Q5 [编辑]

如何证明P113的 Corollary 5.4? (闫引桥)

Corollary 5.4 *Let* $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \mathbf{V})$, $\mathbf{A}$ *be symmetric with rank* r, *and* $\mathbf{B}$ *be symmetric with rank* s; *if* $\mathbf{BVA} = \mathbf{0}$, *then* $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ *and* $\mathbf{X}^T\mathbf{BX}$ *are independent.*

仿照 Result 5.16 的证明过程：

因为 A 和 B 都是 symmetric，则存在 $P_1 \in p \times r$，$Q_1 \in p \times s$

$$A = P_1 \Lambda_1 P_1^T \quad , \quad B = Q_1 \Gamma_1 Q_1^T$$

其中 $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ with $r = \text{rank}(A)$，$\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ with $s = \text{rank}(B)$

则有 joint distribution

$$\begin{bmatrix} P_1^T X \\ Q_1^T X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ Q_1^T \end{bmatrix} X \sim N_{2p}\left(\begin{bmatrix} P_1^T \mu \\ Q_1^T \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1^T V P_1 & P_1^T V Q_1 \\ Q_1^T V P_1 & Q_1^T V Q_1 \end{bmatrix} \right)$$

若 $BVA = 0$，则 $Q_1 \Gamma_1 Q_1^T V P_1 \Lambda_1 P_1^T = 0$

由于 Γ_1, Λ_1 都是可逆对角阵，$Q_1^T Q_1 = I_s$，$P_1^T P_1 = I_r$

$\Rightarrow \quad Q_1^T V P_1 = 0$

从而 $P_1^T X$ 和 $Q_1^T X$，即 $X^T A X$ 和 $X^T B X$ 独立.

? 理解： $B = [b_1, \cdots, b_p]$ ， $A = [a_1, \cdots, a_p]$

则 $$BVA = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_p^T \end{bmatrix} V [a_1, \cdots, a_p] = \begin{bmatrix} b_1^T V a_1 & , \cdots , & b_1^T V a_p \\ \vdots & & \\ b_p^T V a_1 & , \cdots , & b_p^T V a_p \end{bmatrix} = 0$$

即 $\forall i,j$, $b_j^T V a_i = 0$. 设 $V \succ 0$, 则可以定义内积

$$\langle a_i, b_j \rangle_V = b_j^T V a_i$$

相当于 $\{a_i\}$ 和 $\{b_j\}$ 在 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 意义下是相互正交的, 从而导致了

$X^T A X$ 和 $X^T B X$ 独立.