UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Título de la tesis o trabajo de investigación

Nombres y apellidos completos del autor

Universidad Nacional de Colombia
Facultad, Departamento (Escuela, etc.)
Ciudad, Colombia
Año

Título de la tesis o trabajo de investigación

Nombres y apellidos completos del autor

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Indicar el título que se obtendrá. Por ejemplo, Magister en Ingeniería Química

Director(a):
Título (Ph.D., Doctor, Químico, etc.) y nombre del director(a)

Línea de Investigación:
Nombrar la línea de investigación en la que enmarca la tesis o trabajo de investigación
Grupo de Investigación:
Nombrar el grupo en caso que sea posible

Universidad Nacional de Colombia
Facultad, Departamento (Escuela, etc.)
Ciudad, Colombia

Año

(Dedicatoria o un lema)

Su uso es opcional y cada autor podrá determinar la distribución del texto en la página, se sugiere esta presentación. En ella el autor dedica su trabajo en forma especial a personas y/o entidades.

Por ejemplo:

A mis padres

o

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein

Agradecimientos

Esta sección es opcional, en ella el autor agradece a las personas o instituciones que colaboraron en la realización de la tesis o trabajo de investigación. Si se incluye esta sección, deben aparecer los nombres completos, los cargos y su aporte al documento.

Resumen

El resumen es una presentación abreviada y precisa (la NTC 1486 de 2008 recomienda revisar la norma ISO 214 de 1976). Se debe usar una extensión máxima de 12 renglones. Se recomienda que este resumen sea analítico, es decir, que sea completo, con información cuantitativa y cualitativa, generalmente incluyendo los siguientes aspectos: objetivos, diseño, lugar y circunstancias, pacientes (u objetivo del estudio), intervención, mediciones y principales resultados, y conclusiones. Al final del resumen se deben usar palabras claves tomadas del texto (mínimo 3 y máximo 7 palabras), las cuales permiten la recuperación de la información.

Palabras clave: (máximo 10 palabras, preferiblemente seleccionadas de las listas internacionales que permitan el indizado cruzado).

A continuación se presentan algunos ejemplos de tesauros que se pueden consultar para asignar las palabras clave, según el área temática:

Artes: AAT: Art y Architecture Thesaurus.

Ciencias agropecuarias: 1) Agrovoc: Multilingual Agricultural Thesaurus - F.A.O. y 2)GEMET: General Multilingual Environmental Thesaurus.

Ciencias sociales y humanas: 1) Tesauro de la UNESCO y 2) Population Multilingual Thesaurus.

Ciencia y tecnología: 1) Astronomy Thesaurus Index. 2) Life Sciences Thesaurus, 3) Subject Vocabulary, Chemical Abstracts Service y 4) InterWATER: Tesauro de IRC - Centro Internacional de Agua Potable y Saneamiento.

Tecnologías y ciencias médicas: 1) MeSH: Medical Subject Headings (National Library of Medicine's USA) y 2) DECS: Descriptores en ciencias de la Salud (Biblioteca Regional de Medicina BIREME-OPS).

Multidisciplinarias: 1) LEMB - Listas de Encabezamientos de Materia y 2) LCSH- Library of Congress Subject Headings.

También se pueden encontrar listas de temas y palabras claves, consultando las distintas bases de datos disponibles a través del Portal del Sistema Nacional de Bibliotecas[1], en la sección Recursos bibliográficos.ºpción "Bases de datos".

Abstract

Es el mismo resumen pero traducido al inglés. Se debe usar una extensión máxima de 12 renglones. Al final del Abstract se deben traducir las anteriores palabras claves tomadas del

[1]ver: www.sinab.unal.edu.co

texto (mínimo 3 y máximo 7 palabras), llamadas keywords. Es posible incluir el resumen en otro idioma diferente al español o al inglés, si se considera como importante dentro del tema tratado en la investigación, por ejemplo: un trabajo dedicado a problemas lingüísticos del mandarín seguramente estaría mejor con un resumen en mandarín.

Keywords: palabras clave en inglés(máximo 10 palabras, preferiblemente seleccionadas de las listas internacionales que permitan el indizado cruzado)

Contenido

Lista de símbolos

Esta sección es opcional, dado que existen disciplinas que no manejan símbolos y/o abreviaturas.

Se incluyen símbolos generales (con letras latinas y griegas), subíndices, superíndices y abreviaturas (incluir sólo las clases de símbolos que se utilicen). Cada una de estas listas debe estar ubicada en orden alfabético de acuerdo con la primera letra del símbolo.

Símbolos con letras latinas

Símbolo	**Término**	**Unidad SI**	**Definición**
A	Área	m^2	$\int\int dxdy$
A_{BET}	Área interna del sólido	$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{g}}$	ver DIN ISO 9277
A_{g}	Área transversal de la fase gaseosa	m^2	Ec...
A_{s}	Área transversal de la carga a granel	m^2	Ec...
a	Coeficiente	1	Ec...
a	Contenido de ceniza	1	$\frac{m_{\mathrm{ceniza}}}{m_{\mathrm{bm},0}}$
c	Contenido de carbono	1	$\frac{m_{\mathrm{C}}}{m}$
c	Longitud de la cuerda	m	Figura...
c	Concentración de la cantidad de materia	$\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{m}^3}$	$\frac{n}{V}$
D	Diámetro	m	
E_{A}	Energía de activación	$\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{mol}}$	Ec....
F	Fracción de materia volátil	1	ver DIN 51720
Fr	Número de Froude	1	$\frac{\omega^2 R}{g_0}$
$\overrightarrow{g}$	Aceleración de la gravedad	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$
H	Entalpía	J	$U + PV$
H_{o}	Poder calorífico superior	$\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$	ver DIN 51857

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
h	Contenido de hidrógeno	1	$\frac{m_{\mathrm{H}}}{m}$
K	Coeficiente de equilibrio	1	Ec...
L	Longitud	m	DF
L	Longitud del reactor	m	Figura...
m	Masa	kg	DF
$\dot{m}$	Flujo de masa	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$	$\frac{m}{t}$
n	Velocidad de rotación	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	$\frac{\omega}{2\pi}$
n	Cantidad de materia	mol	DF
P	Presión	Pa	$\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{A}$
Q	Calor	kJ	1. LT
T	Temperatura	K	DF
t	Tiempo	s	DF
x_{i}	Fracción de la cantidad de materia	1	$\frac{n_{\mathrm{i}}}{n}$
V	Volumen	m^3	$\int dr^3$
$\vec{u}$	Velocidad	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$(\frac{dr}{dt}, r\frac{dv}{dt}, \frac{dz}{dt})$
w_{i}	Fracción en masa del componente i	1	$\frac{m_{\mathrm{i}}}{m_0}$
$w_{\mathrm{w,i}}$	Contenido de humedad de la sustancia i	1	$\frac{m_{\mathrm{H_2O}}}{m_{\mathrm{i},0}}$
Z	Factor de gases reales	1	$\frac{pv}{RT}$

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
α_{BET}	Factor de superficie	$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{g}}$	$(w_{\mathrm{F,waf}})(A_{\mathrm{BET}})$
β_{i}	Grado de formación del componente i	1	$\frac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{bm},0}}$
γ	Wandhaftreibwinkel (Stahlblech)	1	Sección...
ϵ	Porosidad de la partícula	1	$1 - \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho_{\mathrm{w}}}$
η	mittlere Bettneigungswinkel (Stürzen)	1	Figura...

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
θ	Ángulo de inclinación de la cama	1	Figura...
θ_{O}	Ángulo superior de avalancha	1	Figura...
θ_{U}	Ángulo inferior de avalancha	1	Figura...
κ	Velocidad de calentamientoe	$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$	$\frac{dT}{dt}$
ν	Coeficiente estequiométrico	1	ver DIN 13345
ρ_{b}	Densidad a granel	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$\frac{m_{\mathrm{S}}}{V_{\mathrm{S}}}$ (Sección...)
ρ_{s}	Densidad aparente	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$\frac{m_{\mathrm{F}}}{V_{\mathrm{P}}}$ (Sección...)
ρ_{w}	Densidad verdadera	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$\frac{m_{\mathrm{F}}}{V_{\mathrm{F}}}$ (Sección...)
τ	Tiempo adimensional	1	Ec....
Φ_{V}	Flujo volumétrico	$\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$	$\frac{\Delta V}{\Delta t}$
ω	Velocidad angular	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	$\frac{dv}{dt}$

Subíndices

Subíndice	Término
bm	materia orgánica
DR	Dubinin-Radushkevich
E	Experimental
g	Fase gaseosa
k	Condensado
Ma	Macroporos
P	Partícula
p	Poro
p	Pirolizado
R	Reacción
t	Total
wf	Libre de agua
waf	Libre de agua y de ceniza
0	Estado de referencia

Superíndices

Superíndice	Término
n	Coeficiente x

Abreviaturas

Abreviatura	Término
$1.LT$	Primera ley de la termodinámica
DF	Dimensión fundamental
RFF	Racimos de fruta fresca

1. Introducción

En la introducción, el autor presenta y señala la importancia, el origen (los antecedentes teóricos y prácticos), los objetivos, los alcances, las limitaciones, la metodología empleada, el significado que el estudio tiene en el avance del campo respectivo y su aplicación en el área investigada. No debe confundirse con el resumen y se recomienda que la introducción tenga una extensión de mínimo 2 páginas y máximo de 4 páginas.

La presente plantilla maneja una familia de fuentes utilizada generalmente en LaTeX, conocida como Computer Modern, específicamente LMRomanM para el texto de los párrafos y CMU Sans Serif para los títulos y subtítulos. Sin embargo, es posible sugerir otras fuentes tales como Garomond, Calibri, Cambria, Arial o Times New Roman, que por claridad y forma, son adecuadas para la edición de textos académicos.

La presente plantilla tiene en cuenta aspectos importantes de la Norma Técnica Colombiana - NTC 1486, con el fin que sea usada para la presentación final de las tesis de maestría y doctorado y especializaciones y especialidades en el área de la salud, desarrolladas en la Universidad Nacional de Colombia.

Las márgenes, numeración, tamaño de las fuentes y demás aspectos de formato, deben ser conservada de acuerdo con esta plantilla, la cual esta diseñada para imprimir por lado y lado en hojas tamaño carta. Se sugiere que los encabezados cambien según la sección del documento (para lo cual esta plantilla esta construida por secciones).

Si se requiere ampliar la información sobre normas adicionales para la escritura se puede consultar la norma NTC 1486 en la Base de datos del ICONTEC (Normas Técnicas Colombianas) disponible en el portal del SINAB de la Universidad Nacional de Colombia[1], en la sección Recursos bibliográficos.ºpción "Bases de datos". Este portal también brinda la posibilidad de acceder a un instructivo para la utilización de Microsoft Word y Acrobat Professional, el cual está disponible en la sección "Servicios", opción "Trámitesz enlace .Entrega de tesis".

La redacción debe ser impersonal y genérica. La numeración de las hojas sugiere que las páginas preliminares se realicen en números romanos en mayúscula y las demás en números

[1]ver: www.sinab.unal.edu.co

arábigos, en forma consecutiva a partir de la introducción que comenzará con el número 1. La cubierta y la portada no se numeran pero si se cuentan como páginas.

