### 1.6.1 不确定度

不确定度是建立在误差理论基础上的一个新概念，是误差的数字指标.它表示由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，即测量结果不能肯定的误差范围.每个测量结果总存在着不确定度，作为一个完整的测量结果不仅要标明其量值大小，还要标出测量不确定度，以表明该测量结果的可信赖程度.

由于误差来源众多，测量结果不确定度一般包含几个分量.为了估算方便，按估计其数值的不同方法，它可以分为 A、B 两类分量.

A 类分量是能用统计方法计算出的标准误差，用符号 $S_i$ 表示.

B 类分量是能用其他方法估计出来的“等价标准误差”，用符号 $u_j$ 表示.

采用不确定度表示误差范围，改变了以往测量误差分系统误差和随机误差的传统处理方法.它在将可修正的系统误差修正后，将余下的全部误差划分为 A、B 两类分量，且均以标准误差形式表示.

下面介绍 A、B 两类分量简化的具体估算方法.

### 1.6.2 不确定度的简化估算方法

#### 1.6.2.1 测量次数 $n \leqslant 10$ 时 A 类分量的估算

由 1.3.1 小节可知，测量次数 $n \to \infty$ 时，随机误差呈现式(01-2)表征的正态分布.我们可用 $S_{\bar{x}}$ 来估算测量结果的标准误差，因此，在不确定度表示中，可以把它作为 A 类分量.

对有限次测量，由误差理论可知，要得到与无限次测量相同的置信概率，A 类分量应在 $S_{\bar{x}}$ 前乘一因子 $t_P(n-1)$，即 A 类不确定度为

$$S = t_P(n-1)S_{\bar{x}} \tag{01-18}$$

因子 $t_P(n-1)$ 的值，在置信概率 $P$ 及测量次数 $n$ 确定后，可从专门的数学表中查到.在置信概率 $P=0.683$ 时，相应的部分 $n$ 与 $t_P(n-1)$ 的数值，如表 01-5 所示.

表 01-5　$P=0.683$ 时，不同测量次数下 $t_P(n-1)$ 的值

| 测量次数 $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 自由度 $\nu=n-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $t_{0.683}(n-1)$ | 1.84 | 1.32 | 1.20 | 1.14 | 1.11 | 1.09 | 1.08 | 1.07 | 1.06 |

### 1.6.2.2 B 类分量的简化估算

B 类不确定度原则上应考虑影响量的各种可能值，作为基础训练，我们简化处理，主要考虑仪器误差限的“等价标准误差”.

由 1.4.2 小节可知，当仪器误差的概率密度函数遵循正态分布时，其“等价标准误差”$\sigma_{仪}=\Delta_{仪}/3$($P=0.683$)，此时 B 类分量为

$$u_j=\frac{\Delta_{仪}}{3}\quad(P=0.683)\tag{01-19a}$$

对于均匀分布，因为 $\sigma_{仪}=\Delta_{仪}/\sqrt{3}$，且置信概率 $P=0.577$，要得到 $P=0.683$ 的置信概率，应乘上系数 0.683/0.577，即对于均匀分布，$P=0.683$ 的 B 类分量为

$$u_j=\left(\frac{0.683}{0.577}\right)\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=0.683\Delta_{仪}\quad(P=0.683)\tag{01-19b}$$

### 1.6.3 合成不确定度

最后测量结果的不确定度，应将 A、B 类分量合成.在 A 类、B 类分量各只有一个以标准误差形式表示的、互相独立的分量 $S_1$ 和 $u_1$ 的简单情况下，合成不确定度 $U$ 为

$$U=\sqrt{S_1^2+u_1^2}\tag{01-20}$$

在本课程教学实验中，对一个物理量，一般在相同条件下测量次数 $n\leqslant10$，A 类分量为 $S_1=t_P(n-1)S_{\bar{x}}$；B 类分量简单地只考虑仪器误差，并取正态分布 $u_1=\Delta_{仪}/3$($P=0.683$)；均匀分布 $u_1=0.683\Delta_{仪}$，合成不确定度

$$U=\sqrt{[t_{0.683}(n-1)S_{\bar{x}}]^2+\left(\frac{\Delta_{仪}}{3}\right)^2}\quad(P=0.683,\text{B 类正态分布})\tag{01-21a}$$

或

$$U=\sqrt{[t_{0.683}(n-1)S_{\bar{x}}]^2+(0.683\Delta_{仪})^2}\quad(P=0.683,\text{B 类均匀分布})\tag{01-21b}$$

最后结果写成

$$(\bar{x}\pm U)\quad(P=0.683)\tag{01-22}$$

若要置信概率提高到 $P=0.95$，应取 $U=1.96\sqrt{S_1^2+u_1^2}$，此时在表示最后结果时，括号中的置信概率通常省略不写.

