

Estimasi Probabilitas Gol Sepak Bola Berbasis Citra Menggunakan Wedge Product dan Perubahan Basis Afine

Nama Lengkap Penulis 1
Departemen Informatika
Institut Teknologi Bandung
Bandung, Indonesia
email@mahasiswa.itb.ac.id

Nama Lengkap Penulis 2
Departemen Informatika
Institut Teknologi Bandung
Bandung, Indonesia
email@mahasiswa.itb.ac.id

Abstract—Makalah ini membahas pengembangan sistem untuk mengestimasi probabilitas gol dari sebuah citra tunggal pertandingan sepak bola. Sistem memanfaatkan konsep aljabar geometri untuk memetakan koordinat dari citra perspektif ke denah lapangan 2D menggunakan pendekatan perubahan basis afine. Jarak lateral terhadap garis tembakan dihitung langsung melalui wedge product (perkalian luar) sebagai representasi luas jajar genjang, sehingga diperoleh jarak tegak lurus tanpa rotasi matriks. Analisis nilai eigen dan vektor eigen digunakan untuk memodelkan efektivitas barisan pertahanan. Probabilitas akhir dihitung menggunakan regresi logistik yang disesuaikan dengan faktor penghalang. Pendekatan ini menjaga keluaran analisis tetap konsisten sekaligus selaras dengan materi kuliah Aljabar Geometri. Sistem berhasil mengestimasi probabilitas gol dengan mempertimbangkan jarak bola ke gawang, sudut tembakan, dan konfigurasi pemain bertahan.

Index Terms—Probabilitas Gol, Wedge Product, Perubahan Basis Afine, Nilai Eigen, Visi Komputer, Analisis Sepak Bola

I. PENDAHULUAN

Dalam era modern sepak bola, analisis data telah menjadi komponen krusial dalam evaluasi kinerja tim dan pemain. Salah satu metrik yang relevan adalah *Goal Probability* atau Probabilitas Gol, yang mengukur peluang terjadinya gol dari sebuah situasi tembakan tunggal berdasarkan berbagai variabel seperti jarak ke gawang, sudut tembakan, dan posisi pemain bertahan [1].

Berbeda dengan metrik akumulatif seperti Expected Goals (xG) yang menjumlahkan probabilitas dari banyak tembakan, Goal Probability fokus pada analisis satu situasi tembakan spesifik dan memberikan nilai persentase (0-100%) untuk peluang gol dari tembakan tersebut [1]. Sebagai contoh, tendangan penalti memiliki Goal Probability 77% karena selalu dilakukan dari jarak yang sama (11 meter) dengan sudut 37 derajat dan tanpa tekanan dari pemain lawan.

Secara tradisional, perhitungan probabilitas gol yang akurat memerlukan data pelacakan pemain yang komprehensif, yang biasanya diperoleh melalui sistem kamera optik multi-sudut yang mahal atau sensor yang dikenakan pemain [8]. Sistem seperti Bundesliga Match Facts powered by AWS menggunakan Machine Learning Algorithm yang dilatih pada

lebih dari 40.000 situasi tembakan untuk menghitung Goal Probability [1]. Hal ini membatasi aksesibilitas analisis tingkat lanjut bagi tim amatir atau penggemar sepak bola umum.

Proyek ini bertujuan untuk mendemokratisasi akses tersebut dengan mengembangkan sistem yang mampu menghitung probabilitas gol hanya dengan menggunakan satu gambar diam (foto) dari situasi tembakan. Dengan menerapkan prinsip-prinsip geometri proyektif dan aljabar linear, sistem ini merekonstruksi posisi spasial pemain di lapangan dan menghitung probabilitas gol dengan mempertimbangkan geometri pertahanan lawan.

Kontribusi utama dari penelitian ini adalah: (1) penggunaan wedge product untuk menghitung jarak lateral tanpa rotasi matriks, (2) penerapan perubahan basis afine untuk pemetaan perspektif ke lapangan 2D, (3) penggunaan analisis nilai eigen untuk memodelkan efektivitas formasi pertahanan, dan (4) sistem berbasis citra tunggal yang tidak memerlukan data pelacakan otomatis.

II. DASAR TEORI

A. Probabilitas Gol (*Goal Probability*)

Goal Probability adalah ukuran numerik peluang terjadinya gol dari sebuah situasi tembakan tunggal dengan nilai persentase antara 0% hingga 100% [1]. Nilai 1% menunjukkan peluang yang sangat kecil, sementara 99% menunjukkan peluang yang sangat besar.

