den Dispersionskurven bewirken, dass Energie von Rayleigh-Wellen unterschiedlicher Frequenzen bei Perioden von  $T = 50$  s und  $T = 240$  s nahezu zeitgleich eintrifft. Diese starken Einsätze werden als Airy-Phasen bezeichnet (Clauser 2016, nach Shearer 1999)

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ist das Maximum aller Gruppen geschwindigkeiten. Es gibt jedoch durchaus Phasengeschwindigkeiten, welche die Lichtgeschwindigkeit übertreffen. Da jedoch Phasen keine Energie transportieren, steht dies trotzdem im Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie ( $E = m \cdot c^2$ ). Elastische Raumwellen zeigen meist sehr geringe, elastische Oberflächenwellen (Rayleigh- bzw. Love-Wellen) dagegen deutliche Dispersion (Abb. 2.13). Dies führt zu den sog. Airy-Phasen mit starker Konzentration von Energie an den Extrema der Dispersionskurven. In Abb. 2.13 erkennt man dies an den Rayleigh-Wellen bei Perioden von  $T = 50$  s und  $T = 240$  s.

Im Gegensatz zu den elastischen weisen elektromagnetische Raumwellen starke Dispersion auf. Dies ist von Bedeutung für die Georadar-Methode (*ground penetrating radar – GPR*).

Bei der Behandlung vieler geophysikalischer Probleme treten Wellen als partikuläre Lösungen von Differenzialgleichungen auf; durch zweimaliges Ableiten von Gl. 2.21 bzw. Gl. 2.24 nach der Zeit  $t$  und dem Ort  $x$  erhält man die *eindimensionale Wellengleichung*:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A \cos \left( \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) + \varepsilon \right); \ddot{\psi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin \left( \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) + \varepsilon \right) \\ \psi' &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} A \cos \left( \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) + \varepsilon \right); \psi'' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A \sin \left( \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) + \varepsilon \right), \text{ also:} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\psi} = v^2 \psi''. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Beliebige Linearkombinationen einzelner Lösungen von Gl. 2.26, einer linearen, homogenen partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung, ergeben wiederum

Lösungen. Die Überlagerung unendlich vieler solcher Lösungen ergibt die allgemeinere Form einer Fourier-Reihe bzw. eines Fourier-Integrals:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n(x - vt) + \varepsilon_n); \\ \psi(x, t) &= \int_0^{\infty} A(k) \sin(k(x - vt) + \varepsilon(k)) dk.\end{aligned}. \quad (2.27)$$

Die *allgemeine* Lösung von Gl. 2.26 lautet:

$$\psi = f_1 \underbrace{(x - vt)}_{\substack{\text{Welle in} \\ x-\text{Richtung}}} + f_2 \underbrace{(x + vt)}_{\substack{\text{Welle in} \\ -x-\text{Richtung}}}.$$

Die Wellengleichung gehört zu den sog. hyperbolischen Differenzialgleichungen, für die jeweils zwei Scharen reeller Charakteristiken die Raum-Zeit-Bereiche abgrenzen, in denen die Lösung eindeutig bestimmt ist durch Vorgabe eines Anfangsstreifens, d. h. der Funktion  $\psi(x, t)$  auf einer Kurve und der Ableitung  $\partial\psi/\partial n$  nach der Kurvennormalen.

### Klassifizierung partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Viele physikalische Prozesse werden durch partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben. Diese werden in Analogie zu Kegelschnitten in drei Grundtypen klassifiziert: elliptisch, parabolisch und hyperbolisch. Deren allgemeine Gleichung  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$  ähnelt formal jener der allgemeinen Form linearer partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

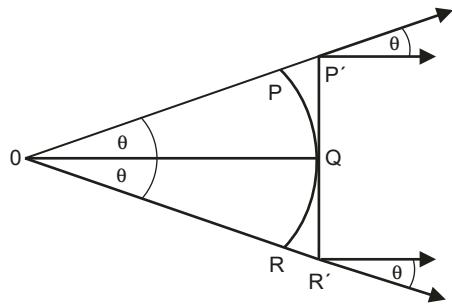
Mithilfe der Beziehung  $D = ac - b^2/4$  zwischen den Koeffizienten a, b und c der zweiten Ableitungsterme unterscheidet man nun zwischen elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differenzialgleichungen:

- $D > 0$ : *elliptisch* sind z. B. die Laplace- bzw. Poisson-Gleichungen für die Potenziale der magnetischen und Schwerekraftfelder,
- $D = 0$ : *parabolisch* sind alle Diffusionsgleichungen, z. B. jene bzgl. Wärme- oder Stofftransport,
- $D < 0$ : *hyperbolisch* ist z. B. die Wellengleichung.

Die Verallgemeinerung von Gl. 2.26 für drei Dimensionen lautet:

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon) = \vec{A} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varepsilon), \quad (2.28)$$

**Abb. 2.14** Ebene bzw.  
kugelförmige  
Wellenfrontenabschnitte PR  
bzw.  $P'R'$ .



wo  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$  und  $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$  die Orts-, Wellenzahl- und Amplitudenvektoren sind und  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Die Knotenfläche  $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = 0$  läuft mit der Geschwindigkeit  $v = \omega/k$  in Richtung  $\vec{k}$ . Gl. 2.28 genügt der dreidimensionalen Wellengleichung in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = v^2 \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial z^2} \right)}_{\Delta: \text{Laplace-Operator}} \quad \text{bzw. } \vec{\psi} = v^2 \Delta \vec{\psi}. \quad (2.29)$$

Die durch Gl. 2.28 dargestellten *ebenen Wellen* sind *Fernfeldnäherungen* für die Wellenfront PQR durch ebene Welle  $\overline{P'QR'}$  (Abb. 2.14). Der Fehler  $\overline{RR'}$  bzw.  $\overline{PP'}$  wird klein, wenn die Strecken  $\overline{OQ}$  und  $\overline{PR}$  sehr groß bzw. sehr klein sind oder beides. Diese Näherung gilt daher nicht nahe der Erregungsquelle (Hypozentrum). Andere Partikulärlösungen von Gl. 2.28 sind Kugelwellen:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \varepsilon), \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.30)$$

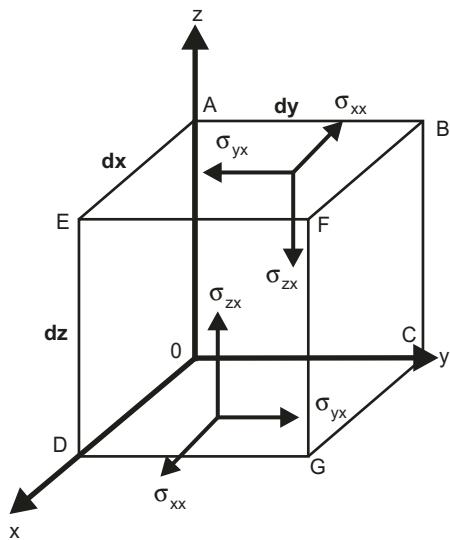
Diese stellen in einigen Fällen eine Näherung in Herdnähe dar.

Im Folgenden soll nun die Wellengleichung für elastische Wellen in einem Kontrollvolumen (Abb. 2.15) hergeleitet werden. Ist dieses im Gleichgewicht, so gleichen sich die Spannungen auf den jeweils gegenüberliegenden Seiten des Würfels aus, also z. B. auf dessen Vorder- und Hinterseiten (DEFG bzw. 0ABC). Wenn nicht, so sind die auf die Vorderseite wirkenden Spannungen gleich:

$$\underbrace{\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx}_{\text{Normalspannungen}}, \quad \underbrace{\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx, \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx}_{\text{Scherspannungen}}. \quad (2.31)$$

Die auf die Rückseite wirkenden Spannungen sind denen auf der Vorderseite entgegengerichtet. Die Summe aller Kräfte, die auf einer Fläche  $dy \times dz$  angreifen und auf das Volumen  $dx \times dy \times dz$  wirken, ist somit:

**Abb. 2.15** Zur Herleitung der Wellengleichung:  
Volumenänderungen



$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx.$$

Da die Spannungen auf die Fläche normiert sind (in diesem Fall also auf  $dy \times dz$ ), ist die resultierende Kraft pro Einheitsvolumen  $dx \times dy \times dz$  in X-, Y- und Z-Richtung jeweils

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich jeweils für die anderen Flächen. Für die Kraft pro Einheitsvolumen in X-Richtung ergibt sich somit

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}.$$

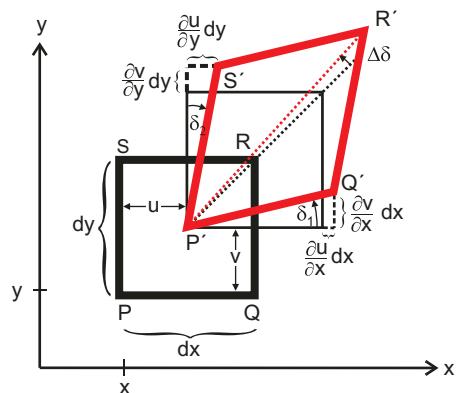
Newton's Trägheitsgesetz verknüpft die Beschleunigung  $\vec{a}$ , welche eine Masse erfährt, mit der Kraft  $\vec{F}$ , die auf sie wirkt:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.32)$$

Normiert auf das Einheitsvolumen lautet Gl. 2.32 für die Kraft in X-Richtung ( $\rho$ : Dichte;  $u$ : Verschiebung in X-Richtung; analoge Gleichungen gelten für die anderen Richtungen):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.33)$$

**Abb. 2.16** Zur Herleitung der Wellengleichung:  
Formänderungen



Hinsichtlich der Scherung ergeben sich für die Verschiebungen  $u = u(x,y)$  und  $v = v(x,y)$  die folgenden Beziehungen zwischen den Parallelogrammen PQRS und  $P'Q'R'S'$  (Abb. 2.16):

$$\begin{aligned} P(x; y) &\Rightarrow P'(x + u, y + v); \\ Q(x + dx; y) &\Rightarrow Q'(x + dx + u + dx\partial u/\partial x, y + v + dx\partial v/\partial x); \\ S(x; y + dy) &\Rightarrow S'(x + u + dy\partial u/\partial y; y + dy + v + dy\partial v/\partial y); \\ R(x + dx; y + dy) &\Rightarrow R'(x + dx + u + dx\partial u/\partial x + dy\partial u/\partial y; \\ &\quad y + dy + v + dx\partial v/\partial x + dy\partial v/\partial y). \end{aligned}$$

Betrachtet man wieder den linearen Fall, in dem die Änderungen in  $u$  und  $v$  klein sind gegen  $dx$  und  $dy$  (d. h., Produkte und Potenzen von  $\partial u/\partial x$  und  $\partial v/\partial y$  werden vernachlässigt). Damit ergibt sich:

- Die Dehnungen der Seiten  $\overline{PQ}$  und  $\overline{PS}$  sind gleich  $\frac{\partial u}{\partial x}dx$  bzw.  $\frac{\partial v}{\partial y}dy$ . Damit sind die relativen Dehnungen in Richtung der Koordinatenachsen, hervorgerufen durch die Normalspannungen, gleich  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .
- Die Winkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$  (infinitesimal klein, daher  $\delta \approx \tan(\delta)$  gegen bzw. im Uhrzeigersinn) sind gleich  $\frac{\partial v}{\partial x}$  bzw.  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .
- Der rechte Winkel bei P wird bei  $P'$  durch die Scherspannungen um  $\delta_1 + \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$  vermindert.

Somit sind die Normaldehnungen in drei Dimensionen gleich:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.34)$$

Die Scherungsdehnungen sind definiert als die Hälfte der gesamten Winkelverzerrung:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); \\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (2.35)$$

Neben der Scherung wird das Rechteck PQRS im obigen Beispiel zudem als Ganzes gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel  $\Delta\delta = (\delta_1 - \delta_2)/2 = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/2$  um die Z-Achse gedreht. Dies erkennt man bei der folgenden Taylor-Entwicklung des Verschiebungsvektors  $\vec{D}$  um den Bezugspunkt  $\vec{x}_0$ :

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \vec{D}(\vec{x}_0) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\underline{J}} (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{D}(\vec{x}_0) + \underline{J}(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (2.36)$$

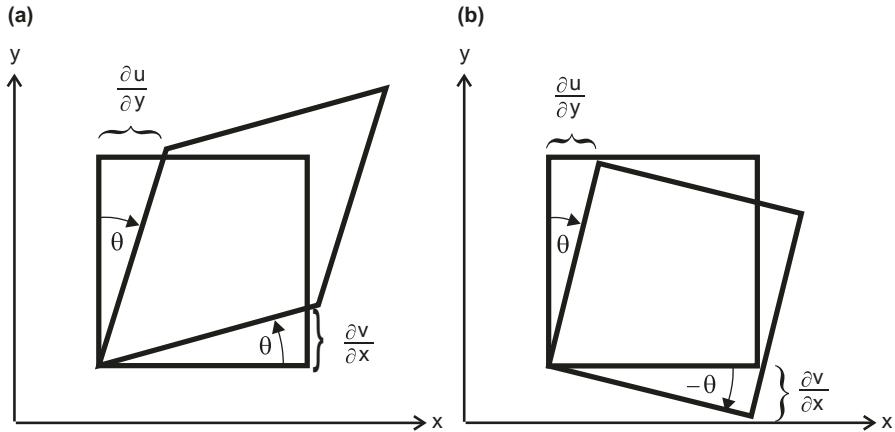
Der Jacobi-Tensor  $\underline{J}$  lässt sich wie jeder Tensor als Summe zweier symmetrischer und antimetrischer Tensoren  $\underline{\epsilon}$  und  $\underline{\Omega}$  darstellen, für die gilt:  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  bzw.  $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{\epsilon} + \underline{\Omega}. \quad (2.37)$$

Der Vergleich mit Gl. 2.34 und 2.35 zeigt, dass der symmetrische Tensor  $\underline{\epsilon}$  der Dehnungstensor ist: Die Elemente der Hauptdiagonale beschreiben die Normaldehnungen, die

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Dies erkennt man bei einer vereinfachenden Betrachtung in zwei Dimensionen für den Fall, dass keine Volumenänderung stattfindet, also die Normaldehnungen



**Abb. 2.17** Illustration der unterschiedlichen Effekte des Dehnungs- bzw. Rotationstensors ( $\underline{\epsilon}$  bzw.  $\underline{\Omega}$ ) am Beispiel eines Quadrats in der X-Y-Ebene: Die Nebendiagonalelemente von  $\underline{\epsilon}$  bewirken eine Scherdeformation (a),  $\underline{\Omega}$  dagegen eine starre Rotation (b)

verschwinden:  $0 = \partial u / \partial x = \partial v / \partial y = \partial w / \partial z$ . Betrachtet man zunächst den Fall  $\underline{\Omega} = \underline{0}$ , so folgt  $\delta_2 = \partial u / \partial y = \partial v / \partial x = \delta_1 = \theta$  (Abb. 2.17) und mit Gl. 2.37 sowie Gl. 2.38:

$$\underline{J} = \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

D. h., beide Seiten des infinitesimalen Rechtecks werden jeweils im bzw. gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel  $\theta$  gedreht. Die gesamte Winkeländerung im Rechteck beträgt somit  $2\theta$ .

Im Gegensatz zum symmetrischen Dehnungstensor  $\underline{\epsilon}$  beschreibt der antimetrische Tensor

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

eine starre Rotation. Dies erkennt man wiederum im vereinfachten zweidimensionalen Fall ohne Volumenänderung: Für  $\underline{\epsilon} = \underline{0}$  folgt  $\delta_2 = \partial u / \partial y = -\partial v / \partial x = -\delta_1$  (Abb. 2.17) und mit Gl. 2.37 sowie Gl. 2.40:

$$\underline{J} = \underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Die relative Volumenänderung bzw. Dilatation  $\Delta_V = \Delta V / V$  beschreibt die Expansion bzw. Kontraktion eines Volumens. Es gilt:  $V = dx \times dy \times dz$  und  $\Delta V = dx(1 + \varepsilon_{xx}) dy(1 + \varepsilon_{yy}) dz(1 + \varepsilon_{zz}) - dx dy dz$ . Hieraus folgt:  $\Delta V / V = (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - 1 = (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}) - 1 = \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}$ . In einer linearen Näherung werden nun alle Produkte der  $\varepsilon_{ij}$  vernachlässigt. Damit erhält man:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \Delta_V. \quad (2.42)$$

In Gl. 2.33 werden nun die Spannungen durch die Verschiebungen ersetzt, indem zunächst die Spannungen  $\sigma_{ij}$  durch die Dehnungen  $\varepsilon_{kl}$  ausgedrückt werden (hookesches Gesetz Gl. 2.5 bzw. Gl. 2.14) und diese dann mittels Gl. 2.34, 2.35 und 2.38 durch die Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}}_{= \lambda \frac{\partial \Delta_V}{\partial x} + 2G \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x}} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}}_{= 2G \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}}_{= \lambda \frac{\partial \Delta_V}{\partial x} + 2G \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \right\}}} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}}_{= 2G \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}}_{= \lambda \frac{\partial \Delta_V}{\partial x} + G \nabla^2 u + G \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\}} = \lambda \frac{\partial \Delta_V}{\partial x} + G \nabla^2 u + G \frac{\partial \Delta_V}{\partial x}} \\ &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta_V}{\partial x} + G \nabla^2 u. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ableiten nach  $x$  ergibt schließlich:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \Delta_V}{\partial x^2} + G \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Analoges gilt für die beiden anderen Koordinatenrichtungen. Die Summation aller drei Gleichungen ergibt:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\Delta_V} = (\lambda + G) \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \Delta_V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta_V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta_V}{\partial z^2} \right)}_{\nabla^2 \Delta_V} + G \nabla^2 \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\Delta_V}.$$

Dividieren durch die Dichte  $\rho$  ergibt schließlich die Kompressions- bzw. P-Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \Delta_V}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{(\lambda + 2G)}{\rho}}_{\alpha^2} \nabla^2 \Delta_V = \alpha^2 \nabla^2 \Delta_V. \quad (2.44)$$

Bildet man die Differenzen der Ableitungen der Äquivalente von Gl. 2.43 in Y- und Z-Richtung bzgl. z und y, so ergibt sich:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \underbrace{\left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_{\Theta_x} = G \nabla^2 \Theta_x, \quad \text{also: } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta_x = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \Theta_x.$$

Analoges gilt für die beiden anderen Koordinatenrichtungen. Hieraus ergibt sich die Scher- bzw. S-Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \vec{\Theta}}{\partial t^2} = \overbrace{\frac{G}{\rho}}^{\beta^2} \nabla^2 \vec{\Theta}. \quad (2.45)$$

Bezeichnet  $\vec{D} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$  den Verschiebungsvektor, wo-

bei  $\varphi$  das Kompressionspotenzial ist, so ist die Divergenz des Verschiebungsvektors  $\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \Delta_V$  die Dilatation und

$\vec{\Theta} = \text{rot } \vec{D} = \nabla \times \vec{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_3}{\partial x_2} - \frac{\partial D_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial D_1}{\partial x_3} - \frac{\partial D_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial D_2}{\partial x_1} - \frac{\partial D_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$  seine Rotation (vgl. die Rechenregeln für Vektoren und Tensoren in Kap. 4.1 im Anhang). In dieser Schreibweise lautet die skalare P-Wellengleichung (Gl. 2.44):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{\left( \text{div } \vec{D} \right)}_{\Delta_V} = \alpha^2 \nabla^2 \underbrace{\left( \text{div } \vec{D} \right)}_{\Delta_V}, \quad (2.46)$$

sowie die vektorielle S-Wellengleichung (Gl. 2.45, drei skalare Gleichungen):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{\left( \operatorname{rot} \vec{\mathbf{D}} \right)}_{\vec{\Theta}} = \beta^2 \nabla^2 \underbrace{\left( \operatorname{rot} \vec{\mathbf{D}} \right)}_{\vec{\Theta}}. \quad (2.47)$$

Der Verschiebungsvektor  $\vec{\mathbf{D}}$  kann also in eine Summe zweier Vektorfelder aufgeteilt werden:

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}}_1 + \vec{\mathbf{D}}_2, \quad (2.48)$$

für die jeweils  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{D}}_1 = 0$  bzw.  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}}_2 = 0$  gilt. Somit beschreibt  $\vec{\mathbf{D}}_1$  einen wirbelfreien Anteil, für den die P-Wellengleichung (Gl. 2.46) gilt, und  $\vec{\mathbf{D}}_2$  einen quellfreien Anteil, der die S-Wellengleichung (Gl. 2.47) erfüllt. Diese Aufteilung, die sog. Helmholtz-Zerlegung, ist ganz allgemein für jedes beliebige Vektorfeld möglich.

### Helmholtz-Zerlegung eines Vektorfelds

Nach dem Helmholtz-Theorem (Gl. 2.49) kann ein Vektorfeld  $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$  als Überlagerung zweier wirbel- bzw. quellfreier Vektorfelder  $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}})$  und  $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}})$  dargestellt werden, wenn für diese gilt:  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{a}} = \nabla \times \vec{\mathbf{a}} = 0$  bzw.  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$ . Hierfür muss das Vektorfeld  $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$  nur differenzierbar sein und für  $r \rightarrow \infty$  schneller als r gegen null gehen.

Nun lässt sich jedes wirbelfreie Feld  $\vec{\mathbf{a}}$  durch den Gradienten eines skalaren Potenzials  $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$  darstellen,  $\vec{\mathbf{a}} = \operatorname{grad} \varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \nabla \varphi(\vec{\mathbf{r}})$ , da allgemein gilt:  $\operatorname{rot} \operatorname{grad}(\varphi) = \nabla \times \nabla \varphi = 0$ . Ebenso lässt sich jedes quellfreie Feld  $\vec{\mathbf{b}}$  durch die Rotation eines Vektorpotenzials  $\vec{\Xi}(\vec{\mathbf{r}})$  darstellen,  $\vec{\mathbf{b}} = \operatorname{rot} \vec{\Xi} = \nabla \times \vec{\Xi}(\vec{\mathbf{r}})$ , da allgemein gilt:  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\Xi} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{\Xi} = 0$ . Somit kann man das Vektorfeld  $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$  mit Hilfe des Helmholtz-Theorems durch eine Überlagerung (Addition) der beiden Potenziale  $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$  und  $\vec{\Xi}(\vec{\mathbf{r}})$  ausdrücken:

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}}) = \operatorname{grad} \varphi(\vec{\mathbf{r}}) + \operatorname{rot} \vec{\Xi}(\vec{\mathbf{r}}) = \nabla \varphi(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\nabla} \times \vec{\Xi}(\vec{\mathbf{r}}). \quad (2.49)$$

Mit diesen skalaren bzw. Vektorpotenzialen  $\varphi$  und  $\vec{\Xi}$  lauten die P- und S-Wellengleichungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \vec{\Xi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \vec{\Xi}, \quad (2.50)$$

wobei  $\vec{\Xi} = \vec{\Theta}$  die Rotation des Verschiebungsvektors  $\vec{\mathbf{D}}$  ist und  $\varphi = \Delta_V$  seine Divergenz (Gl. 2.46) bzw. die Dilatation (Gl. 2.47). Somit ist  $\varphi$  das skalare Potenzial der Kompressionswelle und  $\vec{\Xi}$  das Vektorpotenzial der Scherwelle.

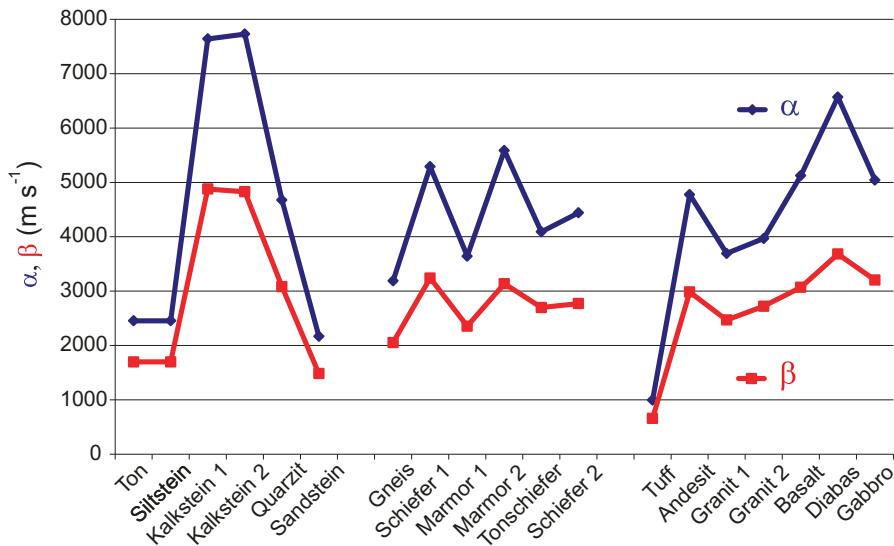


Abb. 2.18 Seismische Geschwindigkeiten einiger Gesteine (nach Burger 1992)

**Tab. 2.3** P- und S-Wellengeschwindigkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  (aus Dobrin und Savit 1990; Parasnus 1997; Gebrande 1982)

Material	$\alpha$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	$\beta$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
Luft	330	-
Sand	300–800	100–500
Wasser	1 450	-
Gletschermoräne	1 500–2 700	900–1 300
Sandstein	2 800–4 460	2 540–2 930
Kalkstein, Dolomit	4 890–6 500	1 800–3 740
Steinsalz	4 000–5 500	2 000–3 200
Granit, andere Tiefengesteine	4 180–7 000	2 610–4 360

Jede der drei Komponenten der Gl. 2.47 genügt der Wellengleichung. Setzt man

$$\vec{D}_2 = \vec{A} \sin \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \underbrace{\frac{\beta k}{\omega} t + \varepsilon}_{(\text{Gl. 2.23})} \right), \quad (2.51)$$

so folgt aus  $\operatorname{div} \vec{D}_2 = 0$ , dass die Divergenz verschwindet:  $\operatorname{div} \vec{D}_2 = 0 = \vec{A} \cdot \vec{k} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)$ . Das kann für alle Argumente des Kosinus aber nur gelten, wenn  $\vec{A} \cdot \vec{k} = 0$ , also auch  $\vec{D}_2 \cdot \vec{k} = 0$  ist. Hieraus folgt, dass  $\vec{D}_2$  senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung  $\vec{k}$  steht. Die Scherwellen sind also Transversalwellen. Damit definieren Gl. 2.46 und 2.47 für jede Ausbreitungsrichtung drei elastische Wellen, eine longitudinale Kompressionswelle und zwei transversale Scherwellen.

Typische Frequenzen seismischer Raumwellen variieren zwischen 1 Hz–10 kHz. In der Reflexions- bzw. Refraktionsseismik liegen sie zwischen 4 Hz–150 Hz bzw. 5 Hz–20 Hz. Jene der Oberflächenwellen sind geringer als einige 10 Hz. Die untere Frequenzgrenze mariner Luftkanonen (*air-guns*) liegt bei etwa 8 Hz oder darunter. Abb. 2.18 und Tab. 2.3 zeigen für einige Gesteine und Materialien typische Geschwindigkeiten der Kompressions- und Scherwellen. Mit Gl. 2.4 ergeben sich für P-Wellengeschwindigkeiten von  $1600 \text{ m s}^{-1} \leq \alpha \leq 6500 \text{ m s}^{-1}$  in der Reflexionsseismik Wellenlängen von ca.  $30 \text{ m} \leq \Lambda \leq 400 \text{ m}$  und in der Refraktionsseismik von  $80 \text{ m} \leq \Lambda \leq 1300 \text{ m}$ .

## 2.2.4 Die Eikonalgleichung

Neben den in positive Koordinatenrichtungen laufenden Wellen mit der Phase  $k(x - vt) = kx - \omega t$  (siehe Gl. 2.22), etwa für Wellen in x-Richtung, sind auch die in negativer Koordinatenrichtung laufenden Wellen mit Phase  $k(x+vt)$  Lösungen der Wellengleichung. Dies röhrt daher, dass die Geschwindigkeit quadratisch in die Wellengleichung eingeht. Dies bringt zum Ausdruck, dass sich die elastische Welle von der Quellregion radial (im eindimensionalen Fall: in beide Richtungen) ausbreitet. Das d'Alembertsche Prinzip ist eine Verallgemeinerung dieser Tatsache und sagt aus, dass jede Funktion von  $\Phi = x \pm vt$ , die stetig ist und stetige erste und zweite Ableitungen besitzt, eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist.

Bisher wurde die Ausbreitung elastischer Wellen an Hand ihrer Wellenfronten betrachtet. Im Folgenden wird die sog. Eikonalgleichung hergeleitet, die hierzu Wellenstrahlen verwendet, die Normalen auf den Wellenfronten. In einem heterogenen Untergrund breitet sich eine Kompressionswelle entsprechend der Gl. 2.50 aus:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi, \quad (2.52)$$

wobei  $\varphi$  das Skalarpotenzial der Kompressionswelle ist. Für deren Verschiebungsfeld gilt:  $\vec{D} = (u \ v \ w)^T = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi$ . Die Geschwindigkeit  $\alpha = \alpha(\vec{r})$  der Kompressionswellen soll mit dem Ort variabel sein. Eine mögliche Lösung für  $\varphi$  sind die harmonischen Sinus- und Kosinus-Funktionen der Form<sup>6</sup>:

$$\varphi = A(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})}, \quad (2.53)$$

wo  $A(\vec{r})$  die lokale Wellenamplitude ist und  $\tau(\vec{r})$  die sog. Laufzeitfunktion, die angibt, wie lange die Welle benötigte, um sich von ihrem Quellpunkt zum Ort  $\vec{r}$  fortzupflanzen. Mit  $\nabla \varphi = \nabla A e^{-i\omega\tau(\vec{r})} - i\omega A \nabla \tau(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})}$  gilt für die zweiten räumlichen

---

<sup>6</sup> $e^{\pm i\xi} = \cos(\xi) \pm i \sin(\xi)$  (eulersche Formel für komplexe Zahlen – siehe Abb. 2.57)

Ableitungen von Gl. 2.53:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2\varphi &= \nabla^2 A(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})} - i\omega \nabla A(\vec{r}) \cdot \nabla \tau(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})} \\
 &\quad - i\omega \nabla A(\vec{r}) \cdot \nabla \tau(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})} - i\omega A(\vec{r}) \cdot \nabla^2 \tau(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})} \\
 &\quad - \omega^2 A(\vec{r}) \nabla \tau(\vec{r}) \cdot \nabla \tau(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})} \\
 &= (\nabla^2 A(\vec{r})) - \omega^2 A(\vec{r}) |\nabla \tau(\vec{r})|^2 \\
 &\quad - i[2\omega \nabla A(\vec{r}) \cdot \nabla \tau(\vec{r}) + \omega A(\vec{r}) \cdot \nabla^2 \tau(\vec{r})] e^{-i\omega\tau(\vec{r})}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

sowie für die zweite zeitliche Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 A(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})}. \tag{2.55}$$

Setzt man Gl. 2.54 und 2.55 in Gl. 2.52 ein und dividiert durch  $e^{-i\omega\tau(\vec{r})}$ , so erhält man:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 A(\vec{r}) &= (\alpha(\vec{r}))^2 \left( \nabla^2 A(\vec{r}) - \omega^2 A(\vec{r}) |\nabla \tau(\vec{r})|^2 \right. \\
 &\quad \left. - i[2\omega \nabla A(\vec{r}) \cdot \nabla \tau(\vec{r}) + \omega A(\vec{r}) \cdot \nabla^2 \tau(\vec{r})] \right). \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

Division des Realteils von Gl. 2.56,  $-\frac{\omega^2 A(\vec{r})}{(\alpha(\vec{r}))^2} = \nabla^2 A(\vec{r}) - \omega^2 A(\vec{r}) |\nabla \tau(\vec{r})|^2$ , durch  $\omega^2 A(\vec{r})$  ergibt:

$$|\nabla \tau(\vec{r})|^2 - \frac{1}{(\alpha(\vec{r}))^2} = \frac{\nabla^2 A(\vec{r})}{\omega^2 A(\vec{r})}. \tag{2.57}$$

Falls die Annahme gerechtfertigt ist, dass die Kreisfrequenz  $\omega$  so groß ist, dass der Term mit  $1/\omega^2$  gegen die anderen vernachlässigt werden kann, so erhält man:  $|\nabla \tau(\vec{r})|^2 = (1/\alpha(\vec{r}))^2$ . Eine Gleichung derselben Form kann auch für die Scherwellen hergeleitet werden, sodass man als allgemeine Gleichung für P- und S-Wellen die sog. Eikonalgleichung erhält:

$$|\nabla \tau(\vec{r})|^2 = \underbrace{\left( \frac{\partial \tau(\vec{r})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau(\vec{r})}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau(\vec{r})}{\partial z} \right)^2}_{\text{in kartesischen Koordinaten}} = \frac{1}{(c(\vec{r}))^2} = (u(\vec{r}))^2, \tag{2.58}$$

wobei  $c(\vec{r})$  für die lokale P- oder S-Wellengeschwindigkeiten  $\alpha(\vec{r})$  bzw.  $\beta(\vec{r})$  steht und  $u = 1/c(\vec{r})$  für deren Kehrwert, die reziproke Geschwindigkeit (*slowness*).<sup>7</sup> So mit besagt die Eikonalgleichung (Gl. 2.58), dass der Gradient der Laufzeitfunktion

<sup>7</sup>Ein auch im Deutschen eingeführter, jedoch irreführender Begriff, da *slow* ebenso wie *fast* eine Geschwindigkeit charakterisiert und nicht deren Kehrwert, die reziproke Geschwindigkeit. Man könnte diese ggf. auch als spezifische (also auf eine Einheitsweglänge bezogene) Laufzeit bezeichnen, was aber weder im Deutschen noch im Englischen üblich ist.

$\tau(\vec{r})$  der lokalen reziproken Geschwindigkeit gleicht. Während konstante Werte der Laufzeitfunktion die Flächen von Wellenfronten definieren, definiert ihr Gradient die auf den Fronten senkrecht stehenden Wellenstrahlen. Somit bildet die Eikonalgleichung die Grundlage strahlentheoretischer Ansätze zur Modellierung der Ausbreitung seismischer Wellen.

Führt die Betrachtung des Realteils von Gl. 2.56 in der Näherung für hohe Frequenzen auf die Eikonalgleichung, so kann man durch weitere Auswertung des Imaginärteils von Gl. 2.56 einen Ausdruck für die geometrische Dämpfung bzw. sphärische Divergenz von Raumwellen herleiten (siehe z. B. Shearer 1999, S. 239–240). Wie die sphärische Divergenz elastischer Wellen zu deren Dämpfung beiträgt, wird in Abschn. 2.2.6 erläutert.

### 2.2.5 Energie und Energiedichte seismischer Wellen

Die Phasen- oder Gruppengeschwindigkeiten, mit der sich eine seismische Welle ausbreitet, unterscheiden sich von der Geschwindigkeit, mit der ein Materiateilchen während des Durchgangs dieser Welle schwingt. Ist die Auslenkung gegeben durch  $\Psi = A \sin(kx - \omega t)$  (siehe Gl. 2.22), so ist  $\dot{\Psi} = \partial\Psi/\partial t = -\omega A \cos(kx - \omega t)$  die Geschwindigkeit, mit der das Materiateilchen um seine Gleichgewichtslage schwingt. Die Energiedichte pro Einheitsvolumen  $E_V$  besteht aus den Beiträgen der kinetischen und der potenziellen Energie. Der kinetische Anteil daran ist:

$$E_V = \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

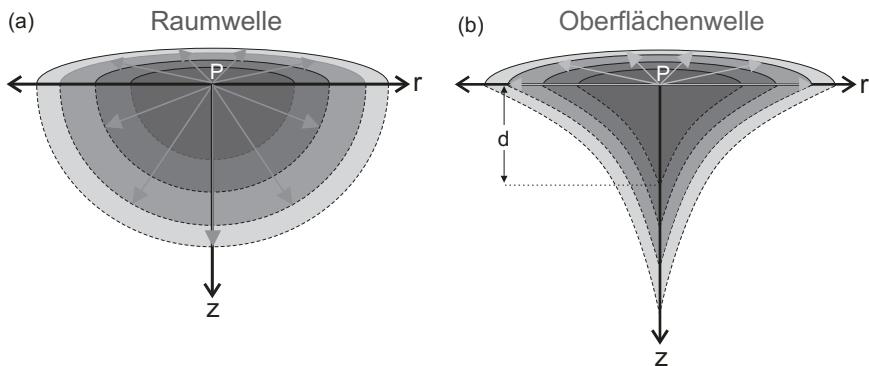
Dieser ist maximal beim Nulldurchgang der Schwingung und verschwindet am Ort der maximalen Auslenkung des Materiateilchens aus der Ruhelage. Dort ist seine gesamte Energie potenzielle Energie. Die Gesamtenergie teilt sich immer in potenzielle und kinetische Energie auf und ist folglich gleich der maximalen kinetischen Energie. Für die Energiedichte  $E_V$  folgt somit:

$$E_V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho f^2 A^2. \quad (2.59)$$

Daher ist sie proportional zur Dichte sowie zum Quadrat von Frequenz und Amplitude der Welle.

### 2.2.6 Dämpfung seismischer Wellen

Dämpfung von Wellenenergie erfolgt durch geometrische Dämpfung (oder sphärische bzw. zylindrische Divergenz) sowie durch Absorption von Energie und deren Umwandlung, etwa in Wärme sowie Streuung und Aufspaltung einer einfallenden Welle an Schichtgrenzen in mehrere reflektierte und durchlaufende (transmittierte) Wellen.



**Abb. 2.19** Ausbreitung von (a) Raum- und (b) Oberflächenwellen

Bei punktförmiger Anregung breitet sich die Energie  $E^R$  von Raumwellen in einem homogenen und isotropen Halbraum auf Halbkugelflächen um den Erregungspunkt aus. In der Entfernung  $r$  beträgt die Energie pro Fläche A:

$$E_A^R(r) = \frac{E^R}{2\pi r^2}. \quad (2.60)$$

Entsprechend ist die Energie  $E^O$  der bis in eine Tiefe  $d$  reichenden Oberflächenwellen auf der Oberfläche eines Zylinders der Höhe  $d$  verteilt. In der Entfernung  $r$  beträgt die Energie pro Fläche somit in diesem Fall:

$$E_A^O = \frac{E^O}{2\pi rd}. \quad (2.61)$$

Gl. 2.60 und 2.61 besagen, dass die Energiedichte von Raum- bzw. Oberflächenwellen mit  $1/r^2$  bzw.  $1/r$  abnimmt. Dies entspricht gemäß Gl. 2.59 bei konstanter Dichte und Frequenz einer Abnahme der zugehörigen Schwingungsamplitude mit  $r^{-1}$  bzw.  $r^{-1/2}$ . Somit werden Raumwellen stärker als Oberflächenwellen mit der Entfernung gedämpft (Abb. 2.19). Dies erklärt, warum in der Regel die Wellenzüge der Rayleigh- oder Love-Oberflächenwellen größer sind als jene der P- oder S-Raumwellen.

Der Qualitätsfaktor Q beschreibt die Dämpfung seismischer Wellen durch Absorption. In Anlehnung an elektrische Schaltkreise definiert dieser den relativen Energieverlust pro Schwingzyklus:

$$\frac{1}{Q} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2\pi}{Q} = -\frac{\Delta E}{E}, \quad (2.62)$$

wobei  $-\Delta E/(2\pi)$  der Energieverlust pro Schwingungszyklus ist und  $E$  die gesamte elastische Energie. Bezogen auf die Wellenlänge  $\Lambda$  der Welle lautet Gl. 2.62:

$$\frac{1}{Q} = -\underbrace{\frac{\frac{1}{E} \frac{dE}{dr}}{2\pi}}_{k} = -\frac{1}{E} \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{dE}{dr}; \quad \text{also: } \frac{2\pi}{Q} = -\frac{1}{E} \Lambda \frac{dE}{dr} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{dE}{E} = -\underbrace{\frac{2\pi}{\Lambda}}_k \frac{dr}{Q} = -\frac{k}{Q} dr. \quad (2.63)$$

Der Dämpfungseffekt wird gewöhnlich auf die Amplitude des seismischen Signals bezogen. Da die Energie proportional zum Amplitudenquadrat ist (siehe Gl. 2.59), gilt  $dE/E = 2dA/A$ . Einsetzen in Gl. 2.63 ergibt:  $\frac{dE}{E} = \frac{2dA}{A} = -\frac{2\pi}{\Lambda} \frac{dr}{Q}$ . Hieraus folgt:  $\int \frac{dE}{E} = \ln E = 2 \int \frac{dA}{A} = 2 \ln A = -\frac{2\pi}{\Lambda Q} \int dr = -\frac{2\pi}{\Lambda Q} r$ , woraus man  $\ln A = -r \underbrace{\frac{\pi}{\Lambda Q}}_{1/D} + \underbrace{A'_0}_{\ln A_0}$  erhält. Mit der Dämpfungsdistanz  $D = \Lambda Q/\pi$  bzw. dem Absorptionskoeffizienten  $\eta = 1/D$  ist die Amplitude  $A$  daher gleich:

$$A = A_0 e^{-r/D} = A_0 e^{-\eta r}, \quad (2.64)$$

Der Exponent  $r/D = 1$  bezeichnet somit die Entfernung, in der die Amplitude  $A$  auf  $A_0/e$  gedämpft ist, also auf etwa 36,8 %.

$D$  ist für eine gegebene Wellenlänge  $\Lambda$  proportional zum  $Q$ -Faktor der Region, welche die Welle durchquert. Ein großer  $Q$ -Faktor bedeutet wenig Energieverlust und folglich eine große Dämpfungsdistanz  $D$ . Für Raumwellen ist Absorption ein weniger starker Effekt als für Oberflächenwellen. Der  $Q$ -Faktor ist größer für P- als für S-Wellen. Dies deutet darauf hin, dass Scherspannungen stärker zur anelastischen Dämpfung beitragen als Normalspannungen. In Festkörpern mit geringer Steifigkeit (Schermodul)  $G$  ist daher die Dämpfung in der Regel größer als in Körpern hoher Steifigkeit. Fluide haben einen hohen  $Q$ -Faktor, weil dort keine Scherspannungen auftreten. Oberflächennahe (bis ca. 1 000 m Tiefe) Lockersedimente bzw. feste Sedimentgesteine weisen eine starke Dämpfung auf mit mittleren  $Q$ -Werten beispielsweise von 15–75 für teil- bzw. unverfestigte Sedimente (Campbell 2009) sowie 107–135 für schluffige Tone (Pinson et al. 2008). Die stärker verfestigten Sediment- oder Grundgebirgsgesteine der tieferen Kruste besitzen deutlich höhere  $Q$ -Werte von bis zu ca. 800 (siehe z. B. Grad und Luosto 1994).

Die Dämpfung durch Absorption hängt von der Wellenzahl  $k$  ab und somit auch von der Frequenz  $f = vk/(2\pi)$  (siehe Gl. 2.63). Daher werden hohe Frequenzen stärker gedämpft als tiefe. Dies verändert das Frequenzspektrum eines sich im Untergrund ausbreitenden seismischen Signals. Hierdurch wird ein anfänglicher Puls mit der Ausbreitungszeit breiter (im Zeitbereich). Im Frequenzbereich

ist dies analog zum selektiven Verlust hoher Frequenzen: Der Untergrund wirkt als Tiefpassfilter.

Dämpfung und Absorption werden meist in Dezibel,<sup>8</sup> also in logarithmischer Skalierung ausgedrückt:

1. Dämpfung (Absorption) in db =  $10 \log_{10}(E/E_0)$ .

Eine Verdoppelung der Intensität entspricht somit einem Zuwachs um 3 db.

Bezogen auf seismische Amplituden A bedeutet dies wegen  $E \propto A^2$ :

2. Dämpfung (Absorption) in db =  $20 \log_{10}(A/A_0)$ .

Eine Verdoppelung der Amplitude entspricht somit einem Zuwachs um 6 db.

## 2.3 Wellenstrahlen und Wellenfronten im geschichteten Untergrund

Die Ausbreitung seismischer Wellen wird durch das Voranschreiten der Wellenfront bestimmt. Die bisherigen Betrachtungen gingen hierbei von einem homogenen und isotropen Medium aus. Welche zusätzlichen Aspekte ergeben sich aber an der Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlichen elastischen Eigenschaften? Hierzu gibt es zwei Herangehensweisen: die Wellenfronten- und die Strahlenmethode. Die Eikonalgleichung (Gl. 2.58) weist nach, dass beide Ansätze im Wesentlichen äquivalent sind. Der erste geht auf das huygenssche der zweite auf das fermatsche Prinzip zurück.

### 2.3.1 Reflexion und Brechung an einer Grenzschicht

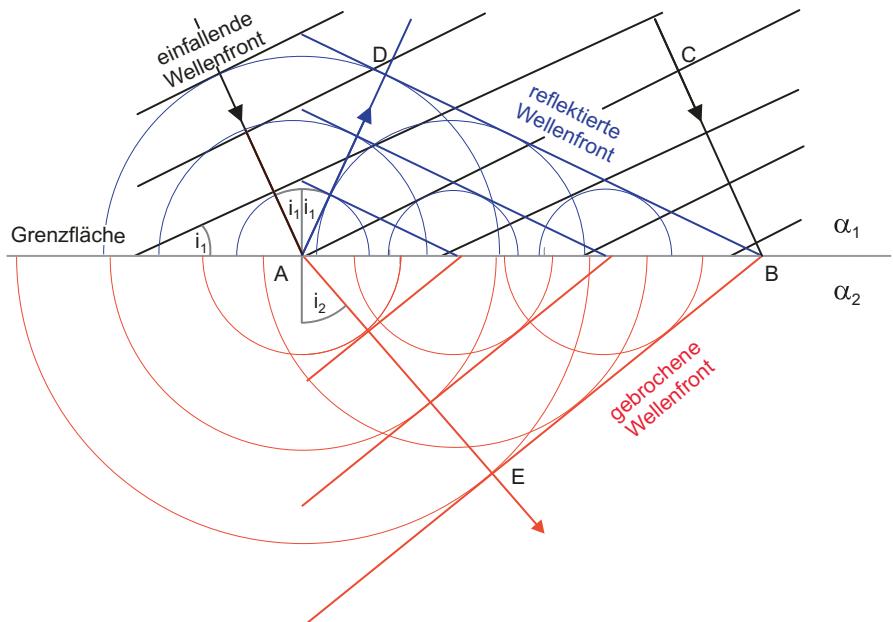
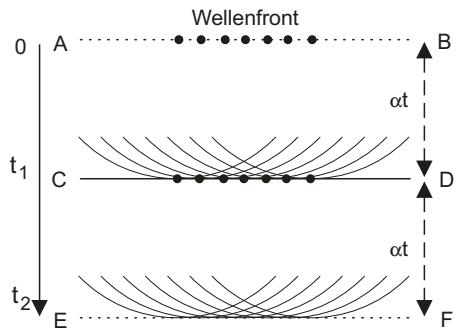
Christiaan Huygens<sup>9</sup> formulierte 1678, dass (i) alle Punkte auf einer Wellenfront als Ausgangspunkte neuer elementarer Kugelwellen betrachtet werden können; (ii) die hieraus resultierende neue Wellenfront die Tangentialfläche bzw. Einhüllende dieser Sekundärwellen ist; (iii) diese aus deren konstruktiven und destruktiven Interferenzen entsteht (Abb. 2.20).

Mit Hilfe des huygensschen Prinzips lassen sich Reflexion und Brechung (*refraction*) an einer Grenzfläche beschreiben, ebenso wie die Beugung (*diffraction*) von Wellen an Objektkanten im Laufweg der Wellen. In Abb. 2.21 regt die einfallende Wellenfront AC Partikel am Punkt A zu Schwingungen an – einerseits Partikel

<sup>8</sup> 1db = 0,1 bel

<sup>9</sup> Christiaan Huygens, 1629–1695; niederländischer Astronom und einer der führenden Mathematiker und Physiker des 17. Jahrhunderts. Er begründete u. a. die Wellentheorie des Lichts, formulierte die Stoßgesetze und beschäftigte sich mit dem Trägheitsprinzip und den Fliehkräften. Mit einem selbst gebauten Teleskop entdeckte er den Saturnmond Titan. Seine Untersuchung von Schwingungen und Pendelbewegungen befähigten ihn zum Bau der ersten Pendeluhrn. Über die Erfindung der Uhr führte er einen jahrelangen Prioritätsstreit mit Robert Hooke – erst seit 2006 scheint dieser zugunsten von Hooke geklärt zu sein.

**Abb. 2.20** Huygenssches Prinzip (nach Lowrie 2007)



**Abb. 2.21** Aus dem huygensschen Prinzip abgeleitete Reflexions- und Brechungsgesetz (nach Lowrie 2007)

im Medium 1, andererseits die Nachbarpartikel im Medium 2. Diese Schwingungen regen sekundäre, von A ausgehende Wellen an: in Medium 1 mit der Geschwindigkeit  $\alpha_1$ , als reflektierte Welle, in Medium 2 als gebrochene oder refraktierte Welle mit der Geschwindigkeit  $\alpha_2$ . Wenn die einfallende Front den Punkt B erreicht hat, sind alle Partikel zwischen A und B zu Schwingungen angeregt. Nach dem huygensschen Prinzip ergibt sich die reflektierte Wellenfront als Tangente  $\overline{BD}$  an alle sekundären Kugelwellenfronten. In der gleichen Zeit, in der die Wellenfront auf der Grenzfläche zwischen A nach B anbrandet, bewegt sie sich entlang des Strahls von C nach B und die reflektierte Wellenfront von A nach D. Die Strecken  $\alpha_1 t = \overline{AD}$  und

$\alpha_1 t = \overline{BC}$  sind gleich lang, und somit sind die Dreiecke ABD und ABC kongruent. Hieraus folgt, dass der Reflexionswinkel  $i'$  gleich dem Einfallswinkel  $i = i_1$  ist – dies ist das Reflexionsgesetz:

$$i = i'. \quad (2.65)$$

Im zweiten Medium hat zum selben Zeitpunkt  $t$  die vom Punkt A ausgehende Sekundärwelle den Punkt E in einer Entfernung  $\alpha_2 t = \overline{AE}$  erreicht. Die Wellenfront im zweiten Medium ist die Tangente  $\overline{BE}$  (von B zum Kreis um A mit dem Radius  $\alpha_2 t$ ), die Einhüllende aller Wellenfonten der nach unten abgestrahlten Elementarwellen. Der Strahl zu dieser Wellenfront spannt mit der Flächennormalen bei A den Brechungswinkel  $i_2$  auf. Es gilt nun (Abb. 2.21):  $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{AB} \sin(i_1)$  und  $\overline{AE} = \overline{AB} \sin(i_2)$ .

Damit ergibt sich:  $\frac{\overline{AB} \sin(i_1)}{\overline{AB} \sin(i_2)} = \frac{\alpha_1 t}{\alpha_2 t}$ , und hieraus folgt das snelliussche Brechungsgesetz<sup>10</sup> (*Snell's law*):

$$\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (2.66)$$

Eine alternative Form von Gl. 2.66 ist:

$$\frac{\sin(i_1)}{\alpha_1} = \frac{\sin(i_2)}{\alpha_2} = p \quad (2.67)$$

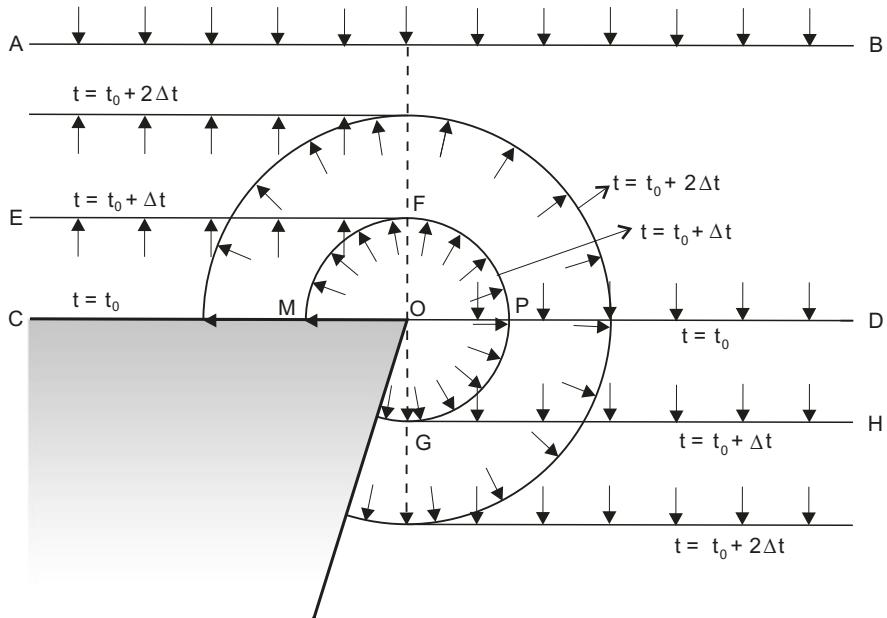
mit dem Strahl-(*ray-path*-)Parameter  $p$  (für ebene Wellenfronten). Dieser ist anschaulich der Kehrwert der Scheingeschwindigkeit<sup>11</sup>  $v_s = \alpha_1 / \sin(i_1) = \alpha_2 / \sin(i_2)$ , mit der eine Welle unter dem Winkel  $i_1$  an der Grenzfläche anbrandet.

### 2.3.2 Beugung (Diffraction)

Trifft eine Wellenfront auf eine diskontinuierliche Grenzschicht, so kommt es nicht nur zu Reflexion und Brechung. An den Diskontinuitäten der Grenzschicht (Ecken, Kanten) tritt zudem Beugung (*diffraction*) auf. Diese ermöglicht es der Welle, sich um ein Hindernis herumzubeugen und sich in ein Gebiet fortzupflanzen, das ansonsten von diesem Hindernis völlig abgeschattet wäre. So ermöglicht es uns die Beugung von Schallwellen beispielsweise Personen zu hören, die nicht zu sehen sind, weil sie etwa hinter einer Ecke oder einer Mauer verborgen sind.

<sup>10</sup>Willebrord Snell van Royen, 1580–1626; niederländischer Astronom und Mathematiker, der das Brechungsgesetz und die geodätische Vermessungsmethode der Triangulation entwickelte.

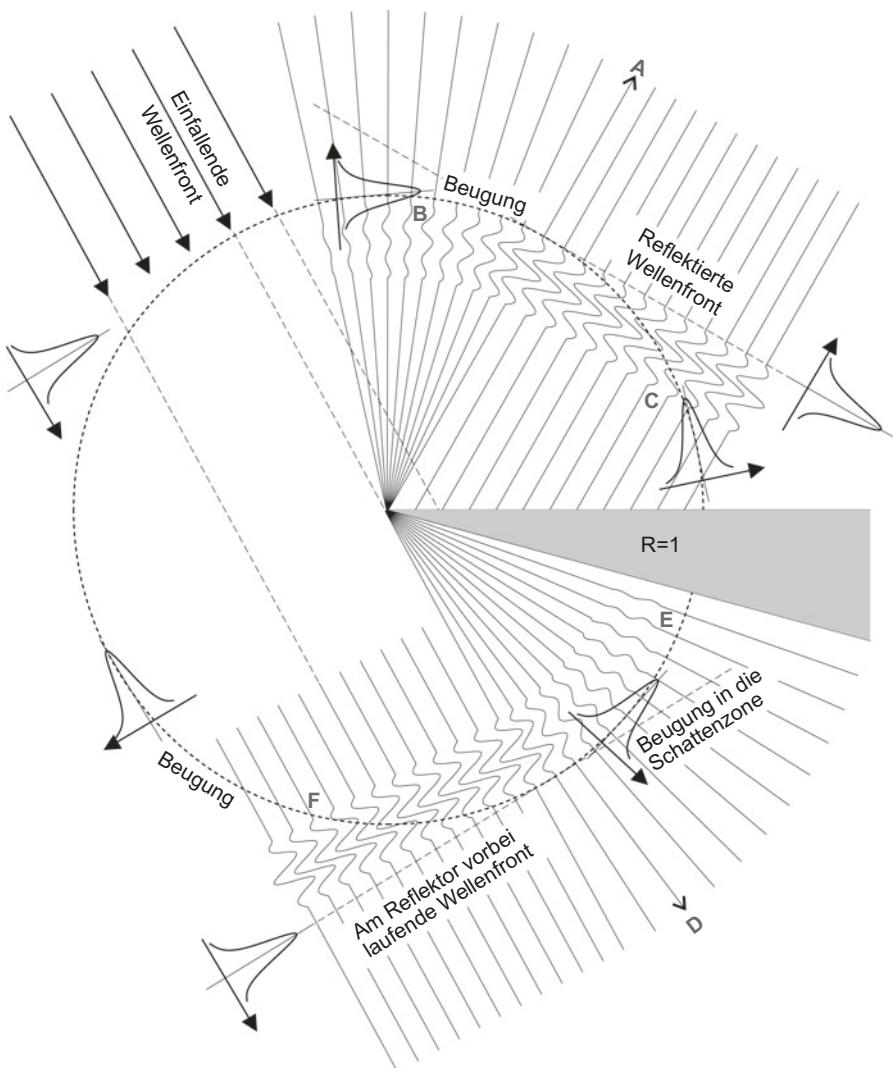
<sup>11</sup> $v_s$  wird als Scheingeschwindigkeit bezeichnet, weil die Anbrandungsgeschwindigkeit keine wahre Schichtgeschwindigkeit ist, außer wenn die Welle unter dem sog. kritischen Winkel auf eine horizontale Schichtgrenze einfällt (vgl. Abschn. 2.3.4). In diesem Fall, wenn sie mit  $90^\circ$  vom Lot weg gebrochen wird, ist  $v_s = \alpha_2$  identisch mit der Geschwindigkeit der zweiten Schicht.



**Abb. 2.22** Beugung einer ebenen Welle an einer Diskontinuität (nach Telford et al. 1990)

Beugung tritt allgemein immer dann auf, wenn der Krümmungsradius eines geometrischen Elements vergleichbar oder kleiner ist als die Wellenlänge. Wegen der großen Wellenlänge seismischer Wellen ( $10 \text{ m} - 100 \text{ m}$ , oft  $> 100 \text{ m}$ ) im Vergleich zu den Dimensionen von geologischen Strukturelementen ist Beugung ein häufiges und wichtiges Phänomen. In einer Entfernung von einigen Wellenlängen vom Beugungszentrum kann die gebeugte Wellenfront mit Hilfe des huygensschen Prinzips konstruiert werden (Abb. 2.22):

Die elementare Kugelwelle, die an der Diskontinuität durch die einfallende Wellenfront angeregt wird, breitet sich auch in dem von der Diskontinuität abgeschatteten Bereich aus. Abb. 2.23 zeigt, wie die Intensität der Reflexion mit Annäherung an das Beugungszentrum abnimmt. Für den Strahl A, der vom Beugungszentrum ausgeht, ist sie auf die Hälfte abgesunken (was einer Amplitudendämpfung um  $1/\sqrt{2}$  entspricht), da dort jeweils die Hälfte der Energie in Beugung (Strahl D) und Reflexion (Strahl A) aufgeteilt ist. Diese beiden Strahlen können jedoch nicht klar in Reflexion und Beugung unterschieden werden, da sie stetig ineinander übergehen. Die Intensität der Beugung nimmt in den Gebieten B und E mit zunehmendem Beugungswinkel immer weiter ab. Daher kann man aufgrund des Signals das Beugungszentrum nicht klar identifizieren, weder durch die Signalform noch durch einen plötzlichen Wechsel in der Signalamplitude. Im Gebiet B trifft die Beugung mit wachsender Entfernung von A immer später und mit immer geringerer Amplitude ein. Auch im Gebiet C kommt die gebeugte Energie nach der reflektierten an. Jedoch ist das Beugungssignal im Gebiet C um  $180^\circ$



**Abb. 2.23** Phasen und relative Amplituden einfallender und durchlaufender sowie an einem ausbeißenden Reflektor gebeugter und reflektierter Wellenfronten ( $R$ : Reflexionskoeffizient; nach Lavergne 1989; Sheriff 2002)

phasenverschoben bzgl. des Beugungssignals im Gebiet B. Dies ergibt sich aus dem Vorzeichenwechsel des Abstands zwischen der Beugungskante und dem Aufpunkt, wenn dieser sich der Kante nähert und diese schließlich überschreitet (siehe z. B. Sheriff und Geldart 1995, S. 66). Das Beugungssignal wird aber meist von der Reflexion im Gebiet C überlagert, obwohl es genauso groß ist wie im Gebiet B. Analoge Überlegungen treffen auf den Strahl D zu, der das Beugungszentrum gerade noch passiert hat, sowie auf die zugehörigen Beugungen in den Gebieten E und F, die analog zu B und C sind.

### 2.3.3 Fermatsches Prinzip

Alternativ zum huygensschen Prinzip bietet das ebenfalls im 17. Jahrhundert formulierte fermatsche<sup>12</sup> Prinzip einen Zugang zu den Reflexions- und Brechungsgesetzen. Bezogen auf die Ausbreitung seismischer Wellen besagt es, dass ein seismischer Strahl mit der Geschwindigkeit  $v$  unter allen möglichen Ausbreitungswegen  $ds$  von A nach B genau jenem folgt, der die kürzeste Laufzeit  $t$  erfordert:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} = \min. \quad (2.68)$$

Im Falle einer stetig sich mit dem Ort ändernden Geschwindigkeit ergeben sich hieraus z. T. komplizierte Laufwege (z. B. Tauchwellen). Für ein geschichtetes Medium mit schichtweise konstanten Geschwindigkeiten erhält man die Reflexions- und Brechungsgesetze, indem man über die Laufzeiten der einzelnen Strahlabschnitte (die Quotienten aus Laufweg und Geschwindigkeit) summiert, diese Summe nach dem Ort ableitet und zu null setzt (vgl. Aufg. (20) in Abschn. 2.7).

### 2.3.4 Kritische, unter- und überkritische Reflexion

Überlagert eine Schicht geringer Geschwindigkeit eine Schicht höherer Geschwindigkeit, so wird der gebrochene Strahl mit wachsendem Einfallswinkel immer weiter vom Lot weg gebrochen. Ist der sog. kritische Winkel erreicht, läuft der gebrochene Strahl im unteren Medium (mit  $\alpha_2$  bzw.  $\beta_2$ ) an der Grenzfläche als Kopfwelle entlang (*head wave*; im Deutschen auch als geführte oder Mintrop-Welle bezeichnet; Abb. 2.24). Dies ist das seismische Analogon zum Winkel der Totalreflexion in der Optik. Der kritische Winkel  $i_c$  ergibt sich aus dem snelliusschen Brechungsgesetz zu:

$$\frac{\sin(i_c)}{\sin(90^\circ)} = \sin(i_c) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (2.69)$$

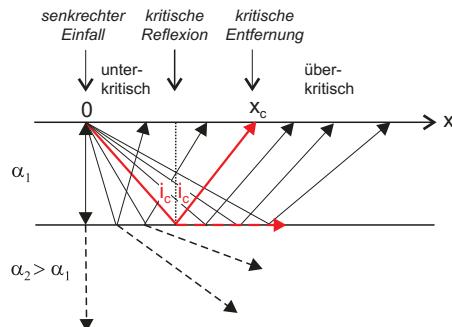
Ist die einfallende Welle eine Scherwelle, gilt eine entsprechende Gleichung mit dem kritischen Winkel  $i_c = \beta_1/\beta_2$  für die Brechung von Scherwellen.

Gleichzeitig mit der Kopfwelle tritt die kritische Reflexion auf, welche die Oberfläche in der kritischen Entfernung  $x_c$  erreicht. Reflexionen, die in geringerer bzw. größerer Entfernung die Oberfläche erreichen, werden unterkritisch (*sub-critical*) bzw. überkritisch (*super-critical* bzw. *wide angle reflections*) genannt. Letztere verlieren wenig Energie aufgrund der Refraktion und können daher in der Deckschicht über große Distanzen hinweg aufgezeichnet werden. Weit von der Quelle entfernte Geophone zeichnen deshalb überkritische Reflexionen mit relativ starken Amplituden auf.

---

<sup>12</sup>Pierre de Fermat, 1607–1665; französischer Jurist und Mathematiker.

**Abb. 2.24** Reflexion und Brechung einer Kompressionswelle bei unterschiedlichen Einfallwinkeln



### 2.3.5 Störsignale und Rauschen

Neben den beschriebenen Prozessen Reflexion, Brechung und Beugung gibt es auch andere, unerwünschte Quellen von Signalen im Seismogramm. Diese können z. B. technischer Art sein (*ambient noise*), wenn ein Gerät defekt ist oder Geophone schlecht an den Boden angekoppelt sind. Die natürliche Bodenunruhe, die überwiegend aus der Interferenz von Rayleigh-Wellen entsteht, wird traditionell ebenfalls als Störsignal betrachtet. Jedoch dient sie auch für die neuerdings entwickelten Methoden der passiven Seismik als Signal.

Soll die seismische Spur noch auswertbar sein, muss in jedem Fall das Signal/Rausch-Verhältnis größer als eins sein. Man unterscheidet kohärentes und inkohärentes Rauschen (*noise*). Inkohärentes Rauschen wird in der Regel durch lokale Inhomogenitäten wie Geröll, Wurzeln oder andere Einlagerungen verursacht, die als Streuzentren für seismische Energie dienen können. Da es lokaler Natur ist, wirkt sich inkohärentes Rauschen von Spur zu Spur (bzw. Geophon zu Geophon) unterschiedlich aus. Daher kann sein Einfluss durch eine Mittelung über eine Anzahl von Geophonen vermindert, wenn nicht gänzlich beseitigt werden: Setzt sich das Signal der  $i$ -ten seismische Spur  $x_i$  aus einem kohärenten Signalanteil  $S$  und einem statistischen Rauschanteil  $R$  zusammen:  $x_i = S + R_i$ , dann ist der Mittelwert  $\bar{x}$  über alle  $n$  Spuren einer Geophongruppe der beste Schätzwert des Signals:  $S = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ . Folglich ist dann die Standardabweichung  $\sigma$  des Mittelwerts der beste Schätzwert des Rauschens:  $R \approx \sigma$ , wobei das Quadrat der Standardabweichung, die Varianz, für große  $n$  durch  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2/(n - 1) \approx \sum_{i=1}^n R_i^2/n$  angenähert werden kann. Das Signal/Rausch-Verhältnis  $S/R$  ist daher:

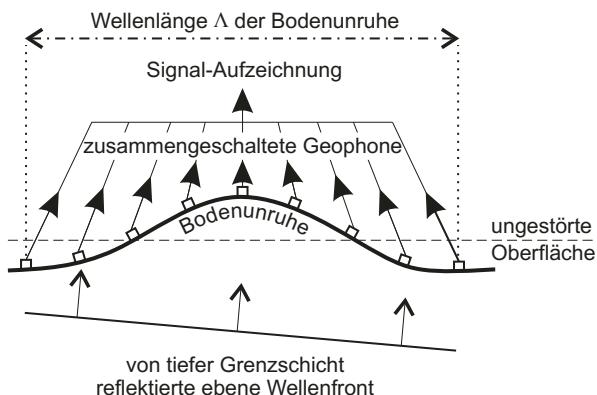
$$S/R \approx \frac{\bar{x}}{\sigma} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n R_i^2}{n}}} = \frac{\bar{x}\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2}}.$$

Für große  $n$  strebt  $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2}/\sqrt{n}$  einem Grenzwert zu, der durch die statistischen Eigenschaften des Rauschens bestimmt wird. Für zufallsverteiltes Rauschen und großes  $n$  verbessert die Zusammenschaltung von  $n$  Geophonen daher das Signal/Rausch-Verhältnis um den Faktor  $\sqrt{n}$ . Darin kommt zum Ausdruck,

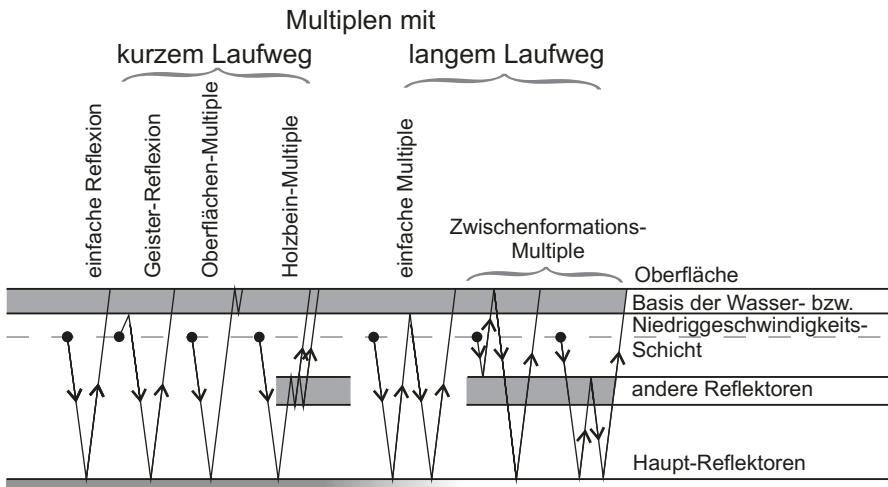
dass die von den  $n$  Geophonen empfangene seismische Energie proportional zum Quadrat der Amplituden ist (vgl. [Abschn. 2.2.5](#)). Kohärentes Rauschen korreliert dagegen über mehrere Spuren hinweg. Zwei häufig auftretende Formen hiervon sind Oberflächenwellen und multiple Reflexionen.

Oberflächenwellen werden durch oberflächennahe seismische Quellen zusätzlich zu den P- und ggf. S-Wellen angeregt. Sie breiten sich langsamer aus als P-Wellen, erreichen aber häufig die Geophone zusammen mit dem Wellenzug der Reflexionen. Diese Art der Bodenunruhe kann durchaus schwächere Reflexionen überdecken. Durch geschickte Auslage der Geophone kann das Problem minimiert werden, z. B. indem die 16 Geophone einer Gruppe äquidistant über die Wellenlänge einer Rayleigh-Welle verteilt werden ([Abb. 2.25](#)). Auf diese Weise wird der Effekt durch Mittelung minimiert. Alternativ können die in der Regel im Vergleich zu den P-Reflexionen niederfrequenten Rayleigh-Wellen durch Hochpassfilter unterdrückt werden, entweder durch elektronische Filter direkt im Geophon-Schaltkreis oder durch digitale Filter bei der Datenverarbeitung (*processing*). Wegen ihrer vergleichsweise großen Energie und ihrer Konzentration nahe der Oberfläche werden Rayleigh-Wellen allerdings nunmehr auch gezielt zur Erkundung des flachen Untergrunds eingesetzt (vgl. [Abschn. 2.6.2](#)). In diesem Fall werden sie als Signal behandelt.

Multiple Reflexionen treten sehr häufig und in unterschiedlichen Formen in geschichteten Medien auf. Die Wichtigste ist die Oberflächenmultiple ([Abb. 2.26](#)). Die Reflexionen an der freien Oberfläche sind sehr stark (Reflexionskoeffizient  $\approx -1$ , vgl. [Abschn. 2.3.6](#)), und Multiple können zwischen der Oberfläche und einem tieferen Reflektor auftreten. Bei steilem Einfall (Steilwinkelreflexion: *near vertical incidence*) ist die Laufzeit der ersten Multiplen nahezu das Doppelte der Primärreflexion. Im Seismogramm ergibt sich somit eine Kopie des Reflektors in der doppelten Tiefe bzw. Laufzeit. Höhere Multiple ergeben zusätzliche Scheinreflektoren (*apparent reflectors*). Eine Unterdrückung der Multiplen wird durch die CMP-(*common midpoint*-)Methode bei der Aufnahme von Reflexionsprofilen



**Abb. 2.25** Seismisches Rauschen durch Bodenunruhe und seine Minimierung durch Zusammenschaltung geeignet verteilter Geophone (nach Lowrie 2007)



**Abb. 2.26** Unterschiedliche Arten multipler Reflexionen (nach Telford et al. 1990)

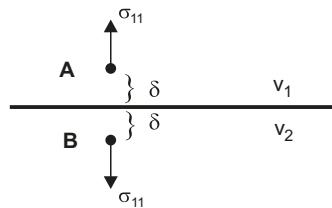
erreicht (vgl. Abschn. 2.4). Diese werden hierbei häufig schon stark zerstapelt. Neben den Multiplen mit großer Wegverlängerung gibt es auch solche mit kleiner Wegverlängerung (*long path* bzw. *short path multiples*). Sie entstehen durch Mehrfachreflexionen an den Grenzflächen dünner Schichten auf ihrem Weg von oder zu dem Hauptreflektor (Abb. 2.26). Diese „Holzbein-Multiplen“ (*peg-leg multiples*) verzögern die Ankunft eines Teils der Energie. Zudem verändert der damit einhergehende längere Laufweg die Signalform durch verstärkte Absorption, Streuung usw. von Energie.

### 2.3.6 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Entsprechend den Reflexions- und Brechungsgesetzen entstehen beim Einfallen einer elastischen Welle auf eine Grenzschicht nach Maßgabe des Geschwindigkeitskontrasts neue Wellen, reflektierte und gebrochene. Dadurch wird die einfallende Energie auf mehrere Wellen verteilt – man spricht von konvertierten bzw. Wechselwellen (*converted waves*): Beim Einfallen einer P- oder einer vertikal polarisierten S-Welle entstehen je eine reflektierte P- und Sv-Welle und je eine gebrochene P- und Sv-Welle; jedoch erfolgt keine Konversion in SH-Wellen. Ist die einfallende Scherwelle jedoch horizontal polarisiert, d. h. senkrecht zur Ebene, die sowohl ihre Ausbreitungsrichtung als auch die Flächennormale der Grenzschicht enthält, so findet keine Konversion in P- oder Sv-Wellen statt, und es entstehen lediglich je eine reflektierte und gebrochene SH-Welle.

Diese Aufspaltung der einfallenden elastischen Energie ergibt sich aus der Stetigkeit der Normal- und Tangentialkomponente der Verschiebungen und Spannungen an der (infinitesimal dünnen) Grenzschicht. Da die jeweiligen Reflexions- und Brechungswinkel durch die Geschwindigkeitskontraste bereits festliegen, müssen

**Abb. 2.27** Stetigkeit der Normalspannung  $\sigma_{11}$  an einer Grenzfläche



diese Randbedingungen durch die Amplituden der jeweiligen Wellen erfüllt werden. Im Falle zweier horizontal geschichteter Gesteinsschichten ergeben sich hieraus vier Gleichungen. Diese wurden von Cargill Gilston Knott 1899 zuerst in Form von Potenzialen der Amplituden formuliert und 1919 von Karl Bernhard Zoeppritz in Form der Amplituden selbst.

Die Abb. 2.27 veranschaulicht die Situation an der Grenzschicht zweier Medien mit unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ : Die Beträge der Normalspannungen  $\sigma_{11}$  an den Punkten A und B zu beiden Seiten der Grenzfläche müssen sich einander annähern, je näher A und B der Grenzschicht kommen. Im Grenzfall, d. h. für  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ , müssen sie gleich sein. Andernfalls würde auf die unendlich dünne Grenzschicht der Dicke  $2\delta$ , mit einer entsprechend unendlich kleinen Masse, eine endliche Kraft F wirken:  $F = m \cdot a = \lim_{\delta \rightarrow 0} F/m$  würde dies die Grenzschicht jedoch einer unendlichen Beschleunigung aussetzen, was physikalisch nicht möglich ist.

### Karl Bernhard Zoeppritz

Karl Bernhard Zoeppritz, 1881–1908; deutscher Geophysiker, mit grundlegenden Beiträgen zur Seismologie, im Besonderen hinsichtlich der Variation der Amplituden seismischer Wellen an Grenzflächen mit dem Einfallswinkel. Dies führte ihn zur Formulierung der nach ihm benannten Gleichungen für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten.



Karl Bernhard Zoeppritz (Wikipedia 2017b)

Nach dem Studium der Geologie zunächst in München, dann in Freiburg im Breisgau, wurde Karl Zoeppritz dort 1905 mit einem Thema zur Geologie der

Alpen promoviert. Nachdem er ein Jahr später in Karlsruhe das Oberlehrerexamen abgelegt hatte, wurde er Assistent von Emil Wiechert in Göttingen, einem der führenden Seismologen seiner Zeit. Dort studierte er Seismogramme großer Erdbeben, darunter das bekannte San-Francisco-Erdbeben von 1906. Aufbauend auf Wiecherts theoretischen Arbeiten erstellte er Laufzeitkurven, die er gemeinsam mit diesem 1907 veröffentlichte. Diese ermöglichen eine bessere Identifizierung der verschiedenen Einsätze in Seismogrammen von Fernbeben.

Karl Bernhard Zoeppritz verstarb 1908 im Alter von nur 26 Jahren an einer Infektionskrankheit. Für seine Arbeiten in Göttingen waren ihm lediglich zwei Jahre verblieben, und viele seiner Forschungsergebnisse wurden von seinen Göttinger Kollegen posthum veröffentlicht.

Die Deutsche Geophysikalische Gesellschaft (DGG) benannte 2003 ihren Preis für junge Nachwuchswissenschaftler mit besonderen Leistungen in der Geophysik nach Karl Zoeppritz.

Nach: Wikipedia 2017

Eine analoge Betrachtung gilt für die Tangentialspannungen: Wären die Tangentialspannungen unstetig, würde sich das Material zu beiden Seiten der Grenzschicht in unterschiedliche Richtungen bewegen. Auch dies kann im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie nicht geschehen.

Gleichfalls müssen die Normal- und Tangentialverschiebungen an der Grenzschicht stetig sein. Wären die Normalverschiebungen nicht stetig, so würde sich das Material entweder an der Grenzschicht spalten, sodass ein Vakuum entstünde, oder die beiden Bereiche würden einander durchdringen und dasselbe Volumen belegen. Wären die Tangentialverschiebungen nicht stetig, so würde sich das Material parallel zur Grenzschicht spalten, etwa im Sinne einer Blattverschiebung. Beides kann im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie nicht sein.

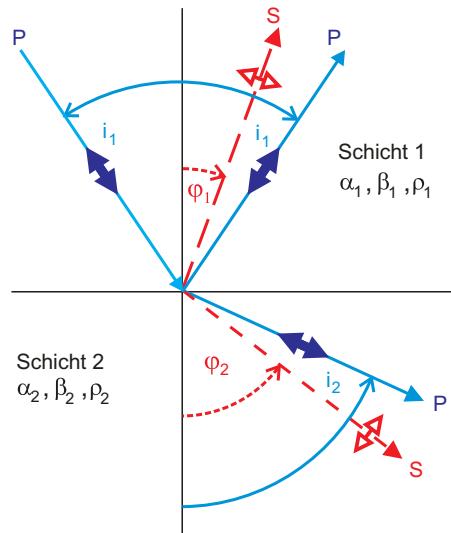
Die Stetigkeit der Normal- und Tangentialspannungen sowie der Normal- und Tangentialverschiebungen wird durch vier Gleichungen ausgedrückt, denen eine elastische Welle an einer Grenzschicht genügen muss. Für den Fall einer einfachen P-Welle (Abb. 2.28) ergibt sich aus dem snelliusschen Brechungsgesetz (Gl. 2.66):

$$\frac{\sin(i_1)}{\alpha_1} = \frac{\sin(i_2)}{\alpha_2} = \frac{\sin(\varphi_1)}{\beta_1} = \frac{\sin(\varphi_2)}{\beta_2} = p. \quad (2.70)$$

Hierbei sind  $i$  und  $\varphi$  die Winkel der Strahlen der Kompressions- und Scherwellen und  $p$  der Strahlparameter, der Kehrwert der Scheingeschwindigkeit der Welle an der Oberfläche.

Die vier Gleichungen, die sich aus den vier Stetigkeitsbedingungen bzgl. der Normal- und Tangentialverschiebungen sowie Normal- und Tangentialspannungen ergeben, werden als Zoeppritz-Gleichungen bezeichnet. Sie lauten mit den darin

**Abb. 2.28** Reflexion und Brechung einer P-Welle an einer Grenzfläche (Clauser 2016)



auftrtenden Produkten aus Dichte  $\rho$  und Phasengeschwindigkeit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  der P- und S-Wellen, den sog. akustischen Impedanzen,

$$Z = \rho\alpha; \quad W = \rho\beta \quad (2.71)$$

sowie dem Verhältnis  $\gamma = \beta/\alpha$  der Geschwindigkeiten von Scher- und Kompressionswellen:

Stetigkeit der Normalverschiebungen:

$$A_1 \cos(i_1) - B_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \cos(i_2) + B_2 \sin(\varphi_2) = A_0 \cos(i_1)$$

Stetigkeit der Tangentialverschiebungen:

$$A_1 \sin(i_1) + B_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \sin(i_2) + B_2 \cos(\varphi_2) = -A_0 \sin(i_1)$$

Stetigkeit der Normalspannungen:

$$\begin{aligned} & A_1 Z_1 \cos(2\varphi_1) - B_1 W_1 \sin(2\varphi_1) - A_2 Z_2 \cos(2\varphi_2) - B_2 W_2 \sin(2\varphi_2) \\ &= -A_0 Z_1 \cos(2\varphi_1) \end{aligned}$$

Stetigkeit der Tangentialspannungen:

$$\begin{aligned} & A_1 \gamma_1 W_1 \sin(2i_1) + B_1 W_1 \cos(2\varphi_1) + A_2 \gamma_2 W_2 \sin(2i_2) - B_2 W_2 \cos(2\varphi_2) \\ &= A_0 \gamma_1 W_1 \sin(2i_1) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Mit bekannten Dichten und Geschwindigkeiten können für eine gegebene einfallende P-Welle mit  $A_0$  und  $i_1$  aus Gl. 2.70 die Winkel  $i_2$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  berechnet werden sowie aus den Zoeppritz-Gleichungen (Gl. 2.72) die vier Amplituden  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$ .

Für senkrecht auf die Grenzschicht einfallende Wellen ( $i_1 = i_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$ , *normal incidence*) vereinfachen sich die Zoeppritz-Gleichungen: Die Tangentialspannungen verschwinden, und deshalb gilt:  $B_2 = -B_1$

sowie  $B_1 W_1 + B_1 W_2 = 0$  und folglich  $B_1 = B_2 = 0$ . Damit reduzieren sich die vier Zoeppritz-Gleichungen (Gl. 2.72) im Falle senkrechten Einfalls auf zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A_0, \\ Z_1 A_1 - Z_2 A_2 &= -Z_1 A_0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} R &= \frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\rho_2 \alpha_2 - \rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1}, \\ T &= \frac{A_2}{A_0} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 \rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

R und T werden als Reflexions- und Transmissionskoeffizient bezeichnet. Ihre Summe ergibt eins:  $R + T = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} + \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = 1$ .

Die entsprechenden Koeffizienten  $R^*$  und  $T^*$  hinsichtlich der reflektierten und durchlaufenden Energie ergeben sich aus der Gesamtenergie  $E^{ges}$ , welche in einem zur Ausbreitungsrichtung der Welle parallelen, infinitesimalen Zylinder enthalten ist, dessen Querschnittsfläche  $\delta A$  und dessen Länge gerade der Stecke  $v \delta t$  entspricht, welche die Welle mit der Geschwindigkeit  $v$  in der Zeit  $\delta t$  zurückgelegt hat. Bezeichnet die Intensität  $I$  die Energie, welche pro Zeiteinheit eine Fläche durchströmt, so ergibt sich die Gesamtenergie aus der Energiedichte  $E_V$  (Gl. 2.59):

$$\begin{aligned} E^{ges} &= \underbrace{\frac{E_V}{\delta A \delta t}}_I \overbrace{\underbrace{v \delta t}_{\text{Laufweg}} \underbrace{\delta A}_{\text{Volumen}}}^{\text{Volumen}}, \quad \text{also:} \\ E^{ges} &= E_V v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Damit folgt für  $R^*$  und  $T^*$ , die Anteile der reflektierten und durchlaufenden Energie bezogen auf die eingestrahlte Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_1^2 \alpha_1}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_0^2 \alpha_1} = \left( \frac{A_1}{A_0} \right)^2 = R^2 = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} = \frac{(\delta - 1)^2}{(\delta + 1)^2}, \quad \text{mit: } \delta = \frac{Z_2}{Z_1}; \\ T^* &= \frac{\frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 A_2^2 \alpha_2}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_0^2 \alpha_1} = \frac{A_2^2}{A_0^2} \frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1} = T^2 \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} = T^2 \delta = \frac{4 \delta}{(\delta + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Da die Gesamtenergie erhalten bleibt, ergibt auch die Summe der energiebezogenen Koeffizienten  $R^*$  und  $T^*$  eins:  $R^* + T^* = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} + \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} = \frac{Z_2^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_1^2}{(Z_2 + Z_1)^2} = 1$ . Setzt

man den Impedanzkontrast  $\delta = Z_2/Z_1$  in Gl. 2.76 ein, so folgt für  $R^*$  und  $T^*$ :

$$R^* = \frac{(\delta - 1)^2}{(\delta + 1)^2}; T^* = \frac{4\delta}{(\delta + 1)^2}. \quad (2.77)$$

Die Ausdrücke in Gl. 2.77 bleiben unverändert, wenn der Impedanzkontrast als  $\delta = Z_1/Z_2$  definiert wird. Somit hängen die energiebezogenen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $R^*$  und  $T^*$  nicht davon ab, aus welchem Medium die Welle einfällt. Für  $\delta = 1$  ist  $R = 0$ . Damit erfolgt keine Reflexion, und die gesamte Energie durchläuft die Grenzschicht. Dies erfordert nicht, dass sowohl die Dichten als auch die Geschwindigkeiten gleich sind, sondern lediglich, dass dies für ihr Produkt gilt:  $\rho_1 \cdot \alpha_1 = \rho_2 \cdot \alpha_2$ . Für das Zustandekommen einer Reflexion sind somit unterschiedliche Impedanzen erforderlich (d. h. ein Impedanzkontrast  $\delta > 1$ ). Brechung erfolgt dagegen bereits bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten.

Während der Reflexionskoeffizient immer kleiner als eins ist, wird der Transmissionskoeffizient größer als eins, wenn die Impedanz des Mediums, aus dem die Welle kommt, kleiner ist als jene im Medium, in das sie einfällt. Dies erklärt die potenziell größeren Erdbebenbeschäden in Gebieten, an deren Oberfläche Lockersedimente geringer Impedanz Grundgebirge höherer Impedanz überlagert. In diesen Fällen kommt es zu einer Überlagerung der aufwärts zur Oberfläche laufenden Welle (mit  $T < 1$ ) und der von der Oberfläche reflektierten Welle (mit  $T > 1$ ). Konkret ergibt sich für eine harmonische Welle der Kreisfrequenz  $\omega$  im Fall einer Lockersedimentschicht der Mächtigkeit  $h$  und Geschwindigkeit  $\beta$  von Scherwellen über einem Grundgebirge ein Verstärkungsfaktor von  $1/|\cos(\omega \cdot h/\beta)|$  (siehe z. B. Meskouris et al. 2007, Abschn. 2.3). Der Nenner dieses Ausdrucks wird maximal eins, doch geht er gegen null, wenn das Verhältnis  $\omega \cdot h/\beta$  gegen  $\pi/2 + n \cdot \pi$  strebt. In diesem Fall wird auch der Verstärkungsfaktor unendlich, und es liegt Resonanz vor.

