

# 分支限界法

# 6.1 分支限界法的基本思想

## 1. 分支限界法与回溯法的不同

(1) 求解目标:

回溯法: 找出解空间树中满足约束条件的**所有解**;

分支限界法: 找出满足约束条件的**一个解**, 或是在满足约束条件的解中找出在某种意义下的**最优解**。

(2) 搜索方式的不同:

回溯法: **深度优先**的方式搜索解空间树;

分支限界法则: **广度优先或以最小耗费优先**的方式搜索解空间树。



➤ 为何称为分支限界法？

※ 分支

在扩展结点处，先生成其所有的儿子结点（分支），然后再从当前的活结点表中选择下一个扩展结点。

※ 限界

为了有效地选择下一扩展结点，加速搜索进程，在每个活结点处，计算一个函数值（限界），并根据函数值，从当前

活结点表中选择一个最有利的结点作为扩展结点，使搜索

朝着解空间树上有最优解的分支推进，一遍尽快找出一个最优解。



# 6.1 分支限界法的基本思想

## 2. 分支限界法基本思想

\*广度优先或以最小耗费（最大效益）优先的方式

每一个活结点只有一次机会成为扩展结点。活结点一旦成为扩展结点，就一次性产生其所有儿子结点。在这些儿子结点中，导致不可行解或导致非最优解的儿子结点被舍弃，其余儿子结点被加入活结点表中。

此后，从活结点表中取下一结点成为当前扩展结点，并重复上述结点扩展过程。这个过程一直持续到找到所需的解或活结点表为空时为止。



# 6.1 分支限界法的基本思想

## 3. 常见的两种分支限界法

### (1) 队列式(FIFO)分支限界法

按照队列先进先出(FIFO)原则选取下一个节点为扩展节点。

### (2) 优先队列式分支限界法

按照优先队列中规定的优先级选取优先级最高的节点成为当前扩展节点。

问题：优先级如何规定？



➤ 优先队列中规定的结点的数值 $p$ 表示。

例如背包问题

与该结点相关的

最大优先队列：规定 $p$ 值越高，体现最大效益优先的原则，常用最大堆来实现。

例如旅行商问题

最小优先队列：规定 $p$ 值较小的优先级高，体现最小费用优先的原则，常用最小堆来实现。

➤ 用优先队列式分支限界法求解时，应根据具体问题的特点确定选用最大优先队列或最小优先队列表示解空间的活结点表。



## ➤ 堆

具有 $n$ 个元素的序列  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ , 当且仅当满足  $(h_i \geq h_{2i}, h_i \geq h_{2i+1})$  或  $(h_i \leq h_{2i}, h_i \leq h_{2i+1})$  ( $i=1, 2, \dots, n/2$ ) 时称之为堆。

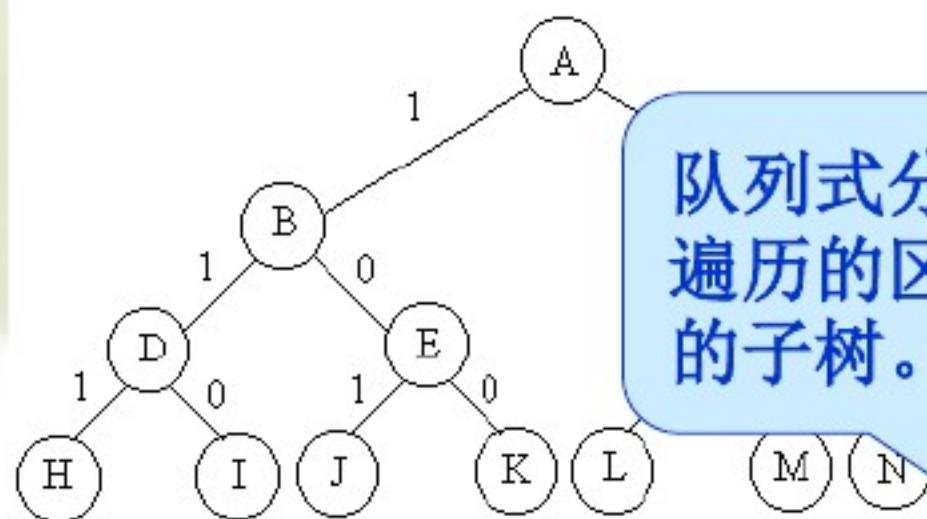
可以用完全二叉树来表示堆, 根据根大于或小于其子结点, 可以分为大根堆、小根堆。

