

Toma de decisiones multicriterio y Electre III

Méndez Torres, José Fernando
Zuno González, Aldo Alejandro

Facultad de Ciencias, UNAM.

12 de junio del 2019

Estructura

- Introducción
- Electre III
- Definiciones
- Matriz de Concordancia
- Matriz de Credibilidad
- Destilamientos y Orden
- Ejemplo

Introducción

La toma de decisiones esta presente en nuestra vida diaria y algo común en los procesos de tomas de decisiones es tener multicriterios, la complejidad es algo usual en estos procesos, por eso los métodos que nos ayuden a ordenar nuestras decisiones tomando en cuenta los multicriterios son algo bastante importante.

Ejemplos de métodos de toma de decisiones multicriterios son los métodos ELECTRE y PROMETEE. El método ELECTRE fue creado por Bernard Roy y sus colaboradores en respuesta a la escasez de métodos de solución de toma de decisiones existentes. ELECTRE más que ser un método de solución es una filosofía de ayuda a la toma de decisión.

Introducción

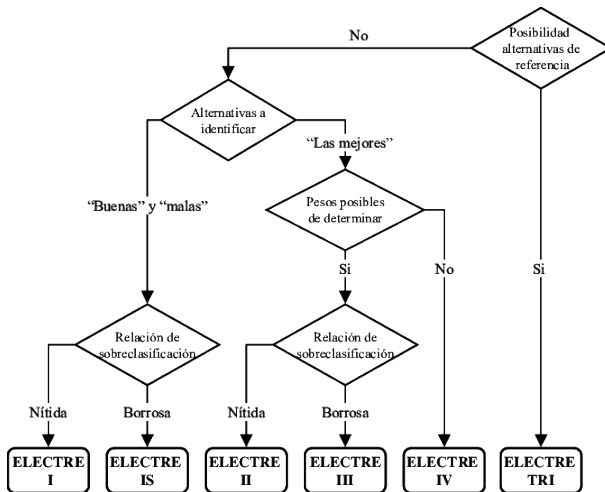


Figura: Diagrama para aplicación de los distintos Electres

EL método ELECTRE III es un método de ordenamiento. La construcción de la relación de orden requiere la definición de un índice de credibilidad, que caracteriza la credibilidad de aserción de “supera”, aSb . Se define usando el índice de concordancia y el índice de discordancia para cada criterio c_j .

Definiciones

Definition

Sean $q, p, v, w \in \mathbb{R}^n$. Definimos a

- q_j como el umbral de indiferencia del criterio c_j ,
- p_j el umbral de preferencia para el criterio c_j ,
- v_j la preferencia de veto para el criterio c_j ,
- w_j el peso del criterio c_j

donde cumplen que $v_j > p_j > q_j \geq 0$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Definiciones

Definition

Definimos a la matriz de calificaciones como $G \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ donde $m = \#(A)$ y $n = \#(C)$. A la calificación de la alternativa a con respecto al criterio j se le denotará como $g_j(a)$.

Nota: El conjunto A es el conjunto de alternativas y el conjunto C es el conjunto de criterios.

Matriz de Concordancia

Para este método, haremos uso de una matriz C de concordancia definida de la siguiente manera:

$$C(a, b) = \frac{\sum_{j=1}^n w_j C_j(a, b)}{\sum_{j=1}^n w_j}; \quad \forall a, b \in A$$

donde

$$C_j(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } g_j(a) + q_j \geq g_j(b) \\ 0, & \text{si } g_j(a) + p_j \leq g_j(b) \\ \frac{g_j(a) + p_j - g_j(b)}{p_j - q_j}, & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Matriz de Credibilidad

En este método también se manejan índices de discordancia, pero a diferencia del Electre I y II, los índices de discordancia nos servirán para construir la matriz S de Credibilidad. Dichos índices están definidos de la siguiente forma

$$D_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } g_j(a) + p_j \geq g_j(b) \\ 1, & \text{si } g_j(a) + v_j \leq g_j(b) \\ \frac{g_j(b) - g_j(a) - p_j}{v_j - p_j}, & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad ; j \in \{1, \dots, n\}; a, b \in A$$

Matriz de Credibilidad

Definimos a la matriz S de Credibilidad de la siguiente forma

$$S(a, b) = \begin{cases} C(a, b), & \text{si } D_j(a, b) \leq C(a, b) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ C(a, b) \prod_{j \in J(a, b)} \frac{1 - D_j(a, b)}{1 - C(a, b)}, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde $J(a, b) := \{j \in \{1, \dots, n\} : D_j(a, b) > C(a, b)\}$

Destilamientos y Orden

A partir de la matriz S de Credibilidad y dos constantes α y β podemos hacer los destilamientos ocupados para el ordenamiento de nuestras alternativas.

Definition

Definimos a la función s como $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$

Definition

Definimos a λ_0 y λ_k como

$$\lambda_0 := \max_{a,b \in A} \{S(a,b)\}$$

$$\lambda_k := \max_{a,b \in D_k, S(a,b) < \lambda_k - s(\lambda_k)} \{S(a,b)\}$$

Nota: Los valores recomendados por Vallee y Zielniewicz (1994) son $\alpha = -0,15$ y $\beta = 0,30$.

Destilamientos y Orden

Destilamiento descendiente:

Sea $n = 0$ el número de destilación.

Mientras que $A \neq \emptyset$:

Sea $k = 0$ y $D_k = A$

Mientras que $\#(D_k) \neq 1$:

Definimos a la matriz T y al vector Q como

$$T(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } S(a, b) > \lambda_k - s(\lambda_k) \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$Q(a) = \sum_{j \in A} T(a, j) - \sum_{j \in A} T(j, a)$$

Si $\max_{a, b \in A} \{T(a, b)\} = 0$, asignar a D_k el orden n , sea $A = A \setminus D_k$,
 $k = k + 1$ y $n = n + 1$.