Para trabajos muy extensos se recomienda publicar más de un volumen. Se debe tener en cuenta que algunas facultades tienen reglamentada la extensión máxima de las tesis o trabajo de investigación; en caso que no sea así, se sugiere que el documento no supere 120 páginas.

No se debe utilizar numeración compuesta como 13A, 14B ó 17 bis, entre otros, que indican superposición de texto en el documento. Para resaltar, puede usarse letra cursiva o negrilla. Los términos de otras lenguas que aparezcan dentro del texto se escriben en cursiva.

2. Números Surreales

2.1. Definición de los números surreales

Los números surreales se definen de manera recursiva y parecida a las cortaduras de Dedekind[1]. Cada número surreal x es una pareja de conjuntos de números surreales a los que se les llama L y R de izquierdo y derecho en inglés, y se representa $x \equiv \{L \mid R\}$ (Aquí usamos el símbolo $\equiv$ para diferenciarlo de la igualdad en números surreales). La idea es que el número x sea "mayor" que todos los números de L y que sea "menor" que todos los números de R, que en cierto sentido sea el número más 'sencillo' que está en la mitad de los dos conjuntos.

Construyamos un número surreal. Como la definición es recursiva, empezamos con el conjunto más sencillo posible: el conjunto vacío. El primer número que se crea de esta manera es el número conformado por la pareja $L = \emptyset$ y $R = \emptyset$, es decir, $\{\emptyset \mid \emptyset\}$. A este número se le llama 0, y veremos luego que tiene las mismas propiedades del 0 de los números reales, esto es, es el módulo de la suma en números surreales y cualquier número multiplicado por éste da 0.

Ya teniendo el 0, se pueden formar las parejas de conjuntos

$$\{\{0\} \mid \emptyset\}\,, \quad \{\emptyset \mid \{0\}\}\,, \quad \{\{0\} \mid \{0\}\}\,.$$

Para hacer la notación más sencilla, vamos a escribir solamente los elementos de L y R sin los corchetes, por ejemplo $\{\{0\} \mid \emptyset\} \equiv \{0 \mid \}$ y también $0 \equiv \{\emptyset \mid \emptyset\} \equiv \{ \mid \}$.

Si queremos que el número surreal esté entre L y R entonces tendremos que todos los elementos de L tienen que ser 'menores' que todos los elementos de R, y aunque aún no hayamos definido un orden en el conjunto podemos ver que el par $\{0 \mid 0\}$ no puede ser un número surreal ya que L y R comparten el mismo elemento.

Las otras dos parejas que quedan, $\{0 \mid \}$ y $\{ \mid 0\}$, sí son números surreales y tienen su propio nombre. Diremos que $1 \equiv \{0 \mid \}$ y $-1 \equiv \{ \mid 0\}$. Luego veremos que efectivamente estos dos números tienen las mismas propiedades que sus correspondientes números reales.

Si seguimos haciendo nuevas parejas con los números que ya creamos tendremos entonces

[1] En las cortaduras de Dedekind, se definen los números reales como parejas de conjuntos L y R de números racionales con la idea de que el número que está representando sea mayor o igual que todos los elementos de L y menor o igual que todos los elementos de R.

las parejas

$$\begin{aligned}
&\{1\mid\},\{\mid 1\},\\
&\{-1\mid\},\{\mid -1\},\\
&\{0,1\mid\},\{0\mid 1\},\{\mid 0,1\}\\
&\{-1,0\mid\},\{-1\mid 0\},\{\mid -1,0\}\\
&\{-1,1\mid\},\{-1\mid 1\},\{\mid -1,1\}\\
&\{-1,0,1\mid\},\{-1,0\mid 1\},\{-1\mid 0,1\},\{\mid -1,0,1\},
\end{aligned}$$

y podemos seguir haciendo más números con estos nuevos números.

Como convención, si tenemos un número surreal $x \equiv \{L|R\}$, entonces llamaremos x^L a los elementos de L y al conjunto L lo llamaremos X^L en mayúscula; también llamaremos x^R a los elementos de R y al conjunto R lo llamaremos X^R en mayúscula. Además, llamaremos ancestro de x a cualquier elemento de X^L o de X^R.

Hasta ahora hemos hablado de una relación de orden sin definirla, lo hemos hecho para que se pueda ver primero el carácter recursivo de los números surreales. El orden también tiene una definición igualmente recursiva, lo que hacemos es intentar definir el orden a partir de los ancestros del número, es decir, para los x^L y x^R.

Para motivar las definiciones formales, tanto de números surreales como de orden, intentemos pensar en un número surreal $x = \{L \mid R\}$. Queremos que este orden sea un orden total, igual que en los números reales, entonces cuando decimos que

$$x^L < x^R$$

para todos los elementos de los conjuntos X^L y X^R respectivamente, estamos diciendo equivalentemente que

$$x^R \not\leq x^L.$$

De esta forma, usando solamente la relación de orden $\leq$ podemos expresar que todos los elementos de X^L deben ser menores que los elementos de X^R.

Definición 2.1 (Número surreal)**.** Sea $x = \{L \mid R\}$ una pareja de conjuntos de números surreales. Se dice que x es un **número surreal**, si y solamente si, se tiene que ningún x^R es menor o igual ($\leq$) que algún x^L.

Si tenemos dos números surreales x y y, y queremos definir la relación de orden $x \leq y$ en base a sus ancestros, podemos tener en cuenta las desigualdades

$$x^L < x < x^R, \quad y^L < y < y^R,$$

que queremos que se cumplan para todos los números surereales. Estas desigualdades juntas con el hecho de que $x \leq y$ generan las desigualdades

$$x < y^R, \quad x^L < y,$$

que están basadas en elementos más 'simples', es decir, los ancestros de x y y. Si queremos escribirlo todo con respecto a la relación $\leq$ tenemos que

$$x \not\geq y^R, \quad x^L \not\geq y.$$

Definición 2.2 (Orden en números surreales)**.** Sean x y y dos números surreales. Se dice que $x \leq y$, si y solamente si, se tiene que ningún x^L es mayor o igual ($\geq$) que y y ningún y^R es menor o igual ($\leq$) a x.

Vamos a utilizar la misma convención que se utiliza para las relaciónes de orden. Tenemos que $x \leq y$ es equivalente a decir que $y \geq x$, además, si tenemos que $x \leq y$ y $y \leq x$ se dice que $x = y$. También, si tenemos que $x \leq y$ pero $x \neq y$, entonces se escribe $x < y$, de la misma manera se define para $x > y$.

Fíjese que esta es la primera vez que en nuestro texto aparece el signo $=$ y significa algo diferente a lo que significa nuestro otro signo $\equiv$, en nuestro caso $\equiv$ lo vamos a utilizar para referirnos a igualdad de conjuntos mientras que $=$ lo vamos a utilizar como nuestra igualdad de números surreales.

Vamos a mostrar un ejemplo de cómo se utilizan estas definiciones intentando demostrar que las parejas que conocemos son números surreales.

Ejemplo 1. Vamos a mostrar que $0 \equiv \{\,|\,\}, 1 \equiv \{0\,|\,\}$ y $-1 \equiv \{\,|\,0\}$ son efectivamente números surreales.

Primero mostremoslo para 0. Tenemos que probar que ningún elemento 0^L es mayor o igual que algún elemento de 0^R, pero ya que tanto L como R son vacíos entonces esto se cumple por vacuidad, por lo tanto, el 0 sí es efectivamente un número.

Los ejemplos de 1 y -1 se parecen. Probemos primero para $1 = \{0\,|\,\}$. Tenemos que probar que ningún elemento 1^L es mayor o igual que algún elemento de 1^R, pero fíjese que no hay ningún elemento en R, por lo tanto tendremos que también se cumple por vacuidad.

Para -1 es algo parecido. Tenemos que probar que ningún elemento $(-1)^L$ es mayor o igual que algún elemento de $(-1)^R$, pero tenemos que L es vacío, por lo tanto tendremos que también se cumple por vacuidad. Concluimos que tanto 1 como -1 son efectivamente números surreales.

Ejemplo 2. Un ejemplo más de como se puede usar esta definición de orden es probar las desigualdades esperadas $-1 < 0$ y $0 < 1$.

Probemos $0 < 1$, para probar esta desigualdad tendremos que probar que $0 \leq 1$ y además que $0 \neq 1$. Primero probemos que $0 \leq 1$. Tenemos que probar que no hay elementos en L y R de los respectivos números tales que

$$0 \geq 1^R, \quad 0^L \geq 1,$$

pero fíjese que no hay ningún elemento 1^R, ni tampoco ningún elemento 0^L, por lo tanto la propiedad se cumple por vacuidad.

Ahora probemos que $0 \neq 1$, como ya sabemos que $0 \leq 1$ entonces esto es equivalente a mostrar que $0 \not\geq 1$. Luego, queremos probar que existe algún elemento tal que

$$1^L \not\geq 0.$$

Fíjese que en 1^L está el elemento 0, y efectivamente $0 \equiv 1^L \geq 0$, por lo que tenemos que $0 < 1$.

La demostración de que $(-1) < 0$ es análoga, es la misma por la simetría de las definiciones.

Algo que aún no hemos probado pero hemos inferido es que $\leq$ es una relación de orden, es decir, que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. La antisimetría la obtenemos por nuestra definición de igualdad $(=)$ en los números surreales. Las pruebas de las otras dos propiedades utilizan fuertmente la naturaleza recursiva de la definición de orden. Las pruebas son por inducción, pero la hipótesis de inducción supondrá que la propiedad se cumple cuando se cambia alguna de las variables por algun ancestro de la misma, así, nuestro caso base será cuando todas las variables sean 0 porque si alguna no es 0 entonces se puede reducir la pregunta a preguntas sobre los ancestros de las variables.

Teorema 2.1 (Reflexividad)**.** *Para todo número surreal x, se tiene que $x \leq x$.*

Demostración. Fíjese que para 0 se tiene la propiedad porque los conjuntos L y R de 0 son vacíos.

Sea x un número surreal y supongamos como hipótesis de inducción que la propiedad se cumple para todos los ancestros de x. Tenemos que probar que $x \leq x$, es decir, para ningún elemento de X^L y X^R se tiene que

$$x \leq x^L, \quad x^R \leq x.$$

Veamos la primera parte, es decir, sea $x^L \in X^L$ mostremos que $x \not\leq x^L$. Por definición queremos mostrar que existe un elemento[2] $z \in (X^L)^R$ tal que $x \geq z$, o que existe un elemento $y \in X^L$ tal que $y \geq x^L$. Si tomamos $y = x^L \in X^L$ entonces tenemos que $y = x^L \geq x^L$ por la hipótesis te inducción, por lo tanto, $x \not\leq x^L$.

