实验　单摆实验

一、实验目的

① 用单摆测定重力加速度；
② 研究随机误差的特点；
③ 学习电子停表的使用。

二、仪器用具

单摆装置，卷尺，游标卡尺，电子停表等。

三、实验原理

1. 单摆法测重力加速度

把一个金属小球拴在一根细长的线上，如图2-26所示。如果细线的质量比小球的质量小得多，小球的直径又比细线的长度小得多，则此装置可视为一个不计质量的细线系住一个质点，称为单摆。

当小球离开平衡位置时，受到指向平衡位置的切向分力 $mg\sin\theta$ 的作用，使小球围绕平衡位置做往返摆动，单摆的运动方程为

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta \tag{1}$$

当摆角 θ 很小(例如 $\theta < 5°$)时，$\sin\theta \approx \theta$，则上式成为常见的简谐运动方程

$$ml \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

式中 $\omega^2 = \frac{g}{l}$，ω 称为圆频率，ω 与周期 T 的关系为 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$。

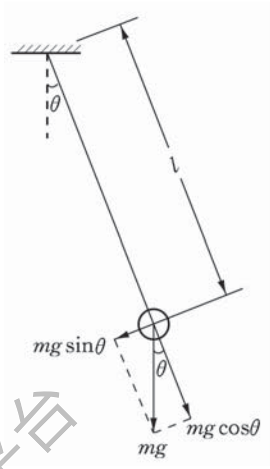

图 2-26　单摆法测重力加速度示意图

所以有

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \tag{2}$$

式中 l 为单摆摆长，即悬点到球心的距离，g 为重力加速度。若测得 l 和 T，便可计算得 g，这是粗略测量重力加速度的简便方法。

2. 随机误差的研究

保持单摆的摆长与摆角不变，重复测量单摆启动后的第一个摆动周期，为了研究单摆周期测量的随机误差的统计规律，除了保持实验条件不变外，测量值愈多愈好。将周期 T 的大量测量值按等间距法分组，以周期 T 为横坐标，以落入各组的周期测量次数为纵坐标，作数据分布的直方图。研究单摆周期测量值的直方图是否属于正态分布。

四、数据记录与处理

1. 测量重力加速度

(1)测量单摆摆长(数据记录表格自拟)

取单摆长 l 约为 100 cm，用卷尺测量悬点到小球处于悬垂态的最低点 A 的距离 l_1(重复测量 5 次)，用游标卡尺测量小球直径 d(测量 1 次即可，这是为什么?)。由图 2-27 可知摆长为

$$\bar{l} = \bar{l}_1 - \frac{d}{2}$$

$$\Delta l = \Delta\bar{l}_1 + \frac{1}{2}\Delta d$$

$$l = \bar{l} \pm \Delta l$$

$$E_l = \frac{\Delta l}{l}$$

(2)测量周期

使单摆振幅不要太大($\theta < 5°$),测量启动后摆动 20 次所需的时间 t,在测量周期时,选择摆球通过最低点开始计时,为了避免视差,在标尺中央位置设有平面反射镜(上有竖直红色刻线),每当摆线、刻线、镜中摆线像三者重合时开始计时,保持单摆起始条件不变,重复测量 5 次。

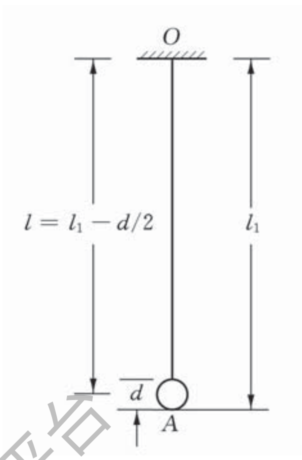

图 2-27　测量单摆摆长示意图

由式(2)计算 g 并估算误差,计算时不必求出周期 T。即

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2 l}{\left(\frac{t}{20}\right)^2} = \frac{16\pi^2 l}{t^2} \times 10^2$$

$$E_g = E_l + 2E_t = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta t}{t}$$

$$g = \bar{g} \pm \Delta g$$

2. 随机误差的研究

(1)测量周期(数据记录表格自拟)

保持单摆摆长、摆幅(角)不变,重复启动 200 次,每次测量启动后的第一个周期值。

(2)数据分组

根据所测周期数据的情况,每隔 0.01 秒进行数据分组。

(3)画统计直方图

按数据分组画出 $n-T$ 直方图,例如 1.01 秒组为 7 次,则 $T=1.01$,$n=7$,画直方图时,以 1.01 秒为中值,上下界为 ± 0.005 秒,依此类推。

(4)研究统计规律

由统计直方图总结单摆周期测量的统计规律。

3. 作图求值

改变摆长 l、测量不同摆长的单摆周期 T(测第一个摆动周期),共测 10 对以上数据,作 $l-T^2$ 图,由图线求出 g。

五、思考题

①为什么测量周期时,一般要测量多个周期的总时间 t,然后除以周期数?

