UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Una antología de la obra de Conway

Roger David Trujillo Ibáñez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2023

Una antología de la obra de Conway

Roger David Trujillo Ibáñez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Pregrado en Matemáticas

Directora:
Ph.D. Jeanneth Galeano Peñaloza

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2023

I sort of made a vow to myself, I was going to study whatever I thought was interesting and not worry whether this was serious enough

John Conway

Agradecimientos

Tengo mucho que agradecer: Primero, agradezco a mi directora de tesis, la profesora Jeanneth Galeano, por su guía, por sus correcciones, y sobre todo por su paciencia. Este viaje empezó con muchas ideas de parte mía y la profesora tuvo la paciencia de acompañarme para que se pudieran materializar un par de ellas.

Segundo, quiero agradecer a la educación pública, de calidad, que me mostró el camino durante once años hasta llegar hasta acá, en especial a la Universidad Nacional donde aprendí a ser lo que soy en este momento.

Tercero, quiero agradecer a todas las personas que hicieron parte de este camino: a José Alfredo, que me dió la idea de este trabajo y que sin él ya me hubiera salido de la carrera, a María Paula por acompañarme y escucharme todos estos meses, a Lauren Sofía, que me acompaño en las noches en las que escribía estas páginas y que me escuchó practicando la presentación del trabajo. A Jaime Zamora y a Juan Lara, que hicieron muchas materias de la carrera mucho más sencillas. A Valeria, Daniel, Mateo, Aura, María, Juanfe, Isabela, Diego, Pronoia, y Pulldogs, por darme comunidad estos últimos semestres de la carrrera. Muchísimas gracias a mis compañeros de matemáticas que siguen siendo fuente de inspiración y motivación, a María Camila (gracias por todo), Daniel Checa, Emmanuel, Heldert, María Alejandra, Lina, Isaac, Jhonatan, Laura, Paulina, Torro, lo logramos. Muchas gracias a mis compañeros de Olimpiadas de computación, a Andrés, a Jhonny, a Osman y a Óscar, por todo lo bueno que me ha llegado gracias a eso. También gracias al profesor John Jaime que hizo esta colaboración posible. Pero sobre todo gracias a mis padres y mi abuelita, que me han acompañado siempre.

Gracias a Quantil por darme trabajo, a Olimpiadas de Computación y de Matemáticas por mostrarme el inicio del camino, al rap por darme las palabras, a mi gata Regina que siempre me acompaña y al software libre que dio vida a las gráficas de este proyecto (Inkscape).

Por último, quiero agradecer a Owen Maitzen por haber hecho uno de los videos educativos con mejor producción en YouTube, y que casualmente, trataba de teoría de juegos combinatorios, su vídeo sobre el *Hackenbush* [1] fue una fuerte inspiración y motivación para seguir estudiando esto, y además, sus composiciones de piano me acompañaron en varios momentos mientras escribía este trabajo, que en paz descanse.

Muchas gracias a Conway.

Resumen

Hacemos un recorrido divulgativo sobre algunos de los trabajos del matemático John Conway, tratando la historia del concepto y explicandolo matemáticamente. Tratamos diulgativamente el juego de la vida y sus aportes a la teoría de juegos combinatorios, también, hacemos una descripción formal de los números surreales, probamos que son un cuerpo ordenado y mostramos explícitamente la construcción de algunos de estos números.

Palabras clave: John Conway, Historia de las matemáticas, Números surreales, Teoría de juegos combinatorios, Juego de la vida de Conway..

Abstract

We make a divulgative tour on some of the works of the mathematician John Conway, treating the history of the concept and explaining it mathematically. We treat diulgatively the game of life and its contributions to combinatorial game theory, also, we make a formal description of surreal numbers, prove that they are an ordered field and show explicitly the construction of some of these numbers.

Keywords: John Conway, History of mathematics, Surreal numbers, Combinatorial game theory, Conway's Game of Life.

Contenido

1 Introducción

¿Qué hace que algunas ramas de las matemáticas tengan más atención que otras? ¿Qué hace que unas matemáticas sean más serias y tengan más premios y reconocimiento que otras que son igual o más dificiles? Las matemáticas están, como todas las actividades humanas, fuertemente ligadas a la cultura y al quehacer humano. Los diferentes rumbos que toma la matemática a través del tiempo, los diferentes premios que se otorgan, los diferentes incentivos para que la matemática sea de cierta forma, todo esto son solo ejemplos de la influencia que tenemos nosotros los seres humanos y nuestra cultura en las matemáticas. Este trabajo tiene el objetivo de resaltar, de cierta manera, esta presencia de la humanidad en las matemáticas.

John Conway fue un matemático poco usual, no trabajó en las ramas más populares, le gustaban mucho las matemáticas recreativas, y por esto mismo es bastante conocido por personas que no se dedican profesionalmente a las matemáticas. A lo largo de la investigación para este documento pude presenciar el profundo aporte de la obra de Conway a la matemática, un aporte que va mucho más allá de teoremas y resultados, un aporte que se mide mucho mejor en la cantidad de vidas matemáticas que fueron motivadas por su obra. Cuando se suele hablar de una persona que hace matemáticas casi siempre se omite esto último; a cuántas personas ayudaron sus clases, a cuántas personas apoyó en el camino hacia las matemáticas, cuántas personas se sintieron apoyadas por esta persona. Para mí, la parte más importante de la matemática está en las mismas personas que conforman esta comunidad, las personas que se inspiran en esta comunidad, las que viven de esto, las que sueñan con esto.

Este trabajo quiere hacer énfasis en esta parte, la primera parte del trabajo es una recopilación divulgativa de dos trabajos matemáticos de John Conway. El primer trabajo, y también el más famoso de John Conway, es el juego de la vida, un autómata celular universal de dos dimensiones que inspiró a muchas comunidades de interesados en la informática y la matemática a jugarlo y teorizar sobre este; contamos como surgió el concepto y todo lo que tuvo que pasar para poder demostrar al fin que el autómata era universal, también hacemos un pequeño esbozo de su teoría. El segundo trabajo es sobre juegos combinatorios, hacemos un recuento histórico de cómo surgió el trabajo entre él y sus colegas para crear *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, un recopilatorio grandísimo de todo lo que se sabía sobre juegos combinatorios, y al final hacemos una explicación divulgativa de cómo se crean los valores de estos juegos y la forma en la que se estudian.

En la segunda parte, se hace una exposición matemática de los números surreales, más específicamente se demuestra que estos son un cuerpo ordenado y se hacen las construcciones de algunos números explícitamente. Conway decía que los números surreales eran el trabajo matemático que más orgullo le daba. Para mí, los números surreales son una demostración del poder de la curiosidad y la autenticidad en la matemática, estos números surgen del estudio de los juegos combinatorios y terminan siendo la extensión más grande de los números reales, es decir, contienen a cualquier otro cuerpo ordenado.

Por último, quiero hacer énfasis que si bien Conway trabajó en muchísimas otras ramas de las matemática, quise enfocarme en el trabajo recreativo. Para mí, la matemática recreativa tiene el potencial de ser extremadamente bella y también extremadamente cercana a las personas en el sentido en que el objetivo es que cualquier persona la pueda entender. Este trabajo de grado es un intento de eso, de hacer la matemática más cercana. Si bien hay partes del texto donde los prerrequisitos para entenderlo sean un poco más grandes que los que tenga una persona normal, intenté que para cualquier persona hubiera algo interesante en el libro. En ese sentido, sí es un intento de hacer la matemática más cercana, pero es un intento bien personal, un intento de hacer la matemática más cercana para mí, y que ojalá, en el proceso, también pueda hacer la matemática más cercana para alguna otra persona.

2 Juegos

John Horton Conway nació el 26 de diciembre de 1937, en Liverpool, Inglaterra. En los años 1970 se dió a conocer en la comunidad de matemáticas puras al encontrar tres grupos simples que nunca antes se habían encontrado, a estos ahora se les conoce por el nombre de *Conway groups*, sin embargo, para la comunidad general de gente interesada en matemática sus aportes más destacables no fueron esos.

Desde su vida temprana demostró un gran interés por una parte de la matemática en específico, la matemática recreativa. A los quince años, Conway desarrolló un algoritmo para calcular en qué día de la semana caía una determinada fecha; mientras cursaba su pregrado hizo una maquina que sumaba números y solamente funcionaba con agua; y luego del pregrado, junto a Michael Guy, fue el primero en clasificar todos los politopos uniformes de cuatro dimensiones [2].

Problablemente sus aportes más destacados en la matemática recreativa fueron sus colaboraciones con Martin Gardner. Martin Gardner fue un divulgador científico y también mago, que tenía una columna en el *Scientific American* dedicada casi exclusivamente a proponer retos y a divulgar la matemática, su columna titulada *Mathematical Games* influenció a muchos matemáticos y matemáticas en Estados Unidos, y en el mundo [3].

En esta sección vamos a hacer un repaso de varios temas que surgieron a partir de esta interacción.

2.1 El juego de la vida

En Octubre de 1970, Martin Gardner en su columna *Mathematical Games* del *Scientific American* [4] escribió un texto que cambió para siempre la vida de Conway. El escrito *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"*, describe un autómata celular en dos dimensiones, una suerte de juego con cero jugadores tal que, a partir de un patrón inicial, evolucionaba conforme a unas reglas sencillas.

La columna, además de describir el juego proponía un reto: encontrar un patrón inicial que al evolucionar creciera sin límites, y además prometía 50 USD a quien fuera el primero en encontrarla o demostrar que no existe.

La columna fue un éxito, el juego de la vida se volvió un clásico de culto. Hoy en día si se busca el juego de la vida de Conway en Google la página misma empieza a jugar el juego de la vida, y si por ejemplo, se busca el juego de la vida en Youtube se puede encontrar muchísimos ejemplos de creaciones asociadas al juego de la vida, calculadoras en el juego de la vida, relojes, otros juegos parecidos al juego de la vida, incluso hay videos como el que se encuentra en [5] que muestran 'naves espaciales' y otros 'organismos' viviendo en el juego. Como describiría Siobhan Roberts en la biografía de Conway [2]:

"Hablando de manera práctica, el juego (de la vida) empujó el uso de autómatas celulares y simulaciones basadas en agentes en las ciencias de la complejidad, modelando el comportamiento de todo, desde hormigas pasando por el tráfico, por las nubes y hasta las galaxias. Hablando de manera poco práctica, el juego se convirtió en un clásico de culto para aquellos entusiasmados en ninguna otra aplicación extravagante más que perder el tiempo." [1]

En la biografía también cuentan varias leyendas que se cuentan alrededor del juego de la vida. Se dice que un informe militar de Estados Unidos estimó que el tiempo total gastado por personas jugando el juego de la vida en el trabajo equivalía a millones de dólares perdidos, también se dice que en el momento en que el juego fue más viral, $\frac{1}{4}$ de los computadores del mundo se jugaba el juego de la vida.

Fue tanta la fama del juego de la vida que su creador, John Horton Conway, llegó a decir que odiaba el juego de la vida ya que cada vez que se mencionaba su nombre en algún artículo matemático lo único que se mencionaba era el juego de la vida, casi que eclipsando todos los otros logros matemáticos que él había hecho [6].

El juego de la vida es un autómata celular de dos dimensiones, pero, ¿esto qué significa? La parte de autómata celular significa que es un juego que se juega en casillas, las casillas tienen estados posibles y estas van cambiando cada tiempo según unas reglas bien definidas. La parte de dos dimensiones significa que las casillas forman una red dos-dimensional, que en el caso del juego de la vida es una cuadrícula. En la sección 2.1.2 vamos a ahondar en los detalles del juego.

2.1.1 Los inicios

La idea del juego de la vida comenzó desde mucho antes. Según Stephen Wolfram [7], Conway le contó que en ese tiempo había sido contratado como profesor de lógica pero que ese no era su campo de investigación principal. Conway se interesó entonces en los autómatas, su plan era encontrar una buena enumeración de las funciones recursivas. En ese entonces Conway tenía una copia del libro *Automata Studies* [8], una recolección de ensayos sobre autómatas recopilados por Claude Shannon y John McCarthy, los padres de la teoría de la información y de la inteligencia artificial respectivamente. Conway cuenta que fueron las ideas de cómo los autómatas podrían en algún momento simular cosas complejas como el cerebro humano, o incluso, podrían replicarse a sí mismas, las que dieron inicio a su interés en crear autómatas. John von Neumann por ejemplo, veía un potencial en los autómatas inmenso, pensaba en que en algún momento se podría crear una máquina que pudiera crear otras máquinas y utilizarlas colonizando otros planetas. La idea que Von Neumann desarrollaba, ya más abstraída al terreno matemático, era sobre un autómata

[1] Traducción del autor.

celular dos dimensional con la posibilidad de replicarse a sí mismo, la idea fue publicada después de su muerte en su libro *Theory of self-reproducing automata* [9]. Sin embargo Conway le veía un problema al resultado de Von Neumann, cada celda del autómata podría estar en un total de 29 estados, lo que él consideraba muy complejo. Como diría él en su biografía:

"...Parecía terriblemente complicado. Lo que me emociona son las cosas que tienen una maravillosa simplicidad." [2]

Y así empezó una busqueda hacía un autómata universal (que pueda replicar cualquier máquina), y además que fuera lo más simple posible. Algo que describiría como su *Jugendtraum*, su sueño de juventud.

En principio un autómata es una abstracción de lo que es una máquina. Básicamente, un autómata es un conjunto de estados, que representarían los estados en los que puede estar la máquina, un conjunto de reglas o instrucciones sobre qué hacer en cada estado, y un conjunto de posibles *inputs* o entradas que se le pueden hacer a la máquina. La idea que tenía Conway era encontrar un autómata universal que no pareciera creado, que pareciera natural. La parte de la universalidad es lo que hace la busqueda complicada, en palabras simples, la universalidad significa que el autómata puede hacer cualquier cálculo, algo así como un computador que puede hacer multiplicaciones, sumas, divisiones, pero también otras cosas, como guardar documentos, hojas de cálculo, reproducir videos. Los computadores y celulares que tenemos en nuestra vida diaria son autómatas universales.

Conway empezó a buscar autómatas universales que tuvieran reglas simples. La idea de Von Neumann era sobre una cuadrícula de dos dimensiones, así que Conway pensó primero en algo más simple, algo de una sola dimensión, FRACTRAN fue el primer resultado. Si bien FRACTRAN es un autómata, FRACTRAN es mejor descrito como un lenguaje de programación, esto es, un sistema de notación para escribir programas de computación. En FRACTRAN los programas de computación se escriben como listas finitas de fracciones, y en estas se puede escribir cualquier tipo de programa, se pueden sumar, multiplicar, calcular los dígitos de π, etc. Si bien los programas en FRACTRAN son simples y FRACTRAN es universal, FRACTRAN se alejaba de la idea principal de su *Jugendtraum*, ni tampoco era parecida a la idea de Von Neumann.

Despues de esto, Conway intentó jugar con autómatas de una dimension, es decir autómatas donde la cuadrícula es de solo un cuadro de ancho. Sin embargo, se le hizo muy dificil tener resultados sobre estos [2]. Fue hasta que lo intentó con dos dimensiones cuando llegó a conseguir su cometido.

2.1.2 Life

Conway y aquellos colaboradores a los que también les gustaba su idea trabajaron en varias versiones de autómatas de dos dimensiones, durante mas o menos 18 meses. Querían reglas

[2] Traducción del autor.

simples, enotnces empezaron a pensar en términos de vida y muerte, la idea era tener reglas para que una celda 'viviera' y para que una celda 'muriera', en ese sentido la celda tenía dos estados. Algo importante era encontrar un buen balance entre las dos reglas, si las reglas sobre la muerte eran muy estrictas entonces todas las celdas terminarían muertas pasados unas cuantas iteraciones, y si las reglas de la vida eran muy suaves entonces los patrones crecerían muchísimo sin dar tiempo a poder hacer algo útil con ellos.

En la penúltima versión del juego de la vida, las celdas tenían tres posibles estados, la idea era darles un 'sexo' a las celdas vivas, dando los posibles estado 'macho', 'hembra' y 'muerto'. En el blog de Tanya Khonakova [10], Conway cuenta que los nombres que les pusieron eran 'obispos' y 'actrices' según un chiste británico. El problema que tenía esta idea era que para que las reglas estuvieran bien balanceadas, las celdas que nacieran necesitaban que hubiera tres celdas vivas adyacentes, en este caso tendría que haber dos 'padres' con el mismo sexo y la nueva celda tendría que tener el sexo contrario para que hubiera un balance entre ambos sexos, era un tanto complicado y al final vieron que el sexo no tenía más efecto que determinar el sexo de la nueva celda, por lo tanto la solucion que encontraron fue hacer un autómata asexual, solamente dos estados, 'vivos' y 'muertos', así llegaron a la versión final.

El juego de la vida se juega en un tablero dos dimensional conformado por celdas, como un tablero de Go pero infinito. El juego empieza con un estado inicial y va evolucionando conforme a las reglas. Cada celda tiene 8 celdas adyacentes a los que llamaremos vecinos, cuatro que comparten un lado y cuatro que comparten solamente un vértice, es decir, dos horizontales, dos verticales, y cuatro en diagonal. Las reglas del juego son:

1. **Regla de nacimiento:** Si una celda está muerta en el tiempo t, y la celda tiene exactamente 3 celdas vecinas que están vivas, entonces la celda se convierte en una celda viva en el tiempo $t+1$.

2. **Regla de muerte:** Si una celda viva en el tiempo t tiene menos que 2 vecinos vivos, la celda muere por soledad en el tiempo $t+1$. Si una celda viva en el tiempo t tiene más que 3 vecinos vivos, la celda muere por hacinamiento en el tiempo $t+1$.

3. **Regla de supervivencia:** Si una celda viva tiene exactamente 2 o 3 celdas vivas vecinas en el tiempo t, entonces la celda sigue viva en el tiempo $t+1$.