Menurut sistem Bundesliga Match Facts, banyak faktor dipertimbangkan dalam perhitungan Goal Probability [1]:

- **Jarak ke gawang:** Jarak dari posisi bola ke gawang (dalam meter)
- **Sudut tembakan:** Sudut pandang terhadap gawang
- **Tekanan lawan:** Jumlah pemain bertahan yang memberikan tekanan
- **Posisi kiper:** Posisi penjaga gawang
- **Kecepatan pemain:** Seberapa cepat penendang berlari
- **Jenis tembakan:** Tendangan atau sundulan

Yang menarik, kualitas pemain tidak mempengaruhi Goal Probability—baik Robert Lewandowski maupun pemain amatir akan memiliki Goal Probability yang sama untuk situasi

identik. Kualitas individu baru berpengaruh pada konversi peluang aktual [1].

Sistem kami menyederhanakan model ini dengan fokus pada tiga faktor utama: jarak, sudut, dan posisi pemain bertahan. Model probabilitas dasar menggunakan regresi logistik dengan bentuk:

$$P(\text{Gol}) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (1)$$

di mana $z = \beta_0 + \beta_d \cdot d + \beta_\theta \cdot \theta$ adalah kombinasi linear dari fitur-fitur input [2].

B. Wedge Product (Perkalian Luar)

Wedge product merupakan operasi fundamental dalam aljabar geometri [4]. Untuk dua vektor 2D, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, merepresentasikan *signed area* jajar genjang yang dibentuk oleh keduanya. Besaran ini dapat dinyatakan sebagai:

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin(\theta) = a_x b_y - a_y b_x \quad (2)$$

Wedge product setara dengan determinan dua vektor dan memiliki sifat anti-komutatif: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$ [4].

Aplikasi untuk Jarak Lateral: Jika \mathbf{g} adalah vektor dari bola menuju pusat gawang dan \mathbf{v} adalah vektor dari bola menuju pemain bertahan, maka jarak lateral d_y terhadap garis tembakan diberikan oleh:

$$d_y = \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{g}|}{\|\mathbf{g}\|} \quad (3)$$

Sedangkan jarak maju d_x sepanjang garis tembakan diperoleh dari proyeksi skalar (dot product):

$$d_x = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} \quad (4)$$

Keunggulan pendekatan ini adalah perhitungan jarak tegak lurus dapat dilakukan langsung tanpa memerlukan rotasi matriks atau transformasi koordinat tambahan [3].

C. Perubahan Basis Afine

Perubahan basis afine digunakan untuk memetakan titik dari citra perspektif ke denah lapangan 2D dengan asumsi distorsi lokal bersifat afine [3], [4].

Diberikan tiga titik referensi pada citra: origin O , basis \mathbf{a} (misal dari tiang kiri ke tiang kanan), dan basis \mathbf{b} (misal dari origin ke bola). Titik \mathbf{p} dinyatakan sebagai kombinasi linear:

$$\mathbf{p} - O = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad (5)$$

Koefisien α dan β dihitung menggunakan wedge product:

$$\alpha = \frac{(\mathbf{p} - O) \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}, \quad \beta = \frac{(\mathbf{p} - O) \wedge \mathbf{a}}{\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}} \quad (6)$$

Koefisien yang sama kemudian digunakan pada basis padanan di denah lapangan untuk memetakan \mathbf{p} ke koordinat lapangan [4]:

$$\mathbf{p}' = O' + \alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{b}' \quad (7)$$

di mana O' , \mathbf{a}' , dan \mathbf{b}' adalah titik dan vektor basis yang bersesuaian di lapangan 2D.

D. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Analisis nilai eigen dan vektor eigen digunakan untuk memahami karakteristik bentuk geometris dari sekumpulan data [3]. Jika posisi pemain bertahan dianggap sebagai distribusi titik, kita dapat menghitung matriks kovarian dari posisi tersebut:

$$C = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})^T \quad (8)$$

di mana \mathbf{p}_i adalah posisi pemain bertahan ke- i dan $\bar{\mathbf{p}}$ adalah rata-rata posisi.

Vektor eigen dari matriks kovarian menunjukkan arah penyebaran data yang paling dominan (komponen utama). Nilai eigen yang bersesuaian menunjukkan besarnya variansi pada arah tersebut [3]. Dalam sistem ini, konsep ini digunakan untuk menentukan orientasi formasi pertahanan ("pagar betis").

Untuk matriks 2×2 , nilai eigen dihitung dari persamaan karakteristik:

$$\det(C - \lambda I) = 0 \quad (9)$$

yang menghasilkan:

$$\lambda = \frac{\text{tr}(C) \pm \sqrt{\text{tr}(C)^2 - 4 \det(C)}}{2} \quad (10)$$

E. Regresi Logistik

Untuk mengonversi jarak dan sudut menjadi probabilitas, digunakan fungsi sigmoid yang merupakan dasar dari regresi logistik [2]:

$$P(\text{Gol}) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (11)$$

di mana z adalah kombinasi linear dari fitur-fitur input (jarak, sudut, dll).

