平面图

Graphs on Surfaces

作者：Yurk

组织：Taiyuan University of Technology

时间：March 15, 2021

版本：3.10

专业：信息与计算科学

ElegantLATEX Program

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

前言

曲面上的图在离散数学和连续数学之间构建起了一条自然的纽带，这使我们更好地理解图形和曲面。若没有图，一些经典定理的证明将变得十分困难。这些性质和其他一些图表面组合问题在本册中得到了证实。

离散数学中，有许多例子表明平面图（或等值的球面图）的重要性。其中一个十分漂亮的例子就是 Steinitz 定理，它证明了三维多面体的图正是 3 连通的平面图。平面图谱及其对偶构成了图与拟阵之间的重要联系。

此外，较高曲面上的图形也十分有用。例如：考虑下面这个看似简单的问题，它描述了那些不包含两个奇数长度的不相交环的图。这个问题在 Lovasz 上通过使用 Seymour 对规则拟阵的深度刻画进而得到了解决。其中有趣的是那些可以画在影射平面上的图，使所有的面都被偶环限定。可以用 "没有两个不相交的奇环" 定理组合来证明这个结论。然而，自然的证明仅仅是对原平面不存在两个非收缩的环这一事实的参考，一种分类定理的直接结果。

曲面上的图在关于图子的深层罗伯逊-西摩理论中起着核心作用。罗伯逊和西摩的主要结果之一是：任意无限的图集合包含两个图，如 Gand.H，使 H 是 G 的一个小量，也就是说，可以通过收缩并删除边和删除孤立顶点从 G 得到 H。一个重要的结果是库拉托夫斯基定理的扩展更高的表面：对于每一个固定的表面，有一个有限的集合 Forb，(S) 的图形不能刻画在 S 上，任何图 G，S 当且仅当 G 没有图 Forb,(S) 作为一个小量。

原教材主要从拓扑空间理论对图进行了进一步地描述，表面上的图可以通过旋转原理组合地描述和处理。但要证明这一点需要大量的工作，这是前三章的主题。第一章介绍图论的基本概念，第二章第三章包含了基本的拓扑结果：约当曲线定理、Jordan-S 定理和紧实二锥曲面的分类定理。

第二张也讨论平面图，包括 Koebe 的一个基本结果及其在圆包装表示和 Steinitz 定理的扩展上的应用。第三章中我们完成了关于曲面上图的纯组合描述的讨论。

原作者
March 21, 2021

目录

第一章 图论基础

内容提要

- 图论基础
- 树的相关概念
- 图论中的块与连通性
- 平面图嵌入
- 欧拉公式与哈密顿图
- 库拉托夫斯基定理

1.1 图论基础

我们经常遇到这样一些现象或问题：

在一群人中，有的里那个个人之间相互认识，有的互不认；

一次足球锦标赛由若干队伍参加，其中有的两个队之间比赛过，有的没有比赛过；

有若干个大城市，有的两个城市之间有航线相通，有的没有航线相通；

在上面这些现象或者问题中都包含两方面的内容：其一是一些“对象”，如人群、足球队、城市、点等等；其二是这些对象两两之间的某种特定关系，如“互相认识”、“比赛过”、“通航”、“距离为 1”等. 为了表示这些对象和他们之间的关系，我们可以用一个点表示一个对象，称这些点为顶点，如果两个对象之间有所讨论的关系，就在相应的亮点之间连上一条线，称这些线为边，这样就构成了一个图形.

这个用来表示某类对象及它们间特定关系的，由若干个顶点与连接某些顶点的边构成的图形，我们直观地称之为图.

图论是以图作为研究对象的一个数学分支.

例如图1.1中给出了 3 个图 G_1、G_2、G_3，其中顶点由小圆圈表示.

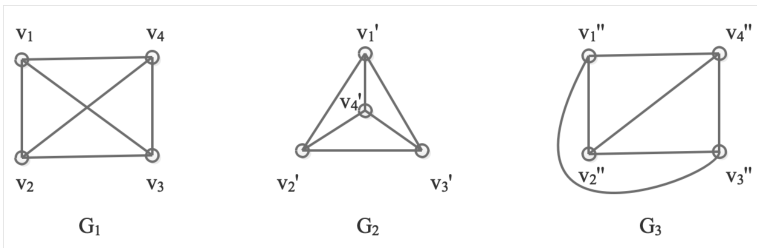


图 1.1: 图

我们注意到，在直观地叙述图的定义中，并没有规定这些顶点的位置以及边的曲直长短，也没有规定这些顶点、边都要在同一平面中，不过，连接两点的边不能通过第三个顶点，也不能与自己相交. 在图论中，如果两个图 G 与 G' 的顶点之间可以建立起一一对应，并且 G 中连接顶点 v_i 与 v_j 之间的边数 $k(k = 0, 1, 2, \dots)$ 与连接 G' 中相应的顶点 v_i' 与 v_j' 的边数相同时，便称图 G 与 G' 是**同构的**，认为 G 与 G' 是相同的图.

例如，图1.1中的三个图 $G_1, G_2 . G_3$ 是同构的.

如果对图 $G=(V,E)$ 与 $G=(V,E)$ 有 $V'\subseteq V, E'\subseteq E$，即图 G' 的顶点都是图 G 的顶点，图 G' 的边也都是 G 的边，则称 G' 是 G 的子图，例如图1.2中的 G_1, G_2 都是 G 的子图.

