



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Título de la tesis o trabajo de investigación

Nombres y apellidos completos del autor

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad, Departamento (Escuela, etc.)  
Ciudad, Colombia  
Año



# Título de la tesis o trabajo de investigación

Nombres y apellidos completos del autor

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Indicar el título que se obtendrá. Por ejemplo, Magister en Ingeniería Química**

Director(a):

Título (Ph.D., Doctor, Químico, etc.) y nombre del director(a)

Línea de Investigación:

Nombrar la línea de investigación en la que enmarca la tesis o trabajo de investigación

Grupo de Investigación:

Nombrar el grupo en caso que sea posible

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad, Departamento (Escuela, etc.)  
Ciudad, Colombia  
Año



(Dedicatoria o un lema)

Su uso es opcional y cada autor podrá determinar la distribución del texto en la página, se sugiere esta presentación. En ella el autor dedica su trabajo en forma especial a personas y/o entidades.

Por ejemplo:

A mis padres

o

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein



# Agradecimientos

Esta sección es opcional, en ella el autor agradece a las personas o instituciones que colaboraron en la realización de la tesis o trabajo de investigación. Si se incluye esta sección, deben aparecer los nombres completos, los cargos y su aporte al documento.





## Resumen

El resumen es una presentación abreviada y precisa (la NTC 1486 de 2008 recomienda revisar la norma ISO 214 de 1976). Se debe usar una extensión máxima de 12 renglones. Se recomienda que este resumen sea analítico, es decir, que sea completo, con información cuantitativa y cualitativa, generalmente incluyendo los siguientes aspectos: objetivos, diseño, lugar y circunstancias, pacientes (u objetivo del estudio), intervención, mediciones y principales resultados, y conclusiones. Al final del resumen se deben usar palabras claves tomadas del texto (mínimo 3 y máximo 7 palabras), las cuales permiten la recuperación de la información.

**Palabras clave: (máximo 10 palabras, preferiblemente seleccionadas de las listas internacionales que permitan el indizado cruzado).**

A continuación se presentan algunos ejemplos de tesauros que se pueden consultar para asignar las palabras clave, según el área temática:

**Artes:** AAT: Art y Architecture Thesaurus.

**Ciencias agropecuarias:** 1) Agrovoc: Multilingual Agricultural Thesaurus - F.A.O. y 2) GEMET: General Multilingual Environmental Thesaurus.

**Ciencias sociales y humanas:** 1) Tesauro de la UNESCO y 2) Population Multilingual Thesaurus.

**Ciencia y tecnología:** 1) Astronomy Thesaurus Index. 2) Life Sciences Thesaurus, 3) Subject Vocabulary, Chemical Abstracts Service y 4) InterWATER: Tesauro de IRC - Centro Internacional de Agua Potable y Saneamiento.

**Tecnologías y ciencias médicas:** 1) MeSH: Medical Subject Headings (National Library of Medicine's USA) y 2) DECS: Descriptores en ciencias de la Salud (Biblioteca Regional de Medicina BIREME-OPS).

**Multidisciplinarias:** 1) LEMB - Listas de Encabezamientos de Materia y 2) LCSH- Library of Congress Subject Headings.

También se pueden encontrar listas de temas y palabras claves, consultando las distintas bases de datos disponibles a través del Portal del Sistema Nacional de Bibliotecas<sup>1</sup>, en la sección Recursos bibliográficos. opción "Bases de datos".

## Abstract

Es el mismo resumen pero traducido al inglés. Se debe usar una extensión máxima de 12 renglones. Al final del Abstract se deben traducir las anteriores palabras claves tomadas del

---

<sup>1</sup>ver: [www.sinab.unal.edu.co](http://www.sinab.unal.edu.co)

texto (mínimo 3 y máximo 7 palabras), llamadas keywords. Es posible incluir el resumen en otro idioma diferente al español o al inglés, si se considera como importante dentro del tema tratado en la investigación, por ejemplo: un trabajo dedicado a problemas lingüísticos del mandarín seguramente estaría mejor con un resumen en mandarín.

**Keywords: palabras clave en inglés(máximo 10 palabras, preferiblemente seleccionadas de las listas internacionales que permitan el indizado cruzado)**

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Números Surreales</b>	<b>3</b>
2.1. Definición de los números surreales . . . . .	3
2.2. Suma de números surreales . . . . .	10
2.3. Multiplicación de números surreales . . . . .	14
<b>3. Capítulo 2</b>	<b>15</b>
3.1. Ejemplos de citas bibliográficas . . . . .	15
3.2. Ejemplos de presentación y citación de figuras . . . . .	16
3.3. Ejemplo de presentación y citación de tablas y cuadros . . . . .	16
3.3.1. Consideraciones adicionales para el manejo de figuras y tablas . . . . .	18
<b>4. Capítulo 3</b>	<b>19</b>
<b>5. Capítulo ...</b>	<b>20</b>
<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>21</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	21
6.2. Recomendaciones . . . . .	21
<b>A. Anexo: Nombrar el anexo A de acuerdo con su contenido</b>	<b>22</b>
<b>B. Anexo: Nombrar el anexo B de acuerdo con su contenido</b>	<b>23</b>
<b>C. Anexo: Nombrar el anexo C de acuerdo con su contenido</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>26</b>

# Lista de símbolos

Esta sección es opcional, dado que existen disciplinas que no manejan símbolos y/o abreviaturas.

Se incluyen símbolos generales (con letras latinas y griegas), subíndices, superíndices y abreviaturas (incluir sólo las clases de símbolos que se utilicen). Cada una de estas listas debe estar ubicada en orden alfabético de acuerdo con la primera letra del símbolo.

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$A$	Área	$\text{m}^2$	$\int \int dx dy$
$A_{\text{BET}}$	Área interna del sólido	$\frac{\text{m}^2}{\text{g}}$	ver DIN ISO 9277
$A_g$	Área transversal de la fase gaseosa	$\text{m}^2$	Ec...
$A_s$	Área transversal de la carga a granel	$\text{m}^2$	Ec...
$a$	Coficiente	1	Ec...
$a$	Contenido de ceniza	1	$\frac{m_{\text{ceniza}}}{m_{\text{bm},0}}$
$c$	Contenido de carbono	1	$\frac{m_C}{m}$
$c$	Longitud de la cuerda	m	Figura...
$c$	Concentración de la cantidad de materia	$\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$	$\frac{n}{V}$
$D$	Diámetro	m	
$E_A$	Energía de activación	$\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$	Ec....
$F$	Fracción de materia volátil	1	ver DIN 51720
$Fr$	Número de Froude	1	$\frac{\omega^2 R}{g_0}$
$\vec{g}$	Aceleración de la gravedad	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$
$H$	Entalpía	J	$U + PV$
$H_o$	Poder calorífico superior	$\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$	ver DIN 51857

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$h$	Contenido de hidrógeno	1	$\frac{m_H}{m}$
$K$	Coeficiente de equilibrio	1	Ec...
$L$	Longitud	m	$DF$
$L$	Longitud del reactor	m	Figura...
$m$	Masa	kg	$DF$
$\dot{m}$	Flujo de masa	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{m}{t}$
$n$	Velocidad de rotación	$\frac{1}{\text{s}}$	$\frac{\omega}{2\pi}$
$n$	Cantidad de materia	mol	$DF$
$P$	Presión	Pa	$\frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{A}$
$Q$	Calor	kJ	1. $LT$
$T$	Temperatura	K	$DF$
$t$	Tiempo	s	$DF$
$x_i$	Fracción de la cantidad de materia	1	$\frac{n_i}{n}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$	$\int dr^3$
$\vec{u}$	Velocidad	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$(\frac{dr}{dt}, r \frac{dv}{dt}, \frac{dz}{dt})$
$w_i$	Fracción en masa del componente i	1	$\frac{m_i}{m_0}$
$w_{w,i}$	Contenido de humedad de la sustancia i	1	$\frac{m_{H_2O}}{m_{i,0}}$
$Z$	Factor de gases reales	1	$\frac{pv}{RT}$

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\alpha_{\text{BET}}$	Factor de superficie	$\frac{\text{m}^2}{\text{g}}$	$(w_{F,waf})(A_{\text{BET}})$
$\beta_i$	Grado de formación del componente i	1	$\frac{m_i}{m_{bm,0}}$
$\gamma$	Wandhaftreibwinkel (Stahlblech)	1	Sección...
$\epsilon$	Porosidad de la partícula	1	$1 - \frac{\rho_s}{\rho_w}$
$\eta$	mittlere Bettneigungswinkel (Stürzen)	1	Figura...