Hagamos un ejemplo. Supongamos que de estado inicial tenemos tres celdas vivas puestas verticalmente, como en la figura **2-1**. Después del primer paso, la celda que está en el medio tenía dos celdas adyacentes vivas, entonces la celda sobrevivira, mientras que las celdas de arriba y abajo solo tenían una celda vecina viva, por lo tanto estas celdas morirán en la siguiente iteración. Sin embargo, las celdas que se encuentran justo a los lados derecho e izquierdo de la celda del frente tenían exactamente tres vecinos vivos, por lo tanto nacerán en el siguiente paso.

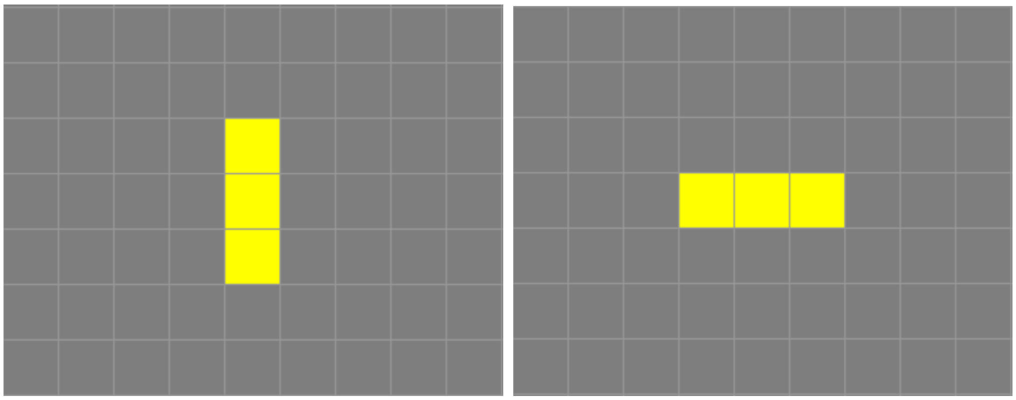

Figura 2-1: En la izquierda se muestra la configuración en el paso $t = 0$, a la derecha en la iteración siguiente $t = 1$. A esta figura se le conoce como *blinker*.

Los *blinker* de la figura **2-1** tienen la propiedad de que se repiten, es decir, vuelven a su estado inicial. En el caso del *blinker* se puede ver que por simetría, pasa de ser tres celdas verticales a ser tres celdas horizontales y viceversa. A los patrones que tienen la propiedad de volver a su estado inicial se les llama *osciladores*, y a la cantidad de pasos que se demoran para volver a su estado inicial se le llama *periodo*. Aunque hay muchísimas figuras que son osciladores de periodo 2, no todos los osciladores tienen periodo 2, por ejemplo el *pulsar* que fue también descubierto por Conway (ver figura **2-2**). Se han descubierto osciladores de muchísimos periodos, también se ha descubierto que se pueden construir osciladores de periodos mayores o iguales que 43, sin embargo aún no se han descubierto osciladores con periodo 19 o periodo 41, siendo este aún un problema abierto.

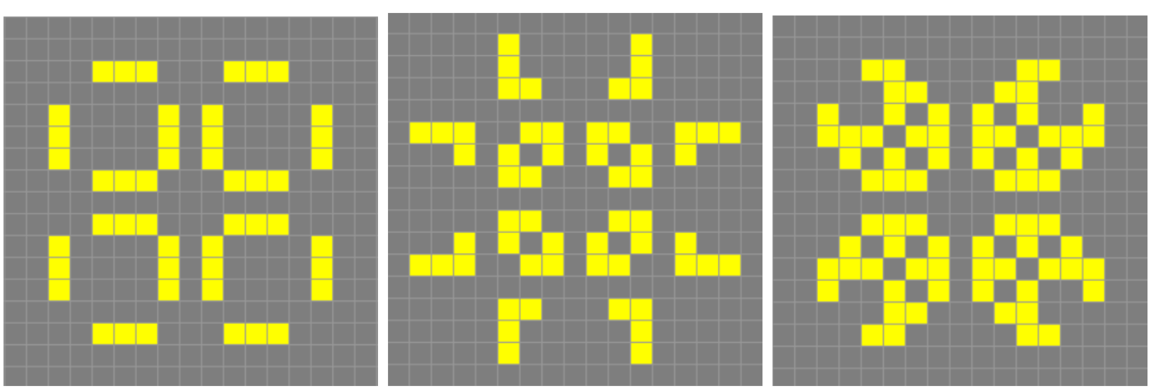

Figura 2-2: En la figura se pueden ver los pasos de la evolución de un patrón llamado *pulsar*. Es un oscilador de periodo 3, por lo tanto después del tercer paso vuelve a su estado inicial.

Además de los osciladores, también existían otros patrones que no cambiaban en absoluto al pasar el tiempo, a estos patrones se les llama *estacionarios*. El más simple de estos patrones es el *bloque*, conformado por cuatro celdas vivas unidas en forma de cuadrado, ninguna muere porque cada una está en contacto con exactamente 3 celdas vivas mientras que las celdas muertas alrededor solamente están en contacto con 2 celdas vivas, por lo tanto no pueden nacer. Se puede ver el bloque en la parte izquierda de la figura **2-3**.

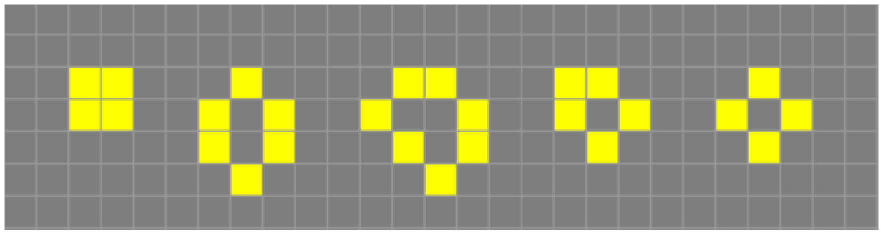

Figura 2-3: Cinco patrones estacionarios, es decir, ninguno cambia con el tiempo. Sus nombres de izquierda a derecha: un *bloque*, una *colmena*, una *tajada de pan*, un *bote*, un *balde*.

De las primeros patrones que se estudiaron, problablemente los más interesantes son los llamados *Matusalén*, nombrados en referencia al personaje más longevo de la biblia. Estos patrones tienen en común que evolucionan por largos periodos de tiempo antes de estabilizarse, es decir, en volverse figuras conocidas, como los osciladores o las figuras estacionarias. El primer Matusalén que se encontró fue el R-pentominó (ver figura **2-4**), que también fue una de las primeras evidencias de la complejidad que podría traer el juego de la vida. El R-pentominó se demora 1103 iteraciones en estabilizarse, por lo tanto, fue un gran desafío para los primeros investigadores del juego de la vida, que básicamente hacían toda su investigación en tableros de Go y a mano.

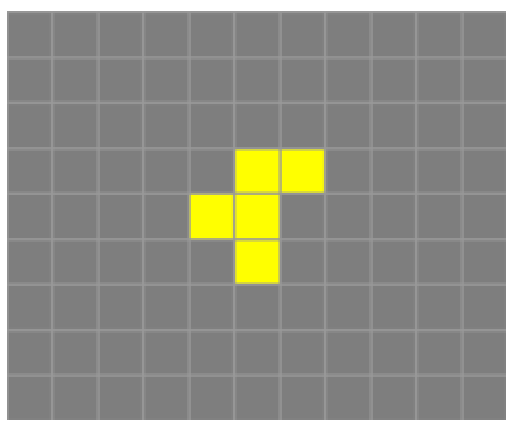

Figura 2-4: El R-pentominó.

De las figuras más simples que se pueden formar con celdas son los poliominós, un poliominó es un objeto formado cuando se unen varias celdas cuadradas por sus lados, en particular, los pentominós son poliominós con cinco celdas, hay en total 12 pentominós diferentes y estos se nombran con las letras del alfabeto, de ahí sale el R-pentominó. La complejidad del R-pentominó se descubrió porque Conway y su equipo estaban probando todos los patrones simples que conocieran, empezaron con los poliominó y se dieron cuenta que la mayoría de ellos se estabilizaba apenas pasaban unas cuantas iteraciones, todos los demás poliominós con menos de 6 celdas vivas se estabilizan antes de la onceava iteración.

Como Conway y su equipo hacían el trabajo de revisar los patrones de manera análoga con tableros de Go y a mano, se comteían muchos errores. Al equipo de ellos llegó a ayudarlos Richard Guy, un matemático de Cambridge, que tuvo el trabajo de revisar y escrutinar la evolución de los patrones de los que aún no conocían todo, entre esos, el R-pentominó. En la iteración número 69, Richard Guy atisbó un nuevo patrón que se separaba del caos formado por el R-pentominó y en las siguientes generaciones se apartaba más y más, cada vez como si caminara a través del tablero. Guy se lo mostró a Conway, y este último lo bautizó *glider*[3].

Este *glider* era una señal contundente de que el juego de la vida podía ser universal. Para que un autómata se asemeje a un computador (en el hecho de ser universal) tiene que poder enviar información de alguna manera, cuando Conway y su equipo encontraron el *glider* se imaginaron que podrían enviar información mediante este patrón, análogo a lo que se hace con la corriente eléctrica en la vida real. Para poder hacerlo se necesita una forma de generar *gliders* periódica y controladamente, algo así como un cañon de gliders. En el artículo de Gardner [4], el reto de los 50 USD hacía referencia a que un cañon de *gliders* sería perfecto para ganar la apuesta, porque por un lado sería un patrón sin límite de crecimiento entonces cumpliría la condición, y por otro les ayudaría a los investigadores a probar la universalidad del juego de la vida.

En Noviembre del año en que salió la columna de Gardner (1970), un equipo del MIT liderado por Bill Gosper, un matemático y programador estadounidense, se ganó el premio propuesto en la columna al descubrir/inventar una pistola de gliders ahora conocida como la *Gosper Glider gun* (ver figura **2-6**).

Después de la carrera por encontrar una pistola de gliders, vino la carrera para mostrar que el juego de la vida era universal. Después del glider se econtraron muchas otras 'naves espaciales', muchas más grandes, y se estudió también cómo sus interacciones (o choques) podrían ser útiles para mostrar la universalidad.

Para mostrar la universalidad toca mostrar que es posible formar cada una de las partes de un computador en el juego de la vida, por ejemplo, se tiene que mostrar que se puede

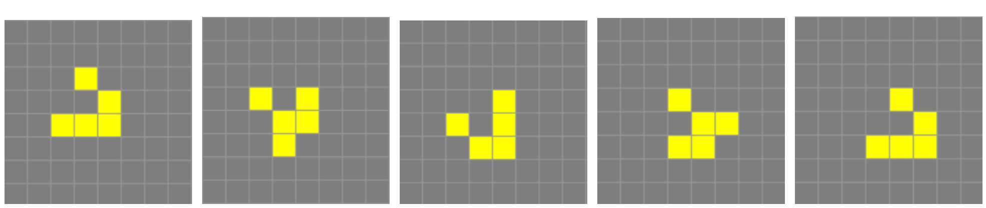

Figura 2-5: La evolución del *glider*. Después de 4 iteraciones se transforma por una copia del mismo pero una casilla corrida a la derecha y abajo.

[3]Su traducción al español sería planeador, haciendo referencia a los aviones planeadores

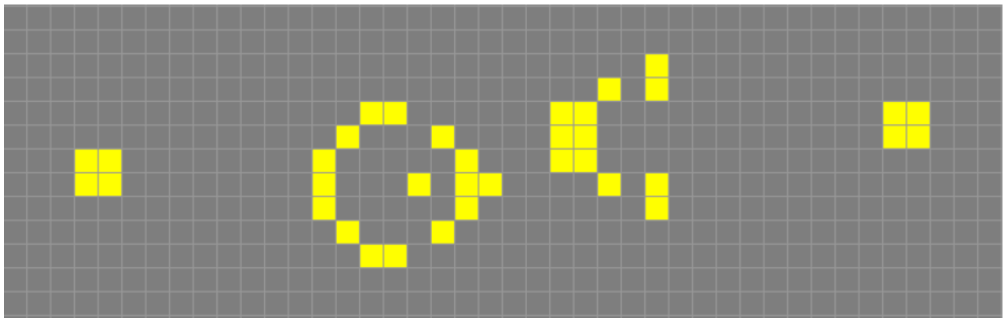

Figura 2-6: La *Gosper glider gun*. Genera un glider en la iteración 15, y a partir de esa genera un glider cada 30 iteraciones.

modelar una memoria, o también que se pueden modelar los cálculos que puede hacer un computador. Para los cálculos los computadores utilizan compuertas lógicas, la ídea es que por un lado de la compuerta entran una o dos señales eléctricas, y dependiendo de estas por la otra sale o no sale corriente. Por ejemplo, la compuerta NOT lo que hace es invertir la señal, si entra corriente a la compuerta entonces no sale corriente, y si no entra corriente entonces sí sale corriente.

En el juego de la vida, la forma de construir las compuertas lógicas es mediante las propiedades de las colisiones de los gliders, hagamos el ejemplo de la compuerta NOT, en este caso tendremos una "corriente" de gliders tal que al llegar a la compuerta se les aplicará el NOT, entonces si en ese momento llega un glider la compuerta no generará ningún glider y si no llega ningún glider la compuerta sí generará uno. Si dos gliders se chocan de una manera precisa, resultara en la destrucción de los dos gliders, tal como se muestra en la figura **2-7**. Por lo tanto, lo que podemos hacer es chocar la corriente a la que le queremos aplicar la compuerta con una corriente de gliders constante, de modo que, si no se chocan la corriente constante seguirá produciendo gliders y si en cambio sí se chocan, todos los producidos por la corriente se destruirán.

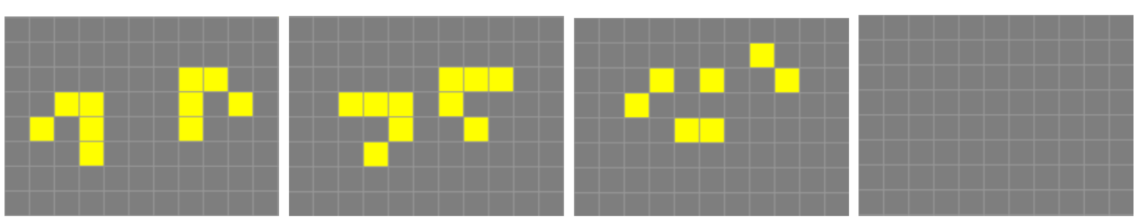

Figura 2-7: Dos gliders que van en direcciones opuestas chocan destruyendose mutuamente. Fotos tomadas en el tiempo t=0,2,4,6, de izquierda a derecha.

Si bien la existencia de compuertas lógicas de por sí no implica que el juego de la vida fuera universal, se fueron descubriendo varios patrones que implicaban de cierta manera que se podía construir las diferentes partes de un computador en el juego de la vida; se descubrieron formas de guardar corrientes de gliders, es decir memoria, y se descubrieron las otras compuertas.

Un mes después de que Bill Gosper descubriera la pistola de gliders que lleva su nombre, Conway le escribió una carta a Martin Gardner que decía [2]:

"*Querido MG,*

Espero que esta carta no te llegue muy tarde - el correo parece que se demora mucho en llegarte. Retrasé esta carta hasta ahora porque quería completar mi prueba de que EL JUEGO DE LA VIDA ES UNIVERSAL."[4]

Si bien Conway nunca publicó su prueba de que el juego de la vida es universal, el juego se volvió tan famoso que hasta la fecha se han hecho un montón de construcciones en el juego de la vida que lo prueban. En ese entonces se estimaba que para hacer un computador en el juego de la vida se necesitaría millones de celdas, sin embargo, ahora se sabe, gracias a construcciones hechas por comunidades en línea, que no se necesita tantas celdas para hacer un computador, e incluso se han creado computadores que tienen sus propias pantallas en el mismo juego [11].

2.2 Juegos Matemáticos

A Conway siempre le interesaron los juegos, era fanático al backgammon y de sus primeros aportes a la columna de Martin Gardner eran juegos que él mismo había creado, por ejemplo el juego Sprouts, creado por Conway en compañía del entonces estudiante de posgrado Mike Paterson, fue descrito en una carta que Conway le envió a Gardner en 1967 y ese mismo año Gardner la publicó en su columna *Mathematical Games*[12].

Por eso no es sorpresa, que alrededor del año 1970, al descubrir el teorema de Sprague-Grundy, se obsesionara con los juegos. El teorema de Sprague-Grundy[13], es un teorema que trata sobre los juegos imparciales, estos son aquellos juegos de información perfecta, sin azar, tales que los movimientos posibles dependan solamente del tablero y no de qué jugador esté jugando.

Vamos a explicar esta definición parte por parte. Un juego de información perfecta es un juego donde cada persona sabe cuáles movimientos pueden hacer los otros jugadores, en este sentido juegos como el póker o el black-jack quedan descartados, puesto que los jugadores no saben qué cartas tienen los otros. Un juego sin azar es un juego donde los movimientos no dependen del azar, no hay ningún dado que dicte los posibles movimientos ni hay ningún generador de números aleatorios que dicte el ganador, en este caso quedan descartados juegos como el parqués, parchís o la lotería. La última condición de estos juegos es la que le da el nombre de imparciales, esto es, si tenemos la posición del tablero los movimientos posibles para los jugadores son los mismos, aquí se descartan la mayoría de otros juegos que se conocen, por ejemplo, el ajedrez tiene diferentes movimientos para los dos jugadores, uno juega con las fichas blancas y el otro con las fichas negras, o por ejemplo

[4] Traducción del autor.

el triqui (tic-tac-toe), en este un jugador juega con las cruces ('X') y otro con los círculos ('O'). Fíjese en las figuras **2-8** y **2-9**, en ambos tableros los posibles movimientos para las fichas negras y para las fichas blancas son diferentes, en ambos casos el jugador de las fichas negras puede ganar en el siguiente movimiento mientras que el de las fichas blancas no lo puede hacer.