Para la segunda parte, es decir, que $x^R \not\leq x$, se hace un análisis parecido. Sea $x^R \in X^R$, queremos mostrar que existe un elemento $z \in (X^R)^L$ tal que $z \geq x$, o que existe un elemento $y \in X^R$ tal que $y \leq x^R$. Si tomamos $y = x^R \in X^R$ entonces tenemos que $y = x^R \leq x^R$ por la hipótesis de inducción, por lo tanto, $x^R \not\leq x$. □

Corolario 2.1.1. *Para todo número surreal x, $x = x$.*

Demostración. Utilizamos la reflexividad de la relación de orden. □

[2] Acá usamos la notación $(X^L)^R$ para referirnos al conjunto R del elemento x^L que habíamos descrito.

Para demostrar la transitividad necesitaremos utilizar la inducción pero en triplas de números surreales, es decir, vamos a demostrar la transitividad para (x, y, z) pero usando la hipótesis para las triplas que contengan alguno de los ancestros de x, y o z. Como siempre estaremos preguntando sobre la propiedad en alguno de los ancestros, al final llegaremos a preguntarlo en el conjunto $(0, 0, 0)$ que será nuestro caso base.

Teorema 2.2 (Transitividad)**.** *Sean x, y, z números surreales. Si tenemos que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces se tiene que $x \leq z$.*

Demostración. Utilicemos inducción sobre las triplas (x, y, z). Fíjese que para la tripla $(0, 0, 0)$ la propiedad se cumple gracias a la reflexividad.

Ahora, supongamos por inducción que se cumple para todas las triplas que contengan algún ancestro de x, y o z, por ejemplo, para la tripla (z^R, x, y) se vería como

$$(z^R \leq x) \text{ y } (x \leq y) \implies z^R \leq y.$$

Supongamos además que $x \leq y$ y $y \leq z$. Demostremoslo por contradicción, supongamos que $x \not\leq z$, esto es, existe un elemento $z^R \leq x$ o existe un elemento $x^L \geq z$.

Veamos el primer caso, es decir, cuando existe un $z^R \in Z^R$ tal que $z^R \leq x$. Como $x \leq y$, usando la hipótesis de inducción tenemos que $z^R \leq y$, por lo tanto, por la definición de orden tendremos que $y \not\leq z$, contradicción.

Ahora veamos el segundo caso, supongamos que existe un $x^L \in X^L$ tal que $x^L \geq z$. Como $z \geq y$,usando la hipótesis de inducción tenemos que $x^L \geq y$, por lo tanto, por la definición de orden tendremos que $x \not\leq y$.

En cualquier caso es una contradicción, entonces la relación $\leq$ es transitiva. □

Corolario 2.2.1. *Sean x, y, z números surreales. Tenemos las siguientes implicaciones:*

- *Si $x = y, y = z$, entonces $x = z$.*
- *Si $x < y, y < z$, entonces $x < z$.*
- *Si $x \leq y, y < z$, entonces $x < z$.*
- *Si $x < y, y \leq z$, entonces $x < z$.*

Con esto ya podemos decir que la relación $(\leq)$ es de orden, y además también tenemos una relación de equivalencia $(=)$ entre números surreales. Además, gracias a la transitividad le podemos dar sentido a expresiones del tipo $x \leq y \leq z$, que significan $x \leq y$ y $y \leq z$ pero que también implican que $x \leq z$.

Una pregunta que nos podríamos hacer en este momento es si existen distintas representaciones de un mismo número, es decir: ¿Existen dos números surreales x y y tales que $x = y$ pero que sus conjuntos L y R sean diferentes? En otras palabras ¿Existen x y y números surreales tales que $x \not\equiv y$ pero $x = y$?

La respuesta la tenemos en varias de los ejemplos que ya tenemos sobre números surreales, es más, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\{\ \mid -1\} = \{\ \mid -1, 0\} = \{\ \mid -1, 1\} = \{\ \mid -1, 0, 1\}\,,\\
&-1 = \{\ \mid 0, 1\}\,,\\
&\{-1 \mid 1\} = \{-1 \mid 1, 0\}\,,\\
&0 = \{-1 \mid 1\} = \{-1 \mid\ \} = \{\ \mid 1\}\,,\\
&\{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\}\,,\\
&1 = \{-1, 0 \mid\ \}\,,\\
&\{1 \mid\ \} = \{0, 1 \mid\ \} = \{-1, 1 \mid\ \} = \{-1, 0, 1 \mid\ \}\,.
\end{aligned}
$$

Veamos la justificación de algunos de estos ejemplos

Ejemplo 3. Mostremos que $1 \equiv \{0 \mid\ \} = \{-1, 0 \mid\ \}$. Notemos $x \equiv \{-1, 0 \mid\ \}$, queremos mostrar que $1 \leq x$ y que $x \leq 1$. Para mostrar que $1 \leq x$ tenemos que mostrar que

$$1 \ngeq x^R \text{ y } 1^L \ngeq x.$$

Por un lado tenemos que $X^R = \emptyset$ entonces la desigualdad $1 \ngeq x^R$ se cumple por vacuidad. Para la otra desigualdad tenemos que $1^L = \{0\}$, por lo tanto lo que tenemos que mostrar es que $0 \ngeq x$ y fíjese que en $0 \in X^L$ por lo que podemos afirmar que $0 \leq 0 = x^L \in X^L$ y tenemos que $0 \ngeq x$ por definicón. Con esto concluimos que $1 \leq x$.

Ahora mostremos que $x \leq 1$. Tenemos que mostrar que

$$x \ngeq 1^R \text{ y } x^L \ngeq 1.$$

Para la desigualdad $x \ngeq 1^R$ tenemos que $1^R = \emptyset$, por lo tanto la desigualdad se cumple por vacuidad. Ahora, queremos mostrar que $x^L \ngeq 1$. Fíjese que $X^L = \{-1, 0\}$, pero en el ejemplo 2 mostramos que $-1 < 0 < 1$ entonces por definición de $<$ tenemos que para todo $x^L \in X^L$ se cumple que $x^L \ngeq 1$. Con esto podemos concluir que $x = 1$.

Si nos ponemos a ver los demás ejemplos con relación a este podemos ver que algunos tienen cierta similitud. En este, lo que le hicimos al 1 fue añadirle un elemento a 1^L que fuera menor que alguno de los elementos que ya estuviera, en este caso, añadimos el -1 que era menor al 0 que ya pertenecía a 1^L, y esto hizo que no cambiara su valor. Un argumento parecido podemos utilizarlo por ejemplo para probar que $-1 = \{\ \mid 0, 1\}$, e incluso, si lo analizamos mejor, podemos utilizar el mismo argumento para probar otras igualdades como $\{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\}$.

En conclusión, agregar a L algún número que sea menor a algún otro elemento del conjunto L, o agregar a R algún número que sea mayor a algún elemento del conjunto R, genera un número igual.

Ejemplo 4. En nuestros ejemplos hay varios que no se pueden demostrar con el mismo lente del anterior ejemplo. Más específicamente, las igualdades

$$0 = \{-1 \mid 1\} = \{-1 \mid \} = \{ \mid 1\}.$$

Sabemos que $0 \equiv \{ \mid \}$, por lo tanto la relación $0 \leq x$ significa que $x^R \not\leq 0$ para todo $x^R \in X^R$, y por otro lado, la relación $x \leq 0$ significa que $x^L \not\geq 0$ para todo $x^L \in X^L$. Por lo tanto, para verificar estas igualdades lo único que tenemos que revisar es que sus respectivos ancestros cumplan que

$$x^L \not\geq 0 \text{ y } x^R \not\leq 0,$$

que se cumplen ya que $-1 < 0 < 1$.

Una propiedad que referenciamos en las motivación de las definiciones pero aún no hemos demostrado es la idea de que el número siempre está entre los elementos de L y los elementos de R, más específicamente

Teorema 2.3. *Sea x un número surreal. Tenemos que $x^L < x < x^R$.*

Demostración. Basta revisar la prueba para la parte izquierda de la desigualdad puesto que la parte derecha se hace de manera análoga. Probemos primero que $x^L \leq x$ y luego verificamos que la desigualdad es estricta.

Veamos que $x^L \leq x$ por inducción. La propiedad es verdadera para 0 por vacuidad.

Ahora, supongamos que es verdad para los ancestros de x y probemos que es verdad para x. Fijemos un $x^L \in X^L$. Para probar que $x^L \leq x$ tenemos que probar que $x^R \not\leq x^L$ para todos los elementos $x^R \in X^R$, y también, que para todo elemento elemento $y \in (X^L)^L$ tenemos que $y \not\geq x$.

La primera parte la tenemos porque x es un número surreal, entonces ningún elemento de X^L es mayor o igual que ningún elemento de X^R. Para la segunda parte, $y \not\geq x$ significa que o existe $z \in X^L$ tal que $y \leq z$, o existe $y^R \in Y^R$ tal que $y^R \leq x$. Fíjese que si tomamos $z = x^L$ entonces, como $y \in (X^L)^L$, tendremos por hipótesis de inducción que $y \leq x^L = z$, con lo que concluimos que $x^L \leq x$.

Ahora, mostremos que $x^L \not\geq x$. Tenemos que mostrar que existe $y \in X^L$ tal que $y \geq x^L$, o que existe $z \in (X^L)^R$ tal que $z \leq x$. Si tomamos $y = x^L$ tendremos por reflexividad que $x^L \leq x^L = y$, por lo tanto $x^L \not\geq x$ y podemos concluir que $x^L < x$. □

Corolario 2.3.1 (Orden total)**.** *Sean x, y números surreales. Si $x \not\leq y$ entonces tenemos que $x > y$.*

Demostración. Supongamos que $x \not\leq y$. Esto quiere decir que, o existe $x^L \geq y$, o existe $y^R \leq x$. Si existe $x^L \geq y$ tenemos que $y \leq x^L < x$ y por transitividad $y < x$. En el otro caso, si existe $y^R \leq x$ tenemos que $y < y^R \leq x$ y por transitividad $y < x$. □

Fíjese que este corolario, combinado con la definición de orden estricto, nos da la equivalencia

$$x < y \Leftrightarrow x \not\geq y.$$

Otra conclusión que podemos sacar de este corolario es que en los números surreales se cumple la ley de la tricotomía, esto es, si tenemos dos números surreales x, y se tiene que cumplir que $x < y$, $x = y$ o $x > y$, y se cumple solamente una de éstas.

Los números surreales, entonces, se definen como clases de equivalencia de la relación $(=)$. Un problema natural que se nos va a presentar de ahora en adelante cuando intentemos definir operaciones en números surreales es que debemos ver si estas operaciones son compatibles con la relación de equivalencia $(=)$.

Incluso algo que nos podemos preguntar es si nuestra relación de orden es 'compatible' con nuestra definición de número surreal. Más precisamente, si cambiamos los elementos del L y el R por elementos iguales $(=)$, ¿Se cambia la clase de equivalencia del número?

Pongamos un ejemplo para ilustrar este problema. Tenemos que $0 \equiv \{\ |\ \} = \{\ |\ 1\}$. Como $1 \equiv \{0\ |\ \}$ entonces, ¿Será que $1 = \{\{\ |\ 1\}\ |\ \}$? Es decir, ¿Será que podemos cambiar el número 0 por otro número que sea igual $(=)$ a 0 sin cambiar el valor del número 1?

