数的第一次抽象产生了算术，第二次抽象产生了代数；

古时，数学内的[主要](http://baike.baidu.com/view/816978.htm)原理是为了研究天文，土地粮食作物的合理分配，税务和贸易等相关的计算．数学也就是为了了解数字间的关系，为了测量土地，以及为了预测天文事件而形成的．这些需要可以简单地被概括为数学对数量、结构、空间及时间方面的研究．

西欧从古希腊到16世纪经过文艺复兴时代，[初等代数](http://baike.baidu.com/view/17545.htm)、以及[三角学](http://baike.baidu.com/view/187604.htm)等[初等数学](http://baike.baidu.com/view/1693037.htm)已大体完备．但尚未出现[极限](http://baike.baidu.com/subview/17644/5120727.htm)的概念．

17世纪在欧洲变量概念的产生，使人们开始研究变化中的量与量的互相关系和图形间的互相变换．在[经典力学](http://baike.baidu.com/view/34995.htm)的建立过程中，结合了几何精密思想的[微积分](http://baike.baidu.com/view/3139.htm)的方法被发明．随着自然科学和技术的进一步发展，为研究数学基础而产生的[集合论](http://baike.baidu.com/view/26152.htm)和[数理逻辑](http://baike.baidu.com/view/45218.htm)等领域也开始慢慢发展．

在人类历史的长河中，首先认识的是具体的数量（简称量），如两只手，三头牛等，经过漫长的发展阶段，才离开了具体的量，第一次抽象出一般的数，如1,2,3,1/3,1/5等，因此，量是具体的，数是抽象的，所以人类从量到数的认识，第一次飞跃产生了算术。

算术的原义是数和数数的技术和学问，算术是研究数及数集上的去处的数学分支，主要内容有：

1 数的概念；

2 计算方法；

3 计算工具；

4 各种数的运算

5 数集和公理结构；

6 数的性质；

7 有关简单应用题的解答；

由于人们生活、生产和科学技术以及数学本身的需要，第一次抽象出来的数还不够，如需表示数量关系的一般规律，用数就难于表达，这就必然引起数学史上的第二次抽象，即用字母表示已知数或未知数，字母的引入就产生了代数。

算术是数的算术，而代数是类的算术。

初等代数，又叫古典代数，它是以字母代表数，并以数的运算规律为依据进行，数、字母，及字母间表达式的运算，初等代数主要研究常量，研究一元高次方程的解法问题。

高等代数研究变量，以行列式、矩阵为工具，研究一次多元议程所组成的议程组的解法问题，以及多项式。

代数algebra的发展：文字代数→简单代数→符号代数；

**最重要的数学方法**

1 笛卡尔的解析几何；

2 牛顿和莱布尼茨的微积分；

3 对数；

**解析几何**：又叫坐标几何，它是通过建立坐标系，用代数的方法研究几何；图形性质的几何学，是17世纪法国的笛卡尔(Descartes,1596-1650)(图形→方程)和费马(方程→图形)建立的。

**笛卡尔解析几何的中心思想**

首先建立一种普遍的数学，使算术、代数、几何统一起来，指出平面上建立一种坐标系之后，几何点和实数对(x,y)之间建立一一对应关系，从而可以用实数对(x,y)来描写每个几何点。

笛卡尔把曲线看成动点的轨迹，从而动点坐标(x,y)就成了变量，且它们之间存在一定关系，这个关系就是以x、y为变量的代数方程的每一组解(x,y)都对应于一点。不同的解对应于不同的点，这些点的全体就构成了一条曲线，从而形成了笛卡尔关于几何问题与代数问题可以互相表达的，亦会称函数与曲线的互相对应思想。因此，研究几何问题，可以归结为相应的代数问题，笛卡尔把以住对立着的两个研究对象“数”和“形”起来了，并在数学中引入了变量的思想，从而开拓了变量数学领域，即代数与几何相互取长补短。