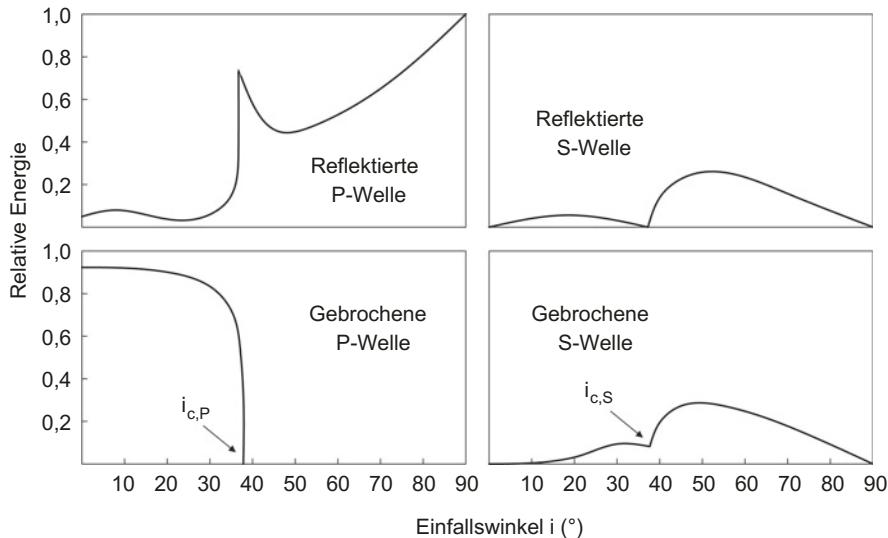
Wenn  $Z_2 < Z_1$  ist, ist  $R < 0$ . Dies bedeutet, dass die Reflexion mit einem Phasensprung von  $180^\circ$  verbunden ist, d. h., dass eine einfallende Kompression als Dehnung reflektiert wird und umgekehrt. Im Allgemeinen ist  $|R| < 1$ , aber falls  $Z_1 = 0$  ist, wird  $R = R^* = 1$ , und die gesamte Energie wird reflektiert. Dies ist näherungsweise der Fall für eine aus der Luft auf die Wasseroberfläche einfallende P-Welle (wegen  $\rho_{\text{Luft}} \approx 0$ ). Ist dagegen  $Z_2 = 0$ , wird  $R = -1$  (und  $R^* = 1$ ), wird wiederum die gesamte Energie reflektiert, jedoch mit einer um  $180^\circ$  gedrehten Phase. Dies ist näherungsweise der Fall für eine aus dem Wasser auf die Wasseroberfläche einfallende P-Welle. Die Tab. 2.4 gibt einen Überblick über die Größe des Reflexionskoeffizienten  $R$  für unterschiedliche Schichtgrenzen.

Die Gleichungen Gl. 2.74 und 2.76 für vertikalen Einfall (d. h. einen Einfallswinkel von  $0^\circ$ ) sind auch noch für kleine Einfallswinkel bis zu  $15^\circ$ – $20^\circ$  gültig, da sich in diesem Bereich die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $R$ ,  $R^*$ ,  $T$ ,  $T^*$  wenig ändern (Abb. 2.29). Da in der Reflexionsseismik häufig im Steilwinkelbereich gearbeitet wird, also die Auslagen klein sind im Vergleich zu den Schichtmächtigkeiten, ist diese Näherung von großer praktischer Bedeutung.

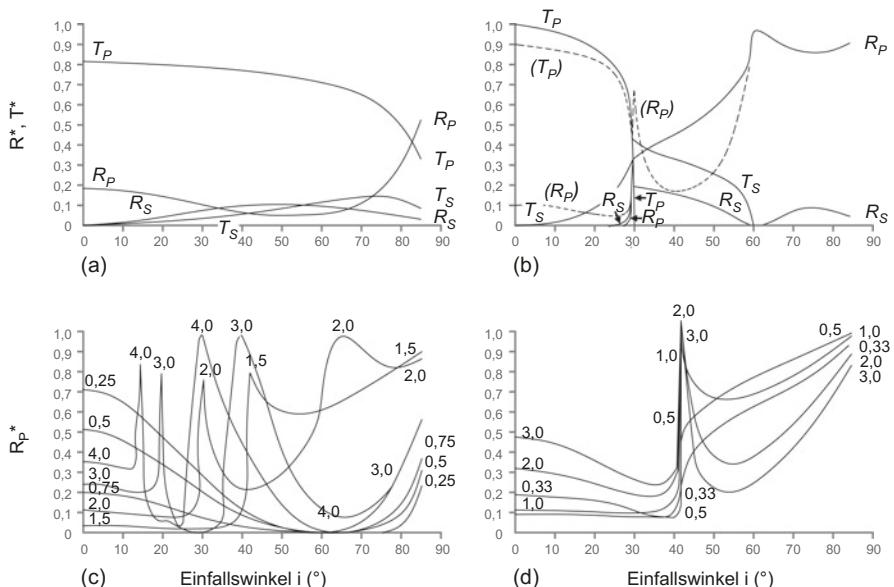
**Tab. 2.4** P-Wellengeschwindigkeit  $\alpha$ , Dichte  $\rho$ , Impedanzkontrast  $\delta$  und Reflexionskoeffizient  $R$  für verschiedene Materialkontraste (nach Telford et al. 1990; Parasnis 1997)

Material	Schicht 1		Schicht 2		$\delta = Z_1/Z_2$	R
	$\alpha$ (m s <sup>-1</sup> )	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\alpha$ (m s <sup>-1</sup> )	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )		
Sandstein auf Kalkstein	2 000	2 400	3 000	2 400	0,67	0,200
Kalkstein auf Sandstein	3 000	2 400	2 000	2 400	1,50	-0,200
„flacher“ Reflektor	2 100	2 400	2 300	2 400	0,93	0,045
„tiefer“ Reflektor	4 300	2 400	4 500	2 400	0,97	0,023
„weicher“ Meeresboden	1 500	1 000	1 500	2 000	0,50	0,330
„harter“ Meeresboden	1 500	1 000	3 000	2 500	0,20	0,670
Meerwasser gegen Luft	1 500	1 000	360	1.2	3 472	-0,999
Basis Verwitterungsschicht	500	1 500	2 000	2 000	0,19	0,680
Meerwasser über Kalkstein						0,650
Meerwasser über Geschiebeton						0,450
Meerwasser über rezentem Sand/Ton						0,300
Tone über Gas-Sand, 500 m						-0,300
Meeresboden-Multiple						0,250
±10 % Impedanzänderung						±0,050

Jenseits vom Gültigkeitsbereich dieser Näherung müssen jedoch die vollständigen Zoeppritz-Gleichungen gelöst werden. Solche Lösungen für eine bestimmte Auswahl von Parameterkombinationen sind für  $R^*$  und  $T^*$  in Abb. 2.30 dargestellt: In Abb. 2.30a für  $\alpha_2/\alpha_1 = 0,5$  und  $\rho_2/\rho_1 = 0,8$  sieht man, dass für kleine Einfallswinkel die gesamte Energie in den reflektierten und durchlaufenden P-Wellen ( $R_P$ ,  $T_P$ ) enthalten ist. Hier entstehen fast keine S-Wellen. Mit anwachsendem Einfallswinkel werden S-Wellen ( $R_S$ ,  $T_S$ ) erzeugt, überwiegend auf Kosten der reflektierten P-Welle ( $R_P$ ). Für mittlere Einfallswinkel ist die reflektierte S-Welle ( $R_S$ ) energiereicher als die reflektierte P-Welle ( $R_P$ ). Solche Wechselwellen werden ggf. bei großen Auslagen (*offsets*) aufgezeichnet. Man erkennt sie an Korrelationen, die



**Abb. 2.29** Aufspaltung der einfallenden P-Wellenenergie an einer Grenzschicht in reflektierte und durchlaufende P- und Sv-Wellen für vorgegebene Geschwindigkeits- und Dichteverhältnisse (nach Dobrin und Savit 1990)



**Abb. 2.30** Aufspaltung der einfallenden P-Wellenenergie an einer Grenzschicht in reflektierte und durchlaufende P- und Sv-Wellen für vorgegebene Verhältnisse von Geschwindigkeiten, Dichten und Poisson-Zahlen: (a)  $\alpha_2/\alpha_1 = 0,5$  und  $\rho_2/\rho_1 = 0,8$ ,  $v_1 = 0,25$ ,  $v_2 = 0,3$ ; (b)  $\alpha_2/\alpha_1 = 2$  und  $\rho_2/\rho_1 = 0,5$  (gestrichelt: =1),  $v_1 = 0,3$ ,  $v_2 = 0,25$ ; (c)  $\rho_2/\rho_1 = 1$ ,  $v_1 = v_2 = 0,25$ , Kurvenparameter:  $\alpha_2/\alpha_1$ ; (d)  $\alpha_2/\alpha_1 = 1,5$ ,  $v_1 = v_2 = 0,25$ , Kurvenparameter:  $\rho_2/\rho_1$  (nach Sheriff und Geldart 1995)

für kleine Auslagen verschwinden. Mit zunehmend streifendem Einfall (*grazing incidence*) enthält die reflektierte P-Welle ( $R_P$ ) einen zunehmend größeren Anteil der Gesamtenergie.

Die gegensätzliche Situation mit  $\alpha_2/\alpha_1 = 2$  und  $\rho_2/\rho_1 = 0,5$  ist in Abb. 2.30b dargestellt. Da hier  $Z_2 = Z_1$  ist, verschwindet der P-Reflexionskoeffizient für kleine Winkel. Mit wachsendem Einfallswinkel steigt die  $T_S$ -Energie an. Mit Annäherung an den kritischen Winkel für P-Wellen verschwindet die  $T_P$ -Energie und die  $R_P$ - und  $R_S$ -Energie wächst an, besonders nahe dem kritischen Winkel. Diese werden als Weitwinkel-(*wide angle*)-Reflexionen bezeichnet. Mit ihnen können manchmal Reflektoren kartiert werden, deren Reflexionen bei kleinen Auslagen zu schwach sind. Mit Annäherung an den kritischen Winkel für S-Wellen verschwindet auch die  $T_S$ -Welle. In Abwesenheit eines das Geschwindigkeitsverhältnis kompensierenden Dichtecontrasts ( $Z_2 \neq Z_1$ ) tritt auch eine reflektierte P-Welle auf (gestrichelte Linie).

Abb. 2.30c zeigt den P-Wellen Reflexionskoeffizienten  $R_P^*$ , der null ist für  $\delta = 1$  (also  $Z_2 = Z_1$ ) und anwächst sowohl für  $\delta > 1$  als auch für  $\delta < 1$  ( $\alpha_2 > \alpha_1$  bzw.  $\alpha_2 < \alpha_1$ ). Die beiden Spitzenwerte für  $\alpha_2 > \alpha_1$  entsprechen den kritischen Winkeln für P- und S-Wellen.

Abb. 2.30d schließlich zeigt den  $R_P^*$ -Koeffizienten für unterschiedliche Dichtecontraste bei einem Geschwindigkeitsverhältnis von  $\alpha_2/\alpha_1 = 1,5$ .

### 2.3.7 Amplitudenvariation mit der Auslage (AVO)

Die vier Zoeppritz-Gleichungen für den allgemeinen Fall nicht senkrechten Welleneinfalls (Gl. 2.72, siehe auch Abb. 2.30) erlauben eine Betrachtung der Variation der Amplitude der reflektierten Welle mit dem Einfalls- bzw. Reflexionswinkel bzw. der Auslage. Diese sog. AVO-Analyse (*amplitude versus offset*) hat seit etwa Mitte der 1980er-Jahre in der Kohlenwasserstoff-Industrie eine große Bedeutung erlangt und sich mittlerweile zu einem wichtigen Kriterium bei der Entscheidungsfindung über das Niederbringen von Bohrungen entwickelt.

Bei der Ableitung der in der AVO-Analyse verwendeten Gleichungen werden einige Annahmen und Vereinfachungen gemacht. So sollen die Dichte- und Geschwindigkeitskontraste  $\Delta\rho/\rho$ ,  $\Delta\alpha/\alpha$  und  $\Delta\beta/\beta$  klein sein (also auch die Differenzen  $\Delta i$  bzw.  $\Delta\varphi$  der Reflexions- bzw. Brechungswinkel), wobei  $\rho$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  jeweils Mittelwerte bezeichnen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Kontraste in der Poisson-Zahl  $\Delta v/v$  ebenfalls klein sein müssen (vgl. Gl. 2.20). Nach Sheriff und Geldart (1995) treffen diese Annahmen im Fall von Sedimentgesteinen meist zu, deren Reflexionskoeffizient  $R$  für senkrechten Einfall (Gl. 2.74) kleiner als  $R < 0,2$  ist. In diesen Fällen werden die Wellenstrahlen nicht stark gebrochen. Man erkennt dies in der folgenden Betrachtung für den Einfalls- bzw. Reflexionswinkel  $i_1$  und Brechungswinkel  $i_2$  von Kompressionswellen (siehe Abb. 2.29): Seien  $i_2 = i_1 + \Delta i$  und  $i = (i_1 + i_2)/2 \approx i_1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sin(i_2) &= \sin(i_1 + \Delta i) = \sin(i_1) \underbrace{\cos(\Delta i)}_{\approx 1} + \cos(i_1) \underbrace{\sin(\Delta i)}_{\Delta i} \\ &\approx \sin(i_1) + \Delta i \cos(i_1).\end{aligned}$$

Einsetzen in das snelliussche Brechungsgesetz (Gl. 2.66) ergibt:  $\sin(i_2)/\sin(i_1) \approx 1 + \Delta i \cot(i) = \alpha_2/\alpha_1 \approx (\alpha_1 + \Delta\alpha)/\alpha_1 \approx 1 + \Delta\alpha/\alpha$ , und hieraus folgt:  $\Delta i = (\Delta\alpha/\alpha) \tan(i)$ . In gleicher Weise werden die Brechungswinkel auf Ausdrücke mit den entsprechenden Einfallswinkeln und der Winkeldifferenz zum zugehörigen Brechungswinkel zurückgeführt. Eine Entwicklung erster Ordnung des Ausdrucks für den Reflexionskoeffizienten von Kompressionswellen  $R_P$  (d. h. unter der Annahme, dass Produkte von Differenzialen vernachlässigbar klein sind) führt auf den Ausdruck (Sheriff und Geldart 1995, Gl. 5.44; Aki und Richards 1980, S. 78–79):

$$\begin{aligned}R_P &= \frac{1}{2} \left( 1 - 4 \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \sin^2(i) \right) \left( \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \overbrace{\frac{1}{\cos^2(i)}}^{1+\tan^2(i)} \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right) - 4 \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \sin^2(i) \left( \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\Delta\beta}{\beta} - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \sin^2(i)}_{(2)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \left( \tan^2(i) - \sin^2(i) \right)}_{(3)}\end{aligned}\tag{2.78}$$

Diese Gleichung gilt, wenn (1)  $\Delta\rho/\rho$ ,  $\Delta\alpha/\alpha$  und  $\Delta\beta/\beta$  (also auch  $\Delta i$ ) klein sind und (2)  $i < 80^\circ$  ist, falls  $\alpha_2 < \alpha_1$  bzw.  $i < 10^\circ$  ist, falls  $\alpha_2 > \alpha_1$  ist. In Gl. 2.78 kann man den Einfluss der unterschiedlichen Effekte, welche die Änderungen in der Dichte und den seismischen Geschwindigkeiten auf den Reflexionskoeffizienten ausüben, leichter erkennen als im exakten Ausdruck der Zoeppritz-Gleichungen. Gl. 2.78 wird häufig benutzt, um die Variation der Reflexionsamplitude mit der Entfernung (bzw. dem Reflexionswinkel  $i$ ), die AVO, für Kompressionswellen zu bestimmen.

Unter der Annahme, dass die Poisson-Zahl diejenige elastische Konstante ist, welche am direktesten mit der Variation des Reflexionskoeffizienten mit dem Einfallswinkel  $i$  in Verbindung steht, werden  $\beta$  und  $\Delta\beta/\beta$  in Gl. 2.78 mit Hilfe von Gl. 2.20 durch die Poisson-Zahl  $\nu$  ausgedrückt: Aus  $\frac{\beta}{\alpha} = \left( \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu} \right)^{1/2}$  erhält man:  $\ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu} \right)$ , und hieraus folgt:  $\int \frac{d\beta}{\beta} = \int \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{1}{2} \int d \left( \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu} \right) / \left( \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu} \right)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Mit } d\left(\frac{1/2-\nu}{1-\nu}\right) &= \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1/2-\nu}{1-\nu}\right)d\nu \text{ und } \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1/2-\nu}{1-\nu}\right) = \frac{-(1-\nu)+(1/2-\nu)}{(1-\nu)^2} \\
&= \frac{-1+1/2+\nu-\nu}{(1-\nu)^2} = \frac{-1/2}{(1-\nu)^2} \text{ folgt: } \frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{1}{2} \left[ \frac{-d\nu/2}{(1-\nu)^2} \middle/ \left( \frac{1/2-\nu}{1-\nu} \right) \right] \\
&= \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\nu}{2} \left[ \frac{-1/2}{(1-\nu)(1/2-\nu)} \right] = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} \left[ \frac{d\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} \right] \text{ und damit schließlich:} \\
\frac{\Delta\beta}{\beta} &= \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\nu}{2} \left( \frac{1}{1-\nu} - \frac{2}{1-2\nu} \right) = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}. \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Nun berücksichtigt man, dass der Reflexionskoeffizient senkrecht einfallender Kompressionswellen  $R_P$  (Gl. 2.74) durch  $R_{P,0} \approx (\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho)/2$  angenähert werden kann:

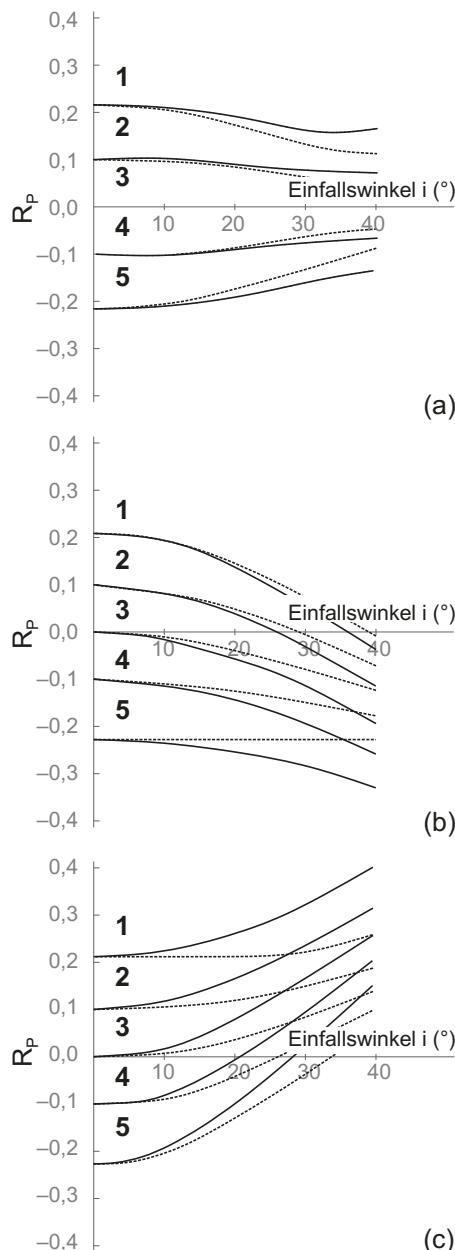
$$\begin{aligned}
R_{P,0} &= \frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1} \approx \frac{(\rho_1 + \Delta\rho)(\alpha_1 + \Delta\alpha) - \rho_1\alpha_1}{(\rho_1 + \Delta\rho)(\alpha_1 + \Delta\alpha) + \rho_1\alpha_1} \\
&= \frac{\rho_1\alpha_1 + \rho_1\Delta\alpha + \alpha_1\Delta\rho + \Delta\alpha\Delta\rho - \rho_1\alpha_1}{\rho_1\alpha_1 + \rho_1\Delta\alpha + \alpha_1\Delta\rho + \Delta\alpha\Delta\rho + \rho_1\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Nach Division durch  $1 = \frac{\rho_1\alpha_1}{\rho_1\alpha_1}$  erhält man

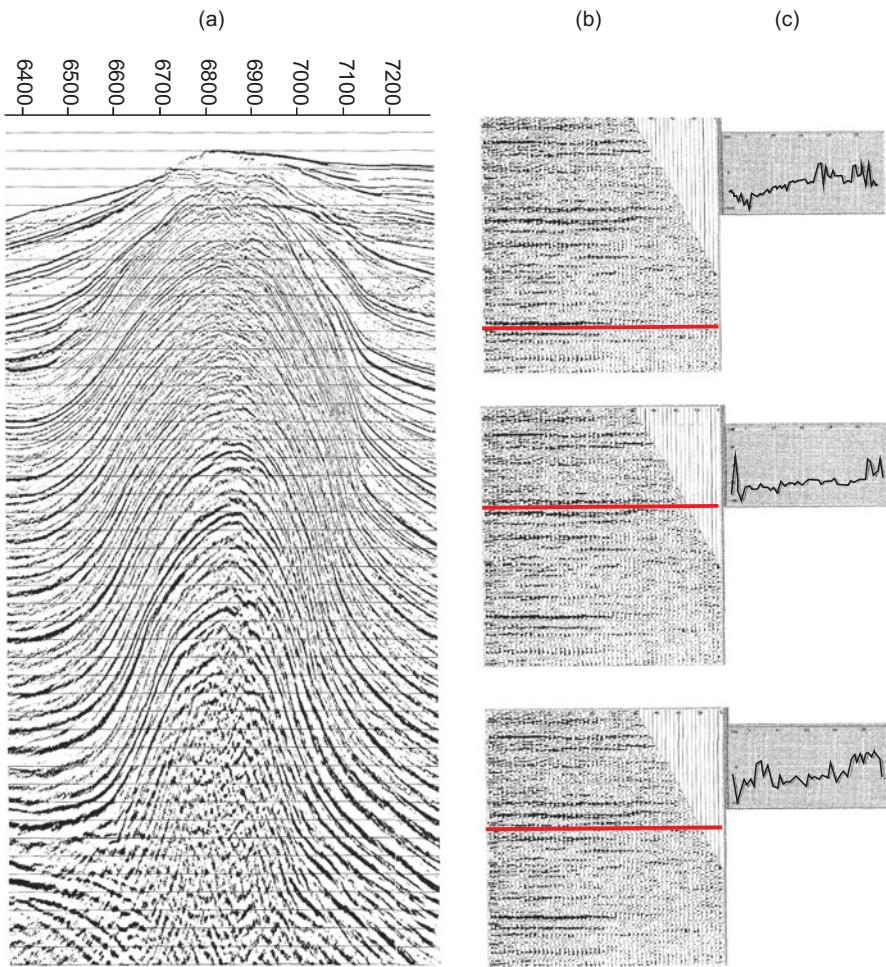
$$R_{P,0} \approx \frac{\frac{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho + \overbrace{\Delta\alpha\Delta\rho/\alpha\rho}^{<<1}}{2 + \underbrace{\Delta\alpha/\alpha}_{<<1} + \underbrace{\Delta\rho/\rho}_{<<1} + \underbrace{\Delta\alpha\Delta\rho/\alpha\rho}_{<<1}} \approx \frac{(\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho)}{2}.$$

Dies ist der erste Term in Gl. 2.78. Für den zweiten Term gilt mit Gl. 2.20 für  $\beta^2/a^2$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\Delta\beta}{\beta} - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \frac{\frac{1/2-\nu}{1-\nu}}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\nu}{2} \left( \frac{1}{1-\nu} - \frac{2}{1-2\nu} \right)} \frac{\frac{\Delta\beta/\beta}{\beta^2/\alpha^2}}{\frac{1/2-\nu}{1-\nu}} \frac{\frac{\beta^2/\alpha^2}{\Delta\rho}}{\rho} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Delta\rho}{\rho} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Delta\rho}{\rho} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \left( 2 \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2}
\end{aligned}$$



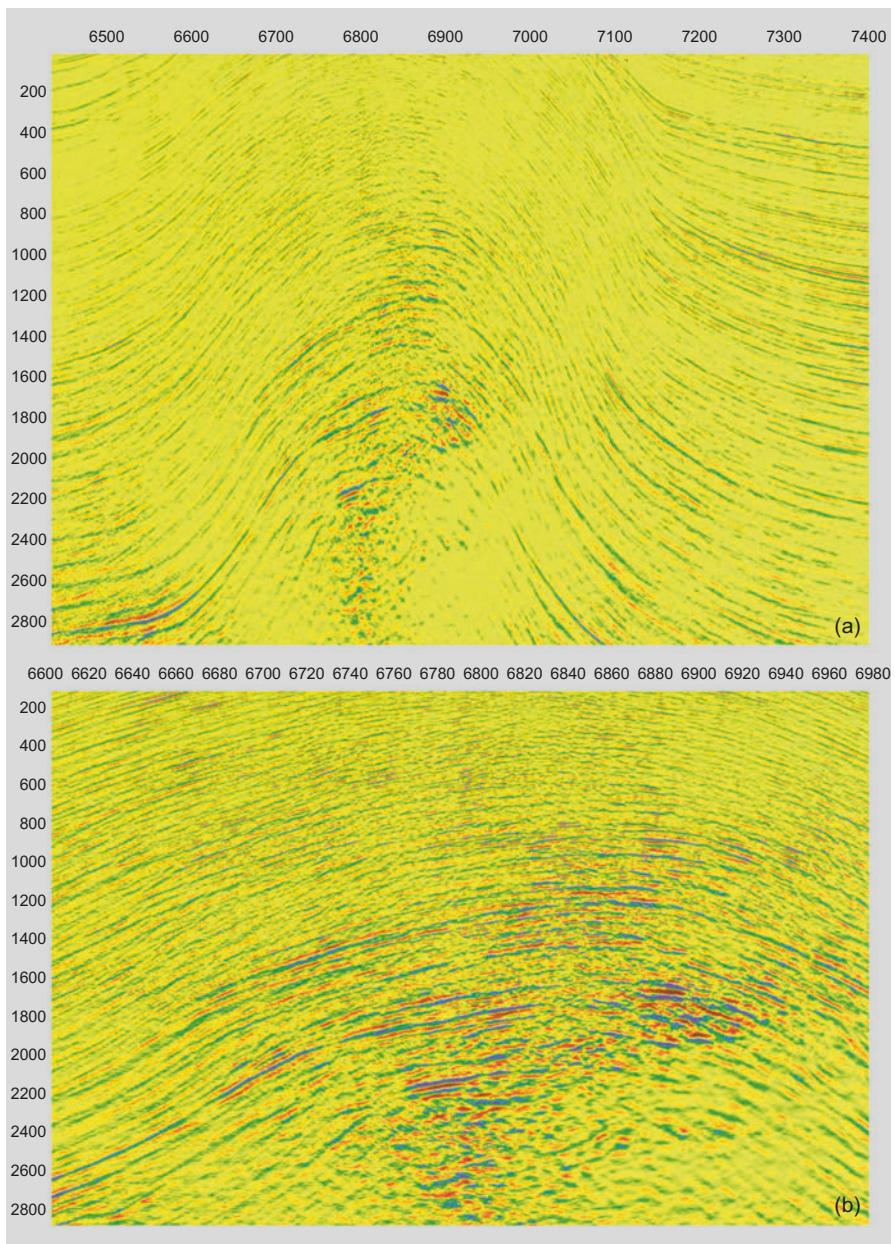
**Abb. 2.31** Berechnete Variation des Reflexionskoeffizienten  $R_p$  für Kompressionswellen als Funktion des Einfallswinkels. Die Zahlen an den Kurven bezeichnen die Verhältnisse  $\alpha_2/\alpha_1$  und  $\rho_2/\rho_1$  der Geschwindigkeiten von Kompressionswellen und Dichten in den ersten und zweiten Schicht: (1) 1,25; (2) 1,11; (3) 1,0; (4) 0,9; (5) 0,8. (a) Kein Kontrast der Poisson-Zahl  $v$  an der Schichtgrenze; Linie:  $v = 0,3$ ; gestrichelt:  $v = 0,2$ ; (b) Abnahme der Poisson-Zahl; Linie:  $v_1 = 0,4; v_2 = 0,1$ ; gestrichelt:  $v_1 = 0,3; v = 0,1$ ; (c) Zunahme der Poisson-Zahl; Linie:  $v_1 = 0,1; v_2 = 0,4$ ; gestrichelt:  $v_1 = 0,1; v_2 = 0,2$  (nach Sheriff und Geldart 1995)



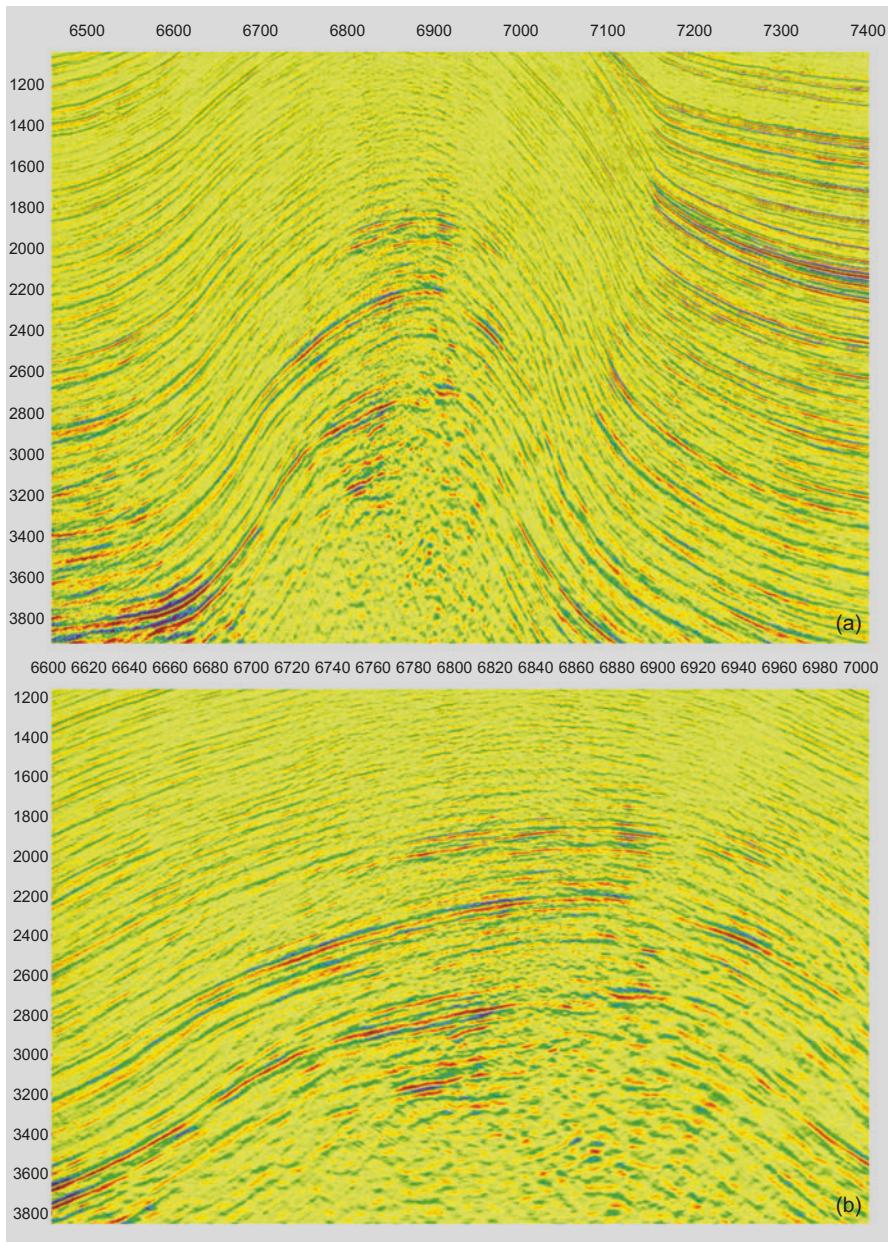
**Abb. 2.32** (a) Teil einer ungestapelten, zeitmigrierten Zeitsektion (Zweiweglaufzeit); (b) Teil einer CMP-Gruppe nahe des Scheitels der Struktur in (a); (c) Variation der Reflexionsamplituden als Funktion der Auslage entlang der drei roten Linien (Yilmaz 2001); horizontale Koordinate: CMP-Nummer

Damit wird Gl. 2.78 zu:

$$\begin{aligned}
 R_P &= R_{P,0} + \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \left( \frac{2\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2} \right) \sin^2(i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} (\tan^2(i) - \sin^2(i)) \\
 &= R_{P,0} + \underbrace{\left[ R_{P,0} \left( Q - 2(1+Q) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2} \right]}_G \sin^2(i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} (\tan^2(i) - \sin^2(i)),
 \end{aligned} \tag{2.80}$$



**Abb. 2.33** (a) AVO-Gradient G der seismischen Sektion aus Abb. 2.32; (b) Detail aus der Nähe des Scheitels der Struktur (Yilmaz 2001); horizontale Koordinate: CMP-Nummer, vertikale Koordinate: Zweiweglaufzeit in ms



**Abb. 2.34** (a) AVO-Achsenabschnitt  $R_{P,0}$  der seismischen Sektion aus Abb. 2.32; (b) Detail aus der Nähe des Scheitels der Struktur (Yilmaz 2001); Horizontale Koordinate: CMP-Nummer, vertikale Koordinate: Zweiweglaufzeit in ms

wobei  $Q = \frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho} = \left(1 + \frac{\Delta\rho/\rho}{\Delta\alpha/\alpha}\right)^{-1}$  ist.

Damit wird der Ausdruck für G zu:

$$\begin{aligned} G &= \overbrace{\frac{R_{P,0}}{\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right)}}^{\overset{R_{P,0}}{\overbrace{\quad}}} \left( \overbrace{\frac{Q}{\frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho}}}^{\overset{Q}{\overbrace{\quad}}} - 2 \left( 1 + \overbrace{\frac{Q}{\frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho}}}^{\overset{Q}{\overbrace{\quad}}} \right) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2} \\ &= \frac{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho}{2} \left( \frac{2}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho} \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{2}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho} \left( 2 \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \left( 2 \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{\Delta\nu}{(1-\nu)^2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Der dritte Term von Gl. 2.78 kann für kleine Winkel vernachlässigt werden, da er mit  $i^4$  abnimmt, im Gegensatz zum zweiten Term, der mit  $i^2$  abnimmt. Dies erkennt man aus den Reihenentwicklungen für die Tangens- und Sinusfunktionen:  $\tan(i) \approx i + i^3/3 + 2i^5/15 + \dots$  und  $\sin(i) \approx i - i^3/3! + i^5/5! + \dots$ , also:  $\tan^2(i) \approx i^2 + 2i^4/3$  und  $\sin^2(i) \approx i^2 - i^4/3$  und damit:  $\tan^2(i) - \sin^2(i) \approx i^4$ . Für kleine Winkel ( $i < 0,5236$  rad  $\approx 30^\circ$ ) kann der dritte Term in Gl. 2.80 vernachlässigt werden (da  $0,5236^4/3 = 0,025$ ), und Gl. 2.80 vereinfacht sich zu:

$$R_P = R_{P,0} + G \sin^2(i). \quad (2.82)$$

Gl. 2.82 ist als Shueys zweigliedrige AVO-Gleichung bekannt (Shuey 1985). Werden die Amplituden der Spuren in einer hinsichtlich der Krümmung der Reflexionshyperbeln korrigierten CMP-Gruppe (*moveout-corrected CMP gather*, vgl. Abschn. 2.4.5.7) gegen  $\sin^2(i)$  aufgetragen, so ergibt die Steigung einer linearen Regression den Wert von G, des sog. AVO-Gradienten. Dagegen ist der AVO-Achsenabschnitt (*AVO intercept*) gleich dem Wert des Reflexionskoeffizienten bei senkrechtem Einfall. Damit kann der AVO-Achsenabschnitt zur Ableitung der akustischen Impedanz herangezogen werden, einer wichtigen diagnostischen Größe bei der Interpretation reflexionsseismischer Daten. Aus der Definition des AVO-Gradienten G in Gl. 2.81 erkennt man dagegen, dass dieser eine Funktion der Poisson-Zahl ist, welche wiederum in einer direkten Beziehung zur Fluidsättigung von Reservoirgesteinen steht. Gilt zudem näherungsweise  $\beta/\alpha = \frac{1}{2}$ , so ergibt sich (siehe z. B. Chopra und Castagna 2014):  $G = R_{P,0} - 2R_{S,0}$ .

Damit kann der Gradient G physikalisch interpretiert werden als Differenz von Reflexionskoeffizienten der P- und S-Wellen bei senkrechtem Einfall.

Abb. 2.31 illustriert den AVO-Effekt anhand berechneter  $R_p$ -Kurven für unterschiedliche Poisson-Zahlen, Geschwindigkeits- und Dichtekontraste. Es zeigen sich deutlich voneinander unterscheidbare Kurvencharakteristika: (1)  $dR_p/di < 0$ , wenn  $v_1 > v_2$ ; oder (2)  $dR_p/di > 0$ , wenn  $v_1 < v_2$ .

Die folgenden Abbildungen illustrieren das Potenzial der AVO für die Exploration: Die Variation der Amplituden in der seismischen Sektion in Abb. 2.32 liefert

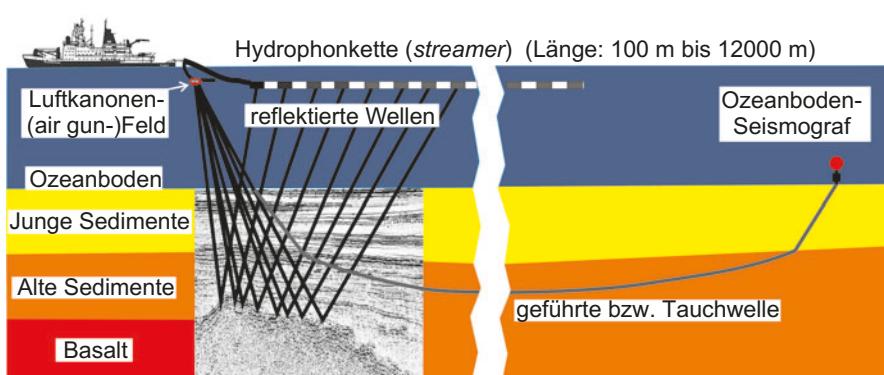
die Daten zur Berechnung der AVO-Attribute Gradient G ([Abb. 2.33](#)) und Achsenabschnitt  $R_p$  ([Abb. 2.34](#)). Deutlich ist in beiden AVO-Attributen ein mit der Fluidsättigung in Zusammenhang stehendes Signal im Scheitel der Antiklinalstruktur zu erkennen.

## 2.4 Die Reflexionsmethode

Die Reflexionsmethode beruht auf der Aufzeichnung von Reflexionen mit kompakten, robusten, elektromagnetischen Seismometern, sog. Geophonen, bzw. bei marinen Vermessungen mit Hydrophonen. Geophone sind in der Regel im Bereich der unterkritischen Reflexion um einen Schusspunkt (*shot point*) herum verteilt ([Abb. 2.24](#)), also mit kürzeren Auslagen als die kritische Entfernung, ab der die Einsätze der Kopfwelle auftreten. Bei marinen Erkundungen werden Hydrophonketten, sog. *streamer*, von Forschungsschiffen geschleppt ([Abb. 2.35](#)), oft auch in flächiger Anordnung. Die Anregung erfolgt in diesem Fall in der Regel mit Luftkanonen (*air guns*).

An der Erdoberfläche sind Geophone und Schusspunkte entweder entlang von Linien bzw. Profilen angeordnet oder flächenhaft (in Feldern). Mit diesen Anordnungen kann der Untergrund in Form zweidimensionaler Vertikalschnitte oder dreidimensionaler Volumina erkundet werden. Unter 4D-Seismik versteht man in zeitlichem Abstand (*time-lapse*) aufgezeichnete flächenhafte 3D-Seismik. Heute wird in der Regel flächenhaft registriert, vor allem in der Kohlenwasserstoff-Prospektion. Doch im Folgenden betrachten wir zur Vereinfachung vorwiegend Profile, mit denen die Phänomene übersichtlicher erläutert werden können.

Die verbreitetste Anwendung hat das sog. kontinuierliche Profilschießen (*continuous profiling*), bei dem die Geophone äquidistant auf einer Linie durch den



**Abb. 2.35** Prinzip mariner seismischer Vermessungen. Die an den Schichtgrenzen reflektierten Signale der Steilwinkel-Reflexionsseismik werden mit Hydrophonketten aufgezeichnet, jene der an den Schichtgrenzen geführten Wellen der Refraktionsseismik mit Ozeanboden-Seismometern (OBS) (nach Hübscher und Gohl 2014)

Schusspunkt verteilt sind. Zur Unterdrückung des Rauschens bestehen Geophonpunkte häufig aus Gruppen mehrerer Geophone. Im unterkritischen Bereich, bis zur kritischen Entfernung, werden folgende Wellen beobachtet: (1) Luftschall; (2) Oberflächenwellen; (3) direkte Welle; (4) geführte Kopfwelle (siehe [Abschn. 2.5](#)); (5) reflektierte Wellen

Je näher die Geophonauslage dem Schusspunkt ist, desto vertikaler ist der Weg der Wellenfronten zum Reflektor und zurück. Profile werden meist so angeordnet, dass sie senkrecht zum Streichen geologischer Strukturen verlaufen. Die von den Geophonen aufgezeichneten Laufzeiten werden entlang des Profils als zweidimensionales Querschnittsbild der Struktur bzw. als dreidimensionaler Datenwürfel dargestellt, oft mit der Vertikalachse als Zweiweglaufzeit (*two-way travel time – TWT*). Ihre Umrechnung in eine Tiefe erfordert die Kenntnis der Geschwindigkeits-Tiefenfunktion  $v(z)$  (vgl. [Abschn. 2.4.5.9](#)).

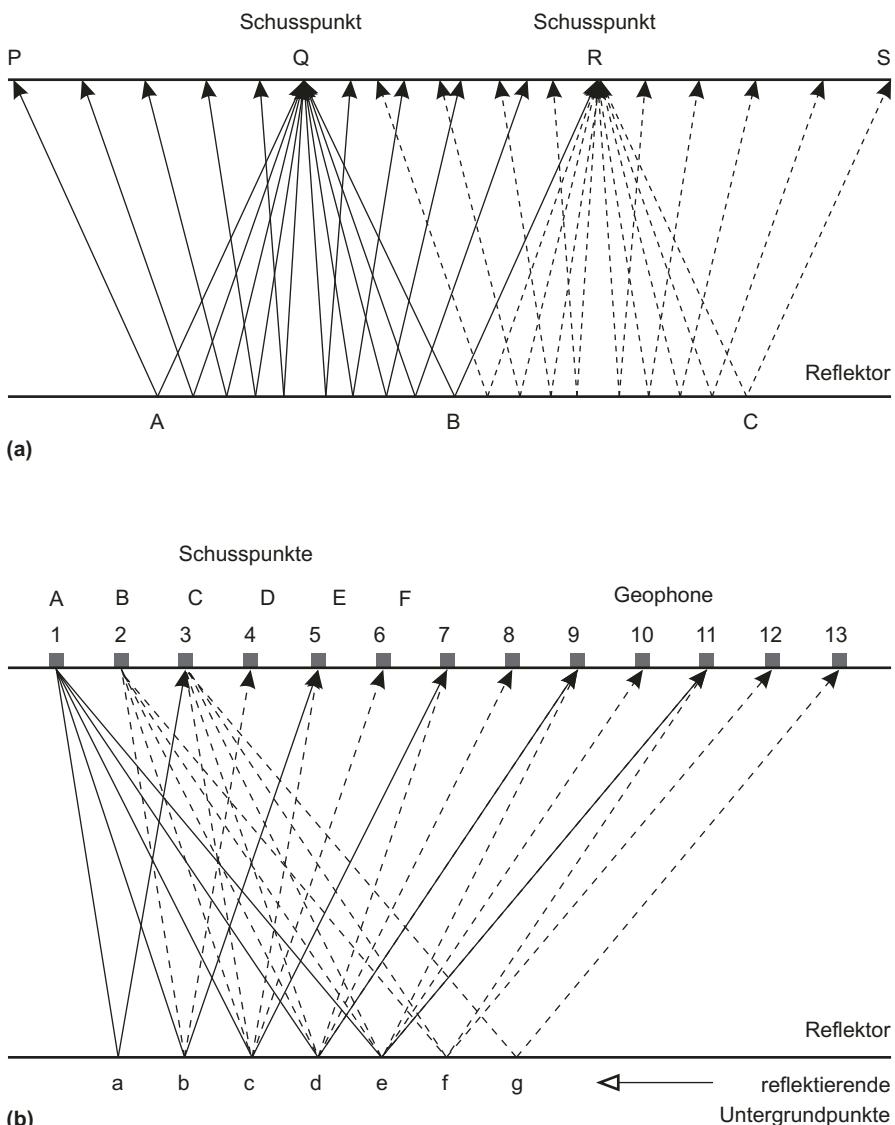
Bei den Reflexionsmessungen unterscheidet man zwischen einfacher Überdeckung (*conventional coverage*) und Mehrfachüberdeckung (*redundant coverage*). Die verbreitetste Form der einfachen Überdeckung sind die sog. Zentralschüsse (*split-spread*) beim kontinuierlichen Profilschießen ([Abb. 2.36](#)). Hierbei sind die Geophongruppen symmetrisch um den Schusspunkt herum angeordnet. Dabei ergibt sich die folgende Überdeckung, die mit Dreiecksdiagrammen dargestellt werden kann ([Abb. 2.37](#)): Die Zweiweglaufzeit z. B. der Reflexion  $\overline{QAP}$  ([Abb. 2.36](#)) wird dem Mittelpunkt der Strecke  $PQ$  zugeordnet.

Mehrfachüberdeckungen werden in sog. CMP-(*common midpoint-*) Anordnungen realisiert. Hierbei wird ein Reflektor von mehreren Schusspunkten aus angeschossen. Die entsprechenden Spuren werden nach geometrischen Korrekturen gestapelt, welche die unterschiedlich langen Laufwege berücksichtigen (*normal moveout – NMO*) ([Abb. 2.38](#)). Dies erhöht das Signal/Rausch-Verhältnis.

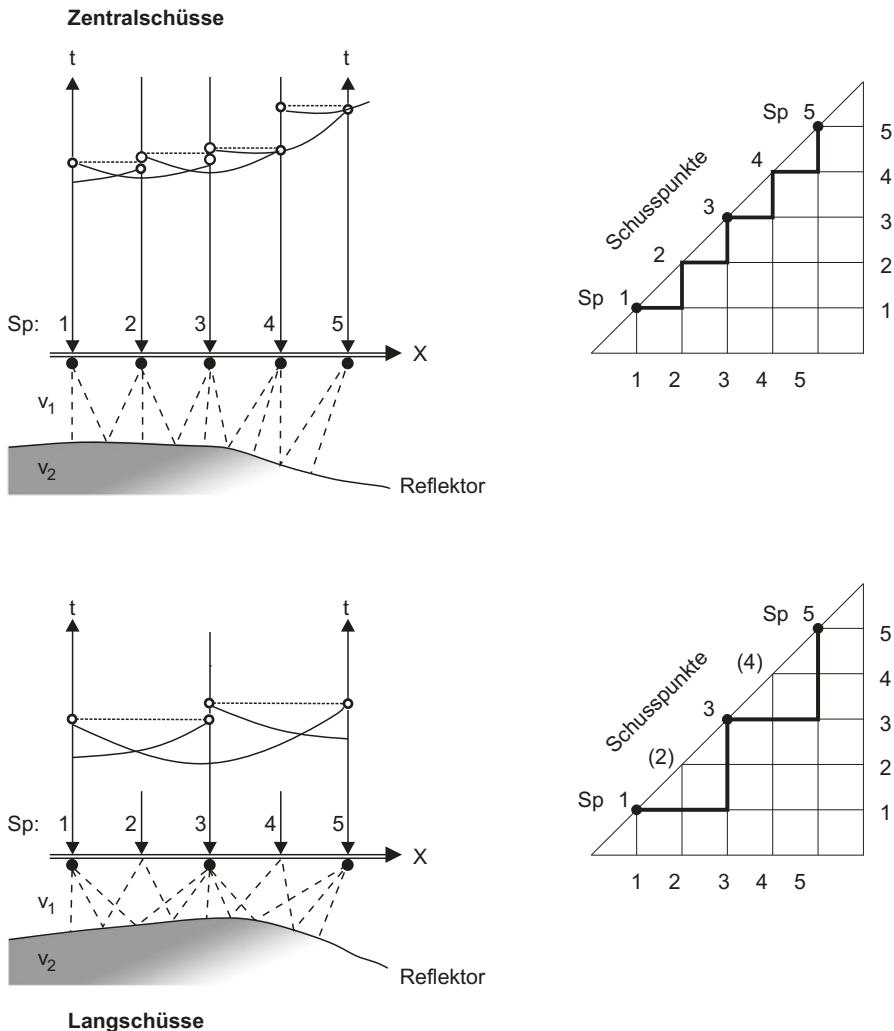
Für CMP-Anordnungen werden typischerweise Gruppen von 24–96 Geophonen verwendet. [Abb. 2.39](#) zeigt beispielhaft eine dreifache Überdeckung.

## 2.4.1 Die Geometrie von Reflexionswegen

Die genaue Interpretation von Reflexionsdaten erfordert die Kenntnis der Geschwindigkeit entlang des gesamten Strahlwegs. Diese ist aber vorab selten gegeben und muss daher in der Regel erst durch Bearbeitung und Analyse der Daten gewonnen werden. Die Ergebnisse der Reflexionsseismik bestehen primär in der Abbildung von Untergrundstrukturen direkt durch die Reflexionsamplituden selbst. Weitergehende Auswertungen gestatten auch Rückschlüsse auf den Phasenzustand der in den Reservoirgesteinen enthaltenen Fluide. Da die Reflexionsseismik ein bildgebendes Verfahren ist, können alle Methoden, die für vergleichbare Verfahren entwickelt wurden, auch für die Seismik eingesetzt werden: Bildanalyse, Bildverbesserung (Kontrast, Helligkeit, Schärfe), Filterung. Da die Daten heute fast ausschließlich digital aufgezeichnet werden, spielen insbesondere die Methoden der digitalen Signalverarbeitung eine überragende Rolle.

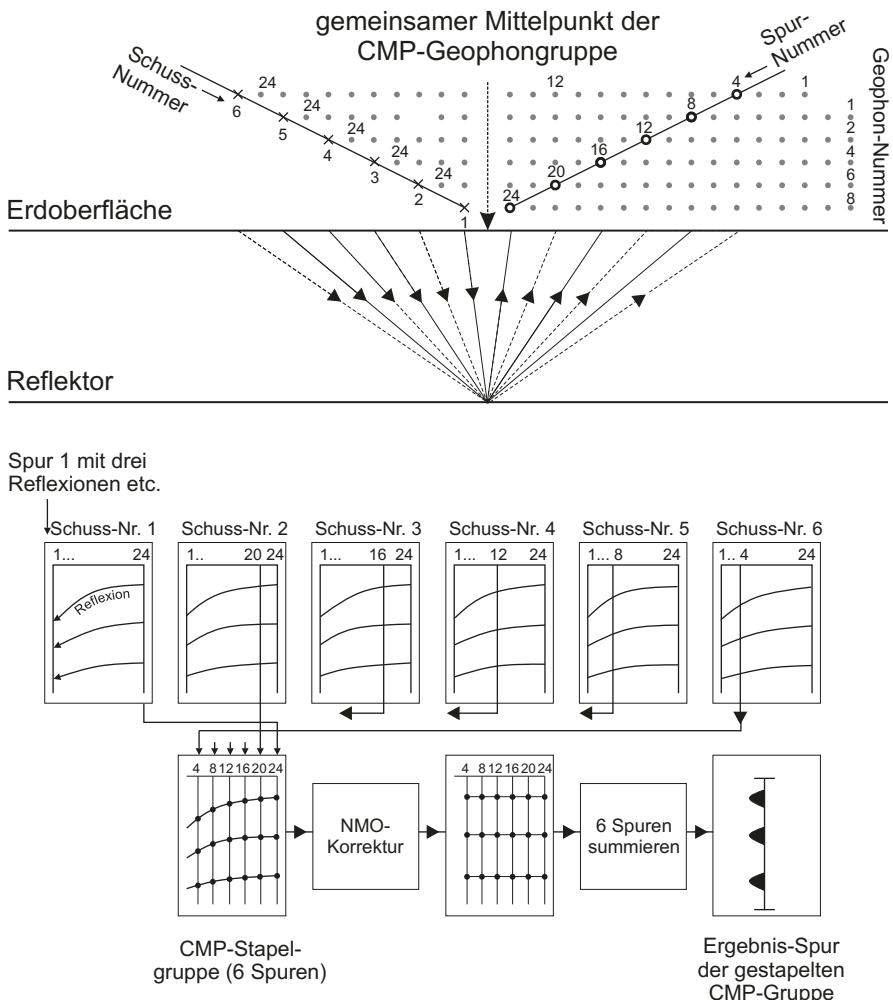


**Abb. 2.36** In der Reflexionseismik verwendete Schussgeometrien und Geophon-Anordnungen: (a) Zentralschuss beim kontinuierlichen Profilschießen (Einfachüberdeckung): Mit dem Schusspunkt Q und den Geophonen zwischen den Punkten P und R wird das Reflektoelement  $\overline{AB}$  abgetestet; nach Verschieben der Anordnung zum Schusspunkt R wird das Reflektoelement  $\overline{BC}$  mit den Geophonen zwischen den Punkten Q und S abgetestet; (b) CMP-Anordnung bei Mehrfachüberdeckung; die Reflexionen an den Punkten a–g auf dem Reflektor der Schüsse an den Positionen A–F an der Oberfläche werden an den Geophon-Positionen 1–13 aufgezeichnet (nach Lowrie 2007)



**Abb. 2.37** Einfache Überdeckung beim kontinuierlichen Profilschießen (nach Meissner und Stegenga 1977)

Die einfachste Annahme über die Verteilung der Geschwindigkeit im Untergrund ist, dass sie zwischen Reflektor und Oberfläche konstant ist. Obwohl dies selten auch nur näherungsweise zutrifft, führt dies auf einfache Formeln, die in vielen Fällen Ergebnisse im Rahmen der geforderten Genauigkeit liefern. Im Folgenden nehmen wir zudem an, dass eine zweidimensionale Näherung gerechtfertigt ist. Dies impliziert, dass sich die Strukturen im Untergrund in horizontaler Richtung senkrecht zur Profillinie nicht ändern.

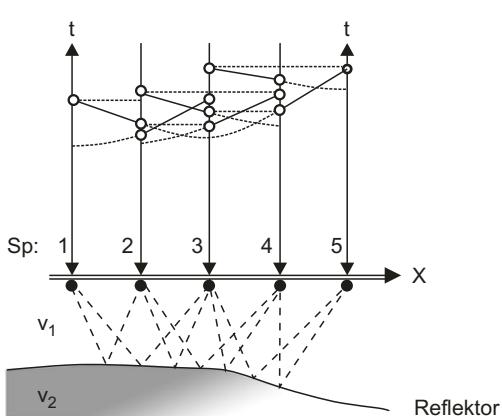


**Abb. 2.38** Prinzip der CMP-Stapelung am Beispiel einer sechsfachen Überdeckung (nach Parasnis 1997)

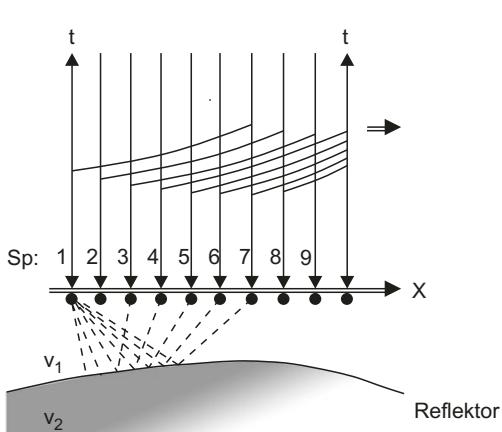
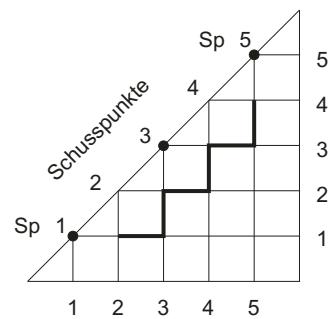
#### 2.4.1.1 Horizontaler Reflektor – Reflexionshyperbel

Für eine konstante Geschwindigkeit  $v$  und die in [Abb. 2.40](#) dargestellte Situation ist die Laufzeit der Reflexion entlang der Strecke  $\overline{SRG}$ :

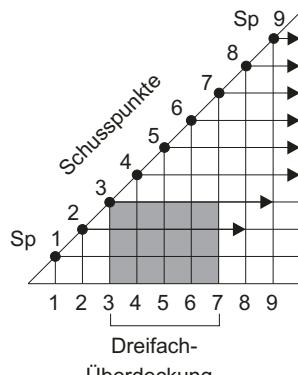
$$t = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + (x/2)^2} = \frac{1}{v} \sqrt{4d^2 + x^2} = \underbrace{\frac{2d}{v}}_{t_0} \sqrt{1 + x^2/4d^2} = \sqrt{t_0^2 + x^2/v^2}. \quad (2.83)$$



(a) Einfachüberdeckung



(b) Mehrfachüberdeckung

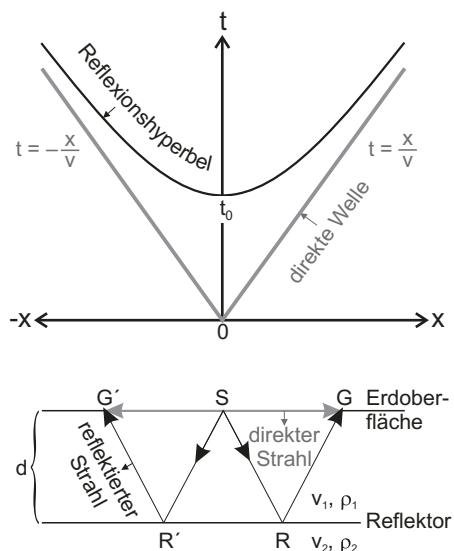
**Abb. 2.39** (a) Einfach- und (b) Mehrfach-(Dreifach-)Überdeckung an den Geophonpositionen 3–7 (nach Meissner und Stegema 1977)

$t_0$  ist die Lotzeit (*echo time, zero-offset time*):

$$t_0 = \frac{2d}{v}, \quad (2.84)$$

die Zweiweglaufzeit des vertikalen Strahls und seiner Reflexion. Die Laufzeit des von der Quelle horizontal zu den Geophonen laufenden Strahls der direkten Welle (keine Oberflächenwelle!) ist  $t_d = \pm x/v$ . Aus dem Kehrwert dieser Geradengleichung durch den Ursprung des Laufzeitdiagramms erhält man somit die (P- oder S-)Wellengeschwindigkeit  $v_1$  der Deckschicht.

**Abb. 2.40** Laufzeitkurven der direkten Welle und der Reflexionen von einer horizontalen Grenzschicht (nach Lowrie 2007)



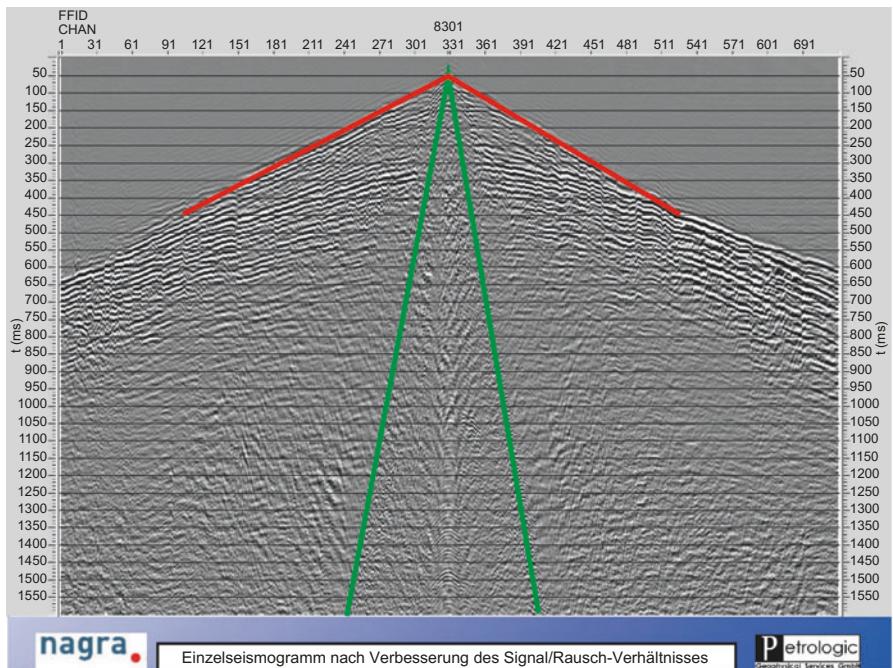
In Gl. 2.83 bestimmt der zweite Summand unter der Wurzel die Krümmung der Laufzeitkurve der Reflexion. Diese Laufzeitverlängerung bzgl. des Lotstrahls röhrt vom längeren Laufweg  $\overline{SRG}$  des reflektierten Strahls her und wird im Englischen als *moveout* bezeichnet.

Quadrieren von Gl. 2.83 ergibt:

$$\frac{t^2}{t_0^2} - \frac{x^2}{4d^2} = 1. \quad (2.85)$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, die bzgl. der vertikalen Zeitachse symmetrisch ist, die sie bei  $t_0$  schneidet (Abb. 2.40). Für große Schusspunktentfernungen  $x \gg 2d$  nähert sich die Laufzeitkurve der reflektierten asymptotisch jener der direkten Welle an. Die Abb. 2.41 zeigt ein Schuss-Seismogramm (*shot gather*) eines einzelnen Zentralschusses mit einer Reihe primärer und multipler Reflexionshyperbeln sowie der Geraden der direkten Welle und des Luftschalls, der von den Geophonen ebenfalls aufgezeichnet wird. Abb. 2.42 zeigt den Strahlengang der Wellen im Untergrund sowie die entsprechenden Elemente einer Laufzeitkurve: Oberflächen-, direkte, reflektierte und geführte (*refracted*; Kopf-)Welle. Die geführte Kopfwelle, die in der kritischen Entfernung  $x_c$  zum ersten Mal auftritt, spielt im Rahmen der Reflexionsmethode eine untergeordnete Rolle. Auf sie wird näher im Abschn. 2.5 eingegangen.

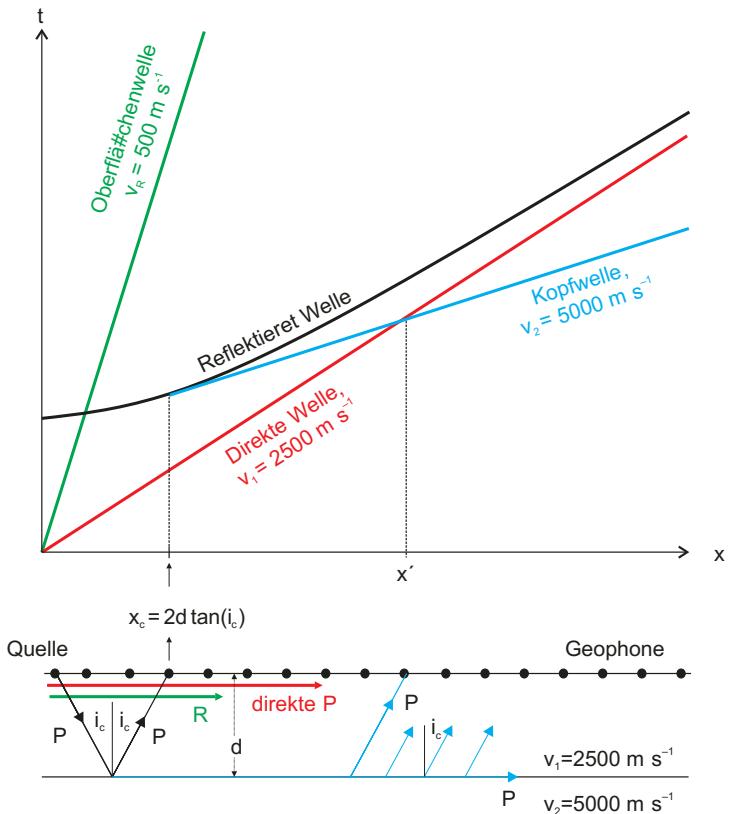
Das Hauptziel seismischer Reflexionsprofile besteht in der Abbildung von Reflektoren, also im einfachsten Fall in der Bestimmung der vertikalen Distanz  $d$  zu einem Reflektor. Diese kann im Prinzip aus der Lotzeit  $t_0$  bestimmt werden,



**Abb. 2.41** Schuss-Seismogramm eines einzelnen Zentralschusses mit einer Reihe primärer und multipler Reflexionshyperbeln; rote und grüne Linien: direkte Welle und Luftschall; horizontale Koordinate: Kanal-Nummer, vertikale Koordinate: Zweiweglaufzeit (Rybarczyk 2013)

wenn die Geschwindigkeit  $v_1$  bekannt ist. Diese erhält man z. B. aus dem Kehrwert der Steigung der Gerade der direkten Welle im Laufzeitdiagramm. Für Geophone nahe am Schusspunkt ( $x < x_c$ ), und wenn die Geophonenentfernung sehr viel kleiner ist als die Reflektortiefe (vertikaler Einfall), also  $x \ll d$ , kann die Wurzel  $\sqrt{1 + x^2/(t_0^2 v^2)}$  in Gl. 2.83 als binomische Reihe entwickelt werden. Für  $x < 1$  folgt mit  $(1 + x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/48.....$ :

$$\begin{aligned}
 t(x) &= t_0 \left[ 1 + \left( \frac{x}{2d} \right)^2 \right]^{1/2} = t_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2d} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{x}{2d} \right)^4 + \dots \right] \\
 &= t_0 \underbrace{\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{vt_0} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{x}{vt_0} \right)^4 + \dots \right]}_{\text{1. Näherung}} \underbrace{\left. \right]}_{\text{2. Näherung}}. \tag{2.86}
 \end{aligned}$$



**Abb. 2.42** Hauptelemente einer Laufzeitkurve (nach Parasnis 1997); P: P-Welle; R: Bodenunruhe (Oberflächenwelle)

Die mit der Geophonauslage  $x$  ansteigende Hyperbelkrümmung  $\Delta t_{NMO}(x)$  ist die Zeitdifferenz zwischen Lotzeit  $t_0$  und Laufzeit  $t(x)$ :

$$\Delta t_{NMO}(x) = t(x) - t_0 \approx \underbrace{\frac{x^2}{2v^2 t_0}}_{\text{1. Näherung}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\frac{x^2}{2v^2 t_0} - \frac{x^4}{8v^4 t_0^3}}_{\text{2. Näherung}}. \quad (2.87)$$

Lotzeit und  $\Delta t_{NMO}$  werden aus den Reflexionsdaten abgelesen. Die Geophonentfernung ist bekannt, und damit ergibt sich die (mittlere) Schichtgeschwindigkeit  $v$  in erster Näherung aus:

$$v = \sqrt{\frac{x^2}{2\Delta t_{NMO} t_0}}. \quad (2.88)$$

In der Praxis bestimmt man heute jedoch die zur Korrektur der Hyperbelkrümmung verwendete Geschwindigkeit meist nicht aus den Daten der Schuss-Seismogramme, sondern als diejenige, welche die Krümmung von Reflexionshyperbeln in einer CMP-Gruppe am besten beseitigt (vgl. Abschn. 2.4.5.7). Hierzu geht man wiederum von der Hyperbelgleichung (Gl. 2.83) aus und bildet die Differenz zur Lotzeit:

$$\Delta t_{NMO} = t - t_0 = t_0 \left( \sqrt{1 + \frac{x^2}{t_0^2 v^2}} - 1 \right). \quad (2.89)$$

Die Hyperbelkrümmung (NMO) ist zudem von großer praktischer Bedeutung für die Entscheidung, ob eine Signatur auf einer seismischen Spur bzw. einer Seismogramm-Montage einer Reflexion zugeordnet werden kann oder nicht.

Die Schichtmächtigkeit kann aus der Lotzeit (Gl. 2.84) bestimmt werden:

$$d = \frac{t_0 v}{2}. \quad (2.90)$$

Sortiert man (Gl. 2.85) um, so erhält man mit  $4d^2 = t_0^2 v^2$ :

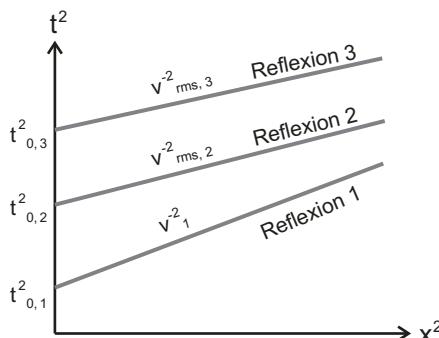
$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2}. \quad (2.91)$$

Dies ist eine Geradengleichung für  $t^2$  als Funktion von  $x^2$  mit der Steigung  $1/v^2$ . Ihr Y-Achsenabschnitt ist das Quadrat der Lotzeit  $t_0$  (Gl. 2.84), aus der bei bekannter Geschwindigkeit  $v$  die Schichtmächtigkeit  $d$  bestimmt werden kann. Gl. 2.102 ist die Grundlage der sog.  $t^2-x^2$ -Methode (Abb. 2.43).

Jede Geophonspur kann Reflexionen mehrerer Reflektoren enthalten (Abb. 2.44). Die mit der  $t^2-x^2$ -Methode bestimmte Geschwindigkeit für die erste Schicht ist auch in diesem Fall die wahre Intervallgeschwindigkeit  $v_1$ .

Die Strahlen, die in der zweiten oder dritten Schicht reflektiert werden, breiten sich dort mit den Wellengeschwindigkeiten der entsprechenden Schicht aus. Die

**Abb. 2.43** Zur  $t^2-x^2$ -Methode



Steigungen der verschiedenen Geraden entsprechen für die Näherung des vertikalen Einfalls (bzw. für kleine Auslagen) jeweils der sog. rms-Geschwindigkeit,<sup>13</sup> dem quadratischen Mittelwert der Geschwindigkeiten bis zum n-ten Reflektor (Dürbaum 1954; Dix 1955; siehe auch Sheriff und Geldart 1995):

$$v_{rms,n} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2 t_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i}} \text{ (Dix–Dürbaum-Gleichung),} \quad (2.92)$$

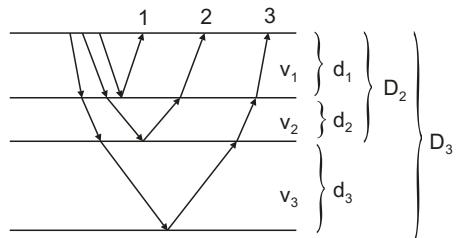
wobei  $t_i$  die vertikale Laufzeit in der i-ten Schicht ist. Mit der  $t^2-x^2$ -Methode können sowohl die durchschnittlichen Intervallgeschwindigkeiten  $v_i$  als auch die Schichtmächtigkeiten  $d_i$  für einen mehrfach horizontal geschichteten Untergrund auf einfache Weise geschätzt werden; wiederum wird hierbei ein nahezu vertikaler Strahlengang vorausgesetzt, also kleine Auslagen verglichen mit den Tiefen zu den Reflektoren. Die Intervallgeschwindigkeit  $v_n$  erhält man aus der Differenz der rms-Geschwindigkeiten zur n-ten bzw. (n-1)-ten Schichtgrenze.

$$v_n^2 = \frac{v_{rms,n}^2 \sum_{i=1}^n t_i - v_{rms,n-1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i}{t_n} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 t_i - \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 t_i}{t_n}. \quad (2.93)$$

Auf diese Weise bestimmt man die Intervallgeschwindigkeiten  $v_i$  von oben nach unten. Ebenso verfährt man hinsichtlich der Schichtmächtigkeiten  $d_i$ : Aus der Steigung der zweiten Gerade erhält man  $v_{rms,2}$ . Diese wird mit der Lotzeit  $t_{0,2}$  benutzt, um aus Gl. 2.90 die Gesamtmächtigkeit  $D_2$  zum zweiten Reflektor zu bestimmen:

$$D_2 = d_1 + d_2 = \frac{t_{0,2} \cdot v_{rms,2}}{2} \quad (2.94)$$

**Abb. 2.44** Reflexionen an mehreren Schichtgrenzen



<sup>13</sup>root mean square (rms): Quadratwurzel des arithmetischen (gewichteten) Mittelwerts der Quadrate, im Deutschen auch als quadratischer Mittelwert (QMW) bezeichnet.

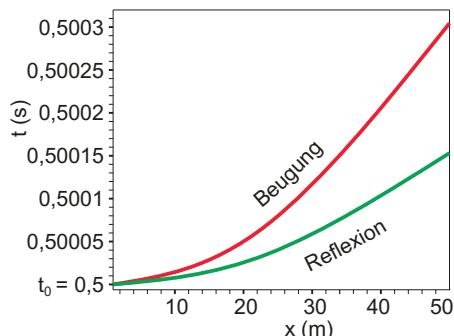
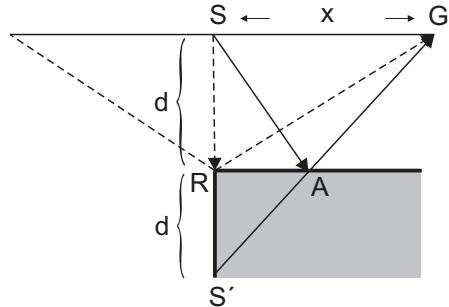
Da  $d_1$  bekannt ist, kann hieraus  $d_2$  berechnet werden. Auf diese Weise können die Geschwindigkeiten und Mächtigkeiten aller Schichten Zug um Zug geschätzt werden. In Wahrheit sind die Strahlwege jedoch nicht genau vertikal, und es kommt zu Brechung an den Schichtgrenzen. Dies wirkt sich besonders bei größeren Brechungswinkeln aus (d. h. in der Regel: bei größeren Auslagen) und führt zu entsprechenden Fehlern bei der Schätzung der Geschwindigkeiten. Weiter sind die elastischen Eigenschaften der Schichten selten konstant, sodass die Geschwindigkeiten von Ort zu Ort variieren. Dies verursacht gekrümmte Strahlwege und bedingt ebenfalls Fehler in den Geschwindigkeitsschätzungen. Das Zutreffen der für die Ableitung der Dix-Dürbaum-Gleichung (Gl. 2.92) getroffenen Annahmen muss daher in jedem Fall kritisch geprüft bzw. eine Fehlerschätzung vorgenommen werden.

#### 2.4.1.2 Reflexion oder Beugung? – Fresnel-Zonen

Für einen Schuss in S ist der Laufweg der an der Schicht reflektierten und am Geophon G registrierten Welle  $\overline{SAG} = \overline{S'AG}$  (Abb. 2.45). Die am Punkt R gebeugte und am Geophon G registrierte Welle hat dagegen den Laufweg  $\overline{SRG} = \overline{S'RG}$ . Man sieht leicht, dass der Laufweg der gebeugten Welle länger ist als jener der reflektierten. Die Laufzeit der gebeugten Welle ist für den Laufweg  $\overline{SRG}$ :

$$t_B = \frac{d + \sqrt{x^2 + d^2}}{v}. \quad (2.95)$$

**Abb. 2.45** Vergleich von Laufzeiten aus Reflexion und Beugung ( $d = 1 \text{ km}$ ,  $v = 4 \text{ km s}^{-1}$ )



Dies ist wiederum die Gleichung einer Hyperbel, der Beugungshyperbel. Ein Vergleich mit der Reflexionshyperbel (Gl. 2.83) zeigt:

$$t_R = \frac{\sqrt{x^2 + 4d^2}}{v} \leq \frac{d + \sqrt{x^2 + d^2}}{v} = t_B.$$

Für einen Schuss in G ist  $2\overline{GR}$  der Laufweg der in R gebeugten Welle zurück zu G (Abb. 2.45). Die Laufzeit ist allgemein:

$$t_B = \frac{2\sqrt{x^2 + d^2}}{v}. \quad (2.96)$$

Dagegen hat die am Punkt G registrierte reflektierte Lotwelle die Laufzeit  $t_0 = 2d/v$ , und auch hier gilt:

$$t_0 = t_R = \frac{2d}{v} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + d^2}}{v} = t_B.$$

Das  $\leq$ -Zeichen bedeutet, dass Reflexion und Beugung stetig ineinander übergehen. Wann also kann ein Reflektorelement sicher aus einer Reflexion erkannt werden?

Hierzu muss man berücksichtigen, dass Reflexionen nicht an mathematischen Punkten entstehen, wie es die Strahlendarstellung nahelegt, sondern durch Wechselwirkung einer Wellenfront mit einem Reflektorelement. Damit ein Reflektorelement als solches erkannt werden kann, muss es eine Mindestgröße besitzen. Diese wird durch Radius bzw. Durchmesser der sog. Fresnel-Zone definiert.

Für die ebene Wellenfront Q in Abb. 2.46 (oben) gilt nach dem huygens-schen Prinzip, dass jedes Teilgebiet der Wellenfront wiederum Ausgangspunkt neuer Elementarwellen ist. Aus Symmetriegründen unterteilt man die Wellenfront Q in konzentrische Ringe der Art, dass sich ihre Abstände  $r_i$  zum Beobachtungspunkt P gerade um  $\Lambda/2$  unterscheiden. Hierbei ist  $\Lambda$  die Wellenlänge, und für die Lotentfernung  $r_0$  soll gelten, dass  $r_0 \gg \Lambda$ .

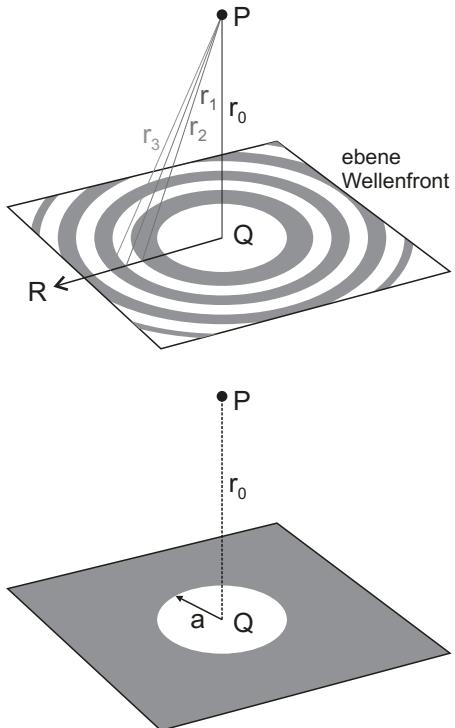
Also ist  $r_1 = r_0 + \Lambda/2$ ,  $r_2 = r_1 + \Lambda/2$  usw. Hierdurch sind die Wellen, die von den auf diese Weise definierten Fresnel-Zonen ausgehen, genau um  $\pi$  bzw.  $180^\circ$  phasenverschoben. Bezeichnet  $A_n$  den Betrag der Amplitude am Punkt P, welcher von der n-ten Zone beigesteuert wird, so ist die resultierende Gesamtamplitude A in P:

$$A = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 \dots = \frac{1}{2}A_0 + (\frac{1}{2}A_0 - A_1 + \frac{1}{2}A_2) + (\frac{1}{2}A_2 - A_3 + \frac{1}{2}A_4) + \dots \quad (2.97)$$

Die Amplituden benachbarter Zonen sind fast gleich groß, nehmen aber wegen der anwachsenden Entfernung zu P mit steigendem n ab:  $A_0 > A_1 > A_2 > \dots$  Daher gilt in guter Näherung  $A_1 \approx (A_0 + A_2)/2$  bzw.  $A_0/2 - A_1 + A_2/2 \approx 0$  und allgemein:  $A_{n-1}/2 - A_n + A_{n+1}/2 \approx 0$ . Damit gilt für Gl. 2.97:

$$A \approx A_0/2, \quad (2.98)$$

**Abb. 2.46** Fresnel-Zonen eines Wellenfelds auf einem in der Tiefe  $r_0$  unter dem Beobachtungspunkt P gelegenen Reflektor



d. h., die Amplitude in P beträgt die Hälfte der Amplitude der ersten Fresnel-Zone. Für den Radius  $R_n$  der n-ten Fresnel-Zone gilt:  $R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = (r_0 + n\Lambda/2)^2 - r_0^2 = nr_0\Lambda + n^2\Lambda^2/4$ . Wenn n nicht zu groß ist, kann wegen  $r_0 \gg \Lambda$  der letzte Term vernachlässigt werden, sodass für  $R_n$  gilt:  $R_n = \sqrt{n\Lambda r_0}$ . Die Wellenlängen der Reflexionsseismik sind in der Größenordnung von  $10^2$  m, und die Tiefe zu einem Reflektor kann mehr als  $10^3$  m betragen, sodass diese Näherung gerechtfertigt erscheint. Die Fläche des Rings zwischen  $R_n$  und  $R_{n+1}$  ist somit:

$$\pi R_{n+1}^2 - \pi R_n^2 = \pi \Lambda r_0 (n + 1 - n) = \pi \Lambda r_0. \quad (2.99)$$

Somit haben alle Fresnel-Zonen die gleiche Fläche. Der Radius der innersten Zone, die ein Ring mit verschwindendem innerem Radius ist, beträgt  $R_1 = \sqrt{\Lambda r_0}$ . Da die Energie mit  $1/r^2$  abnimmt, die Amplitude somit mit  $1/r$ , ist der Beitrag  $A_i$  jeder Zone zur Amplitude A in P umgekehrt proportional zur Entfernung  $r_i$  zu P und proportional zur Fläche der Zone, also:

$$A_n = \frac{K\pi \Lambda r_0}{r_0 + n \Lambda/2}, \quad (2.100)$$

wobei K ein Proportionalitätsfaktor ist. Für die erste Fresnel-Zone mit  $n = 0$  gilt somit  $A_0 = K\pi \Lambda r_0/r_0 = K\pi \Lambda$ . Mit Gl. 2.98 folgt hieraus für A:

$$A = K\pi \Lambda/2. \quad (2.101)$$

Dies entspricht aber nach Gl. 2.100:  $A_n = K \times \text{Fläche}/\text{Radius} = K \pi a^2/r_0$  genau dem Beitrag  $A'_0$  jenes Teils der ersten Fresnel-Zone, der einen Radius  $a$  besitzt (siehe Abb. 2.46, unten):

$$a = \sqrt{r_0 \Lambda / 2}, \quad (2.102)$$

da nach Gl. 2.100 gilt:  $A'_0 = K \frac{\pi r_0 \Lambda / 2}{r_0} = K \pi \Lambda / 2$ .

D. h., die Auflösung verbessert sich bei konstanter Geschwindigkeit mit abnehmender Wellenlänge (bzw. wachsender Frequenz). Somit entstammt die an P ankommende Energie hauptsächlich einem Kreis mit Radius  $a$  um den Punkt, auf den der einfallende Strahl auftrifft (siehe Abb. 2.46 unten). Ersetzt man  $r_0 = v t / 2$  und  $\Lambda = v/f$ , so gilt für den Durchmesser  $D$  bzw. Radius  $a$  dieser Zone:

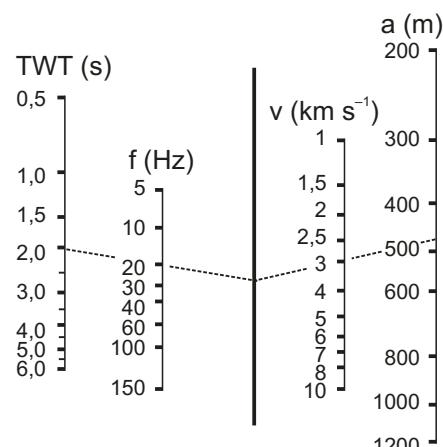
$$D = 2a = 2\sqrt{r_0 \frac{\Lambda}{2}} = \sqrt{2r_0 \Lambda} = \sqrt{\frac{2vt}{2} \frac{v}{f}} = v \sqrt{\frac{t}{f}}. \quad (2.103)$$

Abb. 2.47 fasst dies in einem Nomogramm zusammen: Im dort gezeigten Beispiel entspricht eine Reflexion bei einer Zweiweglaufzeit von TWT = 2 s bei einer Geschwindigkeit von  $v = 3 \text{ km s}^{-1}$  und einer Frequenz von  $f = 20 \text{ Hz}$  einer Fresnel-Zone mit dem Radius  $a = 470 \text{ m}$ .

Aus Gl. 2.103 kann der Durchmesser  $D$  der Fresnel-Zone für verschiedene Frequenzen  $f$ , Zweiweglaufzeiten  $t$  und Geschwindigkeiten  $v$  bzw. Wellenlängen  $\Lambda$  und Tiefen  $r_0$  berechnet werden (siehe Tab. 2.5). Zwei Beispiele veranschaulichen dies für geringe und große Erkundungstiefen:

- (i) Ein Grundwasserleiter der Mächtigkeit  $r_0 = 30 \text{ m}$  und Geschwindigkeit  $v = 1500 \text{ m s}^{-1}$  wird mit Frequenzen von  $f_1 = 100 \text{ Hz}$  bzw.  $f_2 = 50 \text{ Hz}$  erkundet. Mit den zugehörigen Wellenlängen  $\Lambda_1 = v/f_1 = 1500/100 \text{ m} = 15 \text{ m}$  bzw.  $\Lambda_2 = v/f_2 = 1500/50 \text{ m} = 30 \text{ m}$  erhält man aus Gl. 2.103 die Radien der

**Abb. 2.47** Nomogramm zur Bestimmung des Radius der Fresnel-Zone: Die Gerade zwischen der Zweiweglaufzeit (TWT) und der Frequenz ( $f$ ) schneidet die Vertikale in der Mitte am selben Punkt, wie die Gerade zwischen der mittleren Geschwindigkeit ( $v$ ) und dem Radius ( $a$ ) der Fresnel-Zone (nach Sheriff und Geldart 1995)



**Tab. 2.5** Durchmesser D der Fresnel-Zone in km für verschiedene Tiefen  $r_0$  des Reflektors und seismische Wellenlängen  $\Lambda$

$r_0$ (km)	$\Lambda$ (km)				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
2	0,63	0,90	1,11	1,28	1,44
5	1,00	1,42	1,74	2,01	2,25
10	1,42	2,00	2,45	2,84	3,17
30	2,45	3,46	4,24	4,90	5,48
50	3,16	4,47	5,48	6,33	7,08

zugehörigen Fresnel-Zonen:  $a_1 = \sqrt{30 \times 15/2}$  m = 15 m bzw.  $a_1 = \sqrt{30 \times 30/2}$  m = 21,2 m. Das bedeutet, dass Objekte mit einem Durchmesser von 30 m bzw. 42,5 m noch erkannt werden können. Um die niederfrequenten, langwelligen Oberflächenwellen zu unterdrücken, werden daher bei der Erkundung des flachen Untergrunds hochfrequente Geophone (etwa 100 Hz) bevorzugt und bei der Datenaufnahme Hochpassfilter mit einer Grenzfrequenz von 100 Hz bzw. 200 Hz verwendet. Wegen des starken Energieverlusts erfordert dies aber in der Regel das Stapeln mehrerer Schüsse.