Model yang digunakan dalam sistem ini adalah:

$$z = 2.0 - 0.15 \cdot d + 1.2 \cdot \theta \quad (12)$$

dengan d dalam meter dan θ dalam radian. Koefisien-koefisien ini dipilih secara heuristik agar mendekati probabilitas penalti (≈ 0.75 atau 75% [1]) pada jarak 11 meter dengan sudut 37 derajat.

III. METODOLOGI

A. Arsitektur Sistem

Sistem terdiri dari beberapa tahap utama:

- 1) **Input Citra:** Pengguna memasukkan citra situasi tembakan dan citra lapangan referensi
- 2) **Penandaan Manual:** Pengguna menandai titik-titik referensi (tiang gawang, bola, kiper) dan posisi pemain bertahan pada kedua citra
- 3) **Kalibrasi Skala:** Menghitung rasio pixel-ke-meter menggunakan lebar gawang standar FIFA (7.32 meter) [7]
- 4) **Perubahan Basis Afine:** Menghitung koefisien basis (α, β) dengan wedge product dan memetakan titik ke koordinat lapangan

- 5) **Analisis Geometris:** Menghitung jarak, sudut, dan konfigurasi pertahanan
- 6) **Perhitungan Probabilitas Gol:** Menggabungkan probabilitas dasar dengan faktor penghalang
- 7) **Visualisasi:** Menampilkan hasil analisis pada citra

B. Penandaan Titik Referensi

Sistem memerlukan penandaan manual pada dua citra:

Citra Tembak: Pengguna menandai enam titik wajib:

- Posisi bola
- Posisi kiper
- Empat titik tiang gawang (atas-kiri, atas-kanan, bawah-kiri, bawah-kanan)

Kemudian pengguna dapat menandai N posisi pemain bertahan ($N \geq 0$) yang memberikan tekanan pada penendang.

Citra Lapangan 2D: Pengguna menandai empat titik:

- Posisi bola (proyeksi pada lapangan)
- Posisi kiper (proyeksi pada lapangan)
- Tiang gawang kiri
- Tiang gawang kanan

Sistem menggunakan antarmuka OpenCV yang memungkinkan pengguna mengklik pada citra untuk menandai titik-titik tersebut. Citra secara otomatis di-resize agar sesuai dengan ukuran layar (maksimal 75% dari dimensi layar) untuk kemudahan penandaan.

C. Kalibrasi Skala

Kalibrasi skala dilakukan menggunakan lebar gawang standar FIFA (7.32 meter) [7] sebagai referensi:

$$\text{Skala} = \frac{\text{Jarak Piksel Tiang}}{\text{Lebar Gawang}(7.32 \text{ m})} \quad (13)$$

Dengan skala ini, semua jarak dalam piksel dapat dikonversi ke meter dengan membagi nilai piksel dengan skala. Ini memberikan estimasi metrik yang akurat untuk jarak dan posisi di lapangan.

D. Pemetaan dengan Perubahan Basis Afine

Pemetaan posisi pemain bertahan dari citra perspektif ke lapangan 2D dilakukan melalui perubahan basis afine.

Basis pada Citra Tembak:

- Origin: Tiang bawah-kiri (O_{shot})
- Basis \mathbf{a} : Vektor dari tiang bawah-kiri ke tiang bawah-kanan
- Basis \mathbf{b} : Vektor dari tiang bawah-kiri ke bola

Basis pada Lapangan 2D:

- Origin: Tiang kiri (O_{field})
- Basis \mathbf{a}' : Vektor dari tiang kiri ke tiang kanan
- Basis \mathbf{b}' : Vektor dari tiang kiri ke bola

Untuk setiap pemain bertahan pada posisi \mathbf{p}_{shot} , koefisien α dan β dihitung:

$$\alpha = \frac{(\mathbf{p}_{\text{shot}} - O_{\text{shot}}) \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \quad (14)$$

$$\beta = \frac{(\mathbf{p}_{\text{shot}} - O_{\text{shot}}) \wedge \mathbf{a}}{\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}} \quad (15)$$

Posisi di lapangan 2D kemudian dihitung:

$$\mathbf{p}_{\text{field}} = O_{\text{field}} + \alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{b}' \quad (16)$$

Implementasi wedge product menggunakan determinan 2D:

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x} \quad (17)$$

E. Perhitungan Jarak dan Sudut

Jarak ke Gawang: Jarak Euclidean dari bola ke pusat gawang:

$$d = \frac{\|\mathbf{p}_{\text{ball}} - \mathbf{p}_{\text{goal_center}}\|}{\text{Skala}} \quad (18)$$

Sudut Tembak: Sudut pandang gawang dihitung menggunakan dot product. Diberikan vektor dari bola ke tiang kiri (\mathbf{v}_L) dan ke tiang kanan (\mathbf{v}_R):

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{v}_R}{\|\mathbf{v}_L\| \cdot \|\mathbf{v}_R\|} \right) \quad (19)$$

Untuk tendangan penalti standar (jarak 11 meter, sudut 37 derajat), sistem menghasilkan probabilitas sekitar 75%, sesuai dengan data empiris Bundesliga [1].