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\theta$	Ángulo de inclinación de la cama	1	Figura...
$\theta_O$	Ángulo superior de avalancha	1	Figura...
$\theta_U$	Ángulo inferior de avalancha	1	Figura...
$\kappa$	Velocidad de calentamiento	$\frac{K}{s}$	$\frac{dT}{dt}$
$\nu$	Coeficiente estequiométrico	1	ver DIN 13345
$\rho_b$	Densidad a granel	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m_S}{V_S}$ (Sección...)
$\rho_s$	Densidad aparente	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m_F}{V_P}$ (Sección...)
$\rho_w$	Densidad verdadera	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m_F}{V_F}$ (Sección...)
$\tau$	Tiempo adimensional	1	Ec....
$\Phi_V$	Flujo volumétrico	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{\Delta V}{\Delta t}$
$\omega$	Velocidad angular	$\frac{1}{s}$	$\frac{dv}{dt}$

## Subíndices

Subíndice	Término
bm	materia orgánica
DR	Dubinin-Radushkevich
E	Experimental
g	Fase gaseosa
k	Condensado
Ma	Macroporos
P	Partícula
p	Poro
p	Pirolizado
R	Reacción
t	Total
wf	Libre de agua
waf	Libre de agua y de ceniza
0	Estado de referencia

## Superíndices

Superíndice	Término
n	Coefficiente x

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
1. <i>LT</i>	Primera ley de la termodinámica
<i>DF</i>	Dimensión fundamental
<i>RFF</i>	Racimos de fruta fresca

# 1. Introducción

En la introducción, el autor presenta y señala la importancia, el origen (los antecedentes teóricos y prácticos), los objetivos, los alcances, las limitaciones, la metodología empleada, el significado que el estudio tiene en el avance del campo respectivo y su aplicación en el área investigada. No debe confundirse con el resumen y se recomienda que la introducción tenga una extensión de mínimo 2 páginas y máximo de 4 páginas.

La presente plantilla maneja una familia de fuentes utilizada generalmente en LaTeX, conocida como Computer Modern, específicamente LMRomanM para el texto de los párrafos y CMU Sans Serif para los títulos y subtítulos. Sin embargo, es posible sugerir otras fuentes tales como Garomond, Calibri, Cambria, Arial o Times New Roman, que por claridad y forma, son adecuadas para la edición de textos académicos.

La presente plantilla tiene en cuenta aspectos importantes de la Norma Técnica Colombiana - NTC 1486, con el fin que sea usada para la presentación final de las tesis de maestría y doctorado y especializaciones y especialidades en el área de la salud, desarrolladas en la Universidad Nacional de Colombia.

Las márgenes, numeración, tamaño de las fuentes y demás aspectos de formato, deben ser conservada de acuerdo con esta plantilla, la cual esta diseñada para imprimir por lado y lado en hojas tamaño carta. Se sugiere que los encabezados cambien según la sección del documento (para lo cual esta plantilla esta construida por secciones).

Si se requiere ampliar la información sobre normas adicionales para la escritura se puede consultar la norma NTC 1486 en la Base de datos del ICONTEC (Normas Técnicas Colombianas) disponible en el portal del SINAB de la Universidad Nacional de Colombia<sup>1</sup>, en la sección Recursos bibliográficos. opción "Bases de datos". Este portal también brinda la posibilidad de acceder a un instructivo para la utilización de Microsoft Word y Acrobat Professional, el cual está disponible en la sección "Servicios", opción "Trámites enlace de entrega de tesis".

La redacción debe ser impersonal y genérica. La numeración de las hojas sugiere que las páginas preliminares se realicen en números romanos en mayúscula y las demás en números

---

<sup>1</sup>ver: [www.sinab.unal.edu.co](http://www.sinab.unal.edu.co)



arábigos, en forma consecutiva a partir de la introducción que comenzará con el número 1. La cubierta y la portada no se numeran pero si se cuentan como páginas.

Para trabajos muy extensos se recomienda publicar más de un volumen. Se debe tener en cuenta que algunas facultades tienen reglamentada la extensión máxima de las tesis o trabajo de investigación; en caso que no sea así, se sugiere que el documento no supere 120 páginas.

No se debe utilizar numeración compuesta como 13A, 14B ó 17 bis, entre otros, que indiquen superposición de texto en el documento. Para resaltar, puede usarse letra cursiva o negrilla. Los términos de otras lenguas que aparezcan dentro del texto se escriben en cursiva.

## 2. Números Surreales

### 2.1. Definición de los números surreales

Los números surreales se definen de manera recursiva y parecida a las cortaduras de Dedekind<sup>1</sup>. Cada número surreal  $x$  es una pareja de conjuntos de números surreales a los que se les llama  $L$  y  $R$  de izquierdo y derecho en inglés, y se representa  $x \equiv \{L \mid R\}$  (Aquí usamos el símbolo  $\equiv$  para diferenciarlo de la igualdad en números surreales). La idea es que el número  $x$  sea “mayor” que todos los números de  $L$  y que sea “menor” que todos los números de  $R$ , que en cierto sentido sea el número más ‘sencillo’ que está en la mitad de los dos conjuntos.

Construyamos un número surreal. Como la definición es recursiva, empezamos con el conjunto más sencillo posible: el conjunto vacío. El primer número que se crea de esta manera es el número conformado por la pareja  $L = \emptyset$  y  $R = \emptyset$ , es decir,  $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ . A este número se le llama 0, y veremos luego que tiene las mismas propiedades del 0 de los números reales, esto es, es el módulo de la suma en números surreales y cualquier número multiplicado por éste da 0.

Ya teniendo el 0, se pueden formar las parejas de conjuntos

$$\{\{0\} \mid \emptyset\}, \quad \{\emptyset \mid \{0\}\}, \quad \{\{0\} \mid \{0\}\}.$$

Para hacer la notación más sencilla, vamos a escribir solamente los elementos de  $L$  y  $R$  sin los corchetes, por ejemplo  $\{\{0\} \mid \emptyset\} \equiv \{0 \mid \}$  y también  $0 \equiv \{\emptyset \mid \emptyset\} \equiv \{\mid\}$ .

Si queremos que el número surreal esté entre  $L$  y  $R$  entonces tendremos que todos los elementos de  $L$  tienen que ser ‘menores’ que todos los elementos de  $R$ , y aunque aún no hayamos definido un orden en el conjunto podemos ver que el par  $\{0 \mid 0\}$  no puede ser un número surreal ya que  $L$  y  $R$  comparten el mismo elemento.

Las otras dos parejas que quedan,  $\{0 \mid \}$  y  $\{\mid 0\}$ , sí son números surreales y tienen su propio nombre. Diremos que  $1 \equiv \{0 \mid \}$  y  $-1 \equiv \{\mid 0\}$ . Luego veremos que efectivamente estos dos números tienen las mismas propiedades que sus correspondientes números reales.