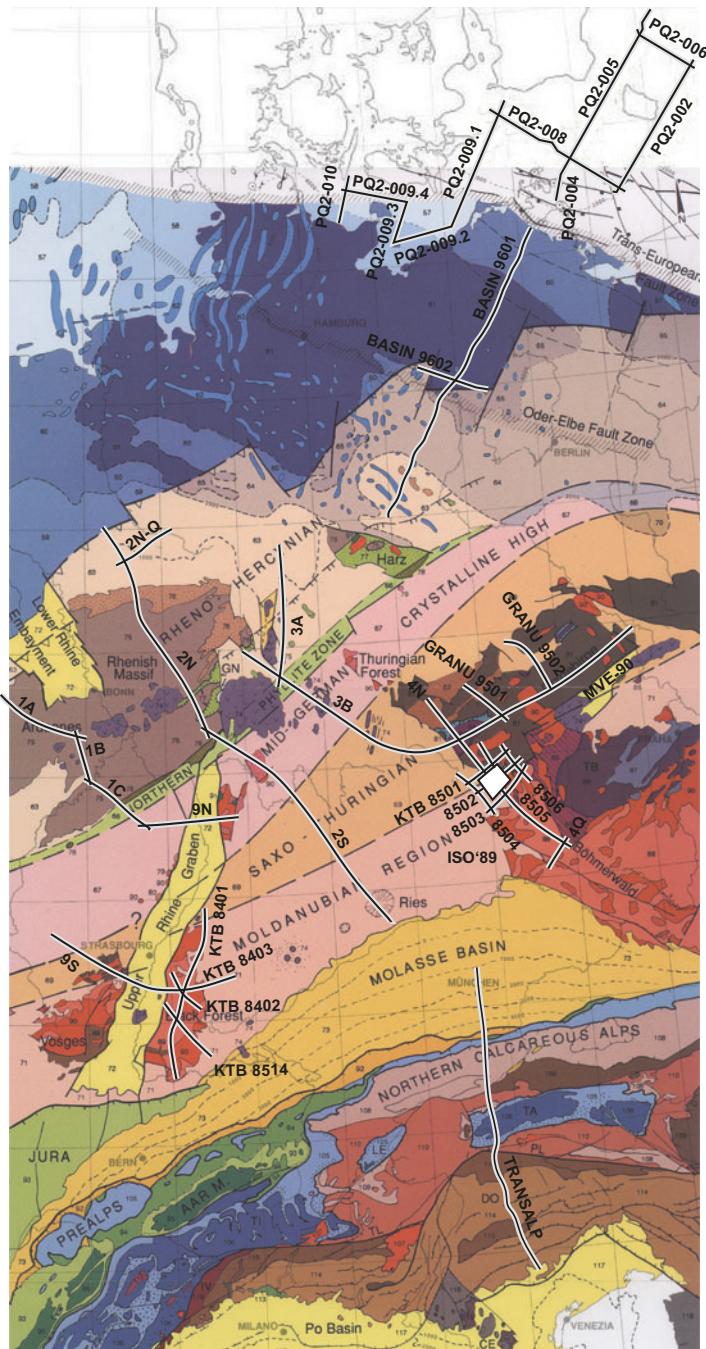
- (ii) Bei der Erkundung eines Reservoirs mit einer Geschwindigkeit von  $v = 2\,500 \text{ m s}^{-1}$  in einer Tiefe von 2,5 km, die einer Zweiweglaufzeit von  $t = 2,0 \text{ s}$  entspricht, wird ein Frequenzanteil von 40 Hz im Wesentlichen aus einem Kreis mit Radius 279,5 m bzw. einem Durchmesser von 559 m reflektiert werden.

Selbst bei 2 km Tiefe und einer Wellenlänge von 100 m (z. B.  $v = 3\,000 \text{ m s}^{-1}$ ;  $f = 30 \text{ Hz}$ ) wäre der Durchmesser der Fresnel-Zone noch 630 m. In Tiefen, die der Mittel- oder Unterkruste zugeordnet sind, betrüge sie mehrere Kilometer. Dies ist die Größenordnung geologischer Strukturen. Man darf daher von Reflexionsprofilen bis in die tiefe Kruste – z. B. das deutsche DEKORP- ([Abb. 2.48](#)), britische BIRPS- ([Abb. 2.49](#)) und US-amerikanische COCORP-Programm ([Abb. 2.50](#)) – keine so scharfen Bilder erwarten wie von flacheren Profilen.

Die Bedeutung der Fresnel-Zonen für seismische Sektionen liegt daher darin, dass nur Reflektoren, deren Ausmaße größer sind als ein Kreis mit Radius bzw. Durchmesser der in [Gl. 2.103](#) definierten Fresnel-Zone, als solche erkannt und abgebildet werden. Für kleinere Reflektoren überwiegt der Anteil der Beugung, und die Gestalt des Reflektors wird schwer zu erkennen sein.

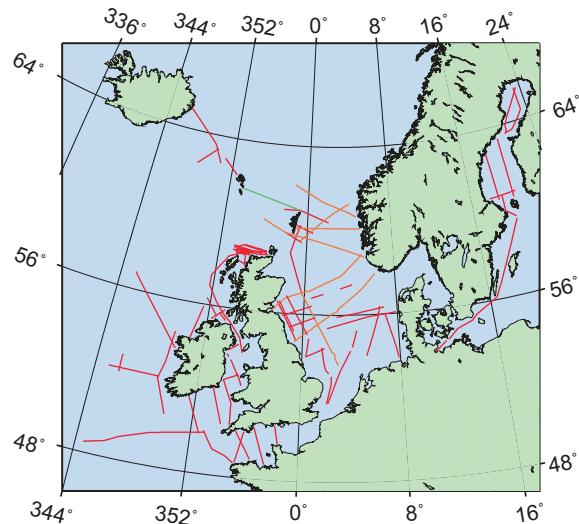
### Möglichkeiten und Grenzen der Reflexionsseismik

Die Reflexionsmethode wird eingesetzt, um ein möglichst getreues und detailliertes Abbild von Strukturen im Untergrund zu erstellen. Jedoch kann sie nur solche Strukturen erfassen, die hinreichend große Impedanzkontraste besitzen und die genügend groß sind, um mit den Wellenlängen elastischer Wellen in Gesteinen aufgelöst zu werden.



**Abb. 2.48** Die Reflexionsprofile des DEKORP-Programms (1984–1999) mit einer Gesamtlänge von ca. 5000 km (DEKORP 2016; Kartengrundlage: Burollet et al. 1992)

**Abb. 2.49** Die Reflexionsprofile mit einer Gesamtlänge von ca. 20 000 km, die seit 1981 im Rahmen des britischen BIRPS-Programms (rote Profile) in Zusammenarbeit mit benachbarten Staaten (wo erforderlich) sowie der Industrie (orange und grüne Profile) gewonnen wurden (Klemperer und Hobbs 1992; Snyder und Hobbs 1999)



**Abb. 2.50** Die Reflexionsprofile des US-amerikanischen COCORP-Programms mit einer Gesamtlänge von ca. 11 000 km (<http://www.geo.cornell.edu/geology/cocorp/COCORP.html>)

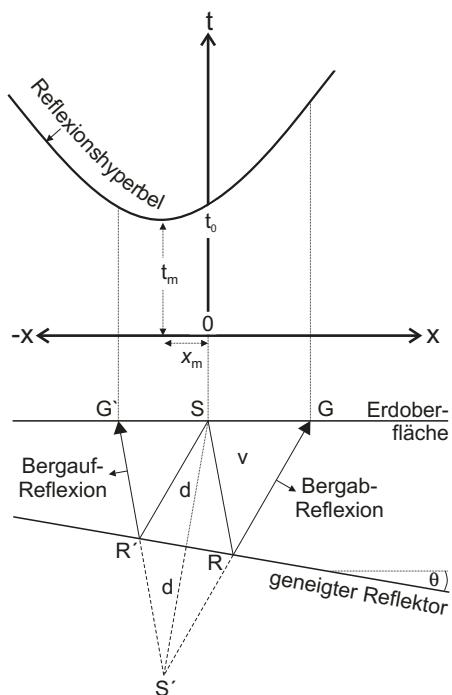


#### 2.4.1.3 Geneigter Reflektor – Hyperbelkrümmung (dip moveout)

Wenn der Reflektor eine Neigung  $\theta$  gegen die Horizontale besitzt, drückt sich dies in entsprechend veränderten Laufwegen und -zeiten aus, da nach dem snelliusschen Brechungsgesetz (Gl. 2.66) Einfall- und Reflexionswinkel auf die Flächennormale des Reflektors bezogen sind. Für die in Abb. 2.51 dargestellte Konfiguration ergibt dies einen Laufweg von  $\overline{SRG} = \overline{SR} + \overline{RG} = \overline{S'R} + \overline{RG} = \overline{S'G}$ . Damit wird die Laufzeit  $t = \overline{S'G}/v$ . Der Bildpunkt  $S'$  liegt genauso weit unter dem Reflektor wie der Schusspunkt darüber. Die Strecke  $\overline{SG}$  ist die Geophonentfernung  $x$ , und der stumpfe Winkel  $S'SG$  ist gleich  $90^\circ + \theta$ . Mit dem Kosinussatz<sup>14</sup> und unter

<sup>14</sup> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ : Das Äquivalent des Pythagoras-Satzes für ein schiefwinkliges Dreieck mit den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  und dem der Seite  $a$  gegenüber liegenden Winkel  $\alpha$ .

**Abb. 2.51** Laufzeitkurve von Reflexionen an einer geneigten Grenzschicht (nach Lowrie 2007)



Berücksichtigung von  $\cos(90^\circ + x) = -\sin(x)$  lässt sich die Strecke  $\overline{S'G}$  durch  $x = \overline{SG}$  und  $2d$  ausdrücken:  $\overline{S'G} = x^2 + 4d^2 - 4dx \cos(90^\circ + \theta) = x^2 + 4d^2 - 4dx \sin(\theta)$ .

Damit folgt für die Laufzeit  $t$ :

$$t^2 = \frac{x^2 + 4d^2 + 4dx \sin(\theta)}{v^2} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{1}{v} \sqrt{x^2 + 4d^2 + 4dx \sin(\theta)}. \quad (2.104)$$

Dies ist wiederum die Gleichung einer Hyperbel, wie man nach Umformung erkennt:

$$\begin{aligned} v^2 t^2 &= x^2 + 4d^2 + 4dx \sin(\theta) \\ &= x^2 + 4dx \sin(\theta) + 4d^2 [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] = [x + 2d \sin(\theta)]^2 + [2d \cos(\theta)]^2 \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

$$\frac{(vt)^2}{[2d \cos(\theta)]^2} - \frac{[x + 2d \sin(\theta)]^2}{[2d \cos(\theta)]^2} = 1. \quad (2.105)$$

Ihre Symmetrieachse ist vertikal, aber im Vergleich zur Hyperbel von Gl. 2.85 um den Betrag

$$x_m = -2d \sin(\theta) \quad (2.106)$$

verschoben. Für  $x = x_m$  ergibt sich aus Gl. 2.105 die minimale Laufzeit  $t_m$ :

$$t_m = \frac{2d \cos(\theta)}{v} = t_0 \cos(\theta). \quad (2.107)$$

Um das Schichteinfallen  $\theta$  zu ermitteln, wird die Wurzel in Gl. 2.104 wiederum als binomische Reihe entwickelt:

$$t = \frac{2d}{v} \sqrt{1 + \frac{x^2 + 4dx \sin(\theta)}{4d^2}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass  $x \ll 2d$  ist und mit  $t_0 = 2d/v$ , ergibt sich hieraus in erster Näherung:

$$t \approx t_0 \left( 1 + \frac{x^2 + 4dx \sin(\theta)}{8d^2} \right). \quad (2.108)$$

Um  $\theta$  zu finden, nutzt man nun die Laufzeiten zweier Geophone, die symmetrisch zu beiden Seiten des Schusspunkts in einer Entfernung von  $x = \pm s$  liegen. Der Neigungswinkel  $\theta$  kann nun mit Hilfe der Differenz dieser beiden Laufzeiten des Schuss-Seismogramms, dem sog. *dip moveout*  $\Delta t_{\text{dip}}$ , bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{dip}} &= t_1 - t_2 \approx t_0 \left( 1 + \frac{s^2 + 4ds \sin(\theta)}{8d^2} \right) - t_0 \left( 1 + \frac{s^2 - 4ds \sin(\theta)}{8d^2} \right) \\ &= t_0 \left( \frac{s}{d} \sin(\theta) \right) = \frac{2s}{v} \sin(\theta). \end{aligned} \quad (2.109)$$

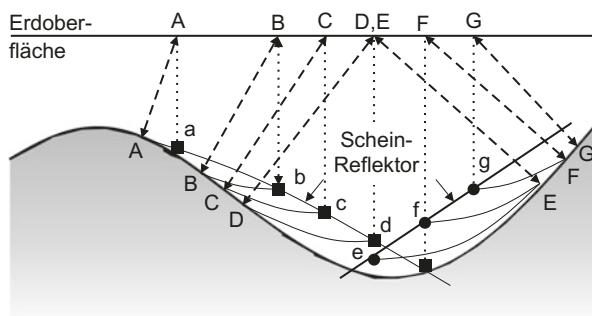
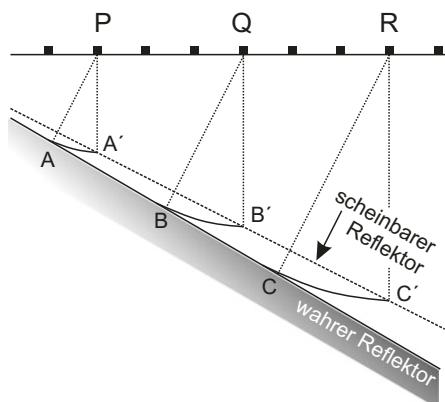
Für das Schichteinfallen  $\theta$  folgt hieraus:

$$\sin(\theta) \approx \frac{v}{2} \underbrace{\frac{\Delta t_{\text{dip}}}{s}}_{\text{dip moveout}}. \quad (2.110)$$

Für kleine Winkel  $\theta$  ist  $\sin(\theta) \approx \theta$ , sodass das Schichteinfallen direkt proportional zu  $\Delta t_{\text{dip}}$  wird. Darüber hinaus ist  $\Delta t_{\text{dip}}$  direkt proportional zu  $s$ . Für eine optimale Bestimmung des Neigungswinkels  $\theta$  wird im Zuge dieser DMO-Korrektur daher der größtmögliche Wert für  $s$  verwendet, den die Datenqualität zulässt und welcher der Bedingung  $s \ll d$  genügt. Für symmetrische Steilwinkelauslagen werden daher die Geophongruppen an den beiden Profilenden verwendet. In diesem Fall ist  $2s$  gleich der Profillänge. In der Herleitung von Gl. 2.110 wurde übrigens bereits die Hyperbelkrümmung (NMO) für einen horizontalen Reflektor beseitigt: Die Terme in  $s^2$ , die in der Differenzbildung verschwanden, entsprechen diesem *normal moveout*.

Diese Form der Beseitigung der Krümmung von Reflexionshyperbeln geneigter, ebener Reflektoren ist zwar didaktisch lehrreich, aber von praktischem Nutzen nur für Schuss-Seismogramme mit wenigen Geophonen über einem geneigten, ebenen

**Abb. 2.52** Fehler bei der Lagebestimmung eines geneigten Reflektors durch falsche Zuordnung des Lotstrahls (nach Lowrie 2007)



**Abb. 2.53** Fehler bei der Lagebestimmung einer Antiklinale durch falsche Zuordnung der Lotstrahlen (nach Lowrie 2007)

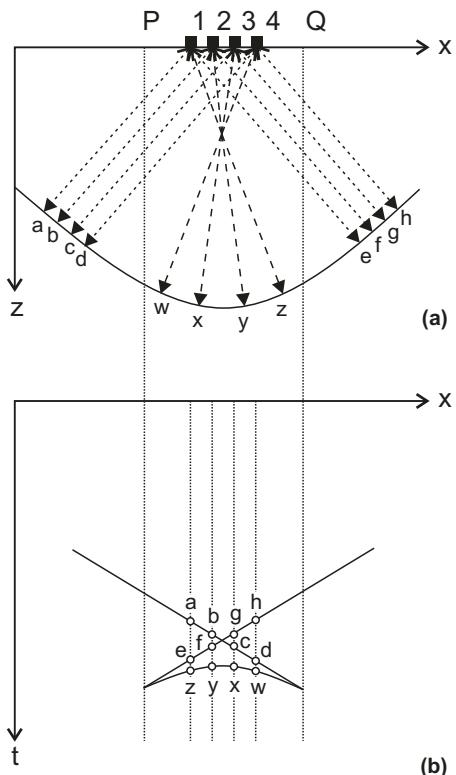
Reflektor. Von weitaus größerer Bedeutung ist die in [Abschn. 2.4.5.7](#) behandelte DMO-Bearbeitung von CMP-Gruppen, die auf anderen Konzepten beruht als der hier beschriebene *dip moveout*.

Beispiele für die Auswirkung eines Schichteinfallens auf die Seismogramme zeigen die folgenden drei Beispiele: [Abb. 2.52](#) illustriert den Fehler, der durch falsche Zuordnung des Lotstrahls entsteht, wenn dieser als senkrecht unter den Geophonen liegend angenommen wird anstatt senkrecht auf dem Reflektor, der Tangente an die Kreisbögen mit Radius  $v t_0/2$  um die Geophone. Dies spiegelt ein geringeres Schichteinfallen vor.

[Abb. 2.53](#) illustriert diesen Fehler für den Fall einer Antiklinale, wo die wahren Orte der Lotstrahl-Reflexionen, die Punkte A–G, fälschlicher Weise auf die Punkte a–g senkrecht unter den jeweiligen Schusspunkten abgebildet werden. Wieder erscheint der Reflektor flacher zu liegen, sodass die Antiklinale breiter und weniger steil abgebildet wird, als sie tatsächlich ist.

In [Abb. 2.54a](#) wird dies für den Fall eines steilen Grabens weiter verdeutlicht, der in der Seismogramm-Montage ([Abb. 2.54b](#)) wie eine stilisierte Krawattenschleife (Fliege; *bow tie*) abgebildet wird. Die von den Schusspunkten 1, 2, 3

**Abb. 2.54** (a) Strahlwege der Reflexionen von beiden Flanken eines engen Grabens; (b) zugehörige seismische Sektion (nach Lowrie 2007)



und 4 ausgehenden Lotstrahlen treffen an den Punkten (a, e, z), (b, f, y), (c, g, x) bzw. (d, h, w) auf den Reflektor (Abb. 2.54a). Ohne weitere Korrektur werden sie in der zugehörigen Zeitsektion (Abb. 2.54b) senkrecht unter den Schusspunkten aufgetragen, was das oben beschriebene Muster ergibt.

Seismogramme müssen daher hinsichtlich des Effekts von Reflexionen von unebenen Schichtgrenzen sowie von seitlich eingestreuten Reflexionen korrigiert werden. Dieser Bearbeitungsschritt wird als Migration bezeichnet (vgl. Abschn. 2.4.5.8), da er das Verschieben der Reflektorelemente an ihre geometrisch wahren Positionen beinhaltet.

#### 2.4.1.4 Grafische Auswertung: Tangenten- und Spiegelpunktmethoden

Grafische Methoden fördern das Grundverständnis, sind aber heute durch die verfügbaren digitalen Migrationstechniken vollständig ersetzt und werden in der Praxis nicht mehr eingesetzt.

Die zwei folgenden grafischen Methoden vermitteln einen groben Überblick über die Lage von Reflektorelementen. A priori ist in der Regel ja nicht bekannt, ob und wie Reflektoren geneigt sind. Wenn der durch eine Neigung verursachte Effekt nicht korrigiert wird, ergibt dies einen Fehler bei der Darstellung der Reflektoren, wenn das der Lotzeit entsprechende Reflektorelement lotrecht unter dem Geophon gezeichnet wird statt senkrecht auf den Reflektor (siehe Abb. 2.52, 2.53 und 2.54).

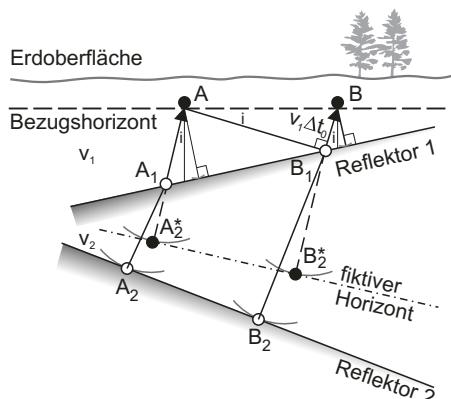
Dies führt zum Konzept der Tangentenmethode zur Bestimmung des ersten gut bestimmbaren Reflektors. Dieser ergibt sich als Einhüllende an Kreisbögen mit den Radien

$$R_0^n = \frac{1}{2} v_1 t_0^n \quad (2.111)$$

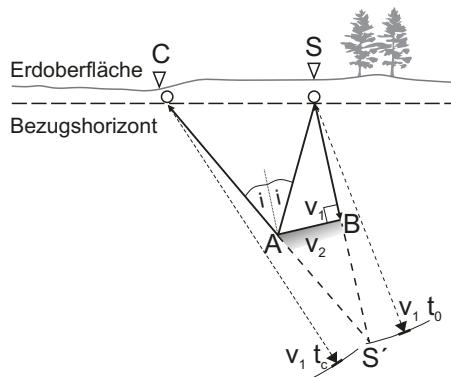
um die n Schusspunkte;  $v_1$  ist die Geschwindigkeit der ersten Schicht. Für eine Grobauswertung können auch tiefere Horizonte mit der einfachen Tangentenmethode konstruiert werden. Hierbei wird aber die Brechung der Strahlen beim Übergang von einem Medium in das folgende vernachlässigt und eine mittlere Geschwindigkeit verwendet, z. B.  $v_{rms}$  (Gl. 2.92). Für eine feinere Auswertung verwendet man das Tangentenverfahren mit Brechung: Ausgehend von einer Situation, wie in Abb. 2.55 dargestellt, wird zunächst der Durchstoßpunkt durch den ersten Reflektor bestimmt:  $\sin(i) = v_1 \Delta t_0 / \overline{AB}$ , wo  $i$  der Winkel der Lotstrahlen des zweiten Reflektors gegen die Vertikale bei A und B ist und  $\Delta t_0$  die Differenz der  $t_0$ -Zeiten des zweiten Reflektors in A und B (Abb. 2.55). Die Lage des Durchstoßpunkts hängt nicht von der Gesamlaufzeit oder  $v_2$  ab. Daher konstruiert man mit der Strahlrichtung  $i$  zunächst einen fiktiven Horizont innerhalb der zweiten Schicht (Abb. 2.55): Man schlägt zwei Kreisbögen um A bzw. B mit den Radien  $\overline{AA}_2^* = v_1 t_0^A / 2$  und  $\overline{BB}_2^* = v_1 t_0^B / 2$ , wo  $t_0^A$  und  $t_0^B$  die jeweiligen  $t_0$ -Zeiten des zweiten Reflektors am Punkt A bzw. B sind. Dann werden die mit der falschen Geschwindigkeit berechneten Teile  $\overline{A_1 A_2^*}$  bzw.  $\overline{B_1 B_2^*}$  des Strahlwegs gestreckt und die wahren Strecken  $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 A_2^*} v_2 / v_1$  bzw.  $\overline{B_1 B_2} = \overline{B_1 B_2^*} v_2 / v_1$  berechnet. Der zweite Reflektor ergibt sich wieder als die Tangente an die Kreisbögen um A<sub>1</sub> bzw. A<sub>2</sub> mit den Radien  $\overline{A_1 A_2}$  bzw.  $\overline{B_1 B_2}$ . Das Verfahren kann theoretisch auf beliebig viele Schichten angewendet werden. Bei mehr als vier Schichten bzw. drei Reflektoren wird das Verfahren jedoch meist zu kompliziert.

Eine weitere grafische Methode zur Konstruktion von Reflektoren ist die Spiegelgaußmethode (Abb. 2.56). Ihr Vorteil ist, dass sie auch auf isolierte Reflektorelemente angewendet werden kann. Sie wird daher verwendet, wenn Reflexionen enden oder nur über kurze Entfernungen korreliert werden können. Man konstruiert

**Abb. 2.55** Prinzip der Tangentenmethode mit Strahlbrechung (nach Meissner und Stegema 1977). Die von den Schusspunkten A und B ausgehenden Lotstrahlen auf den zweiten Reflektor in A<sub>2</sub> und B<sub>2</sub> durchstoßen den ersten Reflektor an den Punkten A<sub>1</sub> und B<sub>1</sub>;  $\Delta t_0$  ist die Differenz der beiden Lotstrahlen nach A<sub>2</sub> und B<sub>2</sub>



**Abb. 2.56** Prinzip der Spiegelpunktmethode (nach Meissner und Stegema 1977)



dazu zum Schusspunkt S den Spiegelpunkt  $S'$  in Bezug auf den Reflektor aus der Lotzeit  $t_0$  und der Laufzeit  $t_c$  der Randspur C (Abb. 2.56). Der Spiegelpunkt  $S'$  ist der Schnittpunkt der Kreisbögen um C und S mit den Radien  $v \cdot t_c$  und  $v \cdot t_0$ . Die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{SS'}$  ist das Reflektorelement  $\overline{AB}$ . A und B sind die Reflexionspunkte für die wahren Strahlen SAC und den Lotstrahl am Punkt S. Bei diesem Verfahren muss darauf geachtet werden, dass man keine Beugungselemente anstelle kurzer Reflektoren verwendet. Solche Missdeutungen haben ggf. sehr steil stehende Elemente im Konstruktionsplan zur Folge.

## 2.4.2 Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Die Verarbeitung geophysikalischer Daten erfolgt heute ganz überwiegend in digitaler Form. Die Grundlagen hierfür entstammen der Informationsverarbeitung. Diese entwickelte sich nach dem zweiten Weltkrieg stürmisch aus den Technologiesprünzen in Zusammenhang mit der Einführung des Radars zur Flugzeugortung bzw. mit der damit zusammenhängenden Identifizierung eines Nutzsignals in Gegenwart von Rauschen. In den frühen 1950er-Jahren befasste sich eine Forschergruppe am Massachusetts Institute of Technology (USA) mit der Anwendung dieser Techniken für die seismische Interpretation. Die gleichzeitig einsetzende – und bis heute andauernde – stürmische Entwicklung immer leistungsfähigerer elektronischer Rechner ermöglichte die hierfür erforderlichen umfangreichen Berechnungen in einem zeitlich und finanziell vertretbaren Umfang. Längst ist die digitale Verarbeitung geophysikalischer Daten jedoch nicht mehr auf die Seismik beschränkt, sondern kommt bei allen geophysikalischen Methoden zum Einsatz, so auch in der Gravimetrie. Daher werden die Grundlagen dieser Methoden in diesem Abschnitt gesammelt eingeführt. Ihre spezielle Anwendung erfolgt dann im jeweiligen thematischen Zusammenhang.

### 2.4.2.1 Fourier-Reihen, -Integral und -Transformation

Die Grundlage der folgenden Betrachtungen ist die Fourier-Transformation, mit der ein- oder mehrdimensionale Datenreihen in ihre spektralen Komponenten zerlegt und aus diesen (nahezu verlustfrei) wieder zusammengesetzt werden können.

Beispiele für eindimensionale Reihen sind Zeitreihen, insbesondere also Seismogramme. Beispiele für mehrdimensionale Reihen sind alle ortsabhängig aufgezeichneten Daten, insbesondere also flächenhaft aufgezeichnete Schwerewerte oder Magnetfelddaten. Der Vorteil dieser Analyse und Synthese, d. h. Transformation aus dem Zeit- oder Ortsbereich in den Frequenz- oder Wellenzahlbereich und zurück, liegt darin, dass bestimmte bildverbessernde (Filter-)Operationen vorteilhafter in dem einen bzw. anderen Bereich angewendet werden. Das natürliche optische Analogon ist die Aufspaltung des Lichts in die Spektralfarben durch ein Prisma und die Filterung einzelner Komponenten zur Bildverbesserung. Wichtig ist in dem einem wie dem anderen Fall, dass der Informationsverlust bei der Hin- und Rücktransformation (theoretisch) beliebig klein gehalten werden kann.

Während die Fourier-Transformation bei Funktionen stetiger Variablen zum Einsatz kommt, werden Fourier-Reihenentwicklungen bei Funktionen diskreter Variablen verwendet: Eine zeitlich (oder räumlich) in ihrem Grundintervall T periodische Funktion  $g(t)$  kann als unendliche Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(n\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots + b_n \sin(n\omega_0 t) + \dots$$

bzw.

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t). \quad (2.112)$$

Die Grundfrequenz ist durch

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T \quad (2.113)$$

gegeben, und  $n\omega_0$  nennt man die n-te Harmonische. Unter anderem wird die Fourier-Reihe (Gl. 2.112) daher auch als harmonische Analyse bezeichnet. Die unabhängige Variable t ist meist die Zeit bzw. der Ort. Im letzten Fall wird  $\omega_0$  durch die Wellenzahl  $k_0 = 2\pi/\Lambda$  ersetzt, wo  $\Lambda$  die Wellenlänge ist.

Kosinus und Sinus sind orthogonale Funktionen, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} T/2 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= 0 \quad \text{für alle } m \text{ und } n \end{aligned} \quad (2.114)$$

Daher ergibt das Integral des Produkts aus der Fourier-Reihe (Gl. 2.112) mit beliebigen Sinus- oder Kosinusfunktionen über das Intervall  $(-T/2, +T/2)$  immer null, mit Ausnahme der Sinus- und Kosinusterme  $\sin^2(n\omega_0 t)$  bzw.  $\cos^2(n\omega_0 t)$ , für die das

Integral dieses Produkts gerade  $T/2$  ergibt. Damit können die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  in Gl. 2.112 aus den Integralen dieser Produkte bestimmt werden:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt; \quad n = 0; \quad \left. \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (n\omega_0 t) dt; \quad n > 0.$$
(2.115)

Ist  $g(t)$  integrierbar, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = 0$ , d. h., die Koeffizienten der höheren Harmonischen werden zunehmend kleiner und verschwinden für große  $n$ . Der Koeffizient  $a_0$  (Gl. 2.115) ist per Definition der Mittelwert von  $g(t)$  im Intervall  $T$ . Dieser wird oft vor der Fourier-Analyse von  $g(t)$  abgezogen; danach gilt dann  $a_0 = 0$ .

Für in Fourier-Reihen entwickelbare Funktionen formulierte Dirichlet<sup>15</sup> 1829 vier hinreichende Bedingungen, die jedoch nicht alle auch notwendig sind. So zeigte Fejér<sup>16</sup> 1904, dass bereits allein die Integrierbarkeit von  $g(t)$  genügt. Dies ist jedoch eher ein mathematisches Detail, da alle wichtigen Funktionen der physikalischen Welt auch den strengen Dirichlet-Bedingungen genügen.

Eine wichtige Folgerung der Fourier-Analyse einer im Intervall  $T$  periodischen Funktion ist, dass ihre Fourier-Reihenentwicklung wiederum periodisch in  $T$  ist. Falls  $g(t)$  im Grundintervall  $T$  nicht periodisch ist, so wird die Reihenentwicklung von  $g(t)$  dies aber sein, d. h., nach Rücktransformation aus dem Frequenzbereich gilt  $g(t + T) = g(t)$ . Fourier-Reihenentwicklungen sind auch in mehreren Dimensionen möglich und werden in der Geophysik z. B. zur Untersuchung der räumlichen Struktur von Magnet- und Schwerefeldern in zwei Dimensionen benutzt.

Die Fourier-Reihenentwicklung (Gl. 2.112) und die Formeln für die Fourier-Koeffizienten (Gl. 2.115) können mit Hilfe der eulerschen Formel für komplexe Zahlen (siehe Fußnote 6) sowie der Ausdrücke für  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  und  $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$  ausgedrückt werden (Abb. 2.57):

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.116)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-in\omega_0 t} dt; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{mit}$$

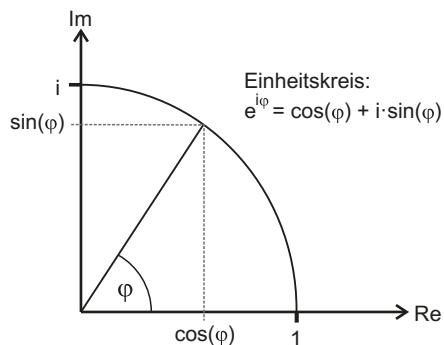
$$a_n = (c_n + c_{-n}) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{und} \quad (2.117)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

<sup>15</sup>Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859; deutscher Mathematiker mit wichtigen Beiträgen zur Zahlentheorie, Analysis und Mechanik und Nachfolger von Carl Friedrich Gauß in Göttingen.

<sup>16</sup>Lipót Fejér (geb. Leopold Weiss), 1880–1959; ungarischer Mathematiker mit wichtigen Beiträgen zur harmonischen Analyse (speziell Fourier-Reihen) zu ganzen Funktionen in der Funktionentheorie und zu konformen Abbildungen.

**Abb. 2.57** Eulersche Formel und Einheitskreis in der komplexen Zahleebene



Setzt man Gl. 2.117 in Gl. 2.116 ein, so folgt:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{in\omega_0 t} \int_{-T/2}^{T/2} g(\lambda) e^{-i\omega_0 \lambda} d\lambda.$$

Aus  $\omega_n = n\omega_0$  und  $\omega_{n-1} = (n-1)\omega_0$  folgt:  $\omega_n - \omega_{n-1} = \omega_0 = 2\pi/T = \Delta\omega$  und hieraus:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} e^{i\omega_n t} \int_{-T/2}^{T/2} g(\lambda) e^{-i\omega_n \lambda} d\lambda. \quad (2.118)$$

Strebt T nun gegen  $\infty$ , so wiederholt sich g(t) in immer größeren Intervallen. Dann wird  $\Delta\omega$  immer kleiner und strebt gegen  $d\omega$ ,  $\omega_n$  wird zur stetigen Variablen  $\omega$  und die Summe wird zum Integral. Damit folgt für Gl. 2.118:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\omega \lambda} d\lambda \right\}}_{G(\omega)} d\omega. \quad (2.119)$$

Man identifiziert die geschweifte Klammer (eine Funktion von  $\omega$ ) mit  $G(\omega)$  und nennt dies die Fourier-Transformierte von g(t):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.120)$$

Damit wird Gl. 2.119, die inverse Fourier-Transformierte von G( $\omega$ ), zu:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.121)$$

Allgemein gilt:  $G(\omega) = A(\omega)e^{i\Phi(\omega)}$ , wobei  $A(\omega)$  das Amplituden- und  $\Phi(\omega)$  das Phasenspektrum der komplexen Funktion  $G(\omega)$  ist. Gl. 2.120 transformiert  $g(t)$  in den Frequenzbereich ( $\omega = 2\pi/T$ ), und Gl. 2.121 transformiert  $G(\omega)$  in den Zeitbereich. Ist  $g$  keine Funktion der Zeit, sondern des Orts, spricht man analog von Ortsbereich und Wellenzahlbereich. Die Funktionen  $g(t)$  und  $G(\omega)$  sind ein sog. Transformationspaar, was oft durch  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$  ausgedrückt wird.

Für Daten zweier Veränderlicher, also insbesondere für flächenhaft aufgezeichnete magnetische oder Schweredaten  $g(x,y)$ , gilt in zwei Dimensionen (siehe z. B. Sheriff und Geldart 1995, S. 533):

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (a_{nm} C_n C_m^* + b_{nm} C_n S_m^* + c_{nm} S_n C_m^* + d_{nm} S_n S_m^*), \text{ mit:} \quad (2.122)$$

$$C_n = \cos(nk_x x); \quad C_m^* = \cos(mk_y y) \quad S_n = \sin(nk_x x); \quad S_m^* = \sin(mk_y y). \quad (2.123)$$

Die Koeffizienten  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$ ,  $c_{nm}$  und  $d_{nm}$  werden durch Gleichungen vom folgenden Typ bestimmt:

$$b_{nm} = \frac{4}{\Lambda_x \Lambda_y} \int_{-\frac{\Lambda_x}{2}}^{\frac{\Lambda_x}{2}} \int_{-\frac{\Lambda_y}{2}}^{\frac{\Lambda_y}{2}} \Delta g(x,y) C_n S_m^* dx dy. \quad (2.124)$$

Für eine nur an diskreten Punkten definierte Funktion  $\Delta g(x,y)$  geht das Doppelintegral in Gl. 2.124 in eine Doppelsumme über.

Der Übergang zum Fourier-Integral geschieht wie zuvor, indem die diskrete Anzahl von Harmonischen durch ein kontinuierliches Frequenzspektrum ersetzt wird. Die zweidimensionale Fourier-Transformierte:  $G(k_x, k_y)$  der Funktion  $g(x,y)$  ergibt sich dann aus:

$$G(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.125)$$

und die Rücktransformation aus:

$$g(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.126)$$

Die Berechnung der Fourier-Transformierten stetiger Funktionen kann im Einzelfall schwierig sein; eine große Anzahl von Transformationen und Rücktransformationen sind allerdings bereits tabelliert. In der Praxis werden jedoch oft diskrete (punktweise vorgegebene) Funktionen verwendet, deren Transformierte leicht numerisch berechnet werden können (Z-Transformierte, FFT, siehe Abschn. 2.4.2.3). Für die Berechnung beider Arten der Transformation können einige Eigenschaften hilfreich sein (vgl. Abschn. 4.4 im Anhang). Die Wichtigsten betreffen:

$$\text{Verschiebung: } g(t - k) \leftrightarrow e^{-i\omega k} G(\omega) \text{ und } e^{-ikt} g(t) \leftrightarrow G(\omega + k), \quad (2.127)$$

wobei die Verschiebungen im Zeit- bzw. Frequenzbereich nach rechts bzw. links der Multiplikation mit  $e^{-i\omega k}$  bzw.  $e^{-itk}$  im Frequenz- bzw. Zeitbereich entsprechen;

$$\text{Skalierung: } g(k t) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} G(\omega/k) \quad \text{und} \quad \frac{1}{|k|} g(t/k) \leftrightarrow G(k \omega); \quad (2.128)$$

$$\text{Symmetrie: } G(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\omega); \quad (2.129)$$

$$\text{Ableitung: } \frac{d^n g(t)}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n G(\omega) \quad \text{und} \quad (-it)^n g(t) \leftrightarrow \frac{d^n G(\omega)}{d\omega^n}, \quad (2.130)$$

wobei die n-fache Ableitung im Zeit- bzw. Frequenzbereich der Multiplikation mit  $(i\omega)^n$  bzw.  $(-it)^n$  im Frequenz- bzw. Zeitbereich entspricht. Dies ist die Grundlage für die Überführung von Differenzialgleichungen in algebraische Gleichungen mit Hilfe der Fourier-Transformation;

$$\text{Integration: } \int_{-\infty}^t g(x) dx \leftrightarrow \frac{1}{i\omega} G(\omega). \quad (2.131)$$

Analoge Beziehungen gelten für die zweidimensionale Fourier-Transformation.

#### 2.4.2.2 Radon- und $\tau$ -p-Transformation

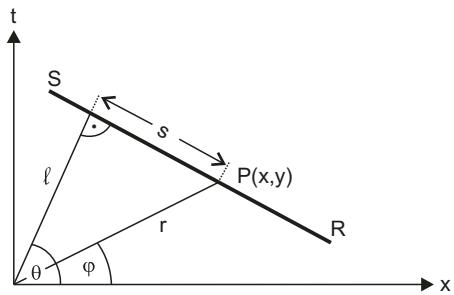
Diese nach dem österreichischen Mathematiker und späteren Rektor der Universität Wien, Johann Radon (1887–1956), benannte Integral-Transformation (Radon 1917) bildet die Grundlage tomografischer Abbildungsverfahren. Herkömmliche Abbildungsverfahren projizieren die Eigenschaften eines durchstrahlten Volumens auf eine Fläche. Hierbei ist im Nachhinein keine Zuordnung der betrachteten Eigenschaft zu den Volumenelementen mehr möglich. Mit Hilfe der Tomografie, einer Schnittbildanalyse, kann diese Beschränkung jedoch überwunden werden. Hierzu wird ein Objekt aus unterschiedlichen Richtungen durchstrahlt und in einem zweiten Schritt, der Rekonstruktion oder Rückprojektion, aus diesen Abbildungen die zunächst nicht erfasste Struktur der Eigenschaft im Volumen rekonstruiert.

In der seismischen Tomografie interessiert die Verteilung einer Eigenschaft entlang der Punkte P eines seismischen Strahls (Abb. 2.58). Die Radon-Transformierte einer Eigenschaft  $g(x,y)$ , wie etwa Amplitude, Dämpfung oder Geschwindigkeit entlang einer Strecke RS, ist definiert als das Integral

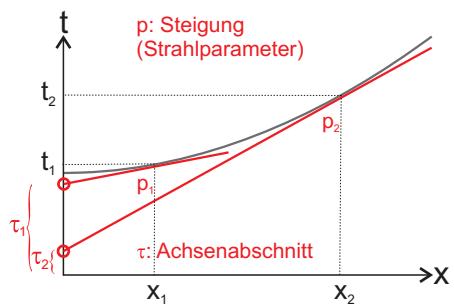
$$g(r, \varphi) \leftrightarrow G(\ell, \theta) = \int_R^S g(r, \varphi) ds. \quad (2.132)$$

Die Gerade, welche die Punkte R und S verbindet, wird in der hesseschen Normalform durch  $\ell = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$  beschrieben. Damit lautet Gl. 2.132:

**Abb. 2.58** Zur Radon-Transformation (nach Sheriff und Geldart 1995)



**Abb. 2.59**  $\tau$ - $p$ -Transformation einer Laufzeitkurve  $t(x)$



$$g(x, y) \leftrightarrow G(\ell, \theta) = \int_R^S \int_R^S g(x, y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \ell) dx dy, \quad (2.133)$$

wo  $\delta(t)$ , das Dirac-Delta ist mit dem binären Wertebereich  $\delta(0) = 1$  und  $\delta(t) = 0$  für  $t \neq 0$ . Multiplikation mit dem Dirac-Delta stellt sicher, dass nur die auf der Strecke zwischen den Punkten R und S gelegenen Funktionswerte von  $g(x, y)$  integriert werden. Mit Hilfe der Radon-Transformation (Gl. 2.133) werden die Werte der in der X-Y-Ebene definierten Funktion  $g(x, y)$  auf die Fläche eines Zylinders abgebildet, der durch  $0 \leq \ell \leq \infty$  und  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (bzw. durch  $-\infty \leq \lambda \leq \infty$  und  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) definiert ist.

Eng verwandt mit der Radon-Transformation ist die  $\tau$ - $p$ -Transformation einer Laufzeitkurve, die zur Gruppe der Legendre-Transformationen gehört. Sie beschreibt eine punktweise definierte Laufzeitkurve  $t(x)$  alternativ durch Steigung  $p(x, t)$  und Achsenabschnitt  $\tau(x, t)$  ihrer Tangenten an jedem Punkt:  $t(x) = \tau + p x$  (Abb. 2.59). Somit liegt der Unterschied zur Radon-Transformation nur in der Form der Geradengleichung für die Strecke von R nach S, die bei der  $\tau$ - $p$ -Transformation durch den Zeitachsenabschnitt  $\tau$  und die Steigung der Laufzeitkurve, den Strahlparameter  $p$ , ausgedrückt wird:

$$g(x, y) \leftrightarrow G(\tau, p) = \int_R^S \int_R^S g(x, y) \delta(y - \tau - px) dx dy. \quad (2.134)$$

Durch die  $\tau$ - $p$ -Transformation werden Reflexionshyperbeln bzw. die Geraden der direkten und geführten Wellen im Laufzeitdiagramm auf Ellipsen bzw. Punkte im  $\tau$ - $p$ -Diagramm abgebildet. Man erkennt dies anhand der folgenden Betrachtung:

Eine ebene Welle breite sich in einem homogenen Medium mit der Geschwindigkeit  $v$  in einer Richtung aus, die durch den Strahlwinkel  $i$  zur Vertikalen bestimmt ist. In einem Zeitintervall  $\Delta t$  legt sie die Strecke  $v \cdot \Delta t$  zurück mit den horizontalen und vertikalen Komponenten  $\Delta x = v \cdot \Delta t \sin(i)$  und  $\Delta z = v \cdot \Delta t \cos(i)$ . Die zugehörige Laufzeit ist  $\Delta t = p \cdot \Delta x + q \cdot \Delta z$ , wobei  $p = \sin(i)/v$  (der Strahlparameter) und  $q = \cos(i)/v$  die horizontalen und vertikalen Komponenten der reziproken Geschwindigkeit  $u = 1/v = \sqrt{p^2 + q^2}$  sind. Im Falle von  $N$  horizontalen Schichten wird die Gesamlaufzeit  $t(x)$  in der horizontalen Entfernung  $x$  (die Summe der Laufzeiten  $\Delta t_j$  durch alle  $N$  Schichten der Mächtigkeit  $z_j$ ) durch eine lineare Gleichung ausgedrückt:

$$\sum_{j=1}^N \Delta t_j = t(x) = px + 2 \overbrace{\sum_{j=1}^N q_j z_j}^{\tau}.$$

Diese wird durch die Steigung  $p$  und dem Zeitachsenabschnitt  $\tau$  beschrieben:

$$\tau = 2 \sum_{j=1}^N q_j z_j = t(x) - px.$$

Weil der Strahlparameter im Fall horizontaler Schichtung eine Konstante ist, kann hierbei die Summe über die horizontalen Weginkremente  $\Delta x_j$  durch den Gesamtweg  $x$  ersetzt werden.

Mit der Vertikalkomponente  $u_j$  der reziproken Geschwindigkeit in der Schicht  $j$ :

$$q_j = \sqrt{u_j^2 - p^2}$$

ist deren Beitrag  $\Delta \tau_j$  zum Zeitachsenabschnitt:

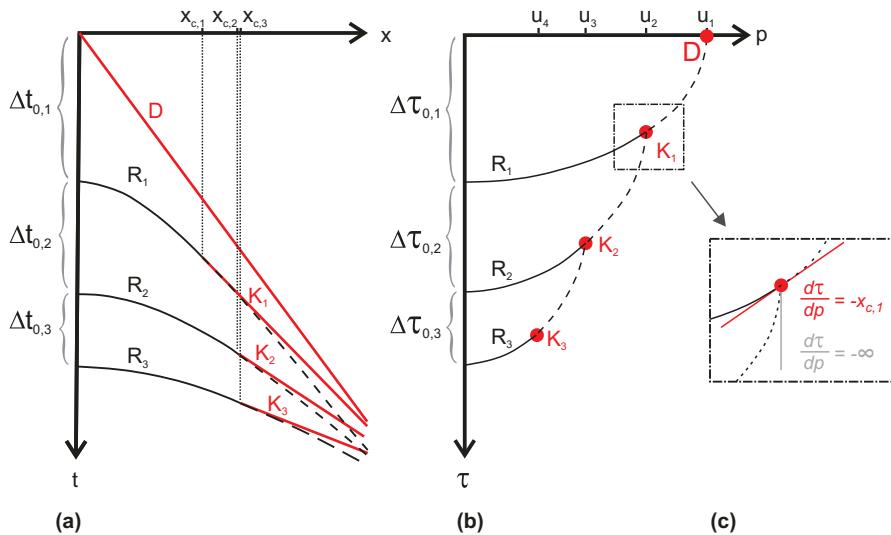
$$\Delta \tau_j = 2z_j \sqrt{u_j^2 - p^2}.$$

Umformen ergibt:

$$\frac{\Delta \tau_j^2}{(2z_j u_j)^2} + \frac{p^2}{u_j^2} = 1,$$

die Gleichung einer Ellipse mit großer und kleiner Halbachse  $\Delta \tau_{0,j} = 2 z_j \cdot u_j$  bzw.  $u_j$ , der Lotzeit bzw. reziproken Geschwindigkeit der Schicht  $j$ . Für  $N$  Schichten addieren sich die Beiträge der jeweiligen Ellipsen abschnittsweise.

[Abb. 2.60a](#) zeigt als Beispiel ein synthetisches Laufzeitdiagramm und [Abb. 2.60b](#) das zugehörige  $\tau$ - $p$ -Diagramm für einen dreifach horizontal geschichteten Untergrund. Die Reflexionen werden als Ellipsenbögen abgebildet, die direkte und die Kopfwellen als Punkte. Letztere liegen an den Schnittpunkten der Ellipsenbögen, wo sowohl kritische Reflexion erfolgt als auch die asymptotische Annäherung von Reflexions- und Kopfwelleneinsätzen im Unendlichen (siehe [Abb. 2.60c](#)).



**Abb. 2.60** (a) Laufzeitdiagramm mit Reflexion und Refraktion in einem dreifach horizontal geschichteten Untergrund mit reziproken Geschwindigkeiten  $u_j$  und Lotzeiten  $\Delta t_{0,j}$ .  $R_j$  bezeichnet die Einsätze der Reflexionen (in Rot jenseits der kritischen Entfernung  $x_{c,j}$ ),  $K_j$  jene der geführten Kopfwellen und D die der direkten Welle. (b) Mittels Legendre-Transformation in den  $\tau$ - $p$ -Bereich transformierte Laufzeitkurve aus Teilbild (a) – unter- und überkritische Reflexionen: durchgezogene bzw. gestrichelte Linien; direkte und Kopfwellen: rote Punkte. (c) Ausschnitt aus Teilbild (b) in der Umgebung des kritischen Punkts für die erste Kopfwelle

Die  $\tau$ -Achsenabschnitte  $\Delta\tau_{0,j}$  bei  $p = 0$  in Abb. 2.60b sind identisch mit den Lotzeiten  $\Delta t_{0,j}$  in Abb. 2.60a. In Abb. 2.60c ist die Steigung der Reflexion  $R_1$  am kritischen Punkt  $K_1$  gleich der negativen kritischen Entfernung  $-x_{c,1}$  in Abb. 2.60a. In Annäherung an diesen Punkt strebt die Steigung der Reflexion  $R_2$  gegen minus unendlich, im selben Maß, wie sich die Laufzeitkurve der Reflexion  $R_2$  in Abb. 2.60a asymptotisch jener der ersten Kopfwelle  $K_1$  annähert.

Wegen  $d\tau/dp = -x$  kann man aus der Steigung im  $\tau$ - $p$ -Diagramm die Auslagen bestimmen, bei denen bestimmte Wellen an der Oberfläche registriert werden: In Abb. 2.60c hat die Steigung von  $R_1$  (der Signatur der kritischen Reflexion von der ersten Schicht im  $\tau$ - $p$ -Diagramm) den Wert  $-x_{c,1}$ , was der kritischen Entfernung für das Auftreten der geführten Welle entspricht. Dagegen strebt die Steigung von  $R_2$  (der Signatur der Reflexion von der zweiten Schicht) gegen minus unendlich. Dies bringt zum Ausdruck, dass im Laufzeitdiagramm die Hyperbel der zweiten Reflexion asymptotisch gegen die Gerade der an der darüberliegenden Schichtgrenze ersten geführten Welle strebt. Somit markieren diese beiden Steigungen den Bereich an der Oberfläche, in dem die geführte Welle beobachtet werden kann, deren Einsätze im  $\tau$ - $p$ -Diagramm auf einen Punkt abgebildet werden. Für den Fall ebener Schichtung bilden die überkritisch reflektierten Einsätze im  $\tau$ - $p$ -Diagramm (im Gegensatz zum Laufzeitdiagramm) eine einzige stetige Kurve (gestrichelt in Abb. 2.60b) im Bereich  $u_{\min} \leq p \leq u_{\max}$  und  $\tau(u_{\min}) \geq \tau \geq 0$ . Somit ermöglicht

das  $\tau$ - $p$ -Diagramm eine andere Sicht auf die Laufzeitdaten, die bestimmte Charakteristika besser erkennbar machen. Auf diese Weise sind z. B. alle geführten Wellen im  $\tau$ - $p$ -Diagramm erkennbar, ob sie nun als Ersteinsätze auftreten oder nicht.

### 2.4.2.3 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) und Z-Transformation

Geophysikalische, und speziell seismische Beobachtungsdaten sind heute in der Regel Reihen digitaler, in diskreten Intervallen abgetasteter, kontinuierlicher Funktionen der Zeit oder des Ortes. Seismogramme sind (nach der Analog-Digitalwandlung) im Beobachtungsintervall  $T$  abgetastete Zeitreihen mit der zugehörigen Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ . Magnetische oder Schweredaten sind dagegen im Beobachtungsintervall  $\Lambda$  abgetastete Ortsreihen mit der zugehörigen Wellenzahl  $k = 2\pi/\Lambda$ . Die Daten sind daher nur an diskreten Abtastpunkten (*sampling points*) bekannt. Dies wird im Gegensatz zur Schreibweise  $g(t)$  für kontinuierliche Daten durch  $g_t$  für diskrete Datenreihen ausgedrückt.

Diskrete Daten treten immer im Zusammenhang mit digitaler Datenverarbeitung auf. Beispiele sind digitalisierte Seismogramme oder in festen Zeitintervallen aufgezeichnete digitale Seismogramme, aber auch Feldmessungen, z. B. der Schwere oder des Magnetfelds, in bestimmten räumlichen Abständen. Das Abtasten einer kontinuierlichen Funktion erfolgt durch eine Kombination von Einheitsimpulsen bzw. Dirac-Deltas  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.135)$$

Entsprechend Gl. 2.135 ist  $\delta(t-n) = 1$  für  $t = n$  und null für alle anderen Argumente. Zum Abtasten bzw. Digitalisieren einer kontinuierlichen Funktion wird nun ein Abtastkamm aus einer unendlichen Reihe solcher Dirac-Deltas aufgebaut:

$$\text{Kamm}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n). \quad (2.136)$$

Damit ist die abgetastete, diskrete Funktion  $g_t$ :

$$g_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-n). \quad (2.137)$$

Anstatt als Summe zeitversetzter Stichproben kann  $g_t$  auch als unendlicher Zahlenvektor  $(\dots, g_{-3}, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, g_3, \dots)^T$  aufgefasst werden. Für kausale Funktionen, die Wirkungen auf zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingetretene Ursachen beschreiben, gilt  $(\dots, g_{-3}, g_{-2}, g_{-1})^T = 0$ .

Die Fourier-Transformierte von  $\delta(t)$  ist nach Gl. 2.120:

$$\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1. \quad (2.138)$$

Ist die Abtastrate  $\Delta t$ , so gilt entsprechend:

$$\delta(t - n\Delta t) \leftrightarrow e^{-i\omega n\Delta t}. \quad (2.139)$$

Damit folgt für  $g_t$  mit  $z = e^{-i\omega\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} g_t &\leftrightarrow g_0 + g_1 e^{-i\omega\Delta t} + g_2 e^{-i\omega 2\Delta t} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-i\omega n\Delta t} \\ &\leftrightarrow g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = G(z). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Die Koeffizienten der Potenzreihe in  $z$  sind also die Elemente der Zeitreihe  $g_t$ .  $G(z)$  wird die Z-Transformierte von  $g_t$  genannt. Somit sind  $g_t$  und  $G(z)$  für diskrete Reihen das Transformationspaar, welches dem Paar  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$  für stetige Funktionen entspricht. Hierbei bedeuten die Potenzen in  $z$  in der Polynomdarstellung von Gl. 2.140, dass die Werte  $g_t$  jeweils um  $\Delta t$  gegeneinander zeitverzögert sind;  $z$  wird deshalb auch (Einheits-)Verzögerungsoperator (*unit delay operator*) genannt. Die Berechnung der Z-Transformierten ist im Vergleich zur Berechnung einer Fourier-Transformierten nahezu trivial und reduziert sich auf die Summenbildung der Produkte aus  $g_t$  mit den entsprechenden Potenzen von  $z = e^{-i\omega\Delta t}$ . Wenn  $\omega\Delta t = 2\pi\Delta t/T$  von 0 bis  $2\pi$  variiert ( $0 \leq \Delta t \leq T$ ), dann wandert  $z = e^{-i\omega\Delta t} = \cos(\omega\Delta t) - i \sin(\omega\Delta t)$  einmal im Uhrzeigersinn um den Einheitskreis (Abb. 2.57). In der Bearbeitung digitaler Zeitreihen kann  $n$  in Gl. 2.140 sehr große Werte annehmen. Somit muss  $G(z)$  für einen großen Bereich von  $z$ - (also  $\omega$ -)Werten berechnet werden. Die Berechnung nach Gl. 2.140 wird dann langwierig und ineffektiv. Stattdessen benutzt man den schnellen FFT-(*Fast Fourier Transform*-)Algorithmus zur Fourier-Transformation in den Frequenzbereich, welcher für  $n > 10^3$  den Aufwand um einen Faktor von mehr als Einhundert verringert (vgl. Abschn. 2.4.2.4).

Die Fourier-Transformierte einer im Intervall  $0 \leq t \leq T$  aufgezeichneten Funktion  $g(t)$  lautet nach Gl. 2.120:

$$G(\omega) = \int_0^T g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.141)$$

Wird  $g(t)$  im Intervall  $0 \leq t \leq T$  im Abstand  $\Delta t$  an  $N$  Punkten abgetastet, so geht das Integral in Gl. 2.142 in eine Summe über:

$$G(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\omega k \Delta t} = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g_k z^k, \quad (2.142)$$

wobei  $g_k = g(k\Delta t)$  der Abtastwert zum Zeitpunkt  $t = k\Delta t$  ist und  $z = e^{-i\omega\Delta t}$ . Somit kann die diskrete Fourier-Transformierte durch die Z-Transformierte ausgedrückt werden. Wird  $G(\omega)$  ebenfalls für  $N$  diskrete Werte  $\omega_n = n\Delta\omega$  der Kreisfrequenz  $\omega$  berechnet ( $0 \leq n \leq N-1$ ),  $\Delta\omega$  also so gewählt, dass  $\Delta\omega = 2\pi/T = 2\pi/(N\Delta t)$  ist, dann gilt mit  $W = e^{-i2\pi/N}$ :

$$G(n\Delta\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g_k W^{kn} = G_n, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.143)$$

Die Wahl von  $N$  diskreten Werten stellt hierbei keine Einschränkung der Allgemeinheit dar – die Transformierte  $G$  könnte auch für  $M \neq N$  Frequenzen berechnet werden. Die Wahl  $N$  hat jedoch den Vorteil, dass die resultierenden Matrizen quadratisch sind.

#### 2.4.2.4 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Die schnelle Fourier-Transformation kann auf verschiedene Arten eingeführt werden – die Nachstehende folgt der Darstellung in Clearbou (1985). Die diskrete Fourier-Transformation in der Form von Gl. 2.143 kann auch in Form eines Matrix-Vektor-Produkts geschrieben werden. Für  $N = 4$  ergibt dies:

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}. \quad (2.144)$$

Die quadratische Matrix in Gl. 2.144 besitzt eine Inverse (vgl. Abschn. 4.5 im Anhang). Mit dieser lautet das zugehörige Matrix-Vektor-Produkt der inversen diskreten Fourier-Transformation:

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

Da  $W^{-1}$  die Konjugierte der komplexen Zahl  $W$  ist<sup>17</sup>, sind auch die beiden Matrizen in Gl. 2.144 und Gl. 2.145 zueinander konjugiert.

Die Auswertung der entsprechenden Matrix-Vektor-Produkte erfordert jeweils  $N^2$  Multiplikationen und Additionen. Durch Ausnutzen von Symmetrien und geschickte Umsortierung der Rechenoperationen erreicht die schnelle Fourier-Transformation (FFT) eine bedeutende Reduzierung dieses Aufwands, vorausgesetzt  $N = 2^\ell$  für ganzzahliges  $\ell$ . Dies ermöglicht die sukzessive Aufspaltung der ursprünglichen Reihe in Teilreihen der halben Länge mit geraden bzw. ungeraden Indices. Dies wird so lange wiederholt, bis man  $N$  eingliedrige Reihen erhält (*decimation in time*-Algorithmus). Diese sind identisch mit ihrer DFT (ggf. bis auf einen Faktor  $\Delta t$ , wenn die Grundeinheit der Zeit nicht gleich eins ist, also mit:  $X_n = \Delta t x_n e^{-i0}$ ). Aus ihnen berechnet man dann die DFT der zweigliedrigen Reihen, hieraus die DFT der viergliedrigen Reihen usw. bis zur DFT der ursprünglichen Reihe. Ein Beispiel für  $N = 8$  veranschaulicht diesen als Verdoppelung (*doubling*) bezeichneten Prozess:

<sup>17</sup>Entsprechend der eulerschen Formel<sup>6</sup> gilt:  $\operatorname{Re}(W^{-1}) = \operatorname{Re}(W)$  und  $\operatorname{Im}(W^{-1}) = -\operatorname{Im}(W)$

$$\begin{aligned}
& \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7\} \\
& = \{g_0, g_2, g_4, g_6\} + \{g_1, g_3, g_5, g_7\} \\
& = \{g_0, g_4\} + \{g_2, g_6\} + \{g_1, g_5\} + \{g_3, g_7\} \\
& = \{g_0\} + \{g_4\} + \{g_2\} + \{g_6\} + \{g_1\} + \{g_5\} + \{g_3\} + \{g_7\}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen  $X_n$  und  $Y_n$  die DFT der beiden Reihen der halben Länge der ursprünglichen Reihe  $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{g_0, g_2, g_4, g_6\}$  und  $y = \{y_0, y_1, y_2, y_3\} = \{g_1, g_3, g_5, g_7\}$ , so gilt mit  $V = W^{1/2} = e^{-i\pi/N}$  und  $V^N = e^{-i\pi} = \cos(\pi) - i \sin(\pi) = -1 - 0 = -1$ :

$$X_n = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x_k V^{2kn}; \quad Y_n = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} y_k V^{2kn}; \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.146)$$

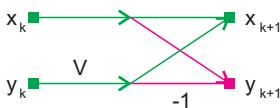
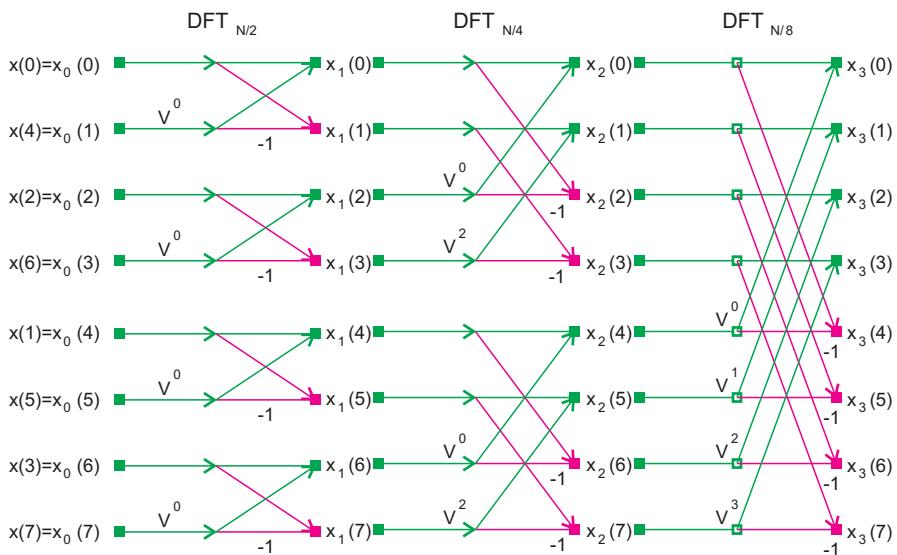
Definitionsgemäß ist die Transformierte der zusammengesetzten Reihe,  $z = \{x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}$

$$Z_n = \Delta t \sum_{k=0}^{2N-1} z_k V^{kn} \quad 0 \leq n \leq 2N-1. \quad (2.147)$$

$Z_n$  wird nun aus  $X_n$  und  $Y_n$  mit Hilfe zweier Gleichungen für die erste und die zweite Hälfte der Reihe  $z_k$  berechnet, wobei die  $x_k$  mit geraden Potenzen von  $V$  multipliziert werden und die  $y_k$  mit ungeraden ( $V^n V^{2kn} = V^{2kn+n} = V^{(2k+1)n}$ ): Daher röhrt der Faktor  $V^n$  vor dem zweiten Summanden auf der rechten Seite von Gl. 2.148):

$$\begin{aligned}
\underline{0 \leq n \leq N-1 :} & \left\{ \begin{array}{l} Z_n = \Delta t \sum_{k=0}^{2N-1} z_k V^{kn} \\ = \Delta t \left( \sum_{k=0}^{N-1} x_k V^{2kn} + V^n \sum_{k=0}^{N-1} y_k V^{2kn} \right) \quad 0 \leq n \leq N-1. \\ = X_n + V^n Y_n \end{array} \right. \\
& \hspace{10em} (2.148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{N \leq n \leq 2N-1 :} & \left\{ \begin{array}{ll} Z_n = \Delta t \sum_{k=0}^{2N-1} z_k V^{kn} & N \leq n \leq 2N-1 \\ = \Delta t \sum_{k=0}^{2N-1} z_k V^{k(m+N)} & 0 \leq n - N = m \leq N-1 \\ = \Delta t \sum_{k=0}^{2N-1} z_k V^{km} (V^N)^k & \\ = \Delta t \sum_{k=0}^{2N-1} z_k V^{km} (-1)^k & \\ = \Delta t \left( \sum_{k=0}^{N-1} x_k V^{2km} - V^m \sum_{k=0}^{N-1} y_k V^{2km} \right) & \\ = X_m - V^m Y_m = X_{n-N} - V^{n-N} Y_{n-N}. & \end{array} \right. \\
& \hspace{10em} (2.149)
\end{aligned}$$

(a)  $N = 2 = 2^1$ (b)  $N = 8 = 2^3$ 

**Abb. 2.61** Diskrete Fourier-Transformation (DFT); (a) Schmetterlings-Operation; (b) Acht-Punkte-DFT mit Schmetterlings-Operation (nach Oppenheim und Schafer 1975)

Die Addition bzw. Subtraktion von  $V^n Y_n$  (bzw.  $V^m Y_m$ ) von  $X_n$  (bzw.  $X_m$ ) wird als Schmetterlings-Operation (*butterfly operation*) bezeichnet. In analoger Weise werden die Transformierten der Teilreihen  $x_t$  und  $y_t$  berechnet usw., bis man auf der Ebene der eingliedrigen Reihen angelangt ist (Abb. 2.61). In Buttkus (2000) werden diese Berechnungen für  $N = 8$  jeweils explizit für alle drei Verdopplungsschritte angegeben. Man erkennt daran leicht, dass der erforderliche Rechenaufwand für eine DFT mit Hilfe der FFT von  $N^2$  auf  $N \cdot \log_2(N)$  vermindert wird, wenn  $N$  eine (positive) ganzzahlige Potenz von Zwei ist. Für eine Reihe von  $N = 1024 = 2^{10}$  Elementen bedeutete dies beispielsweise eine Verringerung des Rechenaufwands um einen Faktor von mehr als einhundert:  $N^2/(N \cdot \log_2(N)) = N/\log_2(N) = 102,4$ .

#### 2.4.2.5 Konvolution und Superposition

Das Prinzip der Konvolution lässt sich auf verschiedene Arten erläutern – die Nachstehende folgt der Darstellung in Parasnis (1997). Eine digitale seismische Spur

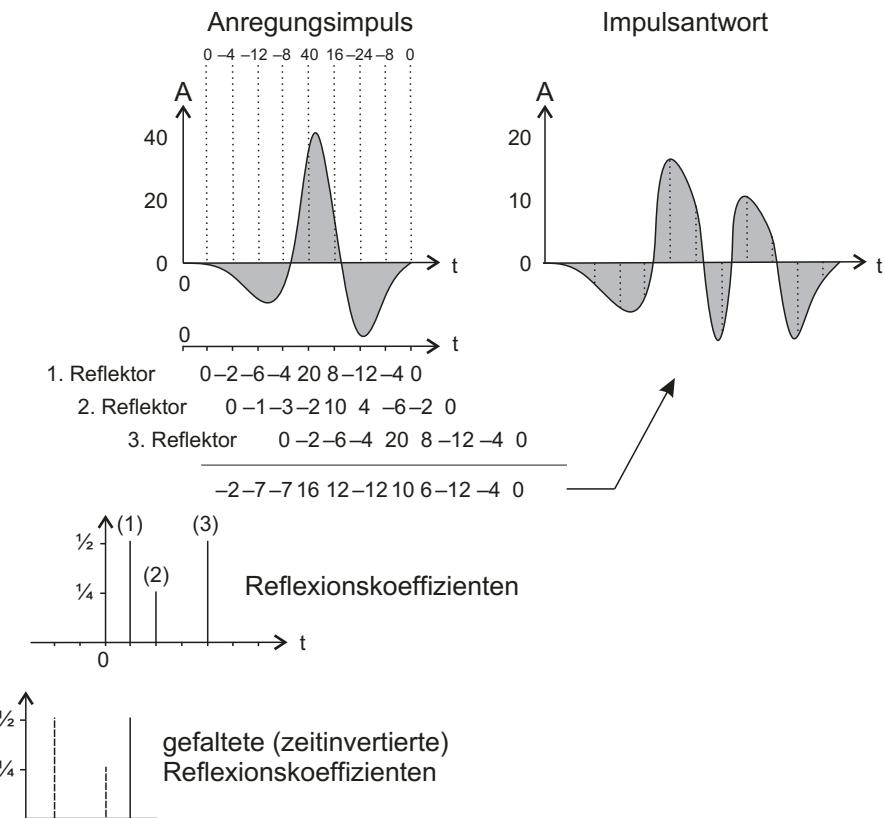


Abb. 2.62 Zur Äquivalenz von Superposition und Konvolution (nach Parasnis 1997)

kann als eine Folge von Linienimpulsen aufgefasst werden, die in einheitlichen Abständen aufeinanderfolgen (Abb. 2.62). Wird diese Folge von einer spiegelnden Schichtgrenze ( $R = 1$ ) reflektiert, so ist die resultierende Bodenruhe eine exakte Kopie dieser Impulsfolge. Hierbei wird angenommen, dass der Untergrund ein lineares Medium ist und die Form der Impulsfolge bei ihrer Ausbreitung nicht verändert wird. Weist die Schichtgrenze jedoch nur einen Reflexionskoeffizienten von 0,5 auf, so ist die Amplitude der reflektierten Impulsfolge auch nur halb so groß wie jene der ursprünglichen. Beträgt die Länge der Zweiweglaufzeit zum Reflektor gerade einen Zeitschritt, so ist diese Reflexionsfolge um genau einen Zeitabschnitt gegenüber der ursprünglichen verschoben. Entsprechend wird die Impulsantwort eines weiteren Reflektors, dessen Zweiweglaufzeit zum darüberliegenden zwei Zeitschritte beträgt, um zwei Zeitschritte gegenüber der Impulsantwort des ersten Reflektors verschoben sein. Das Gesamtsignal ist somit die Überlagerung der (zeitversetzten) Impulsantworten aller Reflektoren. Ein Beispiel hierfür zeigt Abb. 2.62.

Genau dasselbe Ergebnis erhält man, wenn statt der Superposition das folgende Vorgehen gewählt wird: Die Folge der Reflexionskoeffizienten aller drei Schichten wird bzgl. der Zeit  $t = 0$  gespiegelt und in diskreten Schritten von einer Zeiteinheit an der ursprünglichen Impulsfolge entlangbewegt. Diese Operation wird als Faltung bzw. Konvolution bezeichnet. Für jede solche Position wird die Summe der Produkte berechnet, die sich aus der Multiplikation der Amplituden der Impulsfolge mit den drei gespiegelten Reflexionskoeffizienten ergibt, die mit den jeweiligen Zeitschritten korrespondieren. Das Ergebnis dieser Konvolution der Impulsfolge mit der Folge der Reflexionskoeffizienten ist völlig identisch mit dem der oben beschriebenen Superposition. Somit wird der Charakter einer seismischen Spur, neben Multiplen, Beugungen und Veränderungen des Anregungsimpulses (*wavelet*) während seiner Ausbreitung, im Wesentlichen durch seine Konvolution mit der Folge der  $n$  verschiedenen Reflexionskoeffizienten bestimmt.

Mathematisch lässt sich die Konvolution gleichabständiger Folgen wie folgt beschreiben: Seien  $a = (R_0, R_1, R_2, \dots)$  die Folge der Reflexionskoeffizienten und  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  die Impulsfolge. Dann lautet das  $\tau$ -te Element der Ergebnisfolge  $y$ :

$$y_\tau = \sum_{m=0}^{\tau} x_m a_{\tau-m}. \quad (2.150)$$

Die Konvolution von  $x$  mit  $a$  wird symbolisch durch  $x * a$  bezeichnet. Die Faltungsoperation ist kommutativ, d. h., es gilt:

$$y_\tau = x_\tau * a_\tau = a_\tau * x_\tau. \quad (2.151)$$

Für die Anwendung von Gl. 2.150 ist es wichtig, dass die Intervallgrößen der beiden Folgen  $a$  und  $x$  gleich groß und konstant sind. Abb. 2.62 zeigt ein Beispiel, wo dies durch Einfügen einer Null zwischen den Reflexionskoeffizienten der zweiten und dritten Schicht erreicht wird.

Für stetige Funktionen lautet die zu Gl. 2.150 analoge Formulierung für die Konvolution zweier Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ :

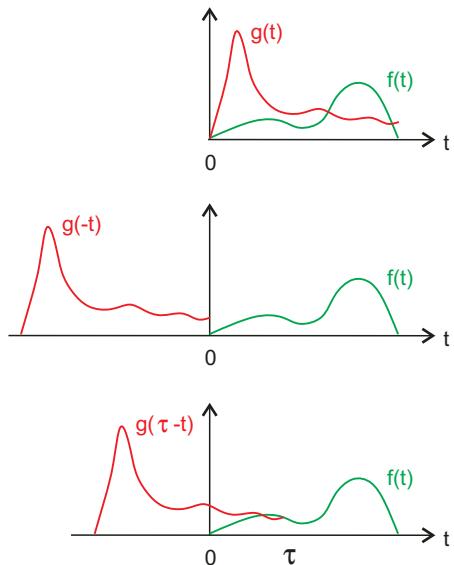
$$f(\tau) * g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\tau - t) dt. \quad (2.152)$$

Die Abb. 2.63 illustriert das der Gl. 2.152 zugrunde liegende Prinzip der Konvolution.

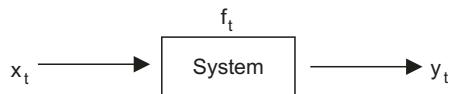
Wenn eine seismische Spur als Ergebnis einer Konvolution der Folge der Anregungsimpulse mit jener der Reflexionskoeffizienten aufgefasst werden kann, was ist dann die Fourier-Transformierte dieser Konvolution? Dies beantwortet der Konvolutionssatz, der besagt, dass eine Konvolution im Zeitbereich dem Produkt der Transformierten im Frequenzbereich entspricht:

$$f(\tau) * g(\tau) \leftrightarrow F(\omega) G(\omega). \quad (2.153)$$

**Abb. 2.63** Prinzip der Konvolution zweier stetiger Funktionen; Oben: die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ ; Mitte: bzgl. der Zeit  $t = 0$  gespiegelte Funktion  $g(-t)$ ; Unten: Lage der zeitinvertierten Funktion  $g(\tau - t)$  bei einer Verschiebung um  $\tau$



**Abb. 2.64** Eingabedaten  $x_t$ , Ergebnis  $y_t$  und Systemantwort  $f_t$



Dies folgt aus:  $f(\tau)^*g(\tau) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t)dt \right\} e^{-i\omega\tau} d\tau$ . Mit  $s = \tau - t$ , also  $ds = d\tau$ , und der bzgl. der Integration konstanten Verschiebung  $\tau$  ergibt dies:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t)dt \right\} e^{-i\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega(s+t)} ds \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s} ds = F(\omega)G(\omega) \end{aligned}$$

Eine entsprechende Darstellung der Konvolution zweidimensionaler Reihen, wie z. B. ortsreferenzierte Schwer- oder Magnetfelddaten, findet sich z. B. bei Telford et al. (1990).

Mit Hilfe des Konvolutionssatzes Gl. 2.153 lässt sich die Beziehung zwischen Eingabedaten  $x_t$  (*input*), Filterfunktion  $f_t$  (System- bzw. Einheitsimpulsantwort) und Ergebnis  $y_t$  (*output*) einfach darstellen (Abb. 2.64): Für ein lineares System sind die Ergebnisdaten  $y(t)$  proportional zu den Eingabedaten  $x(t)$ . Solche Beziehungen werden durch lineare partielle Differenzialgleichungen mit konstanten

**Abb. 2.65** Systemantwort  $f_t$  auf einen Dirac-Einheitsimpuls  $\delta_t$

$$\delta_t \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow f_t = [f_0, f_1, f_2 \dots]$$

Koeffizienten ausgedrückt, deren Ordnung meist zwei nicht übersteigt. Dies ist zumindest bei der seismischen Wellengleichung der Fall. Somit ergibt sich ein System:  $\partial^2 y(t)/\partial t^2 + a_1 \partial y(t)/\partial t + a_2 y(t) = x(t)$ . Mit Hilfe der Fourier-Transformation und des Differenziationssatzes (Gl. 2.130) folgt hieraus:  $(i\omega)^2 Y(\omega) + a_1(i\omega)Y(\omega) + a_2 Y(\omega) = X(\omega) \rightarrow Y(\omega) \underbrace{\{(i\omega)^2 + (i\omega a_1) + a_2\}}_{F^{-1}} = X(\omega)$  und somit:

$$F^{-1}$$

$$Y(\omega) = F(\omega)X(\omega). \quad (2.154)$$

Der Konvolution einer Funktion mit einer Filter- bzw. Übertragungsfunktion im Zeitbereich entspricht also im Frequenzbereich ein Produkt der Transformierten dieser Funktionen. Ist  $x_t = \delta_t$  der Einheitsimpuls, so folgt mit  $\delta_t \leftrightarrow 1$  (Gl. 2.138) aus Gl. 2.154:  $Y(\omega) = F(\omega) \cdot 1$ . Die Systemantwort auf den Einheitsimpuls  $f_t \leftrightarrow F(\omega)$  wird als Einheitsimpulsantwort (*unit impulse response*) bezeichnet. Somit kann man die Übertragungs- bzw. Filterfunktion eines Systems aus seiner Antwort auf einen Einheitsimpuls bestimmen und hieraus das zu jeder beliebigen Eingabe  $x_t$  (Abb. 2.65) gehörende Ergebnis  $y_t$ . Der Konvolutionssatz Gl. 2.153 lässt sich durch die folgende Korrespondenzen darstellen:

$$x_t \leftrightarrow X(f) = |X(f)| e^{i\varphi_X(f)}; \quad f_t \leftrightarrow F(f) = |F(f)| e^{i\varphi_F(f)}; \quad \text{also:} \quad (2.155)$$

$$x_t * f_t \leftrightarrow X(f)F(f) = |X(f)| |F(f)| e^{i\{\varphi_X(f) + \varphi_F(f)\}},$$

wo  $|X(f)|$  bzw.  $|F(f)|$ ,  $\varphi_X(f)$  bzw.  $\varphi_F(f)$  und  $f = 1/\Delta t$  die Amplituden- und Phasenspektren sowie die Frequenz bzw. Abtastrate sind. Somit entspricht die Konvolution zweier Datensätze im Zeitbereich einer Multiplikation der Amplituden- und Addition ihrer Phasenspektren im Frequenzbereich.

#### 2.4.2.6 Wavelet-Transformation

Die Wavelet-Transformation ist eine lineare Zeit-Frequenz- bzw. Orts-Wellenzahl-Transformation für mit der Zeit bzw. dem Ort variierende Beobachtungsreihen. Ihr Beginn geht zurück auf die 1980er-Jahre, doch erfuhr sie vor allem in den 1990er-Jahren eine stürmische Entwicklung. Sie besteht wie die Fourier-Transformation aus einem Analyseschritt, dem Übergang aus dem Zeit- bzw. Ortsbereich in den Spektralbereich, und einem Syntheseschritt, der Rücktransformation der Transformierten aus dem Spektralbereich in den Zeit- bzw. Ortsbereich. Im Unterschied zur Fourier-Transformation ist ihre Transformierte jedoch eine Funktion sowohl der Zeit bzw. des Orts als auch der Frequenz. Sie liefert somit für jede Zeit bzw. jeden Ort das zugehörige Frequenzspektrum. Wie bei der Fourier-Transformation gibt es sowohl kontinuierliche als auch diskrete Varianten der Wavelet-Transformation, ebenso wie eine zur FFT analoge schnelle Variante. Informationen hierzu findet man z. B. bei Mallat (2009) und Radunović (2009). Im Folgenden wird näher auf die kontinuierliche Wavelet-Transformation eingegangen.

Zwei Beispiele sollen den Unterschied zwischen diesen beiden Transformationsarten veranschaulichen: Auf die Zeitreihenanalyse bezogen, also z. B. die Analyse einer Musikpartitur, würde die Fourier-Analyse einem Musiker mitteilen, welche Akkorde in dem Musikstück insgesamt vorkommen. Dagegen sagt ihm eine Wavelet-Analyse, wann bestimmte Akkorde gespielt werden müssen bzw. wo in der Partitur diese stehen. Entsprechend liefert die Wavelet-Transformation eines Seismogramms Informationen über die Variation des Signalspektrums mit der Zeit. Als Beispiele für mit dem Ort variierende Größen soll ein Höhenprofil entlang einer Strecke dienen: Für dieses würde eine Fourier-Analyse das zugehörige Wellenzahlspektrum der gesamten Topografie entlang dieser Strecke ergeben. Dagegen liefert die Wavelet-Analyse ein Wellenzahlspektrum für jeden Ort des Profils. Zwar oszillieren die Wavelet-Basisfunktionen ähnlich wie die harmonischen Funktionen. Im Unterschied zu diesen sind ihre Wellenzahlspektren aber (örtlich oder zeitlich) lokal fokussiert, da ihre Amplituden stark mit der Entfernung von ihrem Zentrum abklingen. Daher ist den als Skalogrammen bezeichneten Waveletspektren eine lokale Umgebung zuordnet.

Die Bezeichnung Wavelet bezieht sich auf die für die Transformation benutzte Basisfunktionen zur Charakterisierung des zu analysierenden Signals: zeitlich bzw. örtlich lokalisierte Wellenzüge endlicher Länge mit verschwindendem Mittelwert. Dies ermöglicht die gleichzeitige Auflösung bzgl. der Zeit ( $\sigma_t$ ) bzw. des Orts ( $\sigma_x$  und ggf.  $\sigma_y$ ) einerseits und der Kreisfrequenz ( $\sigma_\omega$ ) bzw. der Wellenzahl ( $\sigma_\Lambda$ ) andererseits. Diese sind jedoch nicht unabhängig voneinander, sondern durch die (heisenbergsche) Unschärferelation der Signalverarbeitung verknüpft:

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \text{ bzw. } \sigma_x \cdot \sigma_\Lambda \geq \frac{1}{2}. \quad (2.156)$$

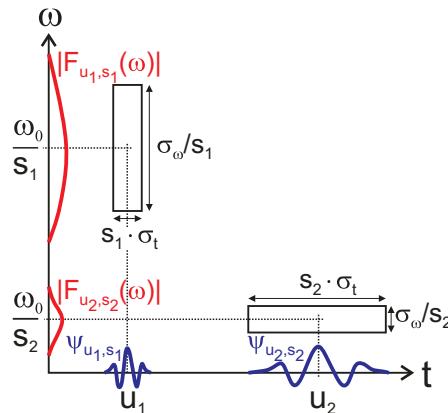
Daher ist die Auflösung der Frequenz bzw. der Wellenzahl umso niedriger, je höher die erforderliche zeitliche bzw. örtliche Auflösung ist und umgekehrt (Abb. 2.66).

Die Wavelet-Transformation erlaubt die Untersuchung von Signalstrukturen sehr unterschiedlicher Dimension, indem sie das Signal aus skalierten und verschenbenen Wavelets zusammensetzt. Dies erfolgt analog zur Fourier-Transformation, welche Signale aus einer Überlagerung harmonischer Funktionen approximiert, deren Frequenzen Obertöne einer Grundfrequenz sind.

Ein Wavelet ist eine komplexe oder reelle Funktion  $\psi$  einer oder mehrerer Veränderlicher. Im Weiteren folgen wir Mallat (2009) und betrachten den eindimensionalen Fall der Zeitreihenanalyse. Der äquivalente Fall der Analyse einer mit dem Ort variierenden Beobachtungsreihe ergibt sich durch einfaches Ersetzen der Zeit  $t$  durch den Ort  $x$  sowie der Kreisfrequenz  $\omega$  durch die Wellenzahl  $\Lambda$ .

Der Mittelwert des Wavelets  $\psi$  soll verschwinden und seine Energie beschränkt sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \text{ und } \|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \bar{\psi}(t) dt = 1. \quad (2.157)$$



**Abb. 2.66** Heisenbergsches Zeit-Frequenzfenster zweier Wavelets  $\psi_{u_1, s_1}$  und  $\psi_{u_2, s_2}$  und ihrer Transformierten  $F_{u_1, s_1}$  und  $F_{u_2, s_2}$ . Dem kleinen Skalierungsfaktor  $s_1$  entspricht eine hohe Auflösung der Zeit bei kleiner Verschiebung  $u_1$  sowie eine geringe Auflösung der Frequenz bei hohen Frequenzen. Dagegen entspricht dem großen Skalierungsfaktor  $s_2$  eine geringe Auflösung der Zeit bei großer Verschiebung  $u_2$  sowie eine hohe Auflösung der Frequenz bei kleinen Frequenzen (nach Mallat 2009)

Hierbei bezeichnet  $\bar{\psi}(t)$  die komplexe Konjugierte von  $\psi(t)$ . Daher ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t)dt$  die Energie eines reellen Wavelets. Aus dem Mutterwavelet wird nun eine orthonormale Basis von Wavelets  $\psi_i$  erstellt:

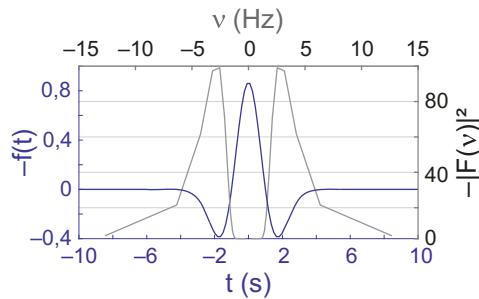
$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i \bar{\psi}_j dt = \delta_{i,j},$$

wobei die spitzen Klammern das innere Produkt bezeichnen, in diesem Fall die Integration des Produkts der beiden Wavelets;  $\delta_{i,j}$  ist das Kronecker-Delta, das für  $i = j$  den Wert 1 annimmt und für alle  $i \neq j$  gleich null ist. Die Wavelet-Basisfunktionen  $\psi_{u,s}(t)$  erhält man aus einer Verschiebung (*translation*) des Mutter-Wavelets um den (reellen) Betrag  $u$  und seine Skalierung (*scaling* bzw. *dilation*) mit dem (reellen und positiven) Faktor  $s$ . Verschiebung  $u$  und Skalierung  $s$  bestimmen die Verschiebung und Länge der Fensterfunktion des jeweiligen Wavelets. Hierbei gibt die Verschiebung  $u$  an, bei welchem Wert von  $t$  das Wavelet das Frequenz- bzw. Wellenzahlspektrum analysiert; die Skalierung  $s$  bestimmt, in welchem Frequenz- bzw. Wellenzahlfenster dies erfolgt:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t-u}{s} \right). \quad (2.158)$$

Zwischen Verschiebung  $u$ , Skalierung  $s$  und Frequenz  $\omega$  (bzw. Wellenzahl  $k$ ) besteht dabei der folgende Zusammenhang: Eine kleine Verschiebung  $u_1$  entspricht einem komprimierten Wavelet, welches rasch veränderliche, hochfrequente Details auflöst. Dagegen entspricht eine große Verschiebung  $u_2$  einem gedehnten Wavelet, welches

**Abb. 2.67** Ricker- bzw. Sombrero-Wavelet  $f(t)$  und seine Fourier-Transformierte  $F(v)$  für eine Standardabweichung  $\sigma = 1$ . Dargestellt sind jeweils  $-f(t)$  in Blau und  $-F(v)$  in Grau



langsam veränderliche, niederfrequente Details auflöst. Die Breite der Fenster und damit die jeweilige Auflösung bzgl. Zeit bzw. Frequenz ist jeweils proportional zu  $s$  bzw.  $1/s$ .

Es gibt eine Vielzahl von Mutterwavelets, von denen viele nach den jeweiligen Forschern benannt sind, wie z. B. nach dem französischen Geophysiker Jean Morlet (1931–2007), der belgischen Mathematiker Ingrid Daubechies (\*1954) und dem ungarischen Mathematiker Alfréd Haar (1899–1933). Die Abb. 2.67 zeigt als Beispiel das nach dem US-amerikanischen Geophysiker Norman H. Ricker (1885–1980) benannte Wavelet, das wegen seiner Form auch als Sombrero-(Mexican hat)-Wavelet bezeichnet wird. Es berechnet sich aus der negativen zweiten Ableitung der gaußschen Normalverteilung

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit Standardabweichung  $\sigma$  und verschwindendem Mittelwert  $\mu$  (siehe z. B. Chun-Lin 2010). Seine Fourier-Transformierte lässt gut den Bandpass-Charakter des Wavelets erkennen (Abb. 2.67).

