UNA ANTOLOGÍA DE LA OBRA DE CONWAY

Roger David Trujillo Ibáñez[1]

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

Trabajo dirigido por: Jeanneth Galeano Penaloza

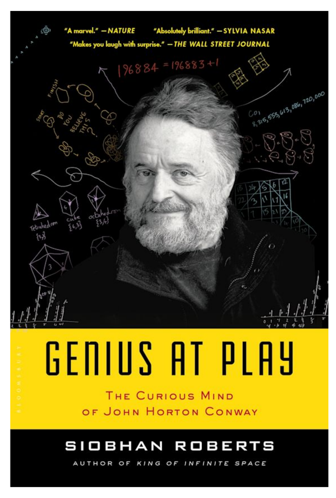
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

“The Curious Mind of John Horton Conway”

John Horton Conway nació el 26 de diciembre de 1937, en Liverpool, Inglaterra. En los años 1970 se dió a conocer en la comunidad de matemáticas puras al encontrar tres grupos simples que nunca antes se habían encontrado, a estos ahora se les conoce por el nombre de *Conway groups*, sin embargo, para la comunidad general de gente interesada en matemática, sus aportes más destacables no fueron esos.

Este trabajo se concentra en sus aportes a la matemática recreativa, mostramos cómo surgieron algunos conceptos, en particular estudiamos tres trabajos de Conway: el juego de la vida, la teoría de juegos combinatorios, y los números surreales. Los dos primeros los abordamos desde un punto de vista divulgativo. Finalmente explicamos cómo se obtienen los números surreales a partir de los juegos. Además, definimos formalmente la estructura y las operaciones de los números surreales para probar que es un cuerpo ordenado.

Para la parte histórica nos basamos fuertemente en su biografía, *Genius at Play* [5].



El juego de la vida

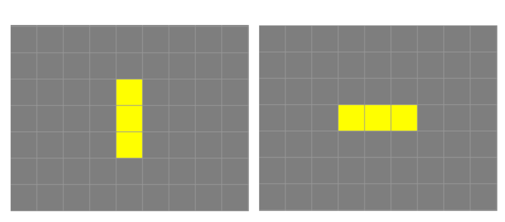
Conway cuenta que fueron las ideas de cómo los autómatas podrían en algún momento simular cosas complejas como el cerebro humano, o incluso, podrían replicarse a sí mismas, las que dieron inicio a su interés en crear autómatas. Conway empezó a buscar autómatas universales que tuvieran reglas simples. Fue inspirado en las ideas de Von Neumann, y en su autómata universal, que se dedicó a estudiar autómatas celulares de dos dimensiones.

El juego de la vida se juega en un tablero dos dimensional conformado por celdas, como un tablero de Go pero infinito. El juego empieza con un estado inicial y va evolucionando conforme a las reglas. Cada celda tiene 8 celdas adyacentes a los que llamaremos vecinos, cuatro que comparten un lado y cuatro que comparten solamente un vértice, es decir, dos horizontales, dos verticales, y cuatro en diagonal. Las reglas del juego son:

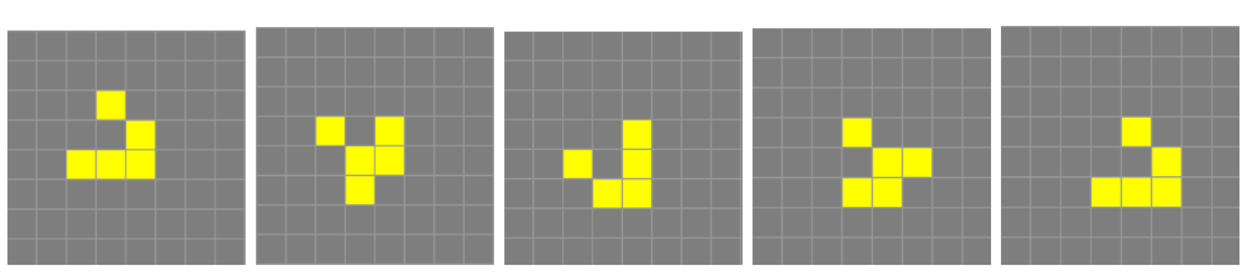
Reglas

1. **Regla de nacimiento:** Si una celda está muerta en el tiempo t, y la celda tiene exactamente 3 celdas vecinas que están vivas, entonces la celda se convierte en una celda viva en el tiempo $t+1$.
2. **Regla de muerte:** Si una celda viva en el tiempo t tiene estrictamente menos que 2 vecinos vivos, la celda muere por soledad en el tiempo $t+1$. Si una celda viva en el tiempo t tiene más que 3 vecinos vivos, la celda muere por hacinamiento en el tiempo $t+1$.
3. **Regla de supervivencia:** Si una celda viva tiene exactamente 2 o 3 celdas vivas vecinas en el tiempo t, entonces la celda sigue viva en el tiempo $t+1$.

Un ejemplo es el *blinker*, a la derecha. Este patrón se repite después de 2 iteraciones del juego de la vida, el patrón oscila entre tres celdas unidas verticalmente, y tres celdas unidas horizontalmente.

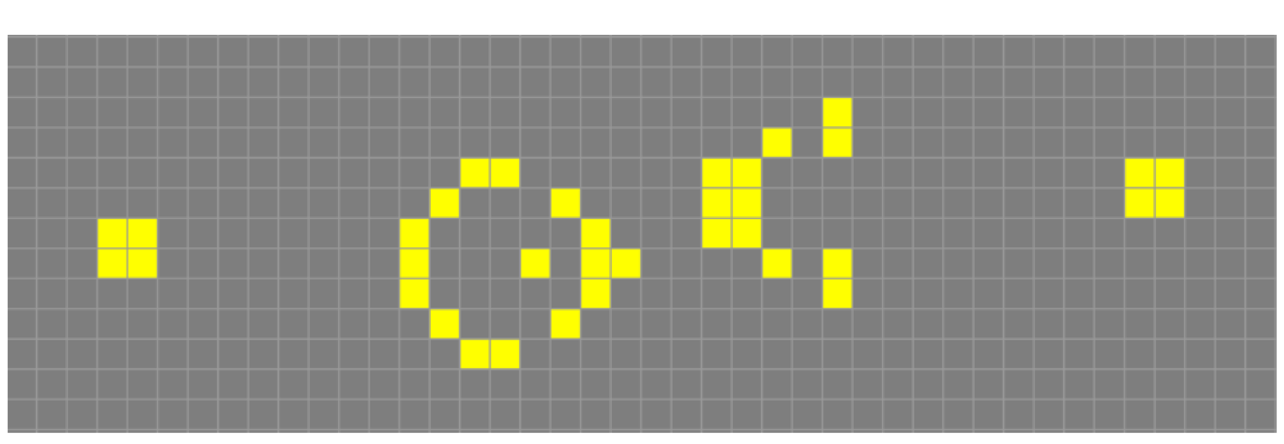


La figura más importante que se descubrió al comienzo del estudio del juego de la vida fue el *glider*, un patrón que podía “moverse” por el tablero. El *glider* era importante porque permitía mandar información por el tablero, cuando Conway y su equipo encontraron el *glider* se imaginaron que podría funcionar como la corriente eléctrica funciona en los computadores, enviando señales.



En Octubre de 1970, Martin Gardner en su columna *Mathematical Games* del *Scientific American* [3] escribió un texto titulado *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game “life”*. La columna, además de describir el juego proponía un reto; encontrar un patrón inicial que al evolucionar creciera sin límites, y además prometía 50 USD a quien fuera el primero en encontrarla o demostrar que no existe.

