Sprawozdanie
Metody numeryczne 2

4. Aproksymacja średniokwadratowa

Temat 19:

> Aproksymacja trygonometryczna ciągła w przedziale $[0, 2\pi]$. Całkowanie złożoną formułą Simpsona. Tablicowanie funkcji, przybliżenia i błędu w m punktach przedziału $[0, 2\pi]$ oraz obliczenie błędu średniokwadratowego w tych punktach.

Opis problemu:

Dla danej ciągłej, okresowej funkcji $f(x)$ o okresie równym $\frac{2\pi}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, określonej na przedziale $[0, 2\pi]$ wyznaczamy funkcję aproksymującą $f^*(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot \cos(i \cdot x) + b_i \cdot \sin(i \cdot x))$.

Opis metody:

- Do wyliczenia współczynników $f^*(x)$ używamy funkcji $approximation(f, n)$, która wylicza współczynniki do a_n, b_n, korzystając ze wzorów:
  $a_0 = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)}{2\pi}$, $a_i = \frac{\int_0^{2\pi}(f(x)\cdot\cos(i\cdot x))}{\pi}$, $b_i = \frac{\int_0^{2\pi}(f(x)\cdot\sin(i\cdot x))}{\pi}$.
  Funkcja zwraca wektor $v = [a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]$.

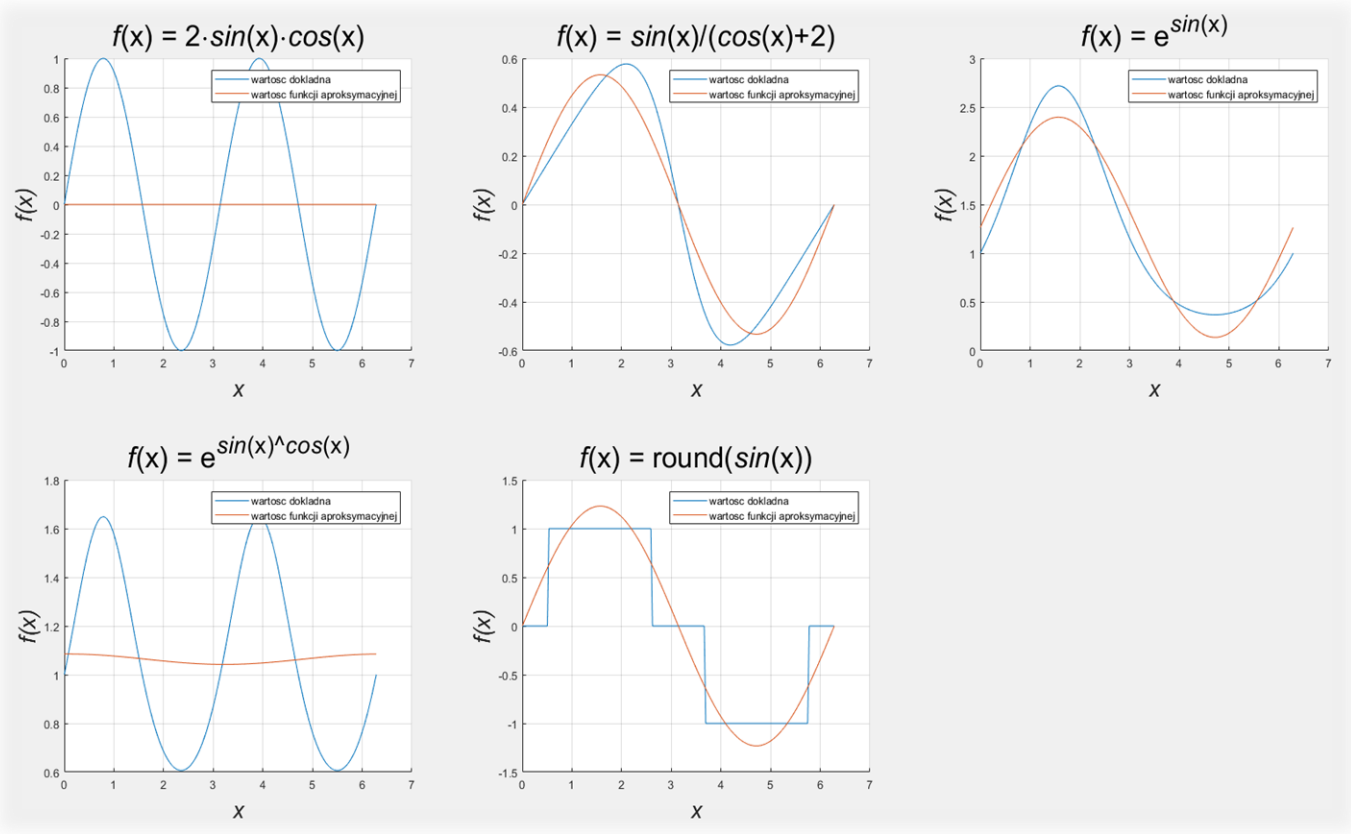
- Całki obliczamy przy pomocy funkcji $compositeSimpson(f, a, b, n)$, podając $n = 10n$, która korzysta ze złożonej kwadratury Simpsona, zakładając, że podane n jest parzyste:
  $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\sum_{j=1}^{n/2}[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})]$.