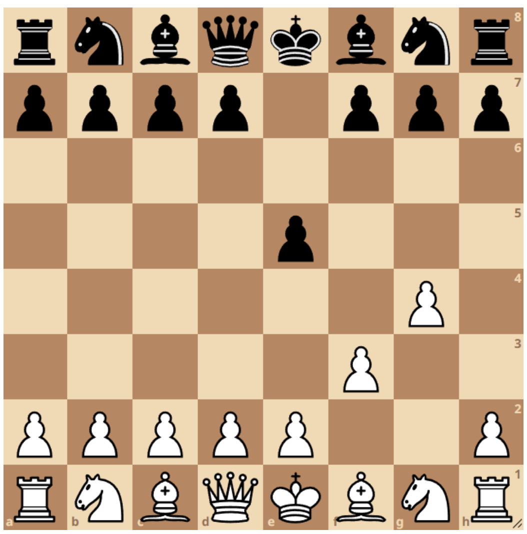

Figura 2-8: Tablero de ajedrez donde el jugador con las fichas negras puede ganar en un movimiento, pero el jugador con las blancas no. *(Fuente: lichess.com)*

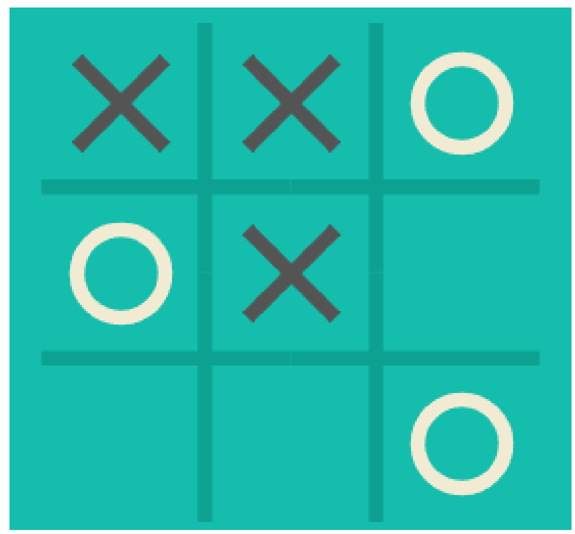

Figura 2-9: Tablero de triqui donde el jugador con las 'X' puede ganar en un movimiento, pero el jugador con las 'O' no. *(Google)*

Un ejemplo de juego al que sí se le puede aplicar el teorema de Sprague-Grundy, es decir un juego imparcial, es el comunmente llamado juego 21. En el juego se van turnando entre dos personas, el primer jugador dice el número '1' y el siguiente jugador tiene que aumentar el número en '1', '2' o '3'. Pierde el jugador que diga '21' o un número mayor que '21'. Un ejemplo de un juego de '21' es:

Jugador	Número
1	1
2	4
1	7
2	10
1	11
2	13
1	16
2	17
1	20
2	21

Acá el jugador 1 ganó porque el jugador 2 dijo '21'. Fíjese que en este juego las opciones para los dos jugadores son las mismas, el 'tablero' de este juego consistiría en el número que se ha dicho inmediatamente en el turno anterior.

El teorema de Sprague-Grundy[5] le asigna un valor a todos los juegos de este tipo con el que se puede calcular qué jugador va a ganar si ambos jugadores juegan de la mejor manera. Además de todo, el teorema da una forma en la que se pueden calcular valores de juegos que consisten en la combinación de otros juegos más simples, por ejemplo, si quisieramos jugar dos juegos imparciales al mismo tiempo pero en cada turno solo podemos hacer un movimiento en uno de los dos juegos, el teorema de Sprague-Grundy nos diría como calcular quién ganaría con base a los valores de cada uno de los juegos imparciales.

Conway quería generalizar este teorema para otra clase de juegos más generales, los llamados juegos partisanos. Los juegos partisanos son también juegos sin azar y de información perfecta, pero en este caso no tenemos la condición extra de imparcialidad, entonces entran juegos como el ajedrez, el triqui o el Go. Todos los juegos imparciales son a su vez juegos partisanos.

En la época de 1970 sucedieron varías cosas que ayudaron al estudio de estos juegos. Primero, Jon Diamond, el campeón británico de Go durante 11 años [14], entró a estudiar matemáticas en Cambridge. Él fundó la *Cambdridge Go Society* y con eso incentivó el juego del Go dentro de Cambridge. Conway se interesó por el Go principalmente porque este juego tiene la propiedad de que casi al final de la partida, el tablero se separa en ciertas zonas, como si se estuvieran jugando varios juegos simultáneamente, cada jugador eligiendo en cada turno en qué parte jugar.

La otra cosa que ayudó al desarrollo de la teoría fue el interés de Richard Guy y Elwyn Berlekamp en los juegos. Elwyn Berlekamp fue un matemático y científico de la computación

[5]Formalmente, el teorema dice que todo juego imparcial es equivalente a un 'nimber', el análogo en juegos imparciales a los números que luego definiremos.

que ya había trabajado en juegos antes, su tesis de maestría había sido en algoritmos para resolver problemas del bridge (el juego de cartas), y mientras trabajaba en Bell Labs hizo un reporte técino del juego de cuadritos, un juego a lápiz y papel donde los jugadores se turnan conectando puntos adyacentes en una cuadrícula y gana el que haya hecho más cuadritos. Richard Guy, el mismo que descubrió el *glider* del juego de la vida, conocía a los dos y fue el puente para que los tres trabajaran juntos.

Los tres dieron vida a *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, un compendio de cuatro volúmenes con toda la información que tenían sobre juegos matemáticos. Un trabajo que se demoró quince años en salir a la luz, con dos volúmenes, y luego en una segunda edición 20 años después con dos volúmenes más.

En este compendió desarrollaron la teoría de los juegos partisanos y la extendieron. En los libros aplican la teoría a muchísimos juegos diversos, tanto a juegos imparciales como a juegos partisanos, y extienden el teorema de Sprague-Grundy a juegos partisanos también.

2.2.1 Hackenbush

Un juego que nos permite explicar una parte de la teoría de manera más directa es el juego del Hackenbush. El juego lo inventó Conway pero el nombre le fue dado por Richard Guy inspirado en un personaje de la película de 1937 *A Day at the Races*, le puso así porque el juego consiste en cortar (*hack* en inglés) arbustos (*bushes* en inglés).

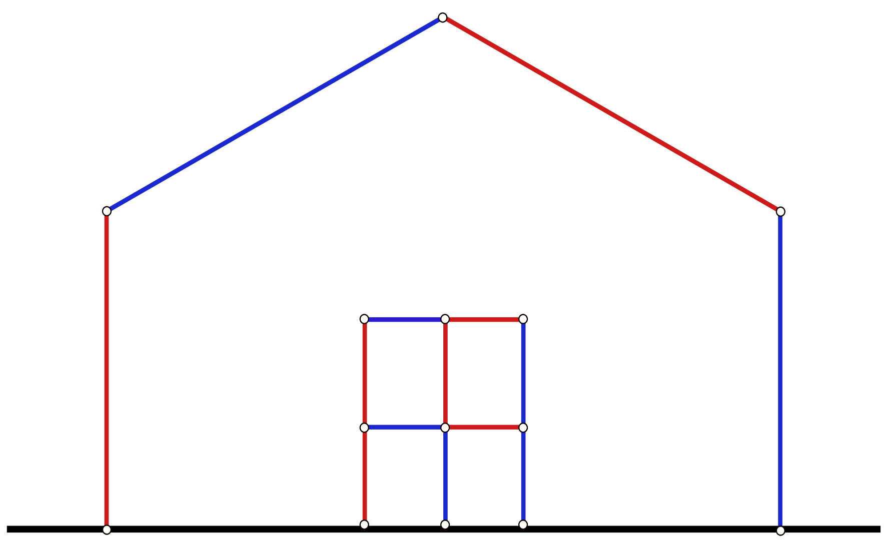

Figura 2-10: Una posible configuración inicial del juego del Hackenbush.

El juego empieza con una configuración de líneas, unas rojas y otras azules. Todas las líneas tienen que estar conectadas al piso, ya sea directamente o a través de otras. El juego se juega por turnos, cada uno de los jugadores tiene un color asignado, un jugador juega con las azules y el otro juega con las rojas. En cada turno el jugador tiene que borrar una línea de su color, y si alguna de las otras líneas queda desconectada entonces esa también se borra. Es como si se estuvieran cortando arbustos, si se corta el tallo del arbusto entonces este se va a caer al piso y ya no va a estar en el juego.

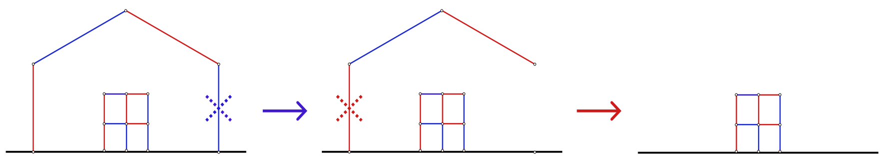

Figura 2-11: Jugando Hackenbush.

Lo interesante del juego es que tiene la propiedad que estaba buscando Conway en juegos partisanos: algunas configuraciones tienen ciertos 'arbustos' desconectados unos de otros, por lo tanto cada uno de estos arbustos se puede tratar como un juego separado, así como lo muestra la imagen de la figura **2-12**. Vamos a usar el hackenbush en lo que queda de esta sección para mostrar cómo se calculan los valores de un juego en general. Para todos los juegos se puede hacer una construcción parecida pero puede que aplicar la teoría sea más dificil. Lo que hace excepcional al hackenbush, es que parece un juego diseñado para que ilustrar la teoría sea más sencillo.

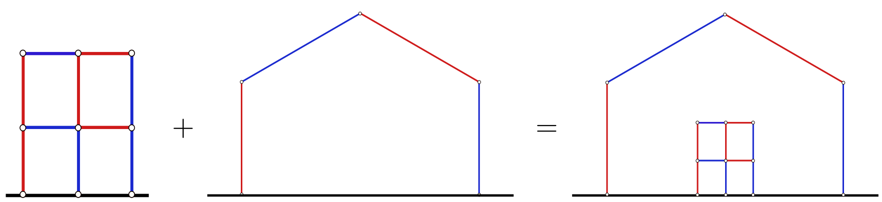

Figura 2-12: La puerta y el contorno de la casa se pueden tomar como juegos separados.

2.2.2 Valores de juegos

Para un estado del juego, en este caso el hackenbush, tenemos los posibles movimientos que puede hacer el jugador de las líneas azules y los posibles movimientos que puede hacer el jugador de las líneas rojas. Si calculamos los valores para esos estados antes vamos a poder calcular el valor de nuestro estado con respecto a esos posibles estados siguientes.

Sea L el conjunto de los valores de los estados a los que puede llegar el jugador azul, y sea R el del jugador rojo, entonces el valor de nuestro estado se va a definir como $\{L \mid R\}$. En la figura **2-13** podemos ver un ejemplo de esto, si bien en la figura se muestra los estados siguientes la idea es guardar solamente los valores.

En cierto sentido, los valores están definidos a partir de los valores siguientes, y estos valores siguientes están definidos a partir de los siguientes, y así hasta que se acabe el juego. El hackenbush termina cuando no hay ninguna línea en el estado, por lo tanto vamos a tomar este como nuestro caso base, a ese estado le asignaremos un valor de 0.

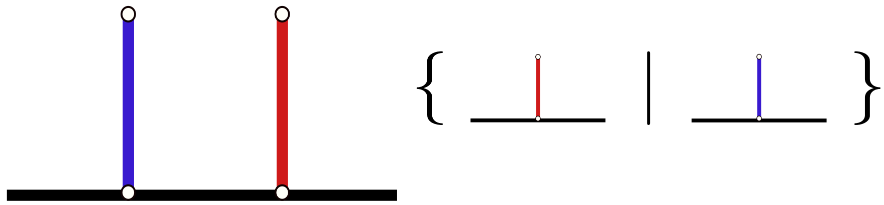

Figura 2-13: A la izquierda el estado del juego, y a la derecha sus movimientos. Entre los paréntesis a la izquierda se ve el siguiente estado si el jugador azul juega, y a la derecha el del jugador rojo.

En general cuando analizamos un juego es mejor empezar desde sus últimos movimientos, sus movimientos más básicos, para ver cómo se puede ganar. En el caso del hackenbush los siguientes movimientos más básicos son cuando existe solo una línea, sea roja o azul. Si la línea es azul entonces el valor es $\{0 \mid \}$, mientras que si la línea es roja el valor es $\{ \mid 0\}$, a estos valores los llamaremos 1 y -1 respectivamente, así como lo indica la figura **2-14**.

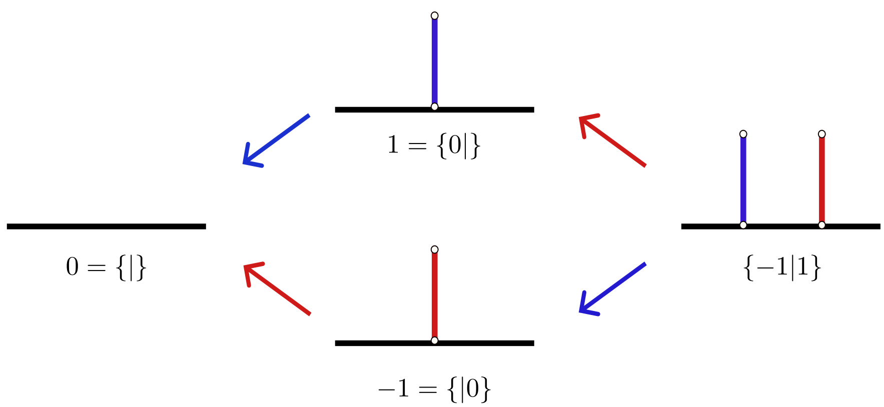

Figura 2-14: Diagrama de los casos base. Cada flecha indica un movimiento, y el color corresponde al jugador que lo hace.

Lo que intentan capturar estos valores es el sesgo que tiene el tablero para un jugador o el otro, los tableros con valores positivos van a ser ganados por el jugador azul y los de valores negativos van a ser ganados por el jugador rojo. Pero hay otro tipo de tableros, aquellos que no tienen ningún sesgo de color, como el de la derecha de la figura **2-14**. En este tablero gana el jugador que juegue en segundo lugar, esto es, si empieza el azul gana el rojo, y si empieza el rojo gana el azul, en estos tableros el valor va a ser igual a 0, por lo tanto tenemos que $0 = \{-1 \mid 1\}$.

Esta definición de $0 = \{-1 \mid 1\}$ es consistente con lo que habíamos dicho de sumar los juegos. Otra forma de verificar el valor de este juego es darse cuenta que este juego equivale a la suma de dos juegos, el de la izquierda es solo una línea azul, y el de la derecha es solo una línea roja, estos juegos valen respectivamente 1 y -1, por lo tanto el valor del juego va a ser igual al valor de su suma, $1 + (-1) = 0$.

En la sección 3 de números surreales nos acercamos a esta definición desde otro ámbito.

2.2.3 Comparando juegos

Ya teniendo un juego de valor 1, y otro juego de valor -1, podemos crear juegos de valores n y de valores $-n$ para todo n número natural. Estos serían n líneas de color azul para el caso de un juego de valor n, y n líneas de color rojo para un juego de valor $-n$. Con estos ya podemos intentar calcular los valores de otros juegos más complejos.

Un ejemplo es calcular el valor de varias líneas del mismo color unidas verticalmente. Consideremos la figura **2-15**, a la izquierda se puede ver tres líneas rojas unidas verticalmente, y a la derecha tres líneas azules separadas. El valor de la parte derecha, la parte azul, se puede calcular ya que es la suma de 3 líneas azules simples, es decir, el valor es 3.

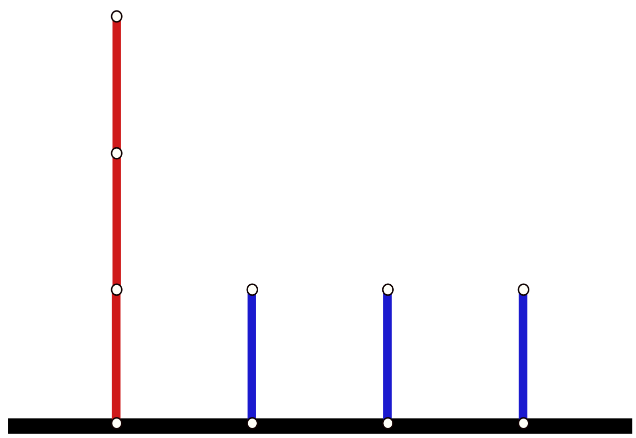

Figura 2-15: En este juego siempre gana el segundo jugador.

Ahora, si analizamos el juego podemos ver que, si los dos jugadores juegan óptimamente, el segundo jugador siempre ganará sin importar que color empiece: El jugador de color rojo va a quitar la línea más arriba y el jugador de color azul va a quitar una línea azul, en cada turno va a haber siempre una línea menos de ambos colores, luego gana el que juegue de segundas. Esto significa que el juego tiene valor 0, entonces como la parte derecha azul tiene valor 3 la parte izquierda tiene que tener valor -3.

Para todos los juegos hechos a partir de líneas del mismo color unidas verticalmente tenemos que el valor es la cantidad de líneas unidas, n si es azul y $-n$ si es rojo, siendo n la cantidad de líneas.