Definición 2.3. Sean X y Y dos conjuntos de números surreales. Se dice que $X = Y$ cuando para todo $x \in X$ existe un $y \in Y$ tal que $x = y$, y además, para todo $y' \in Y$ existe un $x' \in X$ tal que $y' = x'$.

Teorema 2.4. *Sean L, L', R, R' conjuntos de números surreales tales que $L = L'$ y $R = R'$. Además, supongamos que $\{L \mid R\}$ es un número surreal. Luego, tenemos que $\{L' \mid R'\}$ es un número surreal y $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$.*

Demostración. Primero mostremos que $\{L' \mid R'\}$ es un número surreal, esto es, mostremos que para todo $r' \in R'$ y todo $l' \in L'$ se tiene que $r' \not\leq l'$, o equivalentemente, $l' < r'$. Por la hipótesis, existen $l \in L$ y $r \in R$ tales que $l' = l$ y $r' = r$, además, como $\{L \mid R\}$ es un número surreal tenemos que $l < r$, con lo que tenemos las desigualdades

$$l' = l < r = r',$$

con lo que podemos concluir que $\{L' \mid R'\}$ es un número surreal.

Ahora, mostremos que en efecto $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$. Para esto es suficiente mostrar que $\{L \mid R\} \leq \{L' \mid R'\}$, la otra desigualdad se sigue por simetría.

Llamemos $x = \{L \mid R\}$ y $x' = \{L' \mid R'\}$. Tenemos que probar que $x^L < x'$ y $x < (x')^R$, luego fijemos $x^L \in X^L$ y $(x')^R \in (X')^R$. como $L = L'$, existe $y \in L'$ tal que $x^L = y$, entonces tenemos que $x^L = y < x'$. Por otro lado, como $R = R'$, existe $z \in R$ tal que $(x')^R = z$, por lo tanto tenemos que $x < z = (x')^R$, y como es para cualquier x^L y $(x')^R$ tendríamos que $\{L \mid R\} \leq \{L' \mid R'\}$ y concluiríamos que $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$. □

2.2. Suma de números surreales

La suma de los números surreales también se define recursivamente basandose en la suma de sus ancestros.

Definición 2.4 (Definición de suma)**.** Dados dos números surreales x, y definimos su suma como

$$x + y \equiv \left\{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\right\}.$$

Esta definición hace que la suma sea automáticamente conmutativa ya que es lo mismo en definición hacer $x + y$ que $y + x$.

Una cosa que no queda muy clara con la definición de suma es si la suma de dos números surreales genera un nuevo número surreal, esto es, si dados x, y números surreales, los elementos del conjunto $(X + Y)^L$ son todos menores a los elementos del conjunto $(X + Y)^R$. Este tema lo volveremos a tocar cuando demostremos las propiedades que tiene la suma con respecto al orden de números surreales ($\leq$).

Como todas las definiciones recursivas que hemos hecho, la suma se define eventualmente con base en el número 0, por eso es bueno ver qué pasa cuando se suma $0 + 0$.

Ejemplo 5. ¿Qué pasa cuando se suma $0+0$? Sabemos que $0 \equiv \{ \mid \}$, por lo tanto, no existe ni 0^L ni 0^R. Lo que tendremos entonces es

$$0 + 0 \equiv \left\{0^L + 0, 0 + 0^L \,\middle|\, 0^R + 0, 0 + 0^R\right\} \equiv \{ \mid \} \equiv 0,$$

por lo tanto tendremos que $0 + 0 \equiv 0$.

Ejemplo 6. Más aún, si el 0 de los números surreales *"se parece"* al 0 de los números reales entonces tendríamos que el 0 es módulo de la suma, esto es, $x + 0 \equiv x$ para todo x número surreal.

Mostremos esto por inducción. Nuestro caso base es cuando $x \equiv 0$, es decir $0 + 0$ y ya probamos que $0 + 0 \equiv 0 \equiv x$ luego en el caso base se cumple.

Supongamos que se cumple para todos los elementos en los conjuntos X^L y X^R. Tenemos entonces que

$$x + 0 \equiv \left\{x^L + 0, x + 0^L \mid x^R + 0, x + 0^L\right\} \equiv \left\{x^L + 0 \,\middle|\, x^R + 0\right\}$$

y por hipótesis de inducción tenemos que $x^L + 0 \equiv x^L$ y $x^R + 0 \equiv x^R$, por lo tanto

$$x + 0 \equiv \left\{x^L \,\middle|\, x^R\right\} \equiv x.$$

Ejemplo 7. También hemos definido los números 1 y -1. Miremos qué pasa cuando se suman entre ellos.

Primero,

$$1 + (-1) \equiv \left\{1^L + (-1) \;\middle|\; 1 + (-1)^R\right\} \equiv \{0 + (-1) \mid 1 + 0\} \equiv \{-1 \mid 1\} = 0.$$

También tenemos que

$$1 + 1 \equiv \left\{1^L + 1, 1 + 1^L \;\middle|\; \right\} \equiv \{0 + 1, 1 + 0 \mid \} \equiv \{1 \mid \},$$

por lo tanto, llamamos 2 al número surreal $\{1 \mid \}$. Un análisis similar se puede hacer para decir que $(-1) + (-1) \equiv \{ \mid -1\}$, por lo tanto $-2 \equiv \{ \mid -1\}$.

Tanto en estos ejemplos como en la definición hemos estado usando el símbolo ($\equiv$) para denotar la igualdad entre conjuntos. Nuestro objetivo en esta sección, además de mostrar las propiedades típicas de la suma, es mostrar que esta suma es en efecto compatible con la relación de equivalencia ($=$). En cierto sentido, queremos poder reemplazar el símbolo ($\equiv$) por el símbolo ($=$) asegurándonos que aquello no trae ningún problema.

La operación de suma en los números reales genera un grupo conmutativo, en nuestro caso queremos mostrar lo mismo para los números surreales. Ya hemos mostrado que la suma es conmutativa y que además tiene un módulo, lo que nos falta para mostrar que la suma en los números surreales genera un grupo conmutativo es mostrar que todos los elementos tienen inversos aditivos y además que la suma es asociativa.

Teorema 2.5 (Asociatividad de la suma)**.** *Sean x, y, z números surreales. Tenemos que*

$$(x + y) + z \equiv x + (y + z).$$

Demostración. Mostremos el teorema por inducción. Nuestro caso base es cuando todos los elementos son 0, en este caso tenemos

$$(0 + 0) + 0 \equiv 0 + 0 \equiv 0 + (0 + 0).$$

Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que la asociatividad se cumple para las triplas con al menos un ancestro de x, y, z, por ejemplo, de los elementos de los conjuntos L de cada número se tiene que

$$\begin{aligned}
&(x^L + y) + z \equiv x^L + (y + z),\\
&(x + y^L) + z \equiv x + (y^L + z),\\
&(x + y) + z^L \equiv x + (y + z^L),
\end{aligned}$$

igualmente para los elementos de los conjuntos R.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &\equiv \left\{(x + y)^L + z, (x + y) + z^L \;\middle|\; \dots\right\}\\
&\equiv \left\{(x^L + y) + z, (x + y^L) + z, (x + y) + z^L \;\middle|\; \dots\right\}\\
&\equiv \left\{x^L + (y + z), x + (y^L + z), x + (y + z^L) \;\middle|\; \dots\right\} \qquad \text{(h. de inducción)}\\
&\equiv \left\{x^L + (y + z), x + (y + z)^L \;\middle|\; \dots\right\}\\
&\equiv x + (y + z).
\end{aligned}$$

La demostración para el conjunto R se hace de la misma manera, está indicado con los puntos suspensivos. □

Los inversos aditivos se definen también recursivamente con base en los inversos aditivos de los ancestros del número.

Definición 2.5 (Inversos aditivos)**.** Sea x un número surreal. Definimos su inverso aditivo como

$$-x \equiv \left\{-(x^L) \mid -(x^R)\right\}.$$

Ejemplo 8. Veamos los inversos de algunos de los números que ya nombramos. Por un lado tenemos que

$$(-0) \equiv \left\{-(0^R) \mid -(0^L)\right\} \equiv \{\ \mid\ \} \equiv 0,$$

puesto que sus conjuntos L y R son vacíos.

Veamos también que efectivamente aquel que llamamos -1 en la sección anterior es en efecto el inverso aditivo de 1,

$$(-1) \equiv \left\{-(1^R) \mid -(1^L)\right\} \equiv \{\ \mid -0\} \equiv \{\ \mid 0\} \equiv -1.$$

También podemos hacer el mismo chequeo para 2 y -2.

Teorema 2.6. *Sea x un número surreal. Tenemos que $x + (-x) = 0$.*

Demostración. Mostremos el teorema por inducción. Primero veamos el caso base cuando $x \equiv 0$. Tenemos que

$$x + (-x) \equiv 0 + (-0) \equiv 0 + 0 \equiv 0,$$

por lo tanto se cumple para 0.

Ahora, supongamos por inducción que la propiedad se cumple para los ancestros de x. Mostremos primero que $x + (-x) \leq 0$. Por contradicción supongamos que $x + (-x) > 0$, luego existe algún elemento $(x + (-x))^L \geq 0$. El elemento $(x + (-x))^L$ puede ser de la forma $x^L + (-x)$ o de la forma $x + (-x)^L$, veamos los dos casos.

Supongamos primero que $(x + (-x))^L \equiv x^L + (-x)$. Como en el conjunto R de $-x$ se encuentra el elemento $-(x^L)$, entonces tenemos que en el conjunto R del número $x^L + (-x)$ se encuentra el elemento $y \equiv x^L + (-(x^L))$ que es igual a 0 por hipótesis de inducción, por lo tanto, se tiene que $(x^L + (-x)) < 0$, lo que contradice que $(x^L + (-x)) \equiv (x + (-x))^L \geq 0$.

Ahora, supongamos que $(x + (-x))^L \equiv x + (-x)^L$. Los elementos de $(-X)^L$ son de la forma $-(x^R)$, por lo tanto tenemos que $(x + (-x))^L \equiv x + (-(x^R))$. En el conjunto R del número $x + (-(x^R))$ se encuentra el elemento $x^R + (-(x^R))$ que es igual a 0 por hipótesis de inducción, por lo tanto, se tiene que $x + (-(x^R)) < 0$, lo que contradice que $x + (-(x^R)) \equiv (x + (-x))^L \geq 0$.

Con lo que podemos concluir que $x + (-x) \leq 0$. La demostración de $x + (-x) \geq 0$ es análoga. □

Fíjese que en los ejemplos tenemos que $1+(-1)=0$ pero $1+(-1)\not\equiv 0$ ya que $0\equiv\{\ |\ \}$ mientras que $1+(-1)\equiv\{-1\mid 1\}$. En este sentido, aún no hemos mostrado que la suma genera un grupo conmutativo sobre los números surreales ya que, aunque ya tenemos las propiedades para las clases de equivalencia de la relación $(=)$, no hemos mostrado que la suma es compatible con la relación $(=)$.