- Do wyliczenia wektora wartości $f^*(x)$, gdzie x jest poziomym wektorem punktów używamy funkcji $apxValue(v, x)$:
  - Tworzymy macierz $w = \begin{bmatrix} 1, \dots, 1 \\ \cos(\mathrm{x}) \\ \sin(x) \\ \vdots \\ \cos(ix) \\ \sin(ix) \end{bmatrix}$, o wysokości równej długości wektora współczynników v i szerokości równej długości wektora x.
  - Tworzymy wektor $f = v \cdot w$.
  - Zwracamy wektor f.

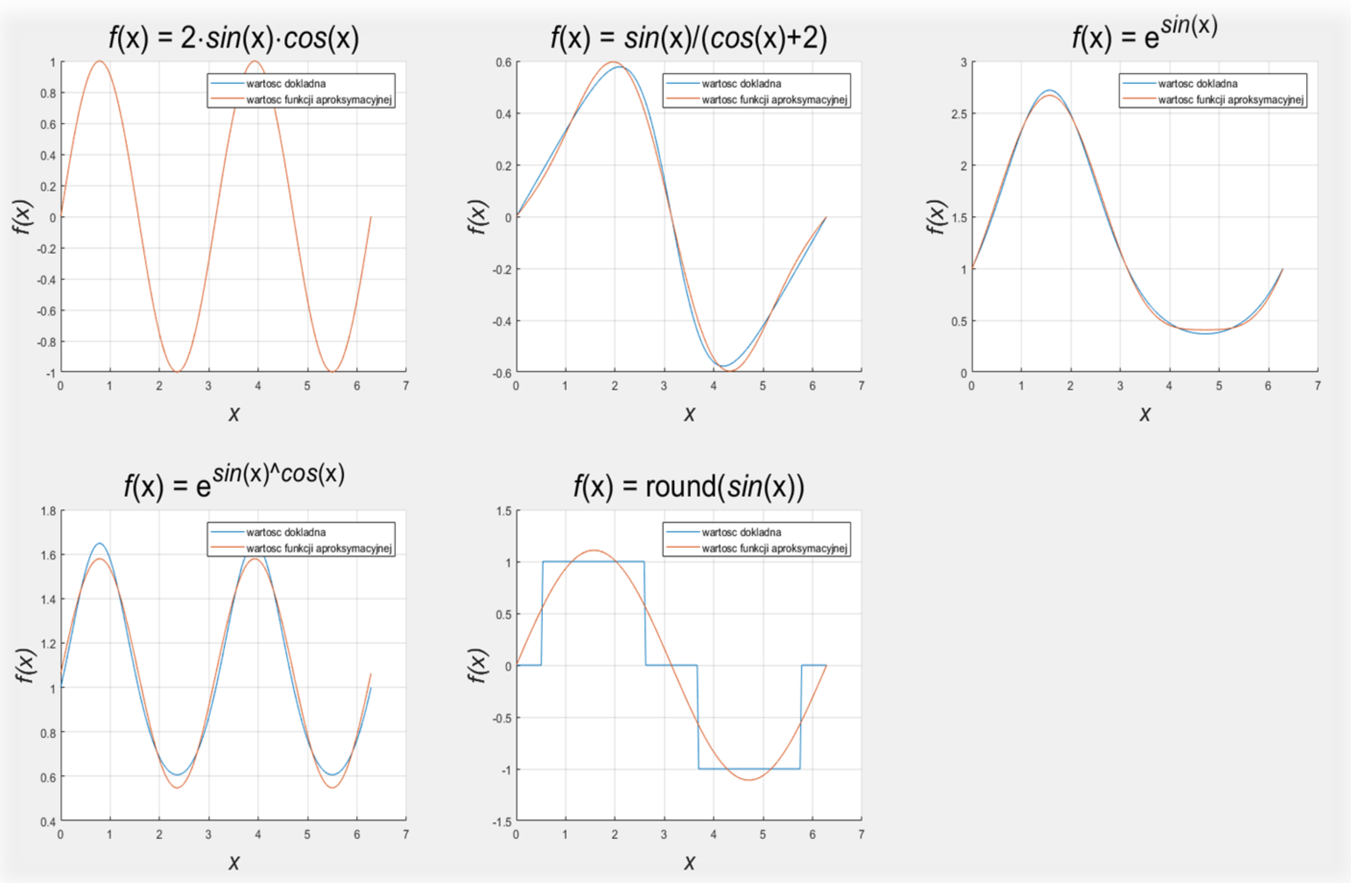
Przykłady i wnioski:

Skrypt $przyklad$ wykonuje tablicowanie $f, f^*, f - f^*$ w m równoodległych punktach przedziału $[0,2\pi]$, oblicza błąd średniokwadratowy w tych punktach i rysuje wykresy funkcji f, f^* dla pięciu różnych funkcji f.

Dla $n = 1$

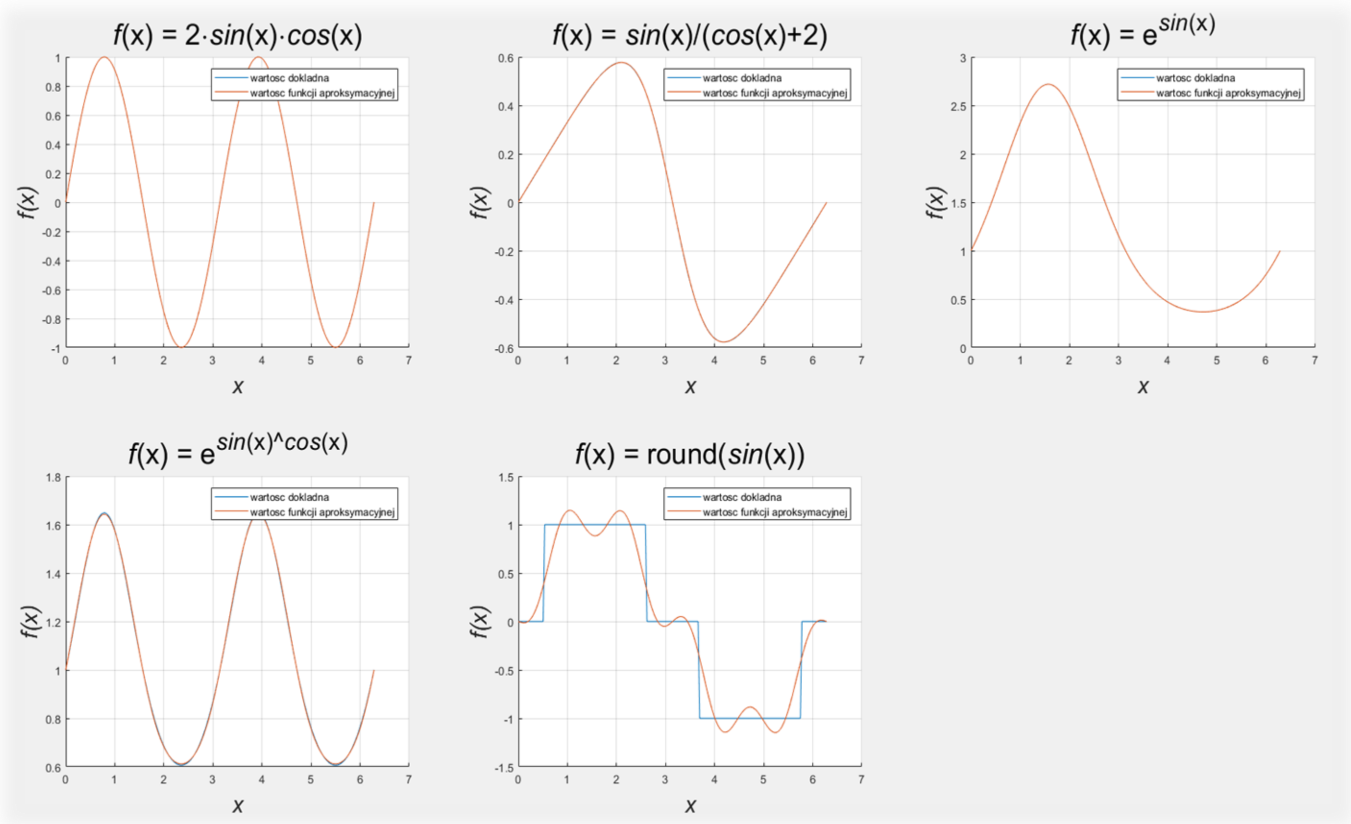


