1.3 测量结果的最佳值与随机误差的估算

1.3.1 随机误差的统计规律

实践和理论都证明，大部分测量的随机误差服从统计规律.误差的分布如图 01-2 所示.横坐标表示误差 $\Delta x = x - X$，纵坐标为一个与误差出现的概率有关的概率密度函数 $f(\Delta x)$.应用概率论的数学方法可导出

$$f(\Delta x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}} \qquad (01-2)$$

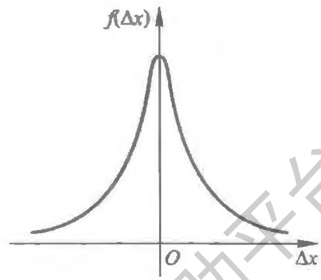

图 01-2　随机误差分布曲线

这种分布称为正态分布.式(01-2)中的特征量 σ 为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n}} \quad (n\to\infty) \qquad (01-3)$$

称为标准误差，其中 n 为测量次数.

服从正态分布的随机误差具有下面的一些特性：

(1) 单峰性　绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大.

(2) 对称性　绝对值相等的正负误差出现的概率相等.

(3) 有界性　在一定测量条件下，误差的绝对值不超过一定限度.

(4) 抵偿性　随机误差的算术平均值随着测定次数的增加而越来越趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=0$$

在测量不可避免地存在随机误差的情况下，每次测量值各有差异，那么怎样的测量值是接近真值的最佳值呢？

1.3.2 测量结果的最佳值——算术平均值

我们可以利用随机误差的上述统计特性来判断实验结果的最佳值——近真值.

设对某一物理量进行了几次精度相同(简称等精度)的重复测量,所得的一系列测量值分别为:$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$.测量结果的算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{01-4}$$

x_i 是随机变量,$\bar{x}$ 也是一个随机变量,随着测量次数 n 的增减而变化.由随机误差的上述统计特性可以证明,当测量次数 n 无限增多时,算术平均值 $\bar{x}$ 就是接近真值的最佳值.

根据误差定义有

$$\Delta x_1 = x_1 - X$$

$$\Delta x_2 = x_2 - X$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta x_n = x_n - X$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - X=\bar{x}-X$$

按随机误差的抵偿性,当 $n\to\infty$ 时$\frac{1}{n}\sum\Delta x_i\to 0$,因此 $\bar{x}\to X$.

可见测量次数越多,算术平均值越接近真值.所以,测量结果可用多次测量的算术平均值作为接近真值的最佳值.但是,测量结果的随机误差究竟是多大呢? 如何来表示呢?

1.3.3 随机误差的表示法

随机误差的大小常用标准误差、平均误差和极限误差表示.

1.3.3.1 标准误差、置信区间、置信概率

随机误差 Δ 为正态分布时,概率密度函数 $f(\Delta x)$ 由式(01-2)表示,其特征量 σ 由式(01-3)表示.σ 的物理意义如何呢?

图 01-3 是不同 σ 值时的 $f(\Delta x)$ 图线.σ 值小,曲线陡且峰值高,说明测量值的误差集中,小误差占优势,各测量值的分散性小,重复性好.反之,σ 值大,曲线较平坦,每次测量值的分散性大,重复性差.

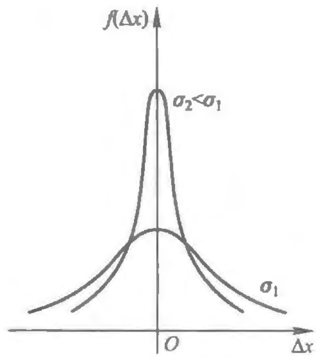

图 01-3　不同σ 值时的随机误差分布曲线

但应注意，标准误差 σ 和各测量值的误差 Δ_i 有着完全不同的含义. Δ_i 是实在的误差值，亦称真误差；而 σ 并不是一个具体的测量误差值，它反映在相同条件下进行一组测量后的随机误差出现概率的分布情况，只具有统计性质的意义，是一个统计性的特征值.

σ 表示的概率意义可以从 $f(\Delta x)$ 函数式求出. 由概率论可知，随机误差落在 $(\Delta x, \Delta x+\mathrm{d}\Delta x)$ 区间内的概率为

$$f(\Delta x)\,\mathrm{d}\Delta x$$

所以误差出现在 $(-\sigma, +\sigma)$ 区间内的概率 P 就是图 01-3 中该区间内 $f(\Delta x)$ 曲线下的面积：

$$P(-\sigma<\Delta x<+\sigma)=\int_{-\sigma}^{+\sigma} f(\Delta x)\,\mathrm{d}\Delta x$$

$$=\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-\Delta x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\Delta x=68.3\%$$

该积分值可由拉普拉斯积分表查得.

由此可见，标准误差 σ 所表示的意义是：任作一次测量，测量误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的概率为 68.3%. σ 并不是一个具体的测量误差值，它提供了一个用概率来表达测量误差的方法.

区间 $[-\sigma, +\sigma]$ 称为置信区间，其相应的概率 $P(\sigma)=68.3\%$ 称为置信概率. 显然，置信区间扩大，则置信概率提高. 置信区间取 $[-2\sigma, +2\sigma]$、$[-3\sigma, +3\sigma]$，相应的置信概率 $P(2\sigma)=95.4\%$，$P(3\sigma)=99.7\%$.