Si nos fijamos en la definición de los números de estos juegos podemos darnos cuenta de otra igualdad. Para un juego conformado por n líneas azules simples separadas, nuestro valor será $\{n-1 \mid \}$, puesto que sin importar que línea quitemos siempre quedarán $n-1$ líneas. Para un juego de n líneas azules están unidas verticalmente tendremos que el valor será $\{0, 1, 2, \ldots, n-1 \mid \}$, puesto que en estos estados podemos quitar la cantidad de líneas que querramos en un solo movimiento. Como ambos juegos tienen el mismo valor, entonces lo que acabamos de probar nos da la igualdad $\{n-1 \mid \} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1 \mid \}$, que es una igualdad abstracta que pasa en cualquier juego, no solo en Hackenbush.

Hagamos otro ejemplo, consideremos dos líneas pegadas verticalmente, la de abajo azul y la de arriba rojo, exactamente como en la figura **2-16**. Si vamos por todos los posibles movimientos de los dos jugadores nos damos cuenta que el valor es positivo, ya que el azul siempre va a ganar, pero, ¿Exactamente cuál es el valor?

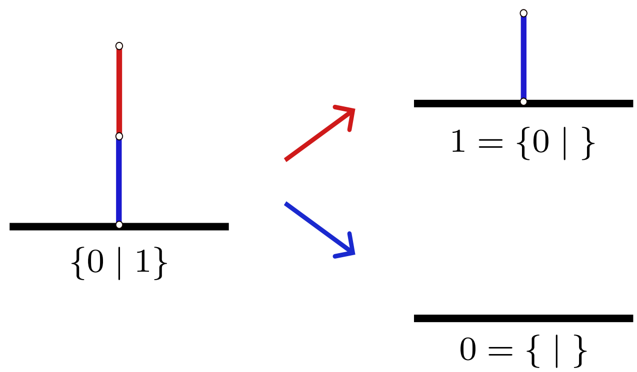

Figura 2-16: El valor del diagrama calculado.

Algo que podemos hacer es compararlo con juegos de valor $-n$, si al sumarlo con el juego todavía sigue ganando el azul esto significa que el valor del juego es menor que n. Haciendo esto podemos ver que el valor de nuestro juego está entre 0 y 1, esto es, si le sumamos un juego de una línea roja al nuestro entonces gana el rojo. En otras palabras, $0 < \{0 \mid 1\} < 1$. Lo interesante de $\{0 \mid 1\}$ es que entonces no es un valor entero, por lo tanto lo siguiente que tendremos que hacer es ver entre qué valores racionales está.

Para esto, lo primero que hacemos es sumar dos veces este juego y compararlo con un juego de valor -1, es decir, con un juego de una línea roja, nuestro juego quedaría como en la parte izquierda de la figura **2-17**. Si en este juego gana el jugador rojo eso significa que dos veces el valor del juego es menor que 1, si gana el jugador azul significa que es mayor que 1, y si gana el segundo jugador esto significa que el valor es precisamente $\frac{1}{2}$ ya que dos veces el juego es exactamente 1.

Lo interesante de este análisis es que, con argumentos parecidos podemos calcular el valor de cualquier juego de Hackenbush, y, sabiendo propiedades de estos valores, como las demostradas en la sección 3, podemos hacer este cálculo incluso más rápido.

Por ejemplo, una propiedad es que si el valor es $x = \{L \mid R\}$, entonces se puede mostrar que x es mayor que todos los elementos de L y menor que todos los elementos de R. Por lo tanto, si un elemento de L es positivo o 0, entonces x es positivo, por lo tanto gana el azul. Esto se traduciría a los juegos como, si el jugador azul puede llevar el juego a un estado donde sabemos que o gana el azul o gana el segundo jugador, entonces en ese estado gana el azul.

Estos valores, llamados números surreales, se alimentan mutuamente del lenguaje de los

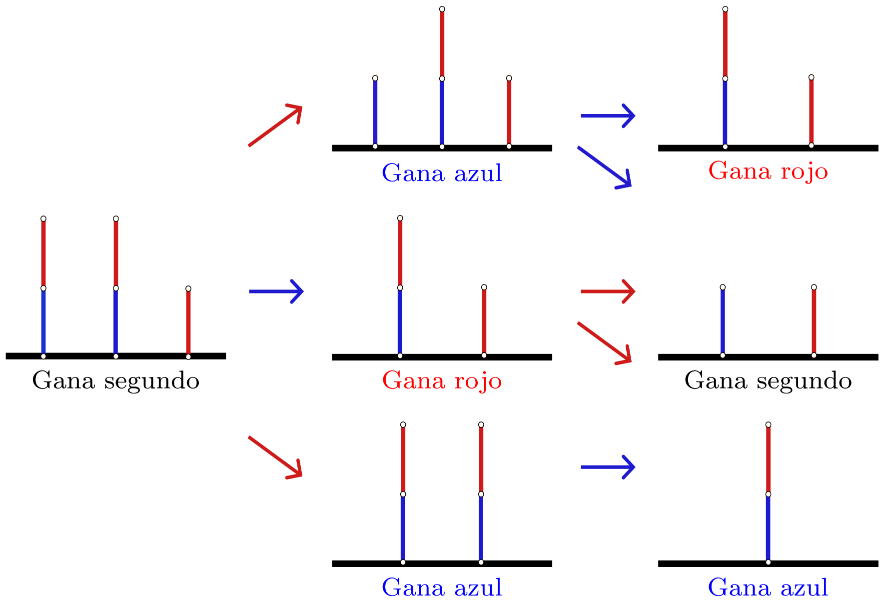

Figura 2-17: Demostración gráfica de que $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$.

juegos, esto es, propiedades de los juegos muestran propiedades en los números surreales y propiedades en los números pueden a su vez mostrar propiedades en los juegos.

Una muestra de esto son los inversos aditivos, si en un juego de hackenbush cambiamos el color de todas las líneas entonces el valor de este nuevo juego será el inverso del valor del juego anterior. Esto lo podemos ver sumando los dos juegos: Si el jugador uno hace un movimiento, entonces el jugador dos puede jugar el mismo movimiento pero en la otra figura, asegurandose por simetría que el jugador dos siempre tendrá un movimiento por hacer, luego el valor de la suma es 0 y los valores de las dos figuras son inversas aditivas.

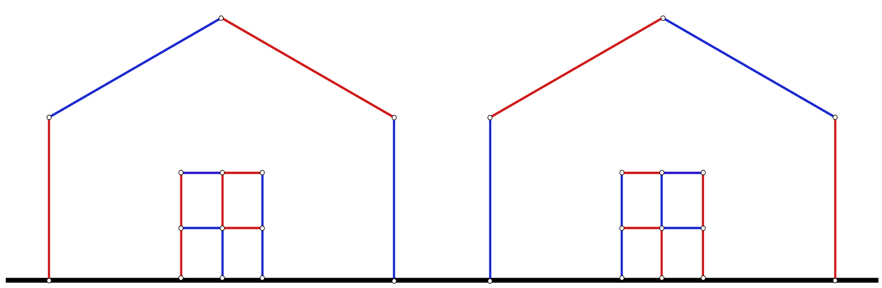

Figura 2-18: La suma de cualquiera dos juegos con los valores cambiados da valor 0.

Si nos ponemos a calcular por definición el valor de este inverso podemos ver que nos da la misma definición que tenemos en nuestra seccion 3. Acá los posibles movimientos del jugador rojo van a ser los mismos que tenía antes el jugador azul y viceversa, por lo tanto se puede decir que si el valor de un juego es $\{L \mid R\}$ entonces el valor del inverso aditivo es $\{-R \mid -L\}$.

3 Números Surreales

John Conway fue un matemático bastante prolífico, según su página de Wikipedia [15] Conway trabajó en 'teoría de grupos finitos, teoría de nudos, teoría de números, teoría combinatoria de juegos, teoría de códigos y matemáticas recreacionales', en el libro *The Mathematical Artist* [7] lo describen como un '*polymath*' que transformó las matemáticas.

Sin embargo, existía un descubrimiento que lo enorgullecía más que el resto de sus aportes a las matemáticas, los números surreales [6]. Los números surreales son una extensión de los números reales que admite infinitos e infinitesimales, además son el cuerpo ordenado más grande, esto significa que todos los demás cuerpos ordenados son subcuerpos de los números surreales [16].

La primera descripción formal de los números surreales apareció en el libro *On numbers and Games* de Conway en 1976. Mientras estaba trabajando en *Winning Ways for your Mathematical Plays* a Conway se le ocurrió la idea de escribir *On Numbers and Games.* A Conway le preocupaba la idea de que había una parte de la teoría desarrollada en *Winning Ways* que no iba a poder ser parte de ese libro, principalmente porque era una parte "transfinita" de la teoría, entonces no se le veía a esta parte una aplicación concreta en los juegos [17]. Entonces Conway se sentó por una semana a reunir todo el material que luego iba a conformar *On Numbers and Games*, pero sin contarle a los demás autores de *Winning Ways* Elwyn Berlekamp y Richard Guy. Después de la semana de recolección, Conway les confesó a los coautores su intención de publicar *On Numbers and Games* y Elwyn Berlekamp lo amenazó con tomar acciones legales contra la publicación. Afortunadamente todo se resolvió y se pudieron publicar estos dos trabajos, cada uno enfocados en cosas distintas; *On numbers and Games* desarrolla la teoría de los números surreales como extensión de los números reales, mientras que *Winning Ways for your Mathematical Plays* desarrolla la teoría de los juegos combinatorios, no solamente hace uso de los números surreales sino que trabaja en el concepto más general de juegos. Aunque Conway dice que *On numbers and Games* se escribió en una semana, el libro se demoró algo más de 25 años en publicarse, mientras que recibía correcciones de otros autores y se añadían capítulos.

Por otro lado, el nombre de los números surreales se lo dió Donald Knuth en su novela de 1974 *Surreal Numbers: how two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness* [18], dos años antes de que se publicara *On Numbers and Games.* Antes de que Knuth les pusiera el nombre, Conway los llamaba solamente números, puesto que todos los números estaban descritos en esta clase, tanto los reales como los ordinales.

Nuestro objetivo en este capítulo va a ser definir los números surreales y explicar su teoría como cuerpo ordenado. Para esto nos vamos a basar en lo desarrollado en [17], [19] y [20].

3.1 Definición de los números surreales

Los números surreales se definen de manera recursiva y parecida a las cortaduras de Dedekind[1]. Cada número surreal x es una pareja de conjuntos de números surreales a los que se les llama L y R, de izquierdo y derecho en inglés, y se representa $x \equiv \{L \mid R\}$ (Aquí usamos el símbolo $\equiv$ para diferenciarlo de la igualdad en números surreales). La idea es que el número surreal x sea "mayor" que todos los números de L y que sea "menor" que todos los números de R; en cierto sentido este va a ser el número más 'sencillo' que está en la mitad de los dos conjuntos.

Construyamos un número surreal. Como la definición es recursiva, empezamos con el conjunto más sencillo posible: el conjunto vacío. El primer número que se crea de esta manera es el número conformado por la pareja $L = \emptyset$ y $R = \emptyset$, es decir, $\{\emptyset \mid \emptyset\}$. A este número se le llama 0, y veremos luego que tiene las mismas propiedades del 0 de los números reales, esto es, es el módulo de la suma en números surreales y cualquier número multiplicado por éste da 0.

Ya teniendo el 0, se pueden formar las siguientes parejas de conjuntos:

$$\{\{0\} \mid \emptyset\}\,, \quad \{\emptyset \mid \{0\}\}\,, \quad \{\{0\} \mid \{0\}\}\,.$$

Para hacer la notación más sencilla, vamos a escribir solamente los elementos de L y R sin los corchetes, por ejemplo $\{\{0\} \mid \emptyset\} \equiv \{0 \mid \}$ y también $0 \equiv \{\emptyset \mid \emptyset\} \equiv \{ \mid \}$.

Si queremos que el número surreal esté entre L y R entonces tendremos que garantizar que todos los elementos de L sean 'menores' que todos los elementos de R, y aunque aún no hayamos definido un orden en el conjunto podemos ver que el par $\{0 \mid 0\}$ no puede ser un número surreal ya que L y R comparten el mismo elemento.

Las otras dos parejas que quedan, $\{0 \mid \}$ y $\{ \mid 0\}$, sí son números surreales y tienen su propio nombre. Diremos que $1 \equiv \{0 \mid \}$ y $-1 \equiv \{ \mid 0\}$. Luego veremos que efectivamente estos dos números tienen las mismas propiedades que sus correspondientes números reales.

Si seguimos haciendo nuevas parejas con los números que ya creamos tendremos entonces

[1]En las cortaduras de Dedekind, se definen los números reales como parejas de conjuntos L y R de números racionales con la idea de que el número que está representando sea mayor o igual que todos los elementos de L y menor o igual que todos los elementos de R. Se puede ver la definición en [21].

las parejas

$$\begin{aligned}
&\{1\mid\}\,,\{\mid 1\}\,,\\
&\{-1\mid\}\,,\{\mid -1\}\,,\\
&\{0,1\mid\}\,,\{0\mid 1\}\,,\{\mid 0,1\}\\
&\{-1,0\mid\}\,,\{-1\mid 0\}\,,\{\mid -1,0\}\\
&\{-1,1\mid\}\,,\{-1\mid 1\}\,,\{\mid -1,1\}\\
&\{-1,0,1\mid\}\,,\{-1,0\mid 1\}\,,\{-1\mid 0,1\}\,,\{\mid -1,0,1\}\,,
\end{aligned}$$

y podemos seguir haciendo más números con estos nuevos números.

Como convención, si tenemos un número surreal $x \equiv \{L|R\}$, entonces llamaremos x^L a los elementos de L y al conjunto L lo llamaremos X^L en mayúscula; también llamaremos x^R a los elementos de R y al conjunto R lo llamaremos X^R en mayúscula. Además, llamaremos *ancestro* de x a cualquier elemento de X^L o de X^R.

Hasta ahora hemos hablado de una relación de orden sin definirla, lo hemos hecho para ilustrar el carácter recursivo de los números surreales. El orden también tiene una definición igualmente recursiva, lo que hacemos es intentar definir el orden a partir de los ancestros del número, es decir, para los x^L y x^R.

Para motivar las definiciones formales, tanto de números surreales como de orden, intentemos pensar en un número surreal $x = \{L \mid R\}$. Queremos que este orden sea un orden total, igual que en los números reales, entonces cuando decimos que

$$x^L < x^R$$

para todos los elementos de los conjuntos X^L y X^R respectivamente, estamos diciendo equivalentemente que

$$x^R \not\leq x^L.$$

De esta forma, usando solamente la relación de orden $\leq$ podemos expresar que todos los elementos de X^L deben ser menores que los elementos de X^R.

Definición 3.1 (Número surreal)**.** Sea $x = \{L \mid R\}$ una pareja de conjuntos de números surreales. Se dice que x es un **número surreal**, si y solamente si, se tiene que ningún x^R es menor o igual ($\leq$) que algún x^L.

Si tenemos dos números surreales x y y, y queremos definir la relación de orden $x \leq y$ en base a sus ancestros, podemos tener en cuenta las desigualdades

$$x^L < x < x^R, \quad y^L < y < y^R,$$

que queremos que se cumplan para todos los números surereales. Estas desigualdades juntas con el hecho de que $x \leq y$ generan las desigualdades

$$x < y^R, \quad x^L < y,$$

que están basadas en elementos más 'simples', es decir, los ancestros de x y y. Si queremos escribirlo todo con respecto a la relación $\leq$ tenemos que

$$x \not\geq y^R, \quad x^L \not\geq y.$$

Definición 3.2 (Orden en números surreales)**.** Sean x y y dos números surreales. Se dice que $x \leq y$, si y solamente si, se tiene que ningún x^L es mayor o igual ($\geq$) que y y ningún y^R es menor o igual ($\leq$) a x.

Vamos a utilizar la misma convención que se utiliza para las relaciónes de orden. Tenemos que $x \leq y$ es equivalente a decir que $y \geq x$, además, si tenemos que $x \leq y$ y $y \leq x$ se dice que $x = y$. También, si tenemos que $x \leq y$ pero $x \neq y$, entonces se escribe $x < y$, de la misma manera se define para $x > y$.

Fíjese que esta es la primera vez que en nuestro texto aparece el signo $=$ y significa algo diferente a lo que significa nuestro otro signo $\equiv$, en nuestro caso $\equiv$ lo vamos a utilizar para referirnos a igualdad de conjuntos mientras que $=$ lo vamos a utilizar como nuestra igualdad de números surreales.

Vamos a mostrar un ejemplo de cómo se utilizan estas definiciones intentando demostrar que las parejas que conocemos son en efecto números surreales.

Ejemplo 1. Vamos a mostrar que $0 \equiv \{\,|\,\}, 1 \equiv \{0\,|\,\}$ y $-1 \equiv \{\,|\,0\}$ son efectivamente números surreales.

Primero mostrémoslo para 0. Tenemos que probar que ningún elemento 0^L es mayor o igual que algún elemento de 0^R, pero ya que tanto L como R son vacíos entonces esto se cumple por vacuidad, por lo tanto, el 0 sí es efectivamente un número surreal.

Los ejemplos de 1 y -1 se parecen. Probemos primero para $1 = \{0\,|\,\}$. Tenemos que probar que ningún elemento 1^L es mayor o igual que algún elemento de 1^R, pero fíjese que no hay ningún elemento en R, por lo tanto tendremos que también se cumple por vacuidad.

Para -1 es algo parecido. Tenemos que probar que ningún elemento $(-1)^L$ es mayor o igual que algún elemento de $(-1)^R$, pero tenemos que L es vacío, por lo tanto tendremos que también se cumple por vacuidad. Concluimos que tanto 1 como -1 son efectivamente números surreales.

Ejemplo 2. Un ejemplo más de como se puede usar esta definición de orden es probar las desigualdades esperadas $-1 < 0$ y $0 < 1$.