¿Qué significa que la suma sea compatible con la relación $(=)$? Queremos mostrar que si $x=x'$ entonces $x+y=x'+y$ para todo número surreal y, de modo que no importa cual representante de la clase de equivalencia se utilice en las suma, el resultado siempre va a ser igual $(=)$. Primero probaremos esto para la relación de orden $(\leq)$ lo que implica que también se tiene para la relación de equivalencia $(=)$.

Teorema 2.7 (Cancelación)**.** *Sean x,y,z números surreales. Si tenemos que $x+y<x+z$ entonces $y<z$ y si tenemos que $x+y\leq x+z$ entonces $y\leq z$.*

Demostración. Vamos a demostrar estas dos proposiciones con la misma inducción, es decir, cuando hagamos la hipótesis de inducción vamos a suponer que las dos son ciertas para todas las triplas con ancestros.

El caso base de nuestra inducción es cuando $x\equiv y\equiv z\equiv 0$. En este caso nuestra propiedad es verdadera por las propiedades del número 0.

Ahora, supongamos por inducción que las propiedades se cumplen para todas las triplas que contienen al menos un ancestro de x,y,z, probemos entonces que la propiedad se cumple para x,y,z.

Primero supongamos que $x+y\leq x+z$. Con esta desigualdad podemos obtener las dos desigualdades

$$\begin{aligned}
&x+y^L\equiv(x+y)^L<x+y\leq x+z,\\
&x+y\leq x+z<(x+z)^R\equiv x+z^R,
\end{aligned}$$

de la primera tenemos $x+y^L<x+z$ con la que al aplicar la hipótesis de inducción obtenemos $y^L<z$, y de la segunda tenemos $x+y<x+z^R$ con la que al aplicar la hipótesis de inducción obtenemos $y<z^R$. Como $y^L<z$ y $y<z^R$, entonces, por la definición de orden, podemos concluir que $y\leq z$.

Ahora, supongamos que $x+y<x+z$. Esto significa que, o existe algun elemento tal que $(x+y)^R\leq x+z$ o existe algun elemento tal que $x+y\leq(x+z)^L$. Supongamos que existe un elemento tal que $(x+y)^R\leq x+z$, el otro caso se hace análogamente.

Nuestro elemento $(x+y)^R$ puede ser de dos formas, puede ser de la forma x^R+y o de la forma $x+y^R$, veamos los dos casos. Supongamos que $(x+y)^R\equiv x^R+y$, en este caso tenemos que

$$x^R+y\equiv(x+y)^R\leq x+z<(x+z)^R\equiv x^R+z$$

y usando la hipótesis de inducción en la desigualdad $x^R+y<x^R+z$ tendremos que $y<z$.

Supongamos ahora que $(x+y)^R \equiv x+y^R$. En este caso tenemos podemos usar la hipótesis de inducción en la desigualdad $x+y^R \equiv (x+y)^R \leq x+z$ para obtener $y^R \leq z$ y esto implica que $y < z$. En ambos casos tenemos que $y < z$, por lo tanto podemos concluir que la propiedad es cierta. □

Fíjese que en el anterior teorema las dos propiedades son recíprocas puesto que la negación de $<$ es $\geq$, en este sentido, el anterior teorema se puede reescribir como

$$y \leq z \Leftrightarrow x + y \leq x + z.$$

Corolario 2.7.1. *Sean x, y, z núemeros surreales. Tenemos que $y = z$ si y solamente si $y + x = z + x$.*

Este corolario nos dice que la suma es compatible con la relación de equivalencia $(=)$, por lo tanto, podemos concluir que los números surreales (definidos como clases de equivalencia) son un grupo conmutativo con la operación de suma $(+)$. En lo que sigue de la sección podemos usar exclusivamente el símbolo $(=)$.

Otra consecuencia de este teorema es que la suma de dos números surreales es de nuevo otro número surreal.

Corolario 2.7.2. *Sean x, y números surreales. Entonces $x + y$ es un número surreal.*

Demostración. Considere las desigualdades $x^L < x < x^R$ y $y^L < y < y^R$, y sume en estas desigualdades los números x y y para obtener

$$x^L + y, x + y^L < x + y < x^R + y, x + y^R,$$

y por transitividad se tiene que $(x + y)^L < (x + y)^R$, por lo tanto, si usamos inducción para suponer que los ancestros de $x + y$ son números surreales, tendremos que $x + y$ es también número surreal. □

Algo que ya podemos hacer es intentar ponerle nombre a todos los números que podemos crear con sumas de los números que ya conocemos, es decir, podemos saber cuáles serían los números naturales en el conjunto de los números surreales.

Ejemplo 9. Llamemos

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{n veces}}.$$

Vamos a mostrar por inducción que $n + 1 = \{n \mid \}$. Fíjese que para el número 0 tenemos que $0+1 = 1 = \{0 \mid \}$. Ahora, supongamos que es verdad para n, demostremos que es verdad para $n + 1$. Queremos mostrar que $n + 2 = (n + 1) + 1 = \{n + 1 \mid \}$, sabemos por hipótesis de inducción que $n + 1 = \{n \mid \}$, por lo tanto,

$$n + 2 = (n + 1) + 1 = \{n \mid \} + \{0 \mid \} = \{(n + 1) + 0, n + 1 \mid \} = \{n + 1 \mid 0\}.$$

Si tomamos en cuenta los números negativos tendremos que $-n-1 = \{\ \mid -n\}$, por ejemplo, $-2 = \{\ \mid -1\}$. Con esto podemos entender completamente la estructura de los números enteros en los números surreales.

Ejemplo 10. De los números que se crearon en la sección anterior a partir del 0 y el 1, hay unos cuantos a los cuales no les pusimos nombre.

En específico, vamos a intentar nombrar al número $x = \{0 \mid 1\}$. Lo que sabemos de este número es que $0 < x = \{0 \mid 1\} < 1$, entonces definitivamente no es un número entero. Si sumamos a si mismo dos veces tendremos que

$$x + x = \{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = \{x \mid x+1\},$$

fíjese que si sumamos 1 a la desigualdad anterior obtenemos $1 < x+1 < 2$ por lo tanto puede ser interesante comparar $x+x$ con 1. Veamos que $1 \leq x+x$, esto es equivalente a ver que $(x+x)^R > 1$ y $1^L < (x+x)$, y en efecto, $(x+x)^R = x+1 > 1$ y $1^L = 0 < x = (x+x)^L < x+x$, luego $1 \leq x+x$. También tenemos que $x+x \leq 1$, esto es equivalente a decir que $(x+x)^L < 1$ puesto que 1^R es vacío, y también se cumple ya que $(x+x)^L = x < 1$. Concluimos que $x+x = 1$ por lo tanto x se lleva el nombre de $\frac{1}{2}$.

Nótese que ya podemos representar todos los múltiplos enteros de $\frac{1}{2}$, los multiplos pares son enteros y para los múltiplos impares tenemos que

$$\frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} = \{n-1 \mid\ \} + \{0 \mid 1\} = \left\{ n - \frac{1}{2}, n \;\middle|\; n+1 \right\},$$

así que $n - \frac{1}{2} < n$ y por lo discutido en el ejemplo 3 tendremos que $n + \frac{1}{2} = \{n \mid n+1\}$.

Ejemplo 11 (Números diádicos). Los números racionales diádicos son aquellos de la forma $\frac{n}{2^k}$ con n, k enteros y $k \geq 0$. Con lo que hemos estudiado, ya podemos encontrar ejemplos de estos números en los números surreales.

Basta encontrar aquellos de la forma $\frac{1}{2^k}$ puesto que los demás serán sumas de estos, o de sus inversos aditivos.

Nuestro *"sospechoso"* para ser $\frac{1}{2^{k+1}}$ va a ser el número surreal $\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^k}\right\}$. Lo que queremos mostrar más formalmente es que

$$\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^k}\right\} + \left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^k}\right\} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

y así poder argumentar que efectivamente este número es $\frac{1}{2^{k+1}}$. Por inducción, ya tenemos el caso base cuando $k = 0$, ahora supongamoslo que es verdad para todos las potencias menores a k.

Llamemos $x = \frac{1}{2^{k+1}}$. Tenemos que

$$x + x = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \left\{ \frac{1}{2^{k+1}} \;\middle|\; \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \right\} = \left\{ x \;\middle|\; \frac{1}{2^k} + x \right\},$$

y siguiendo un argumento parecido al del ejemplo anterior tenemos que $0 < x < \frac{1}{2^k}$ y $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^k} + x < \frac{1}{2^{k-1}}$. Queremos ver que $x + x = \frac{1}{2^k}$.

Veamos que $x+x \leq \frac{1}{2^k}$. Para esto primero tenemos que ver que $(x+x)^L < \frac{1}{2^k}$ y en efecto, $(x+x)^L = x < \frac{1}{2^k}$. También tenemos que ver que $(\frac{1}{2^k})^R > x + x$ y también se cumple puesto que $(\frac{1}{2^k})^R = \frac{1}{2^{k-1}} > \frac{1}{2^k} + x = (x+x)^R > x + x$. Por lo tanto tenemos que $x + x \leq \frac{1}{2^k}$.

Ahora, veamos que $x + x \geq \frac{1}{2^k}$. Para esto tenemos que ver primero que $(\frac{1}{2^k})^L < x + x$, y esto se tiene ya que $(\frac{1}{2^k})^L = 0 < x = (x+x)^L < x + x$. Por último, tenemos que ver que $(x+x)^R > \frac{1}{2^k}$, que es verdad ya que $(x+x)^R = \frac{1}{2^k} + x > \frac{1}{2^k}$. Por lo tanto tenemos que $x + x \geq \frac{1}{2^k}$, y más aún, $x + x = \frac{1}{2^k}$.

2.3. Multiplicación de números surreales

La definición de la multiplicación es mucho más compleja que la definición de la suma. Queremos, igual que en las anteriores definiciones, hacer una definición recursiva a partir de las multiplicaciones de ancestros, y además, queremos que se respete el orden de los conjuntos L y R.

Una forma de motivarlo es pensar en las propiedades de la multiplicación real con respecto al orden, siendo la más importante que la multiplicación de números positivos es positiva. Si pensamos en dos números surreales x, y, tenemos los números positivos

$$(x - x^L) > 0, \quad (x^R - x) > 0,$$
$$(y - y^L) > 0, \quad (y^R - y) > 0.$$

Si multiplicamos cada uno de los que corresponden a x con cada uno de los que corresponden a y tendremos 4 números positivos; tomemos como ejemplo dos de ellos, los productos

$$(x - x^L)(y - y^L) = xy + x^L y^L - xy^L - x^L y > 0,$$
$$(x - x^L)(y^R - y) = -xy - x^L y^R + xy^R + x^L y > 0,$$

con los que podemos generar las desigualdades

$$-x^L y^L + xy^L + x^L y < xy < -x^L y^R + xy^R + x^L y.$$

Al hacer lo mismo con las otras dos posibles multiplicaciones motivamos la siguiente definición.

