计算智能讲义——MaxSAT 问题

计算机科学与技术学院　M201973122　李研

1 Definition

首先给出以下符号定义：

Symbol	Definition	Description
x_i	*Variable*	变元， $x_i+\overline{x}_i=1, i=1,2,\ldots,n$
C_i	*Clause*	子句， $C_i=\left(\bigvee_{i\in S_i^+} x_i\right)\vee\left(\bigvee_{i\in S_i^-} \overline{x}_i\right), i=1,2,\ldots,m$
CNF	*Formula*	合取范式， $CNF=\bigwedge_{i\in S} C_i, i=1,2,\ldots,n$

Maximum Satisfiability：找到一组 x_i 的取值，使得满足的子句数目 $\left|C_i\right|$ 最大。

2 Algorithms

给出以下符号定义：

Symbol	Definition	Description
$E\left[Z_i\right]$	*Expectation*	期望，对应字句 C_i 被满足的期望
$E\left[Z \mid x_i\right]$	*Conditional Expectation*	条件期望，在 x_i 确定取值的前提下， CNF 被满足的期望
$E[Z]$	*Total Expectation*	总期望， CNF 被满足的期望

2.1 Randomized Algorithm

- 算法描述：

  将 x_i 分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率设置为 0 或 1，则 C_i 被满足的期望为 $E\left[Z_i\right]=1-2^{-\left|C_i\right|}$，

  CNF 被满足的期望为 $E[Z]=\sum_{i=1}^{m} E\left[Z_i\right]=\sum_{i=1}^{m}\left(1-2^{-\left|C_i\right|}\right)$。

- 近似比分析：

  设 $min|C_i| = K$，则有

$$m\left(1-2^{-K}\right) \le \mathrm{E}[Z] \le OPT \le m$$

- 算法分析：
  - ✧ 简单粗暴，易于理解；
  - ✧ 结果不可控，近似比只是给出理论上期望的上界，而未必每次都能得到相应质量的解。

2.2 Derandomized Algorithm

- 算法描述：

  在算法①的基础上，每个变元 x_i 都有 $\frac{1}{2}$ 的概率取 0 或 1，即有 $E[Z]=\frac{1}{2}E[Z \mid x_i=1]+\frac{1}{2}E[Z \mid x_i=0]$。对于每个变元 x_i，比较 $\frac{1}{2}E[Z \mid x_i=1]$ 和 $\frac{1}{2}E[Z \mid x_i=0]$ 的大小，选择二者中期望值较大者对应的 x_i 取值。在此基础上，进行下一步迭代。
- 近似比分析：

  因为每一步迭代都选择了期望值较大的，所以总的条件期望 $E[Z \mid x]$ 要大于随机算法的期望值 $E[Z]$：

$$\mathrm{E}[Z \mid x] \ge \mathrm{E}[Z] \ge m\left(1-2^{-K}\right)$$

- 算法分析：
  - ✧ 结果可控，在变元顺序确定的情况下能保证结果一致性；
  - ✧ 结果与变元顺序有关，没有回溯，变元的值一旦确定便不能再更改；
  - ✧ 算法复杂度较高，条件期望的计算比较耗时；
  - ✧ 可能的优化方向：使用 $branch-and-bound$ 的树搜索框架，通过维护一个全局的条件期望实现剪枝和加速搜索。

2.3 LP Rounding Algorithm

给出以下两个决策变量的定义：

Symbol	Definition	Description
y_i	*Decision Variables*	决策变量，变元 x_i 的 0/1 决策变量
q_i	*Decision Variables*	决策变量，子句 C_i 的 0/1 决策变量