Задание 17

Дано:

x_1	4	0	-1	3	4
x_2	2	-3	-2	1	2
x_3	3	2	2	1	-3

Найти: главные направления, дисперсии по главным компонентам

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\overline{x}$ вектор, содержащий ср. значения столбцов матрицы, т.е.

$$\overline{x} = \left((4+0-1+3+4)/5,\ (2-3-2+1+2)/5,\ (3+2+2+1-3)/5\right)$$

$$\overline{x} = (2, 0, 1)$$

Вычислим центрированную матрицу $X_c = X - M$, где $M = (\overline{x}_1, \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n)$

$$X_c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = X_c^T X_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \overset{4}{2\cdot 2} + \overset{4}{-2\cdot -2} + \overset{9}{-3\cdot -3} + \overset{1}{1\cdot 1} + \overset{4}{2\cdot 2} = 22$$

$$c_{12} = \overset{4}{2\cdot 2} + \overset{6}{-2\cdot -3} + \overset{6}{-3\cdot -2} + \overset{1}{1\cdot 1} + \overset{4}{2\cdot 2} = 21$$

$$c_{13} = 2\cdot 2 + -2 + -3 + 0 + 2\cdot -4 = 4 - 5 - 8 = -9$$

$$c_{22} = \overset{4}{2\cdot 2} + \overset{9}{-3\cdot -3} + \overset{4}{-2\cdot -2} + \overset{1}{1\cdot 1} + \overset{4}{2\cdot 2} = 22$$

$$c_{33} = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0 + \overset{16}{-4\cdot -4} = 22$$

$$c_{23} = 2\cdot 2 + -3\cdot 1 + -2\cdot 1 + 1\cdot 0 + \overset{-8}{2\cdot -4} = -9$$

$c_{21} = c_{12}$; $c_{13} = c_{31}$; $c_{23} = c_{32}$, т.к. перемножаем обычную матрицу и транспонированную

Найдём собственные числа и векторы матрицы C

$$\det(C-\lambda I)=\begin{pmatrix} 22-\lambda & 21 & -9 \\ 21 & 22-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & 22-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$=(22-\lambda)^3+21\cdot(-9)^2+21\cdot(-9)^2-(-9)^2\cdot(22-\lambda)-$$

$$-21^2(22-\lambda)-(-9)^2(22-\lambda)=(22-\lambda)^3+2\cdot21\cdot9^2-2\cdot9^2(22-\lambda)-$$

$$-21^2(22-\lambda)=(22^2-44\lambda+\lambda^2)(22-\lambda)+162(21-22+\lambda)-$$

$$-21^2(22-\lambda)=(22-\lambda)(22^2-44\lambda+\lambda^2-21^2)+162(-1+\lambda)=$$

$$=(22-\lambda)(484-44\lambda+\lambda^2-441)-162+162\lambda=$$

$$(22-\lambda)(\lambda^2-44\lambda+43)-162+162\lambda=+22\lambda^2-968\lambda+946+$$

$$-\lambda^3+44\lambda^2-43\lambda-162+162\lambda=\cancel{\lambda^3+22\lambda^2-849\lambda+784}$$

$$=-\lambda^3+66\lambda^2-849\lambda+784=0$$

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3+66\lambda^2-849\lambda+784 & \lambda-1 \\ \cline{2-2} -\lambda^3+\lambda^2 & -\lambda^2+65\lambda-784 \\ \hline \quad 65\lambda^2-849\lambda & \\ \quad 65\lambda^2-65\lambda & \\ \hline \qquad -784\lambda+784 & \\ \qquad -784\lambda+784 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+65\lambda-784)=0$$

1) $D=65^2-4\cdot784=4225-3136=1089$

$$\lambda_{1,2}=\frac{65\pm33}{2}=\begin{matrix}\lambda_1=49\\ \lambda_2=16\end{matrix}$$

$$(\lambda-1)(\lambda-16)(\lambda-49)=0$$

Собственные числа: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=16$, $\lambda_3=49$

1) $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix} 22-1 & 21 & -9 \\ 21 & 22-1 & -9 \\ -9 & -9 & 22-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 21 & -9 \\ 21 & 21 & -9 \\ -9 & -9 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 21 & -9 \\ -9 & -9 & 21 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} +3 & +3 & 33 \\ -9 & -9 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2=16$

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 & -9 \\ 21 & 6 & -9 \\ -9 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 15 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = \frac{x_3}{3} \\ x_1 = x_2 = \frac{x_3}{3} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3=49$

$$\begin{pmatrix} -27 & 21 & -9 \\ 21 & -27 & -9 \\ -9 & -9 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 7 & -3 \\ 7 & -9 & -3 \\ -3 & -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 7 & -3 \\ 7 & -9 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 7 & -3 \\ 9 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -16 & -24 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = -3x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = \frac{-3x_2}{2} \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Нормируем собственные вектора

$\overline{V_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overline{V_2} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overline{V_3} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, где

вектора $\overline{V_1}, \overline{V_2}$ и $\overline{V_3}$ — главные компоненты

Найдём дисперсии по главным компонентам

$N = 5$

1) $\lambda_1 = 1$ $\frac{1}{N-1} \cdot \lambda_1 = \frac{1}{4} \cdot 1 = 0{,}25$

2) $\lambda_2 = 16$ $\frac{1}{N-1} \cdot \lambda_2 = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$

3) $\lambda_3 = 49$ $\frac{1}{N-1} \cdot \lambda_3 = \frac{1}{4} \cdot 49 = 12{,}25$