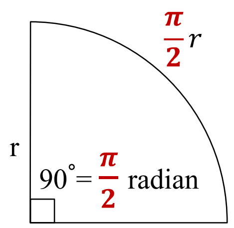
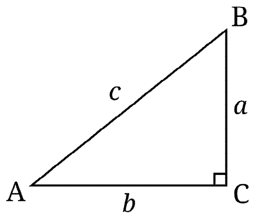
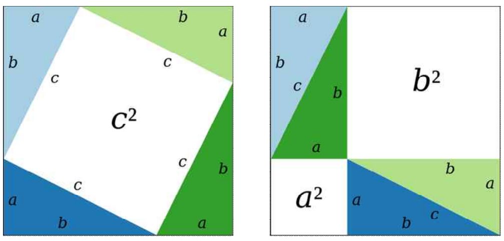
이 예습자료에서는 기하와 관련된 내용 몇 가지를 배워보겠습니다. 개념에 이미 익숙하더라도 다시 한번 **정의와 증명을 정확히 이해**한다면 이번 시간 문제를 풀이하는 데 도움이 될 것입니다. 기하학은 컴퓨터 공학의 여러 분야 중 컴퓨터 그래픽 및 수학 SW 개발(예: Octave, Matlab 등)에 대표적으로 활용됩니다.



- **직각(right angle):** - 직각은 90˚를 나타냅니다. 원을 그리며 돌아 제자리로 돌아오는 것을 한 번의 회전(turn)이라고 할 때, 한 번의 회전을 360˚로 보며, 따라서 직각은 1/4 회전에 해당합니다. 프로그래밍 언어에서는 도(˚) 단위보다 라디안 단위를 더 자주 사용하는데, 360˚는 라디안 단위로 2π에 대응되며, 90˚는 라디안 단위로 π/2 에 대응됩니다.



- **직각삼각형(right triangle):** 직각삼각형은 3개의 내각 중 하나가 직각인 삼각형을 의미합니다. 직각과 마주 보는 변(직각의 대변)을 빗변(hypotenuse)이라 하며 왼쪽 그림에서는 *c*가 빗변에 해당합니다. 또한 빗변을 제외한 다른 2개의 변을 leg라고 합니다. 이러한 3개의 변 중 **빗변이 가장 길다**는 것에 유의하세요.



$c^2 = a^2 + b^2$

- **피타고라스 정리(pythagorean theorem):** 직각 삼각형에서 빗변 길이의 제곱은 다른 두 변 길이 제곱의 합과 같음을 나타내는 정리입니다. 이에 대한 다양한 증명이 존재하는데, 여기서는 왼쪽 두 그림을 사용해 증명해 보겠습니다. 두 그림 중 왼쪽과 같이 각 변의 길이가 (a+b)인 정사각형 내에 4개의 같은 직각삼각형을 두었다고 하겠습니다.

이들 직각삼각형은 빗변의 길이가 c이고 나머지 두 변의 길이가 a, b입니다. 이러한 직각삼각형을 위 오른쪽 그림과 같이 재배치하더라도 흰색 공간의 넓이는 그대로여야 하는데, 왼쪽 그림에서 흰색 공간의 넓이가 c^2이고 오른쪽 그림에서는 $a^2 + b^2$ 이므로, $c^2 = a^2 + b^2$ 여야 합니다. **피타고라스 정리는 그 역도 참**입니다. 즉 임의의 삼각형 T의 세 변의 길이 간에 $c^2 = a^2 + b^2$ 가 성립한다면 T는 직각 삼각형입니다.

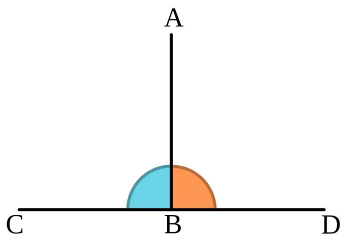
[Q] 직각삼각형에서 빗변이 아닌 다른 두 변의 길이가 각각 sqrt(2)와 sqrt(8)이라면, 빗변의 길이는 무엇인가? sqrt(n)은 n의 제곱근(square root)을 나타낸다.