En Noviembre del año en que salió la columna de Gardner (1970), un equipo del MIT liderado por Bill Gosper, un matemático y programador estadounidense, se ganó el premio propuesto en la columna al descubrir/inventar una pistola de gliders ahora conocida como la *Gosper Glider gun*



El juego se hizo supremamente famoso gracias a la columna de Gardner, y gracias a la *Gosper Glider gun* se pudo demostrar que el juego de la vida era un autómata universal, es decir, podía hacer cualquier cálculo que un computador puede hacer. El juego de la vida sigue teniendo su fanaticada incluso ahora, y todavía hay una comunidad queriendo conocer más sobre éste.

Teoría de juegos combinatorios

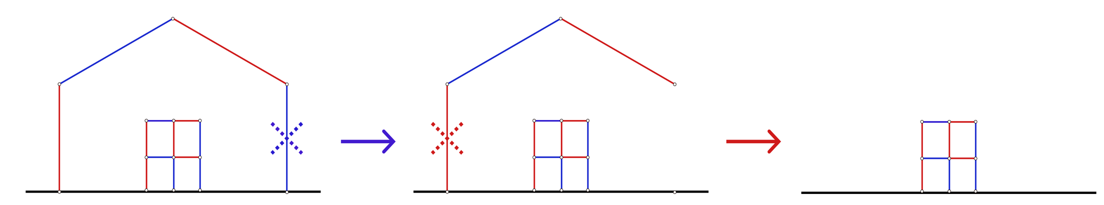
Conway, Elwyn Berlekamp y Richard Guy dieron vida a *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, un compendio de cuatro volúmenes con toda la información que tenían sobre juegos matemáticos. Un trabajo que se demoró quince años en salir a la luz, con dos volúmenes, y luego en una segunda edición 20 años después con dos volúmenes más.

En su trabajo se concentraron en generalizar el teorema de Sprague-Grundy para juegos imparciales, querían trabajar sobre juegos más generales, los juegos partisanos.

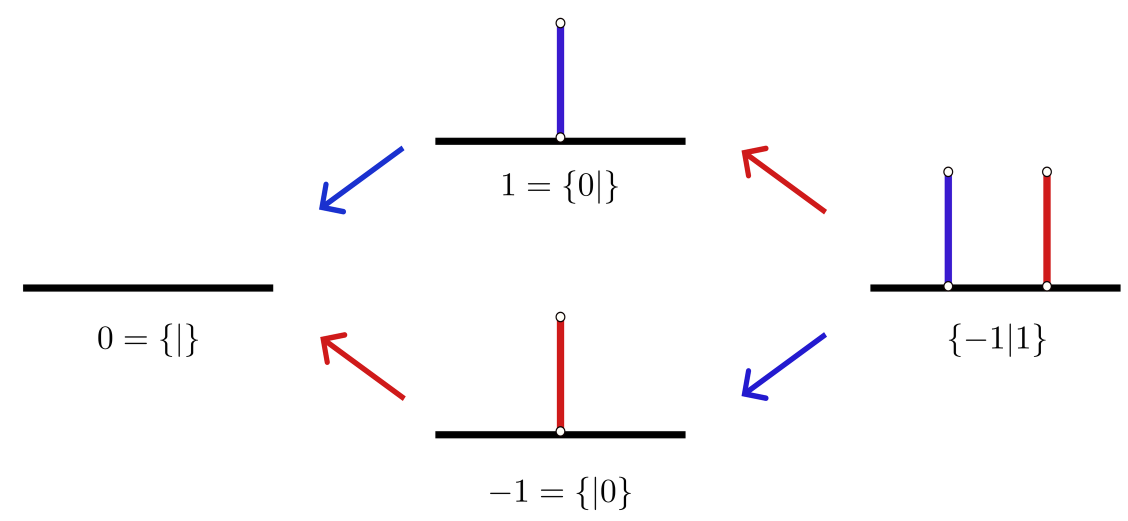
Un juego que nos permite explicar una parte de la teoría de manera más directa es el juego del Hackenbush.