Si seguimos haciendo nuevas parejas con los números que ya creamos tendremos entonces

---

<sup>1</sup>En las cortaduras de Dedekind, se definen los números reales como parejas de conjuntos  $L$  y  $R$  de números racionales con la idea de que el número que está representando sea mayor o igual que todos los elementos de  $L$  y menor o igual que todos los elementos de  $R$ .

las parejas

$$\begin{aligned} &\{1 \mid\}, \{\mid 1\}, \\ &\{-1 \mid\}, \{\mid -1\}, \\ &\{0, 1 \mid\}, \{0 \mid 1\}, \{\mid 0, 1\} \\ &\{-1, 0 \mid\}, \{-1 \mid 0\}, \{\mid -1, 0\} \\ &\{-1, 1 \mid\}, \{-1 \mid 1\}, \{\mid -1, 1\} \\ &\{-1, 0, 1 \mid\}, \{-1, 0 \mid 1\}, \{-1 \mid 0, 1\}, \{\mid -1, 0, 1\}, \end{aligned}$$

y podemos seguir haciendo más números con estos nuevos números.

Como convención, si tenemos un número surreal  $x \equiv \{L \mid R\}$ , entonces llamaremos  $x^L$  a los elementos de  $L$  y al conjunto  $L$  lo llamaremos  $X^L$  en mayúscula; también llamaremos  $x^R$  a los elementos de  $R$  y al conjunto  $R$  lo llamaremos  $X^R$  en mayúscula. Además, llamaremos ancestro de  $x$  a cualquier elemento de  $X^L$  o de  $X^R$ .

Hasta ahora hemos hablado de una relación de orden sin definirla, lo hemos hecho para que se pueda ver primero el carácter recursivo de los números surreales. El orden también tiene una definición igualmente recursiva, lo que hacemos es intentar definir el orden a partir de los ancestros del número, es decir, para los  $x^L$  y  $x^R$ .

Para motivar las definiciones formales, tanto de números surreales como de orden, intentemos pensar en un número surreal  $x = \{L \mid R\}$ . Queremos que este orden sea un orden total, igual que en los números reales, entonces cuando decimos que

$$x^L < x^R$$

para todos los elementos de los conjuntos  $X^L$  y  $X^R$  respectivamente, estamos diciendo equivalentemente que

$$x^R \not\leq x^L.$$

De esta forma, usando solamente la relación de orden  $\leq$  podemos expresar que todos los elementos de  $X^L$  deben ser menores que los elementos de  $X^R$ .

**Definición 2.1** (Número surreal). Sea  $x = \{L \mid R\}$  una pareja de conjuntos de números surreales. Se dice que  $x$  es un **número surreal**, si y solamente si, se tiene que ningún  $x^R$  es menor o igual ( $\leq$ ) que algún  $x^L$ .

Si tenemos dos números surreales  $x$  y  $y$ , y queremos definir la relación de orden  $x \leq y$  en base a sus ancestros, podemos tener en cuenta las desigualdades

$$x^L < x < x^R, \quad y^L < y < y^R,$$

que queremos que se cumplan para todos los números surreales. Estas desigualdades juntas con el hecho de que  $x \leq y$  generan las desigualdades

$$x < y^R, \quad x^L < y,$$

que están basadas en elementos más ‘simples’, es decir, los ancestros de  $x$  y  $y$ . Si queremos escribirlo todo con respecto a la relación  $\leq$  tenemos que

$$x \not\geq y^R, \quad x^L \not\geq y.$$

**Definición 2.2** (Orden en números surreales). Sean  $x$  y  $y$  dos números surreales. Se dice que  $x \leq y$ , si y solamente si, se tiene que ningún  $x^L$  es mayor o igual ( $\geq$ ) que  $y$  y ningún  $y^R$  es menor o igual ( $\leq$ ) a  $x$ .

Vamos a utilizar la misma convención que se utiliza para las relaciones de orden. Tenemos que  $x \leq y$  es equivalente a decir que  $y \geq x$ , además, si tenemos que  $x \leq y$  y  $y \leq x$  se dice que  $x = y$ . También, si tenemos que  $x \leq y$  pero  $x \neq y$ , entonces se escribe  $x < y$ , de la misma manera se define para  $x > y$ .

Fíjese que esta es la primera vez que en nuestro texto aparece el signo  $=$  y significa algo diferente a lo que significa nuestro otro signo  $\equiv$ , en nuestro caso  $\equiv$  lo vamos a utilizar para referirnos a igualdad de conjuntos mientras que  $=$  lo vamos a utilizar como nuestra igualdad de números surreales.

Vamos a mostrar un ejemplo de cómo se utilizan estas definiciones intentando demostrar que las parejas que conocemos son números surreales.

*Ejemplo 1.* Vamos a mostrar que  $0 \equiv \{\mid\}$ ,  $1 \equiv \{0 \mid\}$  y  $-1 \equiv \{\mid 0\}$  son efectivamente números surreales.

Primero mostremoslo para 0. Tenemos que probar que ningún elemento  $0^L$  es mayor o igual que algún elemento de  $0^R$ , pero ya que tanto  $L$  como  $R$  son vacíos entonces esto se cumple por vacuidad, por lo tanto, el 0 sí es efectivamente un número.

Los ejemplos de 1 y  $-1$  se parecen. Probemos primero para  $1 = \{0 \mid\}$ . Tenemos que probar que ningún elemento  $1^L$  es mayor o igual que algún elemento de  $1^R$ , pero fíjese que no hay ningún elemento en  $R$ , por lo tanto tendremos que también se cumple por vacuidad.

Para  $-1$  es algo parecido. Tenemos que probar que ningún elemento  $(-1)^L$  es mayor o igual que algún elemento de  $(-1)^R$ , pero tenemos que  $L$  es vacío, por lo tanto tendremos que también se cumple por vacuidad. Concluimos que tanto 1 como  $-1$  son efectivamente números surreales.

*Ejemplo 2.* Un ejemplo más de como se puede usar esta definición de orden es probar las desigualdades esperadas  $-1 < 0$  y  $0 < 1$ .

Probemos  $0 < 1$ , para probar esta desigualdad tendremos que probar que  $0 \leq 1$  y además que  $0 \neq 1$ . Primero probemos que  $0 \leq 1$ . Tenemos que probar que no hay elementos en  $L$  y  $R$  de los respectivos números tales que

$$0 \geq 1^R, \quad 0^L \geq 1,$$

pero fíjese que no hay ningún elemento  $1^R$ , ni tampoco ningún elemento  $0^L$ , por lo tanto la propiedad se cumple por vacuidad.

Ahora probemos que  $0 \neq 1$ , como ya sabemos que  $0 \leq 1$  entonces esto es equivalente a mostrar que  $0 \not\geq 1$ . Luego, queremos probar que existe algún elemento tal que

$$1^L \not\geq 0.$$

Fíjese que en  $1^L$  está el elemento 0, y efectivamente  $0 = 1^L \geq 0$ , por lo que tenemos que  $0 < 1$ .

La demostración de que  $(-1) < 0$  es análoga, es la misma por la simetría de las definiciones.

Algo que aún no hemos probado pero hemos inferido es que  $\leq$  es una relación de orden, es decir, que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. La antisimetría la obtenemos por nuestra definición de igualdad ( $=$ ) en los números surreales. Las pruebas de las otras dos propiedades utilizan fuertemente la naturaleza recursiva de la definición de orden. Las pruebas son por inducción, pero la hipótesis de inducción supondrá que la propiedad se cumple cuando se cambia alguna de las variables por algún ancestro de la misma, así, nuestro caso base será cuando todas las variables sean 0 porque si alguna no es 0 entonces se puede reducir la pregunta a preguntas sobre los ancestros de las variables.

