

1.6.1 不确定度

不确定度是建立在误差理论基础上的一个新概念,是误差的数字指标.它表示由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度,即测量结果不能肯定的误差范围.每个测量结果总存在着不确定度,作为一个完整的测量结果不仅要标明其量值大小,还要标出测量不确定度,以表明该测量结果的可信赖程度.

由于误差来源众多,测量结果不确定度一般包含几个分量.为了估算方便,按估计其数值的不同方法,它可以分为 A、B 两类分量.

A 类分量是能用统计方法计算出的标准误差,用符号 S_i 表示.

B 类分量是能用其他方法估计出来的“等价标准误差”,用符号 u_j 表示.

采用不确定度表示误差范围,改变了以往测量误差分系统误差和随机误差的传统处理方法.它在将可修正的系统误差修正后,将余下的全部误差划分为 A、B 两类分量,且均以标准误差形式表示.

下面介绍 A、B 两类分量简化的具体估算方法.

1.6.2 不确定度的简化估算方法

1.6.2.1 测量次数 $n \leq 10$ 时 A 类分量的估算

由 1.3.1 小节可知,测量次数 $n \rightarrow \infty$ 时,随机误差呈现式(01-2)表征的正态分布.我们可用 $S_{\bar{x}}$ 来估算测量结果的标准误差,因此,在不确定度表示中,可以把它作为 A 类分量.

对有限次测量,由误差理论可知,要得到与无限次测量相同的置信概率, A 类分量应在 $S_{\bar{x}}$ 前乘一因子 $t_p(n-1)$,即 A 类不确定度为

$$S = t_p(n-1) S_{\bar{x}} \quad (01-18)$$

因子 $t_p(n-1)$ 的值,在置信概率 P 及测量次数 n 确定后,可从专门的数学表中查到.在置信概率 $P=0.683$ 时,相应的部分 n 与 $t_p(n-1)$ 的数值,如表 01-5 所示.

表 01-5 $P=0.683$ 时,不同测量次数下 $t_p(n-1)$ 的值

测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
自由度 $\nu=n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_{0.683}(n-1)$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06

1.6.2.2 B类分量的简化估算

B类不确定度原则上应考虑影响量的各种可能值,作为基础训练,我们简化处理,主要考虑仪器误差限的“等价标准误差”。

由1.4.2小节可知,当仪器误差的概率密度函数遵循正态分布时,其“等价标准误差” $\sigma_{\text{仪}} = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{3}$ ($P=0.683$),此时B类分量为

$$u_j = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}} \quad (P=0.683) \quad (01-19a)$$

对于均匀分布,因为 $\sigma_{\text{仪}} = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{3}$,且置信概率 $P=0.577$,要得到 $P=0.683$ 的置信概率,应乘上系数 $0.683/0.577$,即对于均匀分布, $P=0.683$ 的B类分量为

$$u_j = \left(\frac{0.683}{0.577} \right) \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}} = 0.683 \Delta_{\text{仪}} \quad (P=0.683) \quad (01-19b)$$

1.6.3 合成不确定度

最后测量结果的不确定度,应将A、B类分量合成。在A类、B类分量各只有一个以标准误差形式表示的、互相独立的分量 S_1 和 u_1 的简单情况下,合成不确定度 U 为

$$U = \sqrt{S_1^2 + u_1^2} \quad (01-20)$$

在本课程教学实验中,对一个物理量,一般在相同条件下测量次数 $n \leq 10$,A类分量为 $S_1 = t_{0.683}(n-1)S_{\bar{x}}$;B类分量简单地只考虑仪器误差,并取正态分布 $u_1 = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{3}$ ($P=0.683$);均匀分布 $u_1 = 0.683\Delta_{\text{仪}}$,合成不确定度

$$U = \sqrt{\left[t_{0.683}(n-1)S_{\bar{x}} \right]^2 + \left(\frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}} \right)^2} \quad (P=0.683, \text{B类正态分布}) \quad (01-21a)$$

或

$$U = \sqrt{\left[t_{0.683}(n-1)S_{\bar{x}} \right]^2 + (0.683\Delta_{\text{仪}})^2} \quad (P=0.683, \text{B类均匀分布}) \quad (01-21b)$$

最后结果写成

$$(\bar{x} \pm U) \quad (P=0.683) \quad (01-22)$$

若要置信概率提高到 $P=0.95$,应取 $U = 1.96\sqrt{S_1^2 + u_1^2}$,此时在表示最后结果时,括号中的置信概率通常省略不写。

对间接测量 $N=f(x, y, \dots)$,设各直接测量结果为 $\bar{x} \pm U_x, \bar{y} \pm U_y, \dots$,则间接测量的结果 $\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$,不确定度 U_N 可套用标准误差传递公式

(01-17)进行估算.最后结果写成 $\bar{N} \pm U_N(P)$.

