Michał Rdzany gr.E3 03.01.2018r.

Sprawozdanie
Metody numeryczne 2

5. Wartości własne i wektory własne macierzy

Temat 31:

Stosując metodę QR wyznacz wszystkie wartości własne macierzy trójdiagonalnej A, gdzie $a_{i,i} = 4$, $a_{i,i-1} = 1$, $a_{i,i+1} = 1$. Do obliczenia rozkładu QR wykorzystaj obroty Givensa.

Opis metody:

Do wyliczenia szukanych wartości własnych używamy funkcji $eigQRG(n, method, A)$.

- n jest rozmiarem macierzy A.
- $method$ jest argumentem opcjonalnym pozwalającym wybrać metodę używaną w funkcji.
- A jest argumentem opcjonalnym, używanym, gdy chcemy wywołać funkcję z macierzą A inną niż w temacie zadania.

Opis działania funkcji w zależności od pola $method$:

Przypadek 1 - $method = 'standard'$ (wartość domyślna)

- Wykonujemy rozkład QR macierzy A.
- Przypisujemy $A = R \cdot Q$.
- Powtarzamy dopóki elementy $a_{i,i-1}$ nie są wystarczająco małe.

Przypadek 2 - $method = 'shift'$

- Wykonujemy rozkład QR macierzy A.
- Przypisujemy $A = R \cdot Q$.
- Powtarzamy dopóki ostatni element pod główną przekątną nie jest wystarczająco mały.
- Zapamiętujemy wyznaczoną wartość własną (ostatni element na głównej przekątnej).
- Usuwamy ostatni wiersz i kolumnę z macierzy A.
- Powtarzamy do wyznaczenia n wartości własnych.

Przypadek 3 - $method = 'closedForm'$

- Wyznaczamy wartości własne macierzy $A = \begin{bmatrix} b & a & & \mathbf{0} \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ \mathbf{0} & & c & b \end{bmatrix}$,

  korzystając ze wzoru: $b + 2 \cdot \sqrt{|a \cdot c|} \cdot \cos\frac{i \cdot \pi}{n+1}$, gdzie $i = 1{:}n$.

Do wyznaczania rozkładu QR korzystamy z funkcji $qrGivens(A)$.

Opis działania funkcji:

W funkcji zakładamy, że A jest macierzą Hessenberga górną.

Dla $i = 1 : n - 1$

- Wyznaczamy macierz $G_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & c & s & & \\ & & -s & c & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

  (element s leży w i-tym wierszu, element $-s$ leży w i-tej kolumnie).

  $c = \frac{a_{i,i}}{r},\ s = \frac{a_{i+1,i}}{r},\ r = \sqrt{\left(a_{i,i}\right)^2 + \left(a_{i+1,i}\right)^2}$

- Przypisujemy $A = G_i \cdot A$

Zwracamy $Q = \prod_{i=1}^{n-1} G_i^T$, $R = A$,

Przykłady i wnioski:

Wartości własne wyznaczone przez funkcję $eigQRG$ z użyciem różnych metod i przez matlabową funkcję eig dla macierzy A takiej jak w temacie, o rozmiarze 40×40.