**Teorema 2.1** (Reflexividad). *Para todo número surreal  $x$ , se tiene que  $x \leq x$ .*

*Demostración.* Fíjese que para 0 se tiene la propiedad porque los conjuntos  $L$  y  $R$  de 0 son vacíos.

Sea  $x$  un número surreal y supongamos como hipótesis de inducción que la propiedad se cumple para todos los ancestros de  $x$ . Tenemos que probar que  $x \leq x$ , es decir, para ningún elemento de  $X^L$  y  $X^R$  se tiene que

$$x \leq x^L, \quad x^R \leq x.$$

Veamos la primera parte, es decir, sea  $x^L \in X^L$  mostremos que  $x \not\leq x^L$ . Por definición queremos mostrar que existe un elemento<sup>2</sup>  $z \in (X^L)^R$  tal que  $x \geq z$ , o que existe un elemento  $y \in X^L$  tal que  $y \geq x^L$ . Si tomamos  $y = x^L \in X^L$  entonces tenemos que  $y = x^L \geq x^L$  por la hipótesis de inducción, por lo tanto,  $x \not\leq x^L$ .

Para la segunda parte, es decir, que  $x^R \not\leq x$ , se hace un análisis parecido. Sea  $x^R \in X^R$ , queremos mostrar que existe un elemento  $z \in (X^R)^L$  tal que  $z \geq x$ , o que existe un elemento  $y \in X^R$  tal que  $y \leq x^R$ . Si tomamos  $y = x^R \in X^R$  entonces tenemos que  $y = x^R \leq x^R$  por la hipótesis de inducción, por lo tanto,  $x^R \not\leq x$ .  $\square$

**Corolario 2.1.1.** *Para todo número surreal  $x$ ,  $x = x$ .*

*Demostración.* Utilizamos la reflexividad de la relación de orden.  $\square$

<sup>2</sup>Acá usamos la notación  $(X^L)^R$  para referirnos al conjunto  $R$  del elemento  $x^L$  que habíamos descrito.

Para demostrar la transitividad necesitaremos utilizar la inducción pero en triplas de números surreales, es decir, vamos a demostrar la transitividad para  $(x, y, z)$  pero usando la hipótesis para las triplas que contengan alguno de los ancestros de  $x, y$  o  $z$ . Como siempre estaremos preguntando sobre la propiedad en alguno de los ancestros, al final llegaremos a preguntarlo en el conjunto  $(0, 0, 0)$  que será nuestro caso base.

**Teorema 2.2** (Transitividad). *Sean  $x, y, z$  números surreales. Si tenemos que  $x \leq y$  y  $y \leq z$ , entonces se tiene que  $x \leq z$ .*

*Demostración.* Utilicemos inducción sobre las triplas  $(x, y, z)$ . Fíjese que para la tripla  $(0, 0, 0)$  la propiedad se cumple gracias a la reflexividad.

Ahora, supongamos por inducción que se cumple para todas las triplas que contengan algún ancestro de  $x, y$  o  $z$ , por ejemplo, para la tripla  $(z^R, x, y)$  se vería como

$$(z^R \leq x) \text{ y } (x \leq y) \implies z^R \leq y.$$

Supongamos además que  $x \leq y$  y  $y \leq z$ . Demostremoslo por contradicción, supongamos que  $x \not\leq z$ , esto es, existe un elemento  $z^R \leq x$  o existe un elemento  $x^L \geq z$ .

Veamos el primer caso, es decir, cuando existe un  $z^R \in Z^R$  tal que  $z^R \leq x$ . Como  $x \leq y$ , usando la hipótesis de inducción tenemos que  $z^R \leq y$ , por lo tanto, por la definición de orden tendremos que  $y \not\leq z$ , contradicción.

Ahora veamos el segundo caso, supongamos que existe un  $x^L \in X^L$  tal que  $x^L \geq z$ . Como  $z \geq y$ , usando la hipótesis de inducción tenemos que  $x^L \geq y$ , por lo tanto, por la definición de orden tendremos que  $x \not\leq y$ .

En cualquier caso es una contradicción, entonces la relación  $\leq$  es transitiva.  $\square$

**Corolario 2.2.1.** *Sean  $x, y, z$  números surreales. Tenemos las siguientes implicaciones:*

- Si  $x = y, y = z$ , entonces  $x = z$ .
- Si  $x < y, y < z$ , entonces  $x < z$ .
- Si  $x \leq y, y < z$ , entonces  $x < z$ .
- Si  $x < y, y \leq z$ , entonces  $x < z$ .

Con esto ya podemos decir que la relación  $(\leq)$  es de orden, y además también tenemos una relación de equivalencia  $(=)$  entre números surreales. Además, gracias a la transitividad le podemos dar sentido a expresiones del tipo  $x \leq y \leq z$ , que significan  $x \leq y$  y  $y \leq z$  pero que también implican que  $x \leq z$ .

Una pregunta que nos podríamos hacer en este momento es si existen distintas representaciones de un mismo número, es decir: ¿Existen dos números surreales  $x$  y  $y$  tales que  $x = y$  pero que sus conjuntos  $L$  y  $R$  sean diferentes? En otras palabras ¿Existen  $x$  y  $y$  números surreales tales que  $x \neq y$  pero  $x = y$ ?

La respuesta la tenemos en varias de los ejemplos que ya tenemos sobre números surreales, es más, tenemos que

$$\begin{aligned} \{ | -1 \} &= \{ | -1, 0 \} = \{ | -1, 1 \} = \{ | -1, 0, 1 \}, \\ -1 &= \{ | 0, 1 \}, \\ \{-1 | 1\} &= \{-1 | 1, 0\}, \\ 0 &= \{-1 | 1\} = \{-1 | \} = \{ | 1 \}, \\ \{-1, 0 | 1\} &= \{0 | 1\}, \\ 1 &= \{-1, 0 | \}, \\ \{1 | \} &= \{0, 1 | \} = \{-1, 1 | \} = \{-1, 0, 1 | \}. \end{aligned}$$

Veamos la justificación de algunos de estos ejemplos

*Ejemplo 3.* Mostremos que  $1 \equiv \{0 | \} = \{-1, 0 | \}$ . Notemos  $x \equiv \{-1, 0 | \}$ , queremos mostrar que  $1 \leq x$  y que  $x \leq 1$ . Para mostrar que  $1 \leq x$  tenemos que mostrar que

$$1 \not\geq x^R \text{ y } 1^L \not\geq x.$$

Por un lado tenemos que  $X^R = \emptyset$  entonces la desigualdad  $1 \not\geq x^R$  se cumple por vacuidad. Para la otra desigualdad tenemos que  $1^L = \{0\}$ , por lo tanto lo que tenemos que mostrar es que  $0 \not\geq x$  y fíjese que en  $0 \in X^L$  por lo que podemos afirmar que  $0 \leq 0 = x^L \in X^L$  y tenemos que  $0 \not\geq x$  por definición. Con esto concluimos que  $1 \leq x$ .

Ahora mostremos que  $x \leq 1$ . Tenemos que mostrar que

$$x \not\geq 1^R \text{ y } x^L \not\geq 1.$$

Para la desigualdad  $x \not\geq 1^R$  tenemos que  $1^R = \emptyset$ , por lo tanto la desigualdad se cumple por vacuidad. Ahora, queremos mostrar que  $x^L \not\geq 1$ . Fíjese que  $X^L = \{-1, 0\}$ , pero en el ejemplo 2 mostramos que  $-1 < 0 < 1$  entonces por definición de  $<$  tenemos que para todo  $x^L \in X^L$  se cumple que  $x^L \not\geq 1$ . Con esto podemos concluir que  $x = 1$ .