Probemos $0 < 1$, para probar esta desigualdad tendremos que probar que $0 \leq 1$ y además que $0 \neq 1$. Primero probemos que $0 \leq 1$. Tenemos que probar que no hay elementos en L y R de los respectivos números tales que

$$0 \geq 1^R, \quad 0^L \geq 1,$$

pero fíjese que no hay ningún elemento 1^R, ni tampoco ningún elemento 0^L, por lo tanto la propiedad se cumple por vacuidad.

Ahora probemos que $0 \neq 1$, como ya sabemos que $0 \leq 1$ entonces esto es equivalente a mostrar que $0 \ngeq 1$. Luego, es suficiente probar que existe algún elemento tal que

$$1^L \ngeq 0.$$

Fíjese que en 1^L está el elemento 0, y efectivamente $0 \equiv 1^L \geq 0$, por lo que tenemos que $0 < 1$.

La demostración de que $(-1) < 0$ es análoga, es la misma por la simetría de las definiciones.

Algo que aún no hemos probado pero hemos inferido es que $\leq$ es una relación de orden, es decir, que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. La antisimetría la obtenemos por nuestra definición de igualdad $(=)$ en los números surreales. Las pruebas de las otras dos propiedades utilizan fuertemente la naturaleza recursiva de la definición de orden. Las pruebas son por inducción, pero la hipótesis de inducción supondrá que la propiedad se cumple cuando se cambia alguna de las variables por algún ancestro de la misma, así, nuestro caso base siempre será cuando todas las variables sean 0, porque si alguna no es 0 esto significa que tiene ancestros, y se puede reducir la propiedad a preguntarse sobre la propiedad respectiva en estos ancestros.

Teorema 3.1 (Reflexividad)**.** *Para todo número surreal x, se tiene que $x \leq x$.*

Proof. Fíjese que para 0 se tiene la refelxividad porque los conjuntos L y R de 0 son vacíos.

Sea x un número surreal y supongamos como hipótesis de inducción que la reflexividad se cumple para todos los ancestros de x. Tenemos que probar que $x \leq x$, es decir, para ningún elemento de X^L y X^R se tiene que

$$x \leq x^L \quad \text{o} \quad x^R \leq x.$$

Veamos la primera parte, es decir, sea $x^L \in X^L$ mostremos que $x \nleq x^L$. Por definición queremos mostrar que existe un elemento[2] $z \in (X^L)^R$ tal que $x \geq z$, o que existe un elemento $y \in X^L$ tal que $y \geq x^L$. Si tomamos $y = x^L \in X^L$ entonces tenemos que $y = x^L \geq x^L$ por la hipótesis de inducción, por lo tanto, $x \nleq x^L$.

Para la segunda parte, es decir, que $x^R \nleq x$, se hace un análisis parecido. Sea $x^R \in X^R$, queremos mostrar que existe un elemento $z \in (X^R)^L$ tal que $z \geq x$, o que existe un elemento $y \in X^R$ tal que $y \leq x^R$. Si tomamos $y = x^R \in X^R$ entonces tenemos que $y = x^R \leq x^R$ por la hipótesis de inducción, por lo tanto, $x^R \nleq x$. □

Corolario 3.1.1. *Para todo número surreal x, $x = x$. Lo que también significa que si hay dos números surreales x, y tales que $x \equiv y$ entonces $x = y$.*

Proof. Utilizamos la reflexividad de la relación de orden. □

[2] Acá usamos la notación $(X^L)^R$ para referirnos al conjunto R del elemento x^L que habíamos descrito.

Para demostrar la transitividad necesitaremos utilizar la inducción pero en triplas de números surreales, es decir, vamos a demostrar la transitividad para (x, y, z) pero usando la hipótesis para las triplas que contengan alguno de los ancestros de x, y o z. Como siempre estaremos preguntando sobre la propiedad en alguno de los ancestros, al final llegaremos a preguntarlo en el conjunto $(0, 0, 0)$ que será nuestro caso base.

Teorema 3.2 (Transitividad). *Sean x, y, z números surreales. Si tenemos que $x \leq y, y \leq z$, entonces se tiene que $x \leq z$.*

Proof. Utilicemos inducción sobre las triplas (x, y, z). Fíjese que para la tripla $(0, 0, 0)$ la propiedad se cumple gracias a la reflexividad.

Ahora, supongamos por inducción que se cumple para todas las triplas que contengan algún ancestro de x, y o z, por ejemplo, para la tripla (z^R, x, y) se vería como

$$(z^R \leq x) \text{ y } (x \leq y) \implies z^R \leq y.$$

Supongamos además que $x \leq y$ y $y \leq z$. Demostrémoslo por contradicción, supongamos que $x \not\leq z$, esto es, existe un elemento $z^R \leq x$ o existe un elemento $x^L \geq z$.

Veamos el primer caso, es decir, cuando existe un $z^R \in Z^R$ tal que $z^R \leq x$. Como $x \leq y$, usando la hipótesis de inducción tenemos que $z^R \leq y$, por lo tanto, por la definición de orden tendremos que $y \not\leq z$, lo cual es una contradicción.

Ahora veamos el segundo caso, supongamos que existe un $x^L \in X^L$ tal que $x^L \geq z$. Como $z \geq y$,usando la hipótesis de inducción tenemos que $x^L \geq y$, por lo tanto, por la definición de orden tendremos que $x \not\leq y$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. Concluimos que la relación $\leq$ es transitiva. □

Corolario 3.2.1. *Sean x, y, z números surreales. Tenemos las siguientes implicaciones:*

- *Si $x = y, y = z$, entonces $x = z$.*
- *Si $x < y, y < z$, entonces $x < z$.*
- *Si $x \leq y, y < z$, entonces $x < z$.*
- *Si $x < y, y \leq z$, entonces $x < z$.*

Con esto ya podemos decir que la relación $(\leq)$ es de orden, y también tenemos una relación de equivalencia $(=)$ entre números surreales. Además, gracias a la transitividad le podemos dar sentido a expresiones del tipo $x \leq y \leq z$, que significan $x \leq y$ y $y \leq z$ pero que también implican que $x \leq z$.

Una pregunta que nos podríamos hacer en este momento es si existen distintas representaciones de un mismo número, es decir: ¿Existen dos números surreales x y y tales que $x = y$ pero que sus conjuntos L y R sean diferentes? En otras palabras ¿Existen x y y números surreales tales que $x \not\equiv y$ pero $x = y$?

La respuesta la tenemos en varias de los ejemplos que ya tenemos sobre números surreales, es más, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\{\ \mid -1\} = \{\ \mid -1, 0\} = \{\ \mid -1, 1\} = \{\ \mid -1, 0, 1\}\,,\\
&-1 = \{\ \mid 0, 1\}\,,\\
&\{-1 \mid 1\} = \{-1 \mid 1, 0\}\,,\\
&0 = \{-1 \mid 1\} = \{-1 \mid\ \} = \{\ \mid 1\}\,,\\
&\{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\}\,,\\
&1 = \{-1, 0 \mid\ \}\,,\\
&\{1 \mid\ \} = \{0, 1 \mid\ \} = \{-1, 1 \mid\ \} = \{-1, 0, 1 \mid\ \}\,.
\end{aligned}$$

Veamos la justificación de algunos de estos ejemplos

Ejemplo 3. Veamos que $1 \equiv \{0 \mid\ \} = \{-1, 0 \mid\ \}$. Notemos $x \equiv \{-1, 0 \mid\ \}$, queremos mostrar que $1 \leq x$ y que $x \leq 1$. Para ver que $1 \leq x$ necesitamos verificar que

$$1 \not\geq x^R \text{ y } 1^L \not\geq x.$$

Por un lado tenemos que $X^R = \emptyset$ entonces la desigualdad $1 \not\geq x^R$ se cumple por vacuidad. Para la otra desigualdad tenemos que $1^L = \{0\}$, por lo tanto lo que tenemos que mostrar es que $0 \not\geq x$ y fíjese que $0 \in X^L$ por lo que podemos afirmar que $0 \leq 0 = x^L \in X^L$ y tenemos que $0 \not\geq x$ por definición. Con esto concluimos que $1 \leq x$.

Ahora veamos que $x \leq 1$. Tenemos que mostrar que

$$x \not\geq 1^R \text{ y } x^L \not\geq 1.$$

Para la desigualdad $x \not\geq 1^R$ tenemos que $1^R = \emptyset$, por lo tanto la desigualdad se cumple por vacuidad. Ahora, queremos mostrar que $x^L \not\geq 1$. Fíjese que $X^L = \{-1, 0\}$, pero en el ejemplo 2 vimos que $-1 < 0 < 1$ entonces por definición de "$<$" tenemos que para todo $x^L \in X^L$ se cumple que $x^L \not\geq 1$. Con esto podemos concluir que $x = 1$.

La mayoría de los demás ejemplos tienen cierta similitud con este. Lo que hicimos en este ejemplo 'añadirle' un elemento a 1^L que fuera menor que alguno de los elementos que ya estaba en 1^L, en este caso, añadimos el -1 que era menor al $0 \in 1^L$ lo que nos dejó el número $\{-1, 0 \mid\ \}$ que tiene el mismo valor que $\{0 \mid\ \}$. Podemos usar un argumento parecido para probar que $-1 = \{\ \mid 0, 1\}$, e incluso, si lo analizamos mejor, podemos utilizar el mismo argumento para probar otras igualdades como $\{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\}$.

Algo que podemos sacar como conclusión es que agregar a L algún número que sea menor que algún otro elemento del conjunto L, o agregar a R algún número que sea mayor a algún elemento del conjunto R, genera un número igual, con el mismo valor. Esto lo vamos a probar luego, pero por ahora es importante notarlo puesto que muchos ejemplos tienen este patrón.

Ejemplo 4. No se puede usar el mismo argumento del ejemplo anterior para verificar todas las igualdades que hemos anunciado. Más precisamente, con ese argumento no se pueden verificar las igualdades

$$0 = \{-1 \mid 1\} = \{-1 \mid \} = \{ \mid 1\}\,.$$

Sabemos que $0 \equiv \{\mid\}$, por lo tanto la relación $0 \leq x$ significa que $x^R \nleq 0$ para todo $x^R \in X^R$, y por otro lado, la relación $x \leq 0$ significa que $x^L \ngeq 0$ para todo $x^L \in X^L$. Teniendo esto en cuenta tenemos que para verificar estas igualdades lo único que tenemos que revisar es que sus respectivos ancestros cumplan que

$$x^L \ngeq 0 \text{ y } x^R \nleq 0.$$

Para nuestros ejemplos se cumple, puesto que $-1 < 0 < 1$.

Una propiedad que referenciamos en las motivación de las definiciones pero aún no hemos demostrado, es la idea de que el número siempre está entre los elementos de L y los elementos de R, más específicamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sea x un número surreal. Tenemos que $x^L < x < x^R$.*

Proof. Basta revisar la prueba para la parte izquierda de la desigualdad puesto que la parte derecha se hace de manera análoga. Probemos primero que $x^L \leq x$ y luego verificamos que la desigualdad es estricta.

Veamos que $x^L \leq x$ por inducción. La propiedad es verdadera para 0 por vacuidad.

Ahora, supongamos que es verdad para los ancestros de x y probemos que es verdad para x. Fijemos un $x^L \in X^L$. Para probar que $x^L \leq x$ hay que verificar que $x^R \nleq x^L$ para todos los elementos $x^R \in X^R$, y también, que para todo elemento elemento $y \in (X^L)^L$ tenemos que $y \ngeq x$.

La primera parte la tenemos porque x es un número surreal, entonces ningún elemento de X^L es mayor o igual que ningún elemento de X^R. Para la segunda parte, $y \ngeq x$ significa que, o existe $z \in X^L$ tal que $y \leq z$, o existe $y^R \in Y^R$ tal que $y^R \leq x$. Fíjese que si tomamos $z = x^L$ entonces, como $y \in (X^L)^L$, tendremos por hipótesis de inducción que $y \leq x^L = z$, con lo que concluimos que $x^L \leq x$.

Ahora, veamos que $x^L \ngeq x$. Tenemos que mostrar que existe $y \in X^L$ tal que $y \geq x^L$, o que existe $z \in (X^L)^R$ tal que $z \leq x$. Si tomamos $y = x^L$ tendremos por reflexividad que $x^L \leq x^L = y$, por lo tanto $x^L \ngeq x$ y podemos concluir que $x^L < x$. $\square$

Corolario 3.3.1 (Orden total). *Sean x, y números surreales. Si $x \nleq y$ entonces tenemos que $x > y$.*

Proof. Supongamos que $x \nleq y$. Esto quiere decir que, o existe $x^L \geq y$, o existe $y^R \leq x$. Si existe $x^L \geq y$ tenemos que $y \leq x^L < x$ y por transitividad $y < x$. En el otro caso, si existe $y^R \leq x$ tenemos que $y < y^R \leq x$ y por transitividad $y < x$. $\square$

Fíjese que este corolario, combinado con la definición de orden estricto, nos da la equivalencia

$$x < y \Leftrightarrow x \not\geq y.$$

De este corolario podemos concluir que en los números surreales se cumple la ley de la tricotomía, esto es, si tenemos dos números surreales x, y se tiene que cumplir que $x < y$, $x = y$, o, $x > y$, y se cumple solamente una de éstas.

Otra conclusión que podemos hacer de este corolario es que nuestras definiciones de números surreales y de orden se pueden expresar solamente con el orden estricto. Un número x es un número surreal, si y solo si, $x^L < x^R$. Dos números surreales x, y cumplen que $x \leq y$, si y solo si, $y < x^R$ y $x^L < y$.

Con este teorema y este corolario ya podemos probar lo que mencionabamos en el ejemplo 3, que agregar a L elementos que sean menores o iguales a algún elemento de L no cambia el valor del número, o más precisamente,

Corolario 3.3.2. *Sea $x = \{L \mid R\}$. Sea A un conjunto de números surreales tal que para todo $a \in A$ existe un elemento x^L tal que $a \leq x^L$. Tenemos entonces $y \equiv \{L \cup A \mid R\}$ es un número surreal y además $x = y$.*

Proof. Para mostrar que y es un número surreal tenemos que probar que para todo y^L, y^R se cumple que $y^L < y^R$. Como x es un número surreal entonces esto se cumple para toda pareja de elementos de L y R respectivamente, por lo tanto, solo nos falta verificarlo para las parejas de elementos de A y R. Sea $y^L \in A$, por hipótesis tenemos que existe un elemento x^L tal que $y^L \leq x^L$. Como x es un número surreal tenemos que $x^L < y^R$ para todo $y^R \in Y^R$, entonces por transitividad tenemos que $y^L < y^R$ para todo $y^R \in Y^R$, lo que significa que y es un número surreal.

Para mostrar que $y = x$ tenemos que verificar que $y \leq x$ y $x \leq y$, para esto tenemos que mostrar las desigualdades

- $x^L < y$,
- $y^L < x$,
- $y < x^R$,
- $x < y^R$.

Casi todas son consecuencias del teorema 3.3, excepto la desigualdad $y^L < x$. Para esta desigualdad tenemos que ver que todo elemento $a \in A$ cumple que $a < x$. Y en efecto, ya que para todo $a \in A$ existe un x^L tal que $a \leq x^L$, y como $x^L < x$ por transitividad se tiene que $a < x$. □

Corolario 3.3.3. *Sea $x = \{L \mid R\}$. Sea B un conjunto de números surreales tal que para todo $b \in b$ existe un elemento x^R tal que $b \geq x^R$. Tenemos entonces $y \equiv \{L \mid R \cup B\}$ es un número surreal y además $x = y$.*

Los números surreales, entonces, se definen como clases de equivalencia de la relación $(=)$. Un problema natural que se nos presenta de ahora en adelante cuando intentemos definir operaciones en números surreales es que debemos ver si estas operaciones son compatibles con la relación de equivalencia $(=)$.

Incluso algo que podemos preguntar es, si nuestra relación de orden es 'compatible' con nuestra definición de número surreal. Más precisamente, si cambiamos los elementos del L y el R por elementos iguales $(=)$, ¿se cambia la clase de equivalencia del número?

Tomemos un ejemplo para ilustrar este problema. Sabemos que $0 \equiv \{\ |\ \} = \{\ |\ 1\}$. Como $1 \equiv \{0 \mid\ \}$ entonces, ¿será que $1 = \{\{\ |\ 1\} \mid\ \}$? Es decir, ¿será que podemos cambiar el número 0 por otro número que sea igual $(=)$ a 0 sin cambiar el valor del número surreal 1?

Definición 3.3. Sean X y Y dos conjuntos de números surreales. Se dice que $X = Y$ cuando para todo $x \in X$ existe un $y \in Y$ tal que $x = y$, y además, para todo $y' \in Y$ existe un $x' \in X$ tal que $y' = x'$.

Teorema 3.4. *Sean L, L', R, R' conjuntos de números surreales tales que $L = L'$ y $R = R'$. Además, supongamos que $\{L \mid R\}$ es un número surreal. Entonces, tenemos que $\{L' \mid R'\}$ es un número surreal y además $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$.*

Proof. Primero veamos que $\{L' \mid R'\}$ es un número surreal, esto es, mostremos que para todo $r' \in R'$ y todo $l' \in L'$ se tiene que $r' \not\leq l'$, o equivalentemente, $l' < r'$. Por la hipótesis, existen $l \in L$ y $r \in R$ tales que $l' = l$ y $r' = r$, además, como $\{L \mid R\}$ es un número surreal tenemos que $l < r$, con lo que obtenemos las desigualdades

$$l' = l < r = r',$$

con lo que podemos concluir que $\{L' \mid R'\}$ es un número surreal.

Ahora, probemos que en efecto $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$. Para esto es suficiente mostrar que $\{L \mid R\} \leq \{L' \mid R'\}$, la otra desigualdad se sigue por simetría.