堆可以高效地表示某些动态优先链表, 结点的值对应于事件的优先级, 一个事件的优先级可以在任何时间改变。例如在仿真中的事件链表或操作系统的任务链表。

分支限界通过相关计算决定接下来应该选择哪个结点进行搜索, 并用一个优先链表保存那些已经生成但还未查看的结点, 所以用堆来表示比较理想。



例：0-1背包问题， $w=[16, 15, 15]$ ,  $p=[45, 25, 25]$ ,  $c=30$



队列式分支限界法搜索解空间树与广度优先遍历的区别：前者不搜索以不可行结点为根的子树。

➤队列式分支限界法：用一个队列来存活结点表。（196页）

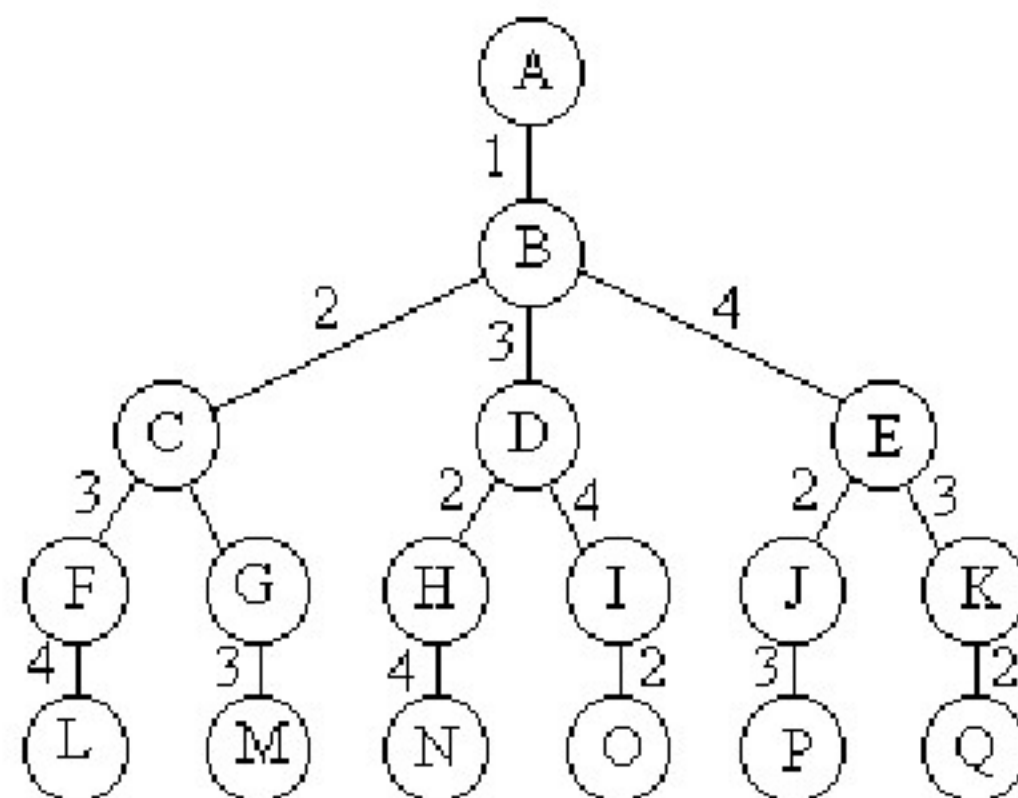
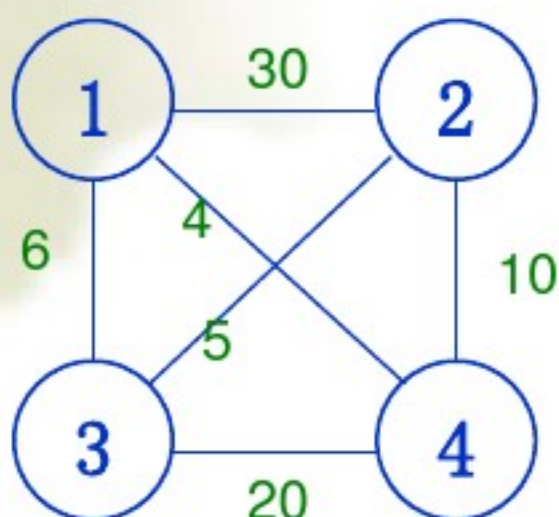
A入队→B, C入队（并且舍弃A）→E入队（D不可行，舍弃）→F, G入队→J不可行，舍弃，K是可行的叶结点，是一个可行解→L, M均为可行叶结点，得到相应的可行解→N, O可行叶结点，得相应可行解→活结点队列空

➤优先队列式分支限界法：用最大堆实现优先队列，优先级为活结点所获得的价值。（197页）

A入堆→B, C入堆（并且舍弃A）→E入堆（D不可行，舍弃）→J不可行，舍弃，K是可行的叶结点，是一个可行解→F, G入堆→L, M均为可行叶结点，得到相应的可行解→N, O可行叶结点，得相应可行解→活结点堆空



## 例：4城市旅行商问题



➤ 队列式分支限界法：用一个队列来存储活结点表。（197页）

B入队 → C, D, E入队（并且舍弃B） → F, G入队（并且舍弃C） → H, I入队（并且舍弃D） → J, K入队（并且舍弃E） → .....

➤ 优先队列式分支限界法：用最小堆实现优先队列，优先级为结点的当前费用。（198页）

B入堆 → C, D, E入堆（并且舍弃B） → J, K入堆（并且舍弃E） → .....



# 6.2 单源最短路径问题

## 1. 问题描述

下面以一个例子来说明单源最短路径问题：在下图所给的有向图G中，每一边都有一个非负边权。要求图G的从源顶点s到目标顶点t之间的最短路径。