Si nos ponemos a ver los demás ejemplos con relación a este podemos ver que algunos tienen cierta similitud. En este, lo que le hicimos al 1 fue añadirle un elemento a su conjunto  $L$  que fuera menor que alguno de los elementos que ya estaba, en este caso le añadimos el  $-1$  que era menor al  $0$  que ya estaba, y esto hizo que no cambiara su valor. Un argumento parecido podemos utilizarlo por ejemplo para probar que  $-1 = \{ | 0, 1 \}$ , e incluso, si lo analizamos mejor, podemos utilizar el mismo argumento para probar otras igualdades como  $\{-1, 0 | 1\} = \{0 | 1\}$ .

En conclusión, agregar al conjunto  $L$  algún número que sea menor a un número del conjunto  $L$ , o agregar al conjunto  $R$  algún número que sea mayor a un número del conjunto  $R$ , no hace cambiar de valor al número.

Una propiedad que hemos estado referenciando sin demostrar para motivar las definiciones es la idea de que el número que definimos está entre los elementos de  $L$  y los elementos de  $R$ , más específicamente

**Teorema 2.3.** *Sea  $x$  un número surreal. Tenemos que  $x^L < x < x^R$ .*

*Demostración.* Probemos primero que  $x^L \leq x \leq x^R$  y luego hacemos la desigualdad estricta. Hagamos la prueba para la parte izquierda de la desigualdad, la parte derecha se hace de manera parecida.

Probemos que  $x^L \leq x$  por inducción. La propiedad es verdadera para 0 por vacuidad. Ahora, supongamos que es verdad para  $x^L$  y probemos para  $x$ . Tenemos que probar que no existe ningún elemento  $x^R \leq x^L$  para todos los elementos  $x^R$  y tampoco existe ningún elemento  $y \in (X^L)^L$  tal que  $y \geq x$ . La primera parte la tenemos porque  $x$  es un número surreal entonces ningún elemento de  $X^L$  es mayor que ningún elemento de  $X^R$ . Para la segunda parte, probemos que  $y \not\geq x$ , esto significa que o existe  $z \in X^L$  tal que  $y \leq z$ , o existe  $y^R$  tal que  $y^R \leq x$ . Fíjese que si tomamos  $z = x^L$  entonces tendremos por hipótesis de inducción que  $y \leq z = x^L$ , puesto que  $y \in (X^L)^L$ , luego tenemos que  $x^L \leq x$ .

Ahora, para hacer la desigualdad estricta fíjese que  $x^L \not\geq x$  significa que existe  $y \in X^L$  tal que  $y \geq x^L$ , o que existe  $z \in (X^L)^R$  tal que  $z \leq x$ , si tomamos  $y = x^L$  tendremos por reflexividad que  $x^L \not\geq x$ .  $\square$

**Corolario 2.3.1** (Linealidad). *Sean  $x, y$  números surreales. Si  $x \not\leq y$  entonces tenemos que  $x > y$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $x \not\leq y$ . Esto quiere decir que o existe  $x^L \geq y$ , o existe  $y^R \leq x$ . Si existe  $x^L \geq y$ , entonces como  $x^L < x$  por transitividad  $x > y$ . Si existe  $y^R \leq x$ , entonces como  $y < y^R$  por transitividad  $y < x$ .  $\square$

Un problema se nos va a presentar de ahora en adelante cuando intentemos definir operaciones en números surreales; tendremos que ver si estas operaciones son compatibles con la relación de equivalencia generada por la relación de orden.

Incluso algo que nos podemos preguntar es si nuestra relación de orden es en ‘compatible’ con nuestra definición de número. Con esto me refiero a si puedo cambiar los elementos del  $L$  y el  $R$  por elementos iguales sin cambiar la clase de equivalencia del número, más formalmente

**Teorema 2.4.** *Sean  $L, L', R, R'$  conjuntos de números surreales tales que todos los elementos de  $L$  son iguales que algún elemento de  $L'$ , todos los elementos de  $R$  son iguales que algún elemento de  $R'$ , y viceversa. Además supongamos que  $\{L \mid R\}$  y  $\{L' \mid R'\}$  son números surreales. Tenemos que  $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$ .*

*Demostración.* Mostremos que en efecto  $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$ . Para esto es suficiente mostrar que  $\{L \mid R\} \leq \{L' \mid R'\}$  puesto que la otra desigualdad se sigue por simetría.

Llamemos  $x = \{L \mid R\}$  y  $x' = \{L' \mid R'\}$ . Tenemos que probar que  $x^L < x'$  y  $x < (x')^R$ . Como existe en  $L'$  un elemento  $y$  tal que  $x^L = y$ , entonces tenemos que  $x^L = y < x'$ , por otro lado, en  $R$  existe un elemento  $z$  tal que  $(x')^R = z$ , por lo tanto tenemos que  $x < z = (x')^R$ , con lo que tendríamos el resultado.  $\square$



## 2.2. Suma de números surreales

La suma de los números surreales también se define recursivamente.

**Definición 2.3** (Definición de suma). Se dice que

$$x + y = \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}.$$

Esta definición hace que la suma sea automáticamente conmutativa ya que es lo mismo en definición hacer  $x + y$  o  $y + x$ .

Como todas las definiciones recursivas que hemos hecho, la suma se define eventualmente en base al número 0, por eso es bueno ver qué pasa cuando se suma 0.

*Ejemplo 4.* ¿Qué pasa cuando se suma  $0 + 0$ ? Sabemos que  $0 = \{\mid\}$ , por lo tanto, no existe ni  $0^L$  ni  $0^R$ . Lo que tendremos entonces es

$$0 + 0 = \{0^L + 0, 0 + 0^L \mid 0^R + 0, 0 + 0^R\} = \{\mid\} = 0,$$

por lo tanto tendremos que  $0 + 0 = 0$ .

*Ejemplo 5.* Más aún, si el 0 de los números surreales se parece al 0 de los números reales entonces tendríamos que el 0 es módulo de la suma, esto es,  $x + 0 = x$  para todo  $x$  número surreal.

Mostremos esto por inducción. Nuestro caso base es cuando  $x = 0$ , es decir,  $0 + 0$  que ya probamos que  $0 + 0 = 0 = x$  luego se cumple.

Supongamos que se cumple para todos los elementos en los conjuntos  $X^L$  y  $X^R$ . Tenemos entonces que

$$x + 0 = \{x^L + 0, x + 0^L \mid x^R + 0, x + 0^R\} = \{x^L + 0 \mid x^R + 0\}$$

y por hipótesis de inducción tenemos que  $x^L + 0 = x^L$  y  $x^R + 0 = x^R$ , por lo tanto

$$x + 0 = \{x^L \mid x^R\} = x.$$

*Ejemplo 6.* También hemos definido los números 1 y  $-1$ . Miremos qué pasa cuando se suman entre ellos.

Primero,

$$1 + (-1) = \{1^L + (-1) \mid 1 + (-1)^R\} = \{0 + (-1) \mid 1 + 0\} = \{-1 \mid 1\} = 0.$$

También tenemos que

$$1 + 1 = \{1^L + 1, 1 + 1^L \mid\} = \{0 + 1, 1 + 0 \mid\} = \{1 \mid\},$$

por lo tanto, llamamos al número surreal  $\{1 \mid\} = 2$ . Un análisis parecido se puede hacer para decir que  $(-1) + (-1) = \{\mid -1\}$ , por lo tanto  $-2 = \{\mid -1\}$ .

La operación de suma en los números reales genera un grupo conmutativo, en nuestro caso, ya hemos mostrado que la suma es conmutativa y que además tiene un módulo, lo que nos falta para mostrar que la suma en los números surreales genera un grupo conmutativo es mostrar que todos los elementos tienen inversos aditivos y además que la suma es asociativa.