②若要求 g 的测量误差 $E_g \leqslant 0.1\%$，摆长 $l \approx 1$ m，用钢卷尺测量(额定误差为 ± 0.02 mm)，周期 T 用电子秒表测量(额定误差为 ± 0.01 秒)，测量者按按钮的误差假设为 0.2 秒，问：一次计时应测多少周期才合适？

③单摆法测 g，若要进一步提高测量精度可能吗？此法的测量精确度受哪些因素的限制？

附　　单摆周期与摆幅的关系研究

一、实验目的

①观测单摆周期与摆幅的关系；

②用差值法处理数据；

③学习精密测量的系统误差修正。

二、仪器用具

单摆装置、数字毫秒计、物理天平、米尺、游标卡尺等。

三、实验原理

1. 单摆周期与摆幅的关系

根据振动理论，摆长为 l 的单摆，其摆动周期 T 与摆角 θ 的关系为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \cdots\right) \tag{1}$$

式中 g 为当地的重力加速率，取零级近似为

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

取二极近似为

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{3}$$

本实验通过二极近似公式的验证来研究单摆周期与摆幅的关系。为此，将式(3)改写为

$$T_2 = T_0 + \frac{T_0}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

对于摆幅 θ_i 有

$$T_{2i} = T_0 + \frac{T_0}{4}\sin^2\frac{\theta_i}{2}$$

对于摆幅 θ_k 有

$$T_{2k}=T_0+\frac{T_0}{4}\sin^2\frac{\theta_k}{2}$$

略去二极近似的下标，将上面两式相减可得

$$T_k-T_i=\frac{T_0}{4}\left(\sin^2\frac{\theta_k}{2}-\sin^2\frac{\theta_i}{2}\right) \tag{4}$$

式(4)中的 k，i 是任意的，只要通过实验证明

$$\frac{T_k-T_i}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}-\sin^2\frac{\theta_i}{2}}=E(\text{常数})$$

且有关系

$$E=\frac{T_0}{4}$$

则式(3)成式。

2. 系统误差的修正

从测量公式本身往往看不出系统误差的存在，但从理论和方法方面考查却存在下述系统误差，需要逐项分析进行修正。

(1)复摆的修正

单摆公式(2)中，摆球假定为质点，即不计摆球体积和不计摆线的质量。实际上任何一个单摆都是复摆，见图 2-28。在不计空气阻力和浮力时，由转动定理有

$$-mgl\sin\theta-\frac{m_0g}{2}(l-r)\sin\theta$$

$$=\left[\frac{2}{5}mr^2+ml^2+\frac{1}{3}m_0(l-r)^2\right]\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{5}$$

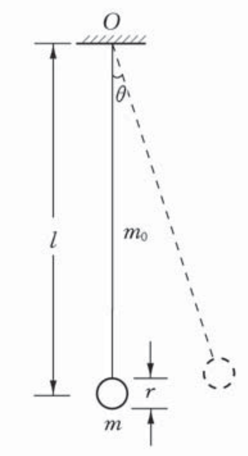

图 2-28　单摆

式中 m 为摆球质量，m_0 为摆球悬线质量，l 为悬点 O 到球心的距离，$(l-r)$ 为悬线长度，$\frac{2}{5}mr^2+ml^2$ 为摆球对 O 轴的转动惯量，$\frac{1}{3}m_0(l-r)^2$ 为悬线对 O 轴的转动惯量。当 θ 很小时，$\sin\theta\approx\theta$，式(5)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl+\frac{m_0g}{2}(l-r)}{ml^2\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}+\frac{1}{3}\frac{m_0}{m}\frac{(l-r)^2}{l^2}\right]}\theta=0 \tag{6}$$

式(6)为简谐振动方程,此复摆做简谐振动,其周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}+\frac{1}{3}\frac{m_0}{m}\left(1-\frac{2r}{l}+\frac{r^2}{l^2}\right)\right]}{g\left[1+\frac{1}{2}\frac{m_0}{m}\left(1-\frac{r}{l}\right)\right]}}$$