10
sqrt(10)
2
8

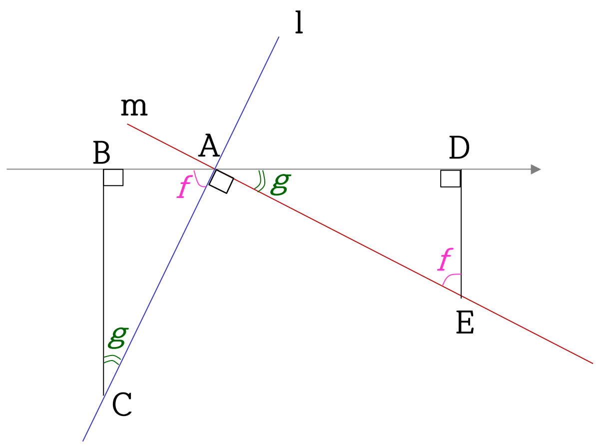
※ 이 자료에서 [Q]로 제시된 문제는 학습 후 풀이하는 온라인 퀴즈에 그대로 나오니 학습하면서 그때그때 문제를 풀어 두세요. 온라인 퀴즈에서 보기의 순서는 바뀔 수 있으니 유의하세요. (예: 보기 1이 보기 2가 되고, 보기 2가 보기 1이 될 수 있음)

[Q] 삼각형 T의 세 변의 길이가 각각 2, 2, sqrt(8) 라고 하자. T는 직각삼각형인가?

Yes
No



- **두 직선의 위치 관계 - 수직(perpendicular):** 두 직선이 만나는 각도가 직각일 때 수직으로 만난다고 하며 (혹은 직교한다고 함) 이럴 때 두 직선을 서로에 대해 수선(perpendicular line)이라 합니다. 왼쪽 그림의 예에서는 직선 AB와 CD가 수직으로 만나며, 따라서 이들은 서로에 대한 수선이 됩니다.



- **서로 수직인 직선의 기울기(slope) 간 관계:** 직선 l의 기울기가 a라고 하겠습니다. l과 수직인 다른 직선 m의 기울기는 $-\frac{1}{a}$ 입니다. 이를 다르게 말하면 서로 수직인 두 직선의 기울기를 곱하면 $a\times(-\frac{1}{a})=-1$이 됩니다. 왼쪽 그림을 활용해 이를 증명해 보겠습니다.

점 P의 좌표(coordinates)를 $(x_P,\ y_P)$라 하겠습니다. 위 그림에서 수직인 두 직선 l과 m의 기울기를 점 A~E의 좌표를 사용해 나타내 보면 아래 ①~②와 같습니다.

직선 l의 기울기 $a = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_C}{x_A - x_B}$ ①

직선 m의 기울기 $= -\frac{\overline{DE}}{\overline{DA}} = -\frac{y_D - y_E}{x_D - x_A}$ ② (앞에 -기호가 붙었음에 유의)

이제 위 그림과 같이 삼각형 △EDA의 3개 각도를 각각 $\{f,\ 90^\circ,\ g\}$라 하면 삼각형 △ABC의 3개 각도 역시 $\{f,\ 90^\circ,\ g\}$라 할 수 있습니다. 따라서 △EDA의 3개 변의 길이 간 비율은 △ABC의 3개 변의 길이 간 비율과 같습니다. 이를 이용하면 아래 ③의 관계를 얻을 수 있습니다.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \text{ thus } \frac{\overline{DE}}{\overline{DA}} = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_A} = \frac{x_A - x_B}{y_B - y_C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad ③$$

이제 ①~③을 활용해 직선 m의 기울기를 다시 나타내 보면,

직선 m의 기울기 = $-\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DA}} = -\dfrac{y_D - y_E}{x_D - x_A} = -\dfrac{x_A - x_B}{y_B - y_C} = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -\dfrac{1}{a}$ 가 됩니다.

