Week 2.

Q7 [编辑]

$C(X)$ 和 $C(X^T)$ 之间有什么联系？(闫引桥)

A：

基本概念

1. 记 $R(X)$ 为 X 的行空间，则 $R(X) = C(X^T)$

2. 右零空间

   称 $Ax=0$ 的解构成的空间为（右）零空间，记作 $N(A)$

   左零空间

   称 $x^TA=0$ 的解构成的空间为左零空间，可记作 $N(A^T)$

联系

1. 秩-零度公式：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则有

$$\boxed{\dim N(A) + \dim C(A) = n}$$

其中 $\dim N(A)$ 称为 A 的零度，$\dim C(A) = \operatorname{rank}(A)$ 称为 A 的秩

2. 正交补：

(1) Definition A.4 若 S 和 T 两个 $\mathbb{R}^m$ 中的空间满足

$$\begin{cases} S \cap T = \{0\} & \Rightarrow \text{和空间是直和 } S \oplus T \\ \boxed{\dim S = r, \quad \dim T = m-r} & \Rightarrow \text{代数补} \\ \forall s \in S,\ \forall t \in T,\ s \perp t & \Rightarrow \text{正交补} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \dim R(A) \\ \| \\ \dim N(A) + \dim C(A^T) = n \end{array}$$

(2) $N(A)$ 和 $C(A^T)$ 互为正交补

$N(A^T)$ 和 $C(A)$ 互为正交补

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim N(A) + \dim C(A) = n \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \dim N(A^T) + \dim C(A^T) = m \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \qquad\qquad\qquad \operatorname{rank}(A) \end{array}}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 则 $N(A)$ 和 $C(A)$ 都是 $\underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$ 的子空间

($a_i \in \mathbb{R}^m$)

当 A 为 full-column rank 时，$\langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ 是线性无关的

即 $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 维空间一组基；否则 $\operatorname{rank}\langle a_1, \cdots, a_n \rangle = r = \dim C(A)$

$\therefore N(A),\ C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ 此处 $\mathbb{R}^n$ 理解为 n 维实空间，不要理解为 n 维向量

(3) $(X^TX)^-X^T$ 是 X 的广义逆　　　　$X(X^TX)^-$ 是 X^T 的广义逆

symmetric, idempotent　　　　asymmetric

$$\left.\begin{array}{l} P_X = X(X^TX)^-X^T \xrightarrow{\text{orthogonal}} C(X) \\ I - P_X \xrightarrow{\text{orthogonal}} N(X^T) \end{array}\right\} \text{正交补} \left\{ \begin{array}{l} C(X^T) \longleftarrow (X^TX)(X^TX)^- = P_{X^T} \\ N(X) \longleftarrow I - P_{X^T} \end{array}\right.$$

Q4 [编辑]

Example 4中最后将$\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$写成$\frac{1}{20}[3\ 1 - 1 - 3]^\top[3\ 1 - 1 - 3]$ 的形式，意思是$\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$是$\frac{1}{20}[31 - 1 - 3]^\top$方向上的投影矩阵吗?

A: 在 Example 2.6 中,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因为 $\mathbf{1}$ 是 X 的一个列向量，所以 $C(\mathbf{1}) \subseteq C(X)$，利用 Thm 2.2

$P_X - P_1$ 是 $C((I-P_1)X)$ 上的正交投影. 即 $\forall z \in \mathbb{R}^4$,

$$(P_X - P_1)z \in C((I-P_1)X)$$

其中 $P_1 \to C(\mathbf{1})$, $I - P_1 \to N(\mathbf{1}^T)$ 且

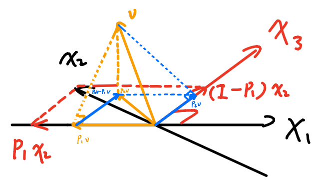
$$(I-P_1)X = [x_1 - \bar{x}_1, \cdots, x_n - \bar{x}_n]$$

解释：

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4$

即 x_1, x_2 是4维欧氏空间中的向量



$C(X) = span(x_1, x_2)$

$P_{x_1} \rightarrow span(x_1)$ $\quad P_1$

$P_X \rightarrow C(X)$ $\quad P_2$

正交投影

$$\underset{P_3}{\overset{\shortparallel}{(P_2 - P_1)}} v = \underset{C(X)}{\underline{\underline{P_2 v}}} - \underset{C(x_1)}{\underline{\underline{P_1 v}}} \in C(X) \setminus C(x_1) = C(x_1)^{\perp}$$

$$x_2 = \underset{C(x_1)}{\underset{\downarrow}{P_1 x_2}} + \underset{C(x_1)^{\perp}}{\underset{\downarrow}{(I - P_1)x_2}}$$

即x_3是$C(X)$与x_1正交的一个量

① $x_3 = (I - P_1) x_2 = x_2 - x_1 (x_1^T x_1)^{-1} x_1^T x_2$

② $P_3 = x_3 (x_3^T x_3)^{-1} x_3^T = \dfrac{1}{x_3^T x_3} x_3 x_3^T$

延伸： $C(W) \subseteq C(X)$，则

$P_X - P_W$ 是 $C(X) \setminus C(W)$ 上的正交投影

可以理解为 $C(X)$ 中不能由 $C(W)$ 表示的部分（子空间），即 $C(W)$ 关于 $C(X)$ 的正交补

$\Downarrow$

用于 subset regression