**Teorema 2.5** (Asociatividad de la suma). *Sean  $x, y, z$  números surreales. Tenemos que*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

*Demostración.* Veamos el teorema por inducción. Nuestro caso base es cuando alguno todos los elementos son 0, en este caso tenemos

$$(0 + 0) + 0 = 0 + 0 = 0 = 0 + 0 = 0 + (0 + 0).$$

Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que la asociatividad se cumple para los elementos de los conjuntos  $L$  y  $R$  de  $x, y, z$ , por ejemplo, de los elementos de los conjuntos  $L$  se tiene que

$$\begin{aligned} (x^L + y) + z &= x^L + (y + z), \\ (x + y^L) + z &= x + (y^L + z), \\ (x + y) + z^L &= x + (y + z^L). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \{(x + y)^L + z, (x + y) + z^L \mid \dots\} \\ &= \{(x^L + y) + z, (x + y^L) + z, (x + y) + z^L \mid \dots\} \\ &= \{x^L + (y + z), x + (y^L + z), x + (y + z^L) \mid \dots\} \\ &= \{x^L + (y + z), x + (y + z)^L \mid \dots\} \\ &= x + (y + z). \end{aligned}$$

La demostración del conjunto  $R$  se hace de la misma manera. □

Los inversos aditivos vamos a definirlos también recursivamente, en base a los inversos aditivos de los elementos de  $L$  y  $R$  del número.

**Definición 2.4** (Inversos aditivos). Sea  $x$  un número surreal. Definimos su inverso aditivo como

$$(-x) = \{-(x^L) \mid -(x^R)\}.$$

*Ejemplo 7.* Veamos los inversos de los números que ya nombramos. Por un lado tenemos que

$$-0 = \{-0^R \mid -0^L\} = \{\mid\} = 0,$$

puesto que sus conjuntos  $L$  y  $R$  son vacíos.

Veamos también que efectivamente aquel que llamamos  $-1$  en la sección anterior es en efecto el inverso aditivo de  $1$ ,

$$-1 = \{-1^R \mid -1^L\} = \{\mid -0\} = \{\mid 0\} = -1.$$

También podemos hacer el mismo chequeo para  $2$  y  $-2$ .

**Teorema 2.6.** *Sea  $x$  un número surreal. Tenemos que  $x + (-x) = 0$ .*

*Demostración.* Mostremos el teorema por inducción. Primero miremos el caso base cuando  $x = 0$ . Tenemos que

$$x + (-x) = 0 + (-0) = 0 + 0 = 0,$$

por lo tanto se cumple.

Ahora, supongamos que es verdad para los elementos de los conjuntos  $L$  y  $R$  de  $x$ . Mostremos que  $x + (-x) \leq 0$  por contradicción, es decir, supongamos que es mentira luego existe algún elemento tal que  $(x + (-x))^R < 0$ . Por lo tanto, o  $x^R + (-x) < 0$  o  $x + (-x^L) < 0$ , pero en los conjuntos  $L$  de estos números están los elementos  $x^R + (-x^R)$  y  $x^L + (-x^L)$  respectivamente, que cumplen  $x^R + (-x^R) \geq 0$  y  $x^L + (-x^L) \geq 0$  por hipótesis de inducción, lo cual contradice que  $x^R + (-x) < 0$  o  $x + (-x^L) < 0$ .

Para mostrar que  $x + (-x) \geq 0$  el proceso es similar.  $\square$

Fíjese que en los ejemplos tenemos que  $1 + (-1) = 0$  pero los conjuntos son diferentes, ya que  $0 = \{\mid\}$  mientras que  $1 + (-1) = \{-1 \mid 1\}$ . Aún no hemos mostrado si la suma es compatible con estas clases de equivalencia, en otras palabras, queremos mostrar que si  $x = x'$  entonces  $x + y = x' + y$  para todo  $y$  número surreal de modo que no importe cual representante de la clase se utilice en las sumas. Para hacer esto vamos a primero probarlo para la relación de orden, ya que si lo mostramos para la relación de orden entonces lo tendremos también para la relación de equivalencia por definición.

Mostremoslo primero para el elemento más simple, es decir, el  $0$ .

**Teorema 2.7.** *Si tenemos  $0 \leq x$ , entonces  $y \leq x + y$  para todo número surreal  $y$ .*

*Demostración.* Vamos a probar el teorema por inducción. Los casos bases de nuestra inducción serán cuando  $y = 0$  o cuando  $x = 0$ , en cualquiera de los dos casos la proposición es verdadera.

Supondremos como hipótesis de inducción que la proposición es verdad para los elementos de  $L$  y  $R$  de  $x$  y  $y$ , esto es,

$$\begin{aligned} 0 \leq x &\implies y^L \leq x + y^L, \\ 0 \leq x &\implies y^R \leq x + y^R, \\ 0 \leq x^R &\implies y \leq x^R + y, \\ 0 \leq x^L &\implies y \leq x^L + y. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que  $0 \leq x$ . Queremos mostrar que  $y \leq x + y$ , esto es,  $y^L < x + y$  y  $y < (x + y)^R$ . Fíjese que en el conjunto  $(x + y)^L$  se encuentra  $x + y^L$ , y por hipótesis de inducción tenemos que  $y^L \leq x + y^L < (x + y)$ , por lo tanto la primera parte se cumple.

Ahora,  $(x + y)^R$  puede ser o  $x + y^R$  o  $x^R + y$ . Supongamos que es de la forma  $x + y^R$ . En este caso tenemos que  $y < y^R \leq x + y^R$ . Por otro lado, si el elemento es de la forma  $x^R + y$  entonces por hipótesis de inducción tenemos que  $y \leq x^R + y$ , la desigualdad es estricta pues como  $x^R > 0$  entonces existe algún elemento  $(x^R)^L \geq 0$  y por hipótesis de inducción  $(x^R)^L + y \geq y$ , pero fíjese que  $(x^R)^L + y$  está en el conjunto  $L$  de  $x^R + y$  por lo tanto tendremos que  $y \leq (x^R)^L + y < x^R + y$ , con lo que probamos que  $y < (x + y)^R$ .  $\square$

**Corolario 2.7.1.** *Si tenemos  $x = 0$ , entonces  $y = y + x$ .*

**Teorema 2.8.** *Si tenemos que  $x + y \leq x + z$  entonces  $y \leq z$ .*

*Demostración.* Haremos esta demostración por inducción. El caso base es cuando  $y = z = 0$ , y este se puede verificar que la proposición se cumple.

Como hipótesis de inducción supondremos que se cumple para todo los elementos de  $L$  y  $R$  de  $z$  y  $y$  respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned} x + y &\leq x + z^R \implies y \leq z^R, \\ x + y^L &\leq x + z \implies y^L \leq z, \\ x^R + y &\leq x^R + z \implies y \leq z, \\ x^L + y &\leq x^L + z \implies y \leq z. \end{aligned}$$

Supongamos que  $x + y \leq x + z$ , entonces  $x + y^L < x + z$  y  $x + y < x + z^R$ .

Utilicemos la primera desigualdad, como es una desigualdad estricta entonces tendremos que existe algún

$$(x + y^L)^R \leq x + z, \quad (2-1)$$

estos elementos pueden ser o  $x + (y^L)^R$  o  $x^R + y^L$ , en el primer caso tendremos por hipótesis de inducción que  $(y^L)^R \leq z$  luego  $y^L < z$ . Por otro lado, si el elemento es de la forma  $x^R + y^L$  entonces tenemos la desigualdad  $x^R + y^L \leq x + z < x^R + z$ , de la que podemos deducir que existe un elemento  $(x^R + y^L)^R \leq x^R + z$  la cual es muy parecida a la ecuación 2-1 por lo tanto podremos repetir el mismo argumento hasta que el elemento sea de la forma  $((x^R) \dots)^R + (y^L)^R$  y hacer el mismo el mismo argumento para deducir que  $y^L < z$ .