$eigQRG(40)$	$eigQRG(40,'shift')$	$eigQRG(40,'closedForm')$	$eig(A)$
5.994131602367396	5.994131602367396	5.994131602367481	5.994131602367480
5.976560847560696	5.976560847560696	5.976560847560697	5.976560847560697
5.947390847755542	5.947390847755542	5.947390847755558	5.947390847755558
5.906792784109827	5.906792784109827	5.906792784109861	5.906792784109862
5.855004902204192	5.855004902204192	5.855004902204190	5.855004902204191
5.792331113922139	5.792331113922139	5.792331113922111	5.792331113922113
5.719139213974411	5.719139213974411	5.719139213974403	5.719139213974400
5.635858721533456	5.635858721533456	5.635858721533436	5.635858721533436
5.542978359643885	5.542978359643885	5.542978359643886	5.542978359643884
5.441043187201577	5.441043187201577	5.441043187201574	5.441043187201574
5.330651400331105	5.330651400331105	5.330651400331131	5.330651400331130
5.212450821933265	5.212450821933265	5.212450821933276	5.212450821933274
5.087135100002440	5.087135100002440	5.087135100002442	5.087135100002440
4.955439637024543	4.955439637024543	4.955439637024526	4.955439637024526
4.818137274342649	4.818137274342649	4.818137274342680	4.818137274342679
4.676033756816961	4.676033756816961	4.676033756817006	4.676033756817007
4.529963004393304	4.529963004393304	4.529963004393323	4.529963004393323
4.380782218329307	4.380782218329307	4.380782218329337	4.380782218329338
4.229366850796755	4.229366850796755	4.229366850796801	4.229366850796800
4.076605467380042	4.076605467380042	4.076605467380071	4.076605467380071
3.923394532619913	3.923394532619913	3.923394532619929	3.923394532619930
3.770633149203196	3.770633149203196	3.770633149203199	3.770633149203199
3.619217781670641	3.619217781670641	3.619217781670663	3.619217781670662
3.470036995606663	3.470036995606663	3.470036995606677	3.470036995606677
3.323966243183012	3.323966243183012	3.323966243182995	3.323966243182993
3.181862725657314	3.181862725657314	3.181862725657320	3.181862725657321
3.044560362975472	3.044560362975472	3.044560362975474	3.044560362975474
2.912864899997557	2.912864899997557	2.912864899997558	2.912864899997558
2.787549178066719	2.787549178066719	2.787549178066724	2.787549178066723
2.669348599668872	2.669348599668872	2.669348599668869	2.669348599668870
2.558956812798422	2.558956812798422	2.558956812798426	2.558956812798426
2.457021640356114	2.457021640356114	2.457021640356114	2.457021640356115
2.364141278466571	2.364141278466571	2.364141278466565	2.364141278466565
2.280860786025583	2.280860786025583	2.280860786025598	2.280860786025597
2.207668886077885	2.207668886077885	2.207668886077889	2.207668886077889
2.144995097795791	2.144995097795791	2.144995097795810	2.144995097795811
2.093207215890132	2.093207215890132	2.093207215890139	2.093207215890139
2.052609152244385	2.052609152244385	2.052609152244442	2.052609152244442
2.023439152439250	2.023439152439250	2.023439152439303	2.023439152439303
2.005868397632494	2.005868397632494	2.005868397632519	2.005868397632519

Wszystkie użyte funkcje dosyć dokładnie wyznaczają wartości własne dla macierzy z tematu zadania.

