Michał Rdzany gr.E3 22.11.2017r.

Sprawozdanie
Metody numeryczne 2

3. Całkowanie numeryczne

Temat 33:

Obliczanie całek $\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$ n – punktową $(n = 2,4,6, \dots ,16)$ kwadraturą Gaussa – Laguerre'a.

Opis problemu:

Szukamy $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \approx \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$, gdzie x_i jest i-tym pierwiastkiem n-tego wielomianu Laguerre'a $L_n(x)$, $w_i = \frac{x_i}{((n+1)\cdot L_{n+1}(x_i))^2}$.

Opis metody:

Do wyliczenia wartości szukanej kwadratury używamy funkcji $nPointLaguerre(n, f, symbolic)$.

$symbolic$ jest opcjonalnym argumentem. Jeśli $symbolic == "symbolic"$, to korzystamy z „Symbolic Math Toolbox".

Do wyliczenia współczynników nie korzystamy ze wzoru $w_i = \frac{x_i}{((n+1)\cdot L_{n+1}(x_i))^2}$, ponieważ wartości wyznaczone w ten sposób są mniej dokładne i sposób ten jest wolniejszy w pierwszym przypadku.

Przypadek 1 – bez „Symbolic Math Toolbox"

- Tworzymy macierz wielomianów Laguerre'a $L = makeLaguerre(n + 1)$
- Tworzymy wektor węzłów $x = roots(fliplr(L(n + 1, :)))$
- Tworzymy macierz $A \in M_{n\times n}$ t.ż. $A(i, j) = L_i(x_j)$
- Tworzymy wektor v o długości n; $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Wyznaczamy $w = A\backslash v$.
- Zwracamy $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \approx \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$

Przypadek 2

- Wyznaczamy wektor węzłów x, który jest wartościami własnymi macierzy $C = sym\big(compan(L_n)\big) = \begin{bmatrix} \frac{-L_n(2)}{L_n(1)} & \frac{-L_n(3)}{L_n(1)} & \cdots & \frac{-L_n(n)}{L_n(1)} & \frac{-L_n(n+1)}{L_n(1)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Tworzymy symboliczną macierz $A \in M_{n\times n}$ t.ż. $A(i, j) = L_i(x_j)$
- Tworzymy wektor v o długości n; $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Wyznaczamy $w = A\backslash v$.
- Zwracamy $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \approx \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$

W przypadku 1 korzystamy z kilku funkcji pomocniczych:

- $nextLaguerre(L_{k-1}, L_k)$ zwraca $[L_{k+1}, L_k]$, korzystając z zależności $L_{k+1}(x) = \frac{(2k+1-x) \cdot L_k(x) - k \cdot L_{k-1}(x)}{k+1}$.

