March 15, 2020

考虑两个独立且自由度分别为 r_1, r_2 的卡方随机变量 U, V , U, V 的联合 pdf $h(u,v)$ 为:

$$h(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{r_1+r_2/2}}u^{r_1/2-1}v^{r_2/2-1}e^{-(u+v)/2} & 0<u,v<\infty\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

定义新的随机变量为:

$$W=\frac{U/r_1}{V/r_2}$$

接下里求 W 的 pdf $g_1(w)$，方程:

$$w=\frac{u/r_1}{v/r_2}, z=v$$

定义了一对一变换，将集合 $S=\{(u,v):0<u<\infty, 0<v<\infty\}$ 映射到集合 $\mathcal{T}=\{(w,z):0<w<\infty, 0<z<\infty\}$, 因为 $u=(r_1/r_2)zw, v=z$, 变换的雅可比绝对值为 $|J|=(r_1/r_2)z$, 因此随机变量 $W, Z=V$ 的联合 pdf $g(w,z)$ 为:

$$g(w,z)=\frac{1}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{(r_1+r_2)/2}}\left(\frac{r_1zw}{r_2}\right)^{\frac{r_1-2}{2}}z^{\frac{r_2-2}{2}}\exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{r_1w}{r_2}+1\right)\right]\frac{r_1z}{r_2}$$

假设 $(w,z)\in\mathcal{T}$，其他地方为零, 则 W 的边缘 pdf $g_1(w)$ 为:

$$\begin{aligned}g_1(w)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(w,z)dz\\&=\int_0^{\infty}\frac{(r_1/r_2)^{r/2}(w)^{r/2-1}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{(r_1+r_2/2)}z^{(r_1+r_2)/2-1}\exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{r_1w}{r_2}+1\right)\right]dz}\end{aligned}$$

变量代换

$$y=\frac{z}{2}\left(\frac{r_1w}{r_2}+1\right)$$

可得:

$$\begin{aligned}g_1(w)&=\int_0^{\infty}\frac{(r_1/r_2)^{r_1/2}(w)^{r_1/2-1}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{(r_1+r_2)/2}}\left(\frac{2y}{r_1w/r_2+1}\right)^{(r_1+r_2)/2-1}e^{-y}\times\left(\frac{2}{r_1w/r_2+1}\right)dy\\&=\begin{cases}\frac{\Gamma[(r_1+r_2)/2](r_1/r_2)^{r_1/2}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)}\frac{(w)^{r_1/2-1}}{(1+r_1w/r_2)^{(r_1+r_2)/2}} & 0<w<\infty\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}\end{aligned}$$

故，如果 U, V 是自由度分别为 r_1, r_2 的且独立的卡方变量，那么 $W=\frac{U/r_1}{V/r_2}$ 的 pdf 如上所示，该随机变量的分布通常称为 F 分布，可以看出 F 分布完全由参数 r_1, r_2 决定。

补充：T 分布的 pdf

令 W 表示满足 $N(0,1)$ 分布的随机变量；V 表示满足 $\chi^2(r)$ 分布的随机变量；且 W, V 独立，那么 W, V 的联合 pdf，表示为 $h(w,v)$，就是 W 的 pdf 与 V 的 pdf 乘积，或者

$$h(w,v)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2}\frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}v^{r/2-1}e^{-v/2} & \infty<w<\infty, 0<v<\infty\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

定义新的随机变量 T 为:$T=\frac{W}{\sqrt{V/r}}$
利用变量替换方法可以得到 T 的 pdf $g_1(t)$。方程 $t=\frac{w}{\sqrt{v/r}} \quad u=v$
定义了一个变换，将 $S=\{(w,v):-\infty<w<\infty,0<v<\infty\}$ 一一映射到 $T=\{(t,u):-\infty<t<\infty,0<u<\infty\}$
因为 $w=t\sqrt{u}/\sqrt{r},v=u$ 所以变换的雅可比绝对值为 $|\mathcal{J}|=\sqrt{u}/\sqrt{r}$, 所以 $T,U=V$ 的联合 pdf 为:

$$
\begin{aligned}
g(t,u) &= h\left(\frac{t\sqrt{u}}{\sqrt{r}},u\right)|\mathcal{J}| \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(r/2)2^{r/2}}u^{r/2-1}\exp\left[-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)\right]\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}} & |t|<\infty,0<u<\infty \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
\end{aligned}
$$

T 的边缘 pdf 为:

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,u)du \\
&= \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi r}\Gamma(r/2)2^{r/2}}u^{(r+1)/2-1}\exp\left[-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)\right]du
\end{aligned}
$$

令 $z=u\left[1+\left(t^2/r\right)\right]/2$ 得到:

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi r}\Gamma(r/2)2^{r/2}}\left(\frac{2z}{1+t^2/r}\right)^{(r+1)/2-1}e^{-z}\left(\frac{2}{1+t^2/r}\right)dz \\
&= \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r}\Gamma(r/2)}\frac{1}{(1+t^2/r)^{(r+1)/2}},-\infty<t<\infty
\end{aligned}
$$

通过观察可以发现 t 分布完全由参数 r 决定，也就是卡方分布的自由度。