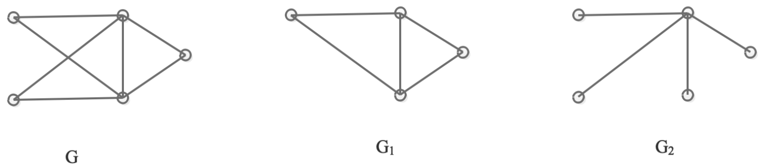


图 1.2: 子图

若在一个图 G 中的两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边 e 相连，则称点 v_i 与 v_j 是**相邻的**，否则就称点 v_i 与 v_j 是不相邻的. 如果顶点 v 是边 e 的一个端点，v 与边 e 是关联的. 有些顶点本身也有边相连，这样的边称为**环**。连接两个顶点的边又是可能不止一条，若两个顶点之间的边有时可能不止一条，若这两个顶点之间有 $k(k\geqslant 2)$ 条边相连，则称这些边为**平行边**. 若一个图没有环，并且没有平行边，这样的图称为**简单图**. 图1.1中的 G_1、G_2、G_3 都是简单图. 在简单图中，连接顶点 v_i 与 v_j 之间的边可以用 (v_i,v_j) 表示，当然，(v_i,v_j) 与 (v_j,v_i) 表示的是同一条边.

如果一个简单图中，每两个顶点之间都有一条边，这样的图称为**完全图**. 通常将有 n 个顶点的完全图记为 K_n，图1.3中是完全图 K_3、K_4、K_5. 完全图 K_n 的边的数目是 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$.

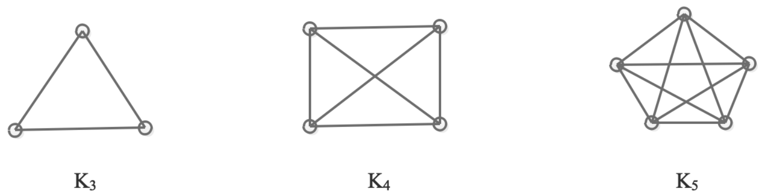


图 1.3: 完全图

在图 $G=(V,E)$ 中，若顶点个数 $|V|$（$|V|$ 也称 G 的阶）和边数 $|E|$ 都是有限的，则称图 G 是**有限图**. 如果 $|V|$ 或 $|E|$ 是无限的，则称 G 为**无限图**.

本篇中，除非特殊说明，我们所说的图都是指有限简单图.

图 G 中与通常将顶点 v 相关联的边称为图 G 中顶点 v 的度，记作 $d_G(v)$，我们简记为 $d(v)$. 图 G 中，若顶点 v 的度是奇数，则称点 v 为奇顶点；若顶点 v 的度是偶数，则称点 v 为偶顶点.

在图 $G=(V,E)$ 中，如果对任意的 $v\in V$，均有 $d(v)=k$，则称图 G 是 k 正则的. 完全图 K_n 是 $(n-1)$ 正则图. 关于图 G 中所有顶点的度之和与边数之间有如下关系

定理 1.1. 度数与顶点

总度数为边数的 2 倍，且度数为奇数的结点有偶数个. ♡

✍ **练习 1.1** 某聚会有 605 人参加，已知每个人至少和其余的一个人握过手. 证明：必有一个人至少和其中的两个人握过手.

证明 如图1.4，将 605 人用 605 个点 $v_1, v_2, \ldots, v_{605}$ 表示，如果其中两个人握过手，就应该在相应的顶点之间连一条边. 如图可知，设图 G 有 r 条边，则 G 便有 $2r$（偶数）个顶点，这与 G 的顶点数为 605（奇数）矛盾.

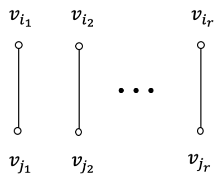


图 1.4: 握手示意图

图论问题又称欧拉 (Euler) 问题，它起源于著名的七桥问题. 位于欧洲的柯尼斯堡，景致迷人，碧波荡漾的普莱格尔河横贯其境，河中有两个岛 A 与 D，河上有七座桥连接这两个岛以及河的两岸 B、C.

问：一个旅游者能否通过每座桥一次且仅一次？

这就是著名的柯尼斯堡七桥问题。天才的欧拉，以其独特的慧眼，看出了这个似乎是趣味几何和问题的潜在意义.1736 年，他发表了题为《哥尼斯堡的七桥问题》的论文，解决了七桥问题，通常认为这是图论的第一篇论文。在解答问题的同时，欧拉开创了数学的一个新的分支——图论与几何拓扑，也由此展开了数学史上的新历程。我们可以将柯尼斯堡七桥问题转化成一个一笔画问题，即能否一笔画出这个图且要保证每条边无遗漏也无重复？这个问题等价于图是否是一个链（圈）. 天才欧拉给出了相应的解决方法。

定理 1.2. 一笔画定理

一笔画存在的充要条件是：

- 图 G 连通
- 奇顶点个数为 0 或 2

当且仅当奇顶点的个数等于 0 时，连通图 G 是一个圈. 事实上，对于一般形式的图而言：若连通图有 $2k$ 个奇顶点，则图 G 可用 k 笔画成，且至少需要 k 笔才能画成. ♡

✍ **练习 1.2** 在图1.5中，甲、乙两只