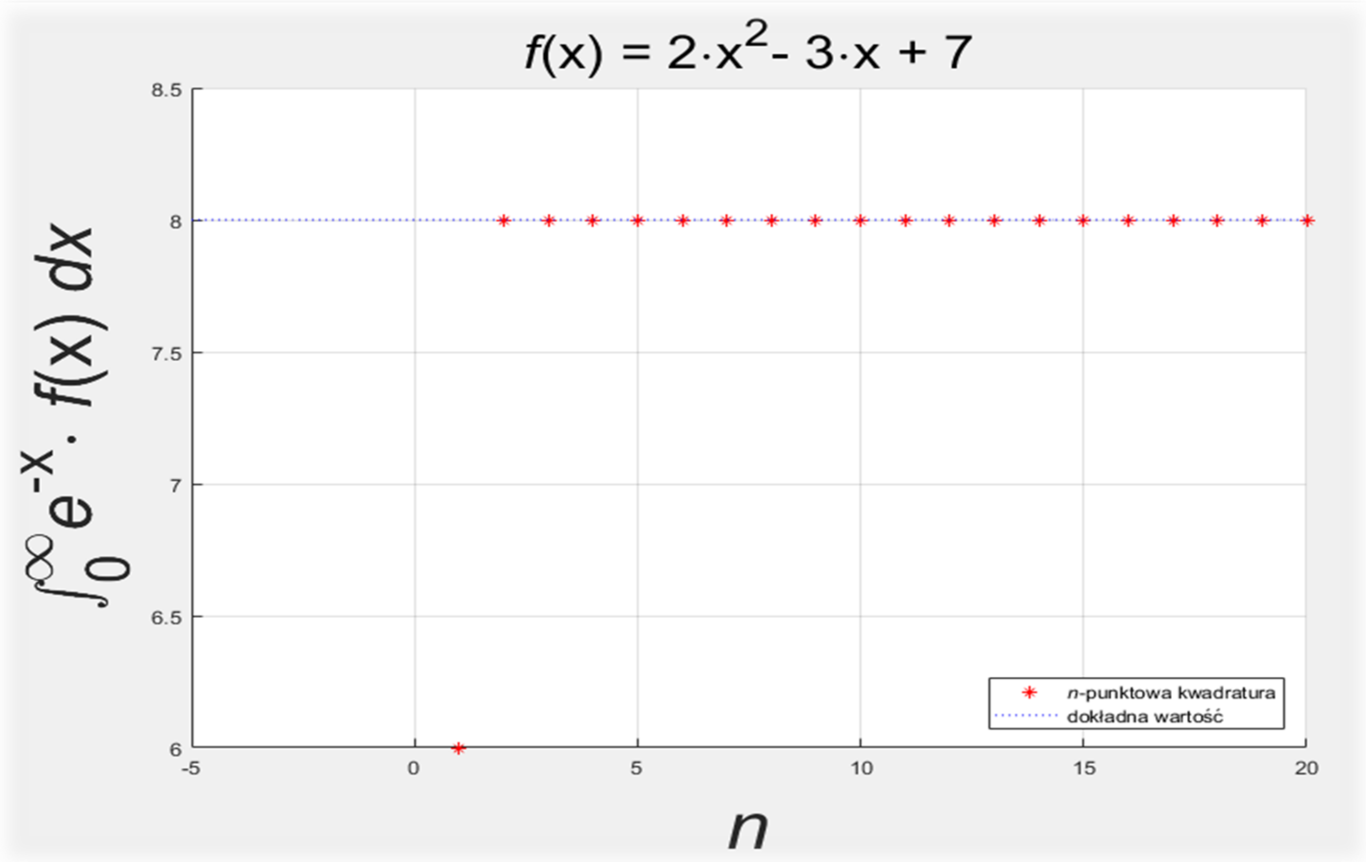
- $makeLaguerre(n)$ zwraca macierz $L \in M_{n \times n}$ t.ż. k-ty wiersz macierzy L zawiera współczynniki L_{k-1}. Funkcja korzysta z $nextLaguerre$.

- $pxValue(p, x)$ oblicza $p(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \cdots$, gdzie $p = [a, b, c, \dots]$.

Przykłady i wnioski:

Skrypty przykładów zaznaczają na wykresie dokładną wartość $\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx$ i obliczone wartości n – punktowych kwadratur Gaussa-Laguerre'a $Q_n(f)$, dla $n \in \langle 1, k \rangle$, $k = 20$. Podają także czas obliczenia wszystkich kwadratur i tworzą wektor błędu er t.ż. $er_n = \left| Q_n(f) - \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \right|$.