Reglas del Hackenbush

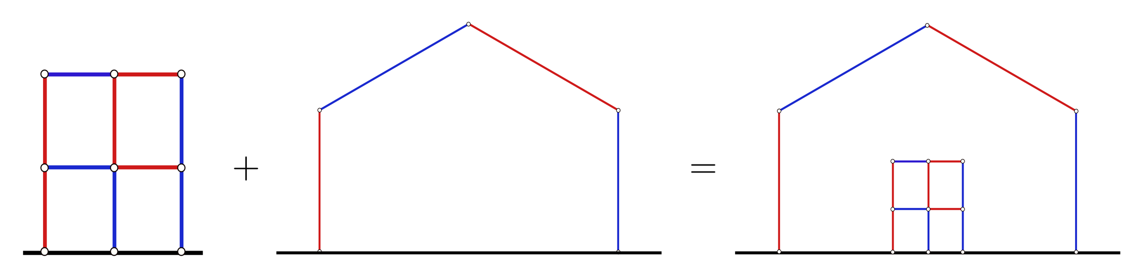
El juego empieza con una configuración de líneas, unas rojas y otras azules. Todas las líneas tienen que estar conectadas al piso, ya sea directamente o a través de otras. El juego se juega por turnos, cada uno de los jugadores tiene un color asignado, un jugador juega con las azules y el otro juega con las rojas. En cada turno el jugador tiene que borrar una línea de su color, y si alguna de las otras líneas queda desconectada entonces esa también se borra.



Para la teoría, a cada estado del juego se le puede asignar un valor que nos va a decir quién va a ganar el juego. Si el valor es mayor a 0 sabemos que va a ganar el azul, si es menor a 0 va a ganar el rojo, y si es igual a 0 entonces gana el segundo jugador. La forma en que se definen los valores es la siguiente; sea L el conjunto de los valores de los estados a los que puede llegar el jugador azul, y sea R el del jugador rojo, entonces el valor de nuestro estado se va a definir recursivamente como $\{L|R\}$.



Algunas configuraciones tienen ciertos ‘arbustos’ desconectados unos de otros, por lo tanto cada uno de estos arbustos se puede tratar como un juego separado, la combinación de estos es la suma de los juegos, y el valor de este juego es la suma de los juegos separados.



Así, la suma de estos valores tiene una representación gráfica y queda definida como

$$x+y \equiv \left\{x^L+y, x+y^L \mid x^R+y, x+y^R\right\}.$$

Números surreales

La multiplicación de valores de juegos está dada por

$$xy=\{x^Ly+xy^L-x^Ly^L, x^Ry+xy^R-x^Ry^R | x^Ly+xy^R-x^Ly^R, x^Ry+xy^L-x^Ry^L\}.$$