Con la desigualdad  $x + y < x + z^R$  se trabaja de manera similar y se deduce que  $y < z^R$ , por lo tanto,  $y \leq z$ .  $\square$

**Corolario 2.8.1.** *Si  $y \leq z$ , entonces  $y + x \leq z + x$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $y \leq z$ . Utilizando el corolario 2.7.1, tenemos que  $y + x + (-x) \leq z + x + (-x)$  puesto que le estamos sumando 0 a ambos lados. Ahora, usando el teorema anterior podemos cancelar a ambos lados de la desigualdad y tenemos que  $y + x \leq z + x$ .  $\square$

**Corolario 2.8.2.** *Si  $y = z$ , entonces  $y + x = z + x$ .*

## 2.3. Multiplicación de números surreales

La definición de la multiplicación es mucho más compleja que la definición de la suma. Queremos, igual que en las anteriores definiciones, hacer una definición recursiva a partir de las multiplicaciones de ancestros, y además, queremos que se respete el orden de los conjuntos  $L$  y  $R$ .

Una forma de motivarlo es pensar en las propiedades de la multiplicación real con respecto al orden, la más importante es que la multiplicación de números positivos es positiva. Si pensamos en dos números surreales  $x, y$ , tenemos los números positivos

$$\begin{aligned}(x - x^L) &> 0, & (x^R - x) &> 0, \\ (y - y^L) &> 0, & (y^R - y) &> 0.\end{aligned}$$

Si multiplicamos cada uno de los que corresponden a  $x$  con cada uno de los que corresponden a  $y$  tendremos 4 números positivos, tomemos como ejemplo dos de ellos, los

$$\begin{aligned}(x - x^L)(y - y^L) &= xy + x^L y^L - x y^L - x^L y > 0, \\ (x - x^L)(y^R - y) &= -xy - x^L y^R + x y^R + x^L y > 0,\end{aligned}$$

con los que podemos generar las desigualdades

$$-x^L y^L + x y^L + x^L y < xy < -x^L y^R + x y^R + x^L y,$$

si hacemos lo mismo con las otras dos posibles multiplicaciones tenemos la definición

**Definición 2.5** (Multiplicación). Sean  $x, y$  dos números surreales. Definimos la multiplicación de números surreales como

$$xy = \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^L y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}.$$

## 3. Capítulo 2

Existen varias normas para la citación bibliográfica. Algunas áreas del conocimiento prefieren normas específicas para citar las referencias bibliográficas en el texto y escribir la lista de bibliografía al final de los documentos. Esta plantilla brinda la libertad para que el autor de la tesis o trabajo de investigación utilice la norma bibliográfica común para su disciplina. Sin embargo, se solicita que la norma seleccionada se utilice con rigurosidad, sin olvidar referenciar "todos" los elementos tomados de otras fuentes (referencias bibliográficas, patentes consultadas, software empleado en el manuscrito, en el tratamiento a los datos y resultados del trabajo, consultas a personas (expertos o público general), entre otros).

### 3.1. Ejemplos de citaciones bibliográficas

Existen algunos ejemplos para la citación bibliográfica, por ejemplo, Microsoft Word (versiones posteriores al 2006), en el menú de referencias, se cuenta con la opción de insertar citas bibliográficas utilizando la norma APA (American Psychological Association) u otras normas y con la ayuda para construir automáticamente la lista al final del documento. De la misma manera, existen administradores bibliográficos compatibles con Microsoft Word como Zotero, End Note y el Reference Manager, disponibles a través del Sistema Nacional de Bibliotecas (SINAB) de la Universidad Nacional de Colombia<sup>1</sup> sección Recursos bibliográficos. opción "Herramientas Bibliográficas. A continuación se muestra un ejemplo de una de las formas más usadas para las citaciones bibliográficas.

Citación individual:[1].

Citación simultánea de varios autores: [5, ?, 6, ?, ?, 2, 3].

Por lo general, las referencias bibliográficas correspondientes a los anteriores números, se listan al final del documento en orden de aparición o en orden alfabético. Otras normas de citación incluyen el apellido del autor y el año de la referencia, por ejemplo: 1) "...énfasis en elementos ligados al ámbito ingenieril que se enfocan en el manejo de datos e información estructurada y que según Kostoff (1997) ha atraído la atención de investigadores dado el advenimiento de TIC...", 2) "...Dicha afirmación coincide con los planteamientos de Snarch

---

<sup>1</sup>Ver: [www.sinab.unal.edu.co](http://www.sinab.unal.edu.co)

(1998), citado por Castellanos (2007), quien comenta que el manejo...z 3) "...el futuro del sistema para argumentar los procesos de toma de decisiones y el desarrollo de ideas innovadoras (Nosella *et al.*, 2008)...".

## 3.2. Ejemplos de presentación y citación de figuras

Las ilustraciones forman parte del contenido de los capítulos. Se deben colocar en la misma página en que se mencionan o en la siguiente (deben siempre mencionarse en el texto).

Las llamadas para explicar algún aspecto de la información deben hacerse con nota al pie y su nota correspondiente<sup>2</sup>. La fuente documental se debe escribir al final de la ilustración o figura con los elementos de la referencia (de acuerdo con las normas seleccionadas) y no como pie de página. Un ejemplo para la presentación y citación de figuras, se presenta a continuación (citación directa):

Por medio de las propiedades del fruto, según el espesor del endocarpio, se hace una clasificación de la palma de aceite en tres tipos: Dura, Ternera y Pisifera, que se ilustran en la Figura 3-1.

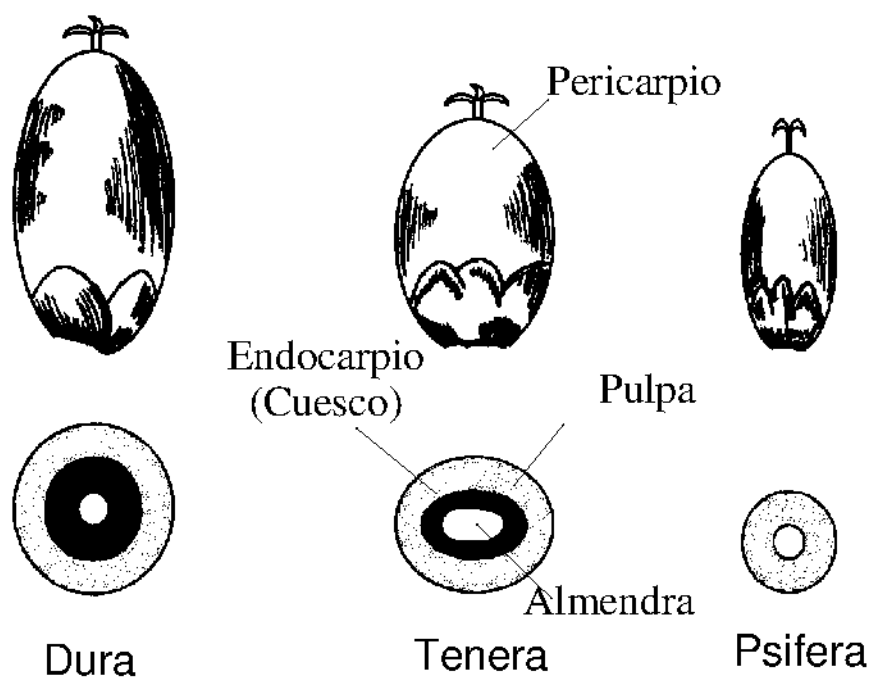
## 3.3. Ejemplo de presentación y citación de tablas y cuadros

Para la edición de tablas, cada columna debe llevar su título; la primera palabra se debe escribir con mayúscula inicial y preferiblemente sin abreviaturas. En las tablas y cuadros, los títulos y datos se deben ubicar entre líneas horizontales y verticales cerradas (como se realiza en esta plantilla).