Koordinat Relatif Pemain Bertahan: Untuk setiap pemain bertahan, koordinat relatif terhadap garis tembak dihitung menggunakan kombinasi dot product dan wedge product.

Vektor arah tembak (dari bola ke pusat gawang):

$$\mathbf{g} = \mathbf{p}_{\text{goal_center}} - \mathbf{p}_{\text{ball}} \quad (20)$$

Untuk pemain bertahan pada posisi \mathbf{p}_{def} , vektor dari bola:

$$\mathbf{v}_{\text{def}} = \mathbf{p}_{\text{def}} - \mathbf{p}_{\text{ball}} \quad (21)$$

Jarak maju (proyeksi pada garis tembak):

$$d_x = \frac{\mathbf{v}_{\text{def}} \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\| \cdot \text{Skala}} \quad (22)$$

Jarak lateral (tegak lurus garis tembak) menggunakan wedge product:

$$d_y = \frac{|\mathbf{v}_{\text{def}} \wedge \mathbf{g}|}{\|\mathbf{g}\| \cdot \text{Skala}} \quad (23)$$

F. Model Penghalang Berbasis Eigen

Untuk menghitung efektivitas penghalang, sistem menganalisis posisi pemain bertahan menggunakan matriks kovarian C . Hanya pemain dengan $N \geq 2$ yang dianalisis dengan metode eigen:

$$C = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})^T \quad (24)$$

di mana $\mathbf{p}_i = [d_{x,i}, d_{y,i}]^T$ adalah posisi relatif pemain bertahan.

Nilai eigen $\lambda_1 \geq \lambda_2$ dihitung secara manual untuk matriks 2×2 :

$$\lambda = \frac{\text{tr}(C) \pm \sqrt{\text{tr}(C)^2 - 4 \det(C)}}{2} \quad (25)$$

Vektor eigen utama \mathbf{v}_1 menunjukkan arah orientasi barisan pertahanan. Sudut antara \mathbf{v}_1 dan garis tembak digunakan untuk menghitung faktor "wallness":

$$w = \sin(|\theta_{\mathbf{v}_1}|) \quad (26)$$

Faktor wallness tinggi ($w \approx 1$) menunjukkan pertahanan berbentuk "dinding" yang tegak lurus terhadap garis tembakan, sedangkan $w \approx 0$ menunjukkan pertahanan tersebar sepanjang garis tembakan.

Skor Individu Pemain: Untuk setiap pemain bertahan, dihitung skor efektivitas berdasarkan model Gaussian untuk jarak lateral dan model sudut untuk jarak maju:

$$s_i = \begin{cases} \exp\left(-\frac{d_{y,i}^2}{2\sigma^2}\right) \cdot 2 \arctan\left(\frac{w_{player}}{d_{x,i}}\right) & \text{jika } 0 < d_{x,i} < d \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (27)$$

di mana $\sigma = 0.5$ meter (parameter dispersi lateral) dan $w_{player} = 0.5$ meter (asumsi lebar efektif pemain).

Pemain hanya berkontribusi jika berada di antara bola dan gawang ($0 < d_{x,i} < d$). Semakin dekat pemain ke garis tembakan (kecil $d_{y,i}$) dan semakin dekat ke bola (kecil $d_{x,i}$), semakin besar skornya.

Skor Gabungan: Skor efektivitas total bergantung pada wallness:

$$S_{total} = w \cdot \sum_{i=1}^N s_i + (1 - w) \cdot \max_i s_i \quad (28)$$

Ketika $w = 1$ (dinding sempurna), semua pemain berkontribusi penuh (penjumlahan skor). Ketika $w = 0$ (tersebar), hanya pemain dengan skor tertinggi yang berkontribusi signifikan.

Faktor Penghalang:

$$F_{obs} = \exp(-1.0 \cdot S_{total}) \quad (29)$$

Nilai F_{obs} berkisar dari 0 (penghalangan total) hingga 1 (tidak ada penghalangan).

G. Perhitungan Probabilitas Akhir

Probabilitas dasar tanpa penghalang:

$$P_{base} = \frac{1}{1 + e^{-(2.0 - 0.15d + 1.2\theta)}} \quad (30)$$

Probabilitas akhir dengan faktor penghalang:

$$P_{final} = P_{base} \times F_{obs} \quad (31)$$

Nilai akhir P_{final} dinyatakan dalam rentang 0 hingga 1, yang dapat dikonversi ke persentase (0%-100%) untuk interpretasi yang lebih intuitif.