Przykład 1



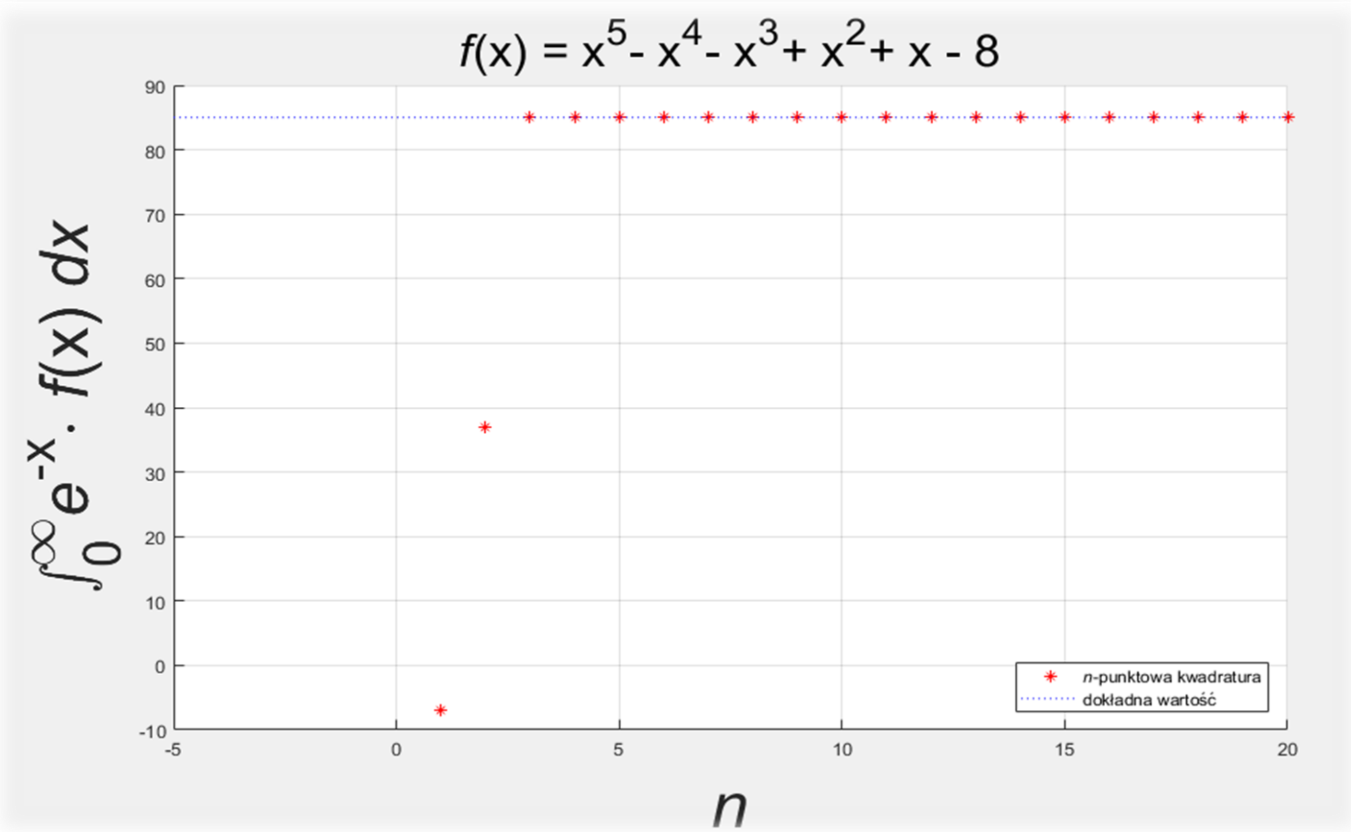
n – punktowa kwadratura Gaussa – Laguerre'a jest rzędu $2n$, więc dla $n \geq 2$ otrzymane wyniki powinny być dokładne, co zgadza się z wartościami przedstawionymi na wykresie. Elementy wektora er są rzędu 10^{-15}, wynika to z błędów zaokrągleń.

Zwiększając k do 40 możemy zauważyć, że błąd zaczyna rosnąć. Dla $n = 36:40$ $er = 10^{-5} \cdot [0.000002, 0.145427, 0.006499, 0.590402, 4.230747]$ Dzieje się tak dlatego, że niewielka zmiana współczynnika stojącego przy wysokiej potędze może powodować dużą zmianę w wartościach wielomianu, co przekłada się na niedokładne wyznaczenie współczynników kwadratury.

Obliczając kwadratury z parametrem $'symbolic'$ dostajemy dokładne wartości dla $n \leq 36$, ale czas obliczeń jest znacznie dłuższy. Porównanie średniego czasu wykonania $nPointLaguerre$ odpowiednio z parametrem $'symbolic'$ i bez niego: dla $n = 10$ $[0.4s, 0.004s]$, dla $n = 20$ $[2s, 0.006s]$.