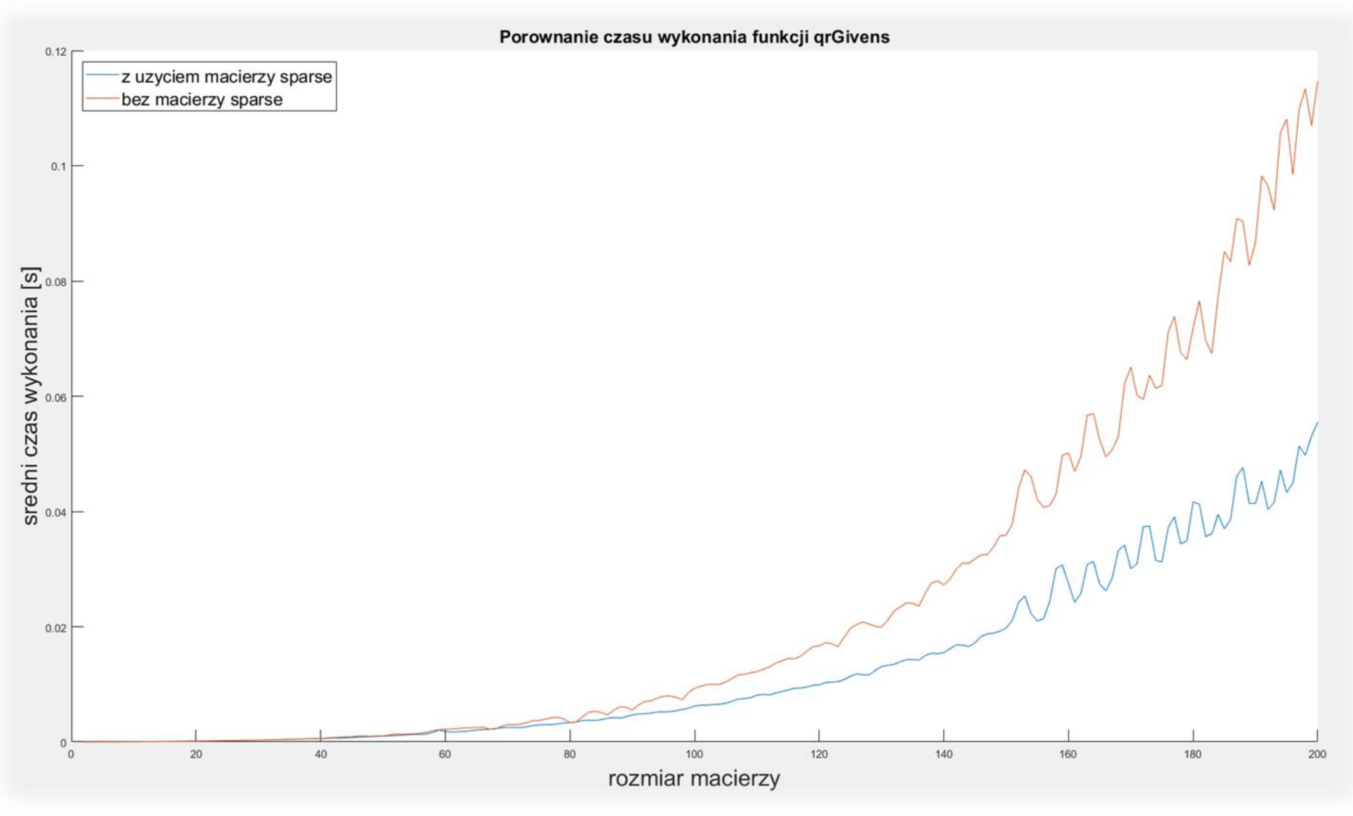
Wartości własne wyznaczone przez funkcję $eigQRG$ z użyciem różnych metod i przez matlabową funkcję eig dla macierzy A