Llamemos $x = \{L \mid R\}$ y $x' = \{L' \mid R'\}$. Tenemos que ver que $x^L < x'$ y $x < (x')^R$, luego fijemos $x^L \in X^L$ y $(x')^R \in (X')^R$. Como $L = L'$, existe $y \in L'$ tal que $x^L = y$, entonces tenemos que $x^L = y < x'$. Por otro lado, como $R = R'$, existe $z \in R$ tal que $(x')^R = z$, por lo tanto tenemos que $x < z = (x')^R$, y como es para cualquier x^L y $(x')^R$ obtenemos que $\{L \mid R\} \leq \{L' \mid R'\}$. Concluimos entonces que $\{L \mid R\} = \{L' \mid R'\}$. □

3.2 Suma de números surreales

La suma de los números surreales también se define recursivamente con base en la suma de sus ancestros.

Definición 3.4 (Definición de suma)**.** Dados dos números surreales x, y definimos su suma como

$$x + y \equiv \left\{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\right\}.$$

Esta definición hace que la suma sea automáticamente conmutativa, ya que es lo mismo en la definición hacer $x + y$ que $y + x$.

Es interesante comparar esta definición con la definición de suma de juegos hecha en la sección 2.2.2. En esa sección, cuando se suma dos juegos, los posibles movimientos de un jugador son, o hacer un movimiento en un juego y dejar el otro intacto, o viceversa. Las dos definiciones son equivalentes: aquí se suma los ancestros de un número con el otro que queda intacto, por ejemplo, para el conjunto L los ancestros son, $x^L + y$ dejando el y intacto, o $x + y^L$ dejando x intacto.

Una cosa que no queda muy clara con la definición de suma es si la suma de dos números surreales genera un nuevo número surreal, esto es, si dados x, y números surreales, los elementos del conjunto $(X + Y)^L$ son todos menores a los elementos del conjunto $(X + Y)^R$. Este tema lo volveremos a tocar cuando demostremos las propiedades que tiene la suma con respecto al orden de números surreales ($\leq$).

Como todas las definiciones recursivas que hemos hecho, la suma se define eventualmente con base en el número 0, por eso es bueno ver qué pasa cuando se suma $0 + 0$.

Ejemplo 5. ¿Qué pasa cuando se suma $0+0$? Sabemos que $0 \equiv \{\ |\ \}$, por lo tanto, no existe ni 0^L ni 0^R. Lo que tendremos entonces es

$$0 + 0 \equiv \left\{0^L + 0, 0 + 0^L \;\middle|\; 0^R + 0, 0 + 0^R\right\} \equiv \{\ |\ \} \equiv 0,$$

por lo tanto tendremos que $0 + 0 \equiv 0$.

Ejemplo 6. Más aún, si el 0 de los números surreales *"se parece"* al 0 de los números reales entonces se debe cumplir que el 0 es módulo de la suma, esto es, $x + 0 \equiv x$ para todo x número surreal.

Probemos esto por inducción. Nuestro caso base es cuando $x \equiv 0$, es decir $0 + 0$ y ya probamos que $0 + 0 \equiv 0 \equiv x$ luego en el caso base se cumple.

Supongamos que se cumple para todos los elementos en los conjuntos X^L y X^R. Tenemos entonces que

$$x + 0 \equiv \left\{x^L + 0, x + 0^L \;\middle|\; x^R + 0, x + 0^L\right\} \equiv \left\{x^L + 0 \;\middle|\; x^R + 0\right\}$$

y por hipótesis de inducción tenemos que $x^L + 0 \equiv x^L$ y $x^R + 0 \equiv x^R$, por lo tanto

$$x + 0 \equiv \left\{x^L \;\middle|\; x^R\right\} \equiv x.$$

Ejemplo 7. También hemos definido los números 1 y -1. Miremos qué pasa cuando se suman entre ellos.

Primero,

$$1 + (-1) \equiv \left\{1^L + (-1) \;\middle|\; 1 + (-1)^R\right\} \equiv \{0 + (-1) \mid 1 + 0\} \equiv \{-1 \mid 1\} = 0.$$

También tenemos que

$$1 + 1 \equiv \left\{1^L + 1, 1 + 1^L \;\middle|\; \right\} \equiv \{0 + 1, 1 + 0 \mid \} \equiv \{1 \mid \},$$

por lo tanto, llamamos 2 al número surreal $\{1 \mid \}$. Un análisis similar se puede hacer para decir que $(-1) + (-1) \equiv \{ \mid -1\}$, por lo tanto $-2 \equiv \{ \mid -1\}$.

Tanto en estos ejemplos como en la definición hemos estado usando el símbolo ($\equiv$) para denotar la igualdad entre conjuntos. Nuestro objetivo en esta sección, además de mostrar las propiedades típicas de la suma, es verificar que esta suma es en efecto compatible con la relación de equivalencia ($=$). En cierto sentido, queremos poder reemplazar el símbolo ($\equiv$) por el símbolo ($=$) asegurándonos que aquello no trae ningún problema.

La operación de suma en los números reales genera un grupo conmutativo, en nuestro caso queremos mostrar lo mismo para los números surreales. Ya hemos mostrado que la suma es conmutativa y que además tiene un módulo, lo que nos falta para mostrar que la suma en los números surreales genera un grupo conmutativo es mostrar que todos los elementos tienen inversos aditivos y además que la suma es asociativa.

Teorema 3.5 (Asociatividad de la suma)**.** *Sean x, y, z números surreales. Tenemos que*

$$(x + y) + z \equiv x + (y + z).$$

Proof. Mostremos el teorema por inducción. Nuestro caso base es cuando todos los elementos son 0, en este caso tenemos

$$(0 + 0) + 0 \equiv 0 + 0 \equiv 0 + (0 + 0).$$

Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que la asociatividad se cumple para las triplas con al menos un ancestro de x, y, z, por ejemplo, de los elementos de los conjuntos L de cada número se tiene que

$$\begin{aligned}
(x^L + y) + z &\equiv x^L + (y + z),\\
(x + y^L) + z &\equiv x + (y^L + z),\\
(x + y) + z^L &\equiv x + (y + z^L),
\end{aligned}$$

igualmente para los elementos de los conjuntos R.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &\equiv \left\{(x + y)^L + z, (x + y) + z^L \;\middle|\; \dots\right\}\\
&\equiv \left\{(x^L + y) + z, (x + y^L) + z, (x + y) + z^L \;\middle|\; \dots\right\}\\
&\equiv \left\{x^L + (y + z), x + (y^L + z), x + (y + z^L) \;\middle|\; \dots\right\} \qquad \text{(h. de inducción)}\\
&\equiv \left\{x^L + (y + z), x + (y + z)^L \;\middle|\; \dots\right\}\\
&\equiv x + (y + z).
\end{aligned}$$

La demostración para el conjunto R se hace de la misma manera, está indicado con los puntos suspensivos. □

Los inversos aditivos se definen también recursivamente con base en los inversos aditivos de los ancestros del número.

Definición 3.5 (Inversos aditivos)**.** Sea x un número surreal. Definimos su inverso aditivo como

$$-x \equiv \left\{-(x^L) \mid -(x^R)\right\}.$$

Ejemplo 8. Veamos el inverso aditivo de algunos de los números que ya nombramos. Por un lado tenemos que

$$(-0) \equiv \left\{-(0^R) \mid -(0^L)\right\} \equiv \{ \mid \} \equiv 0,$$

puesto que sus conjuntos L y R son vacíos.

Veamos también que efectivamente aquel que llamamos -1 en la sección anterior es, en efecto, el inverso aditivo de 1,

$$(-1) \equiv \left\{-(1^R) \mid -(1^L)\right\} \equiv \{ \mid -0\} \equiv \{ \mid 0\} \equiv -1.$$

También podemos hacer el mismo chequeo para 2 y -2.

Teorema 3.6. *Sea x un número surreal. Tenemos que $x + (-x) = 0$.*

Proof. Mostremos el teorema por inducción. Primero veamos el caso base cuando $x \equiv 0$. Tenemos que

$$x + (-x) \equiv 0 + (-0) \equiv 0 + 0 \equiv 0,$$

por lo tanto se cumple para 0.

Ahora, supongamos por inducción que la propiedad se cumple para los ancestros de x. Mostremos primero que $x + (-x) \leq 0$. Por contradicción, supongamos que $x + (-x) > 0$, luego existe algún elemento $(x + (-x))^L \geq 0$. El elemento $(x + (-x))^L$ puede ser de la forma $x^L + (-x)$ o de la forma $x + (-x)^L$, veamos los dos casos.

Supongamos primero que $(x + (-x))^L \equiv x^L + (-x)$. Como en el conjunto R de $-x$ se encuentra el elemento $-(x^L)$, entonces tenemos que en el conjunto R del número $x^L + (-x)$ se encuentra el elemento $y \equiv x^L + (-(x^L))$ que es igual a 0 por hipótesis de inducción, por lo tanto, se tiene que $(x^L + (-x)) < 0$, lo que contradice que $(x^L + (-x)) \equiv (x + (-x))^L \geq 0$.

Ahora, supongamos que $(x + (-x))^L \equiv x + (-x)^L$. Los elementos de $(-X)^L$ son de la forma $-(x^R)$, por lo tanto tenemos que $(x + (-x))^L \equiv x + (-(x^R))$. En el conjunto R del número $x + (-(x^R))$ se encuentra el elemento $x^R + (-(x^R))$ que es igual a 0 por hipótesis de inducción, por lo tanto, se tiene que $x + (-(x^R)) < 0$, lo que contradice que $x + (-(x^R)) \equiv (x + (-x))^L \geq 0$.

Con lo que podemos concluir que $x + (-x) \leq 0$. La demostración de $x + (-x) \geq 0$ es análoga. $\square$

Fíjese que en los ejemplos tenemos que $1 + (-1) = 0$ pero $1 + (-1) \not\equiv 0$ ya que $0 \equiv \{\ |\ \}$ mientras que $1 + (-1) \equiv \{-1 \mid 1\}$. En este sentido, aún no hemos mostrado que la suma genera un grupo conmutativo sobre los números surreales ya que, aunque ya tenemos las propiedades para las clases de equivalencia de la relación $(=)$, no hemos mostrado que la suma es compatible con la relación $(=)$.

¿Qué significa que la suma sea compatible con la relación $(=)$? Queremos mostrar que si $x = x'$ entonces $x + y = x' + y$ para todo número surreal y, de modo que no importa cual representante de la clase de equivalencia se utilice en las suma, el resultado siempre va a ser igual $(=)$. Primero probaremos un resultado más fuerte, mostraremos que la suma es compatible para la relación de orden $(\leq)$, lo que implica por definición que también es compatible para la relación de equivalencia $(=)$.

Teorema 3.7 (Cancelación)**.** *Sean x, y, z números surreales. Si tenemos que $x + y < x + z$ entonces $y < z$ y si tenemos que $x + y \leq x + z$ entonces $y \leq z$.*

Proof. Vamos a demostrar estas dos proposiciones con la misma inducción, es decir, cuando hagamos la hipótesis de inducción vamos a suponer que las dos son ciertas para todas las triplas con ancestros.

El caso base de nuestra inducción es cuando $x \equiv y \equiv z \equiv 0$. En este caso nuestra propiedad es verdadera por las propiedades del número 0.

Ahora, supongamos por inducción que las propiedades se cumplen para todas las triplas que contienen al menos un ancestro de x, y, z, probemos entonces que la propiedad se cumple para x, y, z.

Primero supongamos que $x + y \leq x + z$. Con esta desigualdad podemos obtener las dos desigualdades

$$x + y^L \equiv (x + y)^L < x + y \leq x + z,$$
$$x + y \leq x + z < (x + z)^R \equiv x + z^R,$$

de la primera tenemos $x+y^L < x+z$ con la que al aplicar la hipótesis de inducción obtenemos $y^L < z$, y de la segunda tenemos $x+y < x+z^R$ con la que al aplicar la hipótesis de inducción obtenemos $y < z^R$. Como $y^L < z$ y $y < z^R$, entonces, por la definición de orden, podemos concluir que $y \leq z$.

Ahora, supongamos que $x + y < x + z$. Esto significa que, o existe algun elemento tal que $(x + y)^R \leq x + z$ o existe algun elemento tal que $x + y \leq (x + z)^L$. Supongamos que existe un elemento tal que $(x + y)^R \leq x + z$, el otro caso se hace análogamente.

Nuestro elemento $(x + y)^R$ puede ser de dos formas, puede ser de la forma $x^R + y$ o de la forma $x + y^R$, veamos los dos casos. Supongamos que $(x + y)^R \equiv x^R + y$, en este caso tenemos que

$$x^R + y \equiv (x + y)^R \leq x + z < (x + z)^R \equiv x^R + z$$

y usando la hipótesis de inducción en la desigualdad $x^R + y < x^R + z$ tendremos que $y < z$.

Supongamos ahora que $(x+y)^R \equiv x+y^R$. En este caso tenemos podemos usar la hipótesis de inducción en la desigualdad $x+y^R \equiv (x+y)^R \leq x+z$ para obtener $y^R \leq z$ y esto implica que $y < z$. En ambos casos tenemos que $y < z$, por lo tanto podemos concluir que la propiedad es cierta. □

Fíjese que en el anterior teorema las dos propiedades son recíprocas puesto que la negación de $<$ es $\geq$, en este sentido, el anterior teorema se puede reescribir como

$$y \leq z \Leftrightarrow x+y \leq x+z.$$

Corolario 3.7.1. *Sean x, y, z números surreales. Tenemos que $y = z$ si y solamente si $y + x = z + x$.*

Este corolario nos dice que la suma es compatible con la relación de equivalencia $(=)$, por lo tanto, podemos concluir que los números surreales (definidos como clases de equivalencia) son un grupo conmutativo con la operación de suma $(+)$. En lo que sigue de la sección podemos usar exclusivamente el símbolo $(=)$.

Otra consecuencia de este teorema es que la suma de dos números surreales es de nuevo otro número surreal.

Corolario 3.7.2. *Sean x, y números surreales. Entonces $x + y$ es un número surreal.*

Proof. Considere las desigualdades $x^L < x < x^R$ y $y^L < y < y^R$, y sume en estas desigualdades los números x y y para obtener

$$x^L + y, x + y^L < x + y < x^R + y, x + y^R,$$

y por transitividad se tiene que $(x + y)^L < (x + y)^R$, por lo tanto, si usamos inducción para suponer que los ancestros de $x + y$ son números surreales, tendremos que $x + y$ es también número surreal. □

Algo que ya podemos hacer es intentar ponerle nombre a todos los números que podemos crear con sumas de los números que ya conocemos, es decir, podemos saber cuáles serían los números naturales en el conjunto de los números surreales.

Ejemplo 9. Llamemos

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{n veces}}.$$

Vamos a probar por inducción que $n + 1 = \{n \mid \}$. Fíjese que para el número 0 tenemos que $0 + 1 = 1 = \{0 \mid \}$. Ahora, supongamos que es verdad para n, demostremos que es verdad para $n+1$. Queremos ver que $n+2 = (n+1)+1 = \{n + 1 \mid \}$, sabemos por hipótesis de inducción que $n + 1 = \{n \mid \}$, por lo tanto,

$$n + 2 = (n + 1) + 1 = \{n \mid \} + \{0 \mid \} = \{(n + 1) + 0, n + 1 \mid \} = \{n + 1 \mid \}.$$

Si tomamos en cuenta los números negativos tendremos que $-n-1 = \{\ \mid -n\}$, por ejemplo, $-2 = \{\ \mid -1\}$. Con esto podemos entender completamente la estructura de los números enteros en los números surreales.

Ejemplo 10. De los números que se crearon en la sección anterior a partir del 0 y el 1, hay unos cuantos a los cuales no les pusimos nombre.

En específico, vamos a intentar nombrar al número $x = \{0 \mid 1\}$. Este número lo estudiamos en la sección 2.2.2 y demostramos su valor, pero ahora lo vamos a abordar desde los axiomas de los números surreales sin mencionar los juegos.

Lo que sabemos de este número es que $0 < x = \{0 \mid 1\} < 1$, entonces definitivamente no es un número entero. Si sumamos a si mismo dos veces tendremos que

$$x + x = \{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = \{x \mid x + 1\},$$

fíjese que si sumamos 1 a la desigualdad anterior obtenemos $1 < x+1 < 2$ por lo tanto puede ser interesante comparar $x + x$ con 1. Veamos que $1 \leq x + x$, esto es equivalente a ver que $(x+x)^R > 1$ y $1^L < (x+x)$, y en efecto, $(x+x)^R = x+1 > 1$ y $1^L = 0 < x = (x+x)^L < x+x$, luego $1 \leq x+x$. También tenemos que $x+x \leq 1$, esto es equivalente a decir que $(x+x)^L < 1$ puesto que 1^R es vacío, y también se cumple ya que $(x + x)^L = x < 1$. Concluimos que $x + x = 1$ por lo tanto x se lleva el nombre de $\frac{1}{2}$.

Nótese que ya podemos representar todos los múltiplos enteros de $\frac{1}{2}$, los múltiplos pares son enteros y para los múltiplos impares tenemos que

$$\frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} = \{n-1 \mid \ \} + \{0 \mid 1\} = \left\{ n - \frac{1}{2}, n \,\middle|\, n+1 \right\},$$

como $n - \frac{1}{2} < n$ y por el corolario 3.3.2 tendremos que $n + \frac{1}{2} = \{n \mid n+1\}$.

Ejemplo 11 (Números diádicos). Los números racionales diádicos son aquellos de la forma $\frac{n}{2^k}$ con n, k enteros y $k \geq 0$. Así, los números enteros son un subconjunto propio de los racionales diádicos. Con lo que hemos estudiado, ya podemos encontrar a estos números en los números surreales.

Basta encontrar aquellos de la forma $\frac{1}{2^k}$ puesto que los demás serán sumas de estos, o de sus inversos aditivos.