Definición 2.6 (Multiplicación)**.** Sean x, y dos números surreales. Definimos la multiplicación de números surreales como

$$xy = \left\{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \middle| x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\right\}.$$

Igualmente que en la suma, usaremos las propiedades que tiene esta multiplicación con el orden para mostrar que efectivamente el producto de dos números surreales genera un número surreal.

Ejemplo 12. Para entender cómo funciona la definición, primero vamos a ver como funciona para los elementos más sencillos, es decir, para 0, 1 y -1.

Fíjese que todos los ancestros de xy están hechos a partir de ancestros tanto de x como de y, por lo tanto, como 0 no tiene ancestros entonces se cumple que $0x \equiv x0 \equiv \{\ |\ \} \equiv 0$, que es lo mismo que pasa en los números naturales.

Ahora, mostraremos que $1x \equiv x$. Procederemos por inducción, tenemos que $1 \cdot 0 \equiv 0$, por lo tanto para 0 se cumple. Ahora, supongamos que se cumple para los ancestros de x. Tenemos que

$$1x \equiv \left\{1^L x + 1x^L - 1^L x^L \mid 1^L x + 1x^R - 1^L x^R\right\} \equiv \left\{1x^L \mid 1x^R\right\} \equiv \left\{x^L \mid x^R\right\} \equiv x.$$

Por último, mostremos que $-1x \equiv -x$. Demostraremos este hecho por inducción, para 0 tenemos que $-1 \cdot 0 \equiv 0 \equiv -0$ por lo tanto se cumple. Ahora, supongamos que se cumple para los ancestros de x. Tenemos que

$$\begin{aligned} -1x &\equiv \left\{(-1)^R x + (-1)x^R - (-1)^R x^R \mid (-1)^R x + (-1)x^L - (-1)^R x^L\right\} \\ &\equiv \left\{(-1)x^R \mid (-1)x^L\right\} \equiv \left\{-x^R \mid -x^L\right\} \equiv -x. \end{aligned}$$

Teorema 2.8 (Propiedades de la multiplicación)**.** *Sean x, y, z números surreales. Se cumplen las siguientes propiedades*

1. $xy \equiv yx$,
2. $x(y + z) = xy + xz$,
3. $x(yz) = (xy)z$.

Demostración. En el ejemplo anterior se puede ver que cada propiedad se cumplen en el casos base, así que solo nos vamos a concentrar en el paso inductivo.

1. Para la conmutatividad tenemos que

$$\begin{aligned} xy &\equiv \left\{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \mid \dots\right\} && \text{(definición)} \\ &\equiv \left\{yx^L + y^L x - y^L x^L, yx^R + y^R x - y^R x^R \mid \dots\right\} && \text{(h. de inducción)} \\ &\equiv \left\{y^L x + yx^L - y^L x^L, y^R x + yx^R - y^R x^R \mid \dots\right\} && \text{(conmutatividad +)} \\ &\equiv yx. \end{aligned}$$

2. Para la propiedad distributiva sobre la suma concentremonos en los términos de $((x + y)z)^L$ que son de la forma $(x + y)^L z + (x + y)z^L - (x + y)^L z^L$, los demás términos tendrán sus desarrollos análogos. En este término, el número $(x+y)^L$ puede ser de dos formas, puede ser o $x + y^L$ o $x^L + y$. Teniendo esto en cuenta tenemos que

$$\begin{aligned} ((x + y)z) &\equiv \left\{(x + y)^L z + (x + y)z^L - (x + y)^L z^L, \dots \mid \dots\right\} \\ &\equiv \left\{(x + y^L)z + (x + y)z^L - (x + y^L)z^L,\right. \\ &\qquad \left.(x^L + y)z + (x + y)z^L - (x^L + y)z^L, \dots \mid \dots\right\} \\ &= \left\{xz + (y^L z + yz^L - y^L z^L), (x^L z + xz^L - x^L z^L) + yz \mid \right\} \\ &\equiv xz + yz. \end{aligned}$$

Aquí no podemos reemplazar la igualdad (=) por la equivalencia (≡) puesto que estamos utilizando la propiedad $x + (-x) = 0$ para todo número surreal x.

Ahora que probamos la propiedad distributiva, tenemos que la definición de multiplicación se puede reescribir como

$$xy = \{xy - (x - x^L)(y - y^L), xy - (x^R - x)(y^R - y) \mid xy + (x - x^L)(y^R - y), xy + (x^R - x)(y - y^L)\},$$

que es más expresiva y tal vez más fácil de recordar. Si además combinamos esto con lo que probamos para el número -1, podemos "distribuir" los signos en las sumas, es decir,

$$-(x + y) = -1(x + y) = -1x - 1y = -x - y,$$

sin embargo, esto ya se podía demostrar con las propiedades de la suma.

3. Utilizando la definición discutida en el punto anterior, podemos ver que la multiplicación de tres elementos es de la forma

$$(xy)z = \left\{(xy)z - \left[(x - x^L)(y - y^L)\right](z - z^L), \dots \mid \dots\right\},$$

fíjese que el elemento de L que tenemos escrito se puede escribir solamente en términos de ancestros de x, y, y z de la forma

$$(x^L y)z + (xy^L)z + (xy)z^L - (x^L y^L)z - (x^L y)z^L - (xy^L)z^L + (x^L y^L)z^L,$$

y usando la hipótesis te inducción tenemos que el término es igual a

$$x^L(yz) + x(y^L z) + x(yz^L) - x^L(y^L z) - x^L(yz^L) - x(y^L z^L) + x^L(y^L z^L)$$

que reagrupandolo de la misma manera que lo desagrupamos arriba nos queda como

$$(xy)z = \left\{x(yz) - (x - x^L)\left[(y - y^L)(z - z^L)\right], \dots \mid \dots\right\} = x(yz).$$

□

Ejemplo 13. Otra forma de mostrar lo que mostramos en el ejemplo 11 es multiplicando por $\frac{1}{2}$; como sabemos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ entonces podemos multiplicar $\frac{1}{2^k}$ a ambos lados de la ecuación y utilizar la propiedad distributiva para obtener lo que demostramos en ese ejemplo.

Lo que entonces queremos ver es la forma surreal de las potencias de $\frac{1}{2}$. Veamoslo para la primera potencia, esto es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \equiv \left\{0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 \cdot 0, 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot 1 \;\middle|\; 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 1\right\} \equiv \left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2}\right\},$$

por lo tanto tiene sentido llamar $\frac{1}{4} \equiv \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right\}$.

Ahora veamos que el mismo argumento funciona para las siguientes potencias. Multipliquemos $\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \equiv \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^{k-1}}\right\} \{0 \mid 1\} \equiv \left\{0, \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} \,\middle|\, \frac{1}{2^k}\right\} \equiv \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^k}\right\} \equiv \frac{1}{2^{k+1}},$$

por lo tanto, se cumple que $\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}$ y tenemos una demostración más de lo propuesto en el ejemplo 11.

Para hablar de la multiplicación sin ningún problema, tenemos que, igual que en la suma, mostrar que la multiplicación es compatible con la relación de equivalencia de la igualdad $(=)$, para esto, tendremos que probar las propiedades que tiene la multiplicación con el orden. La propiedad más importante es que la multiplicación de dos números positivos es positiva, de esta se pueden deducir las demás. Para probar esta primero tendremos que probar un lema.

Lema 2.1. *Sea x un número surreal tal que $x > 0$. Existen L y R conjuntos de números surreales que cumplen que $0 \in L$, para todo $l \in L$ se tiene que $l \geq 0$ y además $x = \{L \mid R\}$.*

Demostración. Si tenemos que $x > 0$ esto significa que existe $x^L \in X^L$ tal que $x^L \geq 0$, por lo tanto, teniendo en cuenta lo discutido en el ejemplo 3 tendremos que $x = \left\{X^L \cup \{0\} \,\middle|\, X^R\right\} \equiv x'$. Ahora, como $0 \in (X')^L$, entonces se pueden quitar todos los elementos de este conjunto que sean menores estrictos $(<)$ a 0 y va a quedar el número con el mismo valor, es decir, $x = x' = \left\{(X^L \cup \{0\}) \setminus \{l \in X^L \mid l < 0\} \,\middle|\, X^R\right\}$, con lo que demostramos el lema.

□

Teorema 2.9. *Sea x, y números surreales tales que $x, y > 0$. Tenemos entonces que $xy > 0$.*

Demostración. Por el lema anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in X^L \cap Y^L$. Si verificamos el elemento de $(XY)^L$ generado por los ceros que están en los respectivos conjuntos L's de x y y, tenemos que en $(XY)^L$ está el elemento

$$0y + x0 - 0 \cdot 0 = 0,$$

por lo tanto, tenemos que $0 = (xy)^L < xy$, es decir, $xy > 0$. □

Fíjese que esta desigualdad es estricta, por lo tanto falta ver qué pasa cuando alguno de los números es igual a 0.

Teorema 2.10. *Sean x, y números surreales tales que $x = 0$. Tenemos que $xy = 0$.*

Demostración. Vamos a mostrar esta proposición por inducción. Supongamos que la proposición es verdad para todos los ancestros de y, luego veamos que pasa con el producto de

xy

$$\begin{aligned} xy &\equiv \left\{x^L y + x y^L - x^L y^L, \ldots \mid \ldots\right\} \\ &= \left\{x^L y - x^L y^L, \ldots \mid \ldots\right\} && \text{(h. de inducción)} \\ &\equiv \left\{x^L (y - y^L), \ldots \mid \ldots\right\}, \end{aligned}$$

fíjese que $x^L < x = 0$, por lo tanto, $-x^L > 0$, y por otro lado, como $y > y^L$ entonces $y - y^L > 0$, lo que quiere decir, por el teorema anterior, que $-(y - y^L)x^L > 0$, que equivale a $(y - y^L)x^L < 0$.

Si hacemos el mismo procedimiento para todos los elementos de la multiplicación, entonces al final podemos concluir que $(xy)^L < 0$ y $(xy)^R > 0$, lo que implica, por lo discutido en el 4, que $xy = 0$. □

Corolario 2.10.1 (Compatibilidad con =)**.** *Sea x, x', y números surreales tal que $x = x'$. Tenemos que $xy = x'y$.*

Demostración. Tenemos que $(x - x') = 0$, luego $(x - x')y = 0$ y esto implica que $xy = x'y$. □

Corolario 2.10.2 (Buena definición de la multiplicación)**.** *Sean x, y números surreales, entonces xy es un número surreal.*

Demostración. Si tomamos la definición de multiplicación

$$\begin{aligned} xy = \big\{xy - (x - x^L)(y - y^L), xy - (x^R - x)(y^R - y) \mid \\ xy + (x - x^L)(y^R - y), xy + (x^R - x)(y - y^L)\big\}, \end{aligned}$$

entonces podemos ver que $(xy)^L < xy < (xy)^R$, puesto que estamos restando y sumando números positivos respectivamente, lo que significa que en efecto xy es un número surreal. □

Corolario 2.10.3. *Los números surreales son un anillo ordenado.*

La promesa que hicimos al principio de este capítulo es que los números surreales son un cuerpo ordenado, lo que falta entonces para ser un cuerpo ordenado es la existencia de los inversos multiplicativos.

