Задание 4.1

Доказать, что можно положить $v_0 = \bar{x}$. Описать множество всех возможных v_0, доставляющих миним. сумме квадратов расстояний до искомого многообразия

1) Можно считать, что данные центрированы

$$x^i < x^i - \bar{x} \ (i = 1, 2, \dots N)$$

$$W_K = v_0 + L(v_1, \dots v_K),\ v_j \in R^d,\ \|v_j\| = 1,\ v_j \perp v_{j'}$$

$(j \neq j')$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left\| x^i - v_0 - \sum_{j=1}^{K} \langle x^i - v_0, v_j \rangle v_j \right\|\right)^2 \to \min$$

$$W_0 < W_1 < \dots < W_K,\ v_0 = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i$$

т.к $v_0 = \bar{x}$, где $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i$, что и требовалось доказать

2) Если $W_0 = v_0$, то $\sum_{i=1}^{N} (\|x^i - v_0\|)^2 \to \min$

$$\sum_{i=1}^{N} \langle x^i - v_0, x^i - v_0 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \Big(\langle x^i, x^i \rangle - 2\langle x^i, v_0 \rangle +$$

$$+ \langle v_0, v_0 \rangle \Big) = \sum_{i=1}^{N} \langle x^i, x^i \rangle + N \langle v_0, v_0 \rangle - 2 \langle \sum_{i=1}^{N} x^i, v_0 \rangle =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{N} \langle x^i, x^i \rangle \Big) + N \Big(\langle v_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i, v_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i \rangle -$$

$$- \frac{1}{N^2} \langle \sum_{i=1}^{N} x^i, \sum_{i=1}^{N} x^i \rangle = \sum_{i=1}^{N} (\|x^i\|)^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle x^i,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x^i \rangle - N \Big(\langle v_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i, v_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i \rangle \Big)$$

$v_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i \Rightarrow$ принимает наименьш. значение при $v_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^i$