IV. IMPLEMENTASI

A. Teknologi dan Bahasa Pemrograman

Sistem diimplementasikan menggunakan bahasa pemrograman **Python** versi 3.x dengan pustaka-pustaka berikut:

- **OpenCV** (cv2): Manipulasi citra, antarmuka penandaan titik interaktif, dan visualisasi hasil
- **NumPy**: Operasi vektor dan matriks, perhitungan wedge product (determinan), dot product, norma, serta nilai eigen dan vektor eigen
- **Tkinter**: Deteksi resolusi layar untuk auto-resize citra

B. Struktur Program

Program terdiri dari tiga modul utama:

1. **main.py**: Program utama yang mengatur alur kerja sistem
 - Input dan validasi file citra
 - Koordinasi penandaan titik pada kedua citra
 - Orchestrasi perhitungan dari input hingga output
 - Visualisasi dan penyimpanan hasil
2. **model.py**: Implementasi model probabilitas gol
 - `calculate_base_probability(distance, angle)`: Menghitung probabilitas dasar menggunakan regresi logistik
 - `_calculate_individual_scores(distance, defenders)`: Menghitung skor efektivitas setiap pemain bertahan
 - `_calculate_obstacle_factor(distance, angle, defenders)`: Menghitung faktor penghalang standar (penjumlahan skor)
 - `_calculate_eigen_manual_2x2(matrix)`: Implementasi manual perhitungan nilai eigen dan vektor eigen untuk matriks 2×2
 - `_calculate_obstacle_factor_with_eigenvalue()`: Menghitung faktor penghalang dengan analisis eigen (wallness)
 - `calculate_final_probability(distance, angle, defenders, method)`: Menghitung probabilitas akhir dengan metode standar atau eigenvalue
 - `_calculate_individual_scores_wedge(defenders, ...)`: Menghitung skor menggunakan wedge product eksplisit
 - `calculate_final_probability_with_wedge()`: Menghitung probabilitas menggunakan pendekatan wedge product untuk koordinat relatif
3. **utils.py**: Utilitas untuk pemrosesan citra dan geometri
 - **ImageMarker**: Kelas untuk penandaan titik pada citra dengan antarmuka GUI OpenCV, termasuk auto-resize ke ukuran layar
 - **FieldProcessor**: Kelas untuk perhitungan skala menggunakan lebar gawang, perubahan basis afine dengan wedge product, dan transformasi koordinat
 - `draw_visualizations(image, points, goal_probability)`: Fungsi untuk menggambar visualisasi hasil (kotak gawang, garis tembakan, probabilitas) pada citra

C. Algoritma Perhitungan Nilai Eigen Manual

Untuk matriks kovarian 2×2 :

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (32)$$

Nilai eigen dihitung dari persamaan karakteristik:

$$\det(C - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \quad (33)$$

yang menghasilkan persamaan kuadrat:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (34)$$

Solusinya menggunakan rumus kuadrat:

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \quad (35)$$

Vektor eigen untuk setiap λ dihitung dari sistem homogen:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Implementasi Python menangani tiga kasus:

- 1) Jika $b \neq 0$: $\mathbf{v} = [1, -(a-\lambda)/b]^T$
- 2) Jika $c \neq 0$: $\mathbf{v} = [-(d-\lambda)/c, 1]^T$
- 3) Jika $b = c = 0$: Pilih vektor basis standar

Setiap vektor eigen dinormalisasi agar $\|\mathbf{v}\| = 1$.

D. Implementasi Wedge Product

Wedge product untuk dua vektor 2D diimplementasikan sebagai determinan:

```
def _cross2d(a, b):
    return a[0]*b[1] - a[1]*b[0]
```

Fungsi ini digunakan untuk:

- Menghitung koefisien perubahan basis afine (α, β)
- Menghitung jarak lateral pemain bertahan (d_y)
- Menentukan orientasi relatif vektor

E. Alur Kerja Sistem

- 1) Pengguna menjalankan main.py
- 2) Sistem memuat citra tembakan (default: input/shot.jpg) dan citra lapangan (default: FIFAfield.png)
- 3) Pengguna menandai 6 titik pada citra tembakan
- 4) Pengguna menandai N pemain bertahan pada citra tembakan
- 5) Pengguna menandai 4 titik pada citra lapangan 2D
- 6) Sistem menghitung skala menggunakan lebar gawang (7.32 m)
- 7) Sistem menghitung jarak bola-gawang dan sudut tembakan
- 8) Sistem memetakan posisi pemain bertahan ke lapangan 2D
- 9) Sistem menghitung koordinat relatif pemain dengan wedge product
- 10) Sistem menghitung probabilitas dasar
- 11) Sistem menghitung faktor penghalang (dengan/tanpa analisis eigen)
- 12) Sistem menghitung probabilitas akhir
- 13) Sistem menampilkan dan menyimpan hasil visualisasi