Destilamientos y Orden

Continuación del destilamiento descendiente:

Si $\max_{a,b \in A} \{T(a,b)\} > 0$ y $\#(D_k) = 1$, asigne al único elemento de D_k el orden n , sea $A = A \setminus D_k$, $k = k + 1$ y $n = n + 1$.

En otro caso, sea $k = k + 1$ y $D_k = \operatorname{argmax}_{a \in A} \{Q(a)\}$ y redefina T y Q .
Obtenemos el orden con $O(a) = 1 + \max_y \{\operatorname{preorden}(y)\} - \operatorname{preorden}(a)$.
FIN.

El destilamiento ascendente es análogo, sólo que en lugar de maximizar en cada iteración, se quiere minimizar y no se invierte el orden al final del algoritmo.

Destilamientos y Orden

Para definir un orden tras tener los destilamientos, se puede definir un orden medio como en Electre II.

$$m(a) = \frac{1}{2}(\text{ordenamiento ascendente}(a) + \text{ordenamiento descendente}(a))$$

Ejemplo

Consideremos que anualmente se hace mantenimiento al sistema eléctrico de la ciudad. Para llevar a cabo dicho mantenimiento, se toma en cuenta los siguientes criterios.

- $F :=$ Costo e ingresos financieros,
- $SD :=$ Consecuencias de la mala implementación del proyecto,
- $SC :=$ Contribución al plan de negocios,
- $RM :=$ Riesgo de daños por desastres naturales,
- $EN :=$ Acceso a los recursos.

Ejemplo

Para esto, el gobierno cuenta con 5 proyectos distintos, de los cuales sólo uno puede llevarse a cabo. Para esto, se definió la siguiente matriz de calificaciones.

	F	SD	SC	RM	EN
Proyecto1	-14	90	0	40	100
Proyecto2	129	100	0	0	0
Proyecto3	-10	50	0	10	100
Proyecto4	44	90	0	5	20
Proyecto5	-14	100	0	20	40

Ejemplo

Note que el criterio SC no afecta en mucho a la matriz de calificaciones, ya que todas sus entradas son cero.

A continuación definiremos los vectores p, q, v, w .

$$p = (50, 24, 1, 24, 20)$$

$$q = (25, 16, 0, 12, 10)$$

$$v = (100, 60, 2, 48, 90)$$

$$w = (1, 1, 1, 1, 1)$$

Ejemplo

Veamos como podemos obtener las entradas de la matriz C . Obtengamos la entrada $C(2,5)$.

$$C_1(2,5) = 1, \text{ ya que } 129 + 25 \geq -14,$$

$$C_2(2,5) = 1, \text{ ya que } 100 + 16 \geq 100,$$

$$C_3(2,5) = 1, \text{ ya que } 0 + 0 \geq 0,$$

$$C_4(2,5) = \frac{24 + 0 - 20}{24 - 12} = \frac{1}{3}, \text{ ya que } 0 + 12 \not\geq 20 \text{ y } 0 + 24 \not\geq 20,$$

$$C_5(2,5) = 0, \text{ ya que } 0 + 30 \leq 40.$$

$$\Rightarrow C(2,5) = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0}{1 + 1 + 1 + 1 + 1} \approx 0,667$$

Ejemplo

De aquí obtendremos que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 1 & 0,8 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,8 & 0,8 & 0,667 \\ 0,6 & 0,6 & 1 & 0,6 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 & 0,8 & 1 & 0,75 \\ 0,667 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Aplicando lo visto en las páginas 9 y 10, obtenemos la matriz S de Credibilidad.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,8 & 0,667 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,6 & 0,8 \\ 0,214 & 0,8 & 0,571 & 1 & 0,75 \\ 0,667 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Al hacer los destilamientos descendiente y ascendiente respectivamente obtenemos lo siguiente:

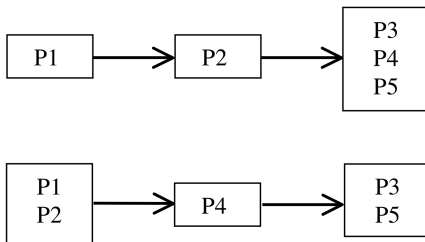


Figura: Destilamientos descendiente y ascendiente

Ejemplo

Finalmente podemos hacer un ordenamiento medio y obtenemos que en primera posición se encuentra el proyecto 1, en segundo lugar el proyecto 2, en tercero el proyecto 3 y finalmente en cuarto el proyecto 3 y 5.

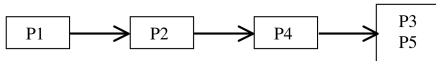


Figura: Ordenamiento final

- Buchanan, J. (1999). PROJECT RANKING USING ELECTRE III. 10 de junio del 2019, de ResearchGate Sitio web: https://www.researchgate.net/publication/240195234_Project_ranking_using_Electre_III
- Cid, G. (2015). APLICACIÓN DEL MÉTODO ELECTRE III PARA EVALUAR ALTERNATIVAS Y ASIGNAR PRIORIDADES DE TRANSFERENCIA DE PRODUCTOS EN UNA COMPAÑÍA FARMACÉUTICA. 11 de junio del 2019, de IPN Sitio web: <http://148.204.210.201/tesis/1437068515176TESISGildardo.pdf>
- Ehrgott, M. & Figueroa, J. (2005). MULTIPLE CRITERIA DECISION ANALYSIS: STATE OF THE ART SURVEYS. USA: Springer.