**对数**是天文学与三角学相结合的产物，英国数学家纳皮尔（1550-1617）为了减轻人们繁重单调的计算，创造了对数这一术语。

1 前3世纪，古希腊数学家研究过两个数列：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0, | 1， | 2, | 3, | 4, | 5, | 6， | 7, | … | (1) |
| 1, | 10, | 102, | 103, | 104, | 105, | 106, | 107, | … | (2) |

阿比较这两个数列，得到一个有趣的结论：

（2）是数列首项为1,公比为10,其中两项的积也一定是（2）的项；数列（1）是数列（2）的指数。

2 德国数学家斯蒂菲尔（1487-15677），他在《整数的算术》里发现如下两个数列：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -3 | -2 | -1 | 0, | 1， | 2, | 3, | 4, | 5, | 6， | 7, | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | … | (1) |
| 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1, | 2, | 4, | 8, | 16, | 32, | 64, | 128, | 256 | 512, | 1024, | 2048, | 4096 | … | (2) |

1. 是等差数列，（2）是等比数列，第一行之间加减运算的结果与第二行相对的数之间的乘除去处的结果一一对应。如16\*128,对应4+7,11对应2048＝16\*128.对除法也可类似地进行。

211＝24\*27＝16\*128＝2048

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 对数形式 | 等同1 | 等同2 |
|  |  |  |
| Y=lgx |  |  |
| Y=lnx |  |  |
| lg(a\*b) | lga+lgb |  |

为方便计算，利用对数可以将乘法化简为加法，除法为减法，这样就产生了对数表，选择什么样的”a”可以使对数表最简单，是a=10，还是a=1.00001?最后发现a=e=2.71828…所编制的自然对数表是最简单的。

**微积分**的出现（古典算术、几何、代数方法，甚至解析几何，对自然界的运动和变化都无能为力，变量和函数的引入，自然科学开始转向研究自然界的运动和变化，以穷竭法（无限逼近的极限方法）先分割后求和求曲边形的面积，先有了积分，然后有了微分；

**人类认识数的顺序**

自然数（自然界存在的数）→分数（小数）→零→负数→无理数→虚数；（实数：实实在在存在的数）

一元二次方程的一般示解公式是9世纪阿拉伯数学家阿尔·花剌子模发现的。

**亲和数**

公元6世纪，毕达哥拉斯发现了220的所有真因数（包括1）1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110的和是284,而284的所有真因数1,2,4,71,142的和是220,像220和284这样的一对自然数称为亲和数。

1636年，法国人费马发现了第2对：17295和18146；

1638年，笛卡尔：9437056和0363584；

1747年，欧拉一口气找到了20对，后来又扩展到60对；

有了计算机后，目前已找到1000对以上；

**完数**

等于它的约数之和（不包括自身），如6,28,496.

28（1+2++4+7++14）

**质数**

只有1和它自身两个约数的整数称为质数；

**约数**

是可以将另一个整数整除的数；

**无理数**

无法表示成分数的数（如2的平方根）；

**超越数**

如果一个数不可能是代数方程的解，则该数是一个超越数。

**代数**

用字母代替数字，从而将算术扩展；

**自然数**

全体正整数组成的集合，N={1,2,3,…,n, …}

**整数**

Z={0, ±1, ±2, ±3, …, ±n, …}

**有理数**

**虚数**

涉及到 的数，它们和实数一起可以构成复数；

**无穷小量**

若变量的u的极限为0,则称u为无穷小量。

如

，即x→1时，x2-1为无穷小量。

,当x→0时，1/x是无穷小量；

**分布**：在某个试验或场景中事件发生概率的范围，如泊松分布，给出了小概率事件发生r次的概率；

**三角数**是以研究平面三角形和球面三角形的边和角的关系，起源于天文、测量、航海等实际需要。

倾斜角：直线向上的方向和x轴正方向所成的最小正角，记为a;

斜率：直线倾角的正切值，记作k,即k=tana;

纵截距：指直线与y轴交点的纵坐标。

**常用的直线方程**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 名称 | 已知条件 | 方程（含有参数的等式） |
| 点斜式 | 直线上一点P0(x0,y0)和斜率k | y-y0=k(x-x0) |
| 斜截式 | 斜率k和纵截距b | Y=kx+b |
| 两点式 | 直线上的两点P1(x1,y1), P2(x2,y2) |  |
| 一般式 |  | ax+by+c=0(a,b不同时为0) |