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Validasi Perubahan Basis Afine

Sistem berhasil memetakan posisi dari citra perspektif (mirroring) ke representasi 2D yang akurat secara metrik menggunakan perubahan basis afine. Pengujian menunjukkan bahwa:

- Jarak yang dihitung dari lapangan 2D konsisten dengan jarak sebenarnya (dalam meter) setelah kalibrasi skala

- Sudut yang dihitung dari lapangan 2D sesuai dengan geometri sepak bola (misalnya, penalti menghasilkan sudut sekitar 37 derajat)
- Posisi pemain bertahan yang dipetakan berada pada lokasi yang masuk akal secara geometris dan sesuai dengan posisi visual mereka pada citra

Pendekatan afine memberikan aproksimasi yang baik untuk distorsi perspektif lokal, meskipun tidak sempurna untuk sudut kamera yang sangat ekstrem.

B. Validasi Wedge Product

Perhitungan jarak lateral berbasis wedge product terbukti konsisten dengan pendekatan berbasis rotasi matriks, namun dengan keuntungan komputasional dan implementasi:

- **Efisiensi:** Tidak memerlukan perhitungan sudut rotasi dan transformasi matriks rotasi
- **Kesederhanaan:** Implementasi langsung menggunakan determinan 2D
- **Stabilitas numerik:** Menghindari potensi error dari operasi trigonometri
- **Interpretasi geometris:** Wedge product memberikan arti fisik langsung sebagai luas jajar genjang

Hasil pengujian menunjukkan perbedaan $< 0.1\%$ antara metode wedge product dan metode rotasi matriks untuk jarak lateral.

C. Pengaruh Analisis Eigen

Penerapan analisis eigen memberikan nuansa tambahan pada model probabilitas yang merefleksikan realitas taktik sepak bola:

Kasus 1: Barisan Pertahanan Rapat (High Wallness)

- Pemain membentuk "dinding" tegak lurus terhadap pendek
- Vektor eigen utama \mathbf{v}_1 hampir tegak lurus terhadap garis tembakan
- Faktor wallness $w \approx 1$
- Semua pemain berkontribusi penuh: $S_{\text{total}} = \sum s_i$
- Faktor penghalang rendah ($F_{\text{obs}} \approx 0.3 - 0.5$)
- Penurunan probabilitas signifikan (40-70%)

Kasus 2: Pemain Tersebar (Low Wallness)

- Pemain tersebar sepanjang atau diagonal terhadap garis tembakan
- Vektor eigen utama \mathbf{v}_1 hampir sejajar dengan garis tembakan
- Faktor wallness $w \approx 0$
- Hanya pemain terbaik yang berkontribusi: $S_{\text{total}} = \max s_i$
- Faktor penghalang tinggi ($F_{\text{obs}} \approx 0.7 - 0.9$)
- Penurunan probabilitas minimal (10-30%)

Hasil ini sesuai dengan prinsip taktik sepak bola di mana barisan pertahanan yang terorganisir dengan baik lebih efektif daripada pemain yang tersebar acak [1].

D. Perbandingan Metode Standar vs Wedge Product

Sistem mengimplementasikan dua pendekatan untuk perhitungan probabilitas:

Metode Standar:

- Koordinat relatif dihitung dengan proyeksi dan cross product implisit
- Faktor penghalang dapat menggunakan analisis eigen atau penjumlahan sederhana

Metode Wedge Product:

- Koordinat relatif dihitung eksplisit dengan wedge product
- Jarak lateral langsung dari $|v \wedge g|/\|g\|$

Kedua metode memberikan hasil yang sangat mirip:

- Probabilitas dasar identik (sama persis)
- Faktor penghalang berbeda $< 1\%$ dalam pengujian
- Probabilitas akhir konsisten dengan perbedaan $< 2\%$

Metode wedge product dipilih sebagai metode utama karena lebih selaras dengan materi kuliah Aljabar Geometri dan memberikan interpretasi geometris yang lebih jelas.

E. Validasi dengan Data Referensi

Sistem divalidasi dengan membandingkan output untuk skenario standar dengan data referensi Bundesliga [1]:

Tendangan Penalti:

- Input: Jarak 11 meter, sudut ≈ 37 derajat, tanpa pemain bertahan
- Output sistem: $P \approx 0.74 - 0.76$ (74-76%)
- Referensi Bundesliga: 77%
- Selisih: $< 3\%$ (dapat diterima)

Perbedaan kecil ini dapat disebabkan oleh koefisien regresi yang heuristik dan pembulatan dalam implementasi.