o elementach 10^{15} razy mniejszych niż w temacie, o rozmiarze 10×10.

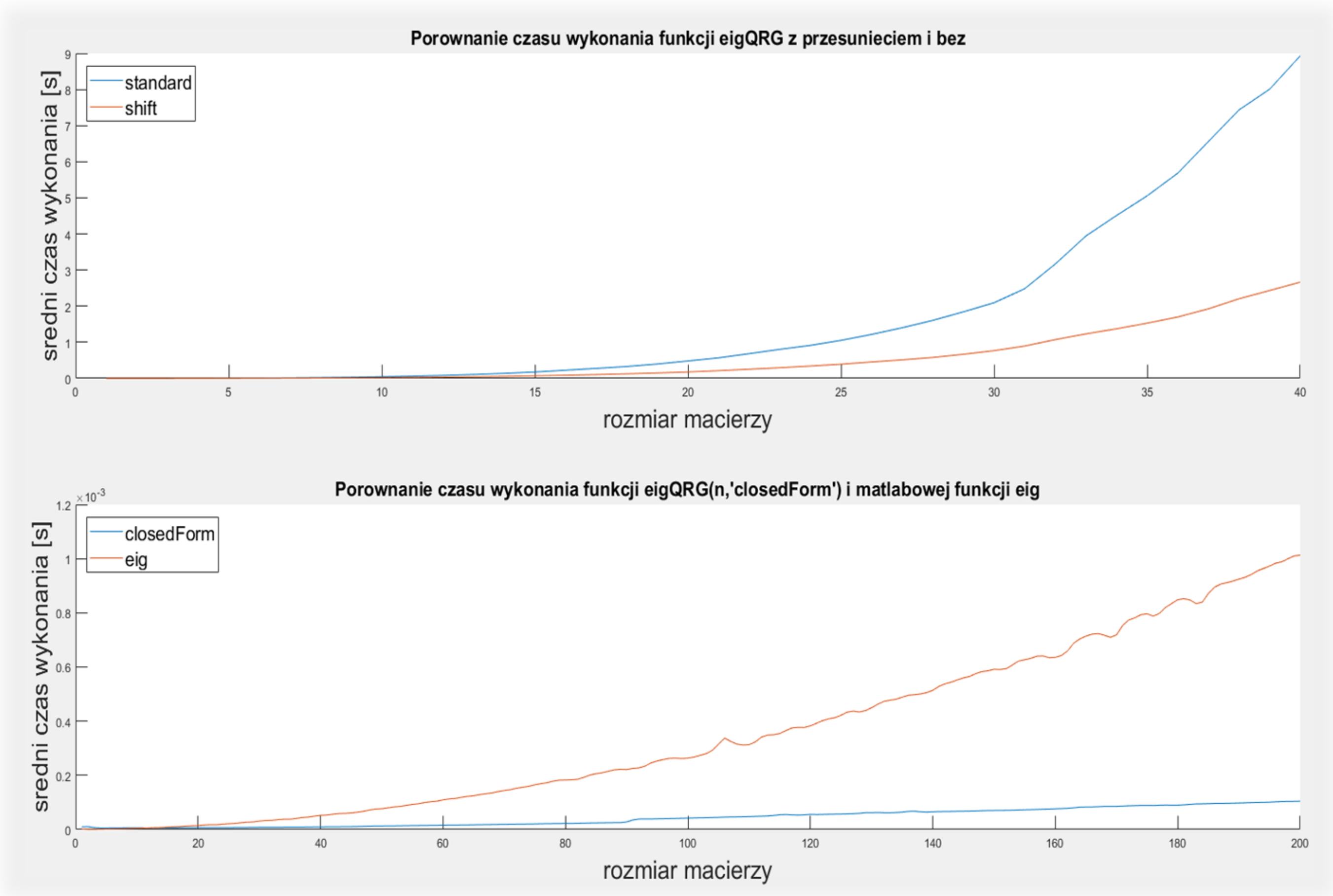
Wartości w tabeli są pomnożone przez 10^{15}.