Nuestro *"sospechoso"* para ser $\frac{1}{2^{k+1}}$ va a ser el número surreal $\left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^k}\right\}$. Lo que queremos mostrar más formalmente es que

$$\left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^k}\right\} + \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^k}\right\} = \frac{1}{2^k},$$

y así poder argumentar que efectivamente este número es $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Mostremoslo por inducción. Ya tenemos el caso base cuando $k = 0$, ahora supongamos que es verdad para todos las potencias menores a k.

Llamemos $x = \left\{0 \mid \frac{1}{2^k}\right\}$. Tenemos que

$$x + x = \left\{x \;\middle|\; \frac{1}{2^k} + x\right\},$$

y siguiendo un argumento parecido al del ejemplo anterior tenemos que $0 < x < \frac{1}{2^k}$ y $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^k} + x < \frac{1}{2^{k-1}}$. Queremos ver que $x + x = \frac{1}{2^k}$.

Veamos que $x+x \leq \frac{1}{2^k}$. Para esto primero tenemos que ver que $(x+x)^L < \frac{1}{2^k}$ y en efecto, $(x+x)^L = x < \frac{1}{2^k}$. También tenemos que ver que $(\frac{1}{2^k})^R > x+x$ y también se cumple puesto que $(\frac{1}{2^k})^R = \frac{1}{2^{k-1}} > \frac{1}{2^k} + x = (x+x)^R > x+x$. Por lo tanto tenemos que $x+x \leq \frac{1}{2^k}$.

Ahora, veamos que $x + x \geq \frac{1}{2^k}$. Para esto tenemos que ver primero que $(\frac{1}{2^k})^L < x + x$, y esto se tiene ya que $(\frac{1}{2^k})^L = 0 < x = (x+x)^L < x+x$. Por último, tenemos que ver que $(x+x)^R > \frac{1}{2^k}$, que es verdad ya que $(x+x)^R = \frac{1}{2^k} + x > \frac{1}{2^k}$. Por lo tanto tenemos que $x + x \geq \frac{1}{2^k}$, y más aún, $x + x = \frac{1}{2^k}$.

Con esto podemos bautizar a $x = \frac{1}{2^{k+1}}$, y aún más, caracterizamos a todos los racionales diádicos como números surreales.

3.3 Multiplicación de números surreales

La definición de la multiplicación es mucho más compleja que la definición de la suma. Queremos, igual que en las anteriores definiciones, hacer una definición recursiva a partir de las multiplicaciones de ancestros, y además, queremos que se respete el orden de los conjuntos L y R.

Una forma de motivarlo es pensar en las propiedades de la multiplicación real con respecto al orden, siendo una de las más importantes que la multiplicación de números positivos es positiva. Si pensamos en dos números surreales x, y, tenemos los números positivos

$$\begin{aligned} &(x - x^L) > 0, \quad (x^R - x) > 0, \\ &(y - y^L) > 0, \quad (y^R - y) > 0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos cada uno de los que corresponden a x con cada uno de los que corresponden a y tendremos 4 números positivos; tomemos como ejemplo dos de ellos, los productos

$$\begin{aligned} &(x - x^L)(y - y^L) = xy + x^L y^L - xy^L - x^L y > 0, \\ &(x - x^L)(y^R - y) = -xy - x^L y^R + xy^R + x^L y > 0, \end{aligned}$$

con los que podemos generar las desigualdades

$$-x^L y^L + xy^L + x^L y < xy < -x^L y^R + xy^R + x^L y.$$

Al hacer lo mismo con las otras dos posibles multiplicaciones obtenemos los ancestros de la siguiente definición.

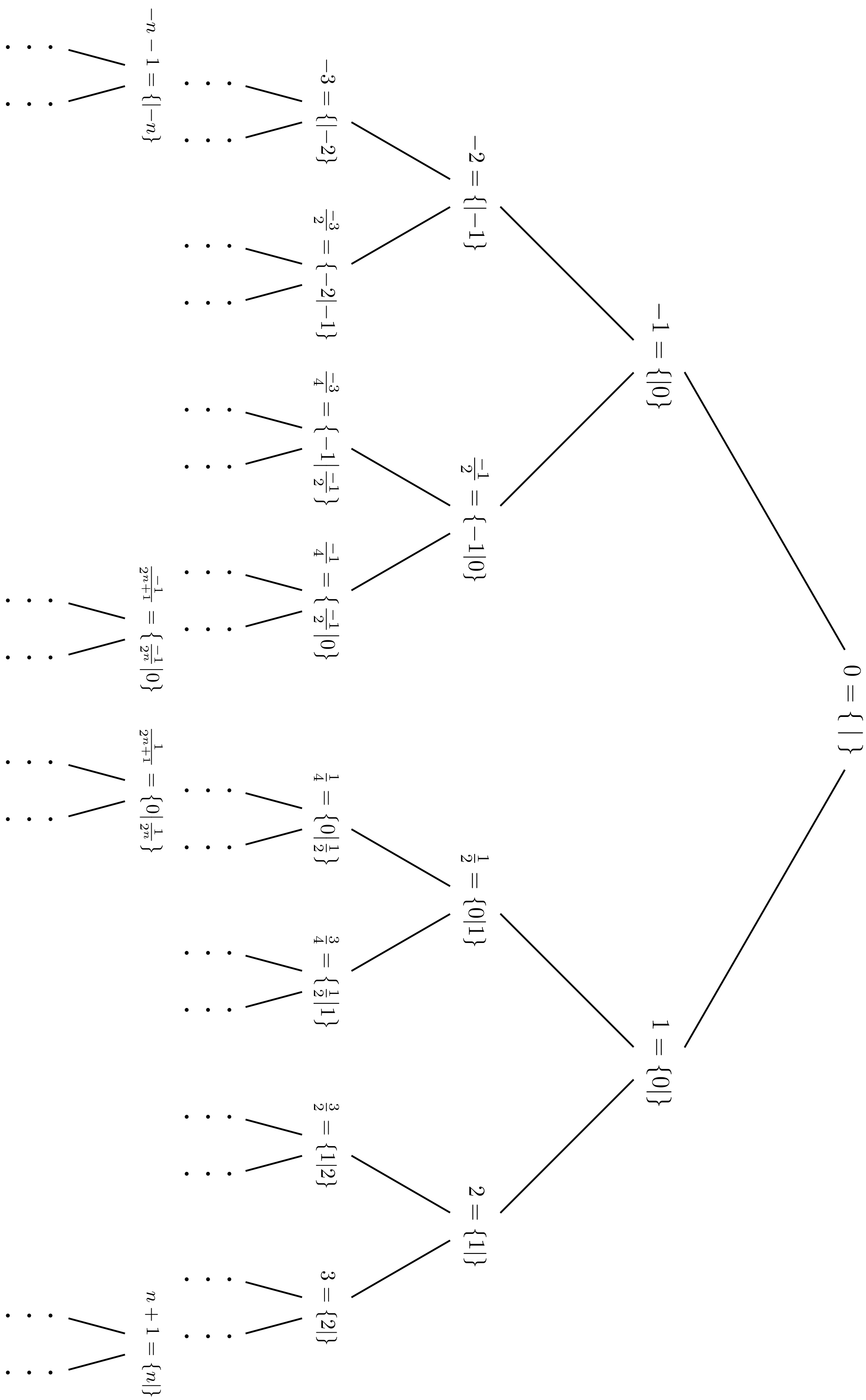

Figura 3-1: Los números diádicos como números surreales.

Definición 3.6 (Multiplicación)**.** Sean x, y dos números surreales. Definimos la multiplicación de números surreales como

$$xy = \left\{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \middle| x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\right\}.$$

Al igual que en la suma, usaremos las propiedades que tiene esta multiplicación con el orden para mostrar que efectivamente el producto de dos números surreales genera un número surreal.

Ejemplo 12. Para entender cómo funciona la definición, primero vamos a ver como funciona para los elementos más sencillos, es decir, para 0, 1 y -1.

Fíjese que todos los ancestros de xy están hechos a partir de ancestros tanto de x como de y, por lo tanto, como 0 no tiene ancestros entonces se cumple que $0x \equiv x0 \equiv \{\ |\ \} \equiv 0$, esto es lo mismo que pasa en los números naturales.

Ahora, veamos que $1x \equiv x$. Procedemos por inducción, tenemos que $1 \cdot 0 \equiv 0$, por lo tanto para 0 se cumple. Ahora, supongamos que se cumple para los ancestros de x. Tenemos que

$$1x \equiv \left\{1^L x + 1x^L - 1^L x^L \;\middle|\; 1^L x + 1x^R - 1^L x^R\right\} \equiv \left\{1x^L \;\middle|\; 1x^R\right\} \equiv \left\{x^L \;\middle|\; x^R\right\} \equiv x.$$

Por último, veamos que $-1x \equiv -x$ por inducción, para 0 tenemos que $-1 \cdot 0 \equiv 0 \equiv -0$ por lo tanto se cumple. Ahora, supongamos que se cumple para los ancestros de x, tenemos que

$$\begin{aligned} -1x &\equiv \left\{(-1)^R x + (-1)x^R - (-1)^R x^R \;\middle|\; (-1)^R x + (-1)x^L - (-1)^R x^L\right\} \\ &\equiv \left\{(-1)x^R \;\middle|\; (-1)x^L\right\} \equiv \left\{-x^R \;\middle|\; -x^L\right\} \equiv -x. \end{aligned}$$

Teorema 3.8 (Propiedades de la multiplicación)**.** *Sean x, y, z números surreales. Se cumplen las siguientes propiedades*

1. $xy \equiv yx$*,*
2. $x(y + z) = xy + xz$*,*
3. $x(yz) = (xy)z$*.*

Proof. En el ejemplo anterior vimos que el caso base satisface cada propiedad, así que nos concentraremos en el paso inductivo.

1. Para la conmutatividad tenemos que

$$\begin{aligned} xy &\equiv \left\{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \;\middle|\; \dots\right\} && \text{(definición)} \\ &\equiv \left\{yx^L + y^L x - y^L x^L, yx^R + y^R x - y^R x^R \;\middle|\; \dots\right\} && \text{(h. de inducción)} \\ &\equiv \left\{y^L x + yx^L - y^L x^L, y^R x + yx^R - y^R x^R \;\middle|\; \dots\right\} && \text{(conmutatividad +)} \\ &\equiv yx. \end{aligned}$$

2. Para la propiedad distributiva sobre la suma concentrémonos en los términos de $((x+y)z)^L$ que son de la forma $(x+y)^L z + (x+y)z^L - (x+y)^L z^L$, los demás términos tendrán sus desarrollos análogos. En este término, el número $(x+y)^L$ puede ser de dos formas, puede ser o $x+y^L$ o x^L+y. Teniendo esto en cuenta tenemos que

$$\begin{aligned}((x+y)z) &\equiv \left\{(x+y)^L z + (x+y)z^L - (x+y)^L z^L, \dots \mid \dots\right\} \\ &\equiv \left\{(x+y^L)z + (x+y)z^L - (x+y^L)z^L, \right. \\ &\qquad \left. (x^L+y)z + (x+y)z^L - (x^L+y)z^L, \dots \mid \dots\right\} \\ &= \left\{xz + (y^L z + yz^L - y^L z^L), (x^L z + xz^L - x^L z^L) + yz \mid \right\} \\ &\equiv xz + yz.\end{aligned}$$

Aquí no podemos reemplazar la igualdad ($=$) por la equivalencia ($\equiv$) puesto que estamos utilizando la propiedad $x+(-x)=0$ para todo número surreal x.

Ahora que probamos la propiedad distributiva, tenemos que la definición de multiplicación se puede reescribir como

$$\begin{aligned}xy = \big\{xy - (x-x^L)(y-y^L), xy - (x^R-x)(y^R-y) \mid \\ xy + (x-x^L)(y^R-y), xy + (x^R-x)(y-y^L)\big\},\end{aligned}$$

que es más expresiva y tal vez más fácil de recordar. Si además combinamos esto con lo que probamos para el número -1, podemos “distribuir” los signos en las sumas, es decir,

$$-(x+y) = -1(x+y) = -1x - 1y = -x - y,$$

sin embargo, esto ya se podía demostrar con las propiedades de la suma.

3. Utilizando la definición discutida en el punto anterior, podemos ver que la multiplicación de tres elementos es de la forma

$$(xy)z = \left\{(xy)z - \left[(x-x^L)(y-y^L)\right](z-z^L), \dots \mid \dots\right\}.$$

Fíjese que el elemento de L que tenemos escrito se puede escribir solamente en términos de ancestros de x, y, y z de la forma

$$(x^L y)z + (xy^L)z + (xy)z^L - (x^L y^L)z - (x^L y)z^L - (xy^L)z^L + (x^L y^L)z^L,$$

y usando la hipótesis de inducción tenemos que el término es igual a

$$x^L(yz) + x(y^L z) + x(yz^L) - x^L(y^L z) - x^L(yz^L) - x(y^L z^L) + x^L(y^L z^L).$$

Reagrupando de la manera inversa a como lo expandimos arriba, nos queda como

$$(xy)z = \left\{x(yz) - (x-x^L)\left[(y-y^L)(z-z^L)\right], \dots \mid \dots\right\} = x(yz).$$

$\square$

Ejemplo 13. Otra forma de probar lo que mostramos en el ejemplo 11 es multiplicando por $\frac{1}{2}$; como sabemos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ entonces podemos multiplicar $\frac{1}{2^k}$ a ambos lados de la igualdad y utilizar la propiedad distributiva para obtener lo que demostramos en el ejemplo.

Lo que entonces queremos ver es la forma surreal de las potencias de $\frac{1}{2}$. Veamos para la primera potencia, esto es

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\equiv\left\{0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0-0\cdot 0, 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1-1\cdot 1 \;\middle|\; 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}-0\cdot 1\right\}\equiv\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2}\right\},$$

por lo tanto tiene sentido llamar $\frac{1}{4}\equiv\left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\}$.

Ahora veamos que el mismo argumento funciona para las siguientes potencias. Multipliquemos $\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}$, tenemos que

$$\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}\equiv\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^{k-1}}\right\}\{0\mid 1\}\equiv\left\{0,\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}} \;\middle|\; \frac{1}{2^k}\right\}\equiv\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^k}\right\}\equiv\frac{1}{2^{k+1}},$$

por lo tanto, se cumple que $\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{k+1}}$ y tenemos una demostración más de lo propuesto en el ejemplo 11.

Para hablar de la multiplicación sin ningún problema, tenemos que, verificar que la multiplicación es compatible con la relación de equivalencia de la igualdad $(=)$, igual que lo hicimos en la suma. Para esto, tendremos que probar las propiedades que tiene la multiplicación con el orden. La propiedad más importante es que la multiplicación de dos números positivos es positiva, de esta se pueden deducir las demás. Para probar esta primero tendremos que probar el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea x un número surreal tal que $x>0$. Existen L y R conjuntos de números surreales que cumplen que $0\in L$, para todo $l\in L$ se tiene que $l\geq 0$ y además $x=\{L\mid R\}$.*

Proof. Si tenemos que $x>0$ esto significa que existe $x^L\in X^L$ tal que $x^L\geq 0$, por lo tanto, teniendo en cuenta el corolario 3.3.2 tendremos que $x=\left\{X^L\cup\{0\} \;\middle|\; X^R\right\}\equiv x'$. Ahora, como $0\in(X')^L$, entonces se pueden quitar todos los elementos de este conjunto que sean menores estrictos $(<)$ a 0 y va a quedar el número con el mismo valor, es decir, $x=x'=\left\{(X^L\cup\{0\})\setminus\{l\in X^L\mid l<0\} \;\middle|\; X^R\right\}$, que era lo que se quería.

$\square$

Teorema 3.9. *Sea x,y números surreales tales que $x,y>0$. Tenemos entonces que $xy>0$.*

Proof. Por el lema anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0\in X^L\cap Y^L$. Si verificamos el elemento de $(XY)^L$ generado por los ceros que están en los respectivos conjuntos L's de x y y, tenemos que en $(XY)^L$ está el elemento

$$0y+x0-0\cdot 0=0,$$

por lo tanto, tenemos que $0=(xy)^L<xy$, es decir, $xy>0$. $\square$

Fíjese que esta desigualdad es estricta, por lo tanto falta ver qué pasa cuando alguno de los números es igual a 0.

Teorema 3.10. *Sean x, y números surreales tales que $x = 0$. Tenemos que $xy = 0$.*

Proof. Vamos a mostrar esta proposición por inducción. Supongamos que la proposición es verdad para todos los ancestros de y, veamos qué pasa con el producto de xy

$$\begin{aligned} xy &\equiv \left\{ x^L y + x y^L - x^L y^L, \dots \;\middle|\; \dots \right\} \\ &= \left\{ x^L y - x^L y^L, \dots \;\middle|\; \dots \right\} && \text{(h. de inducción)} \\ &\equiv \left\{ x^L (y - y^L), \dots \;\middle|\; \dots \right\}, \end{aligned}$$

Note que $x^L < x = 0$, por lo tanto, $-x^L > 0$, por otro lado, como $y > y^L$ entonces $y - y^L > 0$, lo que quiere decir, por el teorema anterior, que $-(y - y^L)x^L > 0$, que equivale a $(y - y^L)x^L < 0$.

Si hacemos el mismo procedimiento para todos los elementos de la multiplicación, entonces al final podemos concluir que $(xy)^L < 0$ y $(xy)^R > 0$, lo que implica, por lo discutido en el ejemplo 4, que $xy = 0$. □

Corolario 3.10.1 (Compatibilidad con =)**.** *Sea x, x', y números surreales tal que $x = x'$. Tenemos que $xy = x'y$.*

Proof. Tenemos que $(x - x') = 0$, luego $(x - x')y = 0$ y esto implica que $xy = x'y$. □

Corolario 3.10.2 (La multiplicación está bien definida)**.** *Sean x, y números surreales, entonces xy es un número surreal.*

Proof. Si tomamos la definición de multiplicación

$$\begin{aligned} xy = \big\{ & xy - (x - x^L)(y - y^L), xy - (x^R - x)(y^R - y) \;\big| \\ & \qquad xy + (x - x^L)(y^R - y), xy + (x^R - x)(y - y^L) \big\}, \end{aligned}$$

entonces podemos ver que $(xy)^L < xy < (xy)^R$, puesto que estamos restando y sumando números positivos respectivamente, lo que significa que en efecto xy es un número surreal. □

Corolario 3.10.3. *Los números surreales son un anillo ordenado.*

La promesa que hicimos al principio de este capítulo es que los números surreales son un cuerpo ordenado, lo que falta entonces para ser un cuerpo ordenado es la existencia de los inversos multiplicativos.