对间接测量 $N=f(x,y,\cdots)$，设各直接测量结果为 $\bar{x}\pm U_x$，$\bar{y}\pm U_y$，…，则间接测量的结果 $\bar{N}=f(\bar{x},\bar{y},\cdots)$，不确定度 $U_N$ 可套用标准误差传递公式

(01-17)进行估算.最后结果写成 $\overline{N}\pm U_N(P)$.

### 1.6.4 测量结果有效数字取舍原则

不确定度一般保留 1~2 位数字,当首位数字等于或大于 3 时,取一位;小于 3 时,则取两位,其后面的数字采用进位法.例如:计算结果得到不确定度为 $0.2414\times10^{-3}$ m,则应取 $U=0.25\times10^{-3}$ m.

测得值取几位,由不确定度来决定.即测得值的保留位数与不确定度的保留位数相等,后面的尾数则采用“小于 5 舍,大于 5 进,等于 5 将保留的数字凑成偶数”的原则取舍.若上例中测得最佳值为 $\overline{x}=46.175\,3\times10^{-3}$ m,则最后结果表述为 $x=(46.18\pm0.25)\times10^{-3}$ m$(P=0.683)$.

【例 1】 使用 0~25 mm 的一级螺旋测微器($\Delta_{仪}=0.004$ mm)测量钢球的直径 $d$(同一方位),测得的数据如表 01-6 所示,求测量的结果$(\overline{d}\pm U)(P)$.

表 01-6 螺旋测微器测量钢珠直径

| 测量序号 | 初读数 $x_1$/mm | 末读数 $x_2$/mm | 直径 $d=(x_2-x_1)$/mm |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.004 | 6.002 | 5.998 |
| 2 | 0.003 | 6.000 | 5.997 |
| 3 | 0.004 | 6.000 | 5.996 |
| 4 | 0.004 | 6.001 | 5.997 |
| 5 | 0.005 | 6.001 | 5.996 |
| 6 | 0.004 | 6.000 | 5.996 |
| 7 | 0.004 | 6.001 | 5.997 |
| 8 | 0.003 | 6.002 | 5.999 |
| 9 | 0.005 | 6.000 | 5.995 |
| 10 | 0.004 | 6.000 | 5.996 |

【解】 计算直径的算术平均值得 $\overline{d}=5.996\,7$ mm,计算平均值的标准误差

$$S_{\overline{d}}=\frac{S_d}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_i(d_i-\overline{d})^2}{n(n-1)}}=0.000\,37\text{ mm}$$

由 $P=0.683$,$n=10$,及 $\nu=n-1=9$,查表 01-5 可知 $t_{0.683}(10-1)=1.06$,计算得 A 类分量为

$$S_1=t_{0.683}(n-1)S_{\overline{d}}=0.000\,39\text{ mm}$$

仪器误差为均匀分布 $\Delta_{仪}=0.004$ mm,故 B 类分量为

$$u_1=0.683\Delta_{仪}=0.002\,73\text{ mm}$$

合成不确定度为

$$U=\sqrt{S_1^2+u_1^2}=0.002\ 76\ \text{mm}$$

取 0.002 8 mm，测量结果为

$$d=(5.996\ 7\pm0.002\ 8)\ \text{mm}\quad (P=0.683)$$

相对误差

$$E=\frac{0.002\ 8}{5.996\ 7}=0.05\%$$

**【例 2】** 单摆法测定重力加速度实验中，测得周期 $T=(2.014\pm0.003)$s，摆长 $L=(1.002\pm0.002)$m，它们的置信概率 $P$ 均为 0.683. 计算重力加速度 $\bar{g}\pm U_g$.

**【解】** 因为 $g=f(L,T)=\dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$，所以

$$\bar{g}=\frac{4\pi^2\bar{L}}{\bar{T}^2}=9.752\ 3\ \text{m/s}^2$$

由误差传递公式可得

$$U_g^2=\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2 U_L^2+\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 U_T^2$$

式中，$\dfrac{\partial f}{\partial L}=\dfrac{4\pi^2}{T^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial T}=-\dfrac{8\pi^2 L}{T^3}$，从而得

$$\left(\frac{U_g}{g}\right)^2=\left(\frac{U_L}{L}\right)^2+\left(2\frac{U_T}{T}\right)^2$$

代入各数据得

$$\frac{U_g}{\bar{g}}=4.2\times10^{-3}$$

$$U_g=0.042\ \text{m/s}^2\approx0.05\ \text{m/s}^2$$

重力加速度测得结果为

$$g=\bar{g}\pm U_g=(9.75\pm0.05)\ \text{m/s}^2\quad (P=0.683)$$



$$E=\frac{0.05}{9.75}=0.5\%$$