$eigQRG(40)$	$eigQRG(40,'shift')$	$eigQRG(40,'closedForm')$	$eig(A)$
5.918985947228995	5.918985947228995	5.918985947228995	5.918985947228996
5.682507065662376	5.682507065662376	5.682507065662362	5.682507065662363
5.309721467890554	5.309721467890554	5.309721467890570	5.309721467890570
4.830830026003762	4.830830026003762	4.830830026003773	4.830830026003773
4.284629676546560	4.284629676546560	4.284629676546570	4.284629676546570
3.715370323453429	3.715370323453429	3.715370323453430	3.715370323453430
3.169169973996234	3.169169973996234	3.169169973996227	3.169169973996227
2.690278532109441	2.690278532109441	2.690278532109430	2.690278532109430
2.317492934337638	2.317492934337638	2.317492934337638	2.317492934337638
2.081014052770998	2.081014052770998	2.081014052771006	2.081014052771006

Funkcje zachowują jednakowy błąd względny przy zmianie rzędu wielkości. Jest to spowodowane sprawdzaniem błędu względnego w warunku stopu.

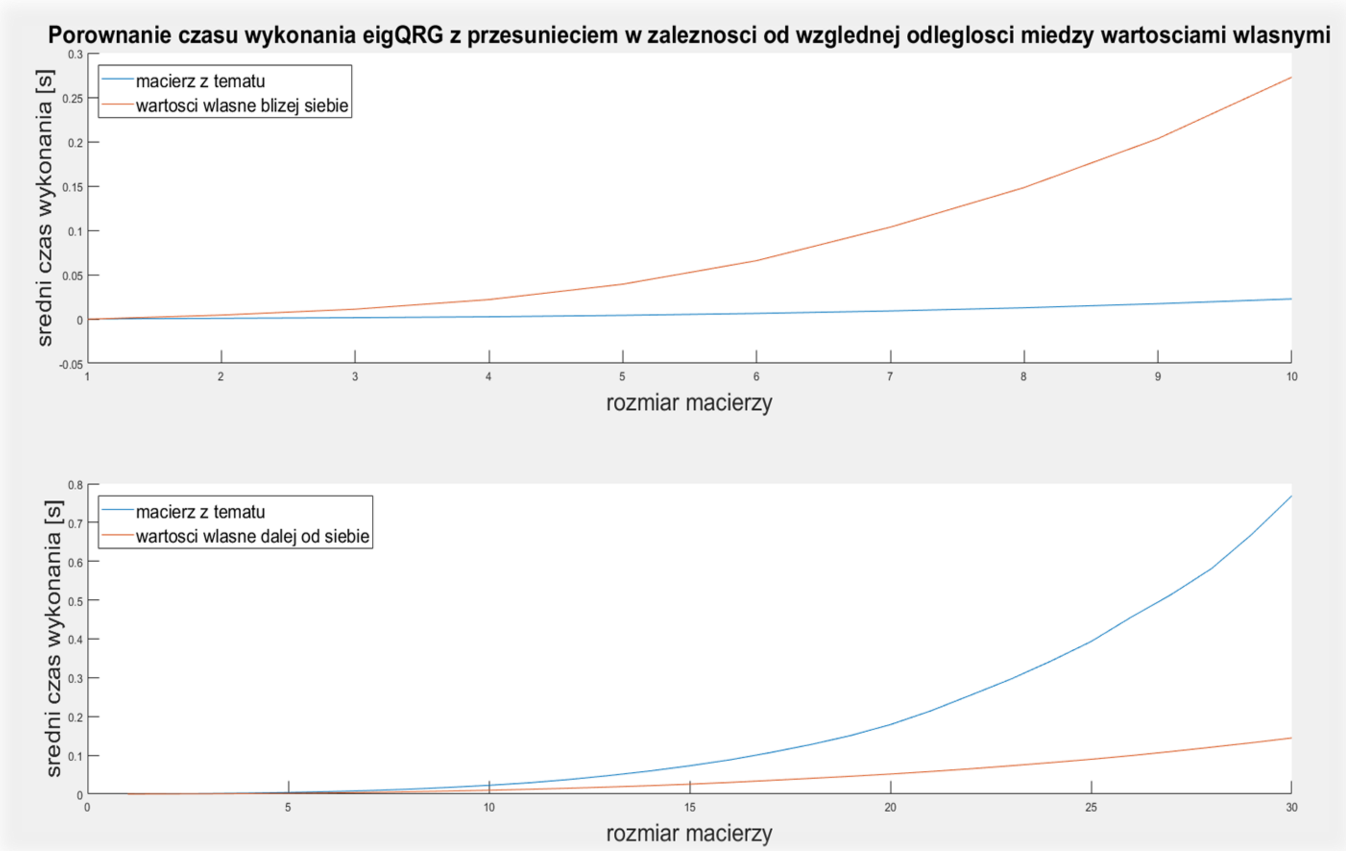
W funkcji $qrGivens$ macierze G_i są macierzami sparse, ponieważ skraca to czas potrzebny na wykonanie funkcji, co obrazuje poniższy wykres.





Wyliczanie wartości własnych z przesunięciem wykorzystuje fakt, że w używanej metodzie ostatnia wartość własna na przekątnej macierzy zbiega najszybciej. Dzięki temu możemy po osiągnięciu pożądanej dokładności zmniejszyć macierz A. Pozwala to na wykonywanie znacznej części iteracji na mniejszej macierzy, co przekłada się na przyśpieszenie działania funkcji.

Wartości własne podanej w temacie zadania macierzy można wyliczyć ze złożonością liniową. Mimo to, nawet optymalizując metodę QR pod tę konkretną macierz, ciężko uzyskać czas wykonania porównywalny z funkcją $eig()$. Dzieje się tak dlatego, że sam rozkład QR ma złożoność kwadratową, a poza tym, dla większych rozmiarów macierzy A, jej wartości własne są względnie bliżej siebie, co znacząco zwiększa liczbę iteracji wymaganą do osiągnięcia pożądanej dokładności.



Powyższe wykresy odnoszą się do macierzy $\begin{bmatrix} 40 & 1 & & \mathbf{0} \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & 1 & 40 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & 2 & & \mathbf{0} \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ \mathbf{0} & & 2 & 4 \end{bmatrix}$, o wartościach własnych z przedziału odpowiednio: $(38,42)$ i $(0,8)$.

Jak widać, czas wykonania jest większy dla macierzy z wartościami własnymi leżącymi blisko siebie. Jest to spowodowane wolniejszą zbieżnością metody QR w tych przypadkach i w efekcie większą liczbą wymaganych iteracji.

Funkcja $eigQRG$ działa także dla innych macierzy. Z metodą $closedForm$ dla trójdiagonalnych macierzy Toeplitza, a z pozostałymi metodami dla macierzy Hessenberga górnych o rzeczywistych wartościach własnych.