Dla $n = 2$

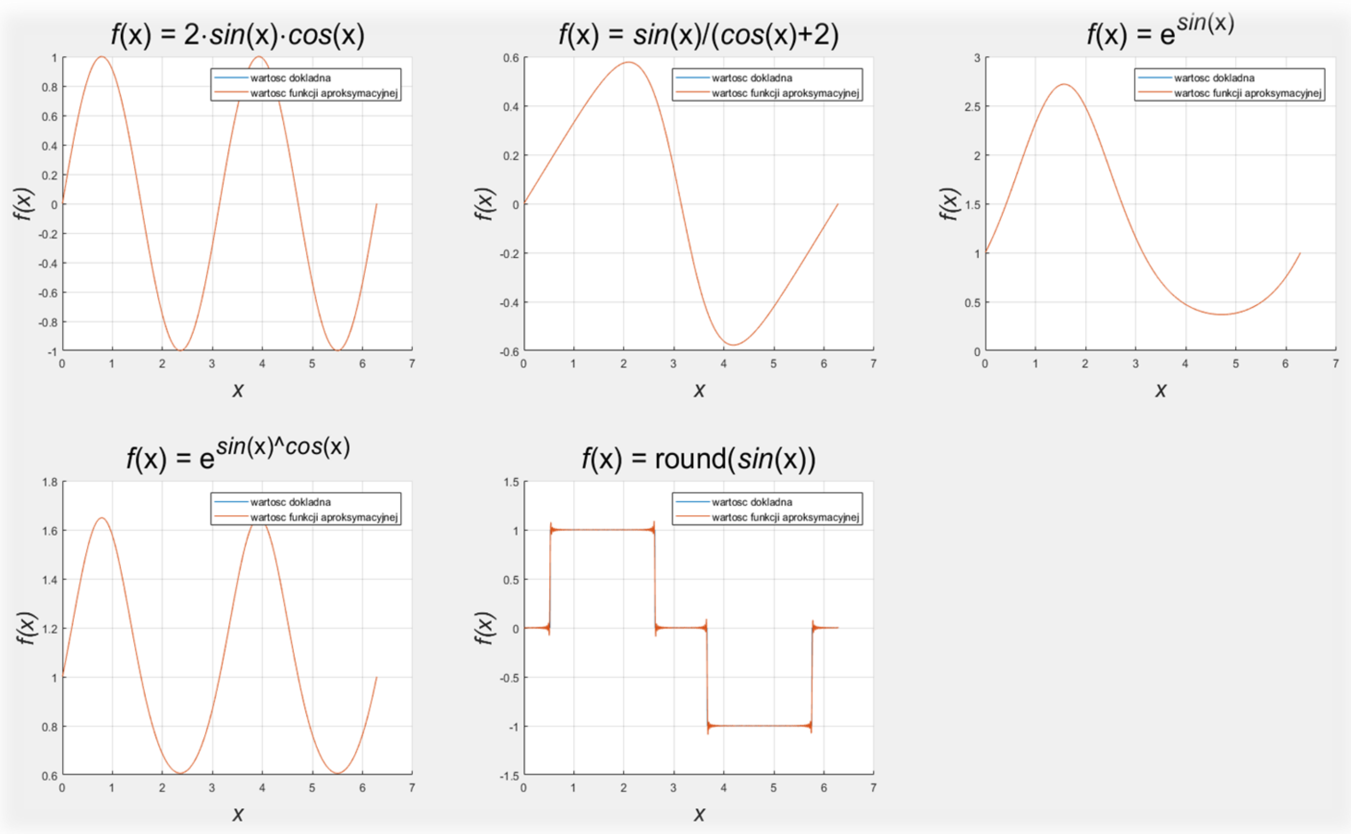


Zauważmy, że $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$, więc funkcja ta powinna być aproksymowana dokładnie dla $n \geq 2$ i stale równa 0 dla mniejszych n, co widać na powyższych wykresach.