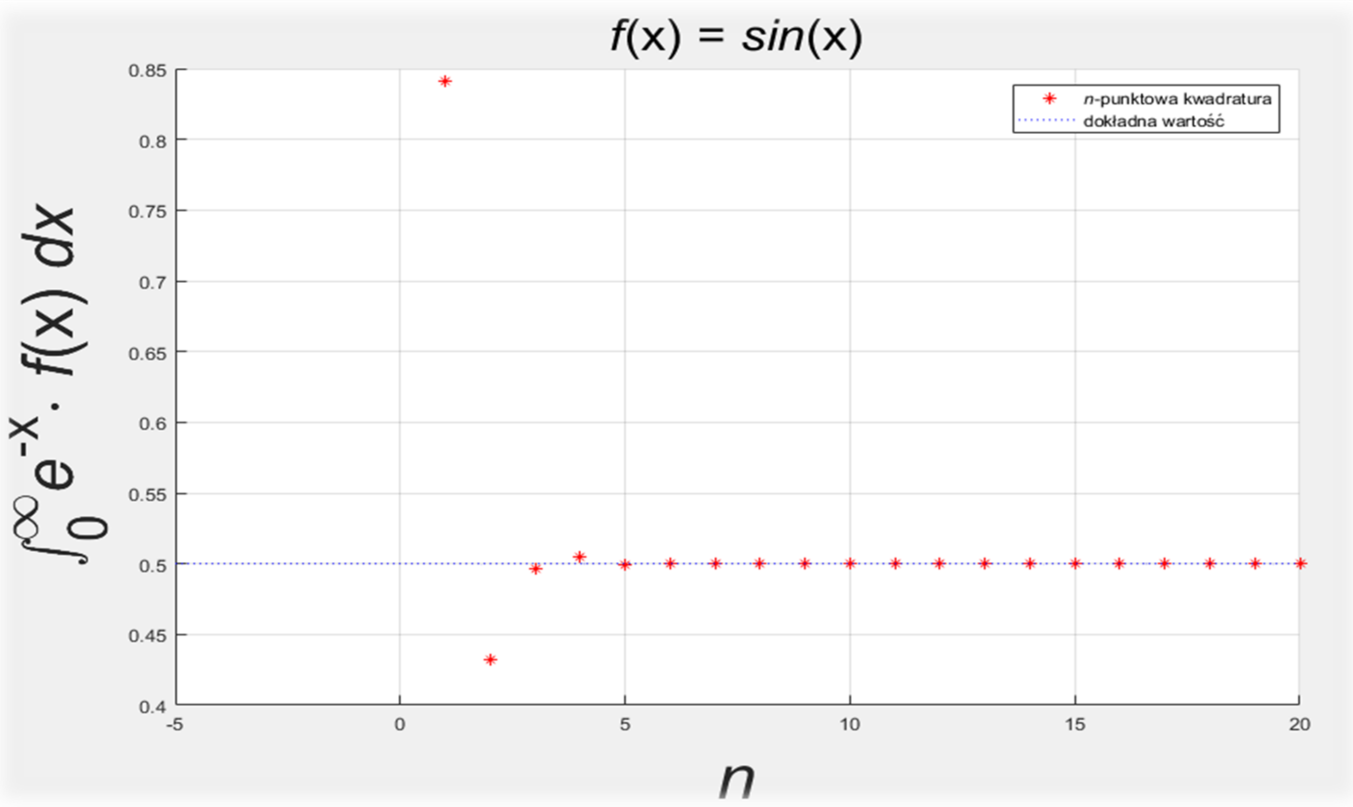
Dla $n \geq 37$ układ równań z macierzą A nie ma rozwiązań. Jest to spowodowane niedokładnym wyznaczeniem elementów macierzy A. Dla $n = 40$ najmniejsze elementy macierzy A są rzędu 10^{-1}, a największe – rzędu 10^{20}.

Przykład 2



Ten przykład jest bardzo podobny do poprzedniego. Główną różnicą jest stopień wielomianu f. Tym razem aby wynik był dokładny potrzebujemy kwadratury rzędu co najmniej 6, czyli powinniśmy dostawać dokładne wyniki dla $n \geq 3$, co zgadza się z danymi przedstawionymi na wykresie.