Los ejemplos que hemos dado de números surreales han caído todos, hasta ahora, en los racionales diádicos. Si bien en estos existen todos los inversos de todas las potencias de 2, estos no son cerrados para inversos, el 3 es un ejemplo de un racional diádico cuyo inverso no lo es.

Ejemplo 14 (El inverso de 3)*.* Considere la serie dada por

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3},$$

que se puede evaluar teniendo en cuenta que es una serie geométrica. Como es una serie alternante, tenemos que las sumas parciales pares son menores a $\frac{1}{3}$ y las sumas parciales impares son mayores a $\frac{1}{3}$. Considere entonces el número surreal

$$x \equiv \{s_{2n-1} \mid s_{2n}\}, \text{ para } n \text{ natural con } s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Nuestra hipótesis, que debemos probar, es que efectivamente $x = \frac{1}{3}$. Para probar esto vamos a probar que $3x - 1 = 0$. Como $3 \equiv \{2 \mid \}$ entonces tenemos que

$$3x - 1 = \{2x + s_{2n-1} - 1 \mid 2x + s_{2n} - 1, 3x\},$$

lo único que tenemos que probar para mostrar que $3x - 1 = 0$ es que $(3x - 1)^L < 0$ y $(3x - 1)^R > 0$, y como $3x > 0$, esto se traduce en

$$x < \frac{1 - s_{2n-1}}{2}, \quad x > \frac{1 - s_{2n}}{2},$$

pero fíjese que $\frac{1-s_n}{2} = s_{n+1}$, entonces las condiciones que teníamos se vuelven

$$x < s_{2n}, \quad x > s_{2n+1},$$

que son verdaderas por la definición puesto que $s_{2n+1} = x^L < x < x^R = s_{2n}$, lo que significa entonces que $3x - 1 = 0$, por lo tanto se puede decir que $x = \frac{1}{3}$.

En la introducción hablamos de cómo los números surreales son más grandes que los números reales pero hasta ahora no hemos mostrado un número surreal que no sea también un número real, mostremos entonces un par de ejemplos y cómo operarlos.

Ejemplo 15 (Infinitos e infinitesimales). Consideremos el número surreal

$$\omega \equiv \{0, 1, 2, \dots \mid \}$$

donde ω^L consiste de todos los números naturales, y consideremos el número surreal

$$\varepsilon \equiv \left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$$

donde ε^R consiste de todas las potencias de $\frac{1}{2}$. Queremos ver qué pasa cuando multiplicamos estos dos números, tenemos que

$$\omega\epsilon \equiv \left\{0, n\epsilon \;\middle|\; \frac{\omega}{2^m} + n\epsilon - \frac{n}{2^m} \right\} = \left\{0, n\epsilon \;\middle|\; \frac{\omega - n}{2^m} + n\epsilon \right\}, \quad \text{para todo } n, m \text{ natural.}$$

De la definición $\omega\epsilon > 0$. Veamos más de cerca los ancestros de $\omega\epsilon$. Tenemos que $\epsilon < \frac{1}{2^k}$ para todo k natural, luego tenemos que $2^k\epsilon < 1$ y como las potencias de 2 crecen hasta el infinito entonces tenemos que $n\epsilon < 1$ para todo n natural, por lo tanto $(\omega\epsilon)^L < 1$.

Ahora veamos los del conjunto R. Tenemos que $\omega > k$ para todo k natural. Por lo tanto, tenemos que $n + 2^m < \omega$ para todo n, m natural, lo que implica que $1 < \frac{\omega - n}{2^m} < \frac{\omega - n}{2^m} + n\epsilon$, por lo tanto tenemos que $(\omega\epsilon)^R > 1$.

Con esto en mente, podemos conjeturar que $\omega\epsilon = 1$ y para probar esto tomemos

$$\omega\epsilon - 1 = \left\{ (\omega\epsilon)^L - 1 \;\middle|\; (\omega\epsilon)^R - 1, \omega\epsilon \right\},$$

del que podemos concluir que $(\omega\epsilon - 1)^L < 0$ y $(\omega\epsilon - 1)^R > 0$, por lo tanto, $\omega\epsilon - 1 = 0$, con lo que podemos decir además que $\epsilon = \frac{1}{\omega}$.

Lo único que le falta a los números surreales para que sean un cuerpo ordenado es la definición de inverso multiplicativo. Si bien ya lo hicimos con un par de ejemplos, necesitamos definirlo para todos los números surreales.

Definición 2.7 (Inversos multiplicativos)**.** Sea $x > 0$ un número surreal con la forma del lema 2.1, es decir, $x^L \geq 0$ y $0 \in X^L$. Vamos a definir el número y de la forma

$$y \equiv \left\{ 0, \frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} \;\middle|\; \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R} \right\},$$

lo llamaremos el inverso multiplicativo de x y luego mostraremos que en efecto se tiene que $yx = 1$. Tenemos acá que el número y se define con respecto a los ancestros del mismo y, en este caso se refiere a que los ancestros se crean a partir de los ancestros que ya conocíamos, empezando desde 0 que siempre es elemento de y^L.

Ejemplo 16. Vamos a demostrar cómo funcionaría la definición en concreto con el ejemplo del $x = 3 = \{0, 2 \mid \}$. Vamos a llamar y_n a los distintos pasos de la definición recursiva de inverso multiplicativo. Esto es, $y_0 \equiv \{0 \mid \}$, y

$$y_{n+1} \equiv \left\{ y_n^L, \frac{1 + (x^R - x)y_n^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y_n^R}{x^L} \;\middle|\; y_n^R, \frac{1 + (x^L - x)y_n^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y_n^R}{x^R} \right\},$$

con lo que tenemos que $y = \left\{ \cup_n Y_n^L \;\middle|\; \cup_n Y_n^R \right\}$.

Veamos entonces los pasos de la recursión. Tenemos que $x = 3 = \{0, 2 \mid \}$, por lo tanto nuestra fórmula recursiva se transformaría en

$$y_{n+1} \equiv \left\{ y_n^L, \frac{1 - y_n^R}{2} \;\middle|\; y_n^R, \frac{1 - y_n^L}{2} \right\},$$

con lo que tendríamos que el inverso multiplicativo de 3 estaría definido como

$$y \equiv \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \ldots \;\middle|\; \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \ldots \right\},$$

fíjese que este número es el mismo que encontramos en el ejemplo 14 y que además la fórmula recursiva que sacamos en este ejemplo es la misma que llamabamos allá como

$$s_{n+1} = \frac{1 - s_n}{2}.$$

Teorema 2.11 (Propiedades del inverso multiplicativo). *Sea $x > 0$ un número surreal y sea y el número definido como el inverso multiplicativo. Tenemos entonces que*

1. $xy^L < 1 < xy^R$ *para todo* y^L, y^R.
2. y *es un número.*
3. $(xy)^L < 1 < (xy)^R$ *para todo* $(xy)^L, (xy)^R$.
4. $xy = 1$.

Demostración. En esta prueba llamemos x' a los ancestros del número x, igualmente para y y para y'.

1. Los ancestros de y están definidos por la fórmula
$$y'' = \frac{1 + (x' - x)y'}{x'},$$
esta fórmula implica la fórmula
$$1 - xy'' = (1 - xy')\frac{x' - x}{x'}.$$
El signo del factor $(x' - x)/x'$ depende solamente de si x' pertenece a X^L o a X^R. Fíjese que para $0 \in y^L$ se cumple la condición, entonces supongamos por inducción que $(1 - xy')$ es positivo si $y' \in Y^L$ y negativo si $y' \in Y^R$. En este sentido, $1 - xy''$ será negativo cuando $y' \in Y^L$ y $x' \in X^L$ o cuando $y' \in Y^R$ y $x' \in X^R$, y $1 - xy''$ será positivo en los otros dos casos, reflejando así que $1 - xy''$ es negativo cuando $y'' \in Y^R$ y positivo cuando $y'' \in Y^L$, lo que significa por inducción que $xy^L < 1 < xy^R$ para todo y^L, y^R.

2. Si tomamos en cuenta el numeral (1) de la prueba, esto implica que $y^L < y^R$ para todo y^L, y^R, lo que significa que y es un número.

3. Los ancestros de xy tienen la forma de $x'y + xy' - x'y'$. Esto se puede reordenar como
$$\begin{aligned}(xy)' = x'y + xy' - x'y' &= x'y - [1 + y'(x' - x)] + 1 \\ &= x'y - \frac{x'(1 + y'(x - x'))}{x'} + 1 \\ &= x'(y - y'') + 1,\end{aligned}$$
que es mayor que 1 si $(y - y'')$ es positivo y menor que 1 si $(y - y'')$ es negativo, dando así el teorema. Para ver esto podemos verlo por casos, veamos por ejemplo cuando el factor es mayor que 1, en este caso $y'' \in Y^L$ y esto pasa cuando x' y y' pertenecen a diferentes conjuntos, por ejemplo, $x' \in X^R$ y $y' \in Y^L$, en este caso $(xy)' \in (xy)^R$.

4. Para mostrar que $xy = 1$ tenemos que mostrar que $xy > 0$ y que $(xy)^L < 1 < (xy)^R$, la segunda parte ya la tenemos. Para la primera parte, fíjese que $0 \in X^L$ y $0 \in Y^L$, por lo tanto, el factor dado por estos dos ancestros se encuentra en $(XY)^L$ y es igual a 0, es decir, $0 < xy$.

□

Con esto ya podemos concluir que los números surreales son un cuerpo ordenado, y podemos llamar a $y = 1/x$.

3. Capítulo 2

Existen varias normas para la citación bibliográfica. Algunas áreas del conocimiento prefieren normas específicas para citar las referencias bibliográficas en el texto y escribir la lista de bibliografía al final de los documentos. Esta plantilla brinda la libertad para que el autor de la tesis o trabajo de investigación utilice la norma bibliográfica común para su disciplina. Sin embargo, se solicita que la norma seleccionada se utilice con rigurosidad, sin olvidar referenciar "todos"los elementos tomados de otras fuentes (referencias bibliográficas, patentes consultadas, software empleado en el manuscrito, en el tratamiento a los datos y resultados del trabajo, consultas a personas (expertos o público general), entre otros).

3.1. Ejemplos de citaciones bibliográficas

Existen algunos ejemplos para la citación bibliográfica, por ejemplo, Microsoft Word (versiones posteriores al 2006), en el menú de referencias, se cuenta con la opción de insertar citas bibliográficas utilizando la norma APA (American Psychological Association) u otras normas y con la ayuda para construir automáticamente la lista al final del documento. De la misma manera, existen administradores bibliográficos compatibles con Microsoft Word como Zotero, End Note y el Reference Manager, disponibles a través del Sistema Nacional de Bibliotecas (SINAB) de la Universidad Nacional de Colombia[1] sección Recursos bibliográficos.ºpción "Herramientas Bibliográficas. A continuación se muestra un ejemplo de una de las formas más usadas para las citaciones bibliográficas.

Citación individual:[1].
Citación simultánea de varios autores: [5, **?**, 6, **?**, **?**, 2, 3].