1.6.4 测量结果有效数字取舍原则

不确定度一般保留 1~2 位数字,当首位数字等于或大于 3 时,取一位;小于 3 时,则取两位,其后面的数字采用进位法.例如:计算结果得到不确定度为 $0.2414 \times 10^{-3} \text{ m}$,则应取 $U = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$.

测得值取几位,由不确定度来决定.即测得值的保留位数与不确定度的保留位数相等,后面的尾数则采用“小于 5 舍,大于 5 进,等于 5 将保留的数字凑成偶数”的原则取舍.若上例中测得最佳值为 $\bar{x} = 46.175 \times 10^{-3} \text{ m}$,则最后结果表述为 $x = (46.18 \pm 0.25) \times 10^{-3} \text{ m} (P = 0.683)$.

【例 1】 使用 0~25 mm 的一级螺旋测微器($\Delta_{\text{仪}} = 0.004 \text{ mm}$)测量钢球的直径 d (同一方位),测得的数据如表 01-6 所示,求测量的结果($\bar{d} \pm U$)(P).

表 01-6 螺旋测微器测量钢珠直径

测量序号	初读数 x_1/mm	末读数 x_2/mm	直径 $d = (x_2 - x_1)/\text{mm}$
1	0.004	6.002	5.998
2	0.003	6.000	5.997
3	0.004	6.000	5.996
4	0.004	6.001	5.997
5	0.005	6.001	5.996
6	0.004	6.000	5.996
7	0.004	6.001	5.997
8	0.003	6.002	5.999
9	0.005	6.000	5.995
10	0.004	6.000	5.996

【解】 计算直径的算术平均值得 $\bar{d} = 5.9967 \text{ mm}$,计算平均值的标准误差

$$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = 0.00037 \text{ mm}$$

由 $P = 0.683, n = 10$,及 $\nu = n - 1 = 9$,查表 01-5 可知 $t_{0.683}(10-1) = 1.06$,计算得 A 类分量为

$$S_1 = t_{0.683}(n-1) S_{\bar{d}} = 0.00039 \text{ mm}$$

仪器误差为均匀分布 $\Delta_{\text{仪}} = 0.004 \text{ mm}$,故 B 类分量为

$$u_1 = 0.683 \Delta_{\text{仪}} = 0.00273 \text{ mm}$$

合成不确定度为

$$U = \sqrt{s_1^2 + u_1^2} = 0.002\ 76\ \text{mm}$$

取 0.002 8 mm, 测量结果为

$$d = (5.996\ 7 \pm 0.002\ 8)\ \text{mm} \quad (P = 0.683)$$

相对误差

$$E = \frac{0.002\ 8}{5.996\ 7} = 0.05\%$$

【例 2】单摆法测定重力加速度实验中, 测得周期 $T = (2.014 \pm 0.003)\ \text{s}$, 摆长 $L = (1.002 \pm 0.002)\ \text{m}$, 它们的置信概率 P 均为 0.683. 计算重力加速度 $\bar{g} \pm U_g$.

【解】因为 $g = f(L, T) = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$, 所以

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{L}}{\bar{T}^2} = 9.752\ 3\ \text{m/s}^2$$

由误差传递公式可得

$$U_g^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2 U_L^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 U_T^2$$

式中, $\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2}$, $\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3}$, 从而得

$$\left(\frac{U_g}{\bar{g}}\right)^2 = \left(\frac{U_L}{\bar{L}}\right)^2 + \left(2\frac{U_T}{\bar{T}}\right)^2$$

代入各数据得

$$\frac{U_g}{\bar{g}} = 4.2 \times 10^{-3}$$

$$U_g = 0.042\ \text{m/s}^2 \approx 0.05\ \text{m/s}^2$$

重力加速度测得结果为

$$g = \bar{g} \pm U_g = (9.75 \pm 0.05)\ \text{m/s}^2 \quad (P = 0.683)$$

4

$$E = \frac{0.05}{9.75} = 0.5\%$$