两条直线的位置关系

1 平行且不重复：l1∥l2⇔k1=k2(b1≠b2);

2 垂直关系：l1⊥l2⇔k1=-1/k2(k1,k2都存在);

点P0(x0,y0)到直线l(ax+by+c=0)的距离d=

两点P1(x1,y1), P2(x2,y2)间的距离d=

两条直线交点的坐标，就是他们方程所组成的方程组的解；

函数关系的建立：表→图→解析式；

函数是涵有自变量变化的变量；

|  |  |
| --- | --- |
| 变化的过程是离散的 | 数列 |
| 变化的过程是连续的 | 函数（气温） |
| 变量关系是相关的 | 回归关系 |
| 变量关系是确定的 | 函数关系 |

|  |  |
| --- | --- |
| 变量关系是相关的 | 回归关系 |
| 变量关系是确定的 | 函数关系 |

**拓朴**

是几何的一个分支，它所处理的是曲面和一般形状的性质，它不涉及长度和角度的测量，它所关注的是当形状发生变化时，那些不会改变的形状，它允许我们对形状沿任何方面进行挤压和拉伸。

**迭代**

给定一个初始值a，将一个操作不断重复，该过程称为迭代。如，给定初始值3,并重复加5的操作，我们将得到迭代序列：3,8,13,18,

素数：不能表示成两个较小整数的乘积的数称为素数；

圆周：

圆面积：

球表面积：

球体积：

代数是如何产生的呢？最先出现的是问题以及解决这些问题的办法，然后才是符号标记。我们如今将符号标记做为这个话题的本质。

欧氏几何建立在三角学基础上，是因为任何多边形都可以由三角形构造而成。

当我们利用公比稍大于1的等比数列来构造对数时，e这个值就出现了，由此可以得到表达式

其中n是一个很大的整数，n越大，这个式子越接近一个特定的数e.

数学的三次危机

1 无理数的发现；

2 微积分的基础问题：微积分中的无穷小概念存在内在的矛盾。这也包括在处理增量时按需要令它等于0或不等于0.在这方面走出决定性一步的是柯西，他明确提出了极限的定义，且只也数、函数、变量有关，完全摆脱了几何、力学的直观。问题的最终解决在1872年左右，以有理数为基础来建立实数理论。”趋于一个极限的直觉概念”，需要有更为合乎逻辑的阐述。

3 数学的基础问题：最重要的是数学系统的相容性与完全性。相容性即无矛盾性，一个系统相容，就保证在系统内永远不会出现矛盾因而其内容是可靠的。完全性是系统内能表达的命题总是能够证明或者证伪的。

平面几何，立体几何，解析几何（代数和几何的结合），球面几何，球面三角的内角和等于270度；

往井内投一块石头，6秒种时听到一声巨响，井大概多深？,约180m.

底数为10的对数对十进制计算最为有利。

微积分就是关于瞬时变化率的数学。是指某个特定的量在瞬时变化得有多快。积分则相反，在给定某个量的变化率，通过积分则得到这个量本身。

导数就是关于函数对于自变量的变化率，从几何上看，变化率就是函数f(x)图像上x处的切线斜率。它可以通过求割线的斜率来逼近。

牛顿(1642-1727)

代数方程与一个未知数的各次幂有关。微分方程则更高级，与一个未知函数的各阶导数有关。牛顿的伟大发现在于，自然规律并不是通过某些量的规律性，而是通过它们的导数之间的关系来呈现。自然法则则用微积分的语言来记录；重要的不是物理量的值，而是它们的变化率。这是很深刻的发现，它引发了一场革命，或多或少的导致了现代科学的诞生。

进位制

十二进位制：人的一只手除大拇指外，其余4个手指有12个关节；12有4个约数；

二进位制：用到的数字最少；

数学符号来源趣史

根号：radix,root.

