书式嵌入

Yurk Lee

2021/05/27

1 平面图相关性质

1.1 库拉托夫斯基定理在拓扑图论中的影响

库拉托夫斯基定理从分析拓扑的角度给出了判定平面图的准则, 在推进拓扑图论的发展中发挥着举足轻重的作用. 著名的图论学家哈拉里 (F. Harary, 1921-2005) 在他的专著《图论》中曾评论道: “库拉托夫斯基定理标志着拓扑图论的复苏”. 的确, 它给出了第一个判定平面图的准则, 更关键的是它给出了不可平面图的结构特征, 子图同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$. 我们把这两个图称为平面图的禁用子图. 换句话说, 与禁用子图 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的图肯定不能嵌入平面. 那么, 这两个禁用子图就能刻画平面图的特征. 很自然地, 寻找其他一般曲面的禁用缩图也能刻画相对应曲面的特征, 另一方面, 给定曲面的禁用缩图也为判断一个图能否嵌入到该曲面, 提供了一个参照系. 那么, 库拉托夫斯基定理推广到曲面的工作是如何展开的? 哪些人对其作出了突出贡献? 在这个过程中产生的新概念与方法又将如何推进拓扑图论的发展呢?

从 Wagner 定理到 Robertson—Seymour 定理. 瓦格纳使用“缩图”代替了库拉托夫斯基的“子图”给出了与 Kuratowski 定理等价的定理. 而把 Wagner 定理推广到一般曲面的的结果, 称为 Robertson—Seymour 定理.

1935 年瓦格纳 (K. Wagner, 1910-2000) 获得博士学位, 1936 年他发表了一篇关于平面嵌入的文章. 此时, 他进一步地思考能否通过一种比子图更简单的图结构, 来刻画平面图的特征. 在 1937 年, 瓦格纳 [37] 提出了“缩图”概念, 即一个图 G 的缩图可以通过图 G 收缩边而得到. 并在同年发表的一篇文章中使用“缩图”替换了“子图”, 给出了与 Kuratowski 定理等价的定理. 他证明了: 一个图 G 可平面化当且仅当图 G 不含 K5 或 K3,3 型的缩图. 瓦格纳通过缩图的概念, 得到了判定可平面图更加一般化的结论. 相对于子图来说, 缩图是一种更容易刻画的图结构, 而缩图也为嵌入问题打开新的研究视角. 在 Kuratowski 定理中, 把不能嵌入到平面的图理解为禁用缩图, 用禁用缩图来刻画平面的特征, 这显然是区别于一般曲面的. 正如色数反映了曲面的拓扑特征一样, 这种禁用缩图也反映了曲面的拓扑特征.

此外, 我们还要从惠特尼说起:

我们知道, 惠特尼对图论的工作是由四色问题为出发点而展开的. 早在 1916 年, 柯尼希就曾断言, 四色问题的进展可能依赖于对平面图的刻画, 这启发了当时热衷于四色问题的惠特尼. 所以惠特

尼早期关于图论的文章主要集中在平面图方面. 然而, 如果一个抽象图 G 在平面上不止有一种嵌入, 则能够产生不止一个对偶图. 惠特尼研究了这些组合关系, 并利用它们来构造一个抽象的对偶概念. 它是几何对偶的一种抽象形式. 而且, 这个抽象概念与平面情景下的几何对偶完全等价. 惠特尼证明了组合对偶等价于几何对偶, 这给出了可平面性的另外一个准则. 惠特尼的平面性定理完整表述为:

一个图是平面图当且仅当这个图有一个惠特尼对偶.

这个结果首先出现在 1931 年, 它有效地刻画了平面图的组合特性. 1932 年, 惠特尼发表了一篇较为完整的关于平面性的文章. 文章共分为 3 个部分: 第一部分是对不可分离图的研究; 第二部分定义了图的对偶, 并详细研究了平面图的对偶; 第三部分证明了具有组合性质的平面性定理, 并研究了其与库拉托夫斯基定理的关系. 这篇文章中的有些术语与现在的定义有些分歧, 所以有必要对其进行解释. 惠特尼在处理图分离的过程时, 把最大的不可分离部分称为“块”, 其实这个术语是不标准的. 我们现在称一个图是不可分离图, 当且仅当它是没有割点的连通图. 而在惠特尼的定义中, 块是图的最大的不可分离图, 现在我们把每一个不可分离图都称为块. 一个图有超过一个块的叫做可分离的图. 另外惠特尼用“连通片”来定义一个“分支”.

在这篇论文的结尾处, 惠特尼陈述了 Kuratowski 定理, 并且证明了在惠特尼的定义下 K_5 和 $K_{3,3}$ 无惠特尼对偶. 因此可以根据 Kuratowski 定理来证明一个图有惠特尼对偶, 进而得到这个图是可平面的, 即 Kuratowski 的定理可以推出惠特尼对偶定理. 在 1933 年惠特尼证明了不包含 K_5 和 $K_{3,3}$ 的图肯定有惠特尼对偶. 因此获得了一种拓扑意义不强逆向证明. 这是平面图理论上的一个重大进步.

由于惠特尼揭示了图嵌入平面的一些重要的性质, 成为继库拉托夫斯基之后又一位拓扑图论先驱. 惠特尼在推广对偶概念的基础上, 给出另一个判断平面图的定理. 这个抽象的平面性定理虽然对判定图的可平面性存在一定的难度, 但是它却有着十分重要的理论意义, 它为拟阵论的产生奠定了理论基础. 惠特尼之后, 可平面图的研究吸引了不少数学家, 麦克莱恩、塔特等人都相继得到了各自领域中十分卓越的成果.

麦克莱恩的平面性标准. 美国数学家麦克莱恩的主要贡献是在代数和代数拓扑方向, 他曾与著名的数学家伯克霍夫合编了一本书《现代代数综述》. 在伯克霍夫和惠特尼的影响下, 麦克莱恩也组合地研究了图的平面性判定问题, 得到了与惠特尼在形式上完全不同的结果.

麦克莱恩在 1937 年发表了关于图的一个平面性标准: 一个图 G 是可平面的当且仅当 G 的每一个至少有三个点的块有一个圈基 $Z_1, Z_2, ..., Z_m$ 和另外一个圈 $Z0$, 使得每一条边出现在这 $m+1$ 个圈的正好两个之中. 此定理是通过圈的结构来表达的, 它的重点是找出图 G 的完备集.

一般而言, 在一个图上找出圈的完备集虽然比找 Kuratowski 子图或找对偶图要相对简单一些, 但是其本身也相当复杂. 不可否认, 理论本身所延伸的问题, 往往比理论本身更有价值. 虽然库拉托夫斯基、惠特尼、麦克莱恩等人所得到的平面图理论, 在检验图的平面性方面确实存在一些困难, 可是相关研究却极大地推进了数学的进程. 例如, 库拉托夫斯基定理刻画了平面图的禁用子图, 这有力地推动了图论中最重要的分支之一拓扑图论的发展, 在拓扑图论的长足发展中有深刻的历史地位;

惠特尼的组合性可平面定理, 揭示了图嵌入平面的一些重要的组合性质, 并建立了图论和拟阵论之间的联系, 为拟阵论奠定了理论基础. 有图论大师之称的塔特, 复兴了拟阵论, 使得拟阵获得了新生, 并推动了拟阵的长足发展.

他先证明了 $K_{3,3}$ K_5 和它们的细分都没有 2-基，然后证明如果一个图有 2-基那么它的子图也有，这样就证明了一个图的子图如果没有 2-基，那么这个图也没有，也就是说一个非平面图不可能有 2-基.