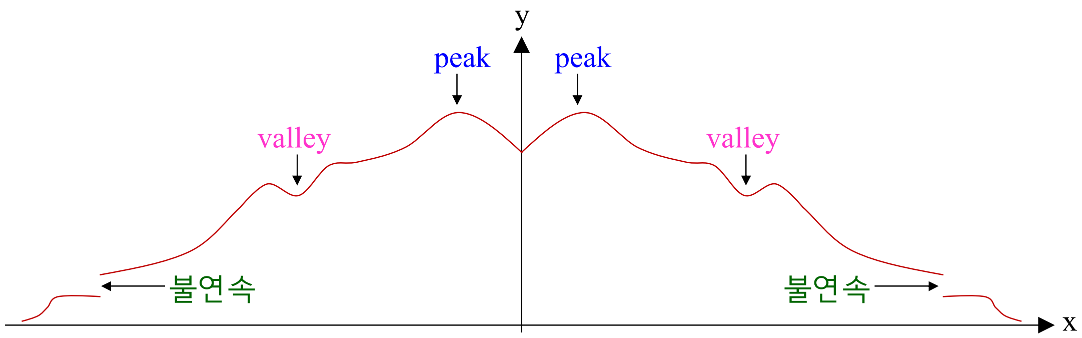
(예제 문제) 직선 l의 기울기가 2이며 점 A(1,3)을 지난다고 하자. 점 A를 지나며 직선 l에 수직인 직선 m에 대한 방정식을 구하시오.

(답) 직선 m은 l에 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 따라서 직선 m에 대한 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+c$ 형태가 된다. 이 방정식에서 상수 c의 값은 m이 점 A(1,3)를 지난다는 단서로부터 구할 수 있다. 즉 $3=-\frac{1}{2}\times 1+c$ 이므로 $c=\frac{7}{2}$가 된다. 결국 m에 대한 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ 이다.

[Q] 직선 l의 기울기가 3이며 점 A(3,1)를 지난다고 하자. 이와 수직이면서 같은 점 A(3,1)을 지나는 직선 m의 방정식을 구하시오.

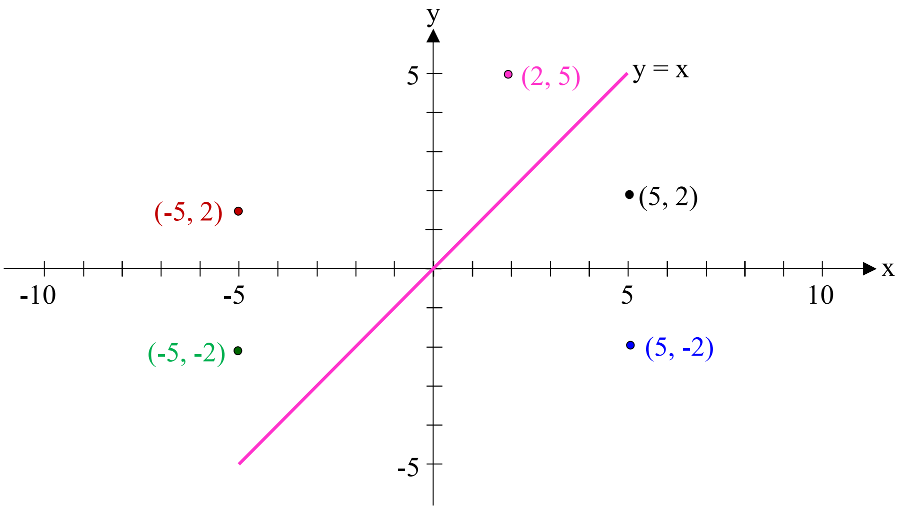
y = 3 * x - 8
y = -1/3 * x + 2
y = -1/3 * x + 4
y = 3 * x + 4

- **대칭(symmetry)**: 2차원상의 그래프 g가 **직선 l에 대해 대칭(symmetric with respect to line l)**이라는 것은 l을 기준으로 그래프 g를 접었을 때, l 양쪽의 이미지가 서로 정확히 들어맞는다는 의미입니다. 예를 들어 아래 그림의 붉은색 그래프는 y축(직선 x=0)에 대해 대칭입니다. y축을 기준으로 그래프를 접었을 때 y축 왼쪽 부분이 y축 오른쪽 부분과 들어맞기 때문입니다.