Los ejemplos que hemos dado de números surreales han caído todos, hasta ahora, en los racionales diádicos. Si bien en estos existen todos los inversos de todas las potencias de 2, estos no son cerrados para inversos, el 3 es un ejemplo de un racional diádico cuyo inverso no lo es.

Ejemplo 14 (El inverso de 3). Considere la serie dada por

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3},$$

que se puede evaluar teniendo en cuenta que es una serie geométrica. Como es una serie alternante, tenemos que las sumas parciales pares son menores a $\frac{1}{3}$ y las sumas parciales impares son mayores a $\frac{1}{3}$. Considere entonces el número surreal

$$x \equiv \{s_{2n-1} \mid s_{2n}\}, \text{ para } n \text{ natural con } s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Nuestra hipótesis (que debemos probar) es que efectivamente $x = \frac{1}{3}$. Para demostrar esto veamos que $3x - 1 = 0$. Como $3 \equiv \{2 \mid \}$ entonces tenemos que

$$3x - 1 = \{2x + s_{2n-1} - 1 \mid 2x + s_{2n} - 1, 3x\},$$

lo único que tenemos que ver para mostrar que $3x - 1 = 0$ es que $(3x-1)^L < 0$ y $(3x-1)^R > 0$, y como $3x > 0$, esto se traduce en

$$x < \frac{1 - s_{2n-1}}{2}, \quad x > \frac{1 - s_{2n}}{2},$$

pero observe que $\frac{1-s_n}{2} = s_{n+1}$, entonces las condiciones que teníamos se vuelven

$$x < s_{2n}, \quad x > s_{2n+1},$$

que son verdaderas por la definición puesto que $s_{2n+1} = x^L < x < x^R = s_{2n}$, lo que significa entonces que $3x - 1 = 0$, por lo tanto se puede concluir que $x = \frac{1}{3}$.

En la introducción hablamos de cómo los números surreales son más grandes que los números reales pero hasta ahora no hemos mostrado un número surreal que no sea también un número real, veamos un par de ejemplos y cómo operarlos.

Ejemplo 15 (Infinitos e infinitesimales). Consideremos el número surreal

$$\omega \equiv \{0, 1, 2, \dots \mid \}$$

donde ω^L consiste de todos los números naturales, y consideremos el número surreal

$$\varepsilon \equiv \left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$$

donde ε^R consiste de todas las potencias de $\frac{1}{2}$. Queremos ver qué pasa cuando multiplicamos estos dos números, tenemos que

$$\omega\epsilon \equiv \left\{0, n\epsilon \;\middle|\; \frac{\omega}{2^m} + n\epsilon - \frac{n}{2^m} \right\} = \left\{0, n\epsilon \;\middle|\; \frac{\omega - n}{2^m} + n\epsilon \right\}, \quad \text{para todo } n, m \text{ natural.}$$

De la definición $\omega\epsilon > 0$. Veamos más de cerca los ancestros de $\omega\epsilon$. Tenemos que $\epsilon < \frac{1}{2^k}$ para todo k natural, luego tenemos que $2^k\epsilon < 1$ y como las potencias de 2 crecen hasta el infinito entonces tenemos que $n\epsilon < 1$ para todo n natural, por lo tanto $(\omega\epsilon)^L < 1$.

Ahora veamos los del conjunto R. Tenemos que $\omega > k$ para todo k natural. Por lo tanto, tenemos que $n + 2^m < \omega$ para todo n, m natural, lo que implica que $1 < \frac{\omega-n}{2^m} < \frac{\omega-n}{2^m} + n\epsilon$, por lo tanto tenemos que $(\omega\epsilon)^R > 1$.

Con esto en mente, podemos conjeturar que $\omega\epsilon = 1$ y para probar esto tomemos

$$\omega\epsilon - 1 = \left\{(\omega\epsilon)^L - 1 \;\middle|\; (\omega\epsilon)^R - 1, \omega\epsilon\right\},$$

del que podemos concluir que $(\omega\epsilon - 1)^L < 0$ y $(\omega\epsilon - 1)^R > 0$, por lo tanto, $\omega\epsilon - 1 = 0$, con lo que podemos decir además que $\epsilon = \frac{1}{\omega}$.

Lo único que le falta a los números surreales para que sean un cuerpo ordenado es la definición de inverso multiplicativo. Si bien ya lo hicimos con un par de ejemplos, necesitamos definirlo para todos los números surreales.

Definición 3.7 (Inversos multiplicativos)**.** Sea $x > 0$ un número surreal con la forma del lema 3.1, es decir, $x^L \geq 0$ y $0 \in X^L$. Vamos a definir el número y de la forma

$$y \equiv \left\{0, \frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} \;\middle|\; \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R}\right\},$$

lo llamaremos el inverso multiplicativo de x y luego mostraremos que en efecto se tiene que $yx = 1$. En la definición, el número y se define con respecto a los ancestros del mismo y, en este caso se refiere a que los ancestros que ya sabemos que están, empezando desde 0 que siempre es elemento de y^L.

Ejemplo 16. Vamos a demostrar cómo funcionaría la definición en concreto con el ejemplo del $x = 3 = \{0, 2 \mid \}$. Vamos a llamar y_n a los distintos pasos de la definición recursiva de inverso multiplicativo, esto es, $y_0 \equiv \{0 \mid \}$, y

$$y_{n+1} \equiv \left\{y_n^L, \frac{1 + (x^R - x)y_n^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y_n^R}{x^L} \;\middle|\; y_n^R, \frac{1 + (x^L - x)y_n^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y_n^R}{x^R}\right\},$$

con lo que tenemos que $y = \left\{\cup_n Y_n^L \;\middle|\; \cup_n Y_n^R\right\}$.

Veamos entonces los pasos de la recursión. Tenemos que $x = 3 = \{0, 2 \mid \}$, por lo tanto nuestra fórmula recursiva se transformaría en

$$y_{n+1} \equiv \left\{y_n^L, \frac{1 - y_n^R}{2} \;\middle|\; y_n^R, \frac{1 - y_n^L}{2}\right\},$$

con lo que tendríamos que el inverso multiplicativo de 3 estaría definido como

$$y \equiv \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \dots \;\middle|\; \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \dots\right\}.$$

Fíjese que este número es el mismo que encontramos en el ejemplo 14 y además la fórmula recursiva que define el inverso multiplicativo es la misma que el ejemplo 14 escribíamos como

$$s_{n+1} = \frac{1 - s_n}{2}.$$

Teorema 3.11 (Propiedades del inverso multiplicativo)**.** *Sea $x > 0$ un número surreal y sea y el número definido como el inverso multiplicativo. Tenemos entonces que*

1. $xy^L < 1 < xy^R$ *para todo* y^L, y^R.
2. y *es un número.*
3. $(xy)^L < 1 < (xy)^R$ *para todo* $(xy)^L, (xy)^R$.
4. $xy = 1$.

Proof. En esta prueba llamemos x' a los ancestros del número x, igualmente los llamaremos y' para y y y'' serán los ancestros de y creados a partir del ancestro y'.

1. Los ancestros de y están definidos por la fórmula

$$y'' = \frac{1 + (x' - x)y'}{x'},$$

esta fórmula implica la fórmula

$$1 - xy'' = (1 - xy')\frac{x' - x}{x'}.$$

Queremos analizar el signo de la ecuación para demostrar el enunciado. El signo del factor $(x'-x)/x'$ depende solamente de si x' pertenece a X^L o a X^R. Para el otro factor analizemos su signo por inducción; fíjese que para $0 \in y^L$ se cumple que $1-0x = 1$ que es positivo, entonces supongamos por inducción que $(1 - xy')$ es positivo si $y' \in Y^L$ y negativo si $y' \in Y^R$. En este sentido, $1-xy''$ será negativo cuando $y' \in Y^L$ y $x' \in X^L$ o cuando $y' \in Y^R$ y $x' \in X^R$, y $1-xy''$ será positivo en los otros dos casos, reflejando así que $1 - xy''$ es negativo cuando $y'' \in Y^R$ y positivo cuando $y'' \in Y^L$, lo que demuestra que $xy^L < 1 < xy^R$ para todo y^L, y^R.

2. Si tomamos en cuenta el numeral (1) de la prueba, esto implica que $y^L < y^R$ para todo y^L, y^R, lo que significa que y es un número.

3. Los ancestros de xy tienen la forma de $x'y + xy' - x'y'$. Esto se puede reordenar como

$$\begin{aligned}(xy)' = x'y + xy' - x'y' &= x'y - [1 + y'(x' - x)] + 1 \\ &= x'y - \frac{x'(1 + y'(x - x'))}{x'} + 1 \\ &= x'(y - y'') + 1,\end{aligned}$$

que es mayor que 1 si $(y - y'')$ es positivo y menor que 1 si $(y - y'')$ es negativo, dando así el teorema. Para ver esto podemos verlo por casos, veamos el caso cuando el factor es mayor que 1, en este caso $y'' \in Y^L$ y esto pasa cuando x' y y' pertenecen a diferentes conjuntos, por ejemplo, $x' \in X^R$ y $y' \in Y^L$, en este caso $(xy)' \in (xy)^R$.

4. Para mostrar que $xy = 1$ tenemos que mostrar que $xy > 0$ y que $(xy)^L < 1 < (xy)^R$, la segunda parte ya la tenemos. Para la primera parte, fíjese que $0 \in X^L$ y $0 \in Y^L$, por lo tanto, el factor dado por estos dos ancestros se encuentra en $(XY)^L$ y es igual a 0, es decir, $0 < xy$.

$\square$

Con esto ya podemos concluir que los números surreales son un cuerpo ordenado, y podemos llamar a $y = 1/x$.

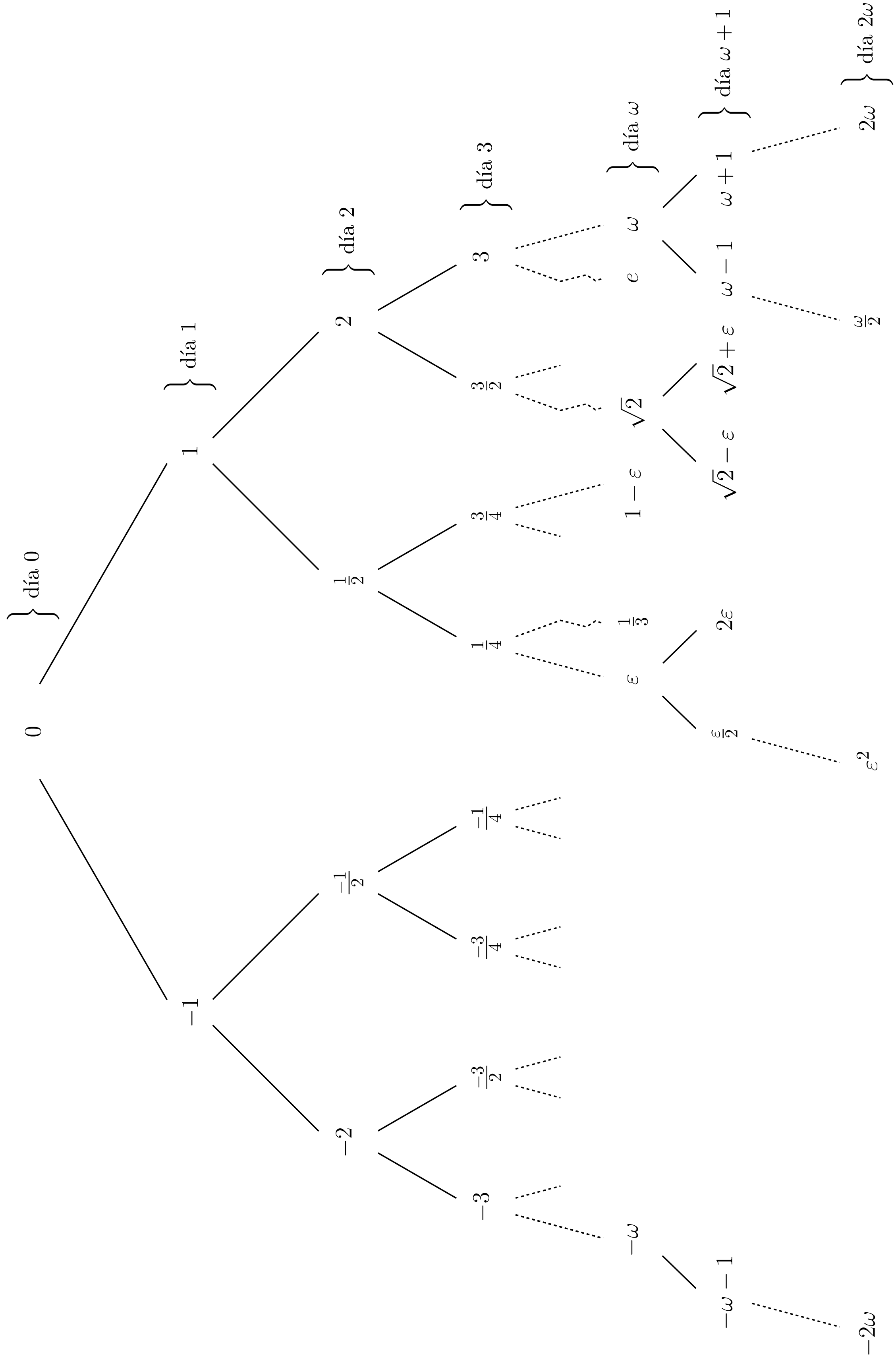

Figura 3-2: Todos los números, grandes y pequeños. Basado en la gráfica de [17].

Bibliografía

[1] Owen Maitzen. *HACKENBUSH: a window to a new world of math*. Youtube. 2021. URL: https://www.youtube.com/watch?v=ZYj4NkeGPdM.

[2] Siobhan Roberts. *Genius at play*. en. New York, NY: Bloomsbury Publishing Plc, Sept. 2015.

[3] "Martin Gardner: A "Documentary"". In: *The Mathemagician and Pied Puzzler*. A K Peters/CRC Press, Mar. 1999, pp. 13–22. DOI: 10.1201/9781439863848-7. URL: https://doi.org/10.1201/9781439863848-7.

[4] Martin Gardner. "Mathematical Games". In: *Scientific American* 223.4 (Oct. 1970), pp. 120–123. DOI: 10.1038/scientificamerican1070-120. URL: https://doi.org/10.1038/scientificamerican1070-120.

[5] Rational Animations. *epic conway's game of life*. Youtube. 2011. URL: https://www.youtube.com/watch?v=C2vgICfQawE&t.

[6] Numberphile2. *The Legendary John Conway (1937-2020) - Numberphile Podcast*. Youtube. 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=WsecAiJDI8s.

[7] Sukanta Das, Souvik Roy, and Kamalika Bhattacharjee. *The Mathematical Artist: A Tribute To John Horton Conway*. en. Emergence, Complexity and Computation, 45. Springer, 2022. ISBN: 3031039858; 9783031039850.

[8] C. E. Shannon and J. McCarthy, eds. *Automata Studies. (AM-34)*. Princeton University Press, Dec. 1956. DOI: 10.1515/9781400882618. URL: https://doi.org/10.1515/9781400882618.

[9] John Von Neumann. *Theory of self-reproducing automata*. Baltimore, MD: University of Illinois Press, Apr. 1967.

[10] Tanya Khovanova and John Conway. *The Sexual Side of Life*. [Online; accessed 11-May-2023]. July 2010. URL: https://blog.tanyakhovanova.com/2010/07/the-sexual-side-of-life/.

[11] Nicolas Loizeau. *Game of life: computer with display*. Youtube. 2021. URL: https://www.youtube.com/watch?v=WfuhbI8HE7s.

[12] Martin Gardner. *Martin Gardner's Mathematical Games: The entire collection of his Scientific American columns*. en. Mathematical Assn of Amer, 2005.

[13] P.M. Grundy. "Mathematics and Games". In: *Eureka* 2 (1939), pp. 6–8.

[14] The British Go Association. *Jon Diamond*. [Online; accessed 25-May-2023]. URL: `https://www.britgo.org/people/diamondj`.

[15] Wikipedia. *John Horton Conway — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 11-May-2023]. 2023. URL: `https://es.wikipedia.org/wiki/John_Horton_Conway`.

[16] Béla Bajnok. *An Invitation to Abstract Mathematics*. Springer New York, 2013. DOI: `10.1007/978-1-4614-6636-9`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6636-9`.

[17] John H. Conway. *On Numbers and Games*. A K Peters/CRC Press, Dec. 2000. DOI: `10.1201/9781439864159`. URL: `https://doi.org/10.1201/9781439864159`.

[18] Donald E Knuth. *Surreal Numbers*. Boston, MA: Addison Wesley, Jan. 1974.

[19] Claus Tøndering. *Surreal Numbers - An Introduction*. Jan. 2019. URL: `https://www.tondering.dk/claus/surreal.html`.

[20] Harry Gonshor. *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*. Cambridge University Press, Sept. 1986. DOI: `10.1017/cbo9780511629143`. URL: `https://doi.org/10.1017/cbo9780511629143`.

[21] Richard Dedekind. *Essays on the theory of numbers*. Dover Books on Mathematics. Mineola, NY: Dover Publications, June 1963.