1.3.3.2　平均误差 η

定义

$$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|}{n} \tag{01-5}$$

它的概率含义是

$$P(-\eta<\Delta x<+\eta)=\int_{-\eta}^{+\eta} f(\Delta x)\,\mathrm{d}\Delta x=57.5\%$$

(即任作一次测量,测量误差落在$-\eta$ 到$+\eta$ 之间的可能性为 57.5%),它与标准误差 σ 的关系为

$$\eta=0.798\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma \tag{01-6}$$

1.3.3.3 **极限误差 δ**

定义

$$\delta=3\sigma \tag{01-7}$$

它的概率含义是

$$P(-\delta<\Delta x<+\delta)=\int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(\Delta x)\,\mathrm{d}\Delta x=99.7\%$$

它表示任作一次测量时,测量值的误差落在-3σ 到$+3\sigma$ 之间的概率为 99.7%,即在 1 000 次测量中只有 3 次测量值的误差绝对值会超过 3σ.由于在一般测量中次数很少超过几十次,因此,可以认为测量值误差超出$\pm3\sigma$ 范围的概率是极小的,故称其为极限误差.

1.3.3.4 **相对误差**

以上三种表示法可以反映随机误差大小,即可以反映测量过程中各测量值相对于平均值的离散程度。但是,它们没有反映误差与平均值大小的关系。例如,有两个测量过程 A、B,经估算标准误差 $\sigma_A=\sigma_B=0.03$ cm,而平均值 $\bar{X}_A=1.00$ cm、$\bar{X}_B=10.00$ cm,如果仅用标准误差表示结果,就不能区分这两个过程的差别。引入相对误差就可以加以区分了。

定义:相对误差是指误差与算术平均值的比值,并以百分比表示。

对以上三种误差,相应有三种相对误差:

相对标准误差: $E_\sigma=\dfrac{\sigma}{\bar{X}}\times100\%$

相对平均误差: $E_\eta=\dfrac{\eta}{\bar{X}}\times100\%$

相对极限误差: $E_\delta=\dfrac{\delta}{\bar{X}}\times100\%$

对于上述 A、B 过程有

$$E_{A\sigma}=\frac{0.03}{1.00}\times100\%=3.0\%,\quad E_{B\sigma}=\frac{0.03}{10.00}\times100\%=0.3\%$$

在第四章设计性实验中可看到运用相对误差选择仪器和进行仪器配

套的设计。

σ、η、δ 三种随机误差的表示法，其区别在于概率的大小不同.换一个其他概率值又可以有一种随机误差表示法.但是，由于真值 X 是无法测得的，所以 $\Delta x_i = x_i - X$ 也是无法计算的，σ、η、δ 均无法算出.那么如何来估算随机误差的大小呢？

1.3.4 随机误差的估算

由于无法知道真值，因而误差 Δx_i 也无法计算.但在有限次测量中的算术平均值 $\bar{x}$ 是接近真值的最佳值，且当 $n\to\infty$ 时，$\bar{x}\to X$.所以，我们可以用各次测量值与算术平均值之差——残差，来估算有限次测量中的标准误差

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{01-8}$$

v_i 是可以计算的，当用 v_i 来计算标准误差 σ 时，由误差理论可证明其计算式为

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \tag{01-9}$$

因为我们在实验中测量次数 n 总是有限的，所以就以式(01-9)的 S_x 表示测量的标准误差，但应注意的是 S_x 只是 $n\to\infty$ 时 σ 的一个估算值.

同理，按 v_i 来计算平均误差 η 时，则为

$$\eta_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i|}{n} \approx \frac{4}{5} S_x \tag{01-10}$$

而 $\delta = 3\sigma$，则为

$$\delta_x = 3S_x \tag{01-11}$$

1.3.5 平均值的标准误差

在我们进行了有限的几次测量后，可得一最佳值 $\bar{x}$，并以 S_x 来估算标准误差.这时，任一次测量值 x_i 的误差落在 $(-S_x, +S_x)$ 范围内的概率为 68.3%.但是，$\bar{x}$ 也是一个随机变量，随 n 的增减而变化，那么平均值 $\bar{x}$ 的可靠性如何呢？显然 $\bar{x}$ 肯定比任一次测量值 x_i 更可靠.由误差理论可以证明平均值 $\bar{x}$ 的标准误差为

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} \tag{01-12}$$

即平均值的标准误差是 n 次测量中任一次测量值标准误差的$\frac{1}{\sqrt{n}}$.它表示在 $(\overline{x}-S_{\overline{x}},\overline{x}+S_{\overline{x}})$ 范围内包含真值 X 的可能性是 68.3%.

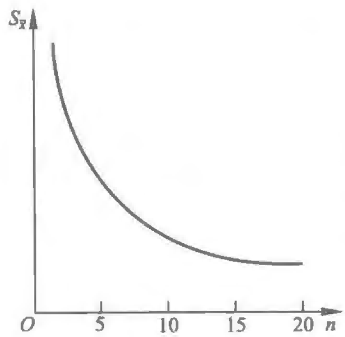

图 01-4　$S_{\overline{x}}$与 n 的关系曲线

由式(01-12)可知,随着测量次数增加 $S_{\overline{x}}$ 减小,这就是通常所说的增加测量次数可以减小随机误差.但是,由于 $n>10$ 以后 $S_{\overline{x}}$ 变化极慢(如图01-4 所示),所以实际测量次数一般不要很多.但 $n\leqslant 10$ 时,要获得 $n>10$ 时同样的置信概率,$S_{\overline{x}}$ 前应乘一因子(详见 1.6.2).