Zweidimensionale Wavelet-Basisfunktionen erhält man entsprechend mit Hilfe von Verschiebungen  $u_x$  und  $u_y$  in die jeweiligen Koordinatenrichtungen:

$$\psi_{u_x, u_y, s}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u_x}{s}, \frac{y-u_y}{s}\right). \quad (2.159)$$

Schließlich wird die kontinuierliche Wavelet-Transformation  $F(u, s)$  der Funktion  $f(t)$  definiert als das innere Produkt aus der zu analysierenden Zeit- bzw. Ortsfunktion  $f(t)$  und dem Wavelet  $\psi_{u, s}(t)$ :

$$F(u, s) = \langle f(t), \psi_{u, s}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{u, s}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = f(t)^* \psi_s(t), \quad (2.160)$$

wo  $\psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi}\left(\frac{t}{s}\right)$  ist. Die Gl. 2.160 beschreibt eine Konvolution der Funktion  $f(t)$  mit dem Wavelet  $\psi_{u, s}(t)$  bzw. die Filterung von  $f(t)$  mit  $\psi_s(t)$ , wobei der Filter um  $u$

zentriert ist und seine effektive Breite dem Wavelet-Skalierungsfaktor  $s$  entspricht. Mit Hilfe dieser Transformation, einer Konvolution von  $f(t)$  mit  $\psi_s(t)$ , kann das Signal  $f(t)$  nach den Koeffizienten  $\psi_{u,s}(t)$  entwickelt und damit eine spezielle Frequenz bzw. Wellenzahl (Parameter  $s$ ) einem bestimmten Zeitpunkt bzw. Ort (Parameter  $u$ ) zugeordnet werden.

Alternativ kann die kontinuierliche Wavelet-Transformation aber auch als Frequenzfilterung des zu analysierenden Signals  $f(t)$  auffassen. Hierfür wird die Transformierte  $F(u,s)$  zunächst als inverse Fourier-Transformation des Produkts der Fourier-Transformierten  $F(\omega)$  und  $\Psi(\omega)$  der Funktion  $f(t)$  bzw. des Wavelets  $\psi(t)$  dargestellt:

$$F(u, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sqrt{s} \bar{\Psi}(s\omega) e^{i\omega u} d\omega. \quad (2.161)$$

Da die Zeitvariable in der inversen Fourier-Transformation (Gl. 2.161) die Verschiebung  $u$  ist, legt dies nahe, die kontinuierliche Wavelet-Transformation mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation zu berechnen. Hierzu eignen sich insbesondere die effektiven Algorithmen der diskreten bzw. schnellen Fourier-Transformation, DFT bzw. FFT. Denn wie die Fourier-Transformation kann die Wavelet-Transformation neben kontinuierlichen Funktionen auch auf diskrete Reihen angewendet werden. Dabei wird das Bilden des inneren Produkts des Signals mit jedem Wavelet durch das sukzessive Zerteilen des Signals in Frequenzbänder ersetzt. Dies reduziert den erforderlichen Rechenaufwand für die Wavelet-Transformation einer Reihe der Länge  $N$  von der Ordnung  $N \cdot \log_2(N)$  auf die Ordnung  $N$  (Mallat 2009).

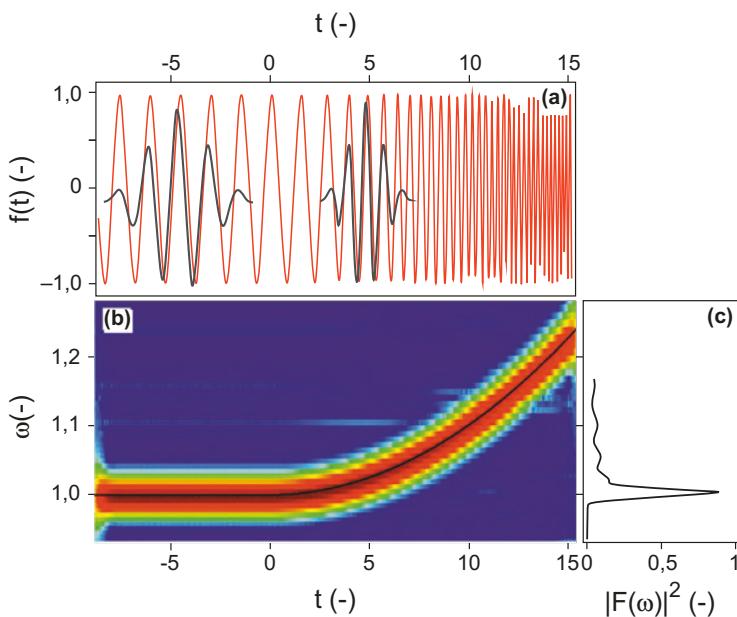
Wie oben erläutert, verschiebt die Skalierung eines Wavelets mit wachsenden Werten des Faktors  $s$  sein Frequenzspektrum und seine Mittelfrequenz  $\omega_0$  zu niedrigeren Werten. Dies veranschaulicht den Bandpasscharakter der kontinuierlichen Wavelet-Transformation: Die zu kleinen Werten des Skalierungsfaktors gehörenden Wavelet-Koeffizienten beschreiben die hochfrequente Energie im Signal, die zu größeren Werten gehörenden Koeffizienten dagegen die niederfrequente. Dabei verhält sich die Breite des Passbands umgekehrt proportional zum Skalierungsfaktor  $s$  und nimmt mit wachsendem  $s$  ab (Abb. 2.66). Auch dies ist eine Konsequenz der Unschärferelation (Gl. 2.156): Je breiter das Zeitfenster ist, desto schmäler wird das Frequenzfenster (und umgekehrt).

Die inverse Wavelet-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty F(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \right] \frac{ds}{s^2}, \text{ mit :} \quad (2.162)$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (2.163)$$

wobei  $\Psi(\omega)$  die Fourier-Transformierte des Mutter-Wavelets  $\psi(t)$  ist. Gl. 2.163 wird auch als die Admissibilitäts-Bedingung bezeichnet und impliziert, dass  $\Psi(0) = 0$  ist. Dies bedeutet, dass der Mittelwert des Wavelets verschwindet. Auch hieraus folgt der Bandpass-Charakter des Wavelets: Die Wavelet-Transformation von



**Abb. 2.68** Vergleich zwischen Fourier- und Wavelet-Transformation  $F(s,u)$  bzw.  $F(\omega)$ : (a) Die zu analysierende Zeitfunktion (rot),  $f(t) = a \cos(\omega_0 t)$  für negative Zeiten und  $f(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha t^3)$  für positive Zeiten. Diesem Signal überlagert sind zwei Morlet-Wavelet-Basisfunktionen (grau) mit unterschiedlicher Skalierung  $s$  und Verschiebung  $u$ . Man erkennt die Übereinstimmung zwischen Signal und Wavelets zu unterschiedlichen Zeiten; (b) Wavelet-Transformierte  $F(s,u)$  (farbcodiert) der Zeitfunktion in (a), welche die Entwicklung der Signalfrequenz mit der Zeit erkennen lässt. Die schwarze Linie ist die sog. Momentanfrequenz (*instantaneous frequency*) des Signals, welche die Maxima des Skalogramms im Zeit-Frequenzbereich verbindet; (c) Fourier-Leistungsspektrum  $|F(\omega)|^2$  des Signals in (a), welches den Frequenzgehalt der gesamten Zeitreihe während der gesamten Beobachtungszeit darstellt (Malegori und Ferrini 2010)

$f(t)$  (Gl. 2.160) berechnet sich als Konvolution mit Hilfe frequenzverschobener Bandpassfilter.

Die Abb. 2.68 fasst den Unterschied zwischen der Fourier- und der Wavelet-Transformation anschaulich zusammen: Während die Fourier-Transformation das Frequenzspektrum des gesamten Signals liefert, ergibt die Wavelet-Analyse Spektren, die bzgl. des Orts bzw. der Zeit aufgelöst sind.

Die Wavelet-Transformation kann auch auf die Analyse von Daten zweier Veränderlicher angewendet werden. Die häufigsten Anwendungen hierfür finden sich in der Bildanalyse und -kompression. Ein Beispiel ist das JPEG2000-Datenformat, in welchem die im ursprünglichen JPEG-Format von 1992 verwendete diskrete Kosinus-Transformation im Jahr 2000 durch eine Wavelet-Transformation ersetzt wurde. In der Geophysik kommen hierfür alle flächenhaft aufgezeichneten Daten infrage, im Rahmen dieses Buchs also insbesondere Schweredaten oder Zeit- bzw. Tiefenschnitte von 3D-Seismik. Eine weiterführende Darstellung der

zweidimensionalen Wavelet-Analyse würde jedoch den Rahmen dieses Buchs sprengen. Man findet sie aber beispielsweise bei Maidstone (2012), Chun-Lin (2010) und Mallat (2009).

### 2.4.2.7 Abtastrate und Aliasing

Es ist unmittelbar einsichtig, dass bei der Abtastung eines analogen Signals, die Abtastrate bzw. das Abtastintervall (*sampling rate*) nicht beliebig sein kann, wenn die Digitalisierung des Signals nicht mit einem Informationsverlust einhergehen soll. Die kürzeste Periode bzw. die höchste Frequenz, die mit einer Abtastrate  $\Delta t$  noch ohne Informationsverlust erfasst werden kann, ist die durch das Abtasttheorem (*sampling theorem*) definierte Nyquist-Frequenz (bzw. -periode)  $f_N$ :

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t}. \quad (2.164)$$

Dies bedeutet, dass man mindestens drei Punkte bzw. zwei Intervalle zur korrekten Darstellung einer Periode benötigt. Zur Abtastung eines Signals und zu seiner Rekonstruktion aus seinem Frequenzspektrum dienen die Kamm- und Rechteckfenster-(RF; *boxcar*<sup>18</sup>-) Funktionen, für die die folgenden Korrespondenzen gelten (siehe z. B. Sheriff und Geldart 1995):

$$\text{Kamm}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \text{Kamm}(f) \text{ und} \quad (2.165)$$

$$RF(f) \leftrightarrow 2f_0 \operatorname{sinc}(2\pi f_0 t) = 2f_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} = \frac{\omega_0}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \quad (2.166)$$

mit der Frequenz bzw. Kreisfrequenz  $f = 1/\Delta t$  bzw.  $\omega = 2\pi f$  und der Kardinalsinus-Funktion  $\operatorname{sinc}(x)$  (Abb. 2.69), definiert durch:

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} 1 : & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} : & t \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.167)$$

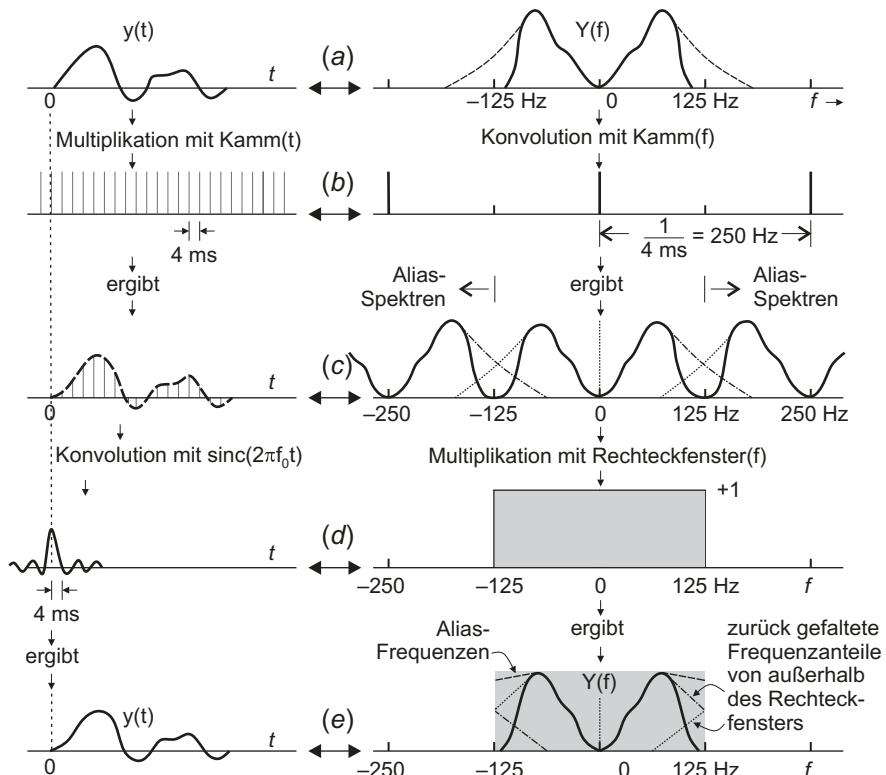
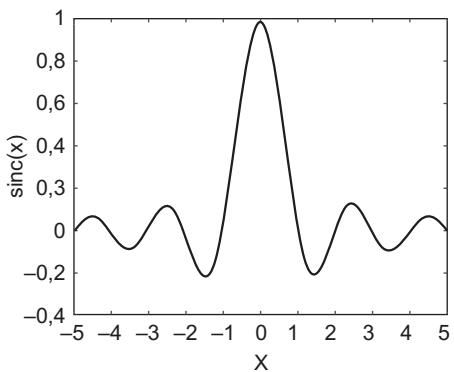
Somit entspricht beispielsweise eine Abtastrate von  $\Delta t = 4$  ms einer Abtastfrequenz von  $f_0 = 250$  Hz oder ein Abtastkamm im Zeitbereich mit  $\Delta t = 4$  ms einem Abtastkamm im Frequenzbereich mit  $\Delta f = 250$  Hz. Nach Gl. 2.164 beträgt die zugehörige Nyquist-Frequenz in diesem Fall  $f_N = 125$  Hz.

Im Beispiel in Abb. 2.70 wird die Zeitfunktion  $y(t)$  mit dem Abtastkamm Kamm( $t$ ) im Zeitbereich digitalisiert. Dem entspricht die Konvolution von  $Y(f)$ , der Transformierten von  $y(t)$ , mit der Transformierten des Abtastkamms, Kamm( $f$ ) =  $2\pi \cdot f_0$ . Dies hat zur Folge, dass sich das Frequenzspektrum  $Y(f)$  im Abstand

---

<sup>18</sup>Benannt nach der Form von Güterwagen der Eisenbahn, den *box cars*.

**Abb. 2.69** Die Kardinalsinus-Funktion  $\text{sinc}(x)$ , die Fourier-Transformierte des Rechteckfensters



**Abb. 2.70** Digitalisierung eines analogen Signals durch Abtastung sowie seine Rekonstruktion aus den diskreten Folgen im Zeit- (links) und Frequenzbereich (rechts) (nach Sheriff und Geldart 1995)

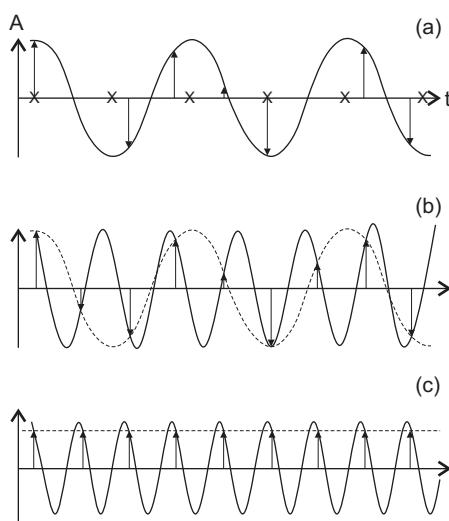
der Grundfrequenz  $f_0 = 1/\Delta t$  wiederholt. Die Funktion  $y(t)$  wird somit als periodisch aufgefasst. Ist das Spektrum  $Y(f)$  auf den Frequenzbereich  $\pm f_0/2$  beschränkt, kann es ohne Informationsverlust rücktransformiert werden. Falls nicht (gestrichelte Linien in Abb. 2.70), geht Information verloren.

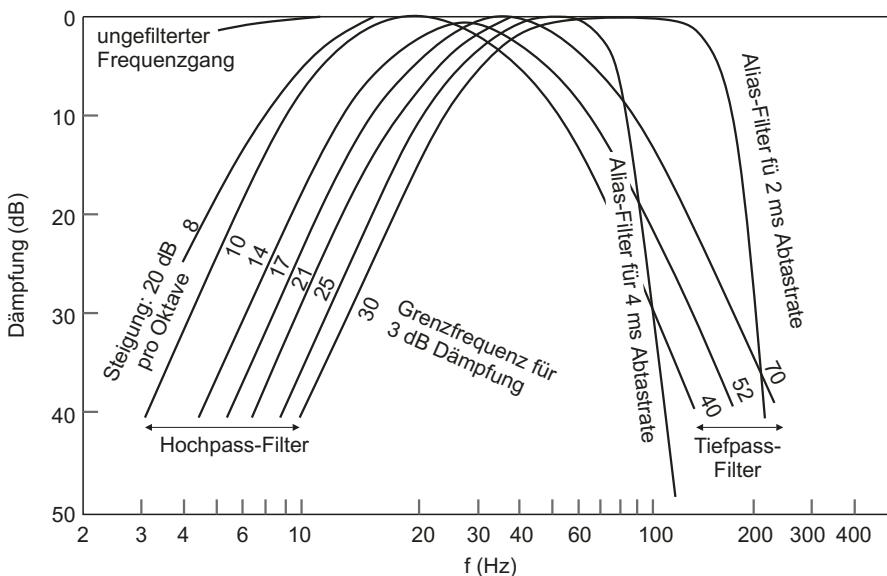
Zur Rücktransformation in den Zeitbereich wird im Frequenzbereich das Produkt aus der Rechteckfenster-Funktion und der Transformierten  $Y(f)$  gebildet. Dies eliminiert die oben beschriebene mögliche periodische Wiederholung des Frequenzspektrums. Im Zeitbereich entspricht dies einer Konvolution der Folge  $y_t$  mit  $2f_0 \operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)$ . Die Kardinalsinus-Funktion ist hierbei die inverse Fourier-Transformierte des Rechteckfensters der Breite  $2\pi$  und Höhe 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} 1 e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] d\omega = \frac{1}{2\pi t} [\sin(\omega t)|_{-\pi}^{+\pi} - i \cos(\omega t)|_{-\pi}^{+\pi}] \\ &= \frac{2 \sin(\pi t)}{2\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \operatorname{sinc}(t). \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist wieder die ursprüngliche Funktion  $y(t)$ . Somit geht keine Information verloren, sofern das Spektrum der Transformierten beschränkt ist. Die Größe des Fensters wird durch die Abtastrate definiert. Da der Frequenzbereich symmetrisch um den Nullpunkt verteilt ist, ergibt sich der durch die Nyquist-Frequenz  $f_N$  ausgedrückte Zusammenhang. Frequenzen  $f^+ = f_N + \Delta f$ , die um  $\Delta f$  größer als die Nyquist-Frequenz sind, erscheinen wie („alias“) um den Betrag  $\Delta f$  kleinere Frequenzen  $f^- = f_N - \Delta f$ . Im Beispiel in Abb. 2.71 können mit einer Abtastrate von 4 ms Frequenzen in einem Frequenzband von  $\pm 125$  Hz reproduziert werden. Signale von 175 Hz bzw. 250 Hz werden jedoch als Aliasfrequenzen von 75 Hz bzw. 0 Hz (entsprechend dem Mittelwert bzw. einem Gleichstromanteil) wiedergegeben.

**Abb. 2.71** Aliasing: Eine Abtastrate von 4 ms entspricht einer Nyquist-Frequenz von  $f_N = 125$  Hz. Um  $\Delta f$  höhere Frequenzen werden als um  $\Delta f$  niedrigere Frequenzen dargestellt (gestrichelte Linien); (a)  $f = 75$  Hz; (b)  $f = 175$  Hz; (c)  $f = 250$  Hz (nach Sheriff und Geldart 1995)





**Abb. 2.72** Anti-Aliasing Tiefpass-(*high-cut*-)Filter mit einer Flankensteilheit von 72 db/Oktave für Abtastraten von 4 ms bzw. 2 ms (nach Sheriff und Geldart 1995). Die Kurvenparameter geben die Grenzfrequenzen an, bei denen die Amplitude um 3 dB gedämpft ist. Dies entspricht ca. 30 % bzgl. der Amplitude bzw. 50 % bzgl. der Energie

Aliasfrequenzen, die in das interessierende Frequenzband fallen, erscheinen somit wie normale Signalfrequenzen. Um dies zu verhindern, muss der Frequenzinhalt des Signals vor der Abtastung (bei digitaler Aufzeichnung: vor der Analog-Digital-Wandlung) von Frequenzen bereinigt werden, die größer sind als die Nyquist-Frequenz. Mit analogen Filtern, die eine Steilheit von 72 db pro Oktave<sup>19</sup> besitzen, beginnt die Filterung eine Oktave unterhalb der Nyquist-Frequenz (Abb. 2.72). Damit wird eine Unterdrückung um einen Faktor von mindestens  $72 \text{ db} = 20 \times \log_{10}(A/A_0)$ , also einem Faktor von  $A/A_0 = 10^{3,6} \approx 4\,000$  erreicht.

#### 2.4.2.8 Die Erde als Filter

In der Seismik wird, mit Ausnahme des Vibroseis-Verfahrens, Energie möglichst impulsförmig in die Erde eingekoppelt. Dies wird angenähert durch  $k\delta_t$ , wobei  $k$  ein Skalierungsfaktor ist. Im Idealfall würde dieses Signal nun mit der Impulsantwort des Untergrunds konvolviert. Das Ergebnis wäre überall null, bis auf scharfe Impulse zu den Zeiten, in denen die Reflexionen eintreffen. In der Realität sehen die seismischen Spuren jedoch viel weniger eindeutig aus, was auf die Filterwirkung von Absorption und anderen Prozessen zurückzuführen ist. Auch überlappen sich die Wellenzüge verschiedener Reflexionen und werden zusätzlich durch verschiedene Arten von kohärentem und unkorreliertem Rauschen überlagert. Die

<sup>19</sup>Oktave: Intervall zwischen zwei Frequenzen, die zueinander im Verhältnis 2 bzw.  $\sqrt[12]{2}$  stehen.

seismische Spur ist schließlich das Ergebnis der Konvolution des Schussimpulses mit der Impulsantwort der verschiedenen Bereiche des Untergrunds, den die seismische Welle durchquert. Näherungsweise ergibt sich die folgende Gliederung mit den entsprechenden Impulsantworten:

- Nah- bzw. Schusszone: höchste Spannungszustände, stärkste Absorption hoher Frequenzen:  $s_t$ ;
- Schichtreflexionen, das Nutzsignal:  $e_t$ ;
- Veränderungen während der Ausbreitung – Absorption, Holzbein- (*peg-leg*) und andere Multiple sowie weitere Mechanismen:  $p_t$ ;
- oberflächennahe (Verwitterungs-)Zone – starke Veränderung der Wellenform:  $n_t$ .

In Vernachlässigung anderer Filter ergibt sich die seismische Spur  $y_t$  als die folgende Konvolution:

$$y_t = k\delta_t * s_t * e_t * p_t * n_t = (k\delta_t * s_t * p_t * n_t) * e_t, \quad (2.168)$$

wo  $w_t = (k\delta_t * s_t * p_t * n_t)$  das eingebettete Wavelet genannt wird.

Für einen Vibroseis-Wellenzug  $v_t$  (vgl. [Abschn. 2.4.3](#)) lautet die entsprechende Gleichung:

$$y_t = (v_t * s'_t * p_t * n_t) * e_t = w'_t * e_t, \quad (2.169)$$

wobei  $s'_t$  die ggf. von  $s_t$  unterschiedliche Impulsantwort im Nahfeld der Vibroseis-Quelle ist.

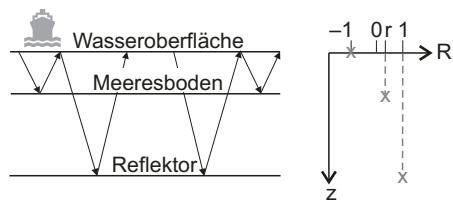
### 2.4.2.9 Mehrfachreflexionen (Multiple, Nachhall)

Zu Mehrfachreflexionen (*reverberations*) bzw. Nachhall kommt es zwischen zwei stark reflektierenden Grenzschichten. Sie treten in der Regel zwischen der Wasseroberfläche ( $R = -1$ ) und dem See- bzw. Meeresboden ( $R = r$ ) auf. Sie können aber auch an Land entstehen, z. B. in der Verwitterungszone, durch Moorlinsen oder durch Resonanzen schlecht angekoppelter Geophone. Betrachten wir Mehrfachreflexionen (*singing, ringing*) zwischen der Wasseroberfläche und einem idealen Reflektor ( $R = 1$ ) mit der Zweiweglaufzeit  $n \cdot \Delta$  durch die Wasserschicht ( $\Delta$ : Abtastintervall). Die Multiplen einer Reflexion unterscheiden sich somit in ihren Laufzeiten um ganzzahlige Vielfache von  $n \cdot \Delta$ ;  $t$  ist die Laufzeit der einfachen Reflexion.

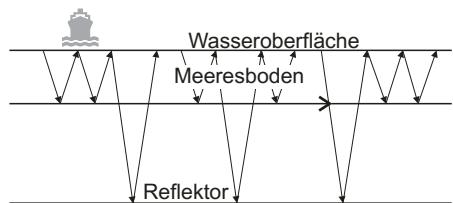
Betrachtet man wie bei Telford et al. (1990) die beiden Fälle einer einfachen ([Abb. 2.73](#)) und einer zweifachen ([Abb. 2.74](#)) Multiple, so erkennt man, dass

- einfache Multiple in zwei verschiedenen Formen vorkommen, jeweils mit einer Amplitude von  $-r$ ; die Gesamtamplitude zum Zeitpunkt  $t + n \cdot \Delta$  ist somit  $-2r$ ;
- zweifache Multiple in drei verschiedenen Formen vorkommen, jeweils mit einer Amplitude von  $+r^2$ ; die Gesamtamplitude zum Zeitpunkt  $t + 2n \cdot \Delta$  ist somit  $3r^2$ .

**Abb. 2.73** Einfache Multiple an der Grenzschicht Wasser – Luft



**Abb. 2.74** Zweifach-Multiplen an der Grenzschicht Wasser – Luft



Eine Weiterführung dieser Betrachtung ergibt, dass die Amplituden der zu höheren Vielfachen von  $n\Delta$  ankommenden Multiplen jeweils um eine Potenz von  $r$  angewachsen sind und ihr Vorfaktor um eins größer ist als jener der vorangegangenen Multiple. Außerdem besitzen ungerade Multiple ein negatives Vorzeichen, gerade ein positives. Die Impulsantwort  $w_t$  einer Wasserschicht der Mächtigkeit  $d = v \cdot n \cdot \Delta/2$  ( $v$ : Schallgeschwindigkeit im Wasser) ist daher:

$$\begin{aligned} w_t &= [1, -2r, 3r^2, -4r^3, 5r^4, \dots] & n = 1 \\ &= [1, 0, -2r, 0, 3r^2, 0, -4r^3, \dots] & n = 2 \\ &= [1, 0, 0, -2r, 0, 0, 3r^2, \dots] & n = 3. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Das Frequenzspektrum von  $w_t$  besitzt große Spitzen bei der Frequenz  $2/(n \cdot \Delta)$ , die der einfachen Laufzeit  $n \cdot \Delta/2$  entspricht sowie bei ganzzahligen Vielfachen dieser Frequenz. Je größer der Wert  $r$  des Reflexionskoeffizienten  $R$  ist, desto höher ist auch der Amplitudenwert dieser Spitze. Diese Frequenzen werden bei der Wassertiefe  $d = v \cdot n\Delta/2$  verstärkt, da sie dann konstruktiv interferieren. Wenn  $R$  (und somit  $r$ ) groß ist und die Frequenz  $2/(n \cdot \Delta)$  oder eine ihrer Harmonischen innerhalb des seismischen Spektrums liegen, erscheint das Seismogramm sehr sinusförmig und zeigt innerhalb der Aufzeichnungszeit wenig Amplitudenvariation. Die Identifizierung der eigentlichen Reflexionen fällt daher schwer.

Wie kann man aber Mehrfachreflexionen aus dem Seismogramm entfernen? Ein inverser Filter  $i_t$  hat die Eigenschaft

$$w_t^* i_t = \delta_t. \quad (2.171)$$

Daher eliminiert die Filterung einer von Mehrfachreflexionen überlagerten seismischen Spur mit einem inversen Filter den Effekt der Mehrfachreflexionen. Ein Filter, welcher dies leistet, ist

$$\begin{aligned}
 i_t &= [1, 2r, r^2] & n = 1 \\
 &= [1, 0, 2r, 0, r^2] & n = 2 \\
 &= [1, 0, 0, 2r, 0, 0, r^2] & n = 3 \\
 &\dots & \dots
 \end{aligned} \tag{2.172}$$

Man erkennt dies durch Konvolution von  $w_t$  mit  $i_t$  (Gl. 2.150):  $\delta_t = w_t * i_t = \sum_{m=0}^t w_m i_{t-m}$ . Mit  $w_t$  aus Gl. 2.170 und  $i_t$  aus Gl. 2.172 folgt:

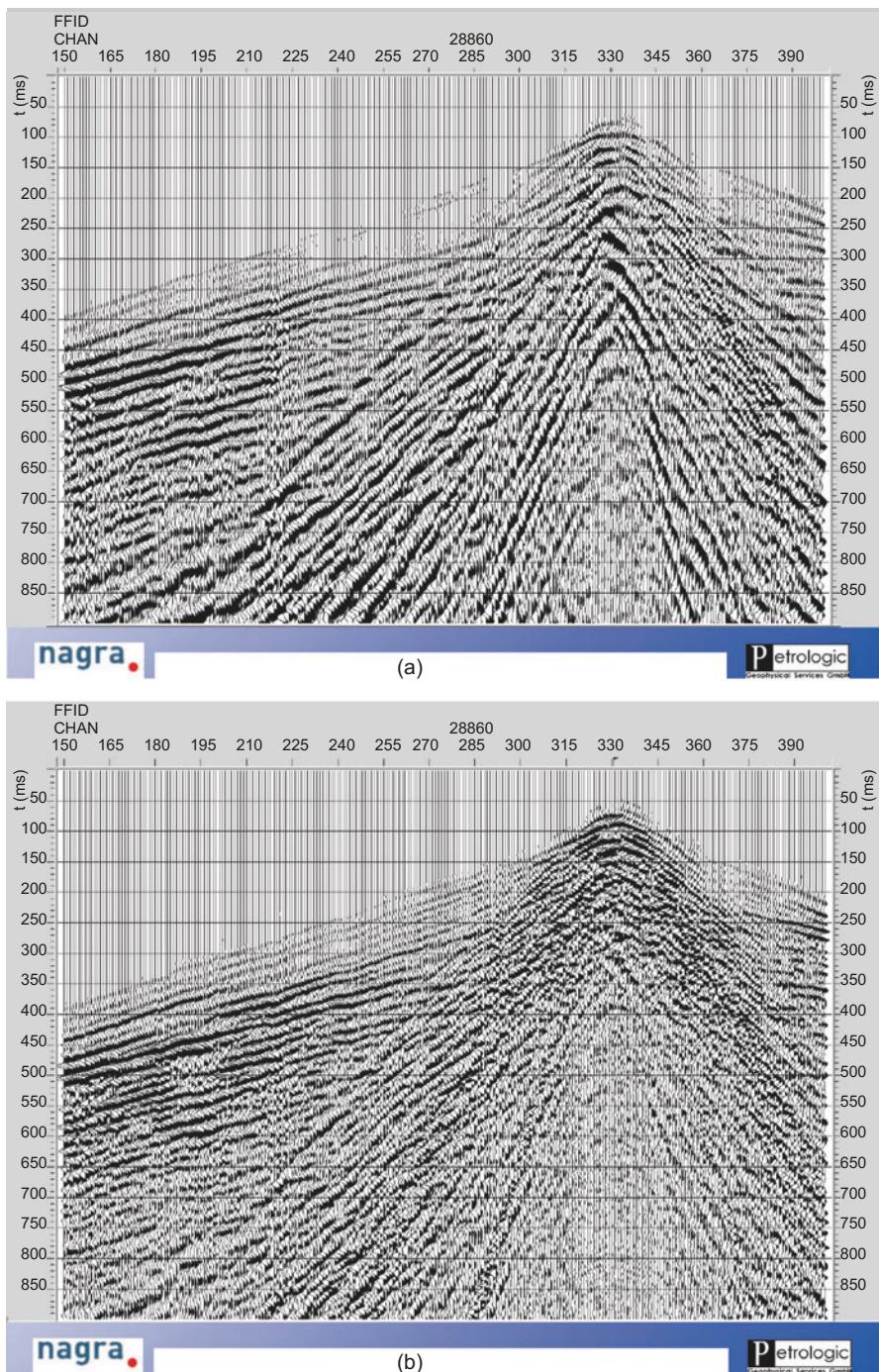
$$\begin{aligned}
 \delta_0 &= w_0 \cdot i_0 = 1; \\
 \delta_1 &= w_0 \cdot i_1 + w_1 \cdot i_0 = 2r - 2r = 0; \\
 \delta_2 &= w_0 \cdot i_2 + w_1 \cdot i_1 + w_2 \cdot i_0 = r^2 - 4r^2 + 3r^2 = 0; \\
 \delta_3 &= w_1 \cdot i_2 + w_2 \cdot i_1 + w_3 \cdot i_0 = -2r^3 + 6r^3 - 4r^3 = 0; \\
 &\dots \\
 \delta_n &= 0.
 \end{aligned}$$

### 2.4.2.10 Dekonvolution (Rückfaltung)

Die Konvolution mit einem inversen Filter, also das Rückgängigmachen einer Konvolution mit dem ursprünglichen Filter, wird als Dekonvolution bzw. Rückfaltung bezeichnet. Sie wird im Laufe der Bearbeitung seismischer Daten mehrfach angewendet und zu jeweils unterschiedlichen Zwecken. Ganz allgemein bewirkt sie ein Rückgängigmachen einer wie auch immer gearteten Filteroperation, die auf die seismischen Daten gewirkt hat. Dies kann sowohl im Zeit- wie auch im Frequenzbereich erfolgen. Sie ist ein wichtiger Schritt in der seismischen Datenverarbeitung, da sie neben der Entfernung von Multiplen vor allem auch zur Rauschunterdrückung dient und damit zur Verbesserung des Signal/Rausch-Verhältnisses. Für gewöhnlich werden seismische Daten Spur für Spur vor dem Stapeln dekonvolutiert. Doch nicht selten wird auch ein einheitlicher Filter entworfen und auf alle Spuren eines Schuss-Seismogramms angewendet. Abb. 2.75 zeigt ein Beispiel einer seismischen Sektion vor und nach der Dekonvolution. Die hierdurch erzielte Bildverbesserung ist besonders zwischen den Kanalnummern 210 und 300 deutlich zu erkennen.

Jedoch gelingt die Multiplenunterdrückung durch die in Abschn 2.4.2.9 beschriebene einfachste Form der Dekonvolution nur in den seltensten Fällen: Bereits kleine Schichtneigungen oder Inhomogenitäten in der Verteilung der seismischen Geschwindigkeit machen einen solchen Filter wirkungslos. Daher kommt zur Dekonvolution eine der Varianten eines sog. Wiener<sup>20</sup>-Filters zum Einsatz, ein die Signalform verändernder Filter zur Rauschunterdrückung wie z. B. die prädiktive oder die Spike-Dekonvolution (*predictive deconvolution* bzw. *spiking deconvolution*).

<sup>20</sup>Norbert Wiener, 1894–1964; US-amerikanischer Mathematiker und Begründer der Kybernetik, der Lehre von der Steuerung und Regelung von Maschinen, lebenden Organismen und sozialen Organisationen. Wiener prägte diesen Ausdruck in seinem Werk *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine* (1948).



**Abb. 2.75** Beispiel eines Schuss-Seismogramms: (a) vor und (b) nach der Dekonvolution (Rybarczyk 2013); horizontale Koordinate: Kanal-Nummer, vertikale Koordinate: Zweiweglaufzeit

Wiener-Filter transformieren Eingangsdaten  $x_t$  gemäß bestimmter Bedingungen so getreu wie möglich in erwünschte Ergebnisdaten  $z_t$ . Dies bedeutet im Sinne kleinsten Fehlerquadrate die Minimierung der Summe der quadrierten Differenzen zwischen dem Resultat der Filterung und dem erwünschten Ergebnis. Ein solcher Filter hebt ein Signal  $S$  in Gegenwart von statistischem (weißen) Rauschen  $R$  optimal hervor. Hierbei ist sowohl  $S$  als auch  $R$  eine Funktion der Frequenz  $\nu$ , deren Durchlassfaktor proportional zu  $S^2(\nu)/(S^2(\nu)+R^2(\nu))$  skaliert. Ein solcher Filter wird durch die wienerschen Normalgleichungen beschrieben. In ihnen gleicht die Kreuzkorrelation  $\phi_{xz}$  zwischen den erwünschten Ergebnisdaten  $z_t$  und den Eingangsdaten  $x_t$  einer Konvolution der gesuchten Filterfunktion  $f_t$  mit der Autokorrelation  $\phi_{xx}$  der Eingangsdaten:

$$\phi_{xz}(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau} f(t) \phi_{xx}(\tau - t) = f(\tau)^* \phi_{xx}(\tau). \quad (2.173)$$

Eine Filterung der Eingangsdaten  $x_t$  mit der auf diese Weise bestimmten Filterfunktion  $f_t$  ergibt ein Resultat  $y_t$ , das die erwünschten Ergebnisdaten  $z_t$  im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestmöglich annähert. Hierbei ist  $\phi_{zx}(\tau)$  die Kreuzkorrelationsfunktion (Gl. 2.175) von  $z_t$  mit  $x_t$  und  $\phi_{xx}(\tau)$  die Autokorrelationsfunktion (Gl. 2.176) von  $x_t$ , jeweils in Abhängigkeit von einer Zeitverschiebung  $\tau$ .

Bei der prädiktiven Dekonvolution wird ein aus der Primärreflexion und den Multiplen bestehendes Signal einem solchen angepasst, welches nur noch eine Primärreflexion enthält und sich nicht wiederholt. Hierzu wird ein Fenster betrachtet, dessen Breite üblicherweise dem ersten oder zweiten Nulldurchgang der Autokorrelationsfunktion entspricht. Die Spike-Dekonvolution ist ein Filter, welcher das gemessene seismische Signal dem eines Impulses (*spike*) anpasst. Beide Filter bewirken, dass das Nutzsignal der Reflexionen hervorgehoben und das Rauschen und die Multiplen unterdrückt werden. Ausführliche Einführungen in die unterschiedlichen Techniken zur Dekonvolution seismischer Sektionen finden sich u. a. in Yilmaz (2001) und Sheriff und Geldart (1995).

Im Folgenden wird näher auf die Spike-Dekonvolution eingegangen. Die Gl. 2.173 verknüpft die Kreuzkorrelations-, Autokorrelations- und Filterfunktionen in einem linearen Gleichungssystem. Nach Gl. 2.175 ist die Kreuzkorrelation zwischen dem Impuls  $z_t$  und den Seismogramm-Daten  $x_t$  der Länge  $n + 1$  gegeben durch:  $K_{x,z}(\tau) = \sum_{t=0}^n x_t z_{t+\tau}$ . Entsprechend ist die Autokorrelation nach Gl. 2.176 gegeben durch:  $A_x(\tau) = \sum_{t=0}^n x_t x_{t+\tau}$ . Schreibt man Gl. 2.173 in Matrixschreibweise, so erhält man:  $\underline{A}(x)\vec{f}(t) = \underline{K}(x, z)$ . Hierbei ist  $\underline{K}(x, z)$  die Kreuzkorrelationsmatrix zwischen den Datenvektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{z}$ ,  $\underline{A}(x)$  die Autokorrelationsmatrix des Datenvektors  $\vec{x}$  und  $\vec{f}(t)$  der Vektor der Filterkoeffizienten. Multipliziert man diese Gleichung von links mit der Inversen  $\underline{A}^{-1}$  der Autokorrelationsmatrix, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Filterkoeffizienten:

$$\underline{A}^{-1}\underline{A}\vec{f} = \underline{A}^{-1}\underline{K} = \vec{f}. \quad (2.174)$$

Die optimale Länge  $\tau$  des Dekonvolutions-Operators wird durch iterative Optimierung bestimmt.

### 2.4.2.11 Kreuz- und Autokorrelation

Kreuz- und Autokorrelation sind ein Maß für die Übereinstimmung zweier Funktionen bzw. Folgen in Abhängigkeit von einer Verschiebung bzw. Verzögerung  $\tau$  (*lag*). Die Kreuzkorrelation  $\phi_{xy}(\tau)$  zweier Folgen  $x_k$  und  $y_k$  ähnelt der Konvolution  $x_\tau * y_\tau = \sum_{k=0}^{\tau} x_k y_{\tau-k}$  (Gl. 2.150). Der Unterschied liegt darin, dass bei der Kreuzkorrelation die zweite Folge vor der Bildung der Produkte unter der Summe nicht am Punkt  $m = 0$  gespiegelt wird:

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_k x_k y_{k+\tau}. \quad (2.175)$$

Die in Gl. 2.175 verwendete Definition unterscheidet sich etwas von der in der deskriptiven Statistik verwendeten: Da in der Seismik in der Regel nur die relativen, nicht die absoluten Amplituden interessieren, werden hier die Zeitreihen meist weder um ihren Mittelwert reduziert noch auf ihre Länge normiert.<sup>21</sup> Die Abb. 2.76 zeigt ein Beispiel für die Kreuzkorrelation  $\phi_{xy}$  zweier dreigliedriger Folgen  $x_k$  und  $y_k$ .

Die Autokorrelation ist die Kreuzkorrelation einer Folge mit sich selbst:

$$\phi_{xx}(\tau) = \sum_k x_k x_{k+\tau}. \quad (2.176)$$

Mit  $s = k - \tau$  bzw.  $k = s + \tau$  gilt für die Kreuzkorrelation  $\phi_{xy}(-\tau) = \sum_k x_k y_{k-\tau} = \sum_s x_{s+k} y_s = \sum_s y_s x_{s+k} = \phi_{yx}(-\tau)$  und somit:

$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xy}(-\tau) \quad \text{bzw.} \quad \phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau). \quad (2.177)$$

Damit gilt für die Autokorrelation  $\phi_{xx}$ :

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau). \quad (2.178)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion ist also nicht kommutativ, aber die Autokorrelationsfunktion ist symmetrisch. Wegen der Ähnlichkeit beider Operationen lässt sich die Kreuzkorrelation (Gl. 2.175) auch durch eine Konvolution (Gl. 2.150) ausdrücken:

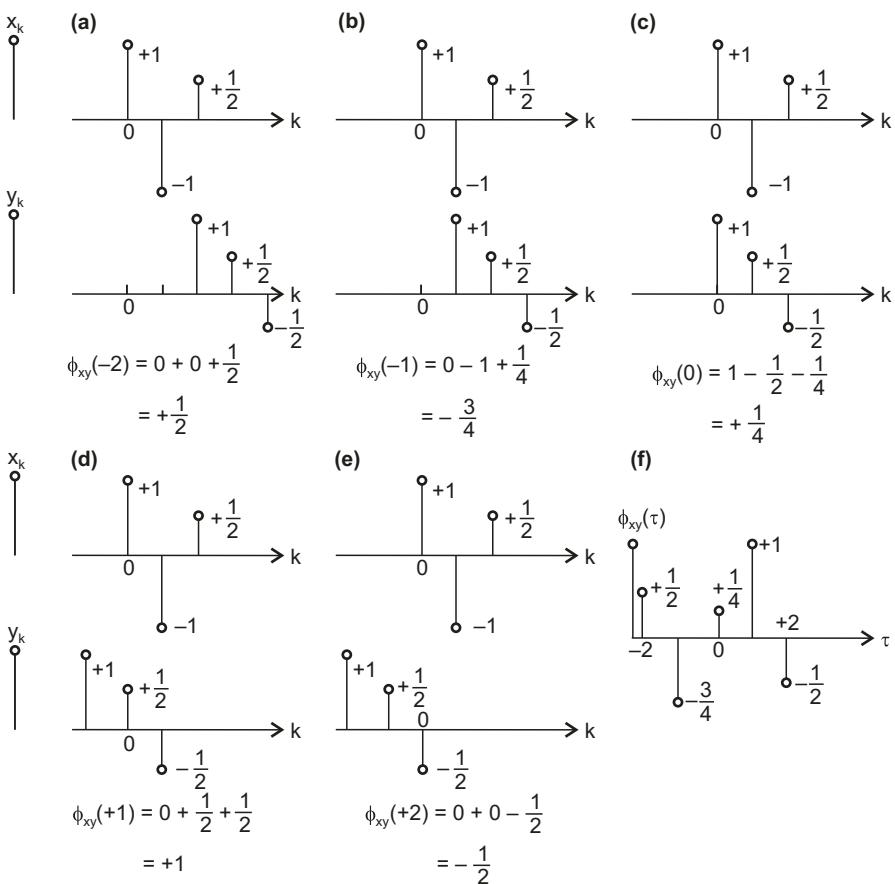
$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau) = \sum_k y_k x_{k-\tau} = \sum_k y_k x_{-(\tau-k)} = y_\tau * x_{-\tau} = y_\tau * x', \quad (2.179)$$

wobei  $x_{-\tau} = x'$  die am Punkt  $t = 0$  gespiegelte (zeitinvertierte) Folge ist. Für die Autokorrelation gilt entsprechend:

---

<sup>21</sup>In der deskriptiven Statistik wird die Kovarianzfunktion  $cov_{x,y} = \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) / (N-1) = \sum_{(k=1)}^N (x_k y_k) - N \bar{x} \bar{y} / (N-1)$  (vgl. Aufg. (5) in Abschn. 2.7) zur Berechnung der Kreuzkorrelation der

gleich langen Reihen  $x_i$  und  $y_i$  verwendet. Diese unterscheidet sich von der Definition in Gl. 2.175 dadurch, dass die Reihen um ihre Mittelwerte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  reduziert und auf die um eins verminderte Anzahl von  $N$  Elementen normiert sind (um eins vermindert, da ein Freiheitsgrad bereits für die Berechnung der Mittelwerte verbraucht wurde).



**Abb. 2.76** Berechnung der Kreuzkorrelation  $\phi_{xy}(t)$  zweier Folgen  $x_k$  und  $y_k$  (nach Sheriff und Geldart 1995); (a) – (e): die um jeweils  $k = -2, -1, \dots, 1, 2$  gegeneinander verschobenen Folgen  $x_k$  und  $y_k$  sowie die Summe  $\phi_{xy}(k)$  der gliedweisen Produkte ihrer Elemente; (f) die Kreuzkorrelation  $\phi_{xy}(\tau)$ , die Summe aller  $\phi_{xy}(k)$ .

$$\phi_{xx}(\tau) = x_\tau^* x_{-\tau} = x_\tau^* x'. \quad (2.180)$$

Für stetige Funktionen  $x$  und  $y$  lauten die entsprechenden Formeln für die Kreuz- und Autokorrelation:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt, \quad (2.181)$$

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (2.182)$$

Ein Vergleich mit Gl. 2.152 zeigt, dass die Kreuzkorrelation von  $x(t)$  und  $y(t)$  der Konvolution von  $x(t)$  mit  $y(-t)$  entspricht und umgekehrt, also entspricht  $\phi_{xy}(\tau)$  der

Konvolution von  $x(t)$  mit  $y(-t)$  und  $\phi_{yx}(\tau)$  der Konvolution von  $x(-t)$  mit  $y(t)$ .

Der Kreuzkorrelationssatz besagt, dass

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(\omega) = \bar{X}(\omega) Y(\omega), \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(\omega) X(\omega) \bar{Y}(\omega).\end{aligned}\quad (2.183)$$

Dies folgt aus dem Beweis für den Konvolutionssatz (Gl. 2.152) durch Vorzeichenwechsel bei  $t$  im Argument der Funktion  $g(x)$ :  $g(\tau - t)$ .  $\bar{X}(\omega)$  ist die komplexe Konjugierte von  $X(\omega)$ ; mit  $X(\omega) = |X| e^{i\varphi_x(\omega)}$  folgt  $\bar{X}(\omega) = |X| e^{-i\varphi_x(\omega)}$ . Ersetzt man  $x(t)$  durch  $y(t)$  bzw.  $X(\omega)$  durch  $Y(\omega)$  in Gl. 2.183, so folgt für die Autokorrelationsfunktion  $\phi_{yy}$

$$\phi_{yy} \leftrightarrow \Phi_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2. \quad (2.184)$$

Somit entspricht die Autokorrelation eines Datensatzes im Zeitbereich einer Quadrierung des Amplitudenspektrums im Frequenzbereich. Das zugehörige Spektrum wird daher auch als Leistungsspektrum (*power spectrum*) bezeichnet.

Der Kreuzkorrelationssatz (Gl. 2.183) lässt sich auch wie folgt ausdrücken. Mit  $x_t \leftrightarrow X(f) = |X(f)| e^{i\varphi_x(f)}$ ;  $y_t \leftrightarrow Y(f) = |Y(f)| e^{i\varphi_y(f)}$ ;  $x_{-t} \leftrightarrow \bar{X}(f) = |X(f)| e^{-i\varphi_x(f)}$  folgt:

$$\phi_{xy} \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \bar{X}(f) Y(f) = |X(f)| |Y(f)| e^{i(\varphi_y(f) - \varphi_x(f))}. \quad (2.185)$$

Der Kreuzkorrelation zweier Datensätze im Zeitbereich entspricht also im Frequenzbereich die Multiplikation der Amplituden- und Subtraktion ihrer Phasenspektren. Überdies bemerken wir, dass ein Vorzeichenwechsel im Phasenspektrum einer Umkehrung der Spur im Zeitbereich entspricht.

Die Autokorrelation (Gl. 2.184) sollte ihr Maximum für  $\tau = 0$  haben. Maxima für andere Verzögerungen  $\tau \neq 0$  deuten auf eine Periodizität innerhalb des Datensatzes mit der Periode  $\tau$  hin. Die Autokorrelation kann somit als Maß für die Zyklizität einer Folge aufgefasst werden. Dies wird in den Geowissenschaften vielfach genutzt, um solche Zyklizitäten nicht nur in Seismogrammen zu erkennen, sondern auch in ortsbezogenen Datenreihen wie z. B. magnetischen oder Schweremessungen, Eisbohrkernen oder Warven, Sedimentabfolgen, Zeitreihen der Temperatur bzw. von klimarelevanten Stellvertreter-(*proxy*-)Daten. Die Autokorrelation für eine Verzögerung von  $\tau = 0$  wird Energie der Folge  $x_t$  genannt.

$$\phi_{xx}(0) = \sum_k x_k^2. \quad (2.186)$$

Dies ist für seismische Spuren unmittelbar einsehbar, da die Energie proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Es gilt aber auch im Fall von Spannung, Strom oder Geschwindigkeit. Für stetige Funktionen lautet Gl. 2.186 mit  $f = \omega/(2\pi)$ :

$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^2 df, \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned} \text{da gilt : } \phi_{xx}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt \stackrel{(2.118)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)^2 e^{i\omega 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^2 2\pi df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^2 df. \end{aligned}$$

Da  $\phi_{xx}(0)$  die Energie der Spur  $x(t)$  ist, bezeichnet  $x^2(t)$  die Energie pro Zeitintervall, also die Leistung der Spur. Damit ist  $X^2(f)$  die Energie pro Frequenzintervall, die Energiedichte. Oft wird die Autokorrelation auf die Energie normiert

$$\phi_{xx}(\tau)_{norm} = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phi_{xx}(0)} \quad (2.188)$$

und die Kreuzkorrelation auf das geometrische Mittel der Energie beider Spuren:

$$\phi_{xy}(\tau)_{norm} = \frac{\phi_{xy}(\tau)}{\sqrt{\phi_{xx}(0) \phi_{yy}(0)}}. \quad (2.189)$$

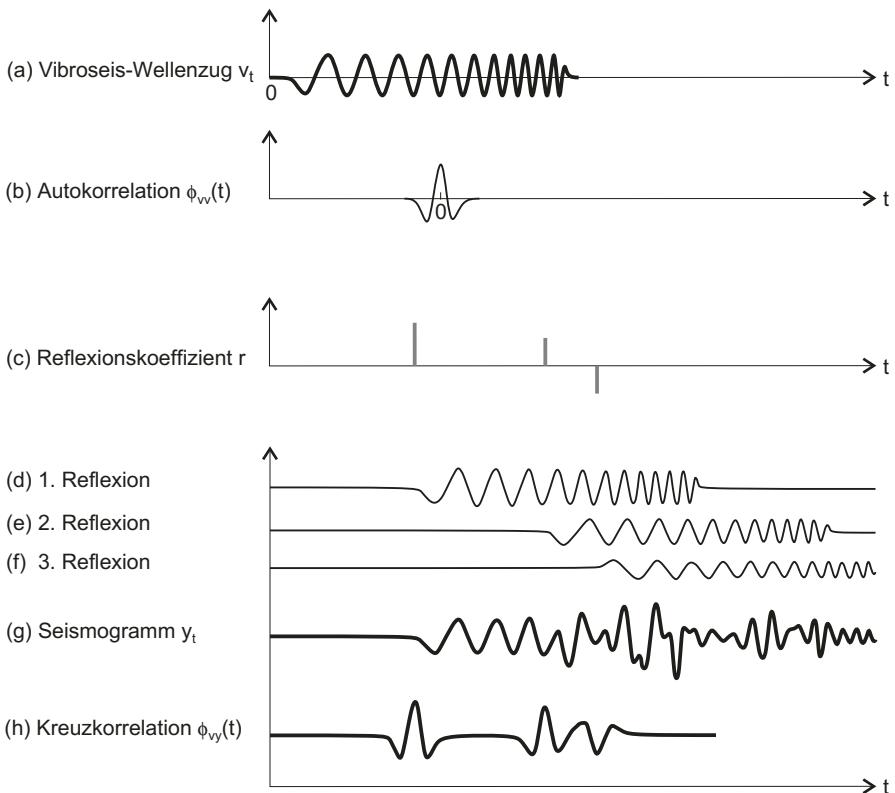
### 2.4.3 Das Vibroseis-Verfahren

Beim Vibroseis-Verfahren wird mit meist in ca. 14 t schwere LKW integrierte Rüttler eine sinusförmige Vibration in die Erde eingekoppelt (Abb. 2.77). Deren Frequenz steigt innerhalb der 7 s–21 s dauernden Anregung (*sweep*) von ca. 6 Hz–15 Hz bis auf etwa 150 Hz an, bei oberflächennahen Anwendungen sogar bis 250 Hz.

Jede Reflexion von einer Schichtgrenze im Untergrund ergibt einen ähnlichen Wellenzug, der wiederum etwa 7 s–21 s dauert (Abb. 2.78). Da die drei zu den



**Abb. 2.77** Drei Vibroseis-LKW in Reihe beim Rütteln eines *sweep* auf einem Seismik-Profil in Oberösterreich (Foto: Claußer 2007)



**Abb. 2.78** Vibroseis-Verfahren: (a) Vibroseis-Wellenzug  $v_t$ ; (b) Autokorrelation  $\phi_{vv}$  des Vibroseis-Wellenzugs; (c) Reflexionskoeffizient  $r$ ; (d–f) Reflexionen von drei Horizonten; (g) Seismogramm  $y_t$ ; (h) Konvolution des zeitinvertierten Vibroseis-Wellenzugs  $v_t'$  mit dem Vibroseis-Seismogramm  $y_t$  gleicht der Kreuzkorrelation  $\phi_{vy}$  von Vibroseis-Wellenzug und Vibroseis-Seismogramm:  $v_t' * y_t = \phi_{vy}$ . Die zu den drei Reflexionen (d–f) gehörigen Reflektoren sind deutlich zu erkennen (nach Parasnis 1997)

Reflexionskoeffizienten (Abb. 2.78c) gehörenden Reflexionen (Abb. 2.78d–f) in der Regel in kurzem zeitlichem Abstand voneinander an den Geophonen eintreffen, ist das Ergebnis  $y_t$  (Gl. 2.169) eine Überlagerung aller Reflexionen (Abb. 2.78g) und hat nur wenig Ähnlichkeit mit dem Eingangssignal  $v_t$  (Abb. 2.78a).

Fasst man in Gl. 2.169 alle Terme außer  $v_t$  in einem Term  $a_t = s_t' * p_t * n_t * e_t$  zusammen, so ergibt sich das aufgezeichnete Vibroseis-Seismogramm  $y_t$  als Konvolution der Anregungssequenz  $v_t$  mit der Übertragungsfunktion  $a_t$ :

$$y_t = v_t * a_t = a_t * v_t. \quad (2.190)$$

Die Kreuzkorrelation  $\phi_{vy}$  (Abb. 2.78h) ist ein Maß für die Übereinstimmung zwischen Anregungssequenz  $v_t$  (Abb. 2.78a) und Vibroseis-Seismogramm  $y_t$

(Abb. 2.78g). Sie kann als Konvolution von  $y_t$  mit der zeitinvertierten Folge  $v'_t$  beschrieben werden:

$$\phi_{vy} = v'_t * y_t = y_t * v'_t. \quad (2.191)$$

Man erkennt in (Abb. 2.78h) deutlich die drei Reflektoren, welche das Vibroseis-Seismogramm  $y_t$  (Abb. 2.78g) entsprechend Gl. 2.190 aus Übertragungsfunktion  $a_t$  und Anregungssequenz  $v_t$  erzeugen.

Setzt man in Gl. 2.191 für das Vibroseis-Seismogramm  $y_t$  den Ausdruck aus Gl. 2.190, so erhält man:

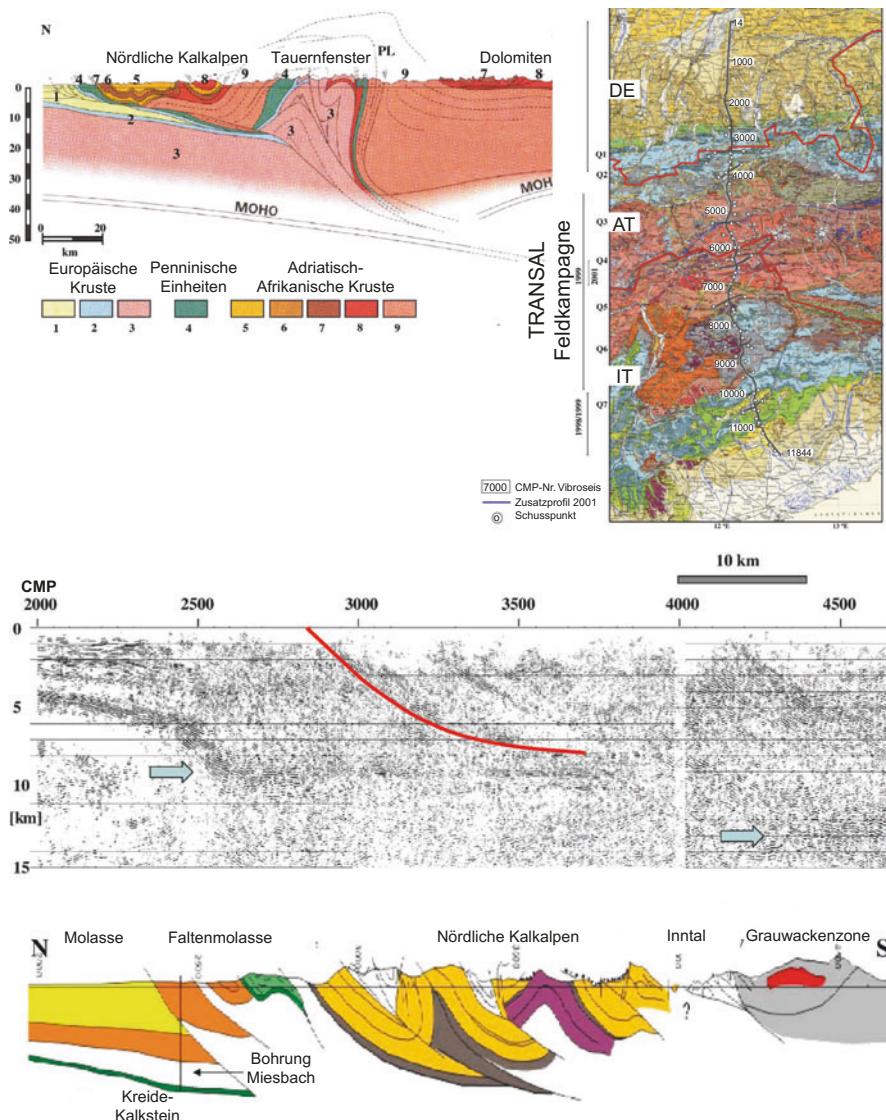
$$\phi_{vy} = (a_t * v_t) * \underbrace{v'_t}_{\phi_{vv}} = a_t * \phi_{vv} = \phi_{vv} * a_t. \quad (2.192)$$

Somit ergibt sich die Kreuzkorrelation zwischen Anregungssequenz  $v_t$  und Vibroseis-Seismogramm  $y_t$  als Konvolution der Autokorrelation  $\phi_{vv}$  (Abb. 2.78b) der Anregungssequenz  $v_t$  (Abb. 2.78b) mit der Übertragungsfunktion  $a_t$ . Die Reflexionskoeffizienten  $a_t$  erhält man im Zeitbereich aus einer geeigneten Dekonvolution dieser Kreuzkorrelation. Entsprechend erhält man im Frequenzbereich die Transformierte der Übertragungsfunktion durch Division der Transformierten der Kreuzkorrelation durch die Transformierte der Autokorrelation.

Gl. 2.192 gleicht in ihrer Struktur sehr der Gl. 2.155:  $y_t = x_t * f_t$ , wenn die Kreuzkorrelation anstelle von  $y_t$  tritt, die Autokorrelation anstelle des (impulsförmigen) Signals und die Übertragungsfunktion anstelle der Impulsantwort. Die Autokorrelation ist eine kurze Impulsfolge, vergleichbar der Impulsantwort. Sie erbringt daher nur für einen kleinen Bereich von Verschiebungen nennenswerte Beiträge. Somit wird in Gl. 2.192 die starke Überlagerung des Eingangssignals mit den Reflexionen, welche für eine Vibroseis-Spur typisch ist, weitgehend eliminiert, und das derart behandelte Seismogramm zeigt im Wesentlichen die Reflektoren.

Abb. 2.79 zeigt das Ergebnis einer Vibroseis-Erkundung der Oberkruste entlang eines N–S-Profilen über die Ostalpen vom sedimentären Alpenvorland bis ins tiefe Kristallin der Zentralalpen. Selbst bis in Tiefen von 15 km sind reflektierende Strukturen zu erkennen, die Rückschlüsse auf tektonische Prozesse erlauben.

Im Rahmen der Erkundung von Kohlenwasserstoff-Lagerstätten erfolgen generell flächenhafte Erkundungen mit 3D-Seismik. Der damit verbundene logistische Aufwand ist erheblich: Beispielsweise wurden für eine im November 2002 abgeschlossene seismische Erkundung von im Salzkammergut vermuteten Öl- und Gaslagerstätten ein Gebiet von  $530 \text{ km}^2$  ( $20 \text{ km} \times 26,5 \text{ km}$ ) mit Vibroseismik erkundet. Hierbei kamen neun 14 t schwere Vibratoren und insgesamt 66 000 Geophone zum Einsatz, 24 an jedem Messpunkt. Pro Tag wurden 100 bis 120 Messpunkte angefahren. Solche Kampagnen erfordern typischerweise ca. ein Jahr und den Einsatz von 60–100 Personen, insgesamt ca. 60 Fahrzeuge aller Art sowie eine eigene Feldwerkstatt für anfallende Reparaturen. Das Auftragsvolumen einer solchen Messkampagne beläuft sich auf ca. zehn Millionen Euro. So hoch dieser Betrag auch sein mag, so stellt er doch nur den Gegenwert von etwa drei ca. 2 km



**Abb. 2.79** TRANSALP-Vibroseis-Experiment (nach Lüschen et al. 2006). Rechts oben: TRANSALP-Profil mit Querprofilen (schwarze Linien) und Grenzverlauf (schwarz-weiße Linie) zwischen Deutschland (DE), Österreich (AT) und Italien (IT). Links oben: Geologischer Querschnitt vor dem TRANSALP-Experiment (1: Molasse-Sedimente, 2: Europäisches sedimentäres Mesozoikum, 3: Europäisches variszisches Grundgebirge und Tauern-Kernkomplex, 4: Ozeanische Sedimente und Ophiolite, 5: Obertriassische Carbonate der Adriatischen Platte, 6: Raibl-Schichten, 7: Untertriassische Carbonate der Adriatischen Platte, 8: Permo-triassische Evaporite und Vulkane der Adriatischen Platte, porphyrische Granite, Granodiorite, Tonalite im Tauern-Fenster, 9: Austro- und süd-alpines prä-mesozoisches, metamorphes Grundgebirge, PL: Periadriatisches Lineament); Moho-Tiefen aus Refraktionsseismik in den 1970ern. Mitte: TRANSALP-Vibroseis-Reflexionsprofil. Unten: Aus dem TRANSALP-Vibroseis-Reflexionsprofil abgeleiteter neuer geologischer Querschnitt

tiefen Bohrungen in Sedimentgestein dar. Dies erklärt warum in der Regel nie ohne vorherige seismische Erkundung gebohrt wird.

Marine seismische Messungen erfolgen von Spezialschiffen aus (Abb. 2.35). Diese schleppen in einem Abstand hinter dem Boot mehrere Kabel (zwölf oder mehr, oft jedoch sechs bis acht) unter der Wasseroberfläche mit integrierten Ketten von Hydrofonen im Abstand von ca. 5 m. Als seismische Quelle werden meist eine oder mehrere Luftkanonen eingesetzt – Kompressoren zur Freisetzung großer Druckluftblasen. Sie werden ebenfalls unter Wasser zwischen dem Schiffsheck und dem ersten Empfänger geschleppt. Auf diese Weise wird eine große Datenmenge gewonnen, denn jede dieser sechs bis acht Kilometer langen Hydrofonketten umfasst Hunderte von Datenkanälen, und die seismische Quelle wird gewöhnlich alle 15 bis 20 Sekunden gezündet. Bei einer Schleppgeschwindigkeit der Schiffe von ca.  $9 \text{ km h}^{-1}$  können pro Tag 216 Profilkilometer abgefahren werden – fast 6 500 km pro Monat. Da die Ausdehnung der Erkundungsgebiete oft 200 km nicht übersteigt, muss das Schiff am Ende einer Profillinie wenden. Mit oft bis zu 16 geschleppten Hydrofonketten, jede bis zu 8 km lang, ist dies keine triviale Operation und erfordert oft mehrere Stunden. Für eine Profillänge von 45 km kommen auf diese Weise zu einer Erkundungszeit von fünf Stunden weitere drei Stunden für das Wendemanöver hinzu. Eine tägliche Profillänge von 100 km wird daher als sehr produktiv angesehen.

#### 2.4.4 Seismische Tomografie

Tomografie ist ein inverses Problem. Dies bedeutet, dass aus Messwerten (z. B. Amplitude, Dämpfung oder Laufzeit), welche die den Untergrund durchlaufene Energie charakterisieren, Rückschlüsse gezogen werden auf die physikalischen Eigenschaften des durchstrahlten Untergrunds (z. B. Wellengeschwindigkeiten, Dichte, Absorption). Hierbei sind die Messwerte Linienintegrale der Eigenschaften entlang des seismischen Strahls und enthalten somit eine summarische Information über das gesamte durchlaufene Gebiet.

Das Linienintegral einer Größe entlang eines bestimmten Weges wird durch die Radon-Transformation beschrieben (vgl. Abschn. 2.4.2.2). Dieser als Projektion bezeichnete Schritt beschreibt das kumulative Signal dieser Größe im Transformationsraum. Diese wird einem bestimmten Wellenstrahl zugeordnet, und somit beschreibt die Projektion den Vorwärtsteil des inversen Problems.

Um die räumliche Verteilung der gesuchten Eigenschaften zu erhalten, müssen diese Projektionen invertiert werden. Je nach den getroffenen Annahmen stehen unterschiedliche Ansätze zur Verfügung. Beispielsweise erhält man im Fall nicht gekrümmter Strahlen die räumliche Verteilung der gesuchten Eigenschaft im Ortsbereich aus der Rückprojektion der gefilterten inversen Fourier-Transformierten der Projektionen dieser Eigenschaft (Chapman 1987; Sheriff und Geldart 1995). Da die Strahlen jedoch fast immer gekrümmkt sind, beruhen die heute angewendeten Laufzeittomografien auf Strahlverfolgung (*ray tracing*) oder einer numerischen Lösung der Eikonalgleichung (Gl. 2.58) mittels Finiter Differenzen (siehe z. B. Červený 2001 sowie Vidale 1988; Zelt und Smith 1992; Hole und Zelt 1995).

Mathematisch betrachtet ist die Beziehung zwischen seismischen Laufzeiten und einer heterogenen Geschwindigkeitsverteilung im Untergrund ein nichtlineares Problem. Da dieses nicht direkt gelöst werden kann, werden die letzten vier der folgenden Bearbeitungsschritte so lange iterativ durchlaufen, bis keine weitere Verbesserung mehr erzielt werden kann:

- 1 Aufstellen eines ersten, vereinfachten Startmodells der Geschwindigkeitsverteilung;
- 2 Numerische Modellierung der seismischen Laufzeiten für ein vorgegebenes Modell der Geschwindigkeitsverteilung;
- 3 Vergleich der berechneten mit den gemessenen Laufzeiten;
- 4 Berechnung von Verbesserungen des Geschwindigkeitsmodells basierend auf den Differenzen zwischen berechneten mit den gemessenen Laufzeiten;
- 5 Aktualisierung des Geschwindigkeitsmodells.

Das Startmodell in Schritt 1 wird auf der Grundlage vorhandener Informationen erstellt. Neben Auswertungen anderer geophysikalischer Messungen sind dies oft Daten aus Bohrungen, geologische Kartierungen oder Ergebnisse aus ähnlichen, früher untersuchten Gebieten. Die Qualität des Startmodells beeinflusst nicht unerheblich jene der tomografischen Inversion.

In der Seismik wird die Methode der Tomografie sowohl auf die Dämpfung  $1/Q$  bzw. den Qualitätsfaktor  $Q$  angewendet als auch auf die Laufzeiten seismischer Kompressions- oder Scherwellen  $t = \int ds/v(s)$ . Hierbei werden meist prozentuale Änderungen der betrachteten Eigenschaften dargestellt, oft auch logarithmiert. Die Radon-Transformation (Gl. 2.133) beschreibt als Linienintegral einer Größe entlang eines Wegs das kumulative Signal dieser Größe im  $(\ell, \theta)$ -Raum und ordnet dies einem bestimmten Wellenstrahl zu. Ziel der Tomografie ist es nun, die einzelnen Terme dieser Integration bestimmten Volumenelementen im  $(x, y)$ -Ortsbereich zuzuordnen. Hierzu bedarf es einer Rücktransformation.

Als die zur Radon-Projektion gehörige Rückprojektion (*back projection*)  $h(x, y)$  wird die Abbildung aus dem  $(\ell, \theta)$ -Transformationsbereich zurück in den  $(x, y)$ -Ortsbereich bezeichnet. Sie entspricht näherungsweise der inversen Radon-Transformation und besteht aus der Aufsummierung aller Projektionen, zu denen der Wert  $g(x_1, y_1)$  einer Eigenschaft  $g$  am Punkt  $(x_1, y_1)$  beigetragen hat, also die Summe der Messwerte aller Strahlen durch den Punkt  $(x_1, y_1)$ :

$$h(x, y) = \int_0^{\pi} G(\ell, \theta) d\theta = \int_0^{\pi} G(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta. \quad (2.193)$$

Hierbei ist zunächst ohne Belang, ob es sich bei der betrachteten Eigenschaft um Amplituden oder Geschwindigkeiten handelt. Allerdings liefert  $h(x, y)$  nur ein verschwommenes, unscharfes Bild von  $g(x, y)$ , welches durch Dekonvolution bzw. Filterung noch verbessert werden kann.

Wie im Folgenden gezeigt wird, erhält man die Eigenschaft  $g(x,y)$  exakt aus der Rückprojektion der transformierten und sodann gefilterten Projektionen. Hierbei steht  $G(\ell, \theta)$  für die Radon-Transformierte, also die Projektion von  $g(x,y)$ ;  $G_g(u,v) = G_g(\rho, \theta)$  für die 2D-Fourier-Transformierte von  $g(x,y)$ ; und  $G_p(\rho, \theta)$  für die 1D-Fourier-Transformierte von  $G(\ell, \theta)$ . Um  $g(x,y)$  nur aus den Projektionen  $G(\ell, \theta)$  rekonstruieren zu können, nutzt man zunächst das Fourier-Projektionstheorem. Dieses besagt, dass die 2D-Fourier-Transformierte von  $g(x,y)$  gleich ist der 1D-Fourier-Transformierten der Projektionen  $G(\ell, \theta)$ :  $G_g(u,v) = G_g(\rho, \theta) = G_p(\rho, \theta)$ . Hierzu betrachten wir zunächst die 2D-Fourier-Transformierte von  $g(x,y)$ :

$$\begin{aligned} G_g(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i2\pi\rho(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))} dx dy = G_g(\rho, \theta), \end{aligned} \quad (2.194)$$

wobei  $(u,v)$  durch die Polarkoordinaten  $(\rho,\theta)$  ersetzt wurden mit  $u = \rho \cos(\theta)$ ;  $v = \rho \sin(\theta)$ .<sup>22</sup> Die 1D-Fourier-Transformierte von  $G(\ell, \theta)$  ist:

$$\begin{aligned} G_p(\ell, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \ell) dx dy \right] e^{-i2\pi\rho\ell} d\ell \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\rho\ell} \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \ell) d\ell \right]}_{e^{-i2\pi\rho(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))}} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i2\pi\rho(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))} dx dy. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Somit folgt aus Gl. 2.194 und 2.195, dass  $G_g(u,v) = G_g(\rho, \theta) = G_p(\ell, \theta)$  ist.

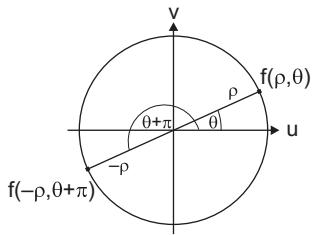
Ähnlich wie man die seismischen Abbilder von Reflektoren, welche sich mehr als eingebettetes Wavelet als ein scharfer Impuls darstellen, durch Dekonvolution verbessern kann, erhält man die Verteilung der Eigenschaft  $g(x,y)$  im Ortsbereich aus den Projektionen durch Transformation, Filterung und Rückprojektion. Hierzu betrachtet man zunächst die inverse 2D-Fourier-Transformation von  $G_g(u,v)$  (Gl. 2.194):

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_g(u,v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_g(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho\ell} \rho d\rho d\theta. \quad (2.196)$$

---

<sup>22</sup>Damit gilt dann auch für die Fläche  $du \cdot dv = d\rho \cdot (\rho d\theta)$ .

**Abb. 2.80** Zur Symmetrie von Funktionswerten in Polarkoordinaten



wobei zusätzlich ausgenutzt wurde, dass  $\ell = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$  ist. Nun vertauscht man in Gl. 2.196 die Integrationsgrenzen. Dazu wird ausgenutzt, dass sich beim Übergang von  $\theta$  auf  $\theta + \pi$  die Vorzeichen von  $\cos(\theta)$ ,  $\sin(\theta)$  und  $\ell$  ändern und dass für eine Funktion in Polarkoordinaten gilt (Abb. 2.80):  $f(\rho, \theta) = f(-\rho, \theta + \pi)$ . Aufteilen des zweiten Integrals in Gl. 2.196 ergibt:

$$g(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G_g(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho\ell} \rho d\rho d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} G_g(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho\ell} \rho d\rho d\theta.$$

Der zweite Summand ist gleich:  $-\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G_g(\rho, \theta + \pi) e^{i2\pi\rho\ell} \rho d\rho d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 G_g(-\rho, \theta + \pi) e^{-i2\pi\rho\ell} |\rho| d\rho d\theta, \text{ da } -\rho = |\rho|, \text{ wenn } \rho \text{ negativ ist.}$$

Damit ergibt sich für Gl. 2.196:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_g(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho\ell} |\rho| d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G_p(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho\ell} |\rho| d\rho}_{G_{ip}(\ell, \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} G_{ip}(\ell, \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2.197)$$

wobei  $G_{ip}(\ell, \theta)$  die mit  $|\rho|$  multiplizierte inverse 1D-Fourier-Transformation von  $G_p(\rho, \theta)$  ist. Eine Multiplikation im Transformationsbereich entspricht einer Konvolution im Originalbereich und somit einer Filterung. Die rechte Seite von Gl. 2.197 entspricht aber der Rückprojektion, Gl. 2.193. Also erhält man die räumliche Verteilung der Eigenschaft  $g(x, y)$  aus der Rückprojektion der mit  $|\rho|$  gefilterten inversen Fourier-Transformierten der Projektionen von  $g(x, y)$ . Für die praktische Durchführung der Rechenoperationen werden die Integrale durch Summen angenähert und das Volumen hierfür in Gitterelemente diskretisiert, in denen die Eigenschaft konstante Werte annimmt.

Entscheidend für eine erfolgreiche Tomografie ist eine möglichst gleichmäßige Durchstrahlung des interessierenden Bereichs. Hierbei kann eine systematische Variation der seismischen Wellengeschwindigkeiten zu einer Brechung der Strahlen

führen, die je nach Konfiguration von Quellen und Empfängern bewirkt, dass bestimmte Bereiche nicht durchstrahlt werden. Besonders geeignet für tomografische Untersuchungen sind insbesondere Erkundungen zwischen Bohrungen (*cross-hole surveys*). Je nach Fragestellung wird die Tomografie zur Untersuchung von Unterschieden von Amplitude (Dämpfung  $1/Q$ , Qualitätsfaktor  $Q$ ) oder Laufzeiten seismischer Kompressions- und Scherwellen eingesetzt.

In der seismischen Tomografie können sowohl die Laufzeiten der Wellen  $t = \int_S ds/v(S)$  entlang eines Strahlwegs  $S$  betrachtet werden als auch ihre Dämpfung, wobei  $u(S) = 1/v(S)$  hier die reziproke Geschwindigkeit bezeichnet. Für Raumwellen erhält man die Laufzeitverzögerung  $\Delta t$  relativ zu einer Bezugsgeschwindigkeit  $v_0$  aus:

$$\Delta t = t - t_0 = \int_S u(S)ds - \int_{S_0} u_0(S_0)ds \approx \int_{S_0} \overbrace{(u(S) - u_0(S_0))}^{\Delta u(S)} ds = \int_{S_0} \Delta u(S)ds. \quad (2.198)$$

Hierbei bezeichnen  $S_0$  und  $u_0$  den Strahlweg und die reziproke Geschwindigkeit aus dem Bezugsmodell. Ein alternativer Zugang besteht in der Minimierung der Differenz der Abweichungssquarette zwischen Messdaten und einem berechneten Startmodell als Lösung des verallgemeinerten Inversionsproblems (wie in Benz und Zand 1993; Lay und Wallace 1995, S. 244 ff.).

Die Laufzeitverzögerung ist ein dreidimensionales, von der Frequenz unabhängiges Problem. Dagegen stellt die in der Seismologie ebenfalls verwendete Analyse der Variation der Geschwindigkeit von Oberflächenwellen ein von der Frequenz abhängiges, zweidimensionales Problem dar. Dort ergibt sich die Tiefenvariation durch Lösung für verschiedene Frequenzen von Oberflächenwellen. Hierbei wird ausgenutzt, dass tieffrequente Oberflächenwellen eine größere Eindringtiefe besitzen als hochfrequente. Jede dieser beiden Vorgehensweisen ergibt somit die dreidimensionale Verteilung der gesuchten Größen.

Diskretisiert man den Strahlweg  $S_0$  im Untergrund für Gl. 2.198 in diskrete Blöcke mit ihren jeweiligen Strahlweginkrementen  $\vec{\ell}_j$  und Differenzen der reziproken Geschwindigkeiten  $\Delta u_j$ , so ergibt sich die gesamte Laufzeitdifferenz zu  $\Delta t = \sum \ell_j \Delta u_j$ . Eine Aufzeichnung eines einzigen Geophons reicht offensichtlich nicht aus, um die Differenz der inversen Geschwindigkeit  $\Delta u_j$  in mehreren Blöcken zu berechnen. Wenn jedoch an genügend vielen verschiedenen Geophonen Seismogramme bzgl. jeweils unterschiedlicher Strahlwege  $S_i$  aufgezeichnet werden, so ergibt sich eine hinreichend gute Überdeckung des in Blöcke unterteilten Untergrunds. Dann sind die Laufzeitdifferenzen:

$$\Delta t_i = \sum_j \ell_{i,j} \Delta u_j, \quad (2.199)$$

wo  $\ell_{i,j} = \partial t_i / \partial u_j$  der Strahlweg des i-ten Strahls im j-ten Block ist, welcher gleich der partiellen Ableitung der Laufzeit des i-ten Strahl nach der reziproken Geschwindigkeit des j-ten Blocks ist. Sind ebenso viele Strahlwege wie Blöcke vorhanden, ist dieses Problem für fehler- und rauschfreie Daten eindeutig lösbar. Gibt

es mehr Strahlwege als Blöcke, so ist das Problem überbestimmt. Aufgrund von Fehlern und Rauschen in den Daten sowie der notwendigerweise vereinfachenden Parametrisierung des Untergrunds ist das Problem jedoch gleichzeitig unterbestimmt. Solche gleichzeitig über- und unterbestimmte Probleme können mit der Methode der verallgemeinerten Inversen gelöst werden. Diese hier eingehend zu beschreiben übersteigt den Rahmen dieses Textes. Eine gut lesbare Darstellung findet sich jedoch z. B. bei Menke (2012) und eine auf die seismische Tomografie bezogene Zusammenfassung bei Lay und Wallace (1995).

Die zu lösende tomografische Umkehraufgabe wird nun jedoch formuliert. Hierzu führt man den Datenvektor  $\vec{d} = \Delta t_i$  ein sowie die Matrix  $\underline{\mathbf{G}} = \ell_{i,j} = \Delta t_i / \Delta u_j$  und den Vektor  $\vec{m} = \Delta u_j$  der Differenzen der reziproken Geschwindigkeiten. Dann lautet das Vorwärtsproblem (Gl. 2.199):  $\vec{d} = \underline{\mathbf{G}} \vec{m}$ . Dieses gilt es nun zu invertieren, also nach den gesuchten Differenzen der reziproken Geschwindigkeiten aufzulösen. Zu diesem Zweck betrachtet man zunächst den Anpassungsfehler  $\vec{F} = \vec{d} - \underline{\mathbf{G}} \vec{m}$  des Modells an die Daten. Würde die Modellvorhersage den Daten exakt entsprechen, so wären alle Elemente von  $\vec{F}$  gleich null. Da dies, wie erläutert, in der Regel nicht zutrifft, wird nun das Umkehrproblem so formuliert, dass die gesuchte Lösung einen minimalen Anpassungsfehler aufweist. Eine der hierfür gebräuchlichsten Methoden für diese Minimierung, die Methode der kleinsten Fehlerquadrate:

$$F^2 = \sum_i^N (d_i - \sum_j^M G_{i,j} m_j)^2, \quad (2.200)$$

welche die Summe der Quadrate der Anpassungsfehler minimiert. Hierfür bildet man zunächst die Ableitung von  $F^2$  nach den Modellparametern  $m_k$  und setzt sie zu null:

$$\frac{\partial F^2}{\partial m_k} = -2F \frac{\partial F}{\partial m_k} = -2 \sum_i^N (d_i - \sum_j^M G_{i,j} m_j) G_{i,k} = 0. \quad (2.201)$$

Nach Umformung erhält man hieraus:

$$\sum_i^N d_i G_{i,k} = \sum_i^N \sum_j^M G_{i,j} m_j G_{i,k} \text{ bzw. } \underline{\mathbf{G}}^T \vec{d} = \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}} \vec{m}. \quad (2.202)$$

Hierbei bezeichnet  $\underline{\mathbf{G}}^T = \ell_{j,i} = \Delta t_j / \Delta u_i$  die zu  $\underline{\mathbf{G}} = \ell_{i,j}$  transponierte Matrix. Die Gleichungen in Gl. 2.202 sind die von Gauß eingeführten Normalgleichungen. Ist  $\underline{\mathbf{G}}$  eine  $N \times M$ -Matrix, dann ist  $\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}$  eine quadratische  $M \times M$ -Matrix. Da  $\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}$  quadratisch ist, existiert auch eine Inverse sofern  $\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}$  nicht singulär ist. Da  $\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}$  zudem symmetrisch ist, sind die Eigenwerte positiv und reell. Somit kann man nach  $\vec{m}$  auflösen, indem man Gl. 2.202 von links mit der Inversen von  $\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}$  multipliziert:

$$\vec{m} = [\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}]^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \vec{d}. \quad (2.203)$$

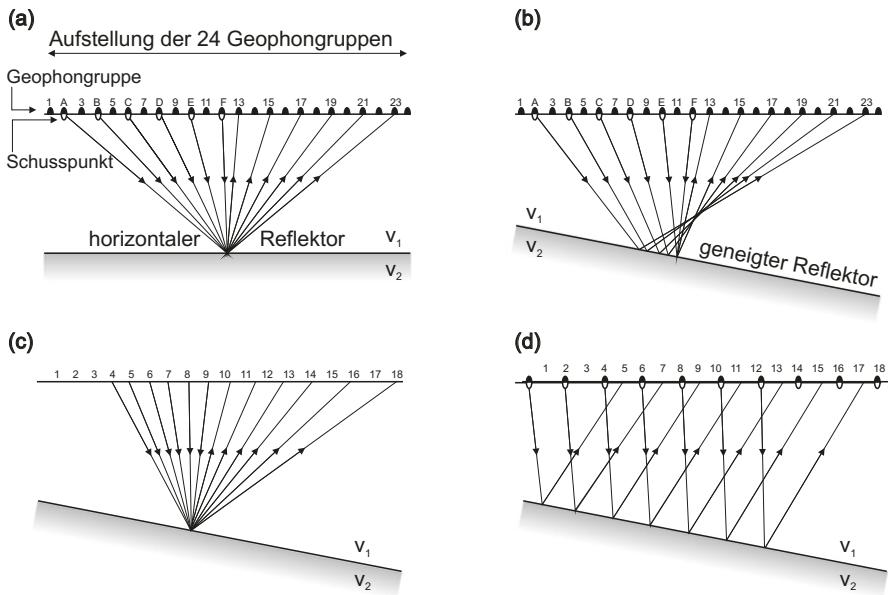
Hierbei bezeichnet  $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$  die zu  $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]$  inverse Matrix. Neben anderen eignet sich zur Lösung von Gl. 2.203 besonders die Methode der Singularwert-Zerlegung (*singular value decomposition*, SVD; siehe z. B. Menke 2012; Clauser 2016, S. 88–90), welche bei instabilen Lösungen entweder mit einem geeignet gewählten Faktor oder durch Unterdrücken kleiner Singularwerte in geeigneter Weise gedämpft werden kann, um eine stabile Lösung zu erhalten.

## 2.4.5 Bearbeitung reflexionsseismischer Daten

Um aus den digitalen Reflexionsdaten, den Schuss-Seismogrammen, einen möglichst getreuen Profilschnitt der geologischen Reflektoren zu erhalten, ist eine Reihe von Bearbeitungsschritten erforderlich. Je nach Zielsetzung – Suche nach Erdöl- bzw. Erdgasreservoiren, oberflächennahe Erkundung, geotechnische Fragestellungen – sind alle oder nur einige dieser Schritte erforderlich. Die folgende Liste führt eine Auswahl der Wichtigsten auf – der Ablaufplan einer industriellen Bearbeitung seismischer Daten enthält noch weitere Schritte, u. a. auch Wiederholungen der statischen Korrektur, die sog. Reststatik (*residual statics*) und erneute NMO-Korrekturen, Geschwindigkeitsanalysen und Filteroperationen.

