1.5 间接测量的误差传递

直接测量的结果有误差，由它的测得值经过运算而得到的间接测量的结果也会有误差.这就是误差的传递.

1.5.1 误差的一般传递公式

设间接测量量 N 与各独立的直接测量量 $x,y,\cdots$有以下函数关系：

$$N=f(x,y,\cdots)$$

若直接测量的各值分别有误差 $\Delta x,\Delta y,\cdots$，则待测量 N 就会有误差 ΔN.对以上关系式求全微分：

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\cdots$$

由于 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\cdots$相对 $x,y,\cdots$是一个很小量，在上式中以 $\Delta x,\Delta y,\cdots$代替 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\cdots$，则间接测量的误差 ΔN 为

$$\Delta N=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\cdots$$

若取自然对数

$$\ln N=\ln f(x,y,\cdots)$$

后再求全微分,可得

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{f}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{f}+\cdots$$

同理可得

$$\frac{\Delta N}{N}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{f}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{f}+\cdots$$

1.5.2 标准误差的传递公式

设间接测量量 N 与各独立的直接测量量 $x,y,\cdots$有下列函数关系:

$$N=f(x,y,\cdots)$$

若每一直接测量量都在同样条件下进行了 n 次测量,在考虑随机误差的情况下,结果为

$$\bar{x}\pm\sigma_x,\quad \bar{y}\pm\sigma_y,\cdots$$

由于误差是微小的量,因此由数学中全微分公式可以得到每次测量的 ΔN_i 为

$$\Delta N_i=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y_i+\cdots$$

等式两边各自平方,再将 n 次测量的$(\Delta N_i)^2$ 相加,得

$$\begin{aligned}\sum(\Delta N_i)^2=&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\sum(\Delta x_i)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\sum(\Delta y_i)^2+\cdots+\\&2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sum(\Delta x_i)(\Delta y_i)+\cdots\end{aligned}\tag{01-15}$$

$x,y,\cdots$是相互独立的,各次测量中的 $\Delta x_i,\Delta y_i,\cdots$各自互不相关地时正时负、时大时小,因此当测量次数 n 足够多时,上式中各交叉乘积项的和等于零,即

$$\sum(\Delta x_i)(\Delta y_i)=0$$

将式(01-15)两边除以 n,得

$$\frac{1}{n}\sum(\Delta N_i)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{1}{n}\sum(\Delta y_i)^2+\cdots$$

式中,$\frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2=\sigma_x^2,\frac{1}{n}\sum(\Delta y_i)^2=\sigma_y^2,\cdots$是各直接测量量的标准误差的平方,标准误差的传递公式为

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\sigma_y^2+\cdots}\tag{01-16}$$

间接测量量的标准误差可用此公式计算得到.式(01-16)不仅可以用来计算间接测量量 N 的标准误差,而且还可用来分析各直接测量量的误差对最后结果的误差的影响大小,从而为改进实验提出了方向.在设计一项实验时,还能为合理地组织实验、选择仪器提供必要的依据.这部分将在第四章中讨论.表 01-4 中列出了一些常用函数的标准误差传递公式.

表 01-4 常用函数的标准误差传递公式

函数表达式	标准误差传递公式
$N=x\pm y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x\cdot y$ 或 $\frac{x}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=kx$	$\sigma_N=\lvert k\rvert\sigma_x;\frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$
$N=x^n$	$\frac{\sigma_N}{N}=n\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\sqrt[n]{x}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\frac{x^p y^q}{z^r}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{p^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+q^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+r^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x}$

1.5.3 有限次测量的间接测量标准误差

在对 $x,y,\cdots$ 进行有限次测量的情况下,间接测量值为

$$\overline{N}=f(\overline{x},\overline{y},\cdots)$$

各直接测量量的标准误差分别由 $S_{\overline{x}},S_{\overline{y}},\cdots$ 估算.$\overline{N}$ 的标准误差 $S_{\overline{N}}$ 为

$$S_{\overline{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2S_{\overline{x}}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2S_{\overline{y}}^2+\cdots} \tag{01-17}$$