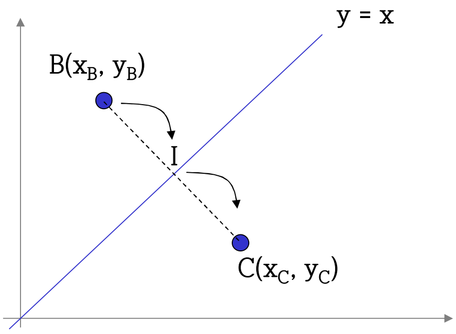


그래프 g가 직선 l에 대해 대칭임을 안다면 g에 대해 더 간단하게 기술할 수 있습니다. 예를 들어 그래프 g의 어느 부분에 peak(높은 점), valley(낮은 점), discontinuity(불연속적인 부분, 예: 끊어진 부분 등) 등이 있는지를 기술해야 한다면 l을 기준으로 한쪽에 대해서만 분석해 보면 됩니다. 반대쪽에는 l을 기준으로 대칭되는 위치에 같은 특징이 나타날 것이기 때문입니다. 즉 **중복된 분석을 또 하지 않아도 되어 분석 시간도 줄이고 분석 결과도 더 간단히 표현**할 수 있습니다.

- **대칭(symmetry)인 두 점 간의 관계**: 대칭 관계인 그래프에 대한 분석은 대칭 관계인 **점**에 대한 분석에서 시작해 보겠습니다. 점이 그래프의 가장 간단한 형태이기 때문입니다. (이 문서에서 말하는 그래프는 점들의 집합으로, 직선, 곡선, 연속인 점들, 연속하지 않고 끊어진 점들을 모두 포함합니다) 점 A와 B가 기준선 *l*에 대해 대칭이라는 것은 *l*을 기준으로 공간을 접었을 때 서로 들어맞는다는 것입니다. 서로 들어맞기 위해서는 A와 B가 *l*로부터 같은 거리에 있어야 할 것입니다. 아래 그림을 예로 들어 보면 검은 점 (5, 2)는 ① 붉은 점 (-5, 2)와 y축에 대해 서로 대칭이며 ② 파란 점 (5,-2)와는 x축에 대해 대칭이고 ③ 자주색 점 (2, 5)와는 직선 y = x에 대해 대칭입니다. 또한 검은 점 (5, 2)는 ④ 초록색 점 (-5, -2)와는 원점에 대해 대칭인데, 이는 직선 $y=-\frac{5}{2}x$에 대해 대칭이라고도 할 수 있습니다. 이러한 대칭 관계 중 이번 시간에는 ③과 같이 직선 y = x에 대한 대칭 관계를 활용할 것이므로 앞으로는 이에 대해 더 자세히 알아보겠습니다.



두 점이 직선 y = x에 대해 대칭이라면 두 점의 x와 y 좌표가 서로 뒤바뀝니다. 즉 점 (p, q)는 점 (q, p)와 직선 y = x에 대해 대칭입니다. 지금까지 배운 내용을 활용해 이를 증명해 보겠습니다.



왼쪽 그림에서 점 B(x_B, y_B)와 점 C(x_C, y_C)는 직선 y=x에 대해 대칭이라 하겠습니다.

직선 BC는 직선 y = x와 수직이어야 하므로 직선 BC의 방정식은 y = -x + c로 나타낼 수 있습니다. 여기서 c는 상수입니다. 이 선은 B(x_B, y_B)를 지나야 하므로 $y_B = -x_B + c$ 이며, 따라서 $c = x_B + y_B$ 입니다. 즉 **직선 BC의 방정식은 $y = -x + (x_B + y_B)$** 입니다.

이제 **직선 BC와 직선 y = x 간의 교점**을 점 I(x_I, y_I)라 하겠습니다. 점 I는 직선 y = x 상에 있으므로 ① $y_I = x_I$ 입니다. 또한 점 I는 BC 상에 있으므로 $x_I = -x_I + c$ 인데, 이를 x_I 에 대해 풀어보면 $2x_I = c$ 이므로, ② $x_I=\frac{c}{2}=\frac{x_B+y_B}{2}$ 를 얻을 수 있습니다. ①과 ②로부터 **점 I의 좌표는 $\left(\frac{x_B+y_B}{2}, \frac{x_B+y_B}{2}\right)$** 입니다.