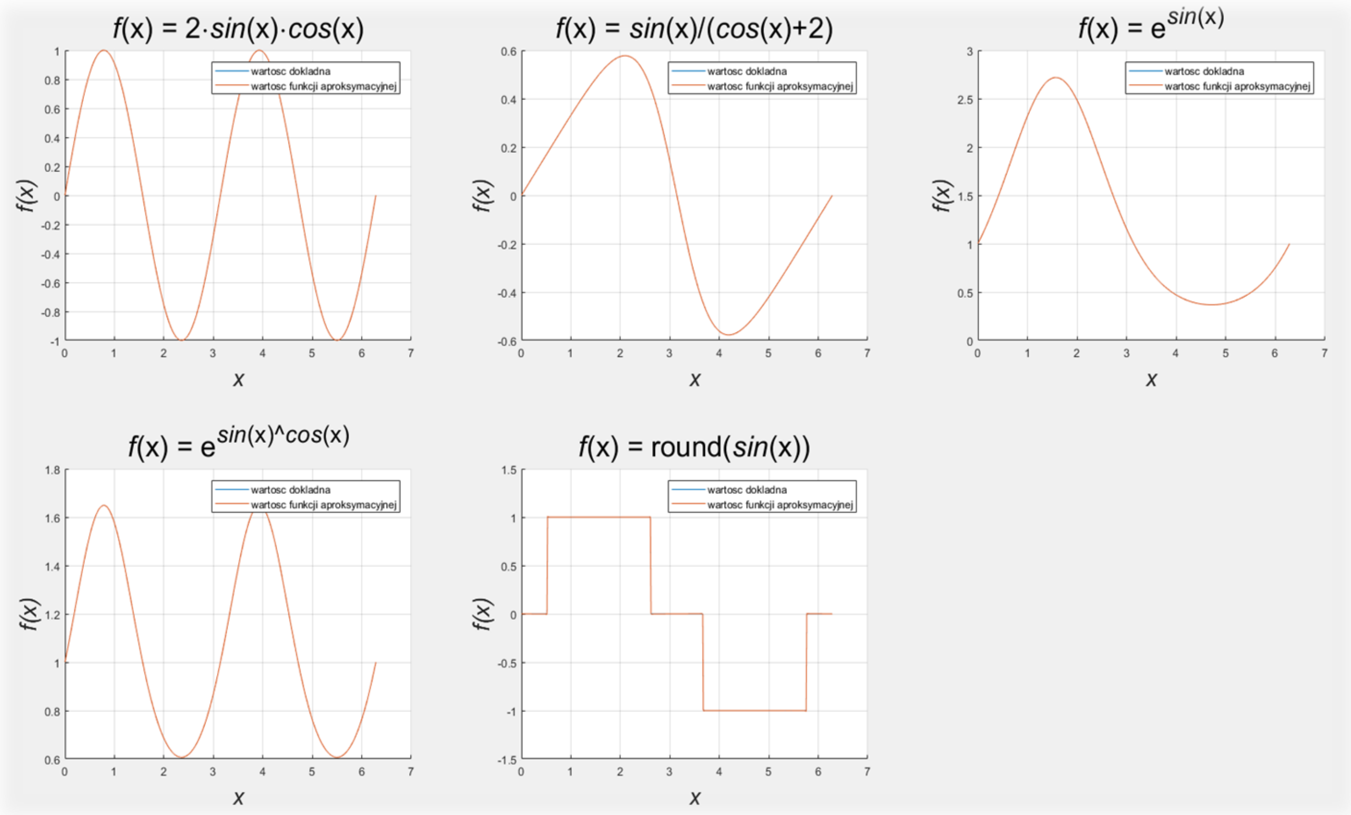
Dla $n = 5$



Dla $n = 200$



Dla $n = 2000$



Podsumowując, aproksymacja ta ma problem z funkcjami o nieciągłych pochodnych, ale poza tym działa bardzo dobrze – już dla $n = 200$ funkcja wykonuje się w $\sim 0.05s$, a błąd średniokwadratowy jest rzędu 10^{-14}.