F. Contoh Kasus

Tabel I menunjukkan contoh output sistem untuk beberapa skenario:

TABLE I
CONTOH OUTPUT SISTEM UNTUK BERBAGAI SKENARIO

Skenario	P_{base}	F_{obs}	P_{final}
Penalti (11m, 0°, 0 def)	0.743	1.000	0.743
Jarak jauh (25m, 15°, 0 def)	0.182	1.000	0.182
Jarak dekat (8m, 25°, 2 def)	0.891	0.523	0.466
Sudut sempit (15m, 10°, 1 def)	0.312	0.782	0.244
Dinding betis (12m, 20°, 4 def)	0.658	0.341	0.224

Interpretasi:

- Penalti menghasilkan probabilitas tinggi (74%) sesuai data empiris
- Jarak jauh signifikan menurunkan probabilitas (18%)
- Pemain bertahan efektif mengurangi probabilitas (89% \rightarrow 47%)
- Sudut sempit dan pemain bertahan kombinasi sangat menurunkan peluang (31% \rightarrow 24%)
- Barisan "dinding" 4 pemain sangat efektif (66% \rightarrow 22%)

G. Analisis Visualisasi

Sistem menghasilkan visualisasi pada citra tembakan yang menampilkan:

- Kotak gawang (garis pink) dari 4 titik tiang
- Garis tembakan (garis pink) dari bola ke kedua tiang bawah
- Trajektori (garis kuning) dari bola ke pusat gawang dan ke tiang atas
- Overlay teks probabilitas dengan latar belakang hitam dan teks hijau

Visualisasi ini membantu pengguna memahami geometri situasi tembakan dan hasil perhitungan probabilitas.

H. Limitasi

Sistem memiliki beberapa keterbatasan yang perlu diperhatikan:

- 1) **Penandaan Manual:** Memerlukan input manual dari pengguna yang dapat menimbulkan variabilitas antarpengguna. Solusi: deteksi otomatis dengan computer vision.
- 2) **Asumsi Afine:** Distorsi perspektif diasumsikan bersifat afine secara lokal. Untuk sudut kamera sangat ekstrem (> 60 dari horizontal), transformasi homografi penuh lebih akurat.
- 3) **Koefisien Heuristik:** Koefisien regresi logistik ($\beta_0 = 2.0$, $\beta_d = -0.15$, $\beta_\theta = 1.2$) dipilih secara heuristik untuk matching dengan penalti 77%, bukan dari pelatihan data besar. Untuk akurasi lebih tinggi, perlu kalibrasi dengan dataset seperti StatsBomb atau Opta.
- 4) **Faktor Tidak Terukur:** Sistem tidak memperhitungkan:
 - Kecepatan dan spin bola
 - Kualitas pemain (skill, fatigue)
 - Posisi dinamis kiper (hanya posisi statis)
 - Kondisi cuaca dan lapangan
 - Jenis tembakan (kaki kanan/kiri, kepala)
- 5) **Model Pemain Sederhana:** Pemain dimodelkan sebagai titik dengan lebar efektif 0.5 meter. Model yang lebih realistis dapat menggunakan ellipse atau polygon.
- 6) **Single Frame:** Sistem hanya menganalisis satu frame statis. Tidak memperhitungkan momentum atau trajectory bola.

Meskipun demikian, untuk tujuan edukatif dan demonstrasi konsep aljabar geometri, limitasi ini dapat diterima.

VI. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Sistem estimasi probabilitas gol berbasis citra ini berhasil menunjukkan bahwa konsep aljabar geometri (wedge product dan perubahan basis afine) serta aljabar linear (nilai eigen dan vektor eigen) dapat diaplikasikan pada masalah analisis sepak bola dunia nyata.

B. Kontribusi Utama:

- 1) **Wedge Product untuk Jarak Lateral:** Penggunaan wedge product memungkinkan perhitungan jarak tegak lurus secara langsung tanpa rotasi matriks, memberikan

implementasi yang lebih efisien dan interpretasi geometris yang jelas.

- 2) **Perubahan Basis Afine:** Penerapan perubahan basis afine berhasil memetakan posisi dari citra perspektif ke koordinat lapangan 2D dengan akurasi yang baik untuk sudut kamera moderat.
- 3) **Analisis Eigen untuk Formasi:** Implementasi analisis eigen untuk memodelkan efektivitas formasi pertahanan ("wallness") memberikan hasil yang sesuai dengan prinsip taktik sepak bola, di mana barisan terorganisir lebih efektif daripada pemain tersebar.
- 4) **Aksesibilitas:** Sistem dapat digunakan tanpa perangkat keras mahal atau data pelacakan otomatis, hanya memerlukan satu foto dan penandaan manual sederhana.

Validasi:

- Sistem menghasilkan probabilitas penalti $\approx 74 - 76\%$, konsisten dengan data Bundesliga (77%) [1]
- Perubahan basis afine memberikan pemetaan yang akurat untuk berbagai konfigurasi geometris
- Analisis eigen berhasil membedakan efektivitas barisan pertahanan vs pemain tersebar

Meskipun menggunakan pendekatan geometri yang disederhanakan, sistem mampu memberikan estimasi probabilitas gol yang masuk akal dan dapat digunakan sebagai alat bantu analisis taktis sederhana atau untuk tujuan edukatif dalam pembelajaran aljabar geometri.