考虑 $r\ll l$,$m_0\ll m$,利用多项式除法,略去高次项有

$$T\approx 2\pi\sqrt{\frac{l\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{6}\frac{m_0}{m}-\frac{1}{6}\frac{m_0}{m}\frac{r}{l}-\frac{1}{12}\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right]}{g}} \tag{7}$$

与式(2)比较,式(7)可看作对摆长 l 的修正,即

$$l'=l\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{6}\frac{m_0}{m}\left(1+\frac{r}{l}+\frac{m_0}{2m}\right)\right] \tag{8}$$

将式(7)移项后,利用二项式展开,可得

$$T\left[1-\frac{1}{5}\frac{r^2}{l^2}+\frac{1}{12}\frac{m_0}{m}\left(1+\frac{r}{l}+\frac{m_0}{2m}\right)\right]=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

与式(2)比较,式(9)可看作是对周期 T 的修正。即

$$T'=T\left[1-\frac{1}{5}\frac{r^2}{l^2}+\frac{1}{12}\frac{m_0}{m}\left(1+\frac{r}{l}+\frac{m_0}{m}\right)\right] \tag{10}$$

考虑复摆的修正,重力加速度 g 的测量公式由式(7)变为

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{6}\frac{m_0}{m}\left(1+\frac{r}{l}+\frac{m_0}{2m}\right)\right] \tag{11}$$

(2)浮力的修正

若考虑空气浮力,式(5)左边应多一项 $\rho_0 Vgl\sin\theta$,其中 ρ_0 为空气密度(近似为 $1.3\times10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$),$V=\frac{m}{\rho}$。$\rho$ 为摆球物质的密度,V 为摆球体积,作浮力修正后,式(11)变为

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{6}\frac{m_0}{m}\left(1+\frac{r}{l}+\frac{m_0}{2m}\right)+\frac{\rho_0}{\rho}\right] \tag{12}$$

(3)摆角的修正

单摆以摆角 θ 摆动时,由式(3)有

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\approx \frac{4\pi^2 l}{T^2}\left(1+\frac{1}{8}\theta^2\right) \tag{13}$$

(4)阻尼的修正

单摆摆动时，由于空气具有黏滞阻力，使其摆动周期增大，单摆实际上做阻尼振动，但由于空气黏滞阻力对单摆周期的影响从理论上难以估算，实验上也难以测定，因此不予讨论。

将上述三项修正合并，有

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}\left[1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}-\frac{1}{6}\frac{m_0}{m}\left(1+\frac{r}{l}+\frac{m_0}{2m}\right)+\frac{\rho_0}{\rho}+\frac{1}{8}\theta^2\right] \tag{14}$$

例如，设测得 $m\approx 100$ g，$m_0=0.5$ g，$l\approx 100$ cm，$r=2$ cm，$\theta=3^\circ$，$\rho\approx 7.8$ g/cm^3，$\rho_0\approx 1.3\times 10^{-3}$ g/cm^3，则根据式(14)有

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}[1+0.00016-0.00083(1+0.02+0.0025)+0.00016+0.00032]$$

$$=\frac{4\pi^2 l}{T^2}(1-0.00021)$$

由此可见，修正项的总和约为万分之几。若要求 g 达到 4 位有效数字，则应考虑修正项，要求的准确度越高，要考虑的修正项就越多，与此同时，l 和 T 的测量要求也更高。

四、实验内容及要求

1. 测量单摆周期与摆幅的关系

①周期用数字毫秒计测量，将光电门(做成狭缝形状)置于单摆小球挡光针处，让单摆自由摆动时，挡光针能使数字毫秒计计时。

②测量周期时，可以测量 1 个周期，也可以测量几个周期，但不宜太多，以免摆幅衰减太大。

③摆角可以直接读出，也可以通过摆球的最大水平位移 S 来换算，若测几个周期，因为有衰减，应以测量期间的平均值计算。

④测量 10 组数据，根据式(3)，由于 T 与 θ 的关系不是线性的，而且很难使 θ 等间距变化，故将 10 组数据分成两大组，用差值法处理数据。例如，对应于摆球最大水平位移 S_i 的摆幅为 θ_i，周期为 T_i，令 $B_i=\sin^2\dfrac{\theta_i}{2}$，$C_j=B_{i+5}-B_i$，$D_j=T_{i+5}-T_i$，则 $E_j=\dfrac{D_j}{C_j}$。

⑤根据式(4)计算 E 并与理论值进行比较，说明产生偏离的原因。

2. 测量 g

用单摆测重力加速度，做复摆、浮力、摆角等修正。

五、思考题

挡光杆是否一定要装在摆球的正下方？挡光杆的粗细对测量结果有无影响？