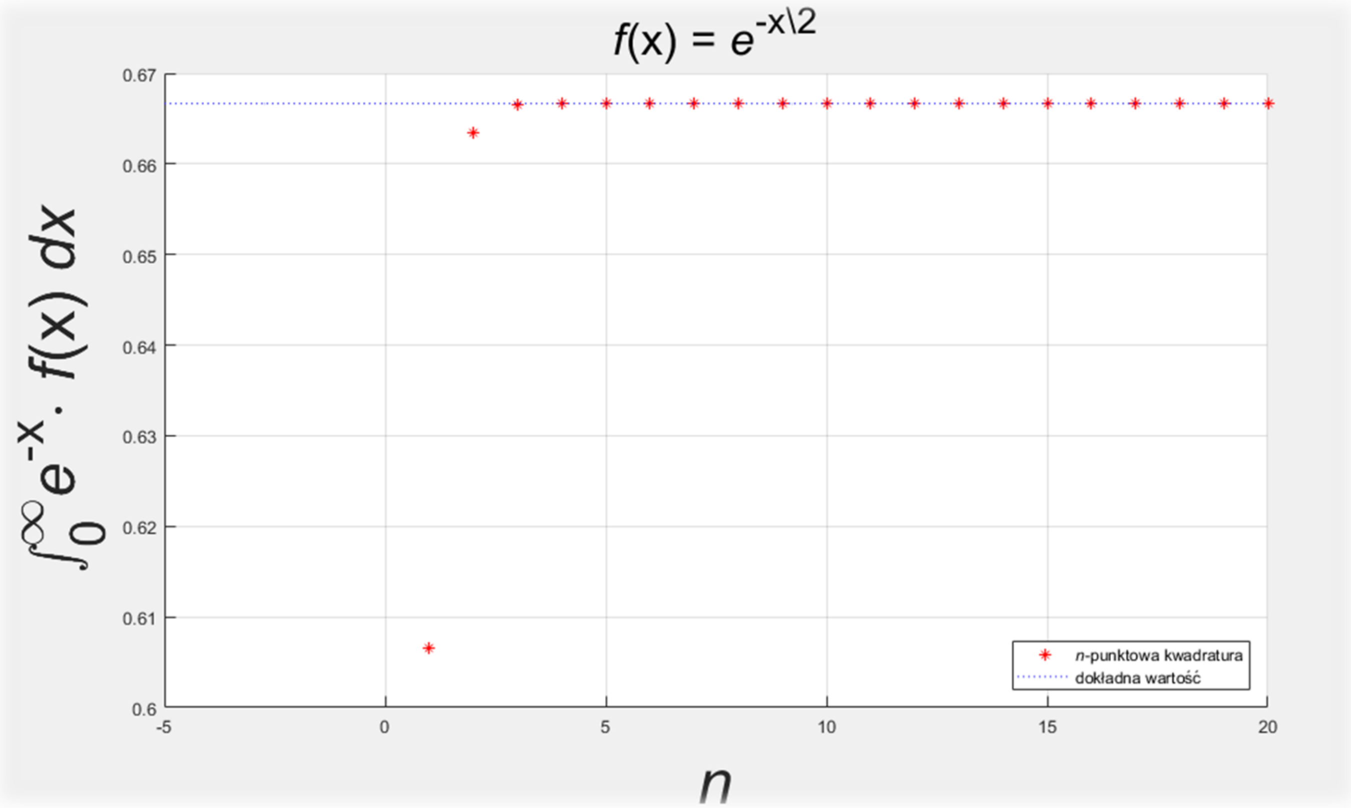
<u>**Przykład 3**</u>



Przy funkcji f nie będącej wielomianem nie możemy dostać dokładnego wyniku. Zamiast tego otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia szukanej całki, co widać na wykresie. Do $n = 20$ dokładność rośnie, przy dalszym zwiększaniu n dokładność maleje. Dla 20 – punktowej kwadratury błąd jest rzędu 10^{-16}.

Możemy poprawić dokładność używając parametru $'symbolic'$, uzyskując błąd rzędu 10^{-19} dla 20 – punktowej kwadratury. Dalsze zwiększanie n nie poprawia dokładności, ale też nie pogarsza jej tak szybko jak bez parametru $'symbolic'$. Podobnie jak w przykładzie 1 metoda działa dla $n < 37$.