最大公约数和最小倍数：用于分数的约分化简，和分数加减的通分，即化异分母为同分母的问题；

古希腊数学家欧几里得把自然数分成1,质数和合数，并证明质数有无数多个。同时也证明了“任何一个大于1的自然数要么本身就是质数，要么能分解成几个质数的连乘积（合数）”。所以说，质数是构成自然数的“单位”。

德国数学史家内塞尔曼在《希腊代数学》中，把代数发展的历程分为三个时期。

1 文字代数，即完全用文字而不有符号叙述。如我国的古算就是用语言文字叙述与解答问题的，使用起来很不方便；

2 简字代数（亦称半符号代数），用缩写文字。

3 符号代数，16世纪，符号代数最终由法国数学家韦达完成，再历经几百年，由法国数学家笛卡儿等完成了与现代写法一致的符号代数。

4 高等代数：行列式、矩阵、多项式；

算术和代数和区别

算术是“数的算术”；代数是“类的算术”。

算术是数值的演算，代数是函数的演算。

算术的研究对象是离散固定的数，代数的研究对象是议程固定的解。

代数不仅用数也用字母进行计算，推进了代数问题的一般性讨论，从而更带有普遍数、形式更回抽象，应用更加广泛；代数学的特点是引进了未知数（用字母符号表示数），并对未知数加以运算，根据问题的条件列出方程，然后解方程求出未知数的值。算术也有未知数，其未知数就是问题的答案，一切运算只允许对已知数进行。

有了字母表示数，代数学中的代数式、方程就出现了；

有了字母表示数，数学中的定理、性质、定律、法则、运算律等都能用公式简洁地表示出来了。

有了字母表示数，使人类摆脱了使用具体数字研究问题的局限，提供了提示数量关系一般性的可能，有助于人类探索事物的内在联系。

初等代数与高等代数也有区别，前者主要研究字母运算规律及其代数方程；后者主要研究多项式和代数方程根的性质等。

方程是实行代数中的一个中心问题，含有未知数的等式叫方程。

在初等或高等数学中，函数是一个至关重要的概念。随着常量数学进入变量数学时期，函数的概念产生了。变量的函数是由这些变量与常量所组成的解析表达式。

几何是研究物体形状、大小及位置关系的一个数学分支。“几何”一词是希腊文中“土地”和“测量”二字合成的词，意即土地测量。因此几何学直接源于农业生产的需要。

数学mathematica,几何geometry,代数algebra,分数fraction,方程equation,

量（具体）→数（抽象）→用字母代替数

箕田（主要是梯形田）的面积算法：“以盈补虚”，“穷竭法”，“割圆术”，“割补法”。

蝴蝶定理。

我国没有三分货币，这是有科学道理的。因为银行在发行货币时，希望用尽量少的制单位组合成各种数字，以减少货币总数的流通量。

用亩计算土地面积，始于周朝的井田制，秦汉到南北朝时规定长度单位1步=6尺，1里＝300步，1亩＝240平方步。隋唐以后，改为1步=5尺，1里=360步，1亩=100平方步；

1公顷=10000平方米=100公亩＝15市亩；

1丈=10尺=10/3m;

1亩(市亩)=60平方丈=666.667平方米=0.067公顷;

1亩(市亩)=25.82m\*25.82m=14步左右成方;

中国长期以步为单位，秦汉到南北朝时规定长度单位1步=6尺，1尺＝19.91m,后大约每一千年增加3cm左右。为什么古代的尺由小变大呢，原来封建统治者向老百姓征税，是收布帛、米、粟等实物的。当时国家规定了一定的税率，不能随时变更，于是为了多征实物，各代都把尺稍微增大了一点。

哥德巴赫猜想

费马猜想

完全数

其因数的和等于其自身，如6,28，496,8124；

雾锁山头山锁雾，天连水尾水连天。

算术和代数和区别

算术是“数的算术”；代数是“类的算术”。

算术是数值的演算，代数是函数的演算。

算术的研究对象是离散固定的数，代数的研究对象是方程固定的解。

|  |  |
| --- | --- |
| 算术 | 代数 |
| 数的算术 | 类的算术 |
| 数值的演算 | 函数的演算 |
| 离散固定的数 | 方程固定的解 |