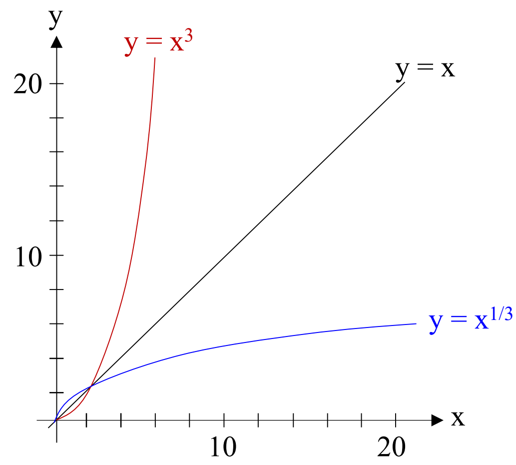
점 B와 점 I의 좌표를 알았으므로 이로부터 점 C의 좌표를 구해보겠습니다. 점 B와 C가 점 I에 대해 대칭이므로 B → I 까지의 거리는 I → C 까지의 거리와 같습니다. 따라서

③ $x_C=x_I+(x_I-x_B)=2\times x_I-x_B=2\times\frac{x_B+y_B}{2}-x_B=y_B$

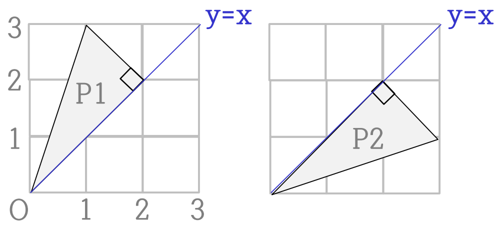
④ $y_C = y_I + (y_I - y_B) = 2 \times y_I - y_B = 2 \times \frac{x_B + y_B}{2} - y_B = x_B$

③과 ④로부터 **점 $C(x_C, y_C)$의 좌표는 (y_B, x_B)**이며, 이는 점 $B(x_B, y_B)$의 좌표에서 x와 y 값을 뒤바꾼 것과 같습니다.

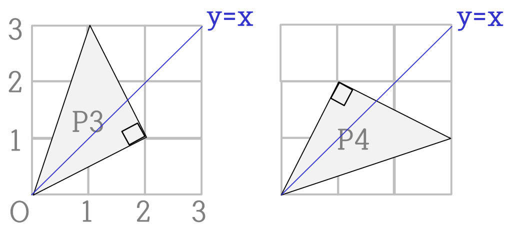
- **대칭(symmetry)인 두 그래프 간의 관계**: 지금까지 직선 y=x에 대해 대칭인 <u>두 점</u> 간의 관계를 알아보았습니다. 이를 활용하면 직선 y=x에 대해 대칭인 임의의 <u>두 그래프</u> 간의 관계에 관해서도 기술할 수 있습니다. **그래프 G1 상의 모든 점의 x와 y 좌표를 뒤바꾸었을 때 그래프 G2가 된다면 G1과 G2는 직선 y = x에 대해 서로 대칭**입니다. 예를 들어 그래프 G1이 곡선 $y = x^3$을 나타낸다면 x와 y를 뒤바꾼 곡선 $x = y^3$은 G1과 직선 y = x에 대해 대칭입니다. 아래 그림에서 이를 확인하세요. 곡선 $x = y^3$은 y에 대해 풀어 $y = x^{1/3}$으로 나타냈습니다.



임의의 두 그래프의 대칭에 대한 정의는 그래프의 부분집합인 두 다각형(polygon)에도 그대로 적용할 수 있습니다. **다각형 P1을 구성하는 모든 점의 x와 y 좌표를 뒤바꾸었을 때 다각형 P2의 각 점에 대응된다면 P1과 P2는 직선 y = x에 대해 서로 대칭**입니다.



왼쪽 그림에서 삼각형 P1을 구성하는 세 점 (0, 0), (2, 2), (1, 3)은 삼각형 P2를 구성하는 세 점 (0, 0), (2, 2), (3, 1)과 각각 y = x에 대해 대칭입니다. 따라서 P1과 P2는 y = x에 대해 대칭입니다.



왼쪽 그림에서 삼각형 P3을 구성하는 세 점 (0, 0), (2, 1), (1, 3)은 삼각형 P4를 구성하는 세 점 (0, 0), (1, 2), (3, 1)과 각각 y = x에 대해 대칭입니다. 따라서 P3과 P4는 y = x에 대해 대칭입니다.