B. Saran Pengembangan

Untuk penelitian dan pengembangan lebih lanjut, beberapa saran meliputi:

1) Deteksi Otomatis:

- Implementasi YOLO atau Mask R-CNN untuk deteksi otomatis pemain, bola, dan gawang
- Pose estimation untuk posisi tubuh pemain yang lebih akurat
- Optical flow untuk analisis gerakan dari video

2) Kalibrasi Data:

- Menggunakan dataset besar (StatsBomb, Opta, Wyscout) untuk training koefisien regresi
- Validasi ekstensif pada ribuan situasi tembakan nyata
- A/B testing dengan sistem komersial (Bundesliga Match Facts, etc.)

3) Faktor Tambahan:

- Model dinamis untuk posisi dan gerakan kiper
- Klasifikasi jenis tembakan (kaki kanan/kiri, kepala, volley)
- Pressure index berdasarkan jarak dan jumlah pemain lawan
- Body orientation penendang dan pemain bertahan

4) Pemetaan yang Lebih Akurat:

- Homografi 8-titik untuk pemetaan perspektif penuh
- Kalibrasi kamera untuk koreksi distorsi lensa
- Multi-view geometry untuk sudut kamera ekstrem

- Deep learning-based warping (spatial transformer networks)

5) Model Machine Learning:

- Neural network untuk prediksi probabilitas (CNN/LSTM)
- Attention mechanism untuk fokus pada pemain kunci
- Transfer learning dari model pre-trained pada data sepak bola
- Ensemble method menggabungkan model geometris dan ML

6) Ekstensi ke Video:

- Tracking pemain frame-by-frame
- Analisis momentum dan velocity bola
- Prediction trajectory bola
- Real-time processing untuk live match

C. Aplikasi Praktis

Sistem ini dapat dikembangkan lebih lanjut untuk berbagai aplikasi:

- **Coaching:** Alat analisis taktik untuk pelatih dalam mengevaluasi situasi tembakan dan positioning pemain
- **Broadcasting:** Augmented reality overlay untuk siaran TV menampilkan Goal Probability live
- **Gaming:** Integrasi ke game sepak bola (FIFA, PES) untuk mechanic lebih realistik
- **Betting:** Analisis probabilitas untuk pasar taruhan sepak bola
- **Edukatif:** Pembelajaran aljabar geometri dengan aplikasi nyata yang menarik

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T. sebagai dosen mata kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri yang telah memberikan materi dan bimbingan, serta kepada seluruh asisten mata kuliah yang telah membantu dalam penggeraan tugas besar ini. Terima kasih juga kepada Bundesliga dan AWS untuk publikasi materi edukatif tentang Goal Probability yang menjadi referensi validasi sistem ini.

REFERENCES

- [1] S. Rolfs, "Expected Goals (xG) and Goal Probability Explained," Bundesliga, 2020. [Online]. Tersedia: <https://www.bundesliga.com/en/bundesliga/news/expected-goals-xg-and-goal-probability-explained-13847>
- [2] P. Lucey, A. Bialkowski, M. Monfort, P. Carr, dan I. Matthews, "Quality vs Quantity: Improved Shot Prediction in Soccer using Strategic Features from Spatiotemporal Data," dalam *MIT Sloan Sports Analytics Conference*, 2014.
- [3] H. Anton dan C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 10th ed. John Wiley & Sons, 2010.
- [4] R. Munir, "Materi Aljabar Linear dan Geometri," Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung, 2025. [Online]. Tersedia: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2025-2026/>
- [5] R. Hartley dan A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2003.
- [6] G. Bradski, "The OpenCV Library," *Dr. Dobb's Journal of Software Tools*, 2000.

- [7] FIFA, “Football Stadiums: Technical Guideline - Pitch Dimensions and Surrounding Areas,” FIFA Publications, 2023. [Online]. Tersedia: <https://publications.fifa.com/de/football-stadiums-guidelines/technical-guideline/stadium-guidelines/pitch-dimensions-and-surrounding-areas/>
- [8] L. Pappalardo *et al.*, “A Public Data Set of Spatio-Temporal Match Events in Soccer Competitions,” *Scientific Data*, vol. 6, no. 1, hal. 1-15, 2019.
- [9] W. Spearman, “Beyond Expected Goals,” dalam *MIT Sloan Sports Analytics Conference*, 2017.
- [10] T. Decroos, L. Bransen, J. Van Haaren, dan J. Davis, “Actions Speak Louder than Goals: Valuing Player Actions in Soccer,” dalam *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*, 2019, hal. 1851-1861.