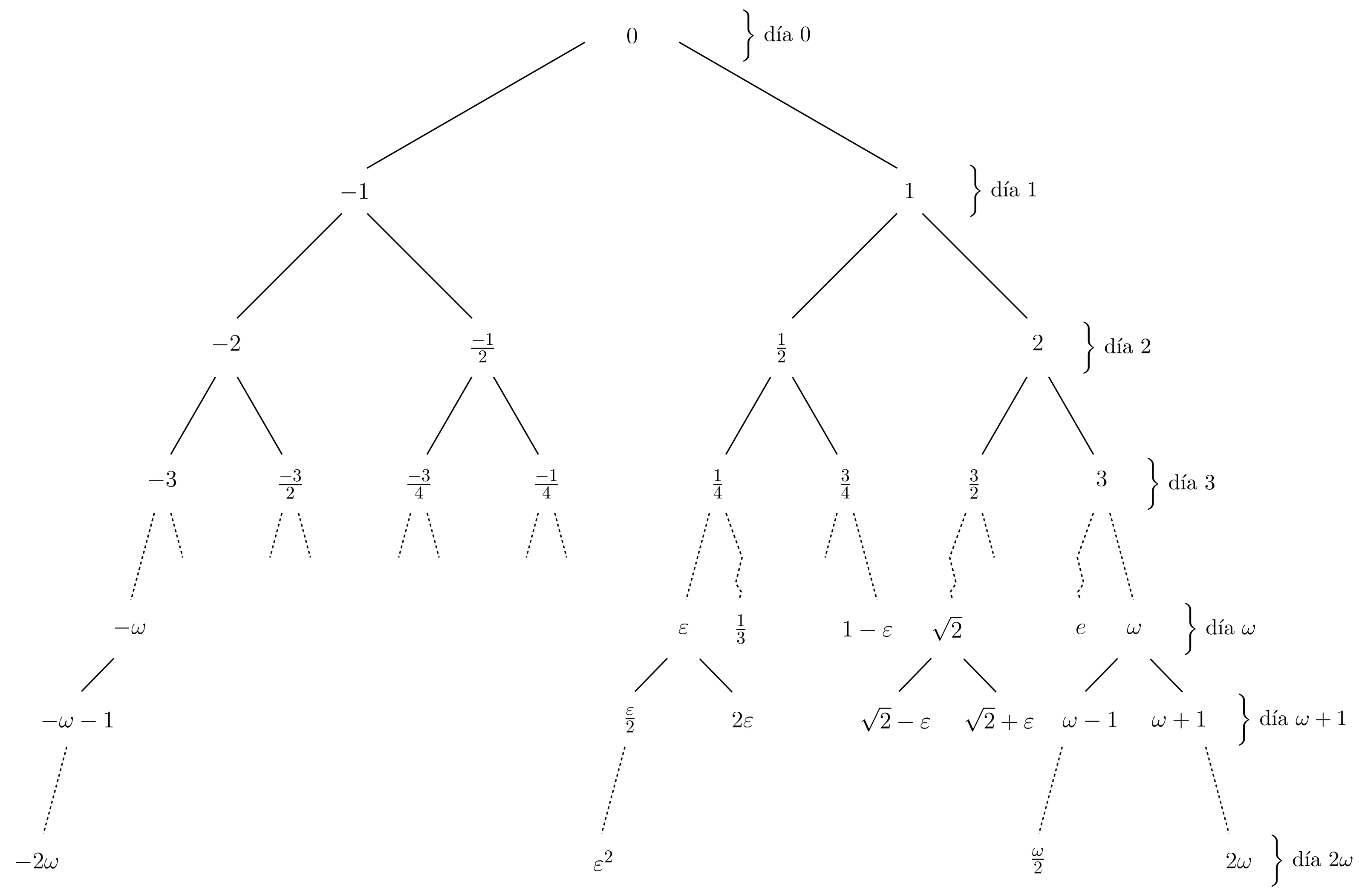
Si tomamos la clase de valores de juegos dados por

$$\mathbb{S}=\{\{L|R\} \mid l\in L, r\in R, l<r\},$$

esta clase es totalmente ordenada, además junto la suma y multiplicación definida, forman un cuerpo ordenado. A esta clase se le conoce como los números surreales.

Los números surreales son una extensión de los números reales que admite infinitos e infinitesimales, además son el cuerpo ordenado más grande, esto significa que todos los demás cuerpos ordenados son subcuerpos de los números surreales [1]. También contienen a los ordinales.

Conway publicó la teoría de los números surreales en su libro *On numbers and Games* [2]. Al principio él los llamaba solamente números porque esta clase contenía a todos los números (reales, hiperreales, ordinales), el nombre se lo dió Donald Knuth en la novela *Surreal Numbers* [4]. Conway consideraba al descubrimiento de los números surreales como su mejor trabajo matemático.



Referencias

[1] Béla Bajnok. *An Invitation to Abstract Mathematics*. Springer New York, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-6636-9. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6636-9.

[2] John H. Conway. *On Numbers and Games*. A K Peters/CRC Press, dic. de 2000. DOI: 10.1201/9781439864159. URL: https://doi.org/10.1201/9781439864159.

[3] Martin Gardner. “Mathematical Games”. En: *Scientific American* 223.4 (oct. de 1970), págs. 120-123. DOI: 10.1038/scientificamerican1070-120. URL: https://doi.org/10.1038/scientificamerican1070-120.

[4] Donald E Knuth. *Surreal Numbers*. Boston, MA: Addison Wesley, ene. de 1974.