(예제 문제) 오각형 P5 {(0, 0), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (0, 3)}와 직선 y = x에 대해 대칭인 오각형 P6는 어떤 점들로 구성되는가?

(답) 오각형 P5를 구성하는 각 점을 직선 y = x에 대해 대칭시킨 점을 구하면 오각형 P6는 {(0, 0), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 0)}이 된다. 두 오각형을 그려서 직선 y = x에 대해 대칭임을 눈으로 확인해 보세요.

[Q] 삼각형 T1은 3개의 점 {(0, 0), (3, 4), (1, 7)}로 구성된다. 직선 y = x에 대해 T1과 대칭인 삼각형 T2는 어떤 점으로 구성되는가?

{(0, 0), (3, 4), (1, 7)}
{(0, 0), (-3, 4), (-1, 7)}
{(0, 0), (4, 3), (7, 1)}
{(0, 0), (3, -4), (1, -7)}
{(0, 0), (-3, -4), (-1, -7)}

<Python 언어에서 제공하는 수학 기능 중 이번 시간에 필요한 기능 이해>

Floor(x)는 x보다 작은 가장 큰 정수를 의미합니다. 예를 들어 floor(4.3) = 4이며, floor(5.7) = 5입니다. 따라서 floor(x) 함수는 소수점 아래를 제거한 '**내림**' 기능이라고도 볼 수 있습니다. floor(x) 함수는 아래와 같은 기호로 표기하기도 합니다.

Floor(x) = $\lfloor x \rfloor$

Python 언어에서 floor(x) 함수를 사용하려면 먼저 math 모듈을 import해야 합니다. 아래에 floor 함수를 사용한 예가 있습니다.

```
>>> import math
>>> math.floor(4.3)
4
>>> math.floor(5.7)
5
>>> math.floor(4)
4
```

Floor(x)의 반대 기능을 하는 함수가 ceiling(x) 이며, x보다 큰 가장 작은 정수를 의미합니다. 예를 들어 ceiling(4.3) = 5이며, ceiling(5.7) = 6 입니다. 따라서 ceiling(x) 함수는 소수점 아래의 값이 있다면 다음 정수로 '**올림**' 하는 기능이라고도 볼 수 있습니다. Ceiling(x) 함수는 아래와 같은 기호로 표기하기도 합니다. Floor(x) 함수의 기호와 구분해서 보세요.

Ceiling(x) = $\lceil x \rceil$

Python 언어에서 ceiling(x) 함수를 사용하려면 floor(x)와 마찬가지로 math 모듈을 import해야 합니다. 아래에 ceiling 함수를 사용한 예가 있습니다.

```
>>> import math
>>> math.ceil(4.3)
5
>>> math.ceil(5.7)
6
>>> math.ceil(4)
4
```

나눗셈 연산한 결과에서 소수점 아래를 제거하고 정수로 만들어야 하는 경우에는 아래와 같이 나눗셈 연산(/) 후에 floor(x)를 취하면 됩니다.

```
>>> a, b = 5, 4
>>> 5/4
1.25
>>> math.floor(5/4)
```

1

위와 같이 나눗셈(/)에 이은 floor(x) 연산은 기존에 보았던 // 연산으로 대체할 수 있습니다.

```
>>> 5//4
1
```

Python에서 a^p를 계산해야 할 때는 ** 연산을 사용하면 됩니다. 아래에 사용 예가 있습니다.

```
>>> 2 ** 2
4
>>> 2 ** 3
8
>>> 2 ** 5
32
>>> 2 ** 10
1024
```

Python에서 $\sqrt{n}$을 구해야 할 때는 math 모듈의 sqrt() 함수를 사용하면 됩니다. sqrt는 'square root(제곱근)'의 뜻입니다. 아래에 사용 예가 있습니다.

```
>>> import math
>>> math.sqrt(4)
2.0
>>> math.sqrt(9)
3.0
>>> math.sqrt(100)
10.0
>>> math.sqrt(15)
3.872983346207417
```

[Q] $\lfloor (a - b) / c \rfloor$를 계산하는 Python 명령으로 잘못된 것은?

(a - b) // c
math.floor((a - b) / c)
(a - b) / c