Por lo general, las referencias bibliográficas correspondientes a los anteriores números, se listan al final del documento en orden de aparición o en orden alfabético. Otras normas de citación incluyen el apellido del autor y el año de la referencia, por ejemplo: 1) "...énfasis en elementos ligados al ámbito ingenieril que se enfocan en el manejo de datos e información estructurada y que según Kostoff (1997) ha atraído la atención de investigadores dado el advenimiento de TIC...", 2) "...Dicha afirmación coincide con los planteamientos de Snarch

[1]Ver:www.sinab.unal.edu.co

(1998), citado por Castellanos (2007), quien comenta que el manejo...z 3) "...el futuro del sistema para argumentar los procesos de toma de decisiones y el desarrollo de ideas innovadoras (Nosella *et al.*, 2008)...".

3.2. Ejemplos de presentación y citación de figuras

Las ilustraciones forman parte del contenido de los capítulos. Se deben colocar en la misma página en que se mencionan o en la siguiente (deben siempre mencionarse en el texto).

Las llamadas para explicar algún aspecto de la información deben hacerse con nota al pie y su nota correspondiente[2]. La fuente documental se debe escribir al final de la ilustración o figura con los elementos de la referencia (de acuerdo con las normas seleccionadas) y no como pie de página. Un ejemplo para la presentación y citación de figuras, se presenta a continuación (citación directa):

Por medio de las propiedades del fruto, según el espesor del endocarpio, se hace una clasificación de la palma de aceite en tres tipos: Dura, Ternera y Pisifera, que se ilustran en la Figura **3-1**.

3.3. Ejemplo de presentación y citación de tablas y cuadros

Para la edición de tablas, cada columna debe llevar su título; la primera palabra se debe escribir con mayúscula inicial y preferiblemente sin abreviaturas. En las tablas y cuadros, los títulos y datos se deben ubicar entre líneas horizontales y verticales cerradas (como se realiza en esta plantilla).

La numeración de las tablas se realiza de la misma manera que las figuras o ilustraciones, a lo largo de todo el texto. Deben llevar un título breve, que concreta el contenido de la tabla; éste se debe escribir en la parte superior de la misma. Para la presentación de cuadros, se deben seguir las indicaciones dadas para las tablas.

[2]Las notas van como "notas al pie". Se utilizan para explicar, comentar o hacer referencia al texto de un documento, así como para introducir comentarios detallados y en ocasiones para citar fuentes de información (aunque para esta opción es mejor seguir en detalle las normas de citación bibliográfica seleccionadas).

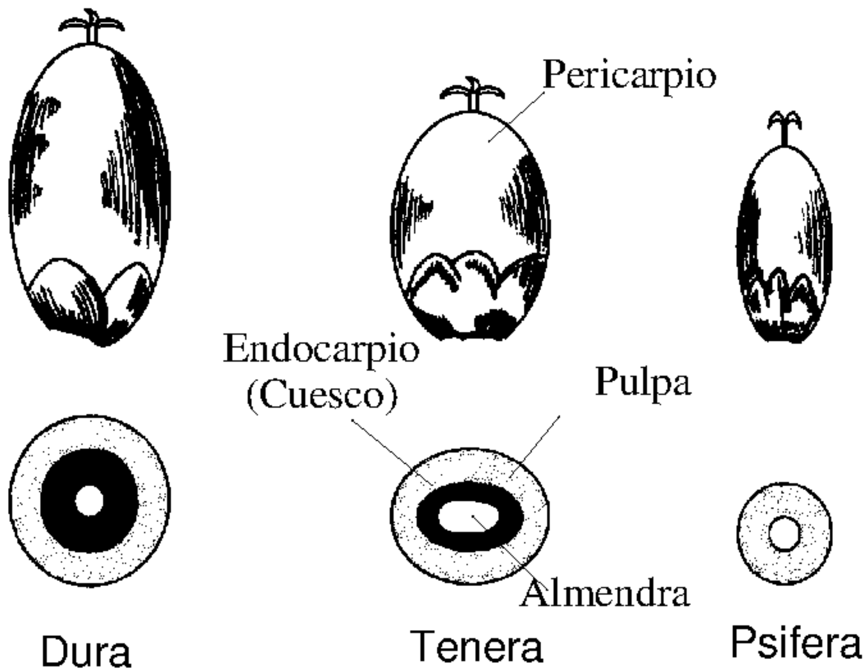

Figura 3-1.: Tipos y partes del fruto de palma de aceite [?, ?].

Un ejemplo para la presentación y citación de tablas (citación indirecta), se presenta a continuación:

De esta participación aproximadamente el 60 % proviene de biomasa (Tabla **3-1**).

Tabla 3-1.: Participación de las energías renovables en el suministro total de energía primaria [4].

Region	Participación en el suministro de energía primaria / % (Mtoe) [1]	
	Energías renovables	Participación de la biomasa
Latinoamérica	28,9 (140)	62,4 (87,4)
Colombia	27,7 (7,6)	54,4 (4,1)
Alemania	3,8 (13,2)	65,8 (8,7)
Mundial	13,1 (1404,0)	79,4 (1114,8)

[1] 1 kg oe=10000 kcal=41,868 MJ

NOTA: en el caso en que el contenido de la tabla o cuadro sea muy extenso, se puede cambiar el tamaño de la letra, siempre y cuando ésta sea visible por el lector.

3.3.1. Consideraciones adicionales para el manejo de figuras y tablas

Cuando una tabla, cuadro o figura ocupa más de una página, se debe repetir su identificación numérica, seguida por la palabra continuación.

Adicionalmente los encabezados de las columnas se deben repetir en todas las páginas después de la primera.

Los anteriores lineamientos se contemplan en la presente plantilla.

- Presentación y citación de ecuaciones.

La citación de ecuaciones, en caso que se presenten, debe hacerse como lo sugiere esta plantilla. Todas las ecuaciones deben estar numeradas y citadas detro del texto.

Para el manejo de cifras se debe seleccionar la norma según el área de conocimiento de la tesis o trabajo de investigación.

4. Capítulo 3

Se deben incluir tantos capítulos como se requieran; sin embargo, se recomienda que la tesis o trabajo de investigación tenga un mínimo 3 capítulos y máximo de 6 capítulos (incluyendo las conclusiones).

5. Capítulo ...

Se deben incluir tantos capítulos como se requieran; sin embargo, se recomienda que la tesis o trabajo de investigación tenga un mínimo 3 capítulos y máximo de 6 capítulos (incluyendo las conclusiones).

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

Las conclusiones constituyen un capítulo independiente y presentan, en forma lógica, los resultados de la tesis o trabajo de investigación. Las conclusiones deben ser la respuesta a los objetivos o propósitos planteados. Se deben titular con la palabra conclusiones en el mismo formato de los títulos de los capítulos anteriores (Títulos primer nivel), precedida por el numeral correspondiente (según la presente plantilla).

6.2. Recomendaciones

Se presentan como una serie de aspectos que se podrían realizar en un futuro para emprender investigaciones similares o fortalecer la investigación realizada. Deben contemplar las perspectivas de la investigación, las cuales son sugerencias, proyecciones o alternativas que se presentan para modificar, cambiar o incidir sobre una situación específica o una problemática encontrada. Pueden presentarse como un texto con características argumentativas, resultado de una reflexión acerca de la tesis o trabajo de investigación.

A. Anexo: Nombrar el anexo A de acuerdo con su contenido

Los Anexos son documentos o elementos que complementan el cuerpo de la tesis o trabajo de investigación y que se relacionan, directa o indirectamente, con la investigación, tales como acetatos, cd, normas, etc.

B. Anexo: Nombrar el anexo B de acuerdo con su contenido

A final del documento es opcional incluir índices o glosarios. Éstos son listas detalladas y especializadas de los términos, nombres, autores, temas, etc., que aparecen en el mismo. Sirven para facilitar su localización en el texto. Los índices pueden ser alfabéticos, cronológicos, numéricos, analíticos, entre otros. Luego de cada palabra, término, etc., se pone coma y el número de la página donde aparece esta información.

C. Anexo: Nombrar el anexo C de acuerdo con su contenido

MANEJO DE LA BIBLIOGRAFÍA: la bibliografía es la relación de las fuentes documentales consultadas por el investigador para sustentar sus trabajos. Su inclusión es obligatoria en todo trabajo de investigación. Cada referencia bibliográfica se inicia contra el margen izquierdo.

La NTC 5613 establece los requisitos para la presentación de referencias bibliográficas citas y notas de pie de página. Sin embargo, se tiene la libertad de usar cualquier norma bibliográfica de acuerdo con lo acostumbrado por cada disciplina del conocimiento. En esta medida es necesario que la norma seleccionada se aplique con rigurosidad.

Es necesario tener en cuenta que la norma ISO 690:1987 (en España, UNE 50-104-94) es el marco internacional que da las pautas mínimas para las citas bibliográficas de documentos impresos y publicados. A continuación se lista algunas instituciones que brindan parámetros para el manejo de las referencias bibliográficas:

Institución	Disciplina de aplicación
Modern Language Association (MLA)	Literatura, artes y humanidades
American Psychological Association (APA)	Ambito de la salud (psicología, medicina) y en general en todas las ciencias sociales
Universidad de Chicago/Turabian	Periodismo, historia y humanidades.
AMA (Asociación Médica de los Estados Unidos)	Ambito de la salud (psicología, medicina)
Vancouver	Todas las disciplinas
Council of Science Editors (CSE)	En la actualidad abarca diversas ciencias
National Library of Medicine (NLM) (Biblioteca Nacional de Medicina)	En el ámbito médico y, por extensión, en ciencias.
Harvard System of Referencing Guide	Todas las disciplinas
JabRef y KBibTeX	Todas las disciplinas

Para incluir las referencias dentro del texto y realizar lista de la bibliografía en la respectiva sección, puede utilizar las herramientas que Latex suministra o, revisar el instructivo desarrollado por el Sistema de Bibliotecas de la Universidad Nacional de Colombia[1], disponible en la sección "Servicios", opción "Trámitesz enlace .Entrega de tesis".

[1] Ver: www.sinab.unal.edu.co

Bibliografía

[1] Antal, M.J.J.: Biomass Pyrolysis: A Review of the Literature Part 1 - Carbohydrate Pyrolysis. En: *Advances in Solar Energy Vol. 1 American Solar Energy Society*, 1982, p. 61–111

[2] Gómez, Adriana: *Investigación del Proceso de Gasificación de Biomasa en un Gasificador en Paralelo*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2002

[3] International Energy Agency, IEA. *Needs for Renewables 2001: Developing a New Generation of Sustainable Energy Technologies.* 2001

[4] International Energy Agency, IEA. *Renewables in Global Energy Supply.* 2007

[5] Thurner, F. ; Mann, U.: Kinetic Investigation of Wood Pyrolysis. En: *Ind. Eng. Chem. Res.* 20 (1981), p. 482–488

[6] Wiest, W.: *Zur Pyrolyse von Biomasse im Drehrohrreaktor.* Kassel, Universität Gesamthochschule Kassel, Tesis de Doctorado, 1998