### 2.4.5.1 Vorbearbeitung (*pre-processing*)

Die von den jeweiligen Empfängern (Geophone an Land bzw. Hydrophonketten im Wasser) aufgezeichneten Signale werden in konstanten zeitlichen Abständen von einigen Millisekunden (häufig 2 ms bzw. 4 ms) digital abgetastet (*multiplexing*). Um aus dieser Zeilenmatrix von zu gleichen Zeiten aufgezeichneten Daten für jeden Empfänger eine seismische Spur zu erhalten, muss diese Datenmatrix zunächst transponiert werden (*de-multiplexing*). Danach werden die Daten zur weiteren Verarbeitung abgespeichert. Ein hierzu sehr häufig verwendetes Format ist SEG Y (SEG 2002). Danach werden die einzelnen seismischen Spuren editiert, um offensichtliche Störsignale, verrauchte Spuren, monofrequente Signale usw. zu entfernen. Sodann erfolgt eine automatische Anpassung der Signalverstärkung (*automatic gain control*), welche den Effekt der geometrischen Dämpfung berücksichtigt (vgl. Abschn. 2.2.6). Anschließend werden die Spuren der mit Mehrfachüberdeckung gewonnenen Schuss-Seismogramme zu Spurengruppen umsortiert (Abb. 2.81), entweder hinsichtlich eines gemeinsamen Mittelpunkts der Auslage (*CMP*), einer konstanten Auslage (*constant offset*) bzw. eines vertikalen Strahlengangs (*zero-offset*). Abb. 2.81a zeigt ein Beispiel einer Stapelung einer CMP-Spurengruppe, bei der ein Punkt auf einem ebenen Reflektor sechsfach abgetastet wird (Schuss A–Geophon 23, Schuss B–Geophon 21, Schuss C–Geophon 19, Schuss D–Geophon 17, Schuss E–Geophon 15, Schuss F–Geophon 13). In Abb. 2.81b erkennt man jedoch, dass über einem geneigten Reflektor die Reflexionen nicht mehr von einem gemeinsamen Punkt erfolgen. Daher bewirkt eine CMP-Stapelung ohne Migration vor der Stapelung bzw. anschließende DMO-Korrektur eine Verschmierung des Reflexionspunkts. Das Stapeln von Reflexionen



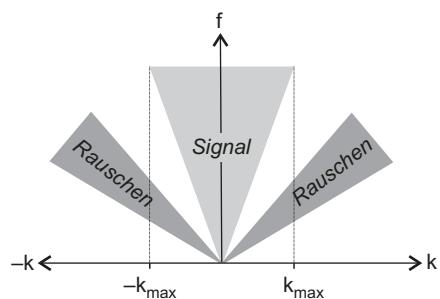
**Abb. 2.81** Spurenguppen eines Schuss-Seismogramms mit sechsfacher Überdeckung und 24 Geophongruppen. Aufeinanderfolgende Schusspunkte (A–F) sind jeweils um zwei Gruppenintervalle versetzt. In allen Teilbildern wird eine konstante Geschwindigkeit angenommen. (a) Stapelung einer CMP-Spurenguppe; (b) Bei einem geneigten Reflektor stammen die Reflexionen in einer gleichabständigen CMP-Spurenguppe nicht mehr von einem gemeinsamen Tiefenpunkt; (c) Stapeln von Reflexionen vom selben Punkt eines geneigten Reflektors in einer ungleichabständigen CMP-Spurenguppe; (d) Spurenguppe konstanter Auslage

vom selben Punkt eines geneigten Reflektors erfordert daher ungleiche Abstände der Geophone (Abb. 2.81c).

#### 2.4.5.2 Unterdrückung von Rauschen und Multiplen: Dekonvolution und f-k-Filterung

Wie in Abschn. 2.4.2.10 erläutert, dient die Dekonvolution zum Rückgängigmachen einer Filteroperation. An dieser Stelle im Ablauf der Bearbeitung seismischer Daten wird sie zur Unterdrückung von Rauschen und von Multiplen eingesetzt. Hierfür stehen verschiedene Ansätze zur Verfügung. Häufig eingesetzt werden die in Abschn. 2.4.2.10 beschriebenen Algorithmen der Spike-Dekonvolution und prädiktiven Dekonvolution. Zur Rausch- und Multiplenunterdrückung erfolgt die Dekonvolution meist vor dem Stapeln der Spuren einer CMP-Gruppe. Doch kann dieser Schritt später nochmals erforderlich sein und wird dann auch auf gestapelte Daten (*post-stack*) angewendet. Oft erfolgt die Dekonvolution auch oberflächenkonsistent. In diesem Fall wird der Dekonvolutions-Operator wie bei der statischen Korrektur (vgl. Abschn. 2.4.5.3) in Abhängigkeit von der Lage des Schusspunkts und den Orten der Geophone an der Oberfläche berechnet.

**Abb. 2.82** Darstellung der in der Regel getrennten Bereiche, in die sich Nutzsignal und Rauschen bei einer Transformation einer seismischen Spurengruppe in den f-k-Bereich aufteilen



Eine Filterung im Frequenz-Wellenzahlbereich (f-k-Filterung) bietet eine weitere Möglichkeit zur Rauschunterdrückung. Sie basiert auf dem durch Gl. 2.3 und 2.4 gegebenen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit  $v$ , Frequenz  $f$  und Wellenzahl  $k$ :  $f = vk/(2\pi)$ . Für eine bestimmte (wahre oder scheinbare) Geschwindigkeit  $v$  ergibt daher die Auftragung der Frequenz als Funktion der Wellenzahl eine Gerade. Die Geschwindigkeiten der meisten reflektierten Wellen sind größer als eine Minimalgeschwindigkeit  $v_{min}$ . In einem f-k-Diagramm fallen die zugehörigen Geraden daher in einen um die Frequenzachse gelegenen keilförmigen Bereich, während die zu den Störsignalen gehörenden Geraden in davon getrennte Bereiche fallen (Abb. 2.82). Zwar müssen die Bereiche von Nutzsignal und Rauschen, anders als in Abb. 2.82 gezeigt, nicht zwangsläufig symmetrisch um die Frequenzachse angeordnet sein. In jedem Fall eröffnet die Trennung in separate Bereiche von Nutz- und Störsignalen jedoch die Möglichkeit, ein Tiefpassfilter  $F(f,k)$  in Bezug auf die maximale Wellenzahl zu konstruieren, dessen Durchlassbereich durch diese Minimalgeschwindigkeit  $v_{min}$  definiert wird:

$$F(f, k) = \begin{cases} 1, & \text{für } |k_{max}| < 2\pi f/v_{min} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.204)$$

Dieses Tiefpassfilter hinsichtlich der Wellenzahl wirkt entsprechend als Hochpass hinsichtlich der Wellenlänge und unterdrückt somit u. a. langwellige Oberflächenwellen. Zweckmäßigerweise erfolgt die Filterung im Frequenz-Wellenzahlbereich durch Multiplikation des Filters  $F(f,k)$  mit der Transformierten  $G(f,k)$  der Seismogrammsspuren  $g(t,x)$  und anschließender Rücktransformation in den Zeit-Ortsbereich mittels einer zweidimensionalen inversen Fourier-Transformation:

$$\gamma(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_{max}}^{k_{max}} \int_{-f_N}^{f_N} G(\omega, k) F(\omega, k) e^{i(2\pi f t + k x)} df dk, \quad (2.205)$$

wobei  $f_N$  die Nyquist-Frequenz ist und  $\gamma(t,x)$  die gefilterte seismische Spurengruppe. Zwar könnte man auch  $F(f,k)$  aus dem Frequenz-Wellenzahlbereich in den Orts-Frequenzbereich rücktransformieren und dort die Filterung als Konvolution der Seismogrammsspuren  $g(t,x)$  mit dem rücktransformierten Filter vornehmen. In den

meisten Fällen ist jedoch die erste Vorgehensweise vorzuziehen. Wie in Abb. 2.82 zu erkennen, wird durch diese Filterung nicht alles Rauschen beseitigt – ein gewisser Anteil an langwelligem Rauschen fällt immer noch in das Passband des Filters. Dessen Anteil am Signal muss dann ggf. durch geeignete weitere Maßnahmen gedämpft bzw. unterdrückt werden.

#### 2.4.5.3 Statische Korrektur

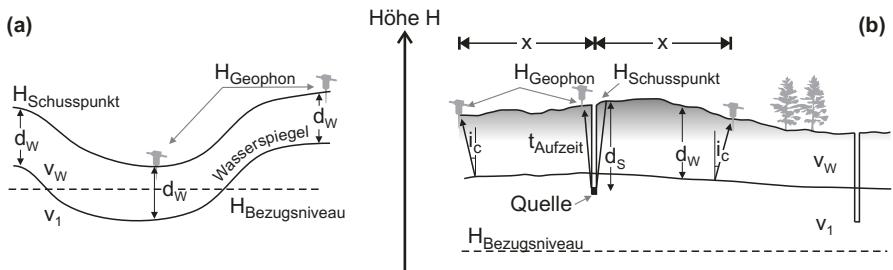
Statische Korrekturen berücksichtigen die verzögernde Wirkung der Verwitterungsschicht (Niedriggeschwindigkeitsschicht; *low velocity zone – LVZ*) und einer variablen Topografie auf die Einsatzzeiten einer Spur. Da diese für alle Einsatzzeiten einer Spur gleich ist, wird sie als statisch bezeichnet. Somit wirkt die statische Korrektur auf jeden Punkt einer Spur in gleicher Weise: Jeder Punkt wird um denselben Betrag verschoben. Im Gegensatz dazu werden die NMO-Korrekturen  $\Delta t_{NMO} = t(x) - t_0$  (Gl. 2.87 bzw. Gl. 2.89) dynamisch genannt, da die Krümmung der Reflexionshyperbeln mit der Auslage  $x$  bzw. der Laufzeit  $t$  variiert. Somit ergibt sich für jeden Punkt einer Spur eine andere zeitliche Verschiebung. Nach Subtraktion des richtigen NMO-Betrages erscheinen Reflexionen als Geraden, während Beugungen und Multiple weiterhin gekrümmt erscheinen, da ihre Hyperbeln (Gl. 2.95) stärker gekrümmmt sind als jene der Reflexionen (Gl. 2.91).

Für die statische Korrektur müssen Geschwindigkeiten und Mächtigkeiten der oberflächennahen Schicht zwischen Erdoberfläche und Bezugsniveau bekannt sein. Diese werden häufig aus einer Refraktions-Tomografie (vgl. Abschn. 2.5.5) oder aus refraktionsseismischen Nahlinien bzw. den Einsätzen der an der Unterkante der Niedriggeschwindigkeitsschicht geführten Welle bestimmt. Alternativ dazu können sie auch mittels Aufzeitschießen (*uphole shooting*) ermittelt werden, d. h. einer Aufzeichnung von Schüssen in verschiedenen Tiefen unter- und oberhalb des Bezugsniveaus mit nahezu senkrecht darüber an der Erdoberfläche platzierten Geophonen.

Es existieren verschiedene Ansätze zur statischen bzw. Verwitterungskorrektur (*weathering correction*)  $\Delta t_w$  zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Verzögerungen von Einsätzen in verschiedenen Spuren, welche durch eine unterschiedlich dicke Verwitterungsschicht oder unterschiedliche Höhenlagen von Geophon- und Schusspunkten verursacht wird. Im Folgenden werden zwei Methoden vorgestellt, die sich für Profile eignen, bei denen die Anregung an der Erdoberfläche erfolgt, z. B. durch Vibratoren, Fallgewichte oder Hammerschläge, oder durch Sprengungen in Bohrungen. Eine Übersicht über weitere Methoden findet sich z. B. bei Sheriff und Geldart (1995).

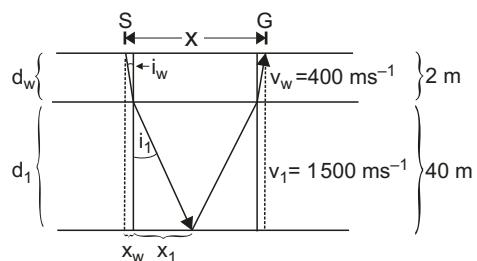
Nehmen wir zunächst an, dass die Anregung an der Erdoberfläche erfolgt (Abb. 2.83a). Die statische Korrektur erfolgt nun für jede Geophonspur in zwei Schritten: (1) Zunächst wird die Verzögerung korrigiert, die durch die im Vergleich zur darunterliegenden wassergesättigten Schicht niedrigere Geschwindigkeit der Verwitterungsschicht verursacht wird. Dies ist die sog. Verwitterungskorrektur  $\Delta t_w$ :

$$\Delta t_w = \frac{d_w}{v_w} - \frac{d_w}{v_1}, \quad (2.206)$$



**Abb. 2.83** Zur statischen Korrektur im Fall einer Anregung (a) an der Erdoberfläche bzw. (b) durch Sprengung im Bohrloch

**Abb. 2.84** Zur Weg- und Zeitverlängerung bei nichtvertikalem Strahlengang



wobei  $d_w$  jeweils die Mächtigkeit der Verwitterungsschicht am Schuss- bzw. Geophonpunkt ist (Abb. 2.83a). Die Gl. 2.206 gibt die Laufzeitdifferenz an, welche durch die langsamere Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_w$  in der Verwitterungsschicht entsteht im Vergleich zur höheren Geschwindigkeit  $v_1$  in der ersten Schicht. Durch Subtraktion von  $\Delta t_w$  von jeder Spur wird die Geschwindigkeit der Verwitterungsschicht (rechnerisch) auf die der ersten Schicht ( $v_1$ ) erhöht. (2) Anschließend wird die Verzögerung aufgrund unterschiedlicher Höhenlagen  $H$  von Schuss- und Geophonpunkten zur Höhe  $H_{Bezugsniveau}$  mit der Höhenkorrektur  $\Delta t_H$  beseitigt:

$$\Delta t_H = (H - H_{Bezugsniveau})/v_1. \quad (2.207)$$

Diese beiden Korrekturen können einfach angebracht werden, wenn die notwendigen Informationen vorhanden sind ( $v_w$ ,  $v_1$ ,  $H$ ): Die Geschwindigkeiten  $v_w$  und  $v_1$  können im Laufzeitdiagramm aus den Steigungen der Geraden für die direkte Welle und der an der Basis der Verwitterungsschicht geführten Welle berechnet werden; die Mächtigkeit der Verwitterungsschicht kann ebenfalls der Interpretation der geführten Welle entnommen werden (vgl. Abschn. 2.4.1.1).

Das folgende Beispiel veranschaulicht diese Korrektur (Abb. 2.84): Aus dem Brechungsgesetz kann der Zeitfehler bestimmt werden, der aus der Annahme vertikaler Strahlwege bei der statischen Korrektur herührt. Die maximale Profillänge sei 40 m, Dicke und Geschwindigkeit der Verwitterungsschicht und des Aquifers seien  $d_w = 2$  m und  $v_w = 400 \text{ m s}^{-1}$  bzw.  $d_1 = 40$  m und  $v_1 = 1500 \text{ m s}^{-1}$ . Dann gelten die folgenden Beziehungen (siehe Abb. 2.84):

- (a)  $x = 2(x_w + x_1)$ ; (b)  $\sin(i_w)/v_w = \sin(i_1)/v_1$ ;  
 (c)  $\tan(i_1) = x_1/d_1$ ; damit folgt:  $x_1 = d_1 \tan(i_1) = d_1 \frac{\sin(i_1)}{\sqrt{1-\sin^2(i_1)}}$ ;  
 (d)  $\tan(i_w) = x_w/d_w$ ; damit folgt:  $x_w = d_w \tan(i_w) = d_w \frac{\sin(i_w)}{\sqrt{1-\sin^2(i_w)}}$ .

Setzt man  $\sin(i_1) = \sin(i_w)v_1/v_w$  aus (b) in (c) ein, erhält man für  $x_1$  den Ausdruck:

$$x_1 = \frac{d_1 v_1 \sin(i_w)}{v_w \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_w^2} \sin^2(i_w)}} = \frac{d_1 v_1 \sin(i_w)}{\sqrt{v_w^2 - v_1^2 \sin^2(i_w)}}.$$

Damit können die Ausdrücke für  $x_w$  und  $x_1$  als Funktion des Winkels  $i_w$  in (a) eingesetzt werden:

$$\frac{x}{2} = x_w + x_1 = \frac{d_w \sin(i_w)}{\sqrt{1 - \sin^2(i_w)}} + \frac{d_1 v_1 \sin(i_w)}{\sqrt{v_w^2 - v_1^2 \sin^2(i_w)}}. \quad (2.208)$$

**Gl. 2.208** muss iterativ gelöst werden: Bei Vorgabe der Mächtigkeiten  $d_1$  und  $d_w$  sowie der Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_w$  wird der Einfallswinkel  $i_w$  so lange variiert, bis sich der richtige Wert für  $x$  ergibt bzw. die entsprechenden Werte von  $x_w$  und  $x_1$ . Für  $x = 40$  m folgt  $i_w \approx 6,8^\circ$  (exakt:  $i_w = 6,7835^\circ$ ) und hieraus  $x_w = 0,238$  m und  $x_1 = 19,762$  m. Damit beträgt der einfache Laufweg durch die Verwitterungszone  $\sqrt{d_w^2 + x_w^2} = 2,014$  m. Die Wegdifferenz  $\Delta s$  gegenüber rein vertikaler Ausbreitung ist somit  $\Delta s = 0,014$  m. Dies entspricht einer Laufzeitverlängerung von  $\Delta t = \Delta s / 400 \text{ m s}^{-1} = 0,035$  ms. Dies ist sehr wenig (3,5 %) im Vergleich zu typischen Laufzeiten bei der Erkundung des flachen Untergrunds in der Größenordnung von 10 ms.

Wird dagegen mittels einer Sprengung angeregt, so befindet sich die Energiequelle in der Tiefe  $d_S$  unterhalb der Erdoberfläche in einem wieder verfüllten Sprengloch (**Abb. 2.83b**). Man unterscheidet hierbei zwischen Korrekturen an den Schuss- und Geophonpunkten. Zudem werden rein vertikale Strahlwege angenommen und vorausgesetzt, dass die seismische Quelle unterhalb der Niedriggeschwindigkeitsschicht bzw. des Grundwasserspiegels liegt. Dann ist die Laufzeit eines Strahls von der Quelle zum Bezugsniveau mit den Bezeichnungen von **Abb. 2.83b**:

$$\Delta t_{Schusspunkt} = (H_{Schusspunkt} - d_S - H_{Bezugsniveau}) / v_1. \quad (2.209)$$

Entsprechend ist die Laufzeit eines Strahls vom Bezugsniveau zu einem Geophon auf der Erdoberfläche am Schusspunkt über der Quelle:

$$\Delta t_{Geophon} = \Delta t_{Schusspunkt} + t_{Aufzeit}. \quad (2.210)$$

Die Laufzeitkorrektur  $\Delta t_0$  am Schusspunkt ist daher:

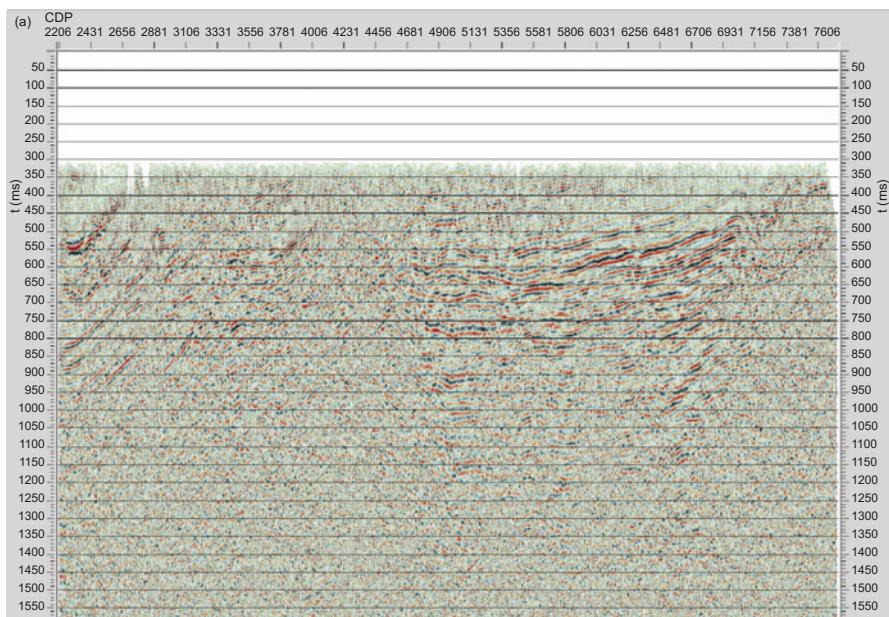
$$\begin{aligned} \Delta t_0 &= \Delta t_{Schusspunkt} + \Delta t_{Geophon} = 2\Delta t_{Schusspunkt} + t_{Aufzeit} \\ &= 2(H_{Schusspunkt} - d_S - H_{Bezugsniveau}) / v_1 + t_{Aufzeit}. \end{aligned} \quad (2.211)$$

Das Vermindern der Lotzeit  $t_0$  am Schusspunkt um die Laufzeitkorrektur  $\Delta t_0$  entspricht somit einem Verschieben von Quelle und Schussgeophon auf den Bezugshorizont. Da die Quelle unterhalb der Niedriggeschwindigkeitsschicht bzw. des Grundwasserspiegels liegen soll, wird hierdurch die Verzögerung durch die Niedriggeschwindigkeitsschicht beseitigt. Liegt die Quelle weit unterhalb des Bezugshorizonts, kann  $\Delta t_{\text{Schusspunkt}}$  auch negativ werden.

Die statische Korrektur kann auch automatisiert vorgenommen werden, indem charakteristische Reflektionen in den unterschiedlichen Spuren einer CMP-Gruppe korreliert werden, z. B. die Einsätze der an einem ebenen Grundwasserspiegel geführten Welle (vgl. Abschn. 2.4.1.1). Die Tiefen sind in diesen Fällen auf die Tiefenlage der jeweiligen Reflektoren bezogen, z. B. auf den Grundwasserspiegel und nicht auf die Geländeoberkante. Alternativ wird auch eine als fehlerfrei angenommene Spur als Referenz verwendet. Hierzu ergibt deren Kreuzkorrelation (vgl. Abschn. 2.4.2.11) die Zeitverschiebung, für die die Spuren optimal miteinander korrelieren. Dabei ist die Größe der Kreuzkorrelation gleichzeitig ein Maß für die durch eine solche Verschiebung erzielte Verbesserung. Dies ist insbesondere bei schlechter Datenqualität wertvoll, da hier eine optische Korrelation versagt. Die Kreuzkorrelation wird daher regelmäßig zur Berechnung der statischen Korrekturen verwendet – auch für reststatische Korrekturen, bei denen starke Reflexionshorizonte als Referenz benutzt werden. Ebenso dient sie zur Berechnung der NMO-Korrektur, um Spuren unterschiedlicher Geophone vor der Stapelung entsprechend auszurichten und damit die jeweiligen Reflexionshyperbeln „gerade zu biegen“. Nach Maßgabe bestimmter Kriterien können solche Verschiebungen bestimmt und automatisch angebracht werden. Konsistenztests stellen hierbei sicher, dass z. B. die statischen Korrekturen für alle Spuren unterhalb eines bestimmten Punktes immer gleich sind. Abb. 2.85 gibt ein Beispiel für eine automatische statische Korrektur. In dem dort gezeigten Beispiel wurden die Parameter für die Berechnung der Kreuzkorrelation dreimal iterativ angepasst.

Statische und dynamische Korrekturen beeinflussen sich gegenseitig: Die statische Korrektur erfolgt am effektivsten nach Optimierung der NMO-Korrektur, die ihrerseits am erfolgreichsten nach optimaler statischer Korrektur ist. Daher werden beide Korrekturen häufig mehrmals hintereinander angebracht mit jeweils optimierten Parametern.

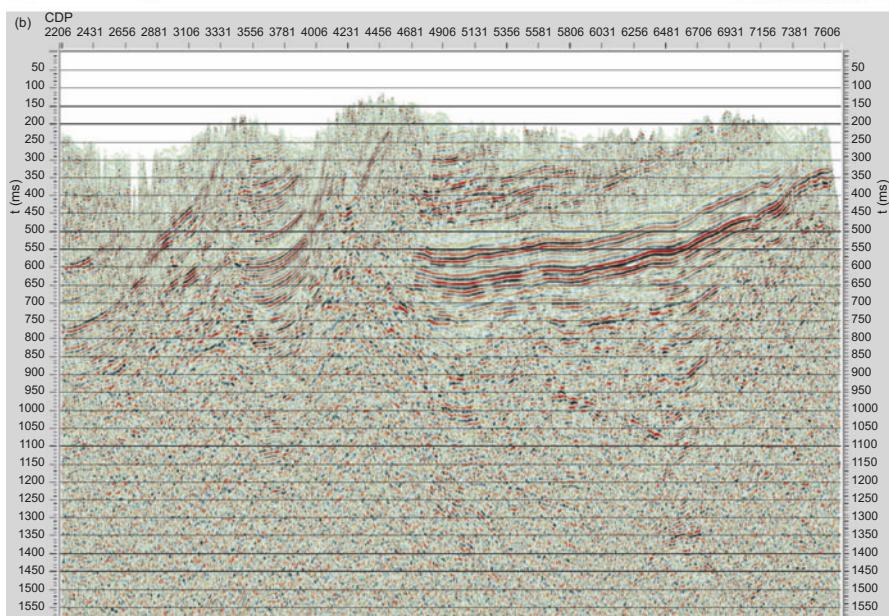
Bei dieser Reststatik werden für alle Geophone Laufzeitkorrekturen mit Hilfe einer Kreuzkorrelation der Spuren von CMP-Gruppen mit der gestapelten Spur im Zeitfenster eines starken Reflexionseinsatzes ermittelt. Anschließend wird durch eine Ausgleichsrechnung sichergestellt, dass die statischen Korrekturen oberflächenkonsistent sind. Der Berechnung von oberflächenkonsistenten statischen Korrekturen liegt ein statistischer Ansatz zur Analyse einer großen Menge von Einzelpuren zugrunde. Dabei wird jede seismische Spur in die Komponenten für Schuss- und Geophonpunkte, Auslage und CDP-Korrektur zerlegt. Die Bedingung zur Einhaltung von Oberflächenkonsistenz ist, dass der seismische Wellenzug lediglich von den Orten des Schusspunkts und der Geophone und nicht vom Weg der Strahlen von der Quelle zu den Empfängern abhängt. Die Berechnung der Korrekturwerte für oberflächenkonsistente Anpassungen erfolgt entweder iterativ nach



nagra.

Profil 11-NS-02, Stapelung aus dem Messtrupp

Petrologic  
Geophysical Services GmbH



nagra.

Profil 11-NS-02, Stapelung mit Grundstatik und drei Iterationen Restatik

Petrologic  
Geophysical Services GmbH

**Abb. 2.85** Statische Korrektur: Oben – Ergebnis einer CMP-Rohstapelung; Unten – Ergebnis einer statischen Korrektur mit Hilfe der Kreuzkorrelation. Das in der Nordschweiz aufgezeichnete 16,53 km lange Nord-Süd-Profil umfasst insgesamt 5510 CDP-Punkte im Abstand von jeweils 3 m. Zur Anregung dienten 2188 lineare, 18 Sekunden dauernde Vibroseis-sweeps (12 Hz–102 Hz) und 166 Sprengungen, zur Aufzeichnung jeweils 660 Kanäle pro Zentralschuss (Rybaczky 2013); Horizontale Koordinate: CMP-Nummer, vertikale Koordinate: Zweiweglaufzeit

dem Gauß-Seidel-Verfahren oder mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Sodann wird die Korrektur angebracht und das Verfahren iteriert.

#### 2.4.5.4 Dynamische Korrektur und Geschwindigkeitsanalyse

Durch die dynamische Korrektur werden die Reflektoren durch Geradebiegen der Reflexionshyperbeln in den seismischen Sektionen sichtbar gemacht. Die Hyperbelkrümmung  $\Delta t_{NMO}$  ist nach Gl. 2.88 durch

$$\Delta t_{NMO} = t - t_0 = t_0 \left( \sqrt{1 + \frac{x^2}{t_0^2 v^2}} - 1 \right) \quad (2.212)$$

definiert. Hierbei ist  $v$  entweder die Stapelgeschwindigkeit  $v_s$ , die sich z. B. für verschiedene Auslagen  $x$  berechnen lässt:

$$v_s = \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{t_1^2 - t_2^2}}, \quad (2.213)$$

oder die rms-Geschwindigkeit eines horizontal geschichteten Untergrunds (Gl. 2.92):

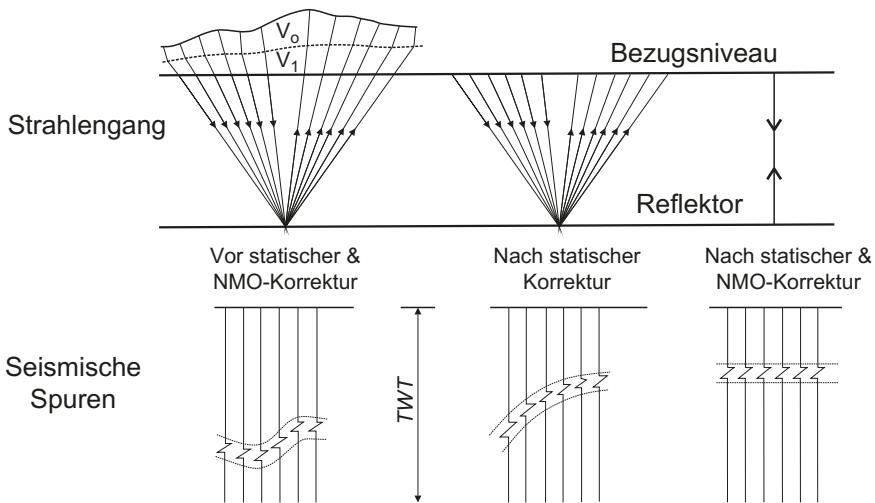
$$v_{rms,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}}. \quad (2.214)$$

Sie kann auch iterativ als jene Geschwindigkeit bestimmt werden, welche die Hyperbelkrümmung am besten beseitigt (vgl. Abschn. 2.3.3).

Dies kann z. B. mit Hilfe einer Konstantgeschwindigkeits-Analyse (*constant velocity scan*) erfolgen. Hierbei werden auf die CMP-Gruppe NMO-Korrekturen mit verschiedenen Geschwindigkeiten angewendet und für jede Reflexion die Geschwindigkeit ermittelt, welche deren Hyperbelkrümmung beseitigt. Da die Auswertung visuell erfolgt, eignet sich diese Methode jedoch nicht für eine automatisierte Analyse. Abb. 2.86 zeigt die Wirkung von statischer und dynamischer Korrektur einer seismischen Zeitsektion.

Eine weitere Möglichkeit zur Geschwindigkeitsbestimmung bietet die  $t^2 - x^2$ -Methode durch Bildung der Kehrwerte der Steigungen der zu den jeweiligen Reflexionen gehörigen Geraden (Gl. 2.91). Abb. 2.87 zeigt ein Beispiel.

Die Bestimmung einer optimalen Stapelgeschwindigkeit kann jedoch auch automatisiert werden. Hierzu wird mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$  die NMO-Korrektur für jeden diskreten Wert einer seismischen Spur und deren  $t_0$ -Wert berechnet. Dann wird in einem Orts-Zeitfenster um  $t_0$  das Maß der Übereinstimmung der Spuren in diesem Fenster bestimmt. Die Ähnlichkeit der Spuren könnte z. B. über ihre Kreuzkorrelation (Gl. 2.175) ermittelt werden. Als hierfür besonders geeignet hat sich jedoch der Ähnlichkeits-(*semblance*-)Koeffizient  $S$  erwiesen, vor dessen Berechnung die Signale  $x_{m,n}$  der  $N$  Spuren im Zeitfenster der Länge  $M$  mit



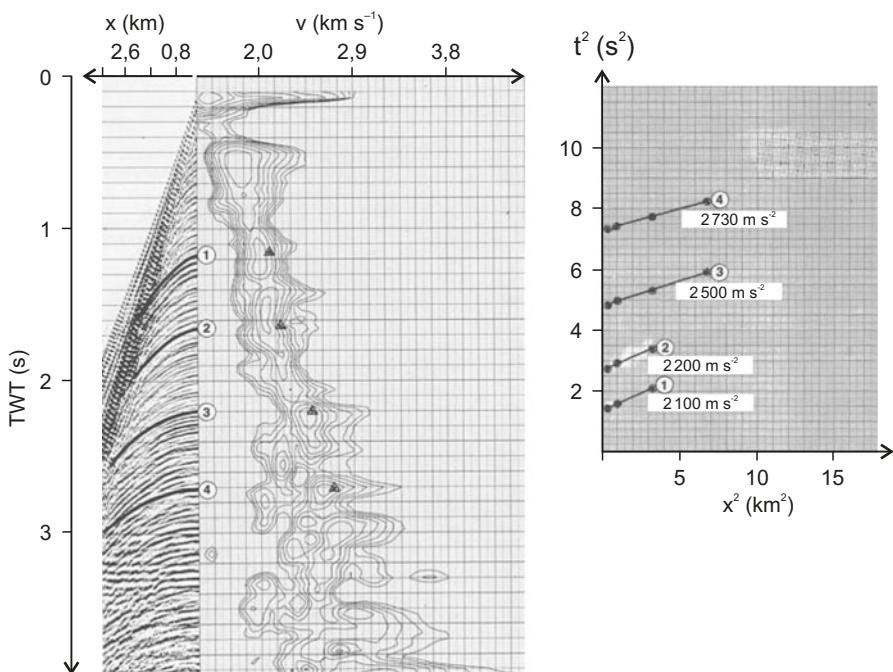
**Abb. 2.86** Auswirkung von statischer und NMO-Korrektur auf eine seismische Zeitsektion (nach Parasnis 1997)

Mittelpunkts-Zeitindex  $k$  auf deren Maximalamplitude normiert werden (siehe z. B. Yilmaz 2001):

$$0 \leq S(k) = \frac{1}{N} \frac{\sum_{m=k-\frac{M}{2}}^{k+\frac{M}{2}} \left( \sum_{n=1}^N x_{m,n} \right)^2}{\sum_{m=k-\frac{M}{2}}^{k+\frac{M}{2}} \sum_{n=1}^N x_{m,n}^2} \leq 1. \quad (2.215)$$

Der Ähnlichkeits-Koeffizient setzt also die Energiesumme der  $M$  gestapelten Spuren ins Verhältnis zur kumulativen Energie aller Spuren im Auswertefenster. Wegen der Normierung auf die Anzahl der Spuren und der Normierung der im Fenster verwendeten Daten hat  $S$  einen Wertebereich zwischen null und eins. Die Energie einer gestapelten Spur ist am größten, wenn die aufsummierten Signale in Phase sind – dann ist die NMO-Korrektur optimal. Zur Berechnung der hierzu passenden Stapelgeschwindigkeit wird der berechnete Ähnlichkeits-Koeffizient in ein  $(v, t_0)$ -Diagramm eingetragen und die Berechnung für alle Werte von  $v$  und  $t_0$  wiederholt. Zur Ermittlung einer optimalen Geschwindigkeits-Tiefenfunktion wird für jede Primärreflexion der maximale Ähnlichkeits-Koeffizient bestimmt. Dieser identifiziert dann die für diese Zweiweglaufzeit (und damit Tiefe) optimale Stapelgeschwindigkeit  $v_s$ . Abb. 2.88 zeigt ein Beispiel für eine solche automatisierte Geschwindigkeitsanalyse. Wie zu erwarten, sind die über den Tiefenbereich bis zum Reflektor mittelnden rms-Stapelgeschwindigkeiten kleiner (oder gleich) der aus ihnen berechneten Intervallgeschwindigkeiten.

Der Ähnlichkeits-Koeffizient ist ein häufig verwendetes, wenn auch nicht zwangsläufig optimales Kohärenzmaß: Da sein Wertebereich von null bis eins durch Normierung auf die Maximalamplitude im Auswertefenster bewirkt wird, ist er



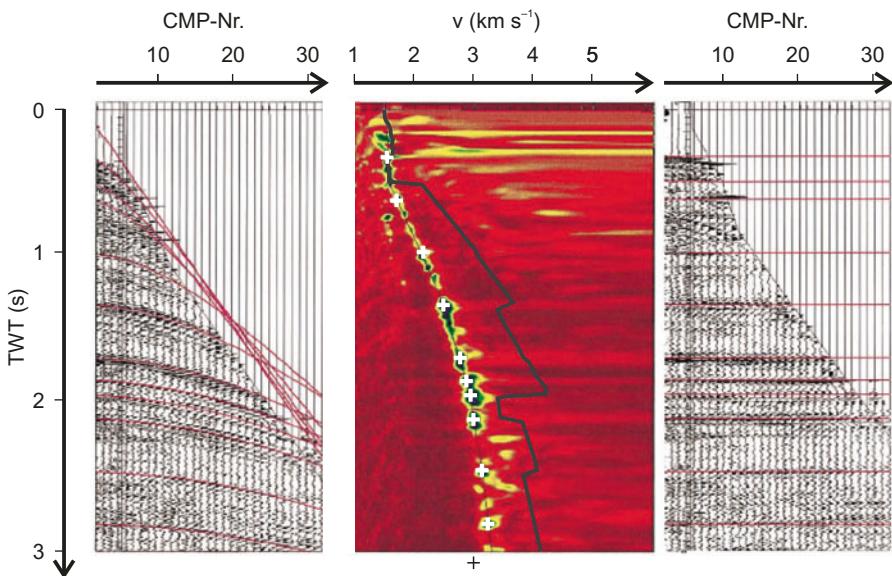
**Abb. 2.87** Geschwindigkeitsanalyse mit der  $t^2$ - $x^2$ -Methode. Links: CMP-Gruppe (vertikale Achse: Zweiweglaufzeit TWT); Mitte: Zugehöriges Geschwindigkeitsspektrum – Dreiecke markieren die aus den Steigungen der  $t^2$ - $x^2$ -Gerden bestimmten Werte; Rechts: Auftragung der Reflexionseinsätze in der CMP-Gruppe in ein  $t^2$ - $x^2$ -Diagramm und daraus ermittelte Schichtgeschwindigkeiten (nach Yilmaz 2001)

durch die unterschiedlichen Maximalamplituden in den verschiedenen Auswertefenstern beeinflusst. Auch könnte ggf. eine Wichtung der verwendeten Spuren nach ihrer Entfernung zur seismischen Quelle sinnvoll sein. Denn für kleine Auslagen (und entsprechend kleine Variationen im Ähnlichkeits-Koeffizienten) variiert die Hyperbelkrümmung nur wenig. Eine gute Kohärenz ergibt sich hier auch noch für deutlich unterschiedliche Geschwindigkeiten.

Die Geschwindigkeitsanalyse ist bei der Bearbeitung seismischer Daten ein ganz wesentlicher Schritt, der mit einem großen Aufwand verbunden ist. Denn nur ein gutes Geschwindigkeitsmodell ermöglicht eine belastbare Umrechnung von Reflexionszeiten in Tiefen. Und die Angabe der Lage eines Zielhorizonts zieht bei der Erschließung von Reservoiren aller Art Entscheidungen über die Art und Tiefe von Bohrungen nach sich, die mit Kosten verbunden sind, welche die der seismischen Erkundung in der Regel weit übersteigen.

#### 2.4.5.5 Bandpassfilterung

Durch Bandpassfilterung werden die in den Reflexionssignalen enthaltenen Frequenzen hervorgehoben und gleichzeitig die langwelligeren Oberflächenwellen unterdrückt. Nach vorangegangener Fourier-Transformation der seismischen Spuren erfolgt sie in der Regel im Frequenzbereich. Hierzu gibt es hier eine Vielzahl



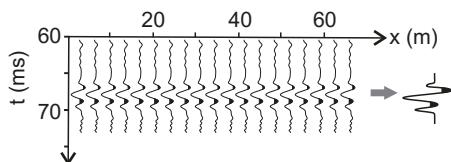
**Abb. 2.88** Links: CMP-Gruppe mit rot hervorgehobenen Primärreflexionen (vertikale Achse: Zweiweglaufzeit TWT). Mitte: Zughörige Geschwindigkeitsanalyse mit farbcodiertem Ähnlichkeit-Koeffizienten. Die mit einer dünnen Linie verbundenen Pluszeichen markieren die mit dessen Maxima zusammenfallenden Maxima der für die jeweiligen Primärreflexionen optimalen Stapelgeschwindigkeiten. Die dicke Linie zeigt die Variation der mittels Gl. 2.93 aus den rms-Geschwindigkeiten ermittelten Intervallgeschwindigkeiten. Rechts: CMP-Gruppe mit rot hervorgehobenen Primärreflexionen nach Beseitigung der Hyperbelkrümmung mit Hilfe der ermittelten rms-Geschwindigkeiten (nach Yilmaz 2001)

verschiedener Filter mit jeweils unterschiedlichen Eigenschaften. Bei Sheriff und Geldart (1995) findet sich eine knappe, aber gute Einführung zu den in der Seismik verwendeten digitalen Filtermethoden. Buttkus (2000) und Scherbaum (2001) vertiefen das Thema speziell in Hinblick auf Anwendungen in der Geophysik im Allgemeinen und der Seismik im Speziellen. Andere weiterführende, ausführliche Texte zum Thema der digitalen Signalverarbeitung finden sich im Bereich der Elektrotechnik. Oppenheim und Schafer (2009) ist in diesem Bereich seit 40 Jahren ein Standardwerk und mittlerweile in der dritten Auflage erschienen.

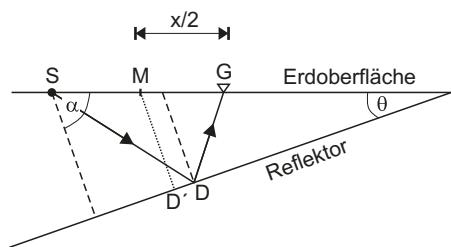
#### 2.4.5.6 CMP-Stapeln (stacking)

Nach vorangegangener statischer und dynamischer Korrektur werden die Daten in allen CMP-Gruppen zu einer Summenspur (*stack*) gestapelt. Durch Auftragen dieser Summenspuren als Funktion der CMP-Nummer bzw. der Koordinaten der Mittelpunkte der jeweiligen CMP-Gruppen erhält man eine CMP-Stapelsektion. Hierdurch wird das Signal/Rausch-Verhältnis verbessert (Abb. 2.89) und das Volumen der weiter zu bearbeitenden Daten um den Faktor des Überdeckungsgrads vermindert.

**Abb. 2.89** Stapelung von Spuren einer CMP-Gruppe nach statischer und dynamischer Korrektur zur Verbesserung des Signal/Rausch-Verhältnisses (nach Burger 1992)



**Abb. 2.90** Geometrie zur DMO-Korrektur für einen geneigten, ebenen Reflektor (nach Yilmaz 2001)



#### 2.4.5.7 DMO-Bearbeitung (DMO processing)

Bei großen land- oder seeseismischen Erkundungen erfolgt die Beseitigung der Hyperbelkrümmung entweder im Rahmen der Migration von Lotzeit-Sektionen vor dem Stapeln (*pre-stack migration*) der CMP-Gruppen (z. B. mit einer Kirchhoff-Migration, vgl. Abschn. 2.4.5.8) oder durch eine auf die NMO-Korrektur folgende DMO-Korrektur der unmigrierten, ungestapelten CMP-Gruppen.

Berechnet man für einen geneigten, ebenen Reflektor (Abb. 2.90) die Laufzeit vom Schusspunkt S über den Reflexionspunkt D zum Geophon G, so markiert der Mittelpunkt M der Auslage nicht mehr die vertikale Projektion des Reflexionspunkts auf die Erdoberfläche. Dies ist nur für einen horizontalen Reflektor der Fall, bei dem die Gruppe der CDP-Spuren mit jener der CMP-Spuren identisch ist. Im Fall einer Schichtneigung oder von lateralen Geschwindigkeitsvariationen sind die beiden Spurenguppen unterschiedlich. Der Mittelpunkt M und der Reflexionspunkt D' des Lotstrahls sind allen Schuss–Geophon-Paaren innerhalb der CMP-Gruppe gemein, unabhängig vom Einfallen des Reflektors. Jedoch erhält man für jedes Schuss–Geophon-Paar der CMP-Gruppe einen anderen Reflexionspunkt D auf dem geneigten Reflektor (siehe Abb. 2.81).

Für einen geneigten Reflektor ergibt sich mit den Bezeichnungen von Abb. 2.90 die folgende 2D-Laufzeitkurve (Levin 1971; ausführliche Herleitung: siehe Yilmaz 2001, Appendix C3):

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2 \sin^2(\alpha)}{v^2}, \quad (2.216)$$

in der t die Laufzeit für den Strahlweg  $\overline{SDG}$  bezeichnet,  $t_0$  die Lotzeit für den Strahlweg  $\overline{MD'}$  am Mittelpunkt M und  $\alpha$  den Winkel zwischen der Reflektornormalen und der Erdoberfläche. Die NMO-Geschwindigkeit ist dann:

$$v_{NMO} = \frac{v}{\sin(\alpha)}. \quad (2.217)$$

Berücksichtigt man ferner, dass für die in Abb. 2.90 gezeigte Situation  $\sin(\alpha) = \cos(\theta)$  gilt, wo  $\theta$  der Neigungswinkel des Reflektors ist, dann lautet Gl. 2.216 mit dem Neigungswinkel  $\theta$  des Reflektors:

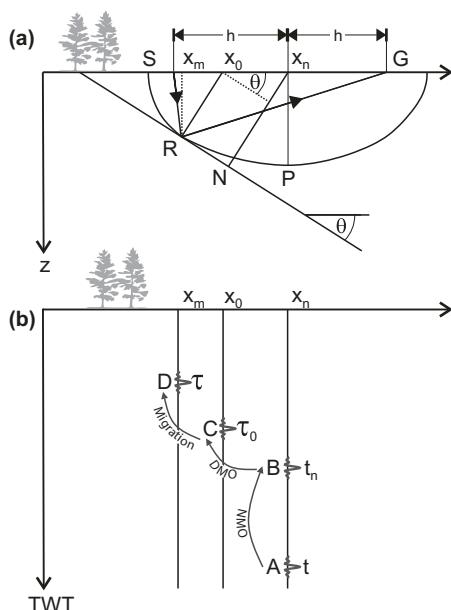
$$t^2 = t_0^2 + x^2 \underbrace{\left( \frac{\cos(\theta)}{v} \right)^2}_{1/v_{NMO}^2} = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{NMO}^2}. \quad (2.218)$$

Gl. 2.218 für die Laufzeit ist wie Gl. 2.83 für einen horizontalen, ebenen Reflektor eine Hyperbel. Allerdings ist die NMO-Geschwindigkeit nun der Quotient aus Schichtgeschwindigkeit und dem Kosinus des Neigungswinkels  $\theta$ . Hieraus folgt, dass die Stapelung von Reflexionen eines geneigten Reflektors eine höhere als die Schichtgeschwindigkeit erfordert. Somit ist die NMO-Geschwindigkeit eine Funktion des Einfallswinkels des Reflektors: Je größer der Einfallswinkel, desto größer auch die NMO-Geschwindigkeit und umso kleiner die Hyperbelkrümmung. Bei einer Schichtneigung von  $15^\circ$  beträgt der Unterschied zwischen Schicht- und NMO-Geschwindigkeit 4 %, bei einer Schichtneigung von  $30^\circ$  aber bereits 50 %. Die Differenz wird bei noch steilerem Einfallen schnell sehr viel größer. Entsprechend gilt, dass sich für eine horizontale Schicht mit hoher Geschwindigkeit dieselbe Hyperbelkrümmung ergibt wie für eine geneigte Schicht mit entsprechend niedrigerer Geschwindigkeit.

Die sequenzielle Beseitigung der Hyperbelkrümmung und des Einflusses einer Schichtneigung erfolgt im Rahmen der DMO-Bearbeitung. Sie korrigiert in einer CMP-Gruppe wirksam die infolge der Reflektorneigung auftretende Verschmierung des eigentlichen Reflexionspunktes. Hierbei muss die DMO-Bearbeitung von der gleichnamigen DMO-Korrektur (vgl. Abschn. 2.4.1.3) unterschieden werden, welche den Einfluss einer Schichtneigung auf die Ankunftszeiten seismischer Signale berücksichtigt (*dip moveout*). Für die DMO-Bearbeitung können verschiedene Techniken verwendet werden wie die Rückrechnung der seismischen Signale im Zeitbereich von den Geophonen bis zum Reflexionspunkt mit der Finite-Differenzen-Methode oder Methoden im Frequenzbereich nach Fourier-Transformation der Signale. Die Beschreibung dieser Methoden würde jedoch den Rahmen dieses Texts sprengen – man findet sie z. B. in Sheriff und Geldart (1995) und Yilmaz (2001).

Die DMO-Bearbeitung erfolgt in drei Schritten: Ausgangspunkt sind Spurengruppen konstanter Auslage nicht schichtnormaler Strahlen. Für die in Abb. 2.91a gezeigte Anordnung ist die Laufzeit  $\overline{SRG}/v$  des nicht schichtnormalen Strahls vom Schusspunkt S über den Reflexionspunkt R zum Geophon G, wobei  $v$  die Geschwindigkeit im Hangenden des geneigten Reflektors ist. Diese Laufzeit entspricht in Abb. 2.91b dem Punkt A in der rechten Spur des Profils bei der Auslage  $x_n$ . Das Ziel der DMO-Bearbeitung ist nun die Verschiebung des Signals dieser Gruppe seismischer Spuren der konstanten Auslage  $2h$  an den der Zeit  $\tau_0$  entsprechenden Punkt C in der zugehörigen Stapelsektion mit Mittelpunkt  $x_0$  von Spuren vertikalen Strahlengangs. Hierzu verschiebt zunächst eine NMO-Korrektur die der Zeit  $t$  entsprechende

**Abb. 2.91** (a) Geometrie für die Aufzeichnung nichtvertikaler Reflexionen von einer geneigten, ebenen Schichtgrenze (TWT: Zweiweglaufzeit). (b) Skizze einer Zeitsektion mit verschiedenen Laufzeiten (nach Yilmaz 2001)



seismische Signatur am Punkt A in der Spur bei der Auslage  $x_n$  zu dem der Zeit  $t_n$  entsprechenden Punkt B in derselben Spur. Sodann verschiebt die anschließende DMO-Korrektur die der Zeit  $t_n$  entsprechende seismische Signatur am Punkt B in der NMO-korrigierten Spur konstanter Auslage zu dem der Zeit  $\tau_0$  entsprechenden Punkt C in der Mittelpunktsspur bei der Auslage  $x_0$  der zugehörigen Stapelsektion. Eine abschließende Migration der Stapelsektion verschiebt die der Zeit  $\tau_0$  entsprechende Signatur am Punkt C schließlich zu dem der Zeit  $\tau$  entsprechenden Punkt D in der Mittelpunktsspur bei der Auslage  $x_m$  der migrierten Stapelsektion. Eine Migration vor der Stapelung beinhaltet dagegen die direkte Abbildung der Amplitude A zur Zeit  $t$  auf der Mittelpunktsspur bei  $x_n$  in der Sektion mit Spuren konstanter Auslage auf die Amplitude D zur Zeit  $\tau$  auf der Mittelpunktsspur bei  $x_m$  in der migrierten Sektion.

Die Details der oben beschriebenen drei Schritte der DMO-Bearbeitung übersteigen den Rahmen dieses Texts – man findet sie wiederum z. B. bei Yilmaz (2001) ausführlich beschrieben. In der Regel sind für die NMO- und DMO-Korrekturen mehrere Iterationen von Geschwindigkeitsanalyse, NMO-Korrektur und DMO-Korrektur erforderlich.

#### 2.4.5.8 Migration – woher kommt die Reflexion?

Ziel der Migration ist die Verschiebung bzw. Rotation der Reflektorelemente bzw. Beugungszentren an ihre korrekten Positionen im Raum. Damit einher geht auch ihre Stauchung. Die Migration ist sehr wichtig für die geometrisch korrekte Abbildung der Reflektorelemente im Raum, insbesondere für (aber nicht beschränkt auf) stark gekrümmte Reflektoren (vgl. Abschn. 2.3.3). Denn geneigte oder gekrümmte

Schichtgrenzen verursachen in einer Stapelsektion Reflexionen, die nicht vertikal an der (ebenen) Erdoberfläche einfallen (Abb. 2.81b). In diesen Fällen liegt der Reflexionspunkt nicht mehr lotrecht unter dem Mittelpunkt der CMP-Gruppe, sondern bergauf von diesem. Bei Synkinalen, deren Brennpunkt ja unterhalb der Erdoberfläche und somit unterhalb der Geophone liegt, registrieren diese dann mehrfache Einsätze von unterschiedlichen Stellen des Reflektors, die das in Abschn. 2.4.1.3 beschriebenen Fliegenmuster erzeugen (Abb. 2.53 und 2.54).

Werden sie dennoch wie vertikal einfallende Wellen interpretiert, verursacht dies in den CMP-Gruppen einen Fehler in der zeitlichen bzw. Tiefenzuordnung des Reflektors. Aus Schuss-Seismogrammen kann im Fall geneigter, ebener Reflektoren der Neigungswinkel aus dem *dip moveout* (Gl. 2.109) bestimmt werden. Aus CMP-Gruppen kann wie beim Geradebiegen der Hyperbelkrümmung (NMO) die hierfür erforderliche Geschwindigkeit  $v_{NMO}$  iterativ so bestimmt werden, dass Reflexionseinsätze linear korrelieren, die Krümmung der Reflexionshyperbeln also beseitigt wird. Da anschließend an die NMO/DMO-Korrektur alle Spuren, die einem gemeinsamen Mittelpunkt bzw. Reflexionspunkt zugeordnet werden, zu einer CMP-Summen- bzw. CMP-Stapelspur (*CMP stack*) aufaddiert bzw. gestapelt werden, wird diese NMO-Geschwindigkeit  $v_{NMO}$  als Stapelgeschwindigkeit  $v_s$  bezeichnet. Die Abb. 2.52 illustriert den Fehler in der Tiefenzuordnung, der sich aus der Vernachlässigung des Schichteinfalls ergeben kann. Man erkennt hier ebenfalls, wie sich die korrekte Lage des Reflektors grafisch als die Tangente an alle Kreisbögen um die einzelnen Geophone ergibt, deren Radien aus dem Produkt der Reflexionszeiten mit der Schichtgeschwindigkeit berechnet werden. Zwar kann (für ein senkrecht zum Streichen der Struktur angelegtes Profil) eine einzelne Reflexion von irgendeinem Punkt auf diesem Kreis ausgehen (für beliebig gelegte Profile von einem Punkt auf einer Kugelfläche). Aber die Tangente an alle diese Kreise definiert jene Gerade, welche allen Reflexionen genügt. Umgekehrt würde ein kreis- oder kugelförmiger Reflektor im Untergrund (zugegebenermaßen eine geologische Rarität) alle Reflexionen in seinem Brennpunkt konzentrieren, also in der Zeitsektion als Punkt in einer Spur abgebildet werden. Auf diesen Effekt kommen wir später zurück im Zusammenhang mit dem „seismischen Lächeln“, den sog. *smiles*.

Gekrümmte Reflektoren und Beugungszentren wie Knicke, Versätze und Lücken in Schichtgrenzen werden z. T. als komplizierte Strukturen in der Zeitsektion abgebildet. Abb. 2.53 zeigt den Fehler bei einer fälschlichen Annahme vertikalen Einfalls der Reflexionen von Syn- bzw. Antiklinalstrukturen. Abb. 2.54 zeigt das in einer Zeitsektion erscheinende Fliegenmuster, welches von Reflexionen aus einer Synkinalstruktur herrührt. Aus einer sorglosen Interpretation einer solchen Zeitsektion könnte ggf. sogar auf eine Antiklinalstruktur anstatt einer Synkinalstruktur geschlossen werden.

Das Ziel der Migration ist es daher, alle Reflexions- bzw. Beugungselemente an die richtigen Positionen entlang des seismischen Profils zu verschieben. Meist ist hierbei die Zweiweglaufzeit die vertikale Achse. In vertikale Tiefe bzw. Teufe (*true depth*) wird dann anschließend mit Hilfe eines Geschwindigkeitsmodells  $v(z)$ ,  $v(z,x)$  bzw.  $v(z,x,y)$  umgerechnet. Hierfür können beispielsweise die NMO-Geschwindigkeiten verwendet werden, die Stapelgeschwindigkeiten

der Zeitmigration vor dem Stapeln (s. u.) oder die aus einer Auswertung von Refraktionsseismik bzw. seismischer Tomografie gewonnenen Geschwindigkeiten. Die erzielbare Genauigkeit hängt vom Verhältnis der Länge der Auslage zur Tiefe des Reflektors ab, vom Signal/Rausch-Verhältnis und der Heterogenität, wobei  $\pm 5\%$  als erreichbar gelten. Bohrlochmessungen liefern noch genauere Ergebnisse: Akustiklogs (*sonic logs*) sowie Bohrloch-Versenkmessungen (*check shot*) oder seismische Vertikalprofile (VSP, *vertical seismic profiling*) mit Geophonketten in Bohrungen.

Da Reflexionen als die Überlagerung der von den einzelnen Punkten des Reflektors ausgehenden gebeugten Wellen aufgefasst werden können (huygenssches Prinzip), betrachten wir im Folgenden ausschließlich gebeugte (Elementar-)Wellen. Die Laufzeit einer seismischen Welle vom Schuss zum Beugungszentrum in der Tiefe  $d$  und zurück zum Schusspunkt hat in CMP-Stapelsektionen die Form einer Hyperbel, die der Gl. 2.96 folgt:

$$t_B = \frac{2\sqrt{d^2 + x^2}}{v} = \sqrt{t_0^2 + \frac{4x^2}{v^2}}. \quad (2.219)$$

Mit  $t_0 = 2d/v$  für den Lotstrahl folgt hieraus die Gleichung der Beugungshyperbel:

$$t_B^2 = \frac{4d^2}{v^2} + \frac{4x^2}{v^2} = t_0^2 + \frac{4x^2}{v^2}, \quad (2.220)$$

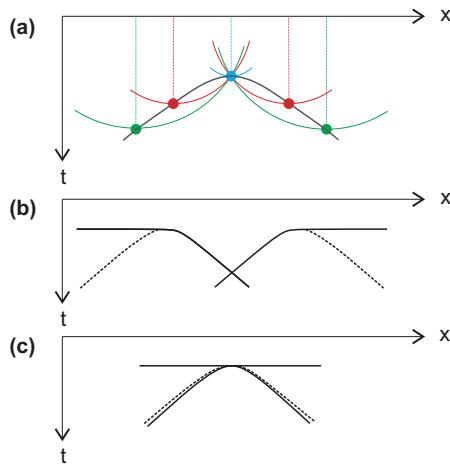
wobei  $x$  die horizontale Distanz des Aufpunkts vom Scheitel der Hyperbel in einer CMP-Stapelsektion bezeichnet. Die entsprechende Gleichung für die Reflexionshyperbel eines Schuss-Seismogramms oder einer ungestapelten CMP-Gruppe lautet bei söhlicher Lagerung nach Gl. 2.83:

$$t_R^2 = \frac{4d^2}{v^2} + \frac{x^2}{v^2} = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2}.$$

Somit ist die Krümmung der Beugungshyperbel doppelt so groß wie jene der Reflexionshyperbel.

Betrachten wir wie Parasnis (1997) zunächst ein punktförmiges Beugungszentrum und die zugehörige Beugungshyperbel, die sich ergibt, wenn die Zweiweglaufzeiten der Beugung vertikal unter den entsprechenden Geophonen aufgetragen werden. Wie oben bemerkt, könnten diese Zeiten gleichermaßen jedem Punkt eines Kreises um den Standort des Geophons mit dem Radius der jeweiligen Zweiweglaufzeit zugeordnet werden. Werden alle diese Kreisbögen gezeichnet, so schneiden sie sich im Scheitel der Beugungshyperbel (Abb. 2.92a), deren Energie somit wieder in einem Punkt konzentriert wird. Das punktförmige Beugungszentrum wird somit wieder korrekt in der Zeitsektion abgebildet. Einen ebenen Reflektor kann man sich aus lauter einzelnen Beugungszentren zusammengesetzt denken. In analoger Weise ergibt sich dessen migrierte Lage als Tangente an alle einzelnen Kreisbögen (Abb. 2.20).

Für Beugung an Kanten (bzw. Schichtlücken) muss zusätzlich noch der Phasensprung von  $180^\circ$  hinter der Kante berücksichtigt werden (siehe Abb. 2.23 und ihre



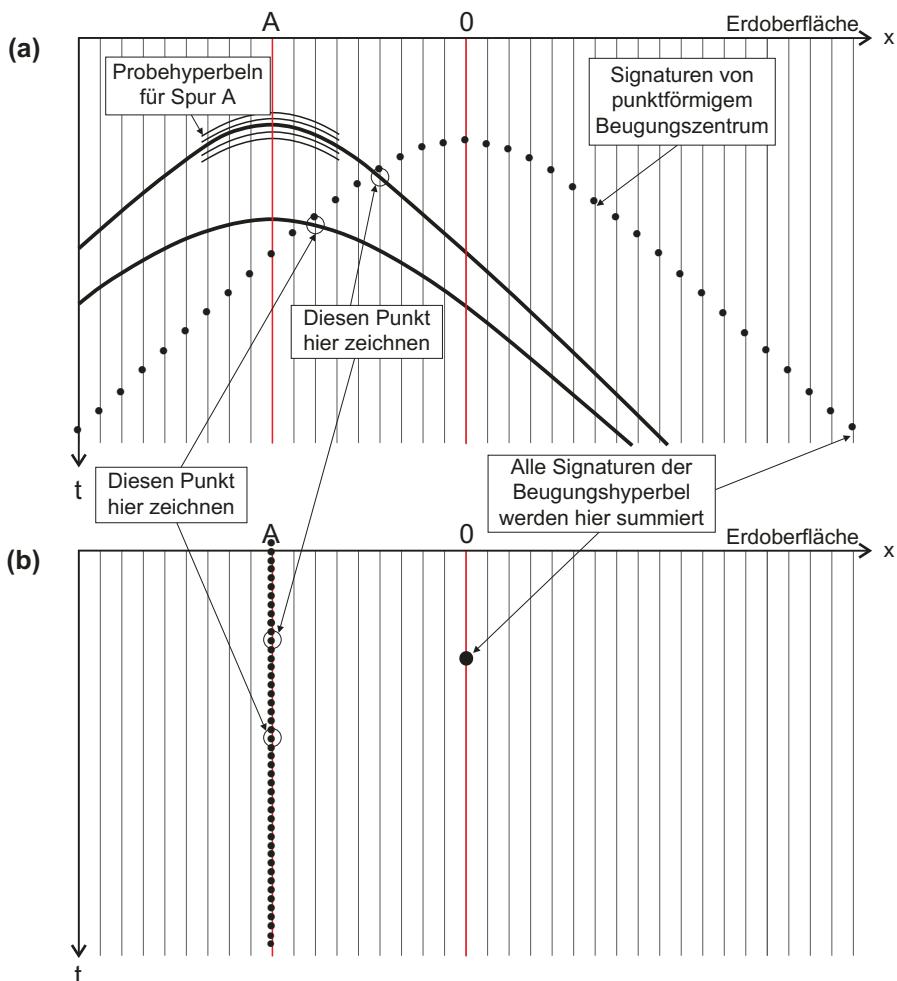
**Abb. 2.92** Prinzip der Migration von Beugungshyperbeln verursacht von einem einzelnen Beugungszentrum (a) bzw. einer Schichtlücke (b). Beim Schließen der Lücke (c) interferieren die Beugungshyperbeln destruktiv, und man erhält eine Schichtreflexion (nach Sleep und Fujita 1997)

Diskussion in Abschn. 2.3.2). Die Abb. 2.92b zeigt die jeweils beiden Hyperbeläste unterschiedlicher Polarität. Wieder schneiden sich alle Kreisbögen im Scheitel der Hyperbel, also an den jeweiligen Kanten. Damit wird die Kante in der Zeitsektion durch einen auf einen Reflektor folgenden Ast einer Beugungshyperbel angezeigt. Beim Schließen der Schichtlücke interferieren die jeweils gegensinnig polarisierten Hyperbeläste beider Kanten wiederum destruktiv, und es kommt zu gegenseitiger Auslöschung (Abb. 2.92c).

Als automatisierte Version der Migration wird u. a. die Kirchhoff-Migration (*diffraction hyperbola method*) verwendet, die auf dem Stapeln von Einsätzen im Seismogramm entlang von Beugungshyperbeln beruht: Dazu wird entlang jeder seismischen Spur eine Beugungshyperbel geführt, deren Scheitel auf der Spur liegt und die entsprechend Gl. 2.219 sukzessive aus verschiedenen Werten für  $t_0$  und einer NMO-Stapelgeschwindigkeit  $v_{NMO}$  berechnet wird. Für jeden Punkt entlang der betreffenden Spur in der Zeitsektion werden die Einsätze entlang dieser Probehyperbel aufaddiert und deren Scheitelpunkt zugeordnet (Abb. 2.93). Mit wachsender Zeit entlang der Spur (und damit der Tiefe  $d$  zum Reflektor) wird die Hyperbelkrümmung  $t_B^{NMO}$  immer geringer:

$$\begin{aligned}
 t_B^{NMO} &= \frac{\sqrt{4x^2 + 4d^2}}{v_{NMO}} - \frac{2d}{v_{NMO}} = 2d \frac{\sqrt{x^2/d^2 + 1}}{v_{NMO}} - \frac{2d}{v_{NMO}} \\
 &\approx \frac{2d}{v_{NMO}} \left( 1 + \frac{x^2}{2d^2} \right) - \frac{2d}{v_{NMO}} = \frac{x^2}{v_{NMO} d}. \tag{2.221}
 \end{aligned}$$

Nur an Stellen, wo die Probehyperbel gut mit der Hyperbel eines punktförmigen Beugungszentrums übereinstimmt, ergibt sich ein hoher Summenwert (Abb. 2.93).

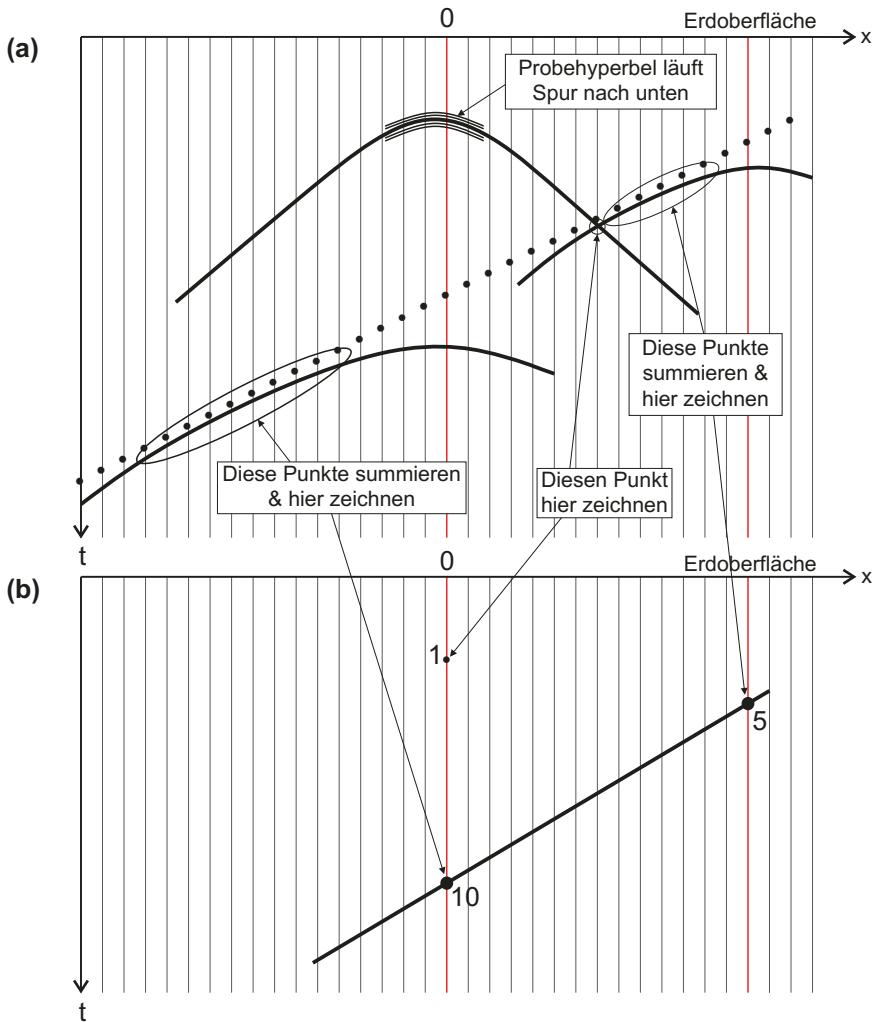


**Abb. 2.93** Migration einer seismischen Zeitsektion mit Signatur einer Beugung (nach Parasnis 1997): (a) Die zur Hyperbel eines punktförmigen Beugungszentrums gehörigen Amplituden der unmigrierten Sektion werden für jede Spur entlang einer Probhyperbel aufsummiert; (b) Sodann wird dieser Summenwert für jede Spur der Zeitsektion dem Ort des Scheitels der Probhyperbel zugeordnet. Nur am Ort des Beugungszentrums weist die migrierte Sektion eine kräftige Signatur auf

Ebenfalls erhöhte Summenwerte ergeben sich für Positionen der Probhyperbel, an denen die Hyperbeläste Tangenten an Reflexionen sind (Abb. 2.94). Auf diese Weise wird die Lage geneigter Reflektoren migriert.

Mit den Kreisradien  $\overline{SD} = \overline{SF}$  folgt für die Neigungswinkel  $\alpha_u$  und  $\alpha_m$  eines unmigrierten bzw. migrierten Reflektors (Abb. 2.95):  $\sin(\alpha_m) = \overline{SF}/\overline{AS}$  und  $\tan(\alpha_u) = \overline{SF}/\overline{AS}$ . Damit gilt für die Beziehung zwischen diesen Winkeln:

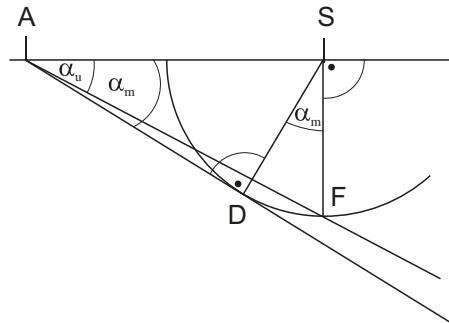
$$\sin(\alpha_m) = \tan(\alpha_u). \quad (2.222)$$



**Abb. 2.94** Migration vermittels Beugungstapeln einer seismischen Zeitsektion mit Signatur eines geneigten Reflektors (nach Parasnis 1997): (a) Die zur Signatur eines geneigten Reflektors gehörigen Amplituden der unmigrierten Sektion werden für jede Spur entlang einer Probehyperbel aufsummiert; (b) Sodann wird dieser Summenwert für jede Spur der Zeitsektion dem Ort des Scheitels der Probehyperbel zugeordnet. Nur für Orte, an denen die Äste der Probehyperbel näherungsweise Tangenten an den Reflektor sind, ergibt sich eine kräftigere Signatur in der migrierten Sektion

Ein Artefakt, welches häufig bei der Migration entsteht, sind die sog. *smiles*, das „seismische Lächeln“. Es entsteht, wenn Rauschen in den Daten an irgendeinem Punkt der seismischen Sektion ein isoliertes Maximum erzeugt. Wie oben erläutert, wird dieses in der Migration als Brennpunkt eines kreisförmigen Reflektors

**Abb. 2.95** Zur Migration eines Reflektors



interpretiert (Abb. 2.96). Ebenso können *smiles* entstehen, wenn eine zu hohe Migrationsgeschwindigkeit verwendet wird. Dadurch liegt der Schnittpunkt der Kreisbögen oberhalb des Hyperbelscheitels bzw. bei zu geringer Geschwindigkeit darunter. Die korrekte Migrationsgeschwindigkeit kann somit überprüft werden, indem man nach *smiles* oder übrig gebliebenen Hyperbeln sucht.

Neben der Migration werden Beugungshyperbeln auch für die Bestimmung von Geschwindigkeits-Tiefenprofilen genutzt. Aus der Laufzeitkurve der Beugung  $v^2 = 4x^2/(t_B^2 - t_0^2)$  (Gl. 2.219) kann aus  $t_0 = 2d/v$  durch Anpassung der Hyperbel an die Laufzeiten die Geschwindigkeit  $v$  und die Tiefe  $d$  zum Reflektor bzw. Beugungszentrum bestimmt werden.

Für den Fall einer horizontalen Schichtung, in welcher die Geschwindigkeit mit der Tiefe variiert, kann dieser Ansatz verallgemeinert werden, um die zwei Parametergleichungen des Laufzeitdiagramms für  $x(d_i, v_i)$  und  $t(d_i, v_i)$  zu bestimmen. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.97 ist die Zweiweglaufzeit in der  $i$ -ten Schicht:

$$t_i = \frac{2d_i}{v_i \cos(\varphi_i)}. \quad (2.223)$$

Die zugehörige horizontale Wegstrecke ist:  $x_i = d_i \tan(\varphi_i)$ . Einsetzen von  $d_i$  aus Gl. 2.223 ergibt:

$$x_i = d_i \tan(\varphi_i) = \frac{1}{2} v_i t_i \sin(\varphi_i). \quad (2.224)$$

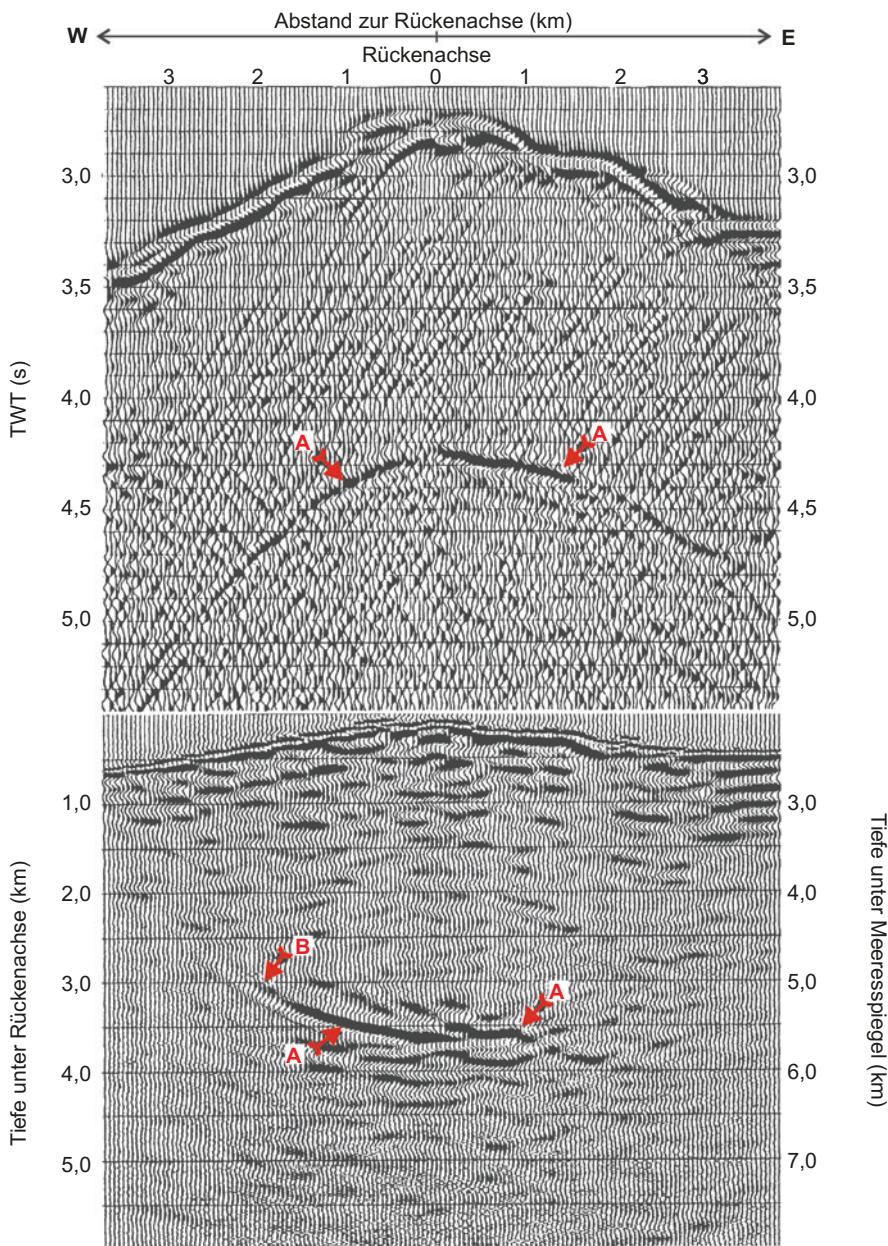
Für den Strahlparameter  $p$  gilt nach dem snelliusschen Brechungsgesetz (Gl. 2.66):

$$p = \frac{\sin(\varphi_i)}{v_i} = \frac{\sin(\varphi_0)}{v_0} = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (2.225)$$

Einsetzen von  $\sin(\varphi_i)$  aus Gl. 2.224 ergibt dann:

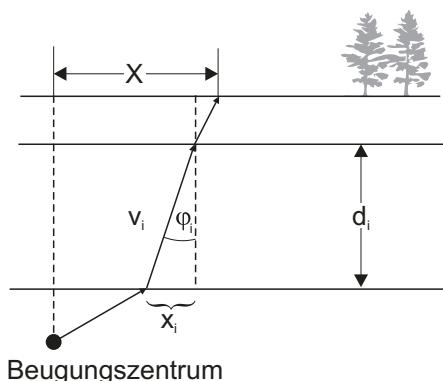
$$p = \frac{2 x_i}{v_i^2 t_i} \text{ bzw.} \quad (2.226)$$

$$x_i = \frac{1}{2} p v_i^2 t_i.$$



**Abb. 2.96** „Seismisches Lächeln“ (*smile*) in einer seismischen Sektion, entstanden bei der Migration einer marinen seismischen Erkundung am Tonga-Inselbogenrücken im Pazifik (Sleep und Fujita 1997). Oben: Zeitsektion – deutlich zu erkennen sind die Ozeanboden-Reflexion, diverse Beugungs-Hyperbeln sowie die Reflexionen vom nicht lückenfreien Dach (A) der Magmakammer; Unten: Migrierte Sektion – verbesserte Abbildung des Ozeanbodens und dem flacher erscheinenden Dach (A) der Magmakammer. Die an den Lücken im Dach der Magmakammer gebeugte Energie erzeugt ein deutliches seismisches Lächeln (B) in der migrierten Sektion

**Abb. 2.97** Strahlengang von einem Beugungszentrum zur Oberfläche



Hieraus ergeben sich  $x(d_i, v_i)$  und  $t(d_i, v_i)$  als Funktion der Schichtmächtigkeiten  $d_i$  und der Geschwindigkeiten  $v_i$ :

$$x = \sum x_i = \sum d_i \tan(\varphi_i) = \sum d_i \frac{\sin(\varphi_i)}{\cos(\varphi_i)} = \sum d_i \frac{\sin \varphi_i}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_i)}} = \sum d_i \frac{pv_i}{\sqrt{1 - (pv_i)^2}}$$

$$t = \sum t_i = 2 \sum \frac{d_i}{v_i \cos(\varphi_i)} = 2 \sum \frac{d_i}{v_i \sqrt{1 - \sin^2(\varphi_i)}} = 2 \sum \frac{d_i}{v_i \sqrt{1 - (pv_i)^2}}.$$

Falls die Schichtgeschwindigkeiten nicht bekannt sind, ist ein alternatives Vorgehen vorteilhafter, in welchem eine mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  gefunden wird, welche die Laufzeitkurve befriedigt:  $v_m^2 = 4x^2/(t^2 - t_0^2)$ . Entsprechend Gl. 2.226 wird der Strahlparameter für die Schichten durch einen Ausdruck für eine Schicht konstanter Geschwindigkeit ersetzt:

$$p_m = \frac{2x}{v_m^2 t} \text{ bzw.} \quad (2.227)$$

$$p_m v_m^2 = \frac{2x}{t}.$$

Die horizontale Entfernung  $x$  setzt sich aus den Teilstücken  $x_i$  zusammen:  $x = \sum x_i = \frac{1}{2} \sum p v_i^2 t_i$ . Umsortieren und teilen durch  $t = \sum t_i$  ergibt einen gewichteten Mittelwert für die Geschwindigkeit:

$$\frac{2x}{t} = p \frac{\sum v_i^2 t_i}{\sum t_i} \approx p \frac{\sum v_i^2 t_{0,i}}{\sum t_{0,i}} = p v_{rms}^2, \quad (2.228)$$

wo  $t_{0,i} = 2d_i/v_i$  die vertikale Lotzeit durch die  $i$ -te Schicht ist und

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2 t_{0,i}}{\sum t_{0,i}}}, \quad (2.229)$$

die rms-Geschwindigkeit Gl. 2.92. Sie bildet die Grundlage der Geschwindigkeitsanalysen von CMP-Gruppen zur Bestimmung der optimalen Stapelgeschwindigkeit, bevor die CMP-Gruppen zu CMP-Sektionen gestapelt werden.

Für kleine Winkel  $\varphi_i$  ist  $p_m$  eine gute Näherung für  $p$ . Ein Vergleich von Gl. 2.227 mit Gl. 2.228 zeigt, dass in diesem Fall  $v_{rms}$  der richtige Schätzwert für  $v_m$  ist. Da die durch diese sog. Dix-Dürbaum-Gleichung definierte rms-Geschwindigkeit die Hyperbeln anpasst, sollte sie auch als Migrationsgeschwindigkeit verwendet werden. Sie ist in der Regel größer als die durch die mittlere vertikale Laufzeit bestimmte mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  (Gl. 2.230), da  $t_{0,i}$  immer kleiner oder gleich  $t_i$  ist:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{\sum d_i}{\sum t_i} = \frac{\sum d_i}{\sum d_i/v_i}. \quad (2.230)$$

Im Allgemeinen gilt die Beziehung  $v_m \leq v_{rms} \leq v_{NMO}$  zwischen mittlerer Geschwindigkeit  $v_m$ , rms-Geschwindigkeit  $v_{rms}$  und NMO-Stapelgeschwindigkeit  $v_{NMO}$  (siehe z. B. Dobrin und Savit 1990, S. 242). Bei großen Variationen der Geschwindigkeit mit der Tiefe (also großen Abweichungen der Strahlwege vom Lot) sollten  $v_{rms}$  und  $t_0$  nicht zur Bestimmung der Reflektortiefe verwendet werden.

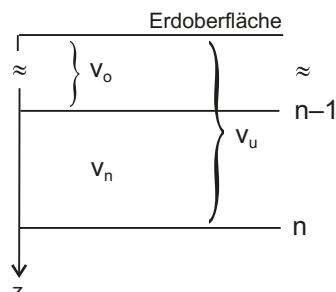
Wenn Reflexionshyperbeln in verschiedenen Tiefen auftreten, kann die rms-Geschwindigkeit als Funktion der Laufzeit definiert und die Geschwindigkeit als Funktion der Tiefe bestimmt werden. Sie definiert dann die Intervallgeschwindigkeiten zwischen den horizontalen, parallelen Schichtgrenzen, von denen die Reflexionen stammen: Sind  $v_o$  und  $v_u$  die rms-Geschwindigkeiten bis zur (n-1)-ten (oben) bzw. n-ten (unten) Schicht (Abb. 2.98), so ergibt Gl. 2.229:

$$v_o^2 \sum_{i=1}^{n-1} t_{0,i} = \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 t_{0,i} \text{ und } v_u^2 \sum_{i=1}^n t_{0,i} = \sum_{i=1}^n v_i^2 t_{0,i} = v_n^2 t_{0,n} + \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 t_{0,i} = v_n^2 t_{0,n} + v_o^2 \sum_{i=1}^{n-1} t_{0,i}.$$

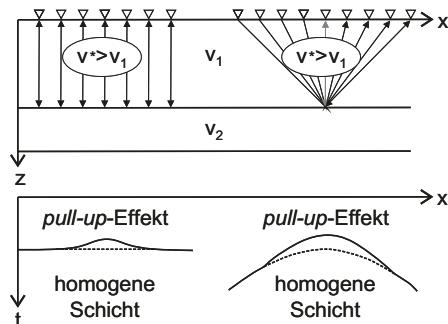
Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt die Dix-Dürbaum-Gleichung für die Intervallgeschwindigkeit  $v_n$  in der zwischen den Schichtgrenzen n-1 und n gelegenen n-ten Schicht:

$$v_n^2 = \frac{v_u^2 \sum_{i=1}^n t_{0,i} - v_o^2 \sum_{i=1}^{n-1} t_{0,i}}{t_{0,n}}. \quad (2.231)$$

**Abb. 2.98** Zur Ableitung der Dix-Dürbaum-Gleichung:  $v_o$  und  $v_u$  sind die rms-Geschwindigkeiten der Schichtpakete bis jeweils zur n-1-ten bzw. n-ten Schichtgrenze



**Abb. 2.99** Tiefenfehler (*pull-up-Effekt*) durch eine Einlagerung (oben links) bzw. ein Streuzentrum (oben rechts) höherer Geschwindigkeit. In den zugehörigen Zeitsektionen wird in beiden Fällen eine zu flache Tiefe der Struktur (unten links) bzw. des Streuzentrums (unten rechts) vorgespiegelt (nach Sleep und Fujita 1997)



Nicht berücksichtigt blieben bei den bisherigen Betrachtungen laterale Geschwindigkeitsänderungen. Diese können, u. a. durch Einlagerungen höherer bzw. niedrigerer Geschwindigkeit oder durch Streuzentren verursacht werden. Abb. 2.99 zeigt für beide Fälle die resultierenden Effekte in der Zeitsektion. Von besonderer Bedeutung bei der Suche nach Erdöl- bzw. Erdgasfallen sind hierbei Einlagerungen höherer Geschwindigkeit, durch die in der Zeitsektion Antiklinalstrukturen vorgetäuscht werden – eine der klassischen Erdöl-Fallenstrukturen.

Ebenso von praktischer Bedeutung sind außerhalb des Profils gelegene Reflektoren bzw. Beugungszentren. Um diese Einsätze zu migrieren, sind jedoch flächenhafte Erkundungen mit 3D-Seismik erforderlich. Bei der hier nicht weiter diskutierten 3D-Migration tritt in drei Dimensionen eine Kugelfläche an die Stelle eines Kreisbogens als Menge der möglichen Beugungs- bzw. Reflexionspunkte. Analog ist die Laufzeitkurve einer Reflexion bzw. Beugung, die von einem Punkt im Untergrund ausgeht, in drei Dimensionen ein Rotationshyperboloid, an dessen Scheitel sich der Reflektor befindet. Für die Zweiweglaufzeit gilt dann:

$$t = \frac{2\sqrt{(z^2 + s^2)}}{v} = \frac{2\sqrt{(z^2 + x^2 + y^2)}}{v}, \quad (2.232)$$

wo  $z$  die Tiefe zum Reflektor ist und  $s$  die Epizentralentfernung zum Reflektor. Die scheinbare Tiefe  $d_s$  ist größer als die wahre Tiefe  $z$ . Dies ergibt sich aus der nicht zutreffenden Annahme, dass punktförmige Reflexions- bzw. Beugungszentren liege in der Ebene einer bestimmten Zeitsektion ( $x-t$ ,  $y-t$  usw.):

$$d_s = \sqrt{(z^2 + y^2)}, \quad (2.233)$$

wobei angenommen wird, dass  $x$  parallel zum Profil und  $y$  senkrecht dazu liegt. Von besonderer praktischer Bedeutung in diesem Zusammenhang sind die von punktförmigen Reflektoren bzw. Streuzentren am Ozeanboden ausgehenden seitlichen Einstreuungen (*side scatter*) bei der marinen Seismik. Liegen Streuzentren genügend weit seitwärts vom Profil, sind ihre Einsätze deutlich später als die direkten Reflexionen vom Meeresboden und können Reflexionen tieferer Schichten überdecken oder gänzlich maskieren. Seitliche Einstreuungen vom Ozeanboden können ggf. an ihrer Stapelgeschwindigkeit (beim Geradebiegen ihrer Hyperbeln)

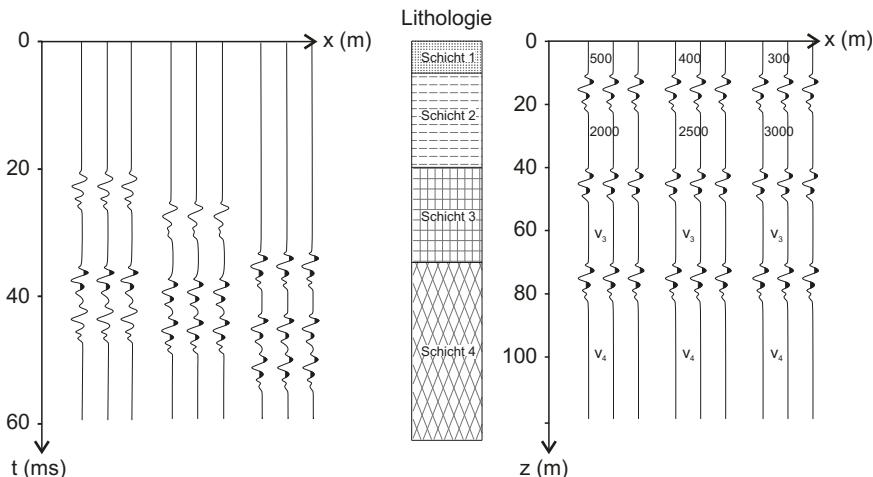
erkannt werden, die für Meerwasser  $1500 \text{ m s}^{-1}$  beträgt, deutlich weniger als die Geschwindigkeit vieler Gesteine.