La numeración de las tablas se realiza de la misma manera que las figuras o ilustraciones, a lo largo de todo el texto. Deben llevar un título breve, que concreta el contenido de la tabla; éste se debe escribir en la parte superior de la misma. Para la presentación de cuadros, se deben seguir las indicaciones dadas para las tablas.

---

<sup>2</sup>Las notas van como "notas al pie". Se utilizan para explicar, comentar o hacer referencia al texto de un documento, así como para introducir comentarios detallados y en ocasiones para citar fuentes de información (aunque para esta opción es mejor seguir en detalle las normas de citación bibliográfica seleccionadas).



**Figura 3-1.:** Tipos y partes del fruto de palma de aceite [?, ?].

Un ejemplo para la presentación y citación de tablas (citación indirecta), se presenta a continuación:

De esta participación aproximadamente el 60 % proviene de biomasa (Tabla **3-1**).

**Tabla 3-1.:** Participación de las energías renovables en el suministro total de energía primaria [4].

Region	Participación en el suministro de energía primaria / % (Mtoe) <sup>1</sup>	
	Energías renovables	Participación de la biomasa
Latinoamérica	28,9 (140)	62,4 (87,4)
Colombia	27,7 (7,6)	54,4 (4,1)
Alemania	3,8 (13,2)	65,8 (8,7)
Mundial	13,1 (1404,0)	79,4 (1114,8)

<sup>1</sup> 1 kg oe=10000 kcal=41,868 MJ

NOTA: en el caso en que el contenido de la tabla o cuadro sea muy extenso, se puede cambiar el tamaño de la letra, siempre y cuando ésta sea visible por el lector.



### 3.3.1. Consideraciones adicionales para el manejo de figuras y tablas

Cuando una tabla, cuadro o figura ocupa más de una página, se debe repetir su identificación numérica, seguida por la palabra continuación.

Adicionalmente los encabezados de las columnas se deben repetir en todas las páginas después de la primera.

Los anteriores lineamientos se contemplan en la presente plantilla.

- Presentación y citación de ecuaciones.

La citación de ecuaciones, en caso que se presenten, debe hacerse como lo sugiere esta plantilla. Todas las ecuaciones deben estar numeradas y citadas dentro del texto.

Para el manejo de cifras se debe seleccionar la norma según el área de conocimiento de la tesis o trabajo de investigación.

## **4. Capítulo 3**

Se deben incluir tantos capítulos como se requieran; sin embargo, se recomienda que la tesis o trabajo de investigación tenga un mínimo 3 capítulos y máximo de 6 capítulos (incluyendo las conclusiones).

## **5. Capítulo ...**

Se deben incluir tantos capítulos como se requieran; sin embargo, se recomienda que la tesis o trabajo de investigación tenga un mínimo 3 capítulos y máximo de 6 capítulos (incluyendo las conclusiones).

## **6. Conclusiones y recomendaciones**

### **6.1. Conclusiones**

Las conclusiones constituyen un capítulo independiente y presentan, en forma lógica, los resultados de la tesis o trabajo de investigación. Las conclusiones deben ser la respuesta a los objetivos o propósitos planteados. Se deben titular con la palabra conclusiones en el mismo formato de los títulos de los capítulos anteriores (Títulos primer nivel), precedida por el numeral correspondiente (según la presente plantilla).

### **6.2. Recomendaciones**

Se presentan como una serie de aspectos que se podrían realizar en un futuro para emprender investigaciones similares o fortalecer la investigación realizada. Deben contemplar las perspectivas de la investigación, las cuales son sugerencias, proyecciones o alternativas que se presentan para modificar, cambiar o incidir sobre una situación específica o una problemática encontrada. Pueden presentarse como un texto con características argumentativas, resultado de una reflexión acerca de la tesis o trabajo de investigación.

## **A. Anexo: Nombrar el anexo A de acuerdo con su contenido**

Los Anexos son documentos o elementos que complementan el cuerpo de la tesis o trabajo de investigación y que se relacionan, directa o indirectamente, con la investigación, tales como acetatos, cd, normas, etc.

## **B. Anexo: Nombrar el anexo B de acuerdo con su contenido**

A final del documento es opcional incluir índices o glosarios. Éstos son listas detalladas y especializadas de los términos, nombres, autores, temas, etc., que aparecen en el mismo. Sirven para facilitar su localización en el texto. Los índices pueden ser alfabéticos, cronológicos, numéricos, analíticos, entre otros. Luego de cada palabra, término, etc., se pone coma y el número de la página donde aparece esta información.

## C. Anexo: Nombrar el anexo C de acuerdo con su contenido

MANEJO DE LA BIBLIOGRAFÍA: la bibliografía es la relación de las fuentes documentales consultadas por el investigador para sustentar sus trabajos. Su inclusión es obligatoria en todo trabajo de investigación. Cada referencia bibliográfica se inicia contra el margen izquierdo.

La NTC 5613 establece los requisitos para la presentación de referencias bibliográficas citas y notas de pie de página. Sin embargo, se tiene la libertad de usar cualquier norma bibliográfica de acuerdo con lo acostumbrado por cada disciplina del conocimiento. En esta medida es necesario que la norma seleccionada se aplique con rigurosidad.

Es necesario tener en cuenta que la norma ISO 690:1987 (en España, UNE 50-104-94) es el marco internacional que da las pautas mínimas para las citas bibliográficas de documentos impresos y publicados. A continuación se lista algunas instituciones que brindan parámetros para el manejo de las referencias bibliográficas:

Institución	Disciplina de aplicación
Modern Language Association (MLA)	Literatura, artes y humanidades
American Psychological Association (APA)	Ambito de la salud (psicología, medicina) y en general en todas las ciencias sociales
Universidad de Chicago/Turabian	Periodismo, historia y humanidades.
AMA (Asociación Médica de los Estados Unidos)	Ambito de la salud (psicología, medicina)
Vancouver	Todas las disciplinas
Council of Science Editors (CSE)	En la actualidad abarca diversas ciencias
National Library of Medicine (NLM) (Biblioteca Nacional de Medicina)	En el ámbito médico y, por extensión, en ciencias.
Harvard System of Referencing Guide	Todas las disciplinas
JabRef y KBibTeX	Todas las disciplinas

Para incluir las referencias dentro del texto y realizar lista de la bibliografía en la respectiva sección, puede utilizar las herramientas que Latex suministra o, revisar el instructivo desarrollado por el Sistema de Bibliotecas de la Universidad Nacional de Colombia<sup>1</sup>, disponible en la sección "Servicios", opción "Trámites y enlace de entrega de tesis".

---

<sup>1</sup>Ver: [www.sinab.unal.edu.co](http://www.sinab.unal.edu.co)



# Bibliografía

- [1] ANTAL, M.J.J.: Biomass Pyrolysis: A Review of the Literature Part 1 - Carbohydrate Pyrolysis. En: *Advances in Solar Energy Vol. 1 American Solar Energy Society*, 1982, p. 61–111
- [2] GÓMEZ, Adriana: *Investigación del Proceso de Gasificación de Biomasa en un Gasificador en Paralelo*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2002
- [3] INTERNATIONAL ENERGY AGENCY, IEA. *Needs for Renewables 2001: Developing a New Generation of Sustainable Energy Technologies*. 2001
- [4] INTERNATIONAL ENERGY AGENCY, IEA. *Renewables in Global Energy Supply*. 2007
- [5] THURNER, F. ; MANN, U.: Kinetic Investigation of Wood Pyrolysis. En: *Ind. Eng. Chem. Res.* 20 (1981), p. 482–488
- [6] WIEST, W.: *Zur Pyrolyse von Biomasse im Drehrohrreaktor*. Kassel, Universität Gesamthochschule Kassel, Tesis de Doctorado, 1998