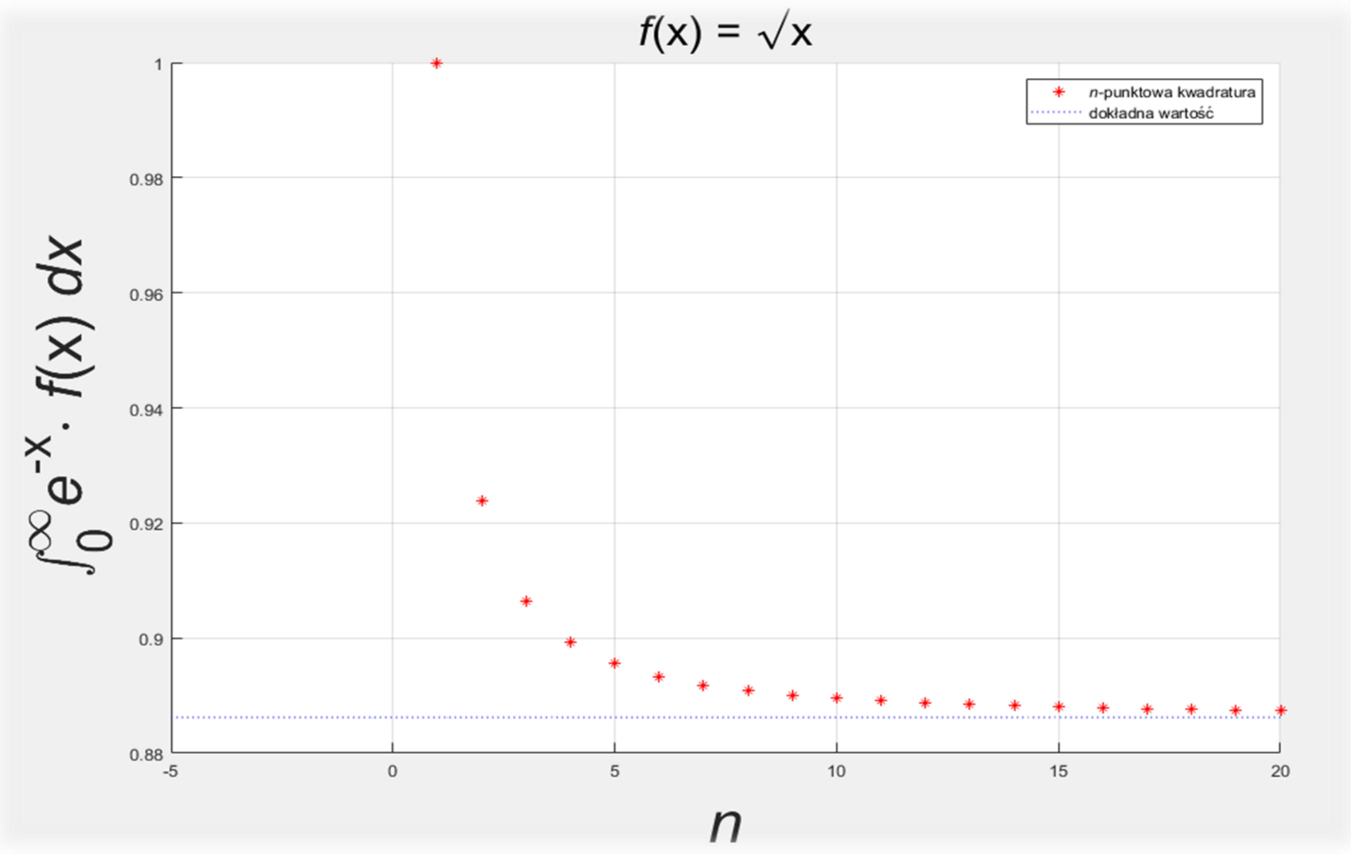
Przykład 4



W tym przykładzie otrzymywane błędy są znacznie mniejsze niż w poprzednim. Już dla 12 – punktowej kwadratury otrzymujemy błąd $= 0$. Oczywiście kwadratura ta nie jest dokładna, a zerowość błędu wynika z precyzji obliczeń. Dokładność jest duża, ponieważ błąd kwadratury zależy od $f^{(2n)}(x) = \frac{1}{4^n \cdot e^{x/2}}$, która szybko maleje.

Używając parametru $'symbolic'$ zamiast zer w wektorze er otrzymujemy wartości rzędu nawet 10^{-24}. Tym razem najwyższą dokładność osiąga 36 – punktowa kwadratura. Podobnie jak w poprzednich przykładach symboliczne rozwiązanie układu równań z macierzą A jest niemożliwe dla $n \geq 37$.

Przykład 5



Dla $f(x) = \sqrt{x}$ otrzymywane z kwadratur przybliżenia są znacznie mniej dokładne niż w poprzednich przykładach, co można zobaczyć na wykresie. Dzieje się tak dlatego, że $f^{(2n)}(x)$ posiada czynnik $x^{\frac{1}{2}-2n}$, więc może być bardzo duża dla małych x.

Dla 20 – punktowej kwadratury otrzymujemy błąd $1.154 \cdot 10^{-3}$, ale dla 50 – punktowej otrzymujemy błąd $3.135 \cdot 10^{-4}$. W przykładzie 1 błąd wynikający z niedokładnego wyznaczenia kwadratury dla $n = 40$ był rzędu 10^{-5}. Jest to wartość mniejsza niż błąd wynikający z niedokładności samej kwadratury w obecnym przykładzie, dlatego tym razem minimalny błąd osiągany jest dla większych n.

Wywoływanie $nPiontLaguerre$ z parametrem $'symbolic'$ niewiele zmienia w tym przykładzie, ponieważ pozwala nam to jedynie na dokładniejsze wyznaczenie kwadratury, która i tak charakteryzuje się dużym błędem.