#### 2.4.5.9 Erstellung von Tiefensektionen

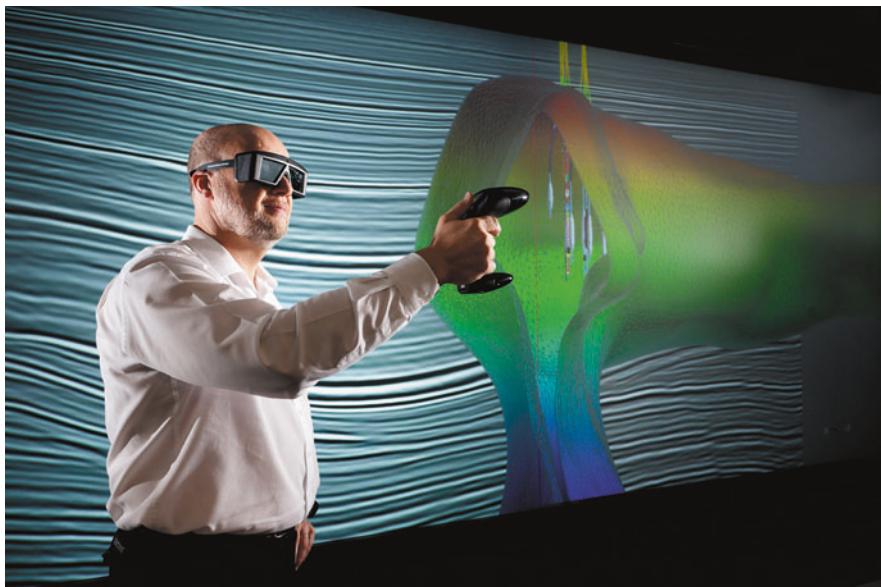
Für die Umwandlung von Zeit- in Tiefensektionen bedarf es eines Geschwindigkeitsmodells. Im einfachsten Fall definiert dies die Variation der seismischen Geschwindigkeiten mit der Tiefe, bei komplexeren Strukturen auch innerhalb eines zweidimensionalen Querschnitts bzw. dreidimensionalen Volumens. Im Rahmen der Beseitigung der Hyperbelkrümmung (NMO-Korrektur) erfolgte bereits eine Geschwindigkeitsanalyse, deren Ergebnisse hier Anwendung finden. Auch sind Informationen aus Bohrlochversenkungsmessungen hilfreich. Darüber hinaus erfordert die Erstellung eines verlässlichen Geschwindigkeitsmodells jedoch meist die Vermessung einer Kalibrationsbohrung mit einem Akustiklog. Gibt es zudem laterale Variationen, so sind mehrere solcher Kalibrationsbohrungen erforderlich. Abb. 2.100 illustriert, wie Strukturen im Fall unerkannt gebliebener lateraler Geschwindigkeitsvariationen falsch abgebildet werden.

#### 2.4.5.10 3D-Sektionen

Bereits durch Kombination sich kreuzender zweidimensionaler Tiefensektionen kann ein räumliches Bild des Untergrunds erstellt werden. Jedoch vermittelt erst ein virtuelles Eintauchen in das Volumen seismischer Daten (immersive Visualisierung) aus flächenhaften Messanordnungen (3D-Seismik) einen wirklich räumlichen Eindruck. Sie wird ermöglicht durch stereoskopische Parallelprojektion auf Decke und Wände eines speziellen Projektionsraums, ein sog. *Cave Automatic Virtual*



**Abb. 2.100** Vorspiegelung einer nichthorizontalen Schichtung durch laterale Geschwindigkeitsvariationen in den beiden obersten Schichten; Zeitsektion (links) und Tiefensektion (rechts) entsprechend der angegebenen Geschwindigkeitsverteilung in  $\text{m s}^{-1}$  (Burger 1992)



**Abb. 2.101** Immersive Visualisierung von 3D-Seismik mittels stereoskopischer Projektion in einer CAVE (© Wintershall AG / Heiko Meyer)

*Environment* (CAVE), wie er mittlerweile in vielen Firmen, Hochschulen und Forschungseinrichtungen verfügbar ist ([Abb. 2.101](#)).

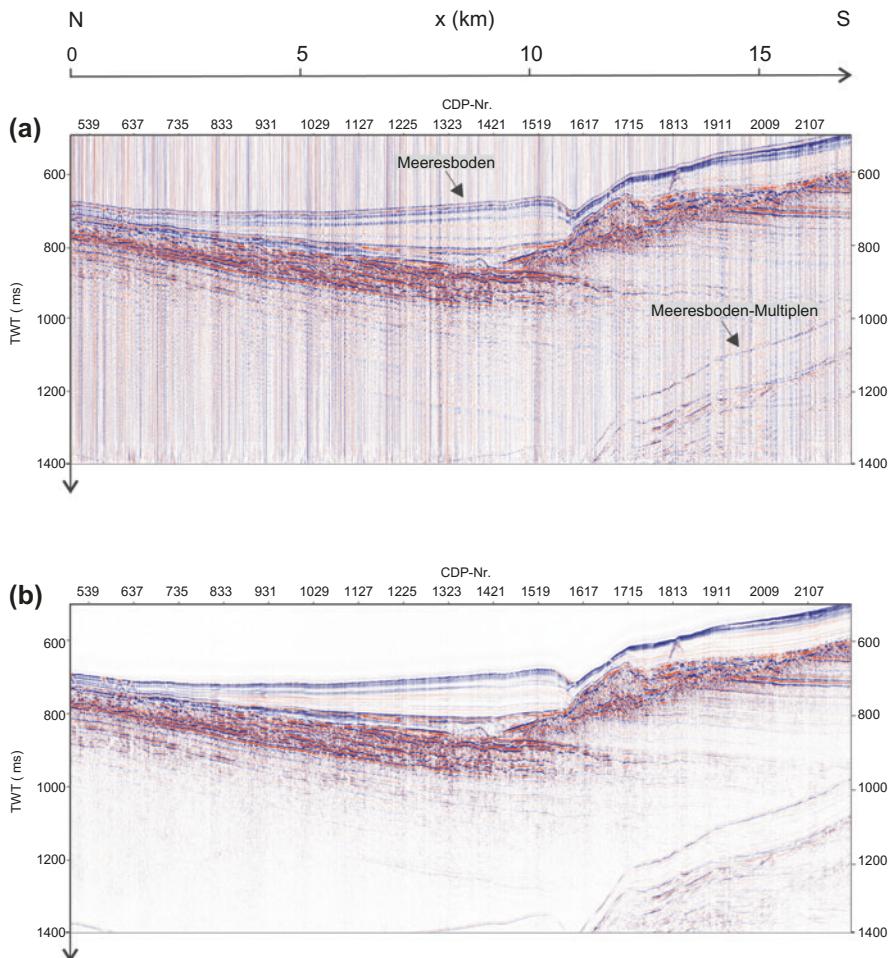
Dies gestattet es den Auswertern, sich mit Hilfe einer 3D-Brille (wie im 3D-Kino) im Datenraum zu bewegen und Operationen durchzuführen. Diese sind in drei Dimensionen zwar aufwändiger, aber im Prinzip analog zu denen in zwei Dimensionen. Mittels flächenhafter seismischer Messungen an derselben Struktur, aber zu unterschiedlichen Zeiten, sog. 4D-Seismik, kann z. B. ein zur verbesserten Ausbeute einer Erdöllagerstätte erfolgtes Fluten mit Kohlendioxid dokumentiert bzw. überwacht werden. Auch eine solche 4D-Seismik wird am effektivsten in einer CAVE oder vergleichbaren Visualisierung dargestellt und ausgewertet.

Im Folgenden wird die Auswirkung einzelner Bearbeitungsschritte von seismischen Daten anhand jeweils eines seeseismischen und landseismischen Profils verdeutlicht.

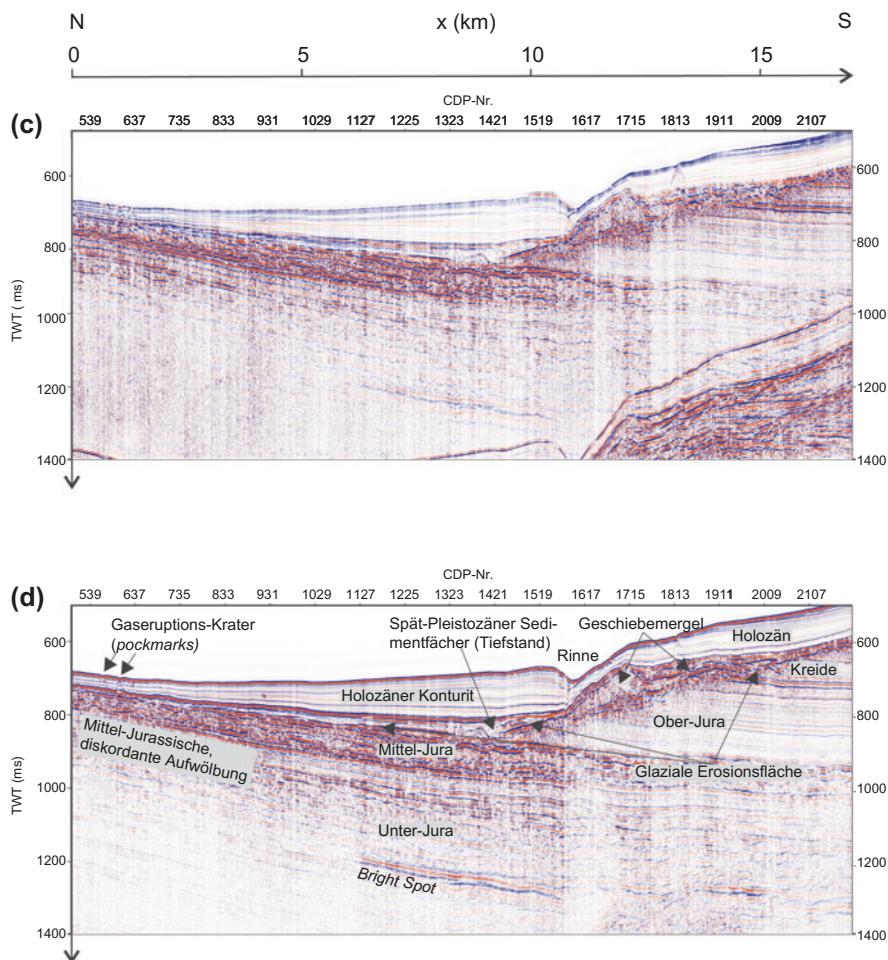
#### **2.4.5.11 Bearbeitung eines seeseismischen 2D-Profil**

In einer Messkampagne des Instituts für Geophysik der Universität Hamburg wurden im Jahr 2015 mit dem Forschungsschiff Alkor in der Nordsee im Skagerrak seismische Profile vermessen. Eines der Ziele dieser Forschungsfahrt war die Erkundung von Gaserruptionskratern auf dem Meeresboden, sog. Pockennarben (*pockmarks*). Die Luftkanone befand sich in einer Tiefe von zweieinhalf Metern zwischen dem Schiff und einer 600 m langen Hydrophonkette mit 144 Kanälen, die in ca. drei bis vier Metern Wassertiefe geschleppt wurde. Der Abstand der CDP-Positionen betrug 10 m.

**Abb. 2.102** zeigt das Ergebnis einer Auswahl von Bearbeitungsschritten. Die wesentlichste Verbesserung der in **Abb. 2.102a** gezeigten, mit einer konstanten Geschwindigkeit gestapelten seismischen Sektion werden in diesem Fall durch



**Abb. 2.102** Schrittweise Bearbeitung eines Ausschnitts aus einem seismischen Nord-Süd-Profil im Skagerrak quer zur Norwegischen Rinne: (a) Mit einer konstanten Stapelgeschwindigkeit von  $1500 \text{ m s}^{-1}$  erstelltes Profil; (b) Rauschunterdrückung mittels Filterung mit einem Bandpass zwischen 16 Hz und 240 Hz und an- bzw. absteigenden linearen Flanken zwischen 8 Hz und 16 Hz bzw. 240 Hz und 480 Hz; (c) Spike-Dekonvolution: statistischer Filter zur Angleichung der spektralen Amplituden in einem bestimmten Frequenzband – erkennt und unterdrückt stärkere Rauschanteile mit höherer Amplitude als das allgemeine Rauschen und verstärkt das Nutzsignal; (d) Aus (c) mit einem detaillierten Geschwindigkeitsmodell erstellte und mit prädiktiver Dekonvolution gefilterte Stapelsektion einschließlich einer geologischen Interpretation. Durch diese beiden Bearbeitungsschritte verschwinden die Meeresboden-Multiplen im rechten unteren Bildquadranten (Christian Hübscher, Institut für Geophysik, Centrum für Erdsystemforschung und Nachhaltigkeit (CEN), Universität Hamburg)



**Abb. 2.102** (Fortsetzung)

die Rauschunterdrückung mittels Bandpassfilterung und Spike-Dekonvolution (Abb. 2.102b,c) und die Entfernung der die Meeresboden-Multiplen erzeugenden Mehrfachreflexionen (Abb. 2.102d) erzielt. Bei der für die Entfernung der Meeresboden-Multiplen eingesetzten prädiktiven Dekonvolution wird ein aus der Primärreflexion und den Multiplen bestehendes Signal einem solchen angepasst, welches nur noch eine Primärreflexion enthält und sich nicht wiederholt. Auf diese Weise unterdrückt sie Multiplen und verändert wahlweise das Spektrum der Eingabedaten, um deren Auflösung zu erhöhen. Bei der Bearbeitung mariner seismischer Daten wird sie fast immer zumindest einmal eingesetzt.

#### 2.4.5.12 Bearbeitung eines landseismischen 2D-Profil

Im Rahmen der Vorerkundung für ein geologisches Tiefenlager erfolgte im Winter 2011/2012 im Auftrag der schweizerischen Nationalen Genossenschaft für die

Lagerung radioaktiver Abfälle (Nagra) eine zweidimensionale reflexionsseismische Erkundung in der zentralen Nordschweiz. Hierbei wurden 20 neue Seismikprofile mit einer Gesamtlänge von 305 km aufgenommen mit dem Ziel, den Verlauf von regionalen Störungszonen im Nahbereich von vier möglichen Standorten für geologische Tiefenlager zu verifizieren und präzisieren.

[Abb. 2.103](#) zeigt das Ergebnis einer Auswahl von Bearbeitungsschritten anhand eines ausgewählten 16,41 km langen Nord-Süd-Profil. Dieses umfasst insgesamt 5 472 CDP-Positionen im Abstand von jeweils 3 m. Zur Anregung dienten 24 Sprengungen und 2 582 lineare, 18 s dauernde Vibroseissweeps (12 Hz–102 Hz). Die Daten jedes dieser Zentralschüsse wurden mit jeweils 660 Kanälen aufgezeichnet. [Abb. 2.103a](#) zeigt die noch im Feld mit einer konstanten Geschwindigkeit erstellte erste Stapelung der Daten. Demgegenüber deutlich verbessert zeigt sich in [Abb. 2.103b](#) das Ergebnis nach statischer Korrektur sowie verbesserter Stapelung auf Basis variabler Stapelgeschwindigkeiten. Eine Kirchhoff-Zeitmigration vor dem Stapeln lässt demgegenüber weitere Details erkennen ([Abb. 2.103c](#)). Ihr liegt ein detailliertes Geschwindigkeitsmodell zugrunde ([Abb. 2.103d](#)).

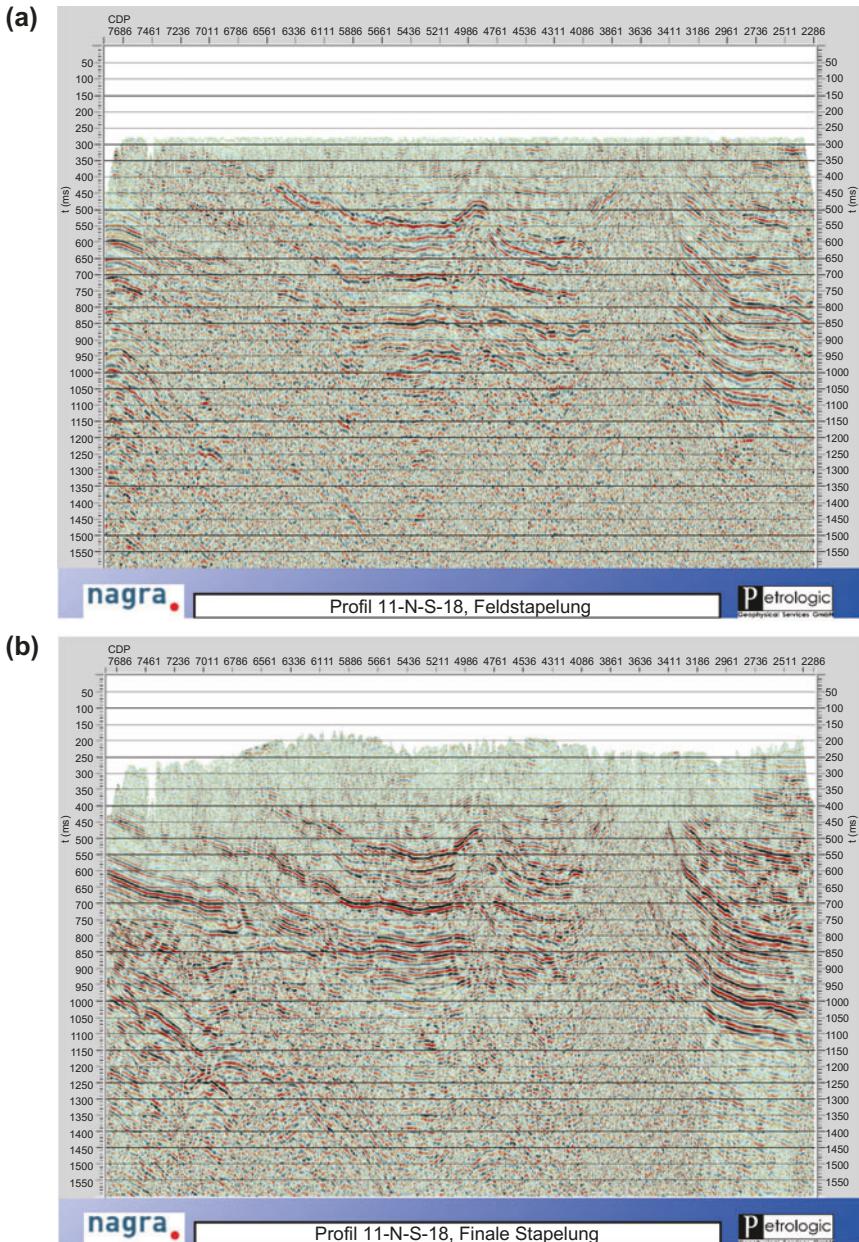
[Abb. 2.104](#) (oben) zeigt schließlich das Ergebnis der Umrechnung mit der vor dem Stapeln Kirchhoff-migrierten Zeitsektion ([Abb. 2.103c](#)) in eine Tiefensektion, und [Abb. 2.104](#) (unten) zeigt das für die Umrechnung von Zeit auf Tiefe verwendete Geschwindigkeitsmodell.

## 2.4.6 Interpretation reflexionsseismischer Daten

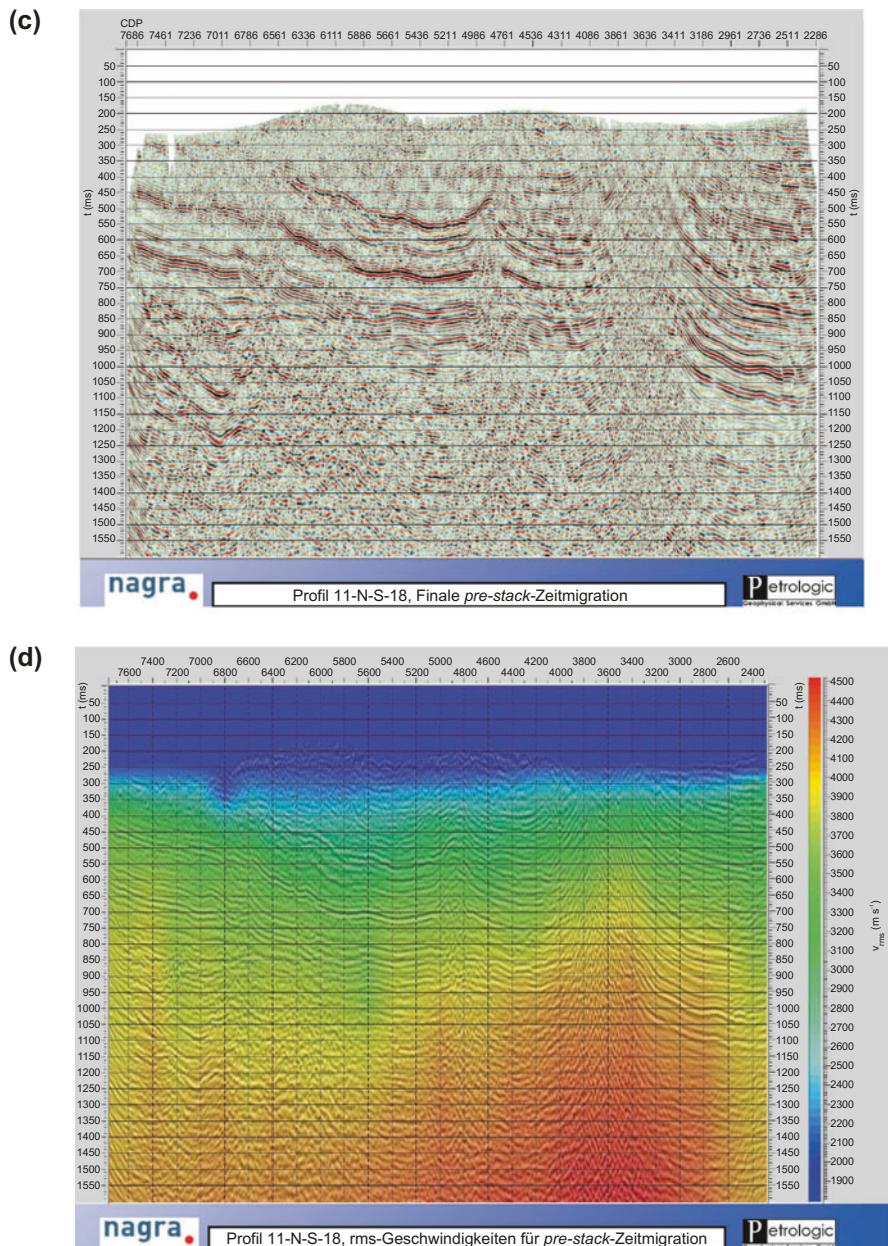
Das Ziel reflexionsseismischer Untersuchung ist das Abbilden von Strukturen, zumeist im Zusammenhang mit der Suche nach Kohlenwasserstoffen. Diese können aber direkt nicht eindeutig nachgewiesen werden. Ist ein Speicher jedoch von Gas erfüllt, bedingt dies in der Regel einen hohen Impedanzkontrast und somit einen hohen Reflexionskoeffizienten. Solche starken Reflexionen werden als *bright spot* bezeichnet ([Abb. 2.105](#)). Insbesondere kommt in diesem Zusammenhang der Analyse von Reflexionsamplituden als Funktion der Auslage (AVO) eine große Bedeutung zu. In der Regel wird eine Entscheidung für das Abteufen einer Bohrung nicht ohne einen hohen AVO-Wert getroffen.

Ist die Impedanz eines wassergefüllten Reservoirs größer als die des Nebengesteins, so verursachen Kohlenwasserstoffe mittels der durch sie hervorgerufenen Verringerung des Impedanzkontrasts einen *dim spot*. Ist die Impedanz des wassergesättigten Reservoirs nur wenig größer als jene des Nebengesteins, so können Kohlenwasserstoffe auch einen Polaritätswechsel (180°-Phasensprung) verursachen. Laterale Impedanzkontraste durch Kohlenwasserstoffe in einem Reservoir verursachen einen *flat spot*.

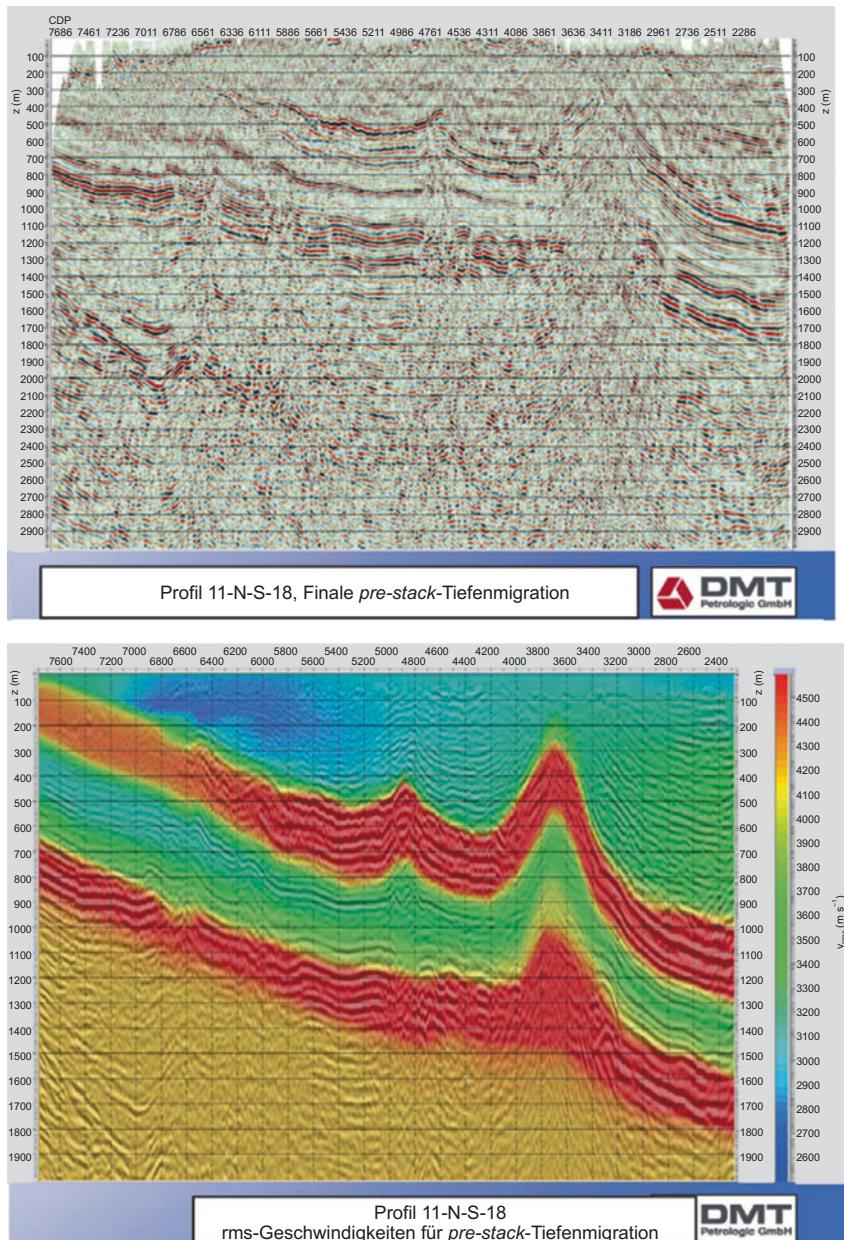
Alle diese Kohlenwasserstoff-Indikatoren (*hydrocarbon indicators – HCI*) sind jedoch nicht eindeutig, da alle beschriebenen Effekte auch andere Ursachen haben können. Meist deuten die HCI auf Gas hin, da die mit Öl verbundenen Effekte meist zu schwach sind, um erkannt zu werden. Daher wird in der Regel mehr als ein



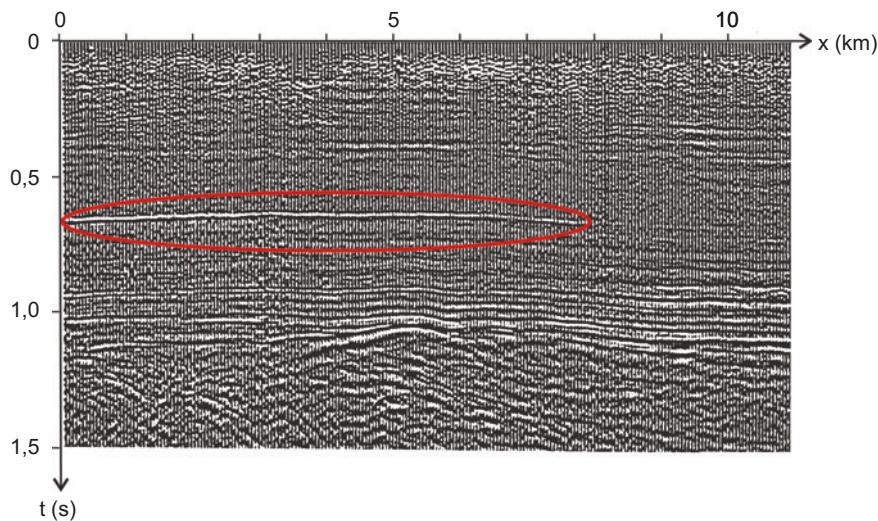
**Abb. 2.103** Schrittweise Bearbeitung eines seismischen Nord-Süd-Profs in der Nordschweiz:  
 (a) Mit einer konstanten Geschwindigkeit erstellte Feldstapelung; (b) Ergebnis der statischen Korrektur auf Basis von Refraktionsseismik sowie der Stapelung auf Grundlage einer Geschwindigkeitsanalyse bestehend aus einer Kombination von Geschwindigkeitsspektrum, dynamisch korrigierter CMP-Gruppe und Test-Stapelungen mit konstanten Geschwindigkeiten im gesamten relevanten Bereich von  $1\,600\text{ m s}^{-1}$  bis  $6\,000\text{ m s}^{-1}$ ; (c) Ergebnis der Kirchhoff-Zeitmigration vor dem Stapeln. Die CMP-Gruppen wurden mit Geschwindigkeiten von  $1\,500\text{ m s}^{-1}$  bis  $5\,400\text{ m s}^{-1}$  in Schritten von  $50\text{ m s}^{-1}$  berechnet; (d) Für die Kirchhoff-Zeitmigration vor dem Stapeln ermittelte Verteilung von rms-Geschwindigkeiten (Rybarczyk 2013)



**Abb. 2.103** (Fortsetzung)



**Abb. 2.104** Tiefenkonversion des Profils in Abb. 2.103c (oben) und hierfür verwendetes Geschwindigkeitsmodell (unten) (Rybczyk 2014)



**Abb. 2.105** Zeitsektion mit einem durch eine Gasakkumulation verursachten *bright spot* unterhalb der Schichtgrenze bei 0,6 s Zweiweglaufzeit (nach Telford et al. 1990)

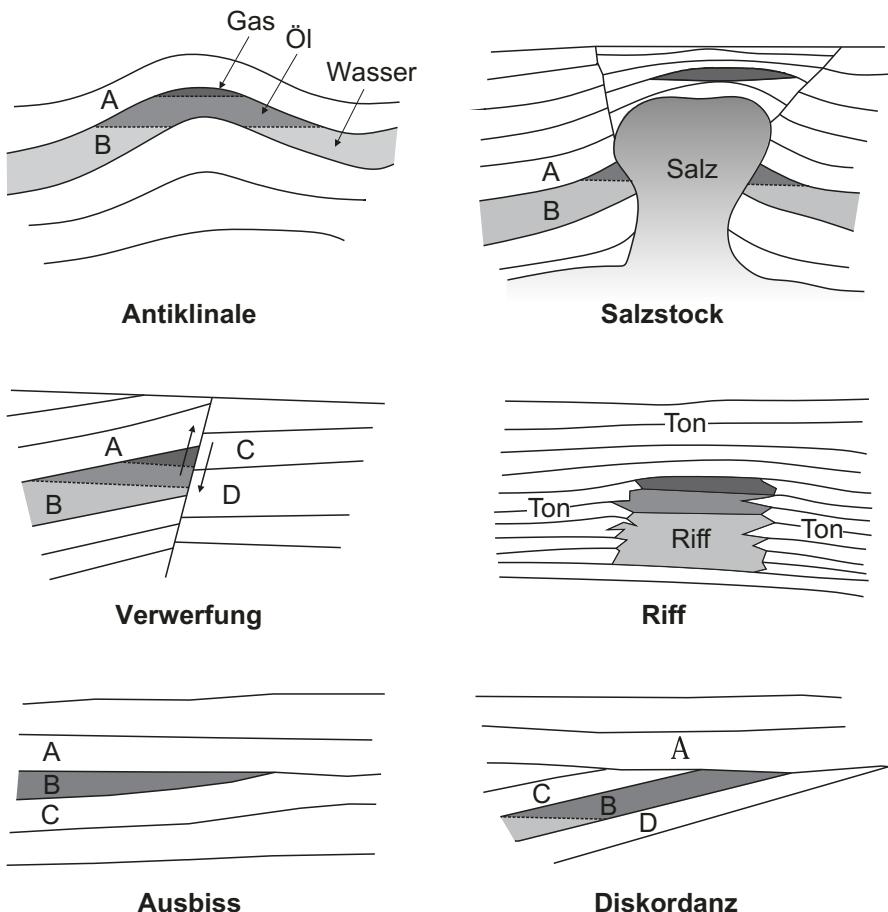
Indikator gefordert, bevor kostenträchtige Entscheidungen für Bohrungen getroffen werden.

Weit größere Bedeutung für die Suche nach Kohlenwasserstoffen hat daher immer noch das Auffinden struktureller Kohlenwasserstoff-Fallen. Diese sind die höchstgelegenen Teile von Strukturen, in denen sich Kohlenwasserstoffe aufgrund ihrer geringen Dichte im Verlauf ihrer Reifung und Wanderung (Migration)<sup>23</sup> anreichern können. Die Wichtigsten werden in Abb. 2.106 gezeigt: Antiklinale; Salzstock sowie Verwerfung mit Auf- oder Abschiebung, die ggf. geneigte Speicher abdichten (*fault trap*); Kalksteinriff; Ausbiss (*pinch-out*); Diskordanz (*unconformity trap*), etwa verursacht durch Transgression oder Erosion.

Die treffende Interpretation seismischer Daten erfordert sowohl Kenntnisse über die vorangegangenen Schritte in der seismischen Datenbearbeitung wie auch der Geologie. Nur mit Übung und Erfahrung wird es gelingen, die migrierte Tiefensektion in Abb. 2.107 im Detail so zu interpretieren, wie in Abb. 2.108 gezeigt.

Ein wesentlich besseres Verständnis der Untergrundstruktur, gerade auch bei komplizierten tektonischen Verhältnissen, ermöglicht die 3D-Seismik. Bei der Erkundung von Lagerstätten der Kohlenwasserstoffe an Land und auf See ist sie seit den 1990er Jahren der Industriestandard. Die Abb. 2.109 zeigt beispielhaft einen dreidimensionalen seismischen Datenwürfel im Umfeld eines Salzstocks im Emsland, der aus dem Zusammenspielen und einer Neubearbeitung dreier Vermessungen aus den Jahren 1995 und 2001 gewonnen wurde. Der Abstand der

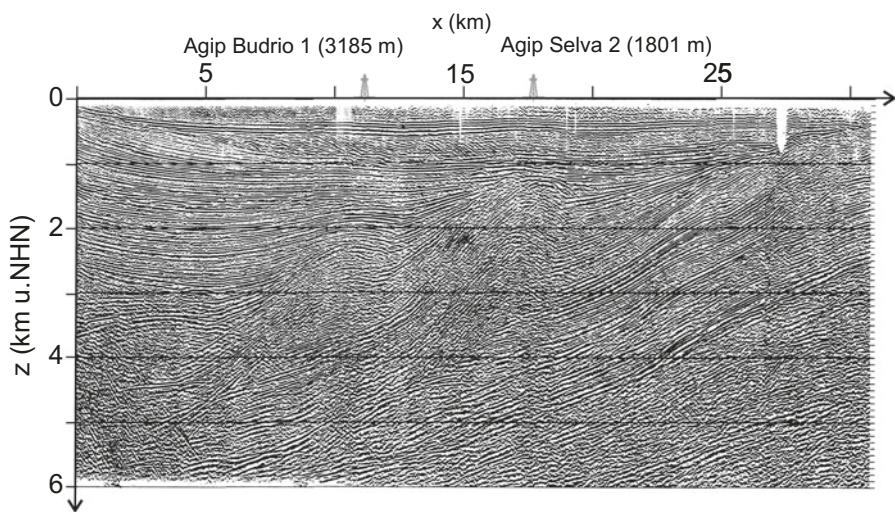
<sup>23</sup>Nicht zu verwechseln mit der Migration seismischer CMP-Gruppen.



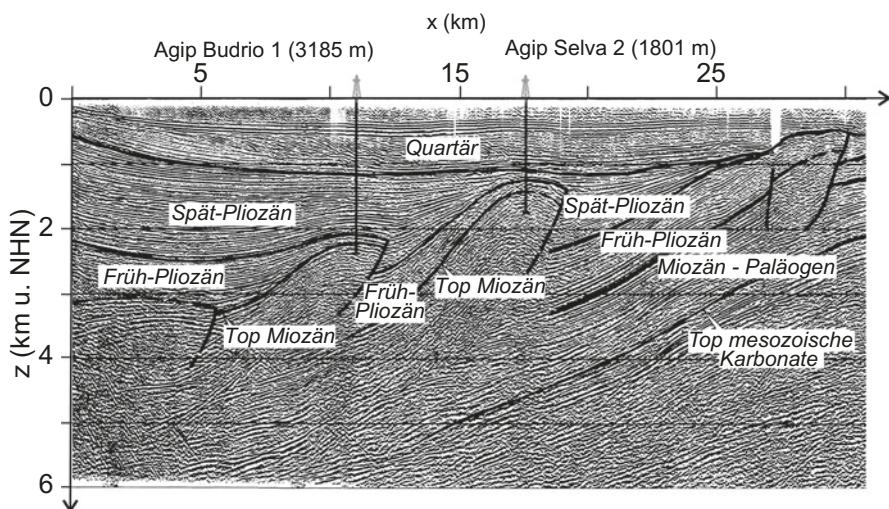
**Abb. 2.106** Strukturelle Fallenstrukturen für Kohlenwasserstoffe: Antiklinale, Salzstock, Verwerfung, Riff, Ausbiss und Diskordanz (nach Telford et al. 1976)

Geophone in Längs- und Querrichtung (*inline* bzw. *crossline spacing*) betrug 50 m. Die Fokustiefe der Seismik lag unterhalb von 3 900 m TVDSS.<sup>24</sup> Tab. 2.6 fasst die technischen Daten dieser drei Vermessungen zusammen. Die Analyse solcher dreidimensionaler Datenvolumina erfolgt u. a. mit Hilfe immersiver Visualisierung durch stereoskopische Projektion in einer CAVE (siehe Abb. 2.101).

<sup>24</sup>TVDSS bezeichnet in der Kohlenwasserstoff-Industrie gewöhnlich die Teufe, d. h. den vertikalen Abstand zu einem Bezugsniveau (TVD: *true vertical depth*), abzüglich dessen Höhe über Normalnull. Bei Bohrungen in den USA und einigen anderen Ländern dient als Bezugspunkt der Mitnehmereinsatz (*kelly bushing*) des Drehtisches der Bohrplattform, in den meisten anderen Ländern jedoch die Bohrplattform.

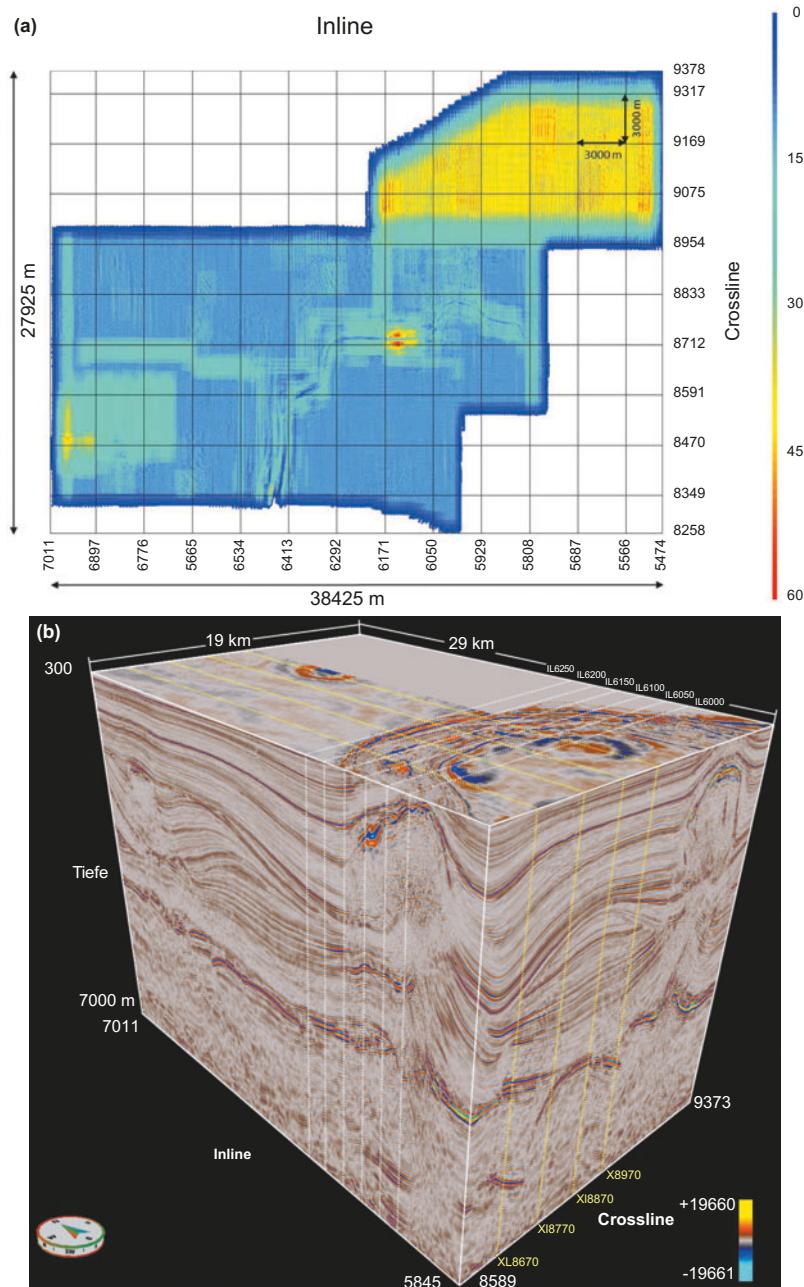


**Abb. 2.107** Migrierte Tiefensektion eines Profils in der Po-Ebene mit eingezeichneten Bohrungen (nach Telford et al. 1990); NHN: Normalhöhennull

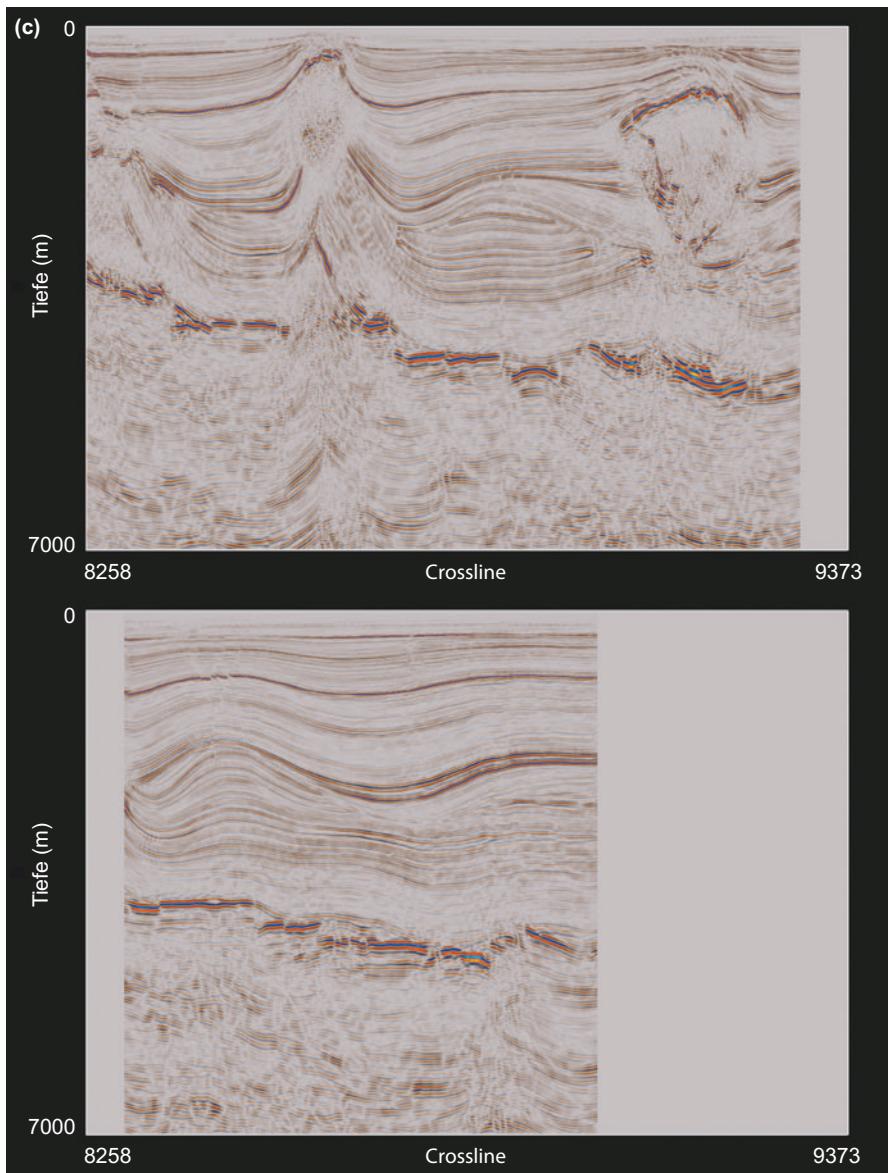


**Abb. 2.108** Interpretation der Tiefensektion aus Abb. 2.107 mit Faltungen, Auf- und Überschiebungen sowie eingezeichneten Bohrungen (nach Telford et al. 1990)

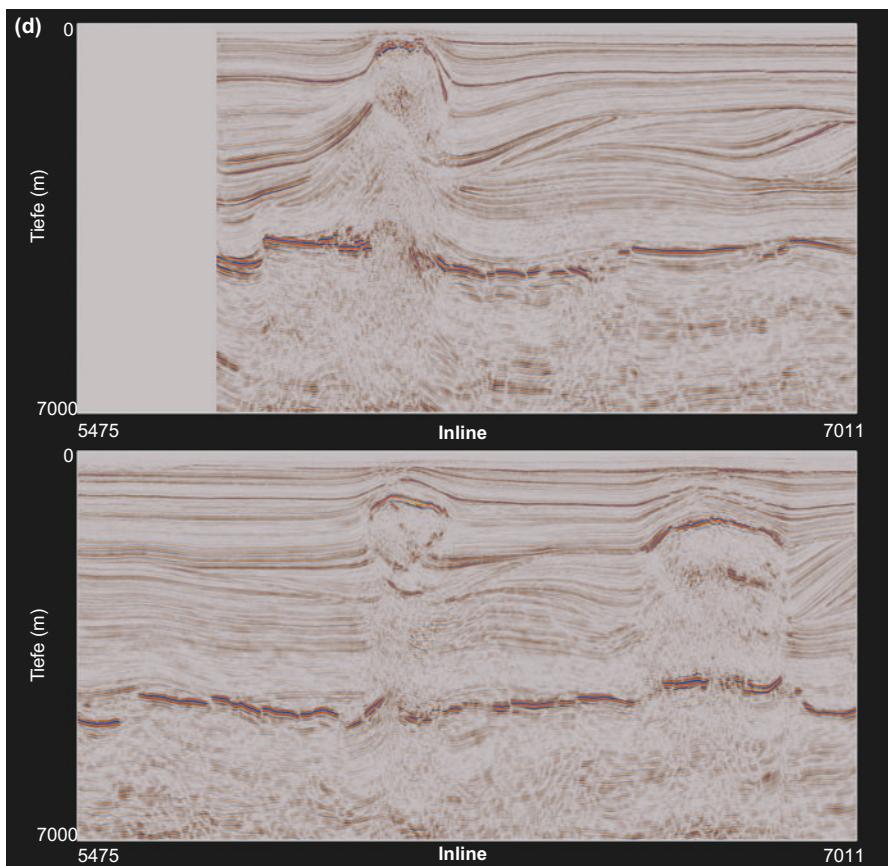
Aufmerksame Leser werden beim Vergleich von Abb. 2.109 und Tab. 2.6 unterschiedliche Angaben zum Überdeckungsgrad feststellen. Diese spiegeln den Unterschied zwischen dem nominellen und dem tatsächlich erzielten Überdeckungsgrad wider, der durch die Einflüsse des Schichteinfallens und der Geschwindigkeitsverteilung auf Reflexion und Brechung bestimmt wird.



**Abb. 2.109** 3D-Seismik im Emsland im Umfeld eines Salzstocks zur Erkundung von Rotliegend-Sandsteinen. (Quelle: Wintershall AG, Otto 2014). (a) Karte mit farblich kodiertem, nominellem Überdeckungsgrad; (b) 3D-Datenvolumen von erneut bearbeiteter Seismik mit Markierungen ausgewählter Längs- und Quer-Profile; (c) Längs-Profile IL6000 und IL6250 aus dem 3D-Datenvolumen in (b); (d) Quer-Profile XL8670 und XL8970 aus dem 3D-Datenvolumen in (b)



**Abb. 2.109** (Fortsetzung)



**Abb. 2.109** (Fortsetzung)

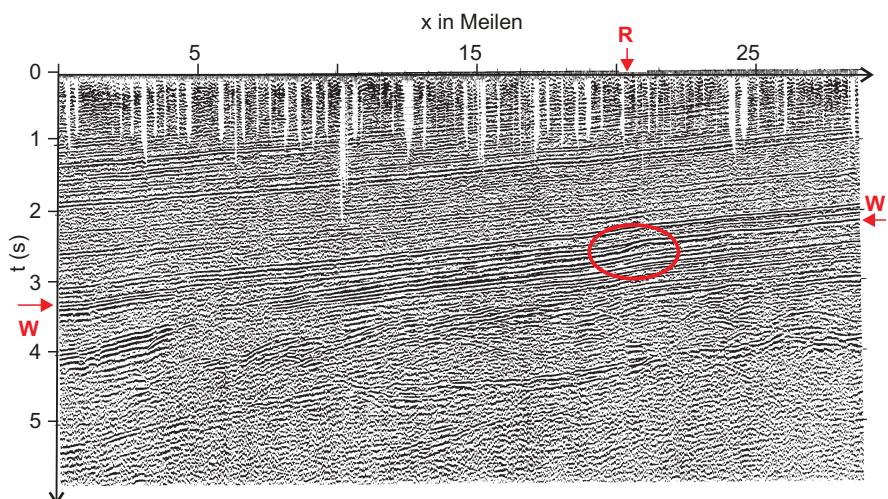
Sind die in [Abb. 2.109](#) gezeigten verschiedenen Arten von Salztektonik recht einfach zu erkennen, so erfordert das Identifizieren der in [Abb. 2.110](#) gezeigten Riffkante deutlich mehr geologisches Hintergrundwissen und Erfahrung in der Interpretation.

#### Gibt es eine charakteristische seismische Signatur von Erdöl?

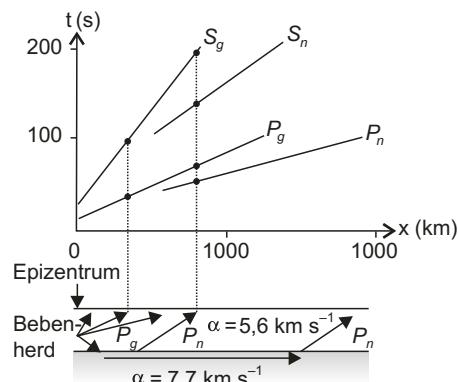
Ein direkter Nachweis von Erdöl ist derzeit nicht eindeutig möglich. Im Bereich der Prospektion auf Kohlenwasserstoffe besteht daher das Ziel der Reflexionseismik hauptsächlich im Auffinden stratigrafischer Fallenstrukturen. Die AVO-Analyse der Amplituden erlaubt über die Variation der Poisson-Zahl indirekte Rückschlüsse auf den Phasenzustand der Reservoirfluide und damit eine Unterscheidung zwischen Flüssigkeiten und Gasen.

**Tab. 2.6** Technische Daten der in Abb. 2.109 dargestellten 3D-Seismik (Quelle: Wintershall AG)

Vermessung Information zu	Ostfriesland Süd I (1995)	Ostfriesland Süd II (1995)	Leer (2001)
Kontraktor	Geco-Prakla	Geco-Prakla	Geofysika Torun
Aufzeichnungssystem	I/O II	I/O II	I/O II Image
Quellen	Vibroseis, Dynamit	Vibroseis, Dynamit	Vibroseis, Dynamit
Feld-Filter	Hochpass > 3 Hz	Hochpass > 3 Hz	Hochpass: –
Abtastrate	2 ms	2 ms	2 ms
Aufzeichnungslänge	6 000 ms	6 000 ms	5 100 ms
Bearbeitungslänge	5 000 ms	5 000 ms	5 000 ms
Anzahl der Kanäle	6 × 80	6 × 80	8 × 200
Anzahl der Geophonketten	6	6	8
Abstand der Geophonketten	400 m	400 m	400 m
Abstand der Geophone	50 m	50 m	50 m
Abstand der Quellenprofile	500 m	500 m	500 m
Abstand der Quellen	50 m	50 m	50 m
CDP-Stapelfenster	25 m × 25 m	25 m × 25 m	25 m × 25 m
CDP-Überdeckungsgrad	12	12	40
Sweepdauer	8 Hz–96 Hz, linear	8 Hz–96 Hz, linear	14 Hz–70 Hz, linear

**Abb. 2.110** Zeitsektion mit Riff und Riffkante bei „R“ unterhalb des mit „W“bezeichneten Einsatzes (Telford et al. 1990); eine Meile sind 1 609,3 Meter

**Abb. 2.111** Vereinfachte Laufzeitkurve aus den Originalabbildungen von Mohorovičić;  $P_g$  und  $S_g$  sind die direkten P- und S-Wellen in der Erdkruste,  $P_n$  und  $S_n$  die an der Kruste-Mantel-Grenze geführten P- und S-Wellen (nach Burger 1992)



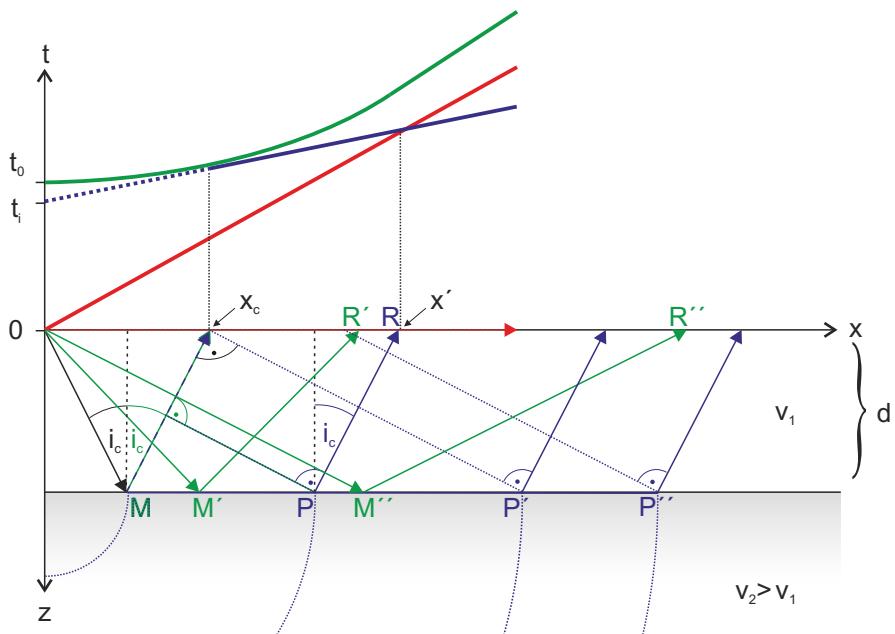
## 2.5 Die Refraktionsmethode

Bis etwa 1930 war die Refraktionsmethode die am meisten verwendete Erkundungsmethode bei der Suche nach Kohlenwasserstoffen. Davor wurde sie in der Erdbebenseismologie erfolgreich eingesetzt: 1909 beobachtet der Kroate Andrija Mohorovičić, Direktor der Landesanstalt für Meteorologie und Geodynamik im damals österreichisch-ungarischen Zagreb, in seinem Observatorium ein Erdbeben nahe Zagreb. Aus der Analyse der Wellen dieses an 29 seismologischen Stationen im Umkreis von 2 400 km registrierten Bebens identifizierte er die direkt in der („granitischen“) Kruste gelaufenen  $P_g$ - und  $S_g$ -Wellen sowie die an der Kruste-Mantel-Grenze geführten  $P_n$ - und  $S_n$ -Kopfwellen (Abb. 2.111). 1913 benutzte der deutsche Seismologe Beno Gutenberg die an der Kern-Mantel-Grenze geführte Welle zur Bestimmung der Tiefe dieser Grenzschicht sowie der seismischen Geschwindigkeit im flüssigen Erdkern und dem darüber liegenden Erdmantel.

Wenig später entwickelte der deutsche Markscheider und Geophysiker Ludger Mintrop diese Methode zur Erkundung von Lagerstätten in der flachen Erdkruste und beantragte 1919 ein Patent auf die Refraktionsmethode (siehe auch Abschn. 1.1). Diese wurde in der Folgezeit, vor allem in den 1920er Jahren intensiv genutzt, um in Deutschland, aber insbesondere in Mexiko, den USA und im Nahen Osten Fallenstrukturen (u. a. Salzstöcke) für Erdöl und Erdgas zu finden.

Nach 1930 wurde die Refraktionsmethode jedoch mehr und mehr von der Reflexionsmethode bei der Erdölprospektion verdrängt. Sie findet dort vornehmlich noch Verwendung zur Bestimmung von Geschwindigkeit und Mächtigkeit der Verwitterungsschicht. In der Erkundung des flachen Untergrunds ist die Refraktionsseismik aber nach wie vor die am häufigsten eingesetzte seismische Methode.

Während die Reflexionseismik vorwiegend in CMP-Gruppen sortierte Daten verwendet, werden in der Refraktionsseismik nach gemeinsamen Schuss- bzw. Geophonpunkten (*common source/receiver point gather – CSP/CRP*) sortierte Spurengruppen benutzt.



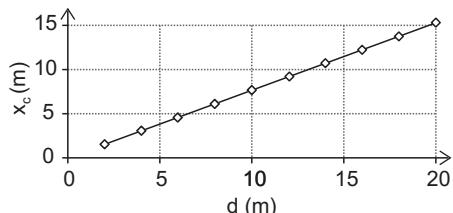
**Abb. 2.112** Laufzeitkurven der direkten (rot), reflektierten (grün) und geführten Welle (blau; Voraussetzung:  $v_2 > v_1$ );  $t_0$  ist die Lotzeit,  $t_i$  die Interzeptzeit, der Schnittpunkt der nach  $t = 0$  extrapolierten Gerade der geführten Welle mit der Zeitachse. Die mit dem kritischen Winkel am Punkt  $M$  kritisch reflektierte Welle erreicht die Erdoberfläche in der kritischen Entfernung  $x_c$  gleichzeitig mit dem ersten Einsatz der vom selben Punkt ausgehenden geführten oder Kopfwelle. Die Punkte  $R'$  und  $R''$  an der Erdoberfläche werden von den an den Punkten  $M'$  und  $M''$  überkritisch reflektierten Weitwinkelreflexionen erreicht. Die Knickpunktentfernung  $x'$  ist der Punkt an der Erdoberfläche, jenseits dessen die Einsätze der geführten Welle vor jenen der direkten Welle eintreffen (ab dem Punkt  $P$  auf dem Refraktor, beispielsweise ausgehend von den Punkten  $P'$  und  $P''$ )

### 2.5.1 Die Geometrie von Refraktionswegen

Das snelliussche Brechungsgesetz ergibt für den Fall  $v_2 > v_1$  den kritischen Einfall- und Reflexionswinkel  $i_c$ , bei dem der Brechungswinkel in der zweiten Schicht  $90^\circ$  beträgt (Abb. 2.112; vgl. Abschn. 2.2.4). Dieser Fall entspricht einer Welle in der zweiten Schicht, deren Fronten senkrecht auf der Schichtgrenze stehen. Diese breiten sich mit der Geschwindigkeit  $v_2 > v_1$  aus und schleppen in der ersten Schicht eine (machsche) Kopfwelle nach. Deren Laufzeit enthält Information über die Schichtdicke  $d$  sowie die Geschwindigkeit  $v_2$  des Liegenden. Aus Gl. 2.66 folgt für den kritischen Winkel:

$$\sin(i_c) = \frac{v_1}{v_2}, \quad (2.234)$$

**Abb. 2.113** Kritische Entfernung der geführten Welle als Funktion der Schichtmächtigkeit für  $v_2/v_1 = 2,8$  (siehe Tab. 2.7)



**Tab. 2.7** Kritische Entfernung  $x_c$  für einen Zweischichtfall als Funktion der Mächtigkeit  $d$  der Deckschicht;  $\alpha$  in der ersten und zweiten Schicht ist  $500 \text{ m s}^{-1}$  bzw.  $1400 \text{ m s}^{-1}$  (nach Burger 1992)

d (m)	x <sub>c</sub> (m)
2	1,53
4	3,06
6	4,59
8	6,12
10	7,65
12	9,18
14	10,71
16	12,24
18	13,76
20	15,29

$x_c/d = 0,765$

wobei  $v_1$  und  $v_2$  sowohl für die Geschwindigkeit von Kompressions- als auch Scherwellen stehen können. Es gibt also insgesamt vier kritische Winkel. Häufig werden aber nur die Ersteinsätze ausgewertet, also jene der Kompressionswellen.

Für die kritische Entfernung  $x_c$  gilt:

$$x_c = 2d \tan(i_c) = 2d \frac{\sin(i_c)}{\sqrt{1 - \sin^2(i_c)}} = \frac{v_1}{v_2} \frac{2d}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}}} = \frac{2d}{\sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1}}. \quad (2.235)$$

Je größer also das Verhältnis  $v_2/v_1$  wird, desto geringer wird die kritische Entfernung  $x_c$ . Für  $v_2/v_1 = \sqrt{2} \approx 1,4$  ergibt sich  $x_c = 2d$ . Als grobe Faustregel kann also gelten, dass die geführte Welle nur für Auslagen beobachtet werden kann, die etwa mehr als doppelt so groß sind, wie die Tiefe zur Grenzschicht. Abb. 2.113 und Tab. 2.7 illustrieren ein Beispiel für ein Geschwindigkeitsverhältnis von  $v_2/v_1 = 2,8$ .

### 2.5.1.1 Eine horizontale Grenzschicht

Die Gleichung für die Laufzeitgerade der an der Grenzschicht geführten Welle (siehe Abb. 2.112) lässt sich leicht angeben. Es gilt:  $t = \frac{\overline{OM}}{v_1} + \frac{\overline{MP}}{v_2} + \frac{\overline{PR}}{v_1} = \frac{\overline{MP}}{v_2} + 2 \frac{\overline{OM}}{v_1}$ . Mit  $\overline{MP} = x - x_c = x - 2d \tan(i_c)$  folgt hieraus:

$t = \frac{x-2d \tan(i_c)}{v_2} + \frac{2d}{v_1 \cos(i_c)} = \frac{x}{v_2} + \underbrace{\frac{2d}{v_1 \cos(i_c)}}_{t_i} \left(1 - \frac{v_1}{v_2} \sin(i_c)\right)$ . Mit  $\sin(i_c) = v_1/v_2$  sowie  $1-\sin^2(i_c) = \cos^2(i_c)$  folgt schließlich:

$$t = \frac{x}{v_2} + \underbrace{\frac{2d \cos(i_c)}{v_1}}_{t_i} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x}{v_2} + \underbrace{\frac{2d \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}}_{t_i}. \quad (2.236)$$

Gl. 2.236 ist eine Geradengleichung für  $t$  als Funktion von  $x$  mit der Steigung  $1/v_2$  und der Interzeptzeit  $t_i$  als Y-Achsenabschnitt:

$$t_i = \frac{2d \cos(i_c)}{v_1} = \frac{2d \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}. \quad (2.237)$$

Aus Gl. 2.237 kann die Mächtigkeit  $d$  der ersten Schicht berechnet werden:

$$d = \frac{v_1 t_i}{2 \cos(i_c)} = \frac{t_i}{2} \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \quad (2.238)$$

Die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  erhält man aus den Kehrwerten der Steigungen der Laufzeitäste der direkten und der Kopfwelle. Der kritische Winkel folgt aus dem Arkussinus des Quotienten beider Geschwindigkeiten (Gl. 2.234).

In der kritischen Entfernung trifft die reflektierte Welle zeitgleich mit der dort erstmals auftretenden Kopfwelle ein. Die Laufzeitäste von Reflexion und Refraktion berühren sich also für  $x = x_c$ . Leitet man die Laufzeitkurve der Reflexion (Gl. 2.83) nach  $x$  ab und wertet für  $x = x_c$  aus, so ergibt sich als Steigung  $1/v_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} \Big|_{x_c} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 4d^2}}{v_1} \right) \Big|_{x_c} = \frac{1}{2v_1} \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + 4d^2)}} \Big|_{x_c} = \frac{x}{v_1 \sqrt{(x^2 + 4d^2)}} \Big|_{x_c} \\ &= \frac{1}{v_1} \underbrace{\frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + (2d)^2}}}_{\sin(i_c) = v_1/v_2} = \frac{1}{v_2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Reflexionshyperbel und die Gerade der Kopfwelle bei  $x = x_c$  die gleiche Steigung besitzen. Die Kopfwellengerade ist also am Ort ihres ersten Auftretens die Tangente an die Reflexionshyperbel. Überall sonst trifft die Kopfwelle vor der Reflexion ein.

Da für  $x = 0$  gilt:  $t_i = 2d \cos(i_c)/v_1$  und  $t_0 = 2d/v_1$ , ist die Interzeptzeit  $t_i$  immer kleiner als die Lotzeit  $t_0$  (siehe Abb. 2.112). Für kleine Auslagen trifft die Kopfwelle immer nach der direkten Welle ein, bis sie diese am sog. Knickpunkt (*crossover point*)  $x'$  einholt. Dort gilt:

$$\frac{x'}{v_1} = \frac{x'}{v_2} + \frac{2d \cos(i_c)}{v_1} = \frac{x'}{v_2} + \frac{2d \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} \quad \text{und somit: } x' \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} = 2d \frac{\sqrt{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}}{v_1 v_2}.$$

Damit folgt für die Knickpunktentfernung  $x'$ :

$$x' = 2d \sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}} \quad (2.239)$$

und die Schichtmächtigkeit  $d$ :

$$d = \frac{x'}{2} \sqrt{\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}}. \quad (2.240)$$

Nach Gl. 2.240 kann die Schichtmächtigkeit  $d$  aus der Knickpunktentfernung  $x'$  und den Geschwindigkeiten bestimmt werden. In der Regel liefert jedoch die Interzeptzeit ein besseres Ergebnis: Sie kann meist genauer bestimmt werden als der Knickpunkt, da sie nur eine, der Knickpunkt aber zwei Geradenanpassungen benötigt.

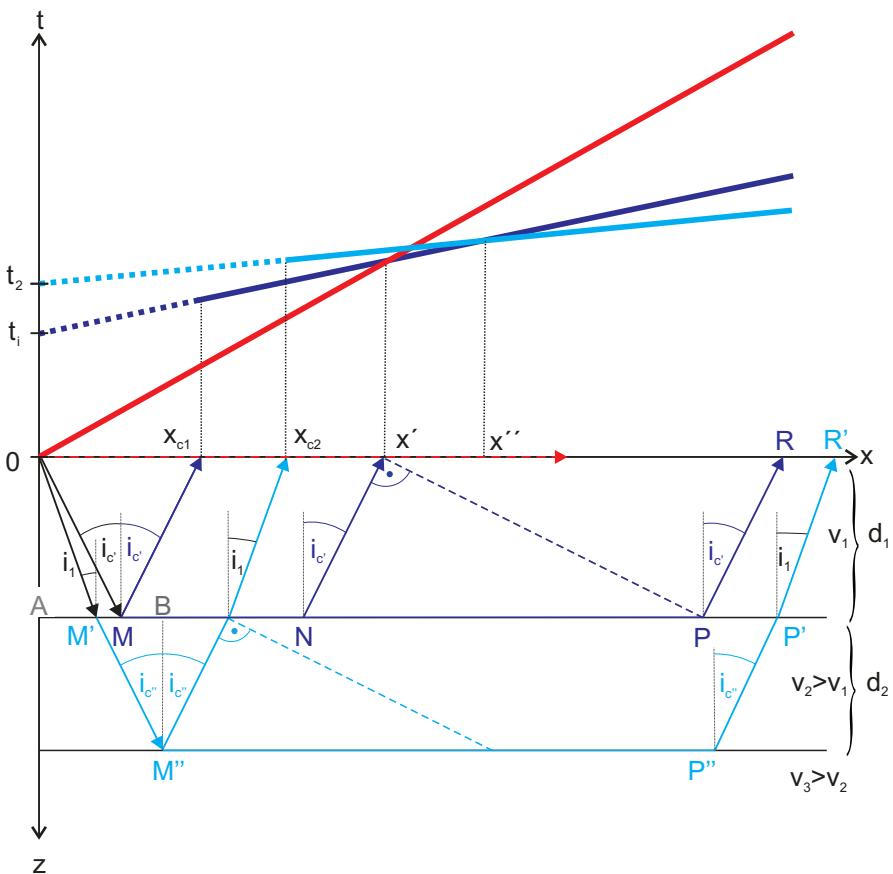
### 2.5.1.2 Mehrere horizontale Grenzschichten

Die Gleichung der Laufzeitkurve im Fall mehrerer horizontaler Schichten mit jeweils größeren Geschwindigkeiten ergibt sich analog zur Herleitung für zwei Schichten. Für drei Schichten und deren Mächtigkeiten  $d_i$ , Winkel  $i_i$  und Geschwindigkeiten  $v_i$  folgt für den an der zweiten Grenzschicht kritisch gebrochenen Strahl unter Beachtung von  $\sin(i_1)/v_1 = \sin(i_{c''})/v_2 = 1/v_3$  (Abb. 2.114):

$$\begin{aligned} t &= \frac{\overline{OM'} + \overline{P'R'}}{v_1} + \frac{\overline{M'M''} + \overline{P'P''}}{v_2} + \frac{\overline{M''P''}}{v_3} = \frac{2d_1}{v_1 \cos(i_1)} + \frac{2d_2}{v_2 \cos(i_{c''})} \\ &\quad + \frac{x - 2d_1 \tan(i_1) - 2d_2 \tan(i_{c''})}{v_3} \\ &= \frac{x}{v_3} + \frac{2d_2}{v_2 \cos(i_{c''})} \left( 1 - \underbrace{\frac{v_2}{v_3} \sin(i_{c''})}_{\sin i_{(c'')}} \right) + \frac{2d_1}{v_1 \cos(i_1)} \left( 1 - \underbrace{\frac{v_1}{v_3} \sin(i_1)}_{\sin(i_1)} \right) \\ &= \frac{x}{v_3} + 2 \underbrace{\left( \frac{d_2 \cos(i_{c''})}{v_2} + \frac{d_1 \cos(i_1)}{v_1} \right)}_{t_2} \text{(Interzeptzeit der zweiten Kopfwelle)}. \end{aligned} \quad (2.241)$$

Dies ist erneut eine Geradengleichung in  $x$  mit der Steigung  $1/v_3$  und dem Y-Achsenabschnitt

$$t_2 = 2 \left( \frac{d_2 \cos(i_{c''})}{v_2} + \frac{d_1 \cos(i_1)}{v_1} \right), \quad (2.242)$$



**Abb. 2.114** Strahlengang und kritische Winkel  $i_c'$  und  $i_c''$  der direkten (rot) und geführten (blau) Wellen bei drei Schichten, deren seismische Geschwindigkeiten mit der Tiefe zunehmen

der Interzeptzeit der zweiten Kopfwelle. Für den Fall von  $n$  horizontalen Schichten kann Gl. 2.241 verallgemeinert werden:

$$t = \frac{x}{v_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2d_k \cos(i_k)}{v_k}, \quad (2.243)$$

wobei  $i_{n-1}$  der kritische Winkel  $i_c$  ist und alle anderen Winkel untermittisch sind.

Mit Gl. 2.243 können für alle Schichten die Mächtigkeiten sowie die (konstanten, aber mit der Tiefe zunehmenden) Geschwindigkeiten berechnet werden, vorausgesetzt der Beitrag jeder Schicht zur Laufzeitkurve ist ausreichend für die Anpassung einer hinreichend genauen Gerade. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Mächtigkeit der jeweiligen Schicht in einem hinreichenden Verhältnis zur Auslage sowie zum Geophonabstand steht. Dann können alle Geschwindigkeiten  $v_i$  (und damit

auch alle Winkel  $i_i$ ) aus den Steigungen  $1/v_i$  der Geradenabschnitte berechnet werden. Die Schichtmächtigkeiten ergeben sich schließlich aus den Interzeptzeiten bzw. deren schichtweisen Beiträgen.

Die kritische Entfernung  $x_{c2}$  für die zweite Kopfwelle ergibt sich aus den Beiträgen der einzelnen Anteile am Gesamtaufweg ([Abb. 2.114](#)):  $x_{c2} = 2 \left( \overline{AM'} + \overline{M'B} \right) = 2(d_1 \tan(i_1) + d_2 \tan(i_{c''}))$ . Mit  $\sin(i_1)/v_1 = \sin(i_{c''})/v_2 = 1/v_3$  folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x_{c2} &= 2 \left( \frac{d_1 \sin(i_1)}{\sqrt{1 - \sin^2(i_1)}} + \frac{d_2 \sin(i_{c''})}{\sqrt{1 - \sin^2(i_{c''})}} \right) = 2 \left( \frac{d_1 \frac{v_1}{v_3}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_3^2}}} + \frac{d_2 \frac{v_2}{v_3}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_3^2}}} \right) \\ &= 2 \left( \frac{d_1 v_1}{\sqrt{v_3^2 - v_1^2}} + \frac{d_2 v_2}{\sqrt{v_3^2 - v_2^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.244)$$

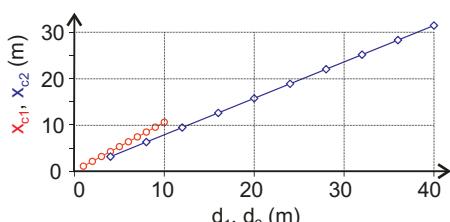
Somit kann analog zum Zweischichtfall die Schichtmächtigkeit  $d_2$  bei bekannten Geschwindigkeiten und bekanntem  $d_1$  wiederum aus der kritischen Entfernung der zweiten Kopfwelle ([Gl. 2.244](#)) berechnet werden statt aus den Interzeptzeiten. [Abb. 2.115](#) und [Tab. 2.8](#) illustrieren ein Beispiel für die Geschwindigkeitsverhältnisse  $v_2/v_1 = 2,14$  und  $v_3/v_2 = 3,0$ .

### 2.5.1.3 Geneigte Schichtgrenzen

Für den Fall einer geneigten Schichtgrenze ergibt sich für ein Bergabprofil  $t^-(x)$  (in Richtung des Schichteinfallens; *down-dip*) die folgende Laufzeitkurve, wo  $d^-$  und  $d^+$  die Normalen vom Schusspunkt bzw. Geophon auf die Schichtgrenze sind und  $\theta$  das Schichteinfallen ist ([Abb. 2.116](#)):

$$\begin{aligned} t^- &= \frac{\overline{OM}}{v_1} + \frac{\overline{MP}}{v_2} + \frac{\overline{PR}}{v_1} = \frac{d^-}{v_1 \cos(i_c)} + \frac{d^+}{v_1 \cos(i_c)} + \frac{x \cos(\theta) - (d^- + d^+) \tan(i_c)}{v_2} \\ &= \frac{d^- + d^+}{v_1 \cos(i_c)} + \frac{x \cos(\theta)}{v_2} - \frac{d^- + d^+}{v_2} \frac{\sin(i_c)}{\cos(i_c)} \\ &= \frac{x \cos(\theta)}{v_2} + (d^- + d^+) \left( \frac{1}{v_1 \cos(i_c)} - \frac{\sin(i_c)}{v_2 \cos(i_c)} \right). \end{aligned}$$

**Abb. 2.115** Kritische Entfernungen  $x_{c1}$  (rot) und  $x_{c2}$  (blau) der geführten Wellen als Funktion der jeweiligen Schichtmächtigkeiten  $d_1$  und  $d_2$  für  $v_2/v_1 = 2,14$  und  $v_3/v_2 = 3,0$  (siehe [Tab. 2.8](#))

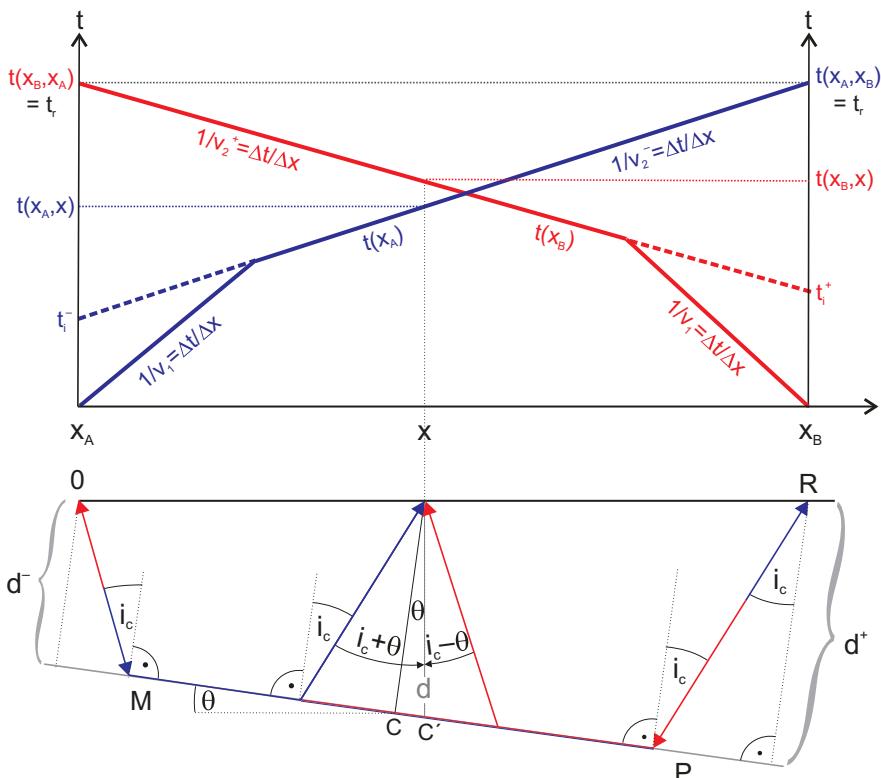


**Tab. 2.8** Kritische

Entferungen  $x_{c1}$  und  $x_{c2}$  für einen Dreischichtfall als Funktion der Mächtigkeiten  $d_1$  und  $d_2$  der Deckschichten;  $\alpha$  in den drei Schichten ist  $700 \text{ m s}^{-1}$ ,  $1500 \text{ m s}^{-1}$  und  $4500 \text{ m s}^{-1}$  (nach Burger 1992)

$d_1 (\text{m})$	$x_{c1} (\text{m})$	$d_2 (\text{m})$	$x_{c2} (\text{m})$
1	1,06	4	3,14
2	2,11	8	6,29
3	3,17	12	9,43
4	4,22	16	12,57
5	5,28	20	15,72
6	6,33	24	18,86
7	7,39	28	22,00
8	8,44	32	25,15
9	9,50	36	28,29
10	10,55	40	31,43

$x_{c2}/(d_1 + d_2) = 0,628$

**Abb. 2.116** Laufzeitkurven von Schuss und Gegenschuss über einer mit dem Winkel  $\theta$  einfallenden Schichtgrenze

Mit  $1/v_2 = \sin(i_c)/v_1$  folgt hieraus:

$$t^- = \frac{x \cos(\theta)}{v_2} + (d^- + d^+) \frac{1 - \sin^2(i_c)}{v_1 \cos(i_c)} = \frac{x \cos(\theta)}{v_2} + \frac{d^- + d^+}{v_1} \cos(i_c), \quad (2.245)$$

und mit  $d^+ = d^- + x \sin(\theta)$  ergibt sich:  $t^- = \frac{x \sin(i_c) \cos(\theta)}{v_1} + \underbrace{\frac{2d^- \cos(i_c)}{v_1}}_{t_i^-} + \frac{x \cos(i_c) \sin(\theta)}{v_1}$ . Schließlich folgt hieraus mit  $\sin(i_c \pm \theta) = \sin(i_c) \cos(\theta) \pm \cos(i_c) \sin(\theta)$ :

$$t^- = \frac{x}{v_1} \sin(i_c + \theta) + \underbrace{\frac{2d^-}{v_1} \cos(i_c)}_{t_i^-}. \quad (2.246)$$

Dies ist wiederum eine Geradengleichung mit der Steigung  $\sin(i_c + \theta)/v_1$  und der Interzeptzeit

$$t_i^- = \frac{2d^-}{v_1} \cos(i_c). \quad (2.247)$$

Die Steigung der Geraden definiert die Scheingeschwindigkeit  $v_2^-$ , mit der die geführte Welle an der Oberfläche anbrandet:

$$v_2^- = \frac{v_1}{\sin(i_c + \theta)}. \quad (2.248)$$

Für einen Bergaufschuss (in Richtung des Schichtanstiegs; *up-dip*) ist der Laufweg derselbe und die Herleitung völlig identisch. Lediglich wird nun in Gl. 2.245  $d^-$  durch  $d^+$  ausgedrückt:  $d^- = d^+ - x \sin(\theta)$ , sodass sich für die Laufzeit  $t^+(x)$  in Richtung des Schichtanstiegs ergibt:

$$t^+ = \frac{x}{v_1} \sin(i_c - \theta) + \frac{2d^+}{v_1} \cos(i_c). \quad (2.249)$$

Wiederum gilt für die Interzeptzeit  $t_i^+$  und die Scheingeschwindigkeit  $v_2^+$

$$t_i^+ = \frac{2d^+ \cos(i_c)}{v_1}, \quad (2.250)$$

$$v_2^+ = \frac{v_1}{\sin(i_c - \theta)}. \quad (2.251)$$

Man erkennt aus Gl. 2.248 und 2.251, dass für beliebiges Schichteinfallen ( $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ) die Scheingeschwindigkeit bergauf (in Richtung des Schichtanstiegs) immer größer ist als bergab (in Richtung des Schichteinfallens):  $v^+ > v^-$ . Aus den Scheingeschwindigkeiten von Schuss und Gegenschuss kann nun der kritische Winkel  $i_c$  und das Schichteinfallen  $\theta$  berechnet werden:

$$i_c = \frac{1}{2} \left( \arcsin \left( \frac{v_1}{v_2^+} \right) + \arcsin \left( \frac{v_1}{v_2^-} \right) \right), \quad (2.252)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \arcsin \left( \frac{v_1}{v_2^-} \right) - \arcsin \left( \frac{v_1}{v_2^+} \right) \right). \quad (2.253)$$

Eine einfache Faustformel ergibt sich aus der Addition der Steigungen der beiden Kopfwellen:

$$\frac{1}{v_2^-} + \frac{1}{v_2^+} = \frac{1}{v_1} (\sin(i_c + \theta) + \sin(i_c - \theta)) = \frac{2}{v_1} \sin(i_c) \cos(\theta) = \frac{2}{v_2} \cos(\theta).$$

Für kleines Schichteinfallen ist  $\cos(\theta) \approx 1$ ; beispielsweise ist der Kosinus für Winkel von weniger als  $15^\circ$  größer als 0,96. Damit sind die mittlere reziproke Geschwindigkeit bzw. die mittlere Geschwindigkeit der zweiten Schicht näherungsweise gleich dem arithmetischen bzw. harmonischen Mittel der beiden Scheingeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{v}_2} &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_2^-} + \frac{1}{v_2^+} \right) \text{ bzw.} \\ \bar{v}_2 &\approx 2 \frac{v_2^- v_2^+}{v_2^- + v_2^+}.\end{aligned}\quad (2.254)$$

Auch für mehrere geneigte Schichtgrenzen sind Formeln verfügbar (siehe z. B. Burger 1992; S. 89), die jedoch in der Praxis wenig Anwendung finden (siehe z. B. Telford et al. 1990; S. 175).

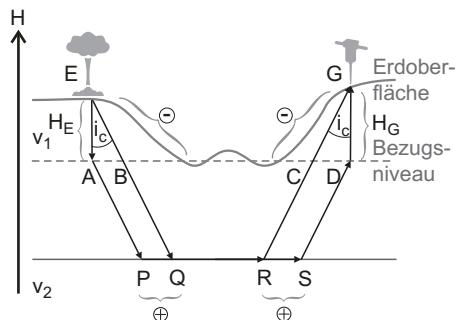
## 2.5.2 Bearbeitung refraktionsseismischer Daten

Die Interpretation refraktionsseismischer Daten setzt keine vergleichbar umfangreichen Bearbeitungsschritte voraus wie die Reflexionsseismik. Lediglich der Einfluss einer unebenen Topografie sowie ggf. der Verwitterungsschicht müssen korrigiert werden. Sonst kann die Variation der Laufzeiten nicht zuverlässig strukturellen Änderungen im Untergrund zugeordnet werden. Diese Korrekturen sind analog der statischen Korrekturen bei der Reflexionsseismik. Ein zweiter wichtiger Bearbeitungsschritt besteht in einer Konsistenzprüfung der Daten, der sicherstellen soll, dass bei der Auswahl (dem Anreißen bzw. *picking*) der Ersteinsätze keine Fehler unterlaufen sind. Dies kann insbesondere dann geschehen, wenn bei späten Einsätzen das Refraktionssignal auseinandergelaufen ist, d. h. die Refraktionsenergie sich auf ein längeres Zeitintervall verteilt hat und als Ersteinsatz eine andere Phase interpretiert wird als bei frühen Einsätzen.

### 2.5.2.1 Höhen- und Verwitterungskorrektur

Die Höhenkorrektur besteht darin, alle Einsätze auf ein gemeinsames Bezugsniveau (*datum*) zu reduzieren (Abb. 2.117). Dies geschieht, indem die Laufzeiten um die Beträge  $\overline{EB}/v_1$  und  $\overline{CG}/v_1$  vermindert sowie um die Beträge  $\overline{PQ}/v_2$  und  $\overline{RS}/v_2$  vergrößert werden ( $\ominus$  und  $\oplus$  in Abb. 2.117). Dies entspricht dann einem Laufweg APSD statt dem tatsächlichen Laufweg EQRG. Da die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  jeweils mit  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RS}$  identisch sind, gilt für die Korrektur  $t_{korr}$  am Schusspunkt E:

**Abb. 2.117** Zur Höhen- und Verwitterungskorrektur



$$\begin{aligned} t_{korr}(E) &= \frac{H_E \tan(i_c)}{v_2} - \frac{H_E}{v_1 \cos(i_c)} = H_E \frac{\sin^2(i_c) - 1}{v_1 \cos(i_c)} = H_E \frac{-\cos^2(i_c)}{v_1 \cos(i_c)} \\ &= -H_E \frac{\cos(i_c)}{v_1} = -H_E \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}. \end{aligned}$$

Dieselbe Beziehung gilt am Ort des Geophons, nur dass dort  $H_E$  durch  $H_G$  ersetzt wird. Die Höhenkorrektur  $\Delta t_H$  setzt sich somit aus diesen beiden Beiträgen zusammen und ist negativ. Die (additive) Höhenkorrektur ist somit:

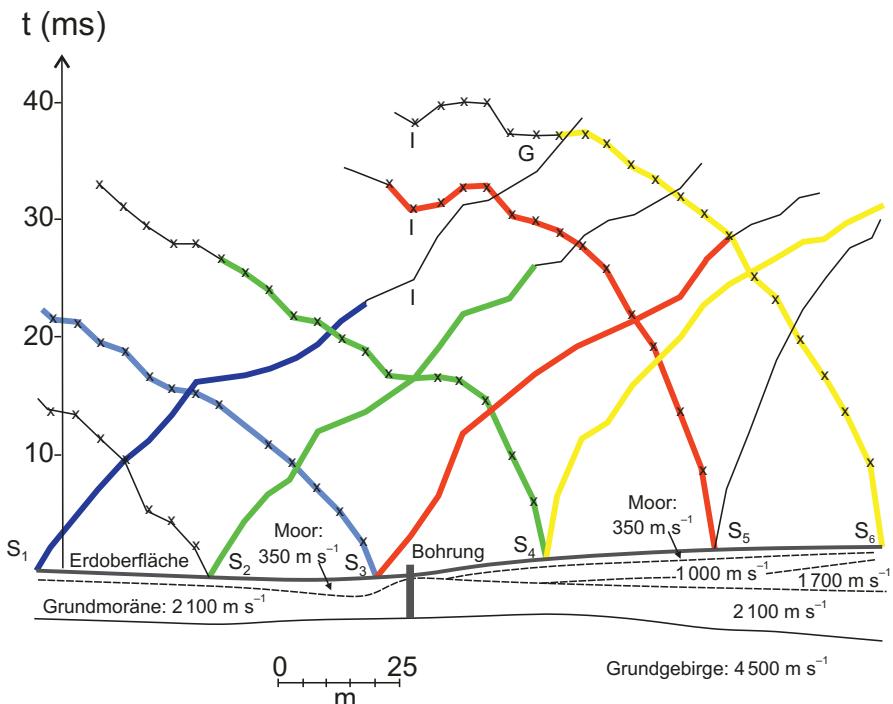
$$\Delta t_H = t_{korr}(E) + t_{korr}(G) = -(H_E + H_G) \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}. \quad (2.255)$$

Falls die Mächtigkeit der Verwitterungszone (der oberflächennahen ungesättigten Zone) stark variiert, muss dies ebenfalls berücksichtigt werden. Hierzu wird aber eine gute Kenntnis ihrer Mächtigkeit und Geschwindigkeit benötigt. Da dies eine Anzahl kleinräumiger Spezialuntersuchungen mit geringen Geophonabständen erfordert, wird dieser Aufwand nur dann getrieben, wenn Interesse an einer Detailkartierung der Refraktoroberfläche besteht. Aus einer solchen kleinräumigen Vermessung kann dann die Mächtigkeit der Verwitterungsschicht aus der Interzeptzeit eines Zweischichtfalles (Gl. 2.237) bestimmt werden. Die Laufzeit durch die Verwitterungsschicht an dieser Stelle wird schließlich dann von der Laufzeit des regulären Refraktionsprofils an dieser Stelle abgezogen. Die anschließende Höhenkorrektur bezieht sich dann nicht auf die Geländehöhe sondern auf die Basis der Verwitterungsschicht.

### 2.5.2.2 Konsistenzprüfung der Daten

Vor der Interpretation der Daten kann mit verschiedenen einfachen Konsistenztests geprüft werden, ob bei der Auswahl der Ersteinsätze Fehler unterlaufen sind:

- (1) *Gleichheit reziproker Zeiten:* Die Gesamtaufzeit vom Schusspunkt zum Geophon muss beim Vertauschen von Schuss- und Geophonposition gleich bleiben.



**Abb. 2.118** Gleichheit reziproker Zeiten als Konsistenzkriterium von Refraktionsdaten, in diesem Beispiel einer Grundgebirgskartierung verletzt für einige Paare von Schuss und Gegen-schuss ( $S_1$ – $S_6$ : Schusspunkte). Dies kann z. B. durch Auswahl unterschiedlicher Phasen verursacht sein (nach Parasnis 1997)

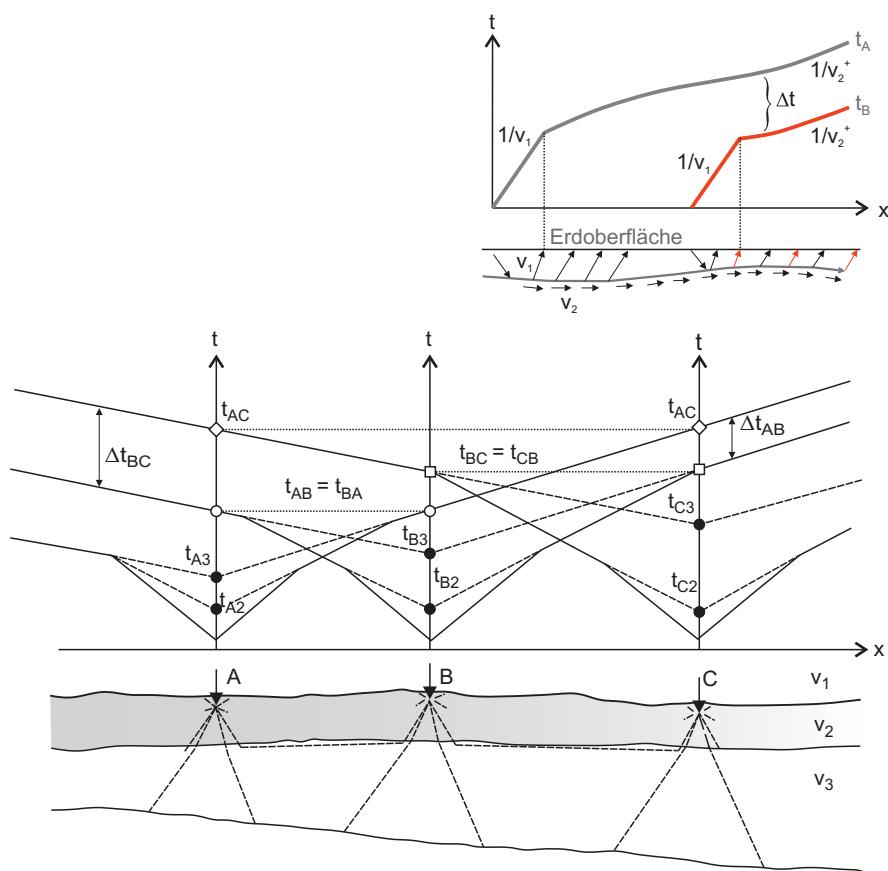
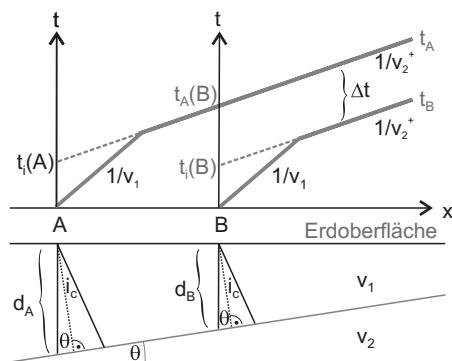
Dies ist ein strenges Kriterium und folgt daraus, dass die Laufzeit nicht vom Richtungssinn der Welle abhängt. Die Abb. 2.118 zeigt hierfür ein Beispiel aus einer Grundgebirgskartierung, in der dieses Kriterium für einige Profile verletzt ist.

(2) *Parallele Laufzeitäste*: Erhält man auf demselben Profilstück Einsätze desselben Refraktors von der gleichen Seite, aber von unterschiedlichen Schusspunkten, so müssen die Laufzeitäste der verschiedenen Schussprofile parallel sein (Abb. 2.119). Auch hierfür zeigt die Abb. 2.118 Beispiele. Hierbei wird allerdings vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit des Refraktors nicht mit der Tiefe zunimmt, was jedoch oft der Fall ist.

(3) *Gleichheit von Interzeptzeiten*: Wenn der Refraktor eben, jedoch nicht zwangsläufig horizontal ist, müssen die Interzeptzeiten der Schuss- und Gegen-schussprofile am selben Punkt übereinstimmen. Gekrümmte Refraktoren am Schusspunkt verursachen häufig unterschiedliche Interzeptzeiten. Mit Hilfe paralleler Laufzeitäste kann dies behoben werden, wenn eine zu diesen parallele Verlängerung gezeichnet werden kann. Abb. 2.120 fasst diese ersten drei Konsistenztests zusammen.

(4) *Dynamische Merkmale*: Stellen, an denen eine Wellenart von einer anderen abgelöst wird, können häufig aufgrund der dynamischen Merkmale – Amplitude,

**Abb. 2.119** Parallelität von Laufzeitästen vom selben Refraktor als Kriterium für die Konsistenz von Refraktionsdaten (nach Meissner und Stegema 1977)



**Abb. 2.120** Konsistenztests für Refraktionsdaten am Beispiel eines Profils über einem dreifach geschichteten Untergrund: (1) Gleichheit reziproker Zeiten:  $t_{AB} = t_{BA}$ ; (2) Parallelität von Laufzeitästen vom selben Refraktor:  $\Delta t_{AB}, \Delta t_{BC}$ ; (3) für ebenen Refraktor: Übereinstimmung der Interzeptzeiten von Schuss und Gegenschuss:  $t_{A2}, t_{A3}, t_{B2}, t_{B3}, t_{C2}, t_{C3}$  (nach Meissner und Stegema 1977)

Frequenz und Wellenform – erkannt werden. Eine schnelle Änderung dieser Merkmale stellt ein wichtiges Kriterium für das Eintreffen einer neuen Welle dar. Neben der visuellen Inspektion kann dies auch durch quantitative Hilfsmittel wie Frequenz- und Amplitudenanalysen (AVO) unterstützt werden (vgl. Abschn. 2.4.2 und 2.3.7).

### 2.5.3 Interpretation refraktionsseismischer Daten

Die in Abschn. 2.5.1 diskutierten Methoden decken einen weiten Bereich refraktionsseismischer Fragestellungen ab. Mit ihnen können wir die Tiefe zu einfachen und parallel geschichteten, horizontalen und geneigten Refraktoren bestimmen, ebenso wie die seismischen Geschwindigkeiten dieser Schichten. Trotzdem verbleiben wichtige Klassen von Problemen, die mit diesen Methoden nicht oder nur unbefriedigend behandelt werden können. Diese ergeben sich aus den in Abschn. 2.5.1 gemachten Annahmen bzw. Voraussetzungen: (1) laterale Homogenität und (2) ebene Grenzflächen.

Laterale Änderungen der Geschwindigkeit, wie sie sich z. B. bei in der Geologie häufigen Fällen durch den Übergang von einem Medium in ein anderes ergeben (etwa bei Intrusionen, Salzstöcken, Verwerfungen oder vertikalen Schichtsprüngen), erfordern andere Methoden, ebenso unebene, gekrümmte Grenzflächen. Diese Methoden werden im Folgenden vorgestellt. In den Abschn. 2.5.4 und 2.5.5 werden zudem die Wellenfrontenverfahren und die Refraktions-Tomografie eingeführt. Zunächst werden aber zwei Fälle unsichtbarer Schichten diskutiert, die mit der Refraktionsseismik entweder grundsätzlich nicht erkannt bzw. sehr leicht übersehen werden können.

#### 2.5.3.1 Unsichtbare Schichten

Da das Auftreten einer Kopfwelle die (sprunghafte) Zunahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe erfordert, wird eine zwischengeschaltete Schicht niedriger Geschwindigkeit grundsätzlich nicht erkannt: Stehen etwa die Geschwindigkeiten in einem Dreischichtfall zueinander wie  $v_1 < v_2 > v_3$  oder  $v_1 > v_2 < v_3$ , bleibt die unterste bzw. die mittlere Schicht unerkannt (Tab. 2.9). Darüber hinaus wird im zweiten Fall eine zu große Tiefe zum Refraktor vorgespiegelt (Abb. 2.121). Dies röhrt daher, dass die Schichtmächtigkeit – bestimmt aus Interzeptzeit (Gl. 2.237) oder Knickpunktentfernung (Gl. 2.239) – proportional zur Laufzeit ist. Diese ist aber in der unerkannten zweiten Schicht größer, als sie es mit der Geschwindigkeit der ersten Schicht wäre.

Die Steigungen der beiden Laufzeitäste ergeben jedoch auch in diesem Fall die korrekten Geschwindigkeiten in der ersten und dritten sowie die korrekte Interzeptzeit  $t_2$  (Gl. 2.242) der in der zweiten Schicht geführten Welle. Hat man daher weitere, unabhängige Informationen über die Dicke der ersten und die Geschwindigkeit in der zweiten Schicht (etwa aus Aufschlüssen an eingeschnittenen Straßen oder Flüssen, anderen geophysikalischen Messungen oder Bohrlochlogs), so kann die Dicke der zweiten Schicht z. B. aus Gl. 2.242 berechnet werden, wobei man für

**Tab. 2.9** Laufzeiten (in ms) der direkten und der an der zweiten Grenzschicht geführten Welle im Dreischichtfall mit eingelagerter Zwischenschicht niedriger Geschwindigkeit (in  $\text{m s}^{-1}$ ):  $v_1 = 1\,000$ ,  $v_2 = 500$  und  $v_3 = 4\,000$ ; Mächtigkeiten (in m):  $d_1 = 5$  und  $d_2 = 10$  (nach Burger 1992)

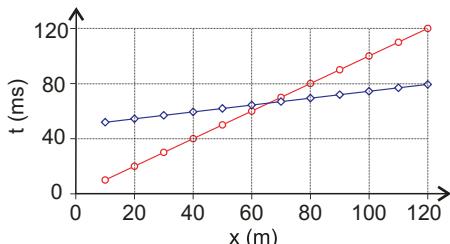
x(m)	t (ms) direkte Welle	t (ms) geführte Welle, 2. Schicht
10	10,0	51,9
20	20,0	54,4
30	30,0	56,9
40	40,0	59,4
50	50,0	61,9
60	60,0	64,4
70	70,0	66,9
80	80,0	69,4
90	90,0	71,9
100	100,0	74,4
110	110,0	76,9
120	120,0	79,4

Interzeptzeit:  $t_i: 49,4 \text{ ms}$

Tiefe zum Refraktor:  $d_1 + d_2: 15,0 \text{ m};$

Scheinbare Tiefe zum Refraktor nach Gl. 2.240: 25,5 m

**Abb. 2.121** Dreischichtfall mit eingelagerter Zwischenschicht geringerer Geschwindigkeit (LVZ)



**Tab. 2.10** Nach Gl. 2.243 berechnete Mächtigkeit  $d_2$  der zweiten Schicht im Vergleich zum wahren Wert (10 m, **kursiv** hervorgehoben) für Geschwindigkeiten  $v_1 = 1\,000$ ,  $v_3 = 4\,000$  (in  $\text{m s}^{-1}$ ) sowie Interzeptzeit  $t_2 = 49,4 \text{ ms}$  und verschiedene Werte von  $d_1$  und  $v_2$  (Burger 1992)

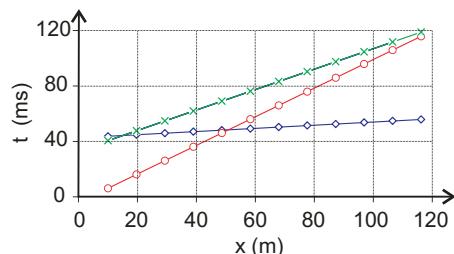
$v_2 (\text{m s}^{-1})$	$d_1 (\text{m})$	$d_2 (\text{m})$
300	5,0	6,0
450	2,6	10,0
500	3,0	11,0
500	<i>5,0</i>	10,0
500	8,0	8,5
800	5,0	16,2

$\cos(i_1) = \sqrt{\frac{v_3^2 - v_1^2}{v_3}}$  setzt und für  $\cos(i_{e''}) = \sqrt{\frac{v_3^2 - v_2^2}{v_3}}$ . Durch Variation der Werte für  $d_1$  und  $v_2$  kann dann mit dieser Gleichung die Empfindlichkeit des Ergebnisses für  $d_2$  untersucht werden (Tab. 2.10):

**Tab. 2.11** Laufzeiten der direkten und der an der zweiten Grenzschicht geführten Wellen im Dreischichtfall mit dünner Zwischenschicht; Geschwindigkeiten:  $v_1 = 500$ ,  $v_2 = 1\,400$  und  $v_3 = 4\,500$  (in  $\text{m s}^{-1}$ ); Mächtigkeiten  $d_1 = 10 \text{ m}$  und  $d_2 = 5 \text{ m}$  (nach Burger 1992)

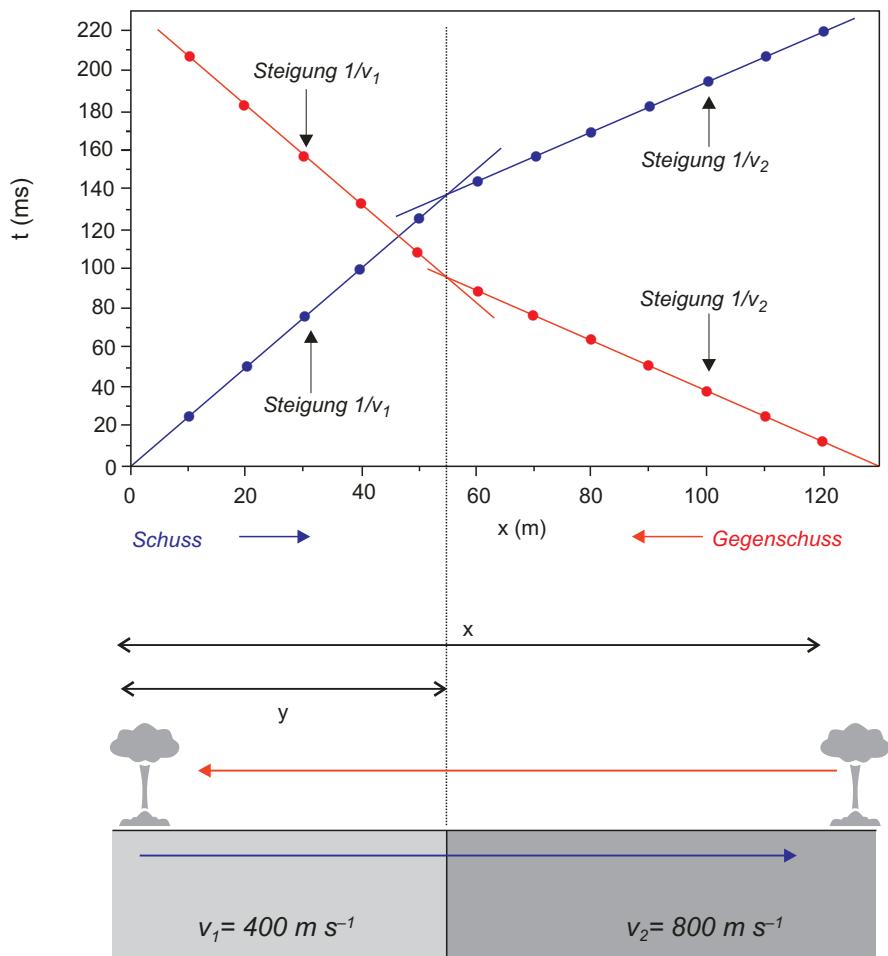
$x(\text{m})$	$t (\text{ms})$ direkte Welle	$t (\text{ms})$ geführte Welle, 2. Schicht	$t (\text{ms})$ geführte Welle, 3. Schicht
5	10	44,50	47,65
10	20	51,65	48,76
15	30	58,79	49,87
20	40	65,93	50,99
25	50	73,08	52,10
30	60	80,22	53,21
35	70	87,36	54,32
40	80	94,50	55,43
45	90	101,65	56,54
50	100	108,79	57,65
55	110	115,93	58,76
60	120	123,08	59,87

**Abb. 2.122** Dreischichtfall mit dünner Zwischenschicht



Steht die Geschwindigkeit einer zwischengeschalteten Schicht zwar im erforderlichen Verhältnis zu den Geschwindigkeiten im Hangenden und Liegenden (also  $v_1 < v_2 < v_3$ ), ist aber zu dünn, als dass ihre Kopfwelle als Ersteinsatz im Laufzeitdiagramm erscheint (Tab. 2.11), so bleibt sie unerkannt (Abb. 2.122). In diesem Fall ergibt die Auswertung für einen Zwei- statt einen Dreischichtfall eine zu geringe Tiefe zum Refraktor. Dies röhrt daher, dass die Schichtmächtigkeit – bestimmt aus Interzeptzeit (Gl. 2.237) oder Knickpunktentfernung (Gl. 2.239) – proportional zur Laufzeit ist, diese aber in der unerkannten zweiten Schicht geringer ist, als sie es mit der Geschwindigkeit der ersten Schicht wäre.

Sowohl den Fall einer eingelagerten Zwischenschicht niedriger Geschwindigkeit (LVZ) als auch einer dünnen Zwischenschicht können jedoch mit Hilfe von Reflexionen im Laufzeitdiagramm oder in einem  $\tau$ - $p$ -Diagramm (vgl. Abschn. 2.4.2.2) erkannt werden.



**Abb. 2.123** Laufzeitkurven mit markanten Steigungsänderungen (oben) infolge eines unbedeckten vertikalen Kontakts zweier Bereiche unterschiedlicher Geschwindigkeit (unten). Durch die Steigungsänderungen unterscheidet sich dieser Fall von einem Zweischicht-Refraktionsfall (nach Burger 1992)

### 2.5.3.2 Laterale Variation der Geschwindigkeit

Kleine Variationen der Geschwindigkeiten sind sicherlich eher die Regel als die Ausnahme. Sind diese nicht zu extrem, führen sie bei den berechneten Tiefen der Refraktoren nur zu geringen Fehlern, da die Bestimmung einer Ausgleichsgeraden für die geführte Welle über kleine Variationen mittelt. Die Interzeptzeiten, aus denen z. B. die Tiefen zu den jeweiligen Refraktoren bestimmt werden, sind in diesen Fällen nicht sehr empfindlich für solche „normalen“ Variationen. Ganz anders verhält es sich dagegen mit abrupten lateralen Änderungen der seismischen

Geschwindigkeiten wie sie z. B. durch einen lithologischen Wechsel oder durch Intrusionen sowie Salzstöcke verursacht werden.

Ein vertikaler Kontakt zweier Medien unterschiedlicher Geschwindigkeit ergibt in Richtung der höheren Geschwindigkeit ein Refraktionsprofil, wie es einem Zweischichtfall entspräche. Die Steigung der zweiten Laufzeitgerade ist also flacher als die der ersten. Für den Gegenschuss ergibt sich jedoch genau das Gegenteil: Die Steigung des zweiten Laufzeitasts ist steiler als die des ersten (Abb. 2.123). Dies ist verständlich, da es sich in beiden Fällen um die direkte Welle handelt, die sich mit der jeweils lokalen Geschwindigkeit fortpflanzt. Die Laufzeitkurve lautet für den Fall einer vertikalen Diskontinuität bei  $x = x_1$ :

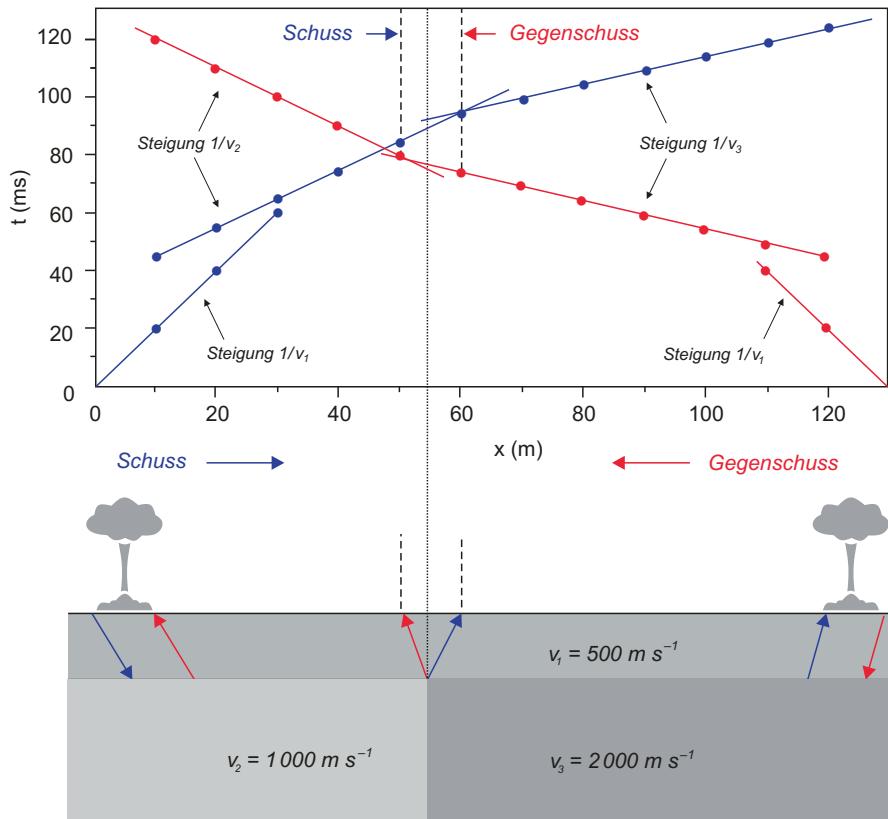
$$t = \frac{x_1}{v_1} + \frac{x - x_1}{v_2}; \quad x > x_1. \quad (2.256)$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Kehrwert der Ableitung der Laufzeit nach dem Weg:  $v^{-1} = dt/dx$ . Somit kann man eine vertikale Diskontinuität an der speziellen Form der Laufzeitkurven aus Schuss und Gegenschuss erkennen und die Geschwindigkeiten sowie die Lage der Diskontinuität an den Knickpunkten der beiden Laufzeitäste bestimmen.

Dies gilt auch für den wohl häufigeren Fall einer oberflächlich bedeckten Diskontinuität (Abb. 2.124). Auch in diesem Fall ergeben die Steigungen die korrekten Geschwindigkeiten. Die Lage der Diskontinuität wird durch die Knickpunkte zwischen dem zweiten und dritten Laufzeitast von Schuss und Gegenschuss eingegrenzt. Sie liegt jedoch nicht in der Mitte zwischen beiden. Die Herleitung einer zu Gl. 2.256 analogen Laufzeitformel geschieht analog hierzu und zur Vorgehensweise in Abschn. 2.5.1.1. Hieraus können Ausdrücke für die jeweiligen Knickpunkte abgeleitet werden.

Eine weitere wichtige Klasse von Diskontinuitäten sind Stufen in den ansonsten ebenen Schichtgrenzen, wie sie z. B. durch eine Erosionskante oder an einem Versatz durch eine Verwerfung entstehen. Für die in Abb. 2.125 gezeigte Situation (und mit den dortigen Benennungen) ergibt sich im Laufzeitast der geführten Welle ein Versatz durch die Wegverlängerung  $\overline{RD}$  infolge der Stufe der Höhe  $z$ . Am Versatz bilden die geführten Wellen keine Ersteinsätze: Diese stammen aufgrund ihres um  $\overline{RD}$  kürzeren Laufwegs  $\overline{QA}$  gegenüber  $\overline{RB}$  von den an der Kante gebeugten Wellen, welche sich wie die geführte Welle mit  $v_1$  fortpflanzen. Die Wegdifferenz  $\overline{RD} = z \cos(i_c)$  hängt von der Sprunghöhe  $z$  und dem kritischen Winkel ab. Die Differenz der Interzeptzeiten  $t_{i,2} - t_{i,1}$  ergibt sich aus dem mit der Geschwindigkeit  $v_1$  zurückgelegten längeren Laufweg  $\overline{RC}$  abzüglich der Zeit, die theoretisch erforderlich wäre, die Strecke  $\overline{QC}$  mit der Geschwindigkeit  $v_2$  zurückzulegen (Abb. 2.125). Wegen  $\sin(i_c) = \overline{DC}/\overline{QC} = v_1/v_2$  ist diese aber gleich  $\overline{DC}/v_1$ . Somit entspricht die Differenz der Interzeptzeiten der mit der Geschwindigkeit  $v_1$  zurückgelegten Strecke  $\overline{RD} = z \cos(i_c)$ , wo  $i_c$  der kritische Winkel ist:  $t_{i,2} - t_{i,1} = z \cos(i_c)/v_1$ . Hieraus kann schließlich die Stufenhöhe  $z$  berechnet werden:

$$z = \frac{(t_{i,2} - t_{i,1})v_1}{\cos(i_c)} = \frac{(t_{i,2} - t_{i,1})v_1}{\sqrt{(1 - v_1^2/v_2^2)}} = \frac{(t_{i,2} - t_{i,1})v_1 v_2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \quad (2.257)$$

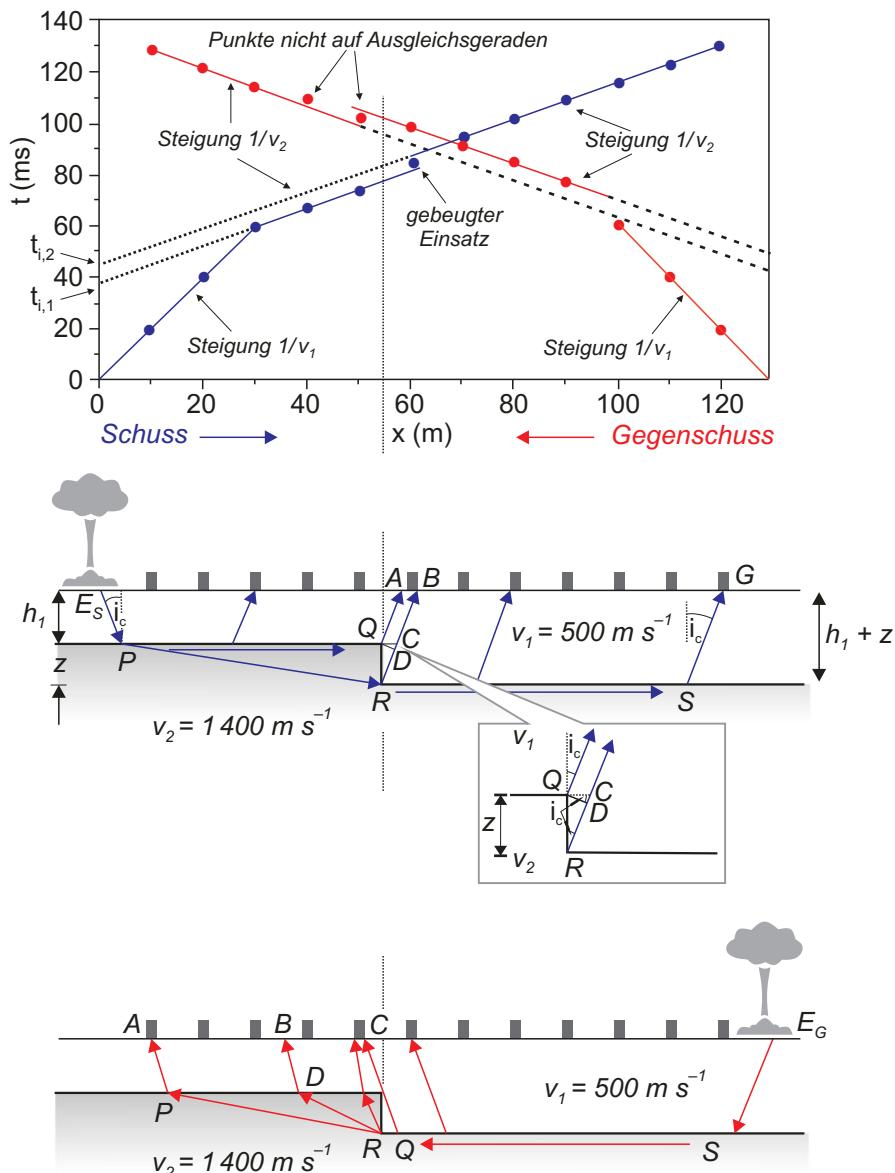


**Abb. 2.124** Laufzeitkurven mit markanten Steigungsänderungen (oben) infolge eines bedeckten vertikalen Kontakts zweier Bereiche unterschiedlicher Geschwindigkeit (unten). Durch die Steigungsänderungen unterscheidet sich dieser Fall von einem Zweischicht-Refraktionsfall (nach Burger 1992)

Der Versatz in den beiden Laufzeitästen der geführten Welle des Gegenschusses ist gegensinnig zu dem des Schusses – ein wichtiges Indiz für eine Stufe! Beim Gegenschuss ist zu beachten, dass nur solche Strahlen, welche weit von der Stufe entfernt aufgezeichnet werden, an der Schichtgrenze jenseits der Stufe annähernd streifend einfallen und somit eine geführte Welle unter dem kritischen Winkel abstrahlen. Die Steigung des Asts der Laufzeitkurve der geführten Welle jenseits der Stufe ergibt daher nur einen Näherungswert für  $v_2$ . Den besseren Wert wird in diesem Fall immer die Steigung des Asts der geführten Welle ergeben, deren Schusspunkt oberhalb der Stufe gelegen ist.

### 2.5.3.3 Geschwindigkeitsanalyse und Verzögerungszeit (*delay time*)

In Fällen, in denen eine lineare Korrelation für Teile der Laufzeitkurve nicht klar erkennbar ist, kann die laterale Variation der Refraktorgeschwindigkeit wie folgt



**Abb. 2.125** Laufzeitkurven (oben) im Fall einer Stufe zwischen zwei übereinandergelegenen Bereichen unterschiedlicher Geschwindigkeit. Die Stufe verursacht in den Laufzeitästen der Refraktion markante gegensinnige Versätze bei Schuss (Mitte) und Gegenschuss (unten). Hierdurch unterscheidet sich dieser Fall von einem ebenen Zweischicht-Refraktionsfall (nach Burger 1992)

aus der Steigung der Kurve der Laufzeitdifferenzen von Schuss und Gegenschuss bestimmt werden: Sind  $t_S$  und  $t_G$  die Laufzeiten für Schuss bzw. Gegenschuss an einem Geophon, welches die geführte Welle als Ersteinsatz aufzeichnet, dann ist  $\Delta t = t_S - t_G$  die Laufzeitdifferenz. Es gilt:

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{t_S + t_G}{2} - t_G. \quad (2.258)$$

Der erste Term in Gl. 2.258 ist die mittlere Laufzeit aus Schuss und Gegenschuss, der zweite die des Gegenschusses. Aus Schuss und Gegenschuss eines Profils werden nun zunächst die  $\Delta t$ -Werte für jedes Geophon berechnet. Dann wird  $\Delta t/2$  nach Gl. 2.258 entlang des Profils aufgetragen bzgl. einer frei wählbaren horizontalen Bezugslinie, die den Wert  $\Delta t = 0$  repräsentiert („a“ in Abb. 2.126) und unter Beachtung des Vorzeichens. Die auf diese Weise erhaltenen Punkte, verbunden durch Teilgeraden, bilden eine differenzielle Laufzeitkurve. Der Kehrwert der Steigung jeder dieser Teilgeraden ( $S$ : Schuss;  $G$ : Gegenschuss) definiert die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}_2$  für diesen Teil des Refraktors:

$$\frac{1}{\bar{v}_2} = \frac{\Delta t_k/2 - \Delta t_{k-1}/2}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left( (t_{S,k} - t_{S,k-1})/\Delta x + (t_{G,k-1} - t_{G,k})/\Delta x \right) = \frac{v_S^{-1} + v_G^{-1}}{2}, \quad (2.259)$$

wobei  $\Delta t_k$  und  $\Delta t_{k-1}$  die Laufzeitdifferenzen an zwei durch die Strecke  $\Delta x$  getrennten Geophonen sind.

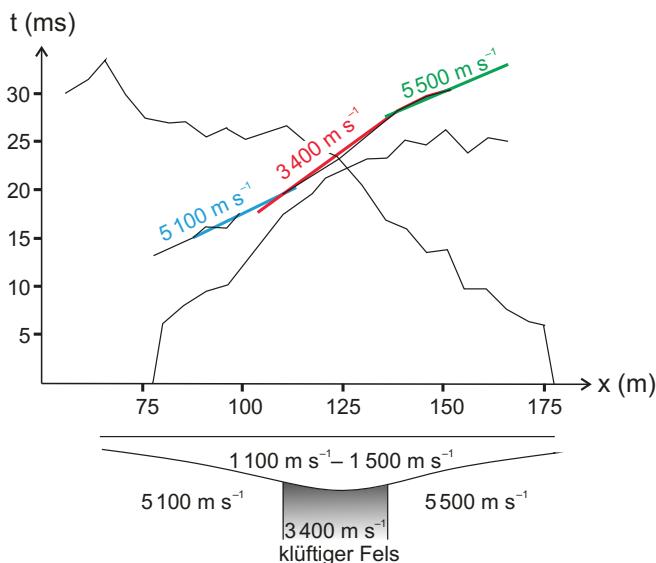
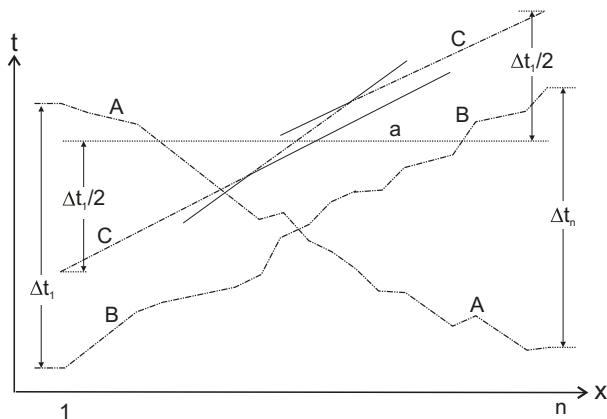
Nach Gl. 2.259 ist die Geschwindigkeit  $v_2$  der zweiten Schicht das harmonische Mittel aus  $v_S$  und  $v_G$ :

$$\bar{v}_2 = \frac{2v_S v_G}{v_S + v_G}. \quad (2.260)$$

Dies ist die wahre Geschwindigkeit des ebenen Refraktors bzw. für den Fall eines lokal geneigten Refraktors ein Schätzwert derselben Genauigkeit wie Gl. 2.254. Abb. 2.126 zeigt eine Anwendung dieser Methode auf den Fall einer Zone niedriger Geschwindigkeit, verursacht durch eine lokale Klüftung des Refraktors. In diesem Beispiel erscheinen die Geschwindigkeiten des ungeklüfteten Grundgebirges auf beiden Seiten der zerklüfteten Zone überdies leicht unterschiedlich zu sein. Die Geschwindigkeitsanalyse mit Hilfe einer differenziellen Laufzeitkurve liefert somit auf einfache Weise Informationen über die Variation der Geschwindigkeiten längs eines Profils und sollte in der Regel der erste Schritt in der Interpretation refraktionsseismischer Daten sein.

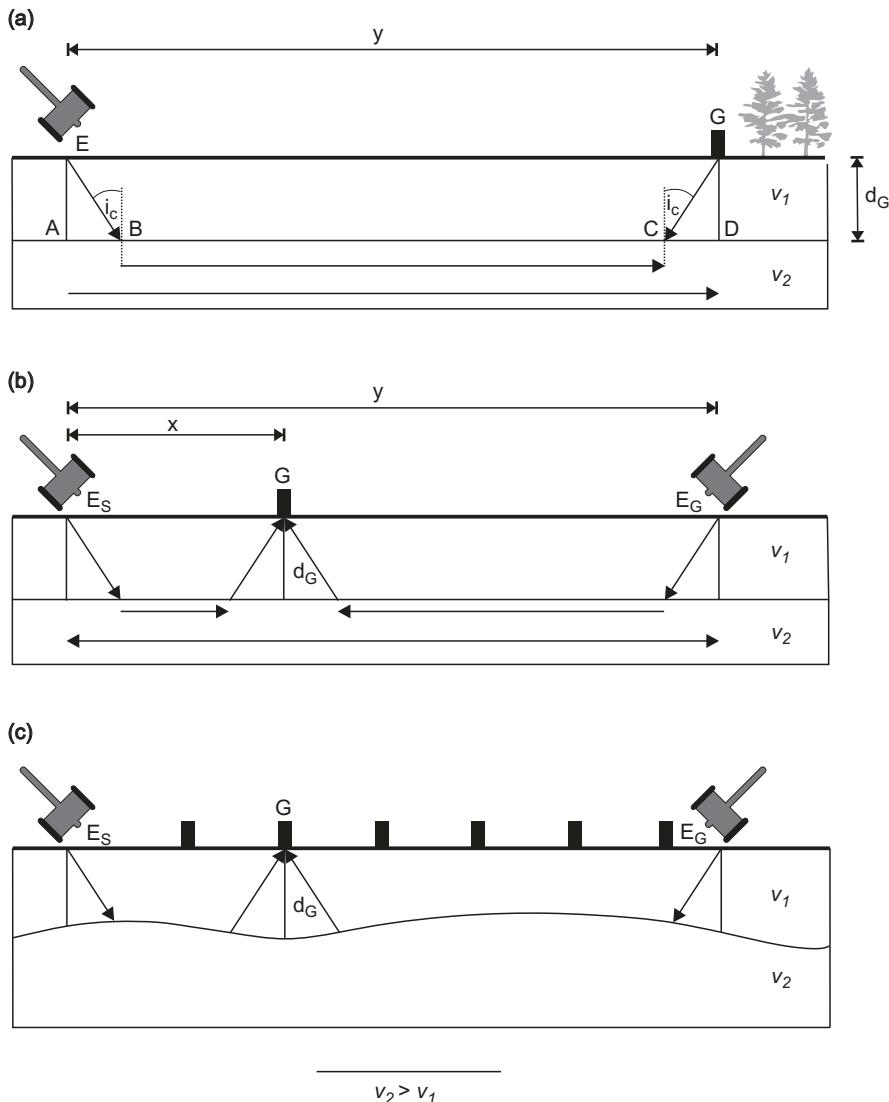
Nachdem die Verteilung der Geschwindigkeiten untersucht ist und für die verschiedenen Bereiche mittlere Geschwindigkeiten bestimmt sind, gilt es die Refraktoroberfläche zu kartieren. Im Falle ebener Schichtgrenzen muss hierfür nur die Tiefe  $d$  zum Refraktor und ggf. sein Einfallsinkel  $\theta$  bestimmt werden, z. B. aus Gl. 2.238 bzw. Gl. 2.240 und Gl. 2.246.

Ist die Oberfläche des Refraktors dagegen einfach oder mehrfach gekrümmt, kann sie mit Hilfe des Konzepts der Verzögerungszeit (*delay time*) kartiert werden.



**Abb. 2.126** Prinzip der Geschwindigkeitsanalyse mit Hilfe eines differenziellen Laufzeitprofils (oben) und Anwendung der Methode auf den Fall einer Geschwindigkeiterniedrigung durch Klüftung des Grundgebirges (unten) (nach Parasnis 1997)

Diese bezeichnet die Laufzeitdifferenz zwischen den Strahlwegen in der Schicht (bzw. den Schichten) oberhalb des Refraktors und dem (theoretischen) Strahlweg einer über dieselbe horizontale Entfernung geführten Welle. Für den in Abb. 2.127a illustrierten Zweischichtfall sind die Laufwege in der ersten Schicht  $\overline{EB} + \overline{CG}$  und die entsprechenden (hypothetischen) Laufwege der geführten Welle  $AB + CD$ . Die gesamte Verzögerungszeit  $\Delta t_{SG}$  setzt sich also aus den Anteilen  $\Delta t_S$  und  $\Delta t_G$  am Schusspunkt bzw. am Geophon zusammen:



**Abb. 2.127** Prinzip der Verzögerungszeit-Methode und Anwendung auf die Kartierung der Grundgebirgstopografie (nach Burger 1992); (a), (b), (c): siehe Text.

$$\Delta t_S = \frac{\overline{EB}}{v_1} - \frac{\overline{AB}}{v_2}; \quad \Delta t_G = \frac{\overline{CG}}{v_1} - \frac{\overline{CD}}{v_2}; \quad \Delta t_{SG} = \Delta t_S + \Delta t_G. \quad (2.261)$$

Dies verdeutlicht, dass die Verzögerungszeit am Geophon- bzw. Schusspunkt ausschließlich von der Refraktortiefe und den Geschwindigkeiten direkt unterhalb abhängt, konkret innerhalb der Dreiecke  $ABE$  und  $CDG$  (Abb. 2.127a). Sie ist also

eine lokale Größe. Somit kann man aus der Verzögerungszeit und den Geschwindigkeiten die lokale Tiefe zum Refraktor bestimmen. Zudem ist die Verzögerungszeit definiert durch:

$$\Delta t_{SG} = t_r - y/v_2, \quad (2.262)$$

wo  $t_r$  die reziproke (d. h. in beide Richtungen identische) Gesamlaufzeit ist und  $y$  die Entfernung Schusspunkt-Geophon (Abb. 2.127a). Aus Gl. 2.261 folgt für die Verzögerungszeit  $\Delta t_G$  am Geophon:

$$\begin{aligned} \Delta t_G &= \frac{\overline{CG}}{v_1} - \frac{\overline{CD}}{v_2} = \frac{d_G}{v_1 \cos(i_c)} - \frac{d_G \tan(i_c)}{v_2} = d_G \left[ \frac{1}{v_1 \sqrt{1 - v_1^2/v_2^2}} - \frac{v_1/v_2}{v_2 \sqrt{1 - v_1^2/v_2^2}} \right] \\ &= d_G \left[ \frac{v_2}{v_1 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}} - \frac{v_1}{v_2 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \right] = d_G \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}, \end{aligned}$$

wo  $d_G$  die Mächtigkeit der ersten Schicht am Geophon ist und  $i_c$  der kritische Winkel. Damit folgt für die Schichtmächtigkeit  $d_G$  am Geophon:

$$d_G = \Delta t_G \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \quad (2.263)$$

Die Tiefe zum Refraktor kann somit aus der Verzögerungszeit bestimmt werden. Wie bestimmt man aber die Verzögerungszeit? Aus Gl. 2.261 und 2.262 folgt für die reziproke Gesamlaufzeit  $t_r$ :

$$t_r = \Delta t_S + \Delta t_G + y/v_2. \quad (2.264)$$

Sind  $t(G)_{E_S}$  und  $t(G)_{E_G}$  die Laufzeiten des am Geophon G gemessenen Schusses von  $E_S$  nach G bzw. des Gegenschusses von  $E_G$  nach G (Abb. 2.127b), dann gilt:

$$t(G)_{E_S} = \Delta t_{E_S} + \Delta t_{G_S} + x/v_2 \quad \text{bzw.} \quad t(G)_{E_G} = \Delta t_{E_G} + \Delta t_{G_G} + (y-x)/v_2. \quad (2.265)$$

Ist der Refraktor unter G eben, die grau gepunkteten Strecken zu beiden Seiten der Schichtnormalen bei C in Abb. 2.128 also gleich lang, so gilt  $\Delta t_{G_S} = \Delta t_{G_G} \equiv \Delta t_G$  und damit:

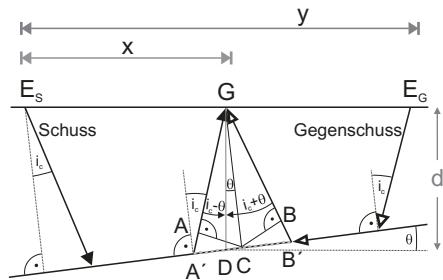
$$t(G)_{E_S} + t(G)_{E_G} = \Delta t_{E_S} + \Delta t_{E_G} + 2\Delta t_G + x/v_2 + (y-x)/v_2. \quad (2.266)$$

Einsetzen von Gl. 2.264 in 2.266 ergibt die Verzögerungszeit  $\Delta t_G$ :

$$\Delta t_G = \frac{t(G)_{E_S} + t(G)_{E_G} - t_r}{2}. \quad (2.267)$$

Sie ist also aus Größen bestimmbar, die aus dem Seismogramm abgelesen werden können. Damit kann schließlich die Refraktortiefe  $d_G$  aus Gl. 2.263 bestimmt

**Abb. 2.128** Zu den Verzögerungszeit- und Plus-Minus-Verfahren (Details: siehe Text)



werden. Diese Vorgehensweise wird für jedes Geophon wiederholt. Die Refraktoroberfläche ergibt sich dann als Tangente der Kreisbögen mit Radius  $d_G$  um alle Geophonpositionen.

Zwei Voraussetzungen gingen in diese Betrachtung ein, welche die Anwendbarkeit dieses Vorgehens einschränken:

- Der Refraktor unterhalb des Geophons ist eben. Dies begrenzt die Anwendbarkeit auf solche Refraktoroberflächen, deren Relief klein ist, verglichen mit der Refraktortiefe;
- Die Entfernung entlang des Refraktors sind identisch mit den Entfernungen  $x$  und  $y$  entlang des Profils auf der Oberfläche (siehe Abb. 2.127c). Dies beschränkt die Anwendbarkeit auf ein lokales Schichteinfallen von weniger als  $10^\circ$ .

Das Verzögerungszeit-Verfahren ist insbesondere für erste Auswertungen im Gelände nützlich. Präzisere Ergebnisse liefern die Wellenfrontenverfahren. Insbesondere jene, die auf der Lösung der Eikonalgleichung (Gl. 2.58) mit finiten Differenzen beruhen (siehe z. B. Červený 2001 sowie Vidale 1988; Zelt und Smith 1992; Hole und Zelt 1995), erlauben die Behandlung fast beliebig heterogener Medien.

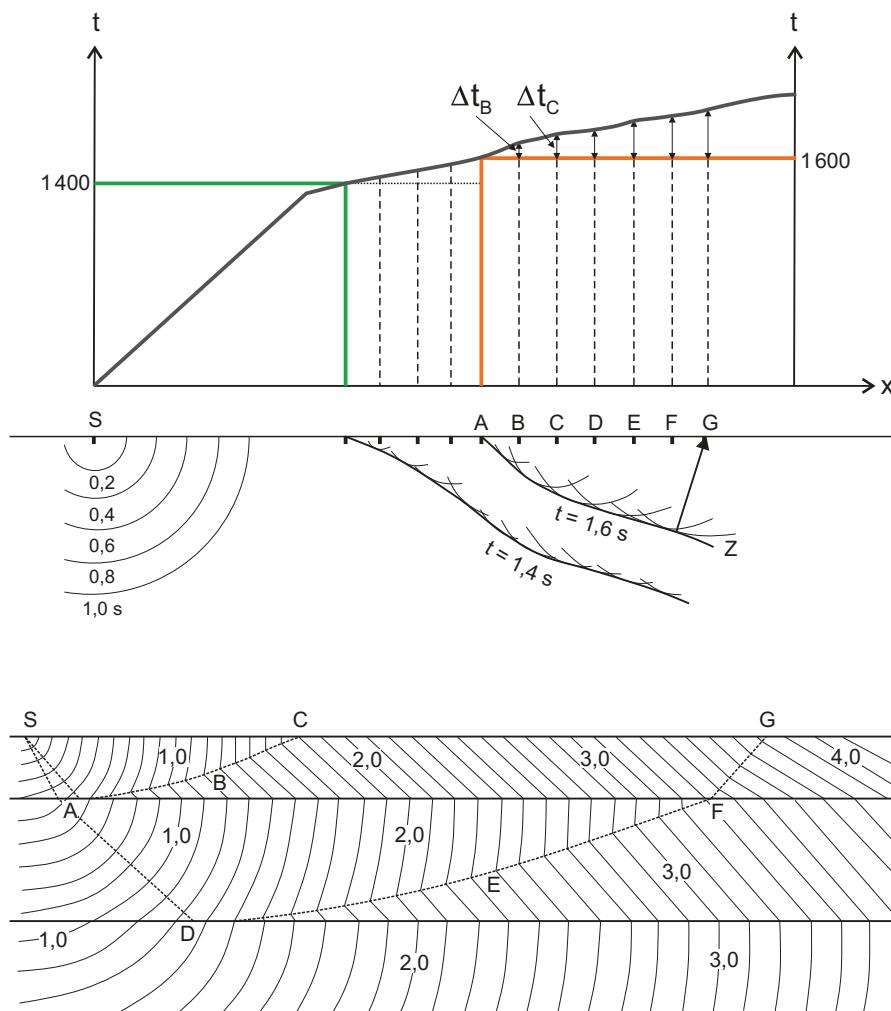
## 2.5.4 Wellenfrontenmethoden

Sowohl mit grafischen als auch numerischen Methoden kann man aus der Ausbreitung von Wellenfronten die Lage unebener Refraktoroberflächen konstruieren.

### 2.5.4.1 Grafische Wellenfrontenverfahren

Zur Konstruktion unebener Refraktoroberflächen wurden in der vor-digitalen Ära eine Reihe grafischer Methoden entwickelt, welche auf der Konstruktion von Wellenfronten beruhen (siehe z. B. Telford et al. 1990, S. 240 ff.). Zwar sind diese in der Praxis kaum noch in Gebrauch. Da sie aber anschaulich und instruktiv sind, werden hier das Verfahren von Thornburgh (1930) und die Plus-Minus-Methode von Hagedoorn (1959) vorgestellt. Letztere kommt auch heute noch bisweilen bei der Höhen- und Verwitterungskorrektur zum Einsatz.

Das Thornburgh-Verfahren beruht auf der Konstruktion der Fronten der direkten und der geführten Wellen aus der Laufzeitkurve sowie der Geschwindigkeit der ersten Schicht (Abb. 2.129). Insbesondere wird hierbei die sog. Gleichzeitzigkeitskurve (*coincidence time curve*) ermittelt, entlang welcher die direkte und die geführte Welle die gleiche Laufzeit besitzen. Sie berührt den Refraktor an dem Punkt, an welchem die direkte Welle unter dem kritischen Winkel einfällt. Durch eine entsprechende Auswertung von Schuss und Gegenschuss kann der Refraktor



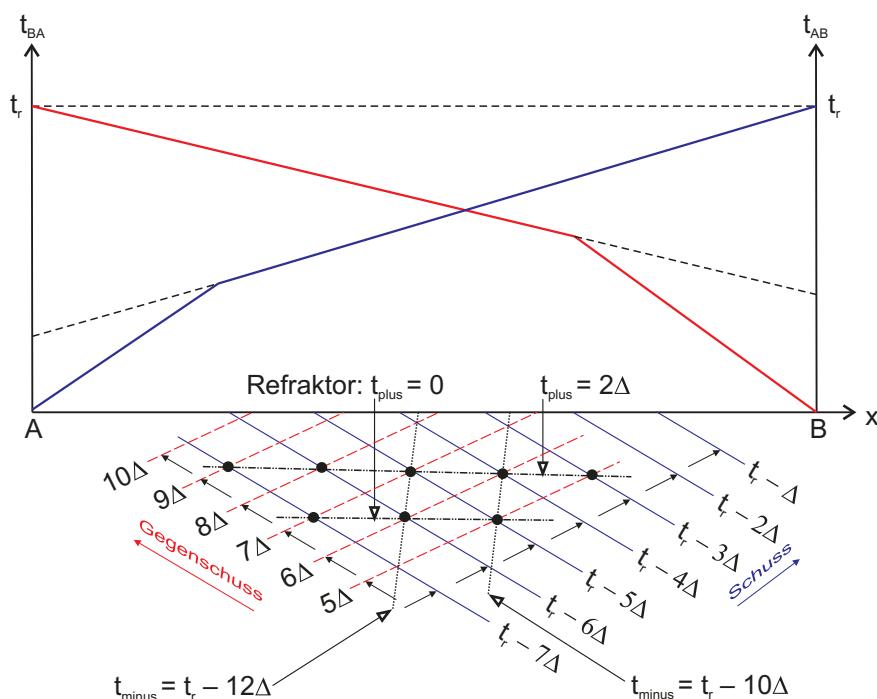
**Abb. 2.129** Oben und Mitte: Prinzip der Wellenfrontenmethode nach Thornburgh (1930). Unten: Ersteinsätze der direkten und geführten Wellen definieren die Kurven gleicher Laufzeit. Diese Gleichzeitzigkeitskurven sind gestrichelt gezeichnet (nach Telford et al. 1990)

als Tangente an beide Gleichzeitigkeitskurven bestimmt werden. Danach kann ggf. die Lage eines zweiten Refraktors in analoger Weise bestimmt werden.

Die Einsetzbarkeit des Thornburgh-Verfahrens ist beschränkt auf den Fall relativ homogener Deckschicht-Geschwindigkeiten. Es verliert an Genauigkeit in dem Maß, in dem deren Heterogenität zunimmt.

Ähnlich wie das Thornburgh-Verfahren benutzt das hagedoornsche Plus-Minus-Verfahren eine Konstruktion der geführten Wellenfronten eines mit Schüssen und Gegenschüssen erkundeten Profils über einer Schichtgrenze mit variablem, aber nicht zu starkem Einfallen. Es ist jedoch weniger empfindlich gegenüber Variationen der Deckschicht-Geschwindigkeiten. Sind  $t_S$  und  $t_G$  die Laufzeiten für Schuss bzw. Gegenschuss an einem Geophon, welches die geführte Welle als Ersteintritt aufzeichnet, dann bilden die Fronten der geführten Wellen von Schuss und Gegenschuss, gezeichnet im zeitlichen Abstand  $\Delta$ , ein Rautenmuster (Abb. 2.130). Hierbei besitzt die vertikale Diagonale einer Raute die Länge  $v_1 \cdot \Delta / \cos(i_c)$ . Eine Summe entsprechender vertikaler Diagonalen ergibt somit die Tiefe zur Schichtgrenze (siehe unten). Dagegen besitzt die horizontale Diagonale die Länge  $v_2 \cdot \Delta$ . Der horizontale Abstand der Minus-Linien ist somit Maß für die Variation von  $v_2$ .

Addiert man die Laufzeiten  $t_S(x)$  und  $t_G(x)$  von Schuss und Gegenschuss an jedem Schnittpunkt der Rauten und zieht davon die reziproke Gesamtlaufzeit  $t_r$  ab, so



**Abb. 2.130** Zum Plus-Minus-Verfahren von Hagedoorn (1959)

erhält man die sog. Plus-Zeit  $t_{plus}(x) = t_S(x) + t_G(x) - t_r$ , da die Zeit zum Durchlaufen der Strecken  $\overline{A'A}$  und  $\overline{B'B}$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  dieselbe Zeit erfordert, wie das Durchlaufen der Strecken  $\overline{A'C}$  und  $\overline{B'C}$  (Abb. 2.128) mit der Geschwindigkeit  $v_2$ . Diese hat auf der Schichtgrenze den Wert null und auf den darüberliegenden horizontalen Linien durch die Schnittpunkte der Rauten einen um jeweils  $2\Delta$  größeren Wert. Jede dieser mehr oder minder horizontalen Linien bildet die Form der Schichtgrenze nach, deren wahre Position in der Tiefe  $v_1 \cdot t_{plus}/\cos(i_c)$  aber durch die Linie mit  $\Delta = 0$  angegeben wird.

Die Differenz der Laufzeiten von Schuss und Gegenschuss an jedem Schnittpunkt der Rauten ist die sog. Minus-Zeit  $t_{minus}(x) = t_S(x) - t_G(x) - t_r$ . Ihr Wert ist konstant entlang der vertikalen Linien, welche die Schnittpunkte verbinden. Die Geschwindigkeit der zweiten Schicht folgt daher unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Vorzeichen der Steigungen der Laufzeitkurven von Schuss und Gegenschuss aus:

$$v_2^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{dt_S(x)}{dx}}_{1/v_2} - \underbrace{\frac{dt_G(x)}{dx}}_{1/v_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d(t_S(x) - t_G(x) - t_r)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dt_{minus}(x)}{dx}. \quad (2.268)$$

Im Fall von lokalem Schichteinfallen sind die diskutierten Beziehungen nur Näherungen, doch sind die Änderungen klein für moderate lokale Einfallswinkel  $\theta$ . Berücksichtigt man diesen zusätzlich, so wird das Argument des Kosinus im Ausdruck für die Refraktortiefe für den Bergaufschuss um  $\theta$  vermindert und für den Bergabschuss um  $\theta$  vermehrt. Für die Plus-Zeit am Geophon bei G gilt mit den Bezeichnungen in Abb. 2.132:  $t_{plus}(G) = t(G,A) + t(G,B) = 2 \cdot t(G,A)$ , da das Durchlaufen der Strecken  $\overline{A'A}$  und  $\overline{B'B}$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  dieselbe Zeit erfordert wie das Durchlaufen der Strecken  $\overline{A'C}$  und  $\overline{B'C}$  mit der Geschwindigkeit  $v_2$ . Hierbei ist  $t(G,A) = t(G,B)$  die Zeit, mit der die Wellen die Strecken  $\overline{GA}$  bzw.  $\overline{GB}$  in der Deckschicht mit der Geschwindigkeit  $v_1$  zurücklegen (siehe z. B. Rabbel 2009). Damit gilt für die Normale vom Geophon bei G auf den Refraktor:  $\overline{GC} = \overline{GA}/\cos(i_c) = \overline{GB}/\cos(i_c) = v_1 t_{plus}(x)/(2\cos((i_c)))$ . Somit ist die Lottiefe d zum Refraktor bei G:

$$d(x) = \frac{v_1 t_{plus}}{2 \cos(i_c) \cos(\theta)}, \quad (2.269)$$

wobei  $\cos(i_c) = \sqrt{1 - v_1^2/v_2^2}$  ist.

Auch das Einfallen der Schicht ergibt sich aus der Plus-Zeit, sofern die Profile senkrecht zum Streichen angelegt wurden. Hierbei muss man wiederum die unterschiedlichen Vorzeichen der Steigungen der Laufzeitkurven beachten: Für einen zwischen den Orten O und R (Abb. 2.116) von Schuss bzw. Gegenschuss gelegenen Punkt folgt aus dem snelliusschen Brechungsgesetz für die Zeiten  $t^+(x)$  bzw.  $t^-(x)$  der bergauf bzw. bergab laufenden Wellen mit Hilfe des Sinus einer

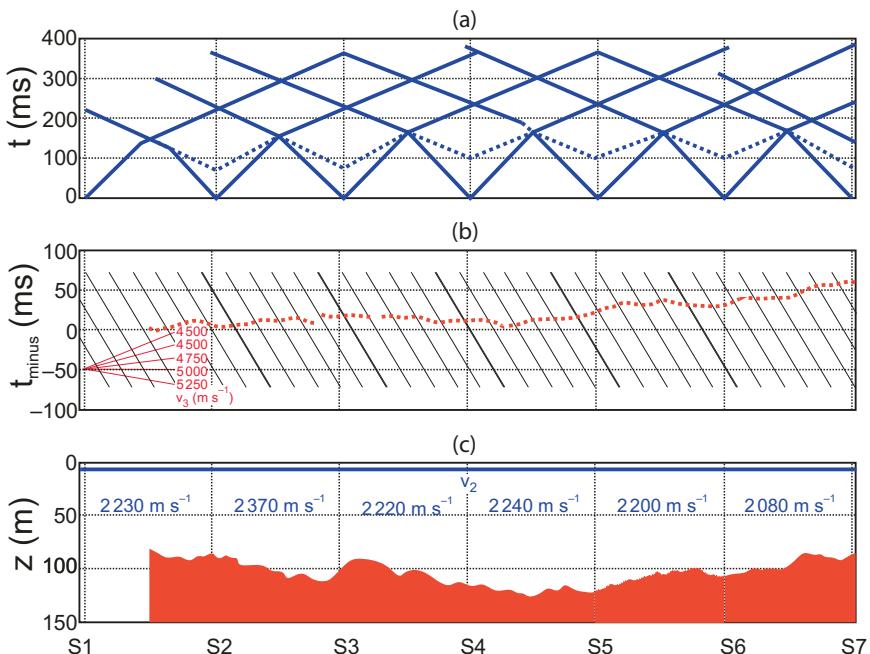
Winkelsumme bzw. -differenz<sup>25</sup>:

$$v_1 dt^+(x)/dx = -\sin(i_c - \theta) = -\sin(i_c) \cos(\theta) + \cos(i_c) \sin(\theta) \text{ bzw.}$$

$$v_1 dt^-(x)/dx = \sin(i_c + \theta) = \sin(i_c) \cos(\theta) + \cos(i_c) \sin(\theta).$$

Für die konstante reziproke Zeit  $t_r$  ergibt der entsprechende Ausdruck null, da die Ableitung verschwindet. Damit gilt:  $v_1 dt_{plus}(x)/dx = v_1 d(t^+(x) + t^-(x) - t_r)/dx = 2 \cos(i_c) \sin(\theta)$ . Somit folgt für den Winkel  $\theta$  des Schichteinfallens:

$$\theta = \arcsin \left( \frac{v_1}{2 \cos(i_c)} \frac{dt_{plus}(x)}{dx} \right). \quad (2.270)$$



**Abb. 2.131** Hagedoorn'sches Plus-Minus-Verfahren, angewendet auf einen Dreischicht-Fall: (nach Van Overmeeren 2001): (a) Laufzeitkurven mit Schuss und GegenSchuss an den Positionen S1–S7; (b) Minus-Zeiten  $t_{minus}$  (schwarze Linien) sowie aus deren Steigung (rote gepunktete Linie) mit Hilfe der roten Schablone bestimmmbare Geschwindigkeit  $v_3$  der dritten Schicht; (c) aus der Plus-Zeit  $t_{plus} = 0$  ermittelte Mächtigkeit der zweiten Schicht über der roten dritten Schicht sowie die mittlere Geschwindigkeit  $v_2$  (blaue Zahlen) der zweiten Schicht zwischen den jeweiligen Schusspunkten. Darüber befindet sich eine 4 m–6 m dünne Deckschicht mit einer Geschwindigkeit von ca.  $1000 \text{ m s}^{-1}$  (blaue Linie)

<sup>25</sup> $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$ .

Ist die Schichtgrenze eben, so variiert die Steigung der Plus-Zeit nicht mit dem Ort. Tut sie dies jedoch, so kann in Gl. 2.270 ggf. ein über die Länge der geführten Laufzeitäste gemittelter Wert  $\bar{dt}_{plus}(x)/dx$  verwendet werden.

Die Abb. 2.131 illustriert die Anwendung der Methode am Beispiel von Daten aus einer Erkundung der Grundwasser-Neubildungszone eines Küstenaquifers (Van Overmeeren 2001). Die Abb. 2.131a zeigt die Laufzeitkurven der direkten und geführten Wellen von Schüssen und Gegenschüssen an insgesamt sieben Positionen (S1–S7). In Abb. 2.131b sind die aus diesen Daten berechneten Minus-Zeiten  $t_{minus}$  dargestellt. Aus den Steigungen dieser Kurven ergeben sich die mit dem Ort variierenden Geschwindigkeiten  $v_2$  der zweiten Schicht. Abb. 2.131c fasst die Ergebnisse der Analyse der Plus-Zeiten  $t_{plus}$  in einem Vertikalschnitt zusammen: Unter einer dünnen Deckschicht befindet sich der Lockersediment-Aquifer, dessen Mächtigkeit über dem talförmigen Grundgebirge zwischen 87 m und 127 m variiert.

#### 2.5.4.2 Numerisches Wellenfrontenverfahren

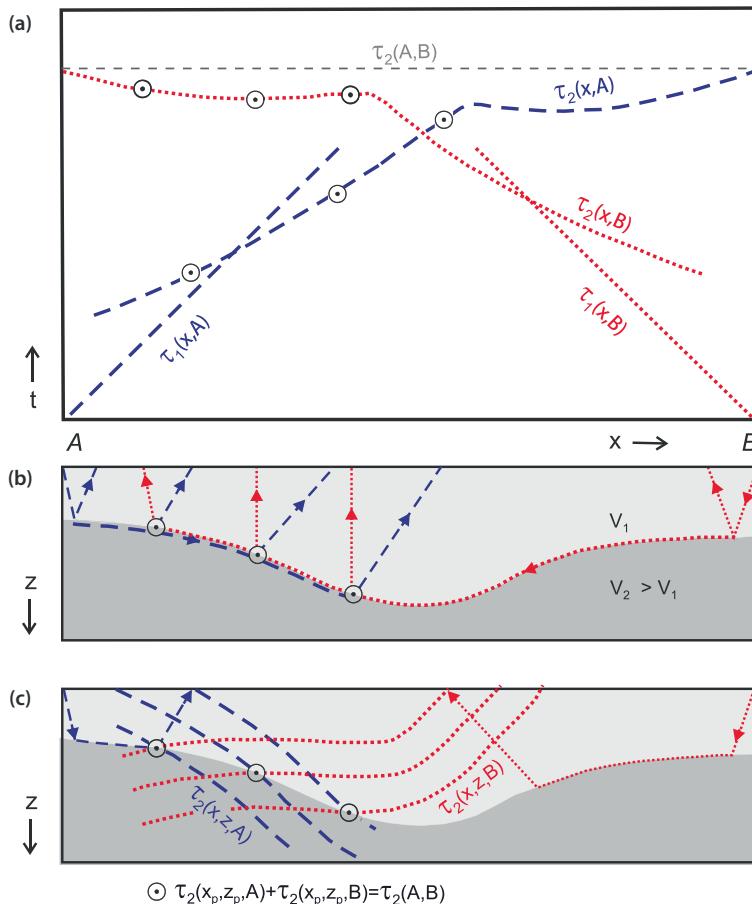
Dieses elegante Verfahren eignet sich insbesondere gut zur Abbildung geschichteter geologischer Strukturen mit stark ungleichförmigen Oberflächen. Das Verfahren macht keine Voraussetzungen, außer dass die ansonsten beliebige Geschwindigkeit im Hangenden des Refraktors bekannt und kleiner sein muss als jene im Liegenden. Diese wiederum darf lateral ebenfalls variieren. Für die Behandlung von Mehrschichtfällen wird das Wellenfrontenverfahren sukzessive von oben nach unten von einer Schichtgrenze zur nächsten angewendet. Die nachstehende Erläuterung folgt im Wesentlichen der Darstellung in Rabbel (2009).

Die Bestimmung der Tiefe und Geschwindigkeit eines bestimmten Refraktors erfordert die Aufzeichnung der reziproken Laufzeitkurven  $\tau_1(x, A)$  und  $\tau_2(x, B)$  zwischen den beiden Schusspunkten (Abb. 2.132a). Zur Konstruktion von Laufzeitästen für Schuss-Geophonabstände unterhalb der Knickpunktentfernung werden überlappende Laufzeitkurven zu einer einzigen kombiniert, wobei die Konsistenzkriterien (vgl. Abschn. 2.5.2.2) erfüllt sein müssen, insbesondere die geforderte Parallelität überlappender Laufzeitäste. Die Methode liefert die besten Ergebnisse für starke Geschwindigkeitskontraste zwischen Deckschicht und Refraktor sowie nicht zu große Geschwindigkeitsgradienten im Refraktor selbst.

Zur Bestimmung der Oberflächentiefe der  $j$ -ten Schicht werden die reziproken Laufzeitfelder  $\tau_j(x, z, A)$  bzw.  $\tau_j(x, z, B)$  zwischen den beiden Schusspunkten A und B nicht nur an der Erdoberfläche betrachtet, sondern auch darunter (Abb. 2.132b). Dort gilt an einem Punkt P mit den Koordinaten  $(x_P, z_P)$ :

$$\tau_j(x_P, z_P, A) + \tau_j(x_P, z_P, B) = \tau(A, B). \quad (2.271)$$

Somit kann aus der reziproken Laufzeit  $\tau_j(A, B)$  an der Erdoberfläche zwischen den Punkten A und B die Lage des Punkts P auf der Refraktoroberfläche bestimmt werden, wenn die Laufzeiten  $\tau_j(x_P, z_P, A)$  und  $\tau_j(x_P, z_P, B)$  von den Schusspunkten zu diesem Punkt berechnet werden können (Abb. 2.132c). Ist die Geschwindigkeit im Hangenden bekannt, so ist die Fortsetzung des Wellenfelds in die Tiefe einfach.



**Abb. 2.132** Prinzip des Wellenfrontenverfahrens: (a) Laufzeitäste der direkten und geführten Wellen,  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , von den Schuss- und Gegenschusspunkten A und B (blau bzw. rot); (b) Strahlwege der von den Schusspunkten A und B ausgehenden geführten Wellen. Kreise bezeichnen die zueinander gehörenden Punkte auf dem Refraktor und der Laufzeitkurve, die durch die auftauchenden Strahlen der geführten Wellen verbunden sind; (c) Zur Bestimmung der Punkte auf dem Refraktor wird das Laufzeitfeld entlang der auftauchenden Strahlen von der Oberfläche nach unten zurückverfolgt. Die zugehörige Lage der Wellenfronten (gestrichelt bzw. gepunktet) wird aus der Steigung der Laufzeitkurve und der Geschwindigkeit der oberen Schicht berechnet (Gl. 2.272 bzw. Gl. 2.275). Die Punkte auf dem Refraktor ergeben sich aus der Anwendung von Gl. 2.271 bzw. Gl. 2.277 auf die reziproken Laufzeitfelder (nach Rabbel 2009)

Für den Fall einer stetigen Variation der Geschwindigkeit  $v(x, z)$  im Hangenden kann dies auf Grundlage der Eikonalgleichung (Gl. 2.58) erfolgen:

$$\left( \frac{\partial \tau_j(x, z)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_j(x, z)}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{(v(x, z))^2}. \quad (2.272)$$

Den horizontalen Gradienten  $\partial \tau_j / \partial x$  erhält man aus der Steigung der Laufzeitkurve der geführten Welle an der Erdoberfläche ( $z = 0$ ):

$$\partial \tau_j / \partial x = \sin(i(x)) / v(x), \quad (2.273)$$

wobei  $i(x)$  den vom einfallenden Strahl mit der Vertikalen aufgespannten Winkel bezeichnet. Den vertikalen Gradienten erhält man aus

$$\partial \tau_j / \partial z = \frac{\cos(i(x))}{v(x)} = \sqrt{\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial x}\right)^2}. \quad (2.274)$$

Damit kann das Wellenfeld von der Erdoberfläche an einen um  $\Delta z$  tiefer gelegenen Punkt linear extrapoliert werden:

$$\tau_j(x - x, z, A) = \tau_j(x, 0, A) - \frac{\partial \tau_j}{\partial x} x - \frac{\partial \tau_j}{\partial z} z, \quad (2.275)$$

wobei

$$\Delta x = \Delta z \frac{\sin(i)}{\cos(i)} = \Delta z \frac{\partial \tau_j / \partial x}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial x}\right)^2}}. \quad (2.276)$$

Damit kann das Laufzeitfeld  $\tau_j(x, n \cdot \Delta z, A)$  mit  $n = 1, 2, \dots$  sukzessive bis zur Tiefe  $z = n \cdot \Delta z$  fortgesetzt werden, wobei  $\partial \tau_j / \partial x$  für jede Tiefe erneut aus Gl. 2.273 berechnet werden muss.

Zur Berechnung der Refraktortiefe am Punkt P benötigt man nun auch das auf diese Tiefe fortgesetzte Laufzeitfeld des Gegenschusses  $\tau_j(x, n \cdot \Delta z, B)$ . Am Punkt P muss die Summe beider Laufzeiten innerhalb einer gegebenen Genauigkeit  $\varepsilon$  mit der reziproken Zeit übereinstimmen:

$$|\tau_j(x_P, n \cdot z, A) + \tau_j(x_P, n \cdot z, B) - \tau_j(A, B)| < \varepsilon. \quad (2.277)$$

Die lokale Geschwindigkeit des j-ten Refraktors  $v_j(x_p, z_p)$  kann sowohl aus der Laufzeitkurve des Schusses als auch des Gegenschusses bestimmt werden. An einem Punkt  $P = (x_p, z_p)$  auf dem Refraktor zwischen zwei Nachbarpunkten  $P1 = (x_{p1}, z_{p1})$  und  $P2 = (x_{p2}, z_{p2})$  kann die Geschwindigkeit somit sowohl durch

$$v_j(x_p, z_p, A) = \frac{\sqrt{(x_{p2} - x_{p1})^2 + (z_{p2} - z_{p1})^2}}{\tau_j(x_{p2}, z_{p2}, A) - \tau_j(x_{p1}, z_{p1}, A)}, \quad (2.278)$$

durch

$$v_j(x_p, z_p, B) = \frac{\sqrt{(x_{p2} - x_{p1})^2 + (z_{p2} - z_{p1})^2}}{\tau_j(x_{p2}, z_{p2}, B) - \tau_j(x_{p1}, z_{p1}, B)}, \quad (2.279)$$

als auch durch

$$\bar{v}_j(x_P, z_P) = \frac{2v_j(x_P, z_P, A) v_j(x_P, z_P, B)}{v_j(x_P, z_P, A) + v_j(x_P, z_P, B)} \quad (2.280)$$

angenähert werden.

Alternativ kann die hier beschriebene Fortsetzung des Wellenfelds natürlich auch numerisch erfolgen, beispielsweise durch Lösung der Wellengleichung (Gl. 2.46) bzw. der Eikonalgleichung (Gl. 2.272) mit der Finiten-Differenzen-Methode (siehe z. B. Červený 2001 sowie Vidale 1988; Zelt und Smith 1992; Hole und Zelt 1995).

## 2.5.5 Refraktions-Tomografie

Da heute auch Refraktionsseismik auf engmaschigen Profilen bzw. Netzen angewendet wird, können auch refraktionsseismische CMP-Stapelsektionen zu tomografischen Untersuchungen verwendet werden (siehe z. B. Yilmaz 2001). Oft kann man hierbei trotz vorhandener Schichtneigung 1D-Auswerteverfahren anwenden. Auch wird häufig die sog. Inversions-Strahlverfolgung (*ray tracing*) eingesetzt, bei der Schichttiefen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsgradienten durch eine linearisierte Inversion angepasst werden.

Die Refraktions-Tomografie basiert auf den in Abschn. 2.4.4 bereits erläuterten theoretischen Grundlagen. Eine typische Abfolge der einzelnen erforderlichen Bearbeitungsschritte ist in Abb. 2.133 illustriert: Ausgangspunkt ist wiederum die Aufzeichnung von Refraktions-Laufzeitkurven  $\tau_{\text{gemessen}}$  überlappender Auslagen mit dichter Abfolge von Schusspunkten (Abb. 2.133a). Hieraus wird eine vereinfachte mittlere Laufzeitkurve  $\tau_{\text{mittel}}$  durch Kombination der überlappenden Laufzeitäste konstruiert (Abb. 2.133b). Aus dieser wird sodann ein eindimensionales Startmodell  $v^{(0)}$  der Geschwindigkeiten erstellt (Abb. 2.133c). Auf der Grundlage dieses Geschwindigkeitsmodells erfolgt nun eine erste numerische Simulation von Laufzeitkurven  $\tau_{\text{sim}}$  (Abb. 2.133d) und die Berechnung von Strahlen (Abb. 2.133e). Nun werden die Laufzeitresiduen  $\Delta\tau = \tau_{\text{gemessen}} - \tau_{\text{simuliert}}$  bestimmt (Abb. 2.133f) und das aktuelle Geschwindigkeitsmodell angepasst. Dazu werden die Laufzeitresiduen  $\Delta\tau$  mit einem Inversionsschema in Korrekturen der Geschwindigkeiten umgerechnet (Abb. 2.133g). Diese Iteration zwischen Anpassung des Geschwindigkeitsmodells und numerischer Simulation wird so lange wiederholt, bis die Laufzeitresiduen auf ein akzeptables Maß gesunken sind. Als Beispiel zeigt die (Abb. 2.133h) das für die  $n + 1$ -te Iteration aktualisierte Geschwindigkeitsmodell:  $v^{(n+1)} = v^{(n)} + \Delta v$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

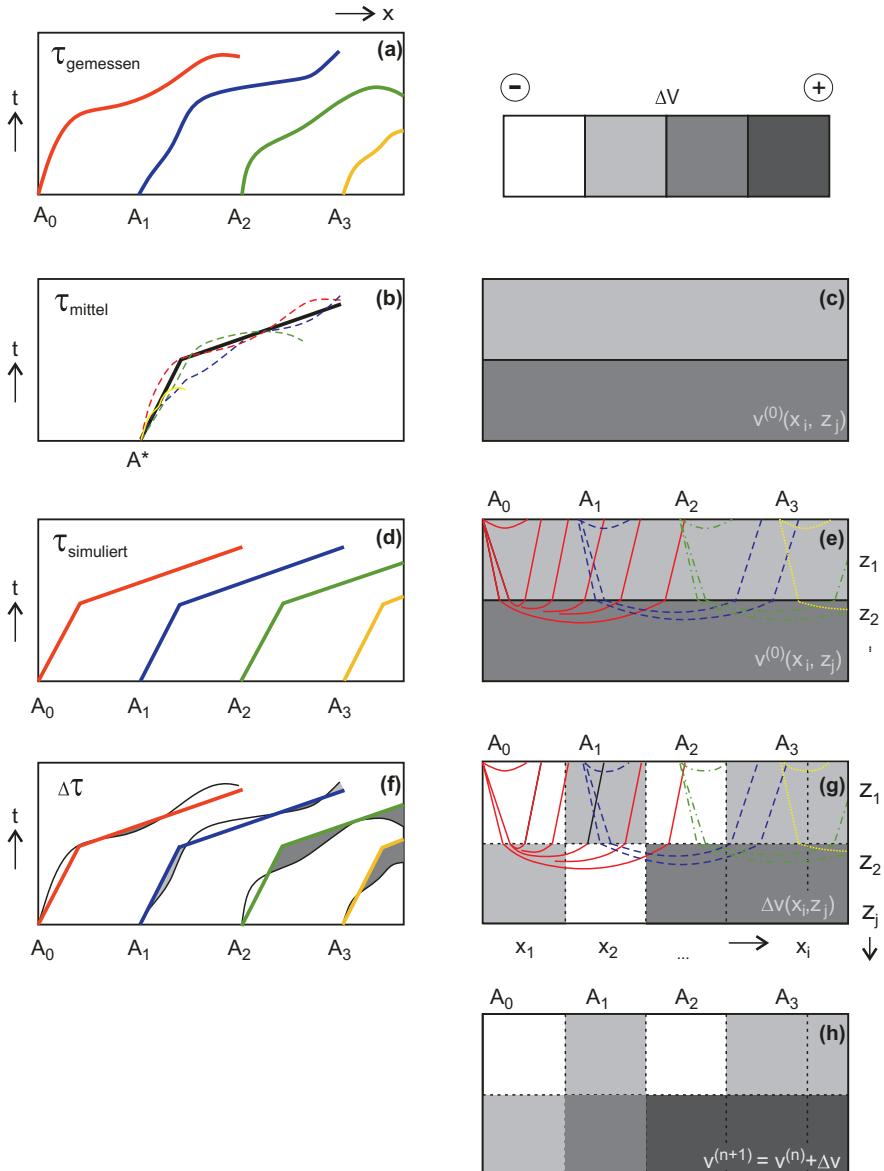
## 2.6 Ausblick: Aktuelle Trends und fortgeschrittene Methoden

Zwar beschränkt der Charakter dieses Buchs die behandelten Themen und Aspekte im Wesentlichen auf die Grundlagen. Dennoch sollen aktuelle Trends und auch weiter fortgeschrittene Methoden zumindest Erwähnung finden und Anhaltspunkte für eine eigene weitere Vertiefung von Interessierten bieten. Dies sind zum einen der vermehrte Einsatz von Scher- und Oberflächenwellen für die Erkundung insbesondere des flachen Untergrunds sowie zum anderen die seismische Interferometrie, welche die natürliche Bodenunruhe als Signal nutzt.

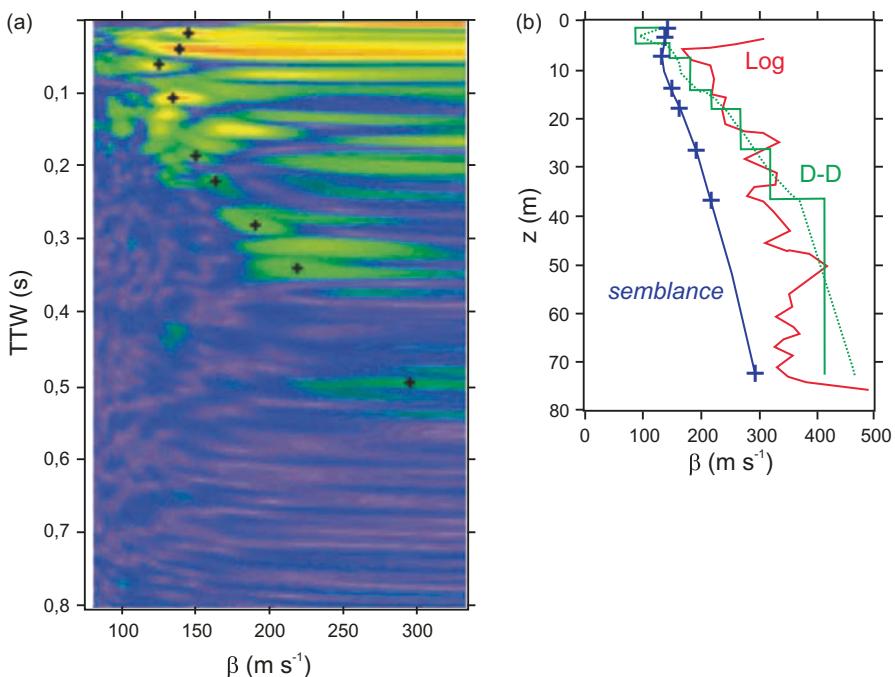
### 2.6.1 Scherwellenseismik

Aus der Interpretation von Ausbreitung und Reflexion von Scherwellen können zusätzliche Informationen gewonnen werden, die über jene aus der Seismik mit Kompressionswellen hinausgehen. Zum einen werden die Verhältnisse  $\alpha/\beta$  der P- und S-Wellengeschwindigkeiten genutzt, um bei klastischen Sedimenten zwischen Sandstein und Tonschiefer zu unterscheiden (Lines und Newrick 2004). Zum anderen eignen sich S-Wellen wegen ihrer langsameren Geschwindigkeiten und entsprechend kleineren Wellenlängen zur Erkundung kleinskaliger oberflächennaher Strukturen, die mit P-Wellenseismik nicht mehr aufgelöst werden können. Sie sind damit eine Alternative oder Ergänzung zur Erkundung mit elektromagnetischen Wellen durch die Georadar-Methode. Schließlich werden S-Wellen genutzt, um die Orientierung und Ausrichtung von Klüften zu bestimmen. Dies beruht auf der Doppelbrechung, die auftritt, wenn eine Scherwelle auf eine Kluft trifft (*birefringence, shear wave splitting*). Dann spaltet sie sich in zwei Polarisationsrichtungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten auf. Hierbei erfolgt die Auslenkung der schnellen Mode parallel zur Kluft, und somit „sieht“ diese Welle im Wesentlichen ein ungeklüftetes Gebirge. Sie ist daher schneller als die langsame Mode, deren Auslenkung senkrecht zur Kluft erfolgt. Somit bestimmen Dichte und Kluftausrichtung die Polarisationsrichtungen der beiden S-Wellenmoden und ihre Laufzeitdifferenzen. Dies ermöglicht die Charakterisierung von Klüften und hieraus letztlich der kluftgebundenen hydraulischen Permeabilität.

Scherwellen besitzen wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit als P-Wellen bei gleicher Frequenz eine kleinere Wellenlänge. In der oberflächennahen Erkundung wird die damit einhergehende höhere Auflösung zunehmend für eine bessere Abbildung von Strukturen genutzt. Ohne spezielle Anregung entstehen Scherwellen als Wechselwellen durch eine Umwandlung von P- in S-Wellenenergie immer dann, wenn eine P-Welle nicht senkrecht auf einen Reflektor einfällt (vgl. Abschn. 2.3.6). Sie können aber auch direkt durch spezielle Quellen angeregt werden, insbesondere durch Vibratoren. In Verbindung von speziellen Minivibratoren mit geschleppten Geophonketten (*land streamer*) können solche Erkundungen auch in Städten und entlang viel befahrener Straßen erfolgen, was natürlich zusätzlich besondere Sorgfalt bei der Filterung und Rauschunterdrückung erfordert.



**Abb. 2.133** Typische Abfolge von Bearbeitungsschritten bei der seismischen Refraktions-Tomografie: (a) Aufzeichnung von Refraktions-Laufzeitkurven  $\tau_{\text{gemessen}}$  überlappender Auslagen mit dichter Abfolge von Schusspunkten; (b) Erstellung einer vereinfachten mittleren Laufzeitkurve  $\tau_{\text{mittel}}$ ; (c) Hieraus Ableitung eines 1D-Startmodells der Geschwindigkeiten  $v^{(0)}$ ; (d) Numerische Simulation von Laufzeitkurven  $\tau_{\text{simuliert}}$  für das aktuelle Geschwindigkeitsmodell; (e) Berechnung von Strahlen für das aktuelle Modell; (f) Bestimmung der Laufzeitresiduen  $\Delta\tau = \tau_{\text{gemessen}} - \tau_{\text{simuliert}}$  und Überprüfung der Anpassung; (g) Anwendung eines Inversionsschemas zur Umrechnung der Laufzeitresiduen  $\Delta\tau$  in Korrekturen  $\Delta v$  des aktuellen Geschwindigkeitsmodells; (h) Aktualisierung des aktuellen Geschwindigkeitsmodells  $v^{(n)}$ :  $v^{(n+1)} = v^{(n)} + \Delta v$  für die nächste Iteration, beginnend mit dem Schritt (d) (nach Rabbel 2009)



**Abb. 2.134** Oberflächennahe Erkundung mit Scherwellen (nach Pugin et al. 2013). (a) Ähnlichkeits-Geschwindigkeitsanalyse (+: Maxima des Ähnlichkeits-Koeffizienten); (b) blau: Mittlere Geschwindigkeit entsprechend den Maxima des Ähnlichkeits-Koeffizienten (*semblance*) in (a), grün: Intervallgeschwindigkeiten nach Dix–Dürbaum (D-D) und daraus gemittelter Tiefenverlauf (gepunktet); rot: Bohrlochmessung (Log) der S-Wellengeschwindigkeit

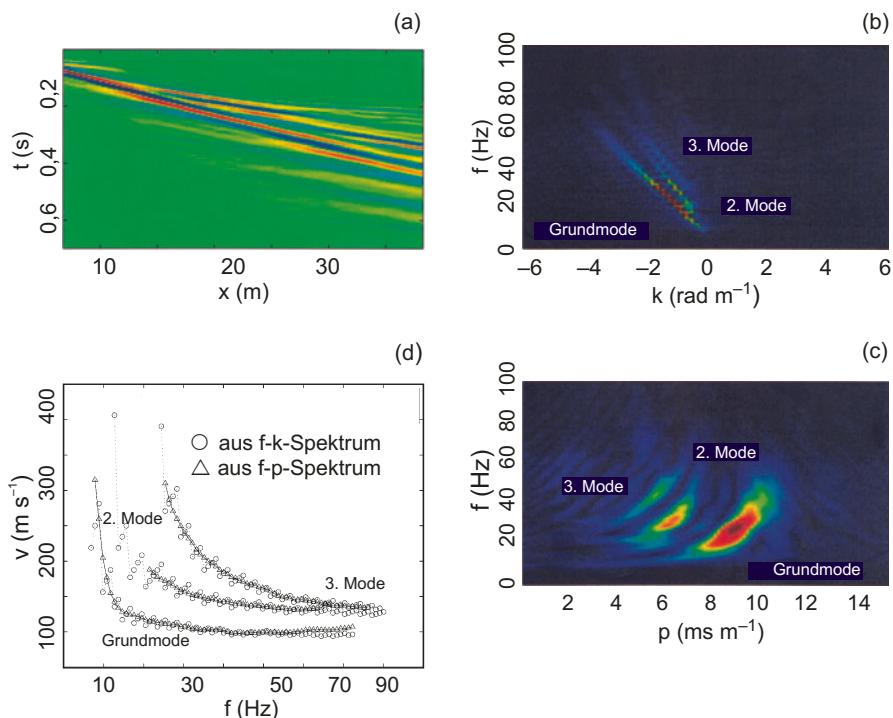
In einer seismischen Erkundung im Stadtgebiet von Hamburg sollten die durch Subrosion von Salzgestein im oberflächennahen Untergrund entstandenen Hohlräume lokalisiert werden, die mit mikroseismischen Ereignissen in Verbindung gebracht wurden (Krawczyk et al. 2013). Als Quelle wurden zwei zehn Sekunden dauernde Anregungssequenzen zwischen 30 Hz und 120 Hz verwendet. Zur Aufzeichnung diente eine 120 m lange geschleppte Geophonkette. Nach entsprechender Datenbearbeitung konnten Strukturen in den obersten 100 m mit einer vertikalen Auflösung von 1 m abgebildet werden. Insbesondere bei der Erkundung oberflächennaher Schichten mit geringen Geschwindigkeiten von Scherwellen von bis zu  $100 \text{ m s}^{-1}$  werden vertikale Auflösungen von bis zu 25 cm erzielt (Polom et al. 2013). Die horizontale Auflösung ergibt sich aus dem Durchmesser der ersten Fresnel-Zone (vgl. Abschn. 2.4.1.2). Für eine Wellenlänge von zwei Metern liegt dieser in einer Tiefe von zehn Metern bei 6 m–7 m und in einer Tiefe von dreißig Metern bei 10 m–12 m.

Die Bearbeitungsschritte in der Scherwellenseismik und ihre Reihenfolge entsprechen mit kleinen Unterschieden der Vorgehensweise bei der Bearbeitung von

P-Wellenreflexionen (siehe z. B. Krawczyk et al. 2012). Wiederum ist die Geschwindigkeitsanalyse ein Bearbeitungsschritt von zentraler Bedeutung sowohl für die NMO-Korrektur, die Erstellung von CMP-Stapelsektionen sowie die Konversion von Zeit in Tiefe. Abb. 2.134 zeigt ein Beispiel einer Erkundung des flachen innerstädtischen Untergrunds.

## 2.6.2 Erkundung des flachen Untergrunds mit Rayleigh-Wellen

Im Zusammenhang mit Altlastensanierung sowie geotechnischen Standortuntersuchungen für Bauwerke im Allgemeinen und Masten und Windkraftanlagen im Besonderen wuchs in den letzten Jahren das Interesse an der Charakterisierung der Eigenschaften des flachen Untergrunds. Oft wird in diesem Zusammenhang der Verlauf der Geschwindigkeit von Scherwellen mit der Tiefe als Stellvertreterbefund für die Scherfestigkeit der betreffenden Schichten benötigt, ein kritischer Parameter für



**Abb. 2.135** Dispersionsanalyse von Rayleigh-Wellen: (a) Gestapelte und im Zeitbereich bandpassgefilterte Vertikalkomponenten von Oberflächenwellen; (b) typisches Frequenz-Wellenzahl-(f-k-)Spektrum; (c) typisches Frequenz-Strahlparameter-(f-p-)Spektrum; (d) Dispersionskurven, ermittelt aus im Zeitbereich bandpassgefilterten Daten von Oberflächenwellen mit Hilfe der  $\tau$ - $p$ -Transformation (Dreiecke und durchgezogene Linie) bzw. der f-k-Transformation (Kreise und gepunktete Linie). Die Grundmode ist die langsamste, die zweite und dritte Mode besitzen höhere Phasengeschwindigkeiten (nach Beaty und Schmitt 2003)

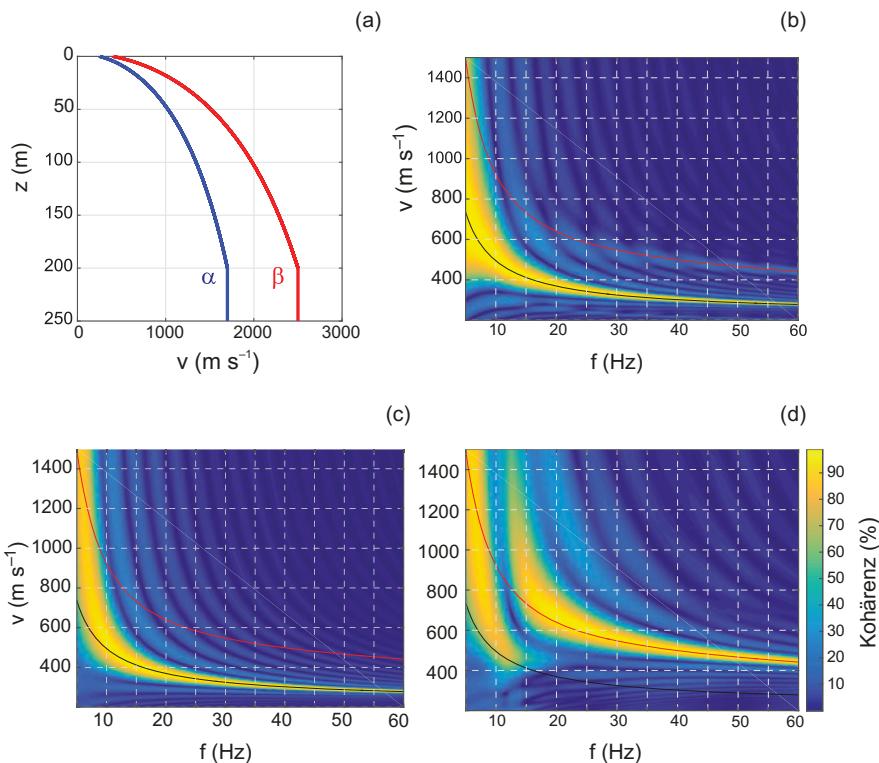
die Konstruktionsplanung vieler Bauwerke. Neben Bohrloch-Bohrloch-Seismik und vertikalen seismischen Profilen (VSP) wurde in den letzten Jahrzehnten zunehmend die Dispersion der Phasengeschwindigkeit von Rayleigh-Wellen (siehe Abb. 2.13) zur Schätzung des Schermoduls oberflächennaher Schichten genutzt. Die Phasengeschwindigkeit von Rayleigh-Wellen wird im Wesentlichen durch den Verlauf der Geschwindigkeit von Scherwellen nahe der Oberfläche bestimmt, in geringerem Maß auch durch den von Kompressionswellen und der Dichte. Umgekehrt kann man jedoch mit Hilfe von Rayleigh-Wellen ein Tiefenprofil der Geschwindigkeit von Scherwellen nicht direkt, sondern nur in einem zweistufigen Verfahren schätzen: Zunächst erfolgt die Bestimmung einer Dispersionskurve der Rayleigh-Wellen. Dann wird aus dieser mit einem geeigneten Inversionsverfahren ein Tiefenprofil für die Geschwindigkeit der Scherwellen ermittelt.

Vor einer weiteren Verarbeitung können die vor den Rayleigh-Wellen eintreffenden Einsätze der direkten und geführten P-Wellen durch eine Bandpassfilterung im Zeitbereich aus den seismischen Sektionen entfernt werden (Abb. 2.135a). Information über die Dispersion der Grund- und höheren Moden der Rayleigh-Wellen liefern dann die Frequenzspektren dieser gefilterten Daten. Hierzu erfolgt eine Transformation aus dem Zeit-Ortsbereich in den Frequenz-Wellenzahl-( $f$ - $k$ -)Bereich bzw. den Frequenz-Strahlparameter-( $f$ - $p$ -)Bereich. Im ersten Fall werden im  $f$ - $k$ -Spektrum (vgl. Abschn. 2.4.5.2) die mit der Energie der Rayleigh-Wellen in Verbindung stehenden Maxima identifiziert und auf Grundlage des Zusammenhangs zwischen Phasengeschwindigkeit, Frequenz und Wellenzahl ( $v = 2\pi f/k$ , Gl. 2.23) interpretiert (Abb. 2.135b).

Im zweiten Fall erfolgt zunächst eine Radon-Transformation in den  $\tau$ - $p$ -Bereich (vgl. Abschn. 2.4.2.2) gefolgt von einer eindimensionalen Fourier-Transformation aus dem zeitlichen  $\tau$ -Bereich in den Frequenzbereich, analog wie im Fall der seismischen Tomografie (vgl. Abschn. 2.4.4). Bei dieser Vorgehensweise werden allfällige weitere Geraden geführter Wellen unterdrückt, da diese, wie in Abschn. 2.4.2.2 erläutert, im  $\tau$ - $p$ -Bereich jeweils auf einen Punkt abgebildet werden. Die Dispersionskurven ergeben sich aus der Verbindung kohärenter Maxima im Frequenz-Strahlparameterspektrum sowie dem Kehrwert des Strahlparameters, der reziproken Geschwindigkeit. Erhält man mehrere Maxima bei derselben Frequenz, ist dies ein Hinweis auf höhere Moden der Rayleigh-Wellen (Abb. 2.135c).

Abb. 2.135d zeigt Dispersionskurven für die ersten drei Moden von Rayleigh-Wellen, die aus  $f$ - $k$ - bzw.  $f$ - $p$ -Spektren bestimmt wurden. In beiden Fällen sind die Ergebnisse konsistent.

Die Ermittlung von Tiefenprofilen der Geschwindigkeit von Scherwellen erfordert nun die Inversion dieser Dispersionskurven. Hierfür dient zunächst ein Vorwärtsmodell für die Berechnung theoretischer Dispersionskurven von Rayleigh-Wellen, z. B. in einem  $n$ -fach geschichteten Untergrund. Für die eigentliche Inversion stehen dann unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Als recht erfolgreich erwiesen hat sich die Methode der simulierten Abkühlung (*simulated annealing*, siehe z. B. Menke 2012), ein gesteuertes Monte-Carlo-Verfahren, mit dem es möglich ist, bei der Suche nach dem globalen Optimum im Lösungsraum im Verlauf eines iterativen Verfahrens aus lokalen Nebenoptima zu entkommen. Das



**Abb. 2.136** Berechnete Dispersion der Geschwindigkeit von Rayleigh-Wellen mit Polaritätsfilterung. (a) Verlauf der Geschwindigkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  der Kompressions- und Scherwellen mit der Tiefe; (b)–(d) Isoflächendiagramme der Kohärenz von Phasengeschwindigkeit und Frequenz (gelb: hohe relative Kohärenz, blau: geringe relative Kohärenz). Die schwarzen und roten Linien bezeichnen die Grundmode und die erste höhere Mode mit retrograder bzw. prograder Polarisierung; (b) Unbearbeitete Daten der Vertikalkomponente; (c) Vertikalkomponente nach prograder Polaritätsfilterung; (d) Vertikalkomponente nach retrograder Polaritätsfilterung (nach Gribler et al. 2016)

Verfahren hat sich insbesondere bei Optimierungsproblemen hoher Komplexität bewährt, bei denen einfache mathematische Verfahren versagen und ein vollständiges Durchmustern des Lösungsraums unmöglich ist.

Das Verfahren bildet Abkühlungsprozesse nach, wie etwa beim Ausglühen von Werkstoffen. Nach dem Erhitzen eines Metalls verbleibt den Atomen im Zuge einer langsamen Abkühlung genügend Zeit, um sich zu ordnen und stabile Kristalle zu bilden. Dies ermöglicht das Erreichen eines möglichst energiearmen Zustands nahe dem Optimum. Übertragen auf Optimierungsverfahren wie die Inversion entspricht die Temperatur einer Wahrscheinlichkeit, mit der sich ein Zwischenergebnis der Optimierung auch verschlechtern darf. Dies wird durch den Metropolis-Algorithmus gesteuert (siehe z. B. Menke 2012), der es im Gegensatz zu einem lokalen Suchalgorithmus zulässt, dass ein lokales Optimum auch wieder verlassen und ein besseres gefunden werden kann.

Nutzt man die Information über die retrograde Polarität der Grundmode und die prograde Polarität der ersten höheren Mode der Rayleigh-Welle, so kann man mittels eines Polaritätsfilters noch besser zwischen den Dispersionskurven dieser beiden Moden unterscheiden. Die Abb. 2.136 illustriert dies anhand berechneter Dispersionskurven für einen angenommenen Geschwindigkeitsverlauf von Kompressions- und Scherwellen mit der Tiefe (Abb. 2.136a). Hierfür wird in den Abb. 2.136b–d die Kohärenz zwischen der Phasengeschwindigkeit der Rayleigh-Wellen und ihrer Frequenz dargestellt.

Die Kohärenz ist ein dem Ähnlichkeitskoeffizienten  $S$  (Gl. 2.215) verwandtes Maß für den Grad der linearen Abhängigkeit zweier Funktionen bzw. Reihen: Besitzen zwei Reihen  $x$  und  $y$  die Leistungsspektren  $\Phi_{xy}(f)$  bzw.  $\Phi_{xx}(f)$  und  $\Phi_{yy}(f)$  ihrer Kreuz- bzw. Autokorrelationsfunktionen  $\phi_{xy}$  (Gl. 2.183) bzw.  $\phi_{xx}$  und  $\phi_{yy}$  (Gl. 2.184), so ist ihre Kohärenz  $C_{xy}(f)$  definiert als:

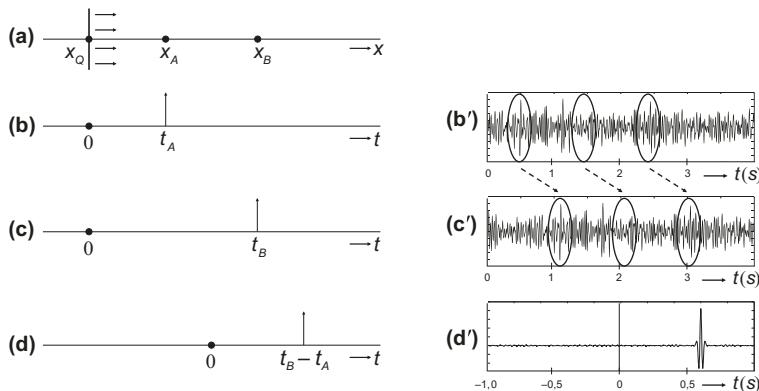
$$C_{xy}(f) = \frac{\Phi_{xy}(f)}{\sqrt{\Phi_{xx}(f) \cdot \Phi_{yy}(f)}}. \quad (2.281)$$

Hierbei nimmt  $C_{xy}(f)$  Werte zwischen null und eins an bzw. 0 % und 100 %. Man erkennt in Abb. 2.136c,d deutlich, wie es die Polaritätsfilterung ermöglicht, mit Hilfe der Kohärenz zwischen den Dispersionskurven der retrograden Hauptmode der Rayleigh-Welle und ihrer prograden ersten Nebenmode zu unterscheiden.

### 2.6.3 Seismische Interferometrie

Der Begriff der Interferometrie entstammt ursprünglich der Radioastronomie, wo er Anwendungen der Kreuzkorrelation auf Funksignale entfernter Objekte bezeichnet. Die Methode der seismischen Interferometrie beruht auf der Tatsache, dass in einem horizontal geschichteten Medium mit freier Oberfläche sich die Autokorrelation (Gl. 2.182) des Signals einer durchlaufenden ebenen seismischen Welle aus dem Reflexionssignal, seiner zeitinvertierten Variante und einem Impuls zur Zeit  $t = 0$  ergibt. Daher erhält man das Reflexionssignal als den kausalen Teil der Autokorrelation des an der Erdoberfläche aufgezeichneten seismischen Signals (Wapenaar et al. 2008). Dieser seit Ende der 1960er-Jahre bekannte Zusammenhang wurde in den folgenden Jahrzehnten, besonders aktiv aber nach der Jahrtausendwende, zu einer Methode der Reflexionsseismik mit und ohne aktive Anregung weiterentwickelt. Eine Übersicht über unterschiedliche Anwendungen dieser Methode sowohl in der Land- als auch der Seeseismik findet sich in einem thematischen Spezialteil der Zeitschrift *The Leading Edge* (TLE 2011). Die folgende Zusammenfassung folgt im Wesentlichen der Darstellung in Wapenaar et al. (2010).

Die bemerkenswerte und zunächst überraschende Eigenschaft der Kreuzkorrelation von an verschiedenen Positionen aufgezeichneten seismischen Spuren besteht darin, dass damit neue, von virtuellen seismischen Quellen ausgehende Signale erzeugt werden können. Die Anwendung der seismischen Interferometrie auf Erkundungen mit aktiven seismischen Quellen ergibt eine neue Bearbeitungsweise



**Abb. 2.137** Eindimensionale seismische Interferometrie mit direkten Wellen, bei  $x_Q$  angeregt durch eine Impulsquelle (links) bzw. durch Rauschen  $R(t)$  (rechts). Links: (a) Bei  $x = x_Q$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  angeregte und in Richtung der X-Achse nach rechts laufende ebene Welle; (b) Das von einem Geophon bei  $x_A$  zum Zeitpunkt  $t_A$  aufgezeichnete Signal – die greensche Funktion  $G(x_A, x_Q, t)$ ; (c) Das von einem Geophon bei  $x_B$  zum Zeitpunkt  $t_B$  aufgezeichnete entsprechende Signal; (d) Kreuzkorrelation der bei  $x_A$  und  $x_B$  aufgezeichneten Signale in (b) und (c). Rechts: (b') Das von einem Geophon bei  $x_A$  aufgezeichnete Signal  $u(x_A, x_Q, t) = G(x_A, x_Q, t)^* R(t)$ ; (c') Das von einem Geophon bei  $x_B$  aufgezeichnete entsprechende Signal; (d') Die Kreuzkorrelation beider Signale:  $G(x_B, x_A, t)^* \phi_{RR}(t)$ , wobei  $\phi_{RR}(t)$  die Autokorrelation des Rauschens ist (nach Wapenaar et al. 2010)

seismischer Daten. Dagegen ist die passive seismische Interferometrie eine Methode, um Aufzeichnungen von passiven seismischen Signalen, wie etwa von Bodenunruhe oder Mikroseismizität, in Signale virtueller aktiver Quellen zu wandeln. Hierbei wird weiter zwischen den Signalen durchlaufender Oberflächenwellen und jenen reflektierter Wellen unterschieden. In jedem Fall ergibt die Kreuzkorrelation von Registrierungen an zwei Geophonpositionen und der Summierung über unterschiedliche Quellen ein Signal, das man an einem der beiden Geophone messen würde, wenn sich am anderen eine seismische Quelle befände. Ein solches von einer Punktquelle ausgehendes Signal kann durch die Konvolution einer greenschen Funktion (vgl. Abschn. 4.6 im Anhang) mit einem Wavelet ausgedrückt werden.

Man betrachte hierzu zunächst die verlustfreie, eindimensionale Ausbreitung einer zum Zeitpunkt  $t = 0$  von einer Impulsquelle bei  $x_Q$  ausgehenden ebenen Welle mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der X-Achse (Abb. 2.137a). Zu den Zeiten  $t_A$  und  $t_B$  erreicht die Welle die beiden Geophone bei  $x_A$  und  $x_B$ . Die Abb. 2.137b zeigt das vom Geophon bei  $x_A$  aufgezeichnete Signal, das mit  $u(x_A, x_Q, t) = G(x_A, x_Q, t)$  bezeichnet wird, wobei  $G$  die greensche Funktion ist, deren erste beiden Argumente hier immer den Ort des Geophons bzw. der Quelle bezeichnen und das dritte die Zeit (bzw. ggf. die Kreisfrequenz). Im Fall unserer Impulsquelle ist die greensche Funktion ein Impuls zum Zeitpunkt  $t_A = (x_A - x_Q)/v$ , also:  $u(x_A, x_Q, t) = G(x_A, x_Q, t) = \Delta(t - t_A)$ , wo  $\Delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$  das Dirac-Delta (Gl. 2.135) ist.

Ebenso ist das vom Geophon bei  $x_B$  aufgezeichnete Signal gleich  $u(x_B, x_Q, t) = G(x_B, x_Q, t) = \Delta(t - t_B)$  mit  $t_B = (x_B - x_Q)/v$  (Abb. 2.137c). In der seismischen Interferometrie wird nun die Kreuzkorrelation dieser beiden von unterschiedlichen Geophonen aufgezeichneten Signale gebildet. Eine Kreuzkorrelation (Gl. 2.181) zweier Funktionen der Zeit kann jedoch durch ihre Konvolution in der Zeit ausgedrückt werden, wofür die zweite Funktion zeitinvertiert wird ( $t' = -t$ , vgl. Gl. 2.179). Die Kreuzkorrelation der beiden bei  $x_A$  und  $x_B$  aufgezeichneten Signale ist daher gleich:

$$\begin{aligned}\phi_{G_{x_A} G_{x_B}}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x_A, x_Q, t) G(x_B, x_Q, t + \tau) dt = G(x_B, x_Q, t) * G(x_A, x_Q, -t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x_B, x_Q, t + t') G(x_A, x_Q, t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} (t + t' - t_B) (t' - t_A) dt' \\ &= \delta(t - (t_B - t_A)) = \delta(t - (x_B - x_A)/v).\end{aligned}\quad (2.282)$$

Dies ist aber gleich der greenschen Funktion für ein bei  $x_B$  aufgezeichnetes Signal eines von  $x_A$  ausgehenden Impulses:

$$\phi_{G_{x_A} G_{x_B}}(\tau) = G(x_B, x_Q, t)^* G(x_A, x_Q, -t) = G(x_B, x_A, t). \quad (2.283)$$

Die Kreuzkorrelation der an den Geophonen bei  $x_A$  und  $x_B$  aufgezeichneten Signale ergibt also ein am Geophon bei  $x_B$  aufgezeichnetes Signal einer Welle, als wäre diese durch eine Impulsquelle bei  $x_A$  erzeugt worden (Abb. 2.137d). Diese wird als das bei  $x_B$  zum Zeitpunkt  $t_A - t_B$  aufgezeichnete Signal einer bei  $x_A$  erzeugten Impulsquelle interpretiert, also als greensche Funktion  $G(x_B, x_A, t)$ .

Dieser Zusammenhang besteht überdies unabhängig von der Art der Quelle: Wird die Quellfunktion beispielsweise statt durch einen Impuls durch ein Wavelet  $q(t)$  beschrieben, dann sind die Geophonspuren bei  $x_A$  und  $x_B$  gleich  $u(x_A, x_Q, t) = G(x_A, x_Q, t)^* q(t)$  bzw.  $u(x_B, x_Q, t) = G(x_B, x_Q, t)^* q(t)$ . Bezeichnet  $\phi_{QQ}(t) = q(t)^* q(-t)$  die Autokorrelation des Wavelets (Gl. 2.180), dann erhält man die Kreuzkorrelation von  $u(x_A, x_Q, t)$  und  $u(x_B, x_Q, t)$  durch Konvolution der rechten Seite von Gl. 2.283 mit  $\phi_{QQ}(t)$ . Dies gleicht daher wiederum der Konvolution der linken Seite von Gl. 2.283 mit  $\phi_{QQ}(t)$ :

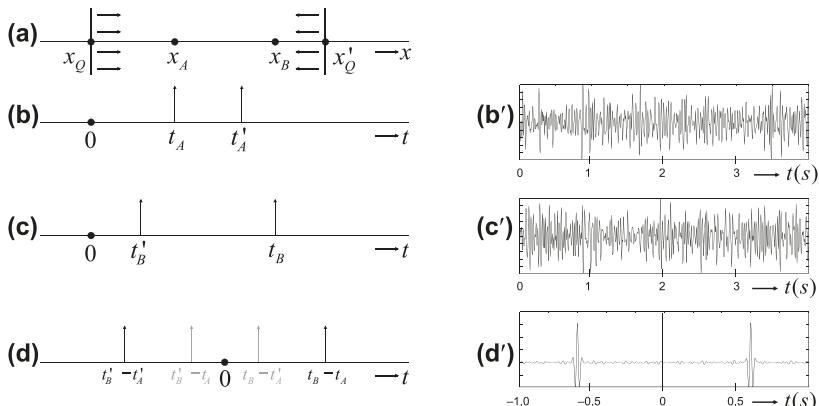
$$\begin{aligned}\phi_{u_{x_A} u_{x_B}}(\tau) &= u(x_B, x_Q, t)^* u(x_A, x_Q, -t) = \phi_{G_{x_A} G_{x_B}}(\tau)^* \phi_{QQ}(t) \\ &= G(x_B, x_A, t)^* \phi_{QQ}(t).\end{aligned}\quad (2.284)$$

Wird die Quellfunktion also durch ein Wavelet statt einen Impuls beschrieben, dann ist die greensche Funktion zwischen zwei Geophonen die Konvolution der Kreuzkorrelation ihrer beiden Spuren mit der Autokorrelation des Wavelets. Dies gilt für alle Quellfunktionen, insbesondere auch für Rauschen. Die Abb. 2.137b' und die

**Abb. 2.137c'** zeigen die von den Geophonen bei  $x_A$  bzw.  $x_B$  aufgezeichneten Signale. Diese werden bei  $x_S$  erzeugt von einer Quelle von bandbegrenztem Rauschen  $R(t)$ , dessen Spektrum um 30 Hz zentriert ist. Die Abbildung zeigt die ersten vier von insgesamt 160 Sekunden dieses Rauschens. Die Kreuzkorrelation der jeweils bei  $x_A$  bzw.  $x_B$  aufgezeichneten Rauschsignale ist nach Gl. 2.284 gleich  $G(x_B, x_A, t)^* \phi_{RR}(t)$ , die Impulsantwort zwischen  $x_A$  und  $x_B$ , konvolviert mit  $\phi_{RR}(t)$ , der Autokorrelation des Rauschens  $R(t)$ . In diesem Beispiel ist dies ein bandbegrenzter Impuls mit Mittelpunkt bei  $t = 0,6$  s (**Abb. 2.137d'**). Der Abstand der Geophone und die Geschwindigkeit betragen in beiden Fällen 1200 m bzw.  $2000 \text{ m s}^{-1}$ , was eine Laufzeit zwischen den Geophonen von 0,6 s ergibt. Daher sind die am Geophon bei  $x_B$  registrierten Signale in **Abb. 2.137c,c'** jeweils um 0,6 s verzögert gegenüber jenen in **Abb. 2.137b,b'** am Geophon bei  $x_A$ .

Somit bleibt festzuhalten: Aus dem an zwei Geophonpositionen aufgezeichneten Rauschen mit unbekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit aus einer unbekannten Quelle erhält man eine bandbegrenzte greensche Funktion. Division des Geophonabstands (hier: 1200 m) durch die aus dieser greenschen Funktion abgeleitete Laufzeit (hier: 0,6 s) ergibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit zwischen den beiden Geophonen (hier:  $2000 \text{ m s}^{-1}$ ). Dies verdeutlicht, wie Interferometrie der direkten Ausbreitung unkorrelierten Rauschens zur tomografischen Inversion der Geschwindigkeitsverteilung im Untergrund genutzt werden kann.

Eine ebene Welle, die sich von einer Einheitsimpulsquelle bei  $x = x_Q$  aus in negative Richtung X-Richtung ausbreitet (**Abb. 2.138a**), ergibt bei  $x = x_A$  das Signal



**Abb. 2.138** Eindimensionale seismische Interferometrie mit direkten Wellen. Links: (a) Wie in **Abb. 2.137**, jedoch mit von zwei Impulsquellen bei  $x = x_Q$  und  $x = x'_Q$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  ange regten, gleichzeitig nach rechts und links laufenden ebenen Wellen; (b) Am Geophon bei  $x = x_A$  aufgezeichnete Signale beider Impulsquellen; (c) Am Geophon bei  $x = x_B$  aufgezeichnete Signale beider Impulsquellen; (d) Kreuzkorrelationen der bei  $x_A$  und  $x_B$  aufgezeichneten Signale in (b) und (c). Rechts: Wie in **Abb. 2.137b'-d'**, jedoch mit bei  $x = x_Q$  und  $x = x'_Q$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  erzeugtem, sich gleichzeitig in positive und negative X-Richtung ausbreitendem, unkorrelierten Rauschen (nach Wapenaar et al. 2010)

$G(x_A, x'_Q, t) = \delta(t - t'_A)$ , mit  $t'_A = \frac{x'_Q - x_A}{v}$  (Abb. 2.138b). Entsprechend ist das Signal bei  $x_B$  gleich  $G(x_B, x'_Q, t) = \Delta(t - t'_B)$ , mit  $t'_B = \frac{x'_Q - x_B}{v}$  (Abb. 2.138c). Die Kreuzkorrelation beider Signale ergibt  $\Delta(t - (t'_B - t'_A)) = \delta(t + \frac{x_B - x_A}{v})$  (Abb. 2.138d). Dies ist gleich der zeitinvertierten greenschen Funktion  $G(x_B, x_A, -t)$ , also:

$$G(x_B, x_A, -t) = G(x_B, x'_Q, t) * G(x_A, x'_Q, -t). \quad (2.285)$$

Die Kombination von Gl. 2.283 und 2.285 ergibt die greensche Funktion beider Wellen:

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, t) + G(x_B, x_A, -t) &= \{G(x_B, x_Q, t) * G(x_A, x_Q, -t) \\ &\quad + G(x_B, x'_Q, t) * G(x_A, x'_Q, -t)\}. \end{aligned} \quad (2.286)$$

Die Kreuzkorrelationen der bei  $x_A$  und  $x_B$  aufgezeichneten Signale (Abb. 2.138b,c) werden als die bei  $x_B$  bzw.  $x_A$  zum Zeitpunkt  $t_A - t_B$  bzw.  $t'_B - t'_A$  aufgezeichneten Signale der bei  $x_A$  bzw.  $x_B$  erzeugten Impulsquellen interpretiert (Abb. 2.138d), also als greensche Funktion  $G(x_B, x_A, t)$  bzw.  $G(x_B, x_A, -t)$ . Die theoretisch möglichen Überkreuzterme zu den Zeitpunkten  $t'_B - t_A$  und  $t_B - t'_A$  (grau Abb. 2.138d und Abb. 2.138d') besitzen keine physikalische Bedeutung.

Dieses zunächst nur für einen eindimensionalen Kontext erzielte Ergebnis erweist sich auch in einem mehrdimensionalen Zusammenhang als hilfreich. Man beachte hierzu, dass  $G(x_B, x_A, t)$  das zu dem Impuls bei  $t = 0$  gehörige kausale Signal ist, das für  $t < 0$  verschwindet. Deshalb überschneidet es sich nicht mit  $G(x_B, x_A, -t)$ , das für  $t > 0$  verschwindet. Daher kann man  $G(x_B, x_A, t)$  als den kausalen Anteil den linken Seiten von Gl. 2.286 gewinnen. Ist die Quellfunktion ein Wavelet  $q(t)$  (statt eines Impulses) mit der Autokorrelationsfunktion  $\phi_{QQ}(t)$ , erhält man analog zu Gl. 2.284:

$$\begin{aligned} \{G(x_B, x_A, t) + G(x_B, x_A, -t)\} * \phi_{QQ}(t) &= \\ \{u(x_B, x_Q, t) * u(x_A, x_Q, -t) + u(x_B, x'_Q, t) * u(x_A, x'_Q, -t)\}. \end{aligned} \quad (2.287)$$

Zwar kann es hier je nach der Länge der Autokorrelationsfunktion  $\phi_{QQ}(t)$  zu Überschneidungen zwischen  $G(x_B, x_A, t) * \phi_{QQ}(t)$  und  $G(x_B, x_A, -t) * \phi_{QQ}(t)$  kommen, insbesondere bei kleinen Abständen  $|x_B - x_A|$ . In allen anderen Fällen erhält man jedoch  $G(x_B, x_A, t) * \phi_{QQ}(t)$  aus der linken Seite von Gl. 2.287.

Es ist wichtig, auf den rechten Seiten der Gl. 2.286 und 2.287 zunächst die Kreuzkorrelationen der zu jeder Impuls- bzw. Wavelet-Quelle gehörenden Signale zu berechnen und anschließend zu summieren. Denn diese Kreuzkorrelationen entsprechen jeweils der Impulsantwort  $G(x_B, x_A, t)$ , aufgezeichnet zum Zeitpunkt  $t$  an einem Geophon bei  $x_B$ , auf ein von  $x_A$  ausgehendes Impulssignal bzw. seiner zum Zeitpunkt  $-t$  an einem Geophon bei  $x_A$  aufgezeichneten zeitinvertierten Impulsantwort  $G(x_B, x_A, -t)$  auf ein von  $x_A$  ausgehendes Impulssignal (Abb. 2.138d). Würde man dagegen zuerst die an jedem Geophon von unterschiedlichen Impuls- bzw.

Wavelet-Quellen aus ankommenden Signale summieren und dann die Kreuzkorrelation dieser Summensignale bilden, erhielte man unphysikalische Überkreuzterme bei  $t'_B - t_A$  und  $t_B - t'_A$  (siehe Wapenaar et al. 2010).

Im Gegensatz zu den oben behandelten Impuls- bzw. Waveletquellen sind die von den Geophonen bei  $x = x_A$  und  $x = x_B$  aufgezeichnete Signale  $u(x_B, t)$  und  $u(x_A, -t)$  von in positiver bzw. negativer X-Richtung sich ausbreitendem Rauschen  $R(t)$  unkorreliert (Abb. 2.138b'-c'). Ihre Kreuzkorrelation ergibt die greensche Funktion zwischen  $x_A$  und  $x_B$  und ihre zeitinvertierte Variante, konvolviert mit der Autokorrelation des Rauschens  $\phi_{RR}(t)$  (Abb. 2.138d'):

$$\langle u(x_B, t) * u(x_A, -t) \rangle = \{G(x_B, x_A, t) + G(x_B, x_A, -t)\} * \phi_{RR}(t). \quad (2.288)$$

In dieser Gleichung stehen die spitzen Klammern für den Ensemblemittelwert, beispielsweise realisiert durch eine Integration über ein hinreichend langes Zeitintervall. Hierbei entfallen nun insbesondere die Überkreuzterme, da das Rauschen im Gegensatz zu den Impuls- bzw. Waveletquellen unkorreliert ist. Im Unterschied zur in Abb. 2.138d gezeigten Kreuzkorrelation enthält die in Abb. 2.138d' dargestellte daher keine unphysikalischen Terme mehr.

Somit ergibt sich als Zwischenergebnis der obigen Betrachtungen zur eindimensionalen Interferometrie mit direkten Wellen: (i) man kann bei der Interferometrie sowohl Impuls- oder zeitlich begrenzte Waveletquellen nutzen (Gl. 2.286 bzw. Gl. 2.287) als auch unkorreliertes Rauschen (Gl. 2.288). Im ersten Fall müssen zunächst die an den Geophonen aufgezeichneten Signale jeder Quelle miteinander kreuzkorreliert werden, wonach dann die Summe über alle Quellen gebildet wird. Im Fall von unkorreliertem Rauschen genügt die zeitliche Mittelung einer einfachen Kreuzkorrelation. (ii) Eine isotrope Bestrahlung der Geophone ist erforderlich für ein zeitsymmetrisches Signal zwischen den Geophonen, dessen kausaler Anteil das eigentliche Signal darstellt. Im eindimensionalen Fall wird dies durch gleichzeitig nach rechts und links laufende Wellen gewährleistet. In zwei bzw. drei Dimensionen erfordert dies eine Bestrahlung aus allen Richtungen.

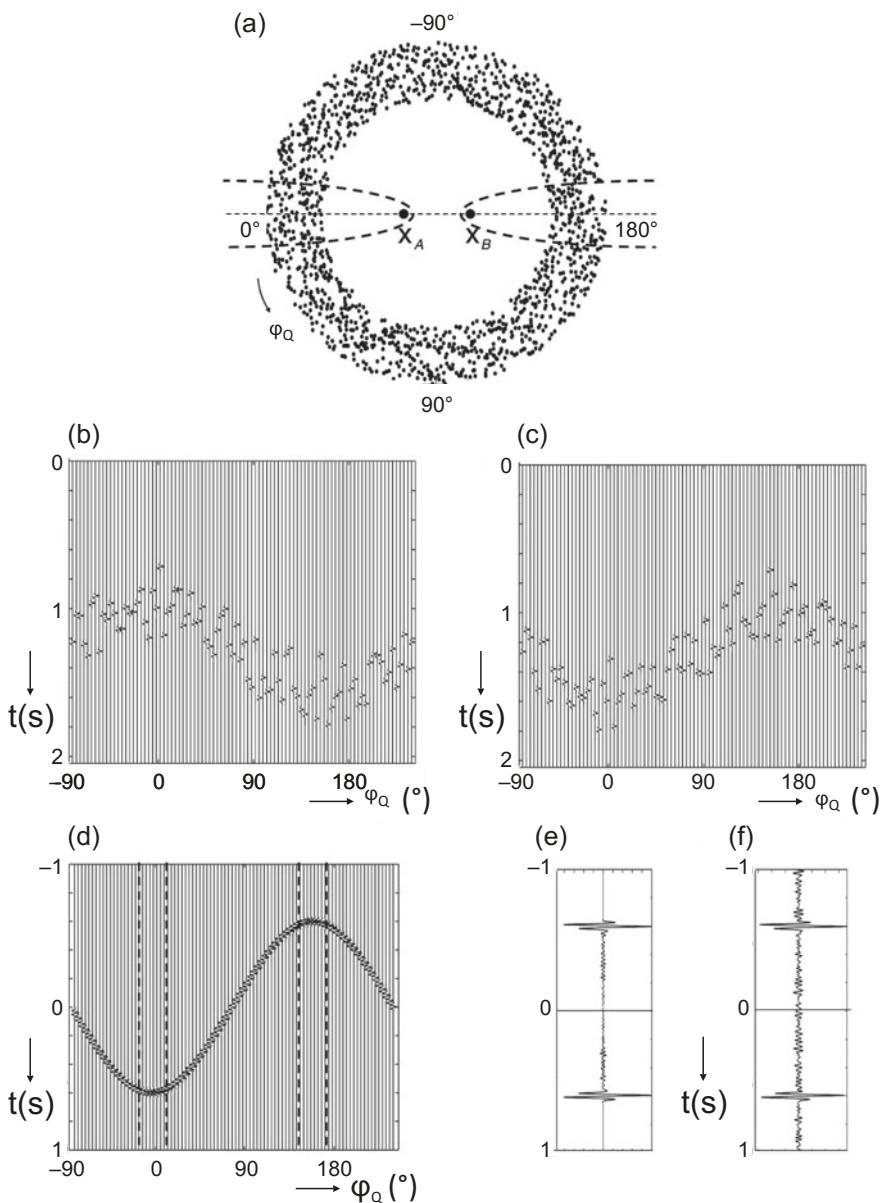
In einem zweidimensionalen Fall sollen nun zwei Geophone bei  $\vec{x}_A$  und  $\vec{x}_B$  im Abstand von 1200 m isotrop von punktförmigen, zeitlich begrenzten Waveletquellen mit einer Mittenfrequenz von 30 Hz aus allen Richtungen bestrahlt werden (Abb. 2.139a). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in diesem Beispiel beträgt  $v = 2000 \text{ m s}^{-1}$  und sei wiederum verlustfrei. Die Abb. 2.139b,c zeigen die von den Geophonen bei  $\vec{x}_A$  und  $\vec{x}_B$  aufgezeichneten Signale in Abhängigkeit von der polaren Quellkoordinate. Für jede der Punktquellen werden deren aufgezeichnete Signale kreuzkorreliert und in einer Korrelations-Spurengruppe zusammengefasst (Abb. 2.139d). Trotz des stochastischen Charakters der in Abb. 2.139b,c dargestellten Laufzeiten variieren die Laufzeiten in dieser Spurengruppe stetig mit dem Winkel  $\varphi_Q$ , da sich nur die Differenz der Laufzeiten in Richtung  $x_A$  bzw.  $x_B$  in der Kreuzkorrelation auswirkt. Insbesondere wirken die Punktquellen bei  $\varphi_Q = 0^\circ$  bzw.  $\varphi_Q = 180^\circ$  in gleicher Weise wie die Quellen ebener Wellen bei  $x_Q$  bzw.  $x'_Q$  in Abb. 2.138a und ergeben in der Kreuzkorrelation Signale bei  $|\vec{x}_B - \vec{x}_A|/v = 0,6 \text{ s}$  bzw.

$|\vec{x}_B - \vec{x}_A|/v = -0,6$  in den Spuren bei  $\varphi_Q = 0^\circ$  bzw.  $\varphi_Q = 180^\circ$  (Abb. 2.139d). Bildet man nun, analog zu Gl. 2.287, die Summe der Kreuzkorrelationen aller Spuren (Abb. 2.139e), so ergibt dies ein zeitsymmetrisches Ergebnis mit zwei Signalen bei 0,6 s und -0,6 s. Dies ist wiederum die Summe des von der Quelle bei  $\vec{x}_A$  angeregten und bei  $\vec{x}_B$  aufgezeichneten Signals und seiner zeitinvertierten Variante, also  $\{G(\vec{x}_B, \vec{x}_A, t) + G(\vec{x}_B, \vec{x}_A, -t)\}^* \phi_{QQ}(t)$ . Wiederum bezeichnet  $\phi_{QQ}(t)$  die Autokorrelationsfunktion der Waveletquelle. Wegen des beschränkten Frequenzspektrums der Wavelets tragen nicht nur die genau bei  $\varphi_Q = 0^\circ$  bzw.  $\varphi_Q = 180^\circ$  gelegenen Punktquellen zu diesem Signal bei, sondern auch die in den Fresnel-Zonen um diese Winkel gelegenen Quellen (in Abb. 2.139a,d angezeigt durch gestrichelte Linien). Außerhalb der Fresnel-Zonen interferieren die Spuren jedoch destruktiv. Daher liefern sie keinen kohärenten Beitrag zur Summenspur der Kreuzkorrelationen (Abb. 2.139e). Das Rauschen zwischen den beiden kohärenten Signalen röhrt von einer gewissen Rauigkeit in der Korrelations-Spurengruppe (Abb. 2.139d), die von der stochastischen Verteilung der Quellorte herrührt.

Ersetzt man nun wie vorher die zeitlich begrenzten Waveletquellen durch gleichzeitig wirkende Quellen von instationärem, unkorreliertem Rauschen, so erhält man analog zu Gl. 2.288  $\{G(\vec{x}_B, \vec{x}_A, t) + G(\vec{x}_B, \vec{x}_A, -t)\}^* \phi_{RR}(t)$  (Abb. 2.139f). Wiederum bezeichnet  $\phi_{RR}(t)$  die Autokorrelation des Rauschens. Wie vorher setzt die in Abb. 2.139e,f ersichtliche Symmetrie der Signale eine isotrope Bestrahlung der Geophone voraus.

Dieses Ergebnis kann auf dreidimensionale Verhältnisse übertragen werden, wenn die Fresnel-Zonen durch entsprechende Fresnel-Volumina ersetzt werden. Überdies müssen die Quellen nicht zwangsläufig primäre sein. Auch sekundäre, in einem ansonsten homogenen Untergrund eingebettete Streuzentren sind möglich. Solche Sekundärquellen sind zwar nicht unabhängig, aber die späte Coda des mehrfach gestreuten Signals ist eine gute Näherung für ein diffuses Wellenfeld. Daher finden sich im Fall weniger primärer, aber vieler sekundärer Quellen die Signaturen dieser nunmehr nur näherungsweise diffusen Quellen in der späten Coda von Seismogrammen. In diesen Fällen wird diese daher zur Gewinnung der greenschen Funktion herangezogen. Eine der verbreitetsten Anwendungen der Interferometrie mit direkten Wellen besteht in der Bestimmung von sich zwischen Seismometern bzw. Geophonen ausbreitenden Oberflächenwellen und die anschließende tomografische Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung zwischen ihnen. Im geschichteten Untergrund breiten sich Oberflächenwellen in unterschiedlichen Moden aus, wobei die Hauptmode meist das stärkste Signal besitzt. Daher kann deren greensche Funktion aus der Kreuzkorrelation aus der an zwei verschiedenen Orten aufgezeichneten natürlichen Bodenunruhe bestimmt werden. Sind mehrere Messstellen vorhanden, so kann dies mit jeder Kombination von seismischen Spuren erfolgen. Auf diese Weise kann jeder dieser Empfänger als eine virtuelle Quelle betrachtet werden, dessen Signal von allen anderen Stationen aufgezeichnet wird.

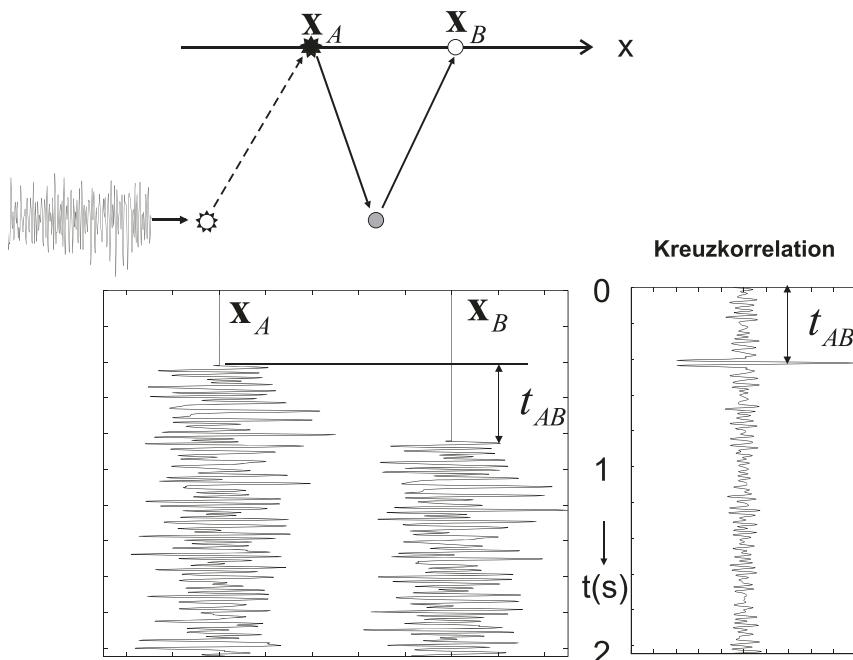
Neben direkten Wellen können auch reflektierte Wellen zur seismischen Interferometrie genutzt werden. Die Abb. 2.140 illustriert das Grundprinzip: Ausgehend von einer Quelle im Untergrund breitete sich eine instationäre seismische Raumwelle



**Abb. 2.139** Zweidimensionale seismische Interferometrie mit direkten Wellen. (a) Verteilung von Punktquellen zur isotropen Bestrahlung der Geophone bei  $\vec{x}_A$  und  $\vec{x}_B$  ( $\vec{x}$ : Ortsvektor). Die fett gestrichelten Linien begrenzen die Fresnel-Zonen. (b) Vom Geophon bei  $\vec{x}_A$  als Funktion der polaren Quellkoordinate  $\varphi_Q$  aufgezeichnetes Signal. (c) Vom Geophon bei  $\vec{x}_B$  aufgezeichnetes Signal. (d) Kreuzkorrelation der bei  $\vec{x}_A$  und  $\vec{x}_B$  aufgezeichneten Signale in (b) und (c). Die gestrichelten Linien grenzen die Fresnel-Zonen ab. (e) Die Summenspur der Kreuzkorrelationen in (d). (f) Kreuzkorrelation der von Geophonen bei  $\vec{x}_A$  und  $\vec{x}_B$  aufgezeichneten Signale von gleichzeitigem, unkorreliertem Rauschen. Die Signaldauer beträgt 9 600 s (nach Wapenaar et al. 2010)

zur Oberfläche hin aus, wo sie von einem Geophon bei  $\vec{x}_A$  aufgezeichnet wird. Von der Oberfläche wird sie wieder nach unten reflektiert, wo sie von einem Streuzentrum erneut nach oben reflektiert und von einem Geophon bei  $\vec{x}_B$  aufgezeichnet wird. Wegen des zusätzlichen Laufwegs ist die Spur des zweiten Geophons gegenüber der des ersten verzögert. Die Laufwege zu beiden Geophonen haben jedoch den Teil von der Quelle zur Oberfläche gemein. Durch Kreuzkorrelation beider Spuren entfällt dieser erste Teil (gestrichelter Pfeil in Abb. 2.140), und nur der Laufweg von der Oberfläche  $\vec{x}_A$  zum Streuzentrum und zurück zur Oberfläche bei  $\vec{x}_B$  trägt zur Kreuzkorrelation bei (durchgezogene Pfeile in Abb. 2.140). Somit kann dieses Ergebnis wiederum verstanden werden als die Reflexion einer vom Ort des ersten Geophons ( $\vec{x} = \vec{x}_A$ ) ausgehenden ( $\ast$  in Abb. 2.140) und am zweiten Geophon bei  $\vec{x} = \vec{x}_B$  aufgezeichneten seismischen Welle ( $\circ$  in Abb. 2.140).

Für multiple Reflexionen soll der Fall einer über einem Halbraum gelegenen Deckschicht betrachtet werden. Diese sowie der darunterliegende Halbraum seien homogen und verlustfrei. Von einer im Halbraum gelegenen Impulsquelle breite sich



**Abb. 2.140** Dreidimensionale seismische Interferometrie mit reflektierten Raumwellen. Oben: Unkorriertes Rauschen von einer Punktquelle wird am Geophon bei  $\vec{x}_A$  aufgezeichnet, erneut nach unten reflektiert und von dort wieder zurück an die Oberfläche reflektiert. Dort wird das Signal am Geophon bei  $\vec{x}_B$  aufgezeichnet. Unten: Die beiden Seismogrammsspuren der Geophone bei  $\vec{x}_A$  und  $\vec{x}_B$  des direkten und des im Untergrund gestreuten bzw. reflektierten Signals sowie ihre Kreuzkorrelation (von links nach rechts). Die Kreuzkorrelation der beiden Spuren ist identisch mit dem Reflexionssignal einer Impulsquelle bei  $\vec{x}_A$  (nach Wapenaar et al. 2004)

eine ebene Welle aus, die zum Zeitpunkt  $t_0$  die Oberfläche erreicht. Da sie auf ihrem Weg nach oben eine Schichtgrenze mit dem Transmissionskoeffizienten  $T$  durchlaufen hat, beträgt ihre Amplitude  $T \cdot \Delta(t - t_0)$ . Von der Oberfläche wird sie wiederum mit dem Reflexionskoeffizienten  $R = -1$  nach unten reflektiert, von wo sie mit dem Reflexionskoeffizienten  $R$  der Schichtgrenze wiederum zur Oberfläche reflektiert wird. Entsprechend beträgt die Amplitude dieses Einsatzes  $-R \cdot T \cdot \Delta(t - t_0 - \Delta t)$ . Hierbei ist  $\Delta t = 2 \cdot \Delta z/v$ ,  $\Delta z$  die Mächtigkeit der Deckschicht und  $v$  die Geschwindigkeit. Die Mehrfachreflexionen zwischen Oberfläche und Schichtgrenze bilden eine Reihe von in regelmäßigen zeitlichen Abständen  $\Delta t$  an der Oberfläche eintreffenden Impulsen, beginnend mit  $t_0$ . Ihre Amplituden betragen

$$a_0 = T, a_1 = -RT, a_2 = R^2T, a_3 = -R^3T, \dots,$$

und deren Summe bildet die Seismogrammspur  $u_T(t)$  der Mehrfachreflexion. Zur seismischen Interferometrie bildet man die Autokorrelation solcher Spuren, also  $u_T(t)^* u_T(-t)$ . Nun betrachtet man, wie Wapenaar et al. (2010), vertikal nach oben und unten laufende Wellen, die auf ihre Leistungsflussdichte normiert sind. Dann ist der Transmissionskoeffizient  $T$  definiert als die Wurzel des Produkts aus den Transmissionskoeffizienten für den Schalldruck ( $1 + R$ ) einerseits und die Partikelgeschwindigkeit ( $1 - R$ ) andererseits (siehe z. B. Brekhovskikh und Godin 1990, S. 21). Somit wird der Transmissionskoeffizient zu:

$$T = \sqrt{(1 - R)(1 + R)} = \sqrt{1 - R^2}.$$

Für eine verschwindende zeitliche Verzögerung von  $\Delta t = 0$  ergibt die Autokorrelation der seismischen Spur  $u_T(t)$  der nach oben laufenden Welle:

$$\begin{aligned} u_T(t)^* u_T(-t) &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots) \delta(t) = T^2 (1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots) \delta(t) \\ &= \frac{T^2}{1 - R^2}(t) = \delta(t)^{26}. \end{aligned}$$

Für eine nicht verschwindende zeitliche Verzögerung von  $1 \cdot \Delta t > 0$  ergibt die Autokorrelation:

$$(a_1 a_0 + a_2 a_1 + a_3 a_2 + \dots) \delta(t - \Delta t) = -RT^2 (1 + R^2 + R^4 + \dots) \delta(t - \Delta t) = -R\delta(t - \Delta t).$$

Für zeitliche Verzögerungen von  $2\Delta t$ ,  $3\Delta t$  usw. erhält man  $R^2 \cdot \Delta(t - 2\Delta t)$ ,  $-R^3 \cdot \Delta(t - 3\Delta t)$  usw. Abgesehen vom führenden Minuszeichen ergibt die Summe dieser Impulse (mit Ausnahme jenes bei  $t = 0$ ) das Signal einer von der freien Oberfläche nach unten reflektierten Welle. Folgerichtig sind die kausalen und akausalen Anteile der Autokorrelation gleich  $-u_R(t)$  bzw.  $-u_R(-t)$ . Zusammengefasst ergibt dies:

$$u_T(t)^* u_T(-t) = \delta(t) - u_R(t) - u_R(-t) \text{ oder } u_R(t) + u_R(-t) = \delta(t) - u_T(t)^* u_T(-t). \quad (2.289)$$

---

<sup>26</sup>Mit der Potenzreihenentwicklung  $(1 - R^2)^{-1} = 1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots$

Somit erhält man das Reflexionssignal aus der Autokorrelation des Transmissionssignals. Dies wird unmittelbar verständlich, wenn man bedenkt, dass das Reflexionssignal implizit in der Coda des Transmissionssignals enthalten ist. Man beachte auch die Ähnlichkeit von Gl. 2.289 mit der Gl. 2.286 für die Interferometrie mit direkten Wellen. In beiden Fällen werden die linken Seiten durch eine Summe eines kausalen Signals und seiner zeitinvertierten Variante gebildet. Sie unterscheiden sich jedoch dadurch, dass die rechte Seite von Gl. 2.286 durch die Kreuzkorrelation zweier sich gegenläufig ausbreitender Wellen gebildet wird, jene von Gl. 2.289 durch eine einzelne Autokorrelation.

## 2.7 Aufgaben und Fragen

- (1) Leiten Sie mit Hilfe der Geschwindigkeiten von Kompressions- und Scherwellen einen Ausdruck für die Poisson-Zahl her.
- (2) Bestimmen Sie die Tiefe, ab der die an der Erdoberfläche retrograd polarisierte Rayleigh-Welle prograd polarisiert ist.

Hinweis: Die Bewegungsgleichungen der Horizontal- bzw. Vertikal-komponenten  $u$  bzw.  $w$  der Rayleigh-Welle sind gegeben durch:  $u(x, z, t) = Ak \sin(kx - \omega t) (e^{-0,85kz} - 0,58e^{-0,39kz})$  bzw.  $w(x, z, t) = Ak \cos(kx - \omega t) (0,85e^{-0,85kz} - 1,47e^{-0,39kz})$  (siehe z. B.: Meskouris et al. 2007, S. 72–73). Hierbei ist die Tiefe  $z$  positiv nach unten.

- (3) Leiten Sie die Eikonalgleichung für die Scherwelle her.

In einem heterogenen Untergrund breitet sich eine Scherwelle entsprechend der Gl. 2.50 aus:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \vec{v},$$

wobei  $\vec{v}$  das Vektorpotenzial der Scherwelle ist mit  $\vec{v} = \text{rot } \vec{D} = \nabla \times \vec{D}$ , wo  $\vec{D}$  das Verschiebungsfeld ist. Die Geschwindigkeit  $\beta = \beta(\vec{r})$  der Scherwellen soll mit dem Ort variabel sein. Eine mögliche Lösung für  $\vec{v}$  ist eine harmonische Funktion der Form:  $\vec{v} = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega\tau(\vec{r})}$ , wo  $\vec{A}(\vec{r})$  der lokale Amplitudenvektor ist und  $\tau(\vec{r})$  die Laufzeitfunktion der Scherwelle. Leiten Sie hiermit die Eikonalgleichung für die Scherwelle her, und nehmen Sie dabei an, dass die Kreisfrequenz so groß ist, dass Terme mit einem Vorfaktor von  $1/\omega^2$  vernachlässigt werden können.

- (4) Leiten Sie für den Fall des senkrechten Einfalls einer elastischen Welle auf eine Grenzschicht die Ausdrücke für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $R$  bzw.  $T$  her.

Hinweis: Gehen Sie von den folgenden Beziehungen aus: (1)  $A_1 + A_2 = A_0$ ; (2)  $Z_1 A_1 - Z_2 A_2 = -Z_1 A_0$ , wobei A und Z die jeweiligen Amplituden bzw. Impedanzen bezeichnen.

**(5) Berechnen Sie die Mittelwerte  $\mu$ , Standardabweichungen  $\sigma$  und unverschobene (zero-lag) Kreuzkorrelation  $\phi_{x,y}(0)$  für die folgenden Zeitreihen  $x_i$  und  $y_i$  aus Bad Tölz und Hohenpeißenberg (Tab. 2.12 und Abb. 2.141). Weisen Sie dazu zuerst nach, dass gilt:  $\text{cov}_{x,y} = \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) / (N - 1) = \left\{ \sum_{k=1}^N (x_k y_k) - N \bar{x} \bar{y} \right\} / (N - 1)$  (siehe Fußnote 21). Entscheiden Sie dann mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten R, wie ähnlich die beiden Zeitreihen sind.**

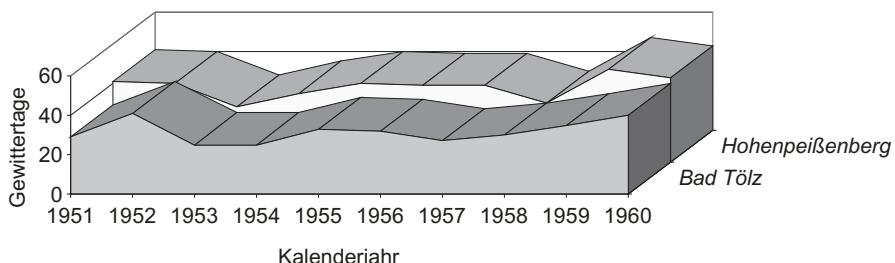
Hinweis: Der Korrelationskoeffizient R gleichlanger Reihen  $x_i$  und  $y_i$  ist definiert durch  $R = \text{cov}_{x,y} / (\sigma_x \sigma_y)$ , wo  $\sigma_x = \sqrt{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 / (N - 1)}$  die Standardabweichung ist und  $\bar{x} = \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) / N$  der Mittelwert.

## (6) Spannung im Muskel

Wie groß ist die Spannung im Bizepsmuskel (Querschnitt: 12 cm<sup>2</sup>) eines Menschen, wenn er eine Kraft von 300 N ausübt?

**Tab. 2.12** Anzahl der jährlichen Gewittertage in der Dekade 1951–1960 in Bad Tölz ( $x_i$ ) und Hohenpeißenberg ( $y_i$ ) (Daten: Schönwiese 2013)

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
Bad Tölz	29	41	25	25	33	32	27	30	35	40
Hohenpeißenberg	41	40	28	35	40	39	39	30	47	43



**Abb. 2.141** Jährliche Anzahl der in den benachbarten Wetterstationen Bad Tölz und Hohenpeißenberg beobachteten Gewittertage in der Dekade 1951–1960

Anmerkung: Die maximale Spannung, die erreicht werden kann, ist für alle Muskelfasern etwa gleich. Größere Kräfte können deshalb nur durch Muskeln mit größerem Querschnitt aufgebracht werden.

### (7) Dehnung eines Stahlseils

Eine Last von 500 kg werde von einem 3 m langen Stahlseil mit einem Querschnitt  $0,15 \text{ cm}^2$  getragen. Um wie viel längt sich das Stahlseil, wenn sein Elastizitätsmodul  $2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$  beträgt?

### (8) Elastische Eigenschaften eines Drahts

Eine Masse von 10 kg hänge vertikal an einem 1,5 m langen Draht mit einem Querschnitt von  $2,4 \text{ mm}^2$ . Unter dieser Belastung längt sich der Draht um 0,32 mm. Bestimmen Sie (a) die Spannung im Draht; (b) seine relative Längenänderung; (c) seinen E-Modul.

### (9) Gedankenexperiment zu einem Bohrlochkabel

Die Zugfestigkeit und die Dichte eines stählernen Bohrlochkabels betragen  $\sigma_{max} = 700 \text{ N mm}^{-2}$  und  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ .

- Wie lang kann das Bohrlochkabel maximal sein (gerundet auf ganze Meter), bevor es unter seinem eigenen Gewicht reißt?
- Ein Bohrlochkabel hängt im (als konstant angenommenen) Schwerefeld der Erde. Gedankenexperiment: Wie müsste ein unendlich langes Bohrlochkabel gestaltet sein, damit es unter seinem eigenen Gewicht nicht zerreißt? Von welchen Größen hängt die Zugfestigkeit des Kabels ab?
- Quantifizieren Sie die erforderliche Modifikation des Bohrlochkabels. Geben Sie hierzu eine Formel an.

### (10) Die Poisson-Zahl

Wie hängt die Poisson-Zahl von der elastischen Verformung eines Körpers ab? Geben Sie dazu den Wertebereich der Poisson-Zahl an.

### (11) Elastische Wellen im Untergrund

Nennen Sie die Arten elastischer Wellen, die sich im Untergrund ausbreiten. Wodurch können diese jeweils charakterisiert werden?

### (12) Wellengeschwindigkeiten

Von welchen elastischen Moduln hängen die P- und S-Wellengeschwindigkeiten von Gesteinen im Untergrund ab? Welche der beiden Geschwindigkeiten ist stets größer und warum?

### (13) Wellenausbreitung im porösen Medium

Wie hängt die elastische Wellengeschwindigkeit in Gesteinen von der Porosität ab, dem Quotienten aus Hohlraum- und Gesamtvolumen des Gesteins? Geben Sie eine Gleichung an für ein einfaches Modell, bei dem der Porenraum und die Gesteinsmatrix nacheinander von einer elastischen Welle durchlaufen werden.

### (14) Refraktion im Untergrund

Eine P-Welle, die mit einer Geschwindigkeit von  $\alpha_1 = 1200 \text{ m s}^{-1}$  durch ein Gestein läuft, trifft auf ein Gestein mit größeren seismischen Geschwindigkeiten  $\alpha_2 = 3800 \text{ m s}^{-1}$  und  $\beta_2 = 1900 \text{ m s}^{-1}$ . Unter welchem Winkel muss die Welle auf die Grenzfläche einfallen, damit eine P- bzw. S-Kopfwelle erzeugt wird?

### (15) Die kritische Entfernung

Leiten Sie eine allgemeine Beziehung zur Berechnung der kritischen (Minimal-) Entfernung  $x_c$  zwischen Schusspunkt und Geophon her, ab der die geführte Welle aufgezeichnet werden kann.  $x_c$  soll als Funktion der Schichtgeschwindigkeit  $v$  und Schichtmächtigkeit  $d$  angegeben werden. Eliminieren Sie hierzu die Winkelfunktionen.

### (16) Laufzeit der geführten Welle

Geben Sie eine Formel für die Laufzeit der geführten Welle zwischen Schusspunkt und Geophon an. Leiten Sie aus der Betrachtung der Strahlwege die Laufzeitgleichung für eine horizontal gelagerte Schichtgrenze ab.

### (17) Reflexion und Transmission an einer Schichtgrenze

Der Transmissionskoeffizient (bzgl. der Energie) einer Schichtgrenze betrage  $T = 0,75$ . Bestimmen Sie den Impedanzkontrast  $\delta = Z_1/Z_2$ . Vernachlässigen Sie hierbei die Absorption.

### (18) Ein negativer Reflexionskoeffizient

Unter welchen Bedingungen wird der Reflexionskoeffizient (bzgl. der Amplitude) negativ? Woran erkennt man den Vorzeichenwechsel?

### (19) Reflexion und Transmission an in Sandstein eingelagerter Tonschicht

In einem Sandstein ist horizontal eine Tonschicht eingelagert. Bestimmen Sie den Betrag des Verhältnisses der Amplituden, der an der Unterkante der Tonschicht

(Ton-Sand-Grenze) reflektierten und der auf die Ton-Sand-Grenze einfallenden Welle. Der Reflexionskoeffizient (bzgl. der Amplitude) an der Oberkante der Ton-schicht, der Sand-Ton-Grenze, beträgt  $R_{ST} = 0,25$ . Vernachlässigen Sie für die Berechnung der Amplitude die geometrische Dämpfung und die Absorption.

#### **(20) Vom fermatschen Prinzip zum snelliusschen Brechungsgesetz**

Leiten Sie aus dem fermatschen Prinzip für den Fall zweier horizontaler Schichten der Mächtigkeiten  $d_1$  und  $d_2$  mit Wellengeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  das snellius-sche Brechungsgesetz her. Betrachten Sie den Laufweg eines Strahls zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  an der Oberkante der oberen Schicht und Unterkante der unteren Schicht.

Hinweis: Betrachten Sie hierbei die Zeit in Abhängigkeit vom Ort.

#### **(21) Die $t^2-x^2$ -Methode**

Mit einem Zentralschuss (Schusspunkt bei  $x = 0$ ) und einem Geophonabstand von 50 m wurde die CMP-Spurengruppe in Abb. 2.142 aufgezeichnet.

- Bestimmen Sie die Wellengeschwindigkeit aus den ersten Einsätzen.
- Bestimmen Sie die Lotzeit und die Geschwindigkeit des Reflektors A mit der  $t^2-x^2$ -Methode und den Daten in Tab. 2.13.

#### **(22) Bestimmung der Schichtmächtigkeit**

Mit einem Zentralschuss (Schusspunkt bei  $x = 0$ ) wurde das nachstehende Seismogramm mit einem Geophonabstand von 50 m aufgezeichnet. Bestimmen Sie aus der CMP-Spurengruppe in Abb. 2.143 die verschiedenen Schichtmächtigkeiten für die Reflektoren A, B und C. Der Reflektor A ist der erste Reflektor im Seismogramm.

Hinweis: Erstellen Sie für die Ermittlung der Schichtmächtigkeit aus den Daten in Tab. 2.14 ein  $t^2-x^2$ -Diagramm, um die rms-Geschwindigkeiten und die Lotzeiten zu bestimmen.

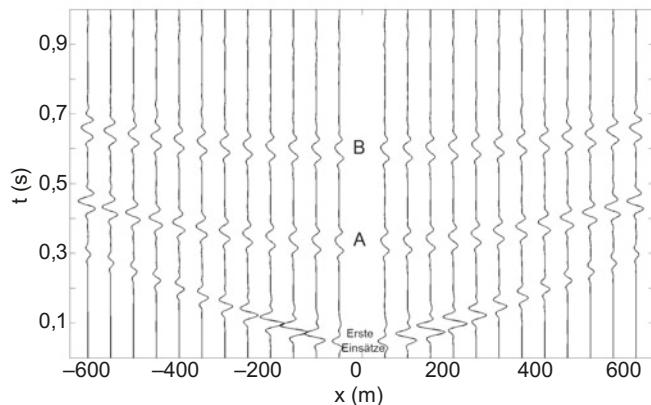
#### **(23) Mehrfachreflexionen im Seismogramm**

Wie können primäre Reflexionen von Mehrfachreflexionen unterschieden werden?

#### **(24) Ein Untergrundmodell mit Hilfe der $t^2-x^2$ -Methode**

Mit einem Zentralschuss (Schusspunkt bei  $x = 0$ ) wurde eine CMP-Spurengruppe aufgezeichnet, in deren Laufzeitdiagramm die in Abb. 2.143 gezeigten Reflexionshyperbeln zu sehen sind.

- Werten Sie das zugehörige  $t^2-x^2$ -Diagramm mit Hilfe der Daten in Tab. 2.15 aus und ordnen Sie die Reflexionshyperbeln den jeweiligen Schichtgrenzen zu.



**Abb. 2.142** CMP-Spurengruppe eines Zentralschusses mit einem Geophonabstand von 50 m

**Tab. 2.13** Daten zum Laufzeitdiagramm in Abb. 2.142 sowie zu den zugehörigen  $t^2-x^2$ -Diagrammen

x	Direkte Welle		Reflexion A		Reflexion B	
	$x^2$ (m <sup>2</sup> )	t (s)	t (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )	t (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )
50	2500	0,025	0,307 734	0,09	0,573 156	0,328 508
100	10 000	0,050	0,310 161	0,09	0,574 482	0,330 030
150	22 500	0,075	0,314 166	0,09	0,576 687	0,332 568
200	40 000	0,100	0,319 687	0,10	0,579 759	0,336 120
250	62 500	0,125	0,326 650	0,10	0,583 684	0,340 688
300	90 000	0,150	0,334 963	0,11	0,588 447	0,346 270
350	122 500	0,175	0,344 529	0,11	0,594 027	0,352 868
400	160 000	0,200	0,355 246	0,12	0,600 400	0,360 480
450	202 500	0,225	0,367 015	0,13	0,607 502	0,369 108
500	250 000	0,250	0,379 737	0,14	0,615 427	0,378 750
550	302 500	0,275	0,393 319	0,15	0,624 025	0,389 408
600	360 000	0,300	0,407 676	0,16	0,633 309	0,401 080

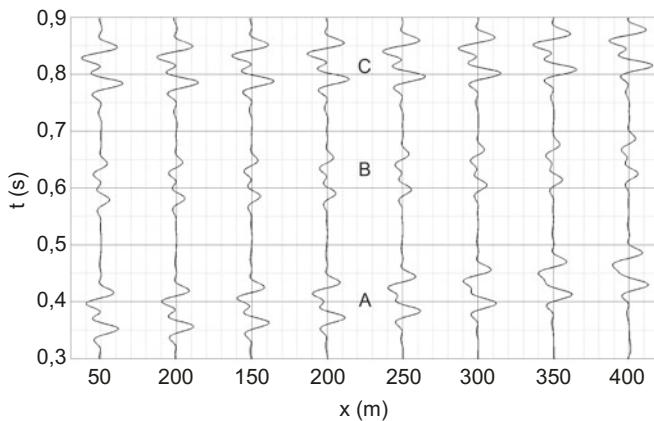
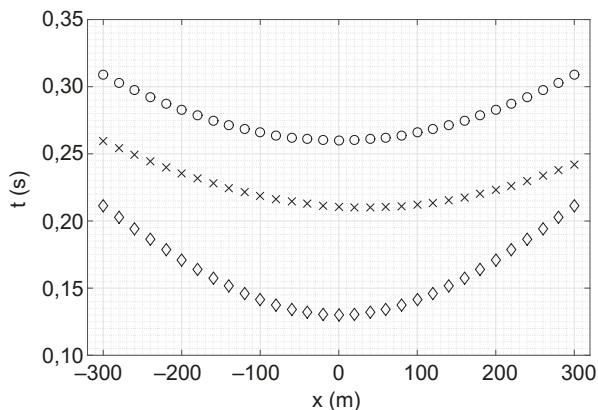
- b) Welche Parameter können aus den Diagrammen in Abb. 2.144 und 2.145 abgeleitet werden? Bestimmen Sie diese.

### (25) Marine Reflexionsseismik

Die seismischen Signale werden von Hydrophonketten aufgezeichnet, die von Schiffen unmittelbar unterhalb der Wasseroberfläche geschleppt werden.

**Tab. 2.14** Daten der Reflexionen in Abb. 2.143 sowie der zugehörigen  $t^2 - x^2$ -Diagramme

x (m)	$x^2$ (m <sup>2</sup> )	Reflektor A		Reflektor B		Reflektor C	
		t (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )	t (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )	t (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )
50	2 500	0,321 431 60	0,103 318 27	0,550 745 87	0,303 321 01	0,550 745 87	0,303 321 01
100	10 000	0,325 68 8 65	0,106 073 09	0,552 977 44	0,305 784 05	0,552 977 44	0,305 784 05
150	22 500	0,332 662 69	0,110 664 46	0,556 676 84	0,30 988 91	0,556 676 84	0,309 889 10
200	40 000	0,342 187 64	0,117 092 38	0,561 815 08	0,315 636 18	0,561 815 08	0,315 636 18
250	62 500	0,354 057 68	0,125 356 84	0,568 353 13	0,323 025 28	0,568 353 13	0,323 025 28
300	90 000	0,368 045 99	0,135 457 85	0,576 243 36	0,332 056 41	0,576 243 36	0,332 056 41
350	122 500	0,383 921 10	0,147 395 41	0,585 431 08	0,342 729 55	0,585 431 08	0,342 729 55
400	160 000	0,401 459 23	0,161 169 51	0,595 856 30	0,355 044 72	0,595 856 30	0,355 044 72

**Abb. 2.143** CMP-Spurengruppe eines Zentralschusses mit einem Geophonabstand von 50 m**Abb. 2.144** Laufzeitdiagramm einer CMP-Spurengruppe mit Reflexionshyperbeln

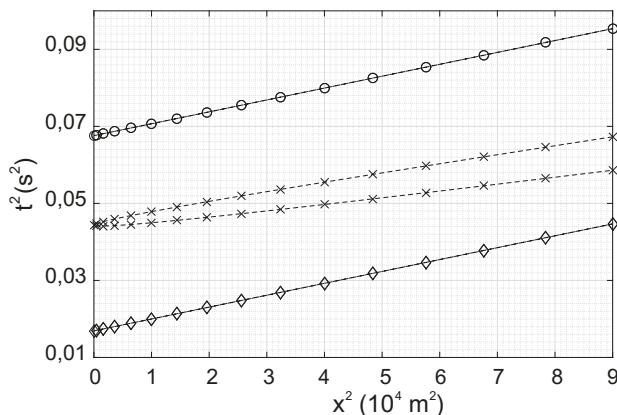
**Tab. 2.15** Laufzeitdaten der drei Reflexionshyperbeln in Abb. 2.144

	<b>Hyperbel 1</b>	<b>Hyperbel 2</b>	<b>Hyperbel 3</b>
<b>x (m)</b>	<b>t (s)</b>	<b>t (s)</b>	<b>t (s)</b>
-300	0,211 4	0,259 4	0,308 8
-280	0,202 7	0,254 2	0,303 0
-260	0,194 3	0,249 2	0,297 4
-240	0,186 2	0,244 4	0,292 2
-220	0,178 4	0,239 9	0,287 3
-200	0,171 0	0,235 6	0,282 7
-180	0,164 0	0,231 6	0,278 6
-160	0,157 5	0,227 9	0,274 8
-140	0,151 5	0,224 6	0,271 4
-120	0,146 1	0,221 5	0,268 4
-100	0,141 4	0,218 8	0,265 9
-80	0,137 4	0,216 4	0,263 8
-60	0,134 2	0,214 4	0,262 1
-40	0,131 9	0,212 7	0,260 9
-20	0,130 5	0,211 5	0,260 2
0	0,130 0	0,210 6	0,260 0
20	0,130 5	0,210 1	0,260 2
40	0,131 9	0,210 0	0,260 9
60	0,134 2	0,210 3	0,262 1
80	0,137 4	0,211 0	0,263 8
100	0,141 4	0,212 1	0,265 9
120	0,146 1	0,213 5	0,268 4
140	0,151 5	0,215 4	0,271 4
160	0,157 5	0,217 6	0,274 8
180	0,164 0	0,220 1	0,278 6
200	0,171 0	0,223 0	0,282 7
220	0,178 4	0,226 2	0,287 3
240	0,186 2	0,229 7	0,292 2
260	0,194 3	0,233 6	0,297 4
280	0,202 7	0,237 7	0,303 0
300	0,211 4	0,242 1	0,308 8

- a) Warum beobachtet man bei marinen seismischen Messkampagnen keine S-Wellen?
- b) Warum werden meist keine geführten Wellen aufgezeichnet?

#### (26) Das Auftreten der geführten Kopfwelle

An welchem Punkt tritt die Kopfwelle erstmals in einem Seismogramm auf, und wieso trifft sie in noch größerer Entfernung stets vor der Reflexion ein?



**Abb. 2.145**  $t^2$ - $x^2$ -Diagramm der Laufzeitkurve in [Abb. 2.144](#)

### (27) Schuss und Gegenschuss

Aus welchem Grund sollte man bei der Refraktionsseismik von mindestens zwei Schusspunkten aus anregen (Schuss und Gegenschuss)?

### (28) Qualitative Interpretation

Interpretieren Sie die Laufzeitkurven in [Abb. 2.146](#) qualitativ, aber so konkret wie möglich.

### Verbogene Schichten

In welchen drei Situationen kann die Refraktionsseismik eine Schicht nicht ohne Weiteres erkennen?

### (29) Signalstärke

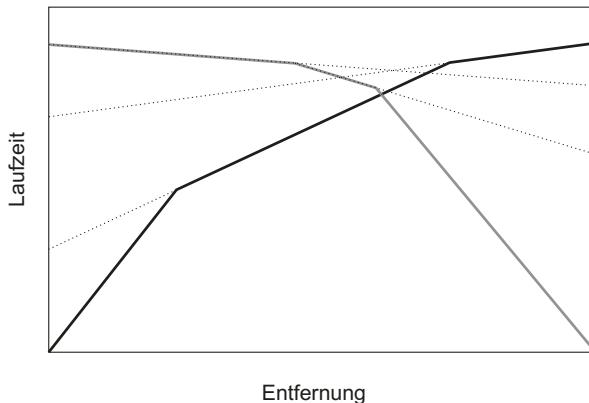
Wie verhält sich die Amplitude A einer an der Oberfläche eines homogenen Halbraums angeregten elastischen Welle mit zunehmender Entfernung von der Quelle?

### (30) Fourier-Transformation und Konvolution

Im Zeitbereich ist folgendes Signal gegeben:

$$f(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi),$$

mit  $A_1 = 1 \text{ mV}$ ,  $\omega_1 = 5 \text{ Hz}$ ,  $A_2 = 10 \text{ mV}$  und  $\omega_2 = 50 \text{ Hz}$ . Dieses Signal wird mittels Fourier-Transformation in den Frequenzbereich transformiert:  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ . Dort wird  $F(\omega)$  multipliziert mit  $H(\omega) = \{1 \text{ für } \omega \leq 25 \text{ Hz}; 0 \text{ für } \omega > 25 \text{ Hz}\}$ :  $F'(\omega) =$



**Abb. 2.146** Hypothetische Laufzeitkurven aus Schuss und Gegenschuss mit zugehörigen Interzeptzeiten (punktiert) der geführten Wellen

$F(\omega) \cdot H(\omega)$ . Anschließend wird  $F'(\omega)$  mittels inverser Fourier-Transformation zurück in den Zeitbereich transformiert:  $F'(\omega) \leftrightarrow f'(t)$ .

- Wie nennt man diese Operation (den Datenverarbeitungsschritt)? Warum werden die Daten für diesen Schritt in den Frequenzbereich transformiert?
- Wie lautet die Gleichung für  $f'(t)$ ?

### (31) Der Kutschrad-Effekt

Es geschieht manchmal, dass man die Räder einer fahrenden Kutsche sieht, und diese scheinen stillzustehen. Wie kann man diesen Effekt erklären? Warum sollte man an diesen Effekt denken, wenn man eine seismische Messkampagne plant?

---

## Weiterführende Literatur

- Aki, K., Richards, P.G.: Quantitative Seismology, 2. Aufl. University Science Books, Sausalito, CA (2002)
- Bäni, W.: Wavelets – eine Einführung für Ingenieure, 2. Aufl. Oldenbourg, München/Wien (2005)
- Blatter, C.: Wavelets – eine Einführung, 2. Aufl. Vieweg, Braunschweig; aktualisierte Online-Ausgabe (Oktober 2012), Departement Mathematik, ETH Zürich. <https://people.math.ethz.ch/~blatter/Wavelets.pdf> (2003). Zugegriffen: 29.Okt. 2016
- Buttkus, B.: Spectral Analysis and Filter Theory in Applied Geophysics. Springer, Berlin/Heidelberg (2000)
- Chopra, S., Castagna, J.P.: AVO, Investigations in Geophysics Series, 16. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK (2014)
- Gajewski, D.: Vorlesungsskript Angewandte Geophysik I, Universität Hamburg, Institut für Geophysik, <http://www.geophysics.zmaw.de/fileadmin/documents/teaching/Skripten/Skript.pdf> (2013). Zugegriffen: 19.Mai 2016

- Götze, H.-J., Mertmann, D., Riller, U., Arndt, J.: Einführung in die Geowissenschaften, 2. Aufl. UTB Bd. 2106, Eugen Ulmer, Stuttgart (2015)
- Hubbard, B.: Wavelets: Die Mathematik der Kleinen Wellen. Birkhäuser, Basel (1997)
- Hubral, P., Krey, T.: Interval Velocities from Seismic Reflection Time Measurements, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK. <http://library.seg.org/doi/book/10.1190/1.9781560802501> (1980). Zugegriffen: 29.Juli 2016
- Hübscher, C., Gohl, K.: Reflection/refraction seismology. In: Baretta-Bekker, H.J.G., Duursma, E.K., Kuipers, B.R. (Hrsg.) Encyclopedia of Marine Sciences, Springer, Berlin/Heidelberg (2014)
- Igel, H.: Computational Seismology: A Practical Introduction. Oxford University Press, Oxford (2016)
- Mallat, S.: A Wavelet Tour of Signal Processing – The Sparse Way, 3. Aufl. Academic, Burlington MA (2009)
- Mavko, G., Mukerji, T., Dvorkin, J.: The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media, 2. Aufl. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
- Meskouris, K., Hinzen, K.-G., Butenweg, C., Mistler, M.: Bauwerke und Erdbeben, 2. Aufl. Vieweg, Wiesbaden (2007)
- Oppenheim, A.V., Schafer, R.W.: Discrete-Time Signal Processing, 3. Aufl. Addison Wesley, Boston, MA (2009)
- Rabbel, W.: Seismic Methods. In: Kirsch, R. (Hrsg.) Groundwater Geophysics, 2. Aufl. S. 23–84. Springer, Berlin/Heidelberg (2009)
- Radunović, D.P.: Wavelets – From Math to Practice. Springer, Berlin/Heidelberg (2009)
- Scherbaum, F.: Of Poles and Zeros, 2. Aufl. Springer, Berlin/Heidelberg (2001)
- Schuster, G. T.: Seismic Interferometry. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
- Sheriff, R.E.: Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics, 4. Aufl. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK. [http://wiki.seg.org/wiki/Encyclopedic\\_Dictionary\\_of\\_Applied\\_Geophysics](http://wiki.seg.org/wiki/Encyclopedic_Dictionary_of_Applied_Geophysics) (2002). Zugegriffen: 29.Juli 2016
- Sheriff, R.E., Geldart, L.P.: Exploration Seismology, 2. Aufl. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- Wapenaar, K., Draganov, D., Robertsson, J.O.A. (Hrsg.) Seismic Interferometry: History and Present Status. SEG Geophysics Reprint Series, 26, Society of Exploration Geophysicists (SEG), Tulsa, OK (2008)
- Wapenaar, K., Draganov, D., Snieder, R., Campman, X, Verdel, A.: Tutorial on seismic interferometry: Part 2 – Underlying theory and new advances. Geophysics 75(5), 75A211–75A227 (2010)
- Yilmaz, Ö.: Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data, Bd. 1–2, Investigations in Geophysics Series, 10, 2. Aufl. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK. [http://wiki.seg.org/wiki/Seismic\\_Data\\_Analysis](http://wiki.seg.org/wiki/Seismic_Data_Analysis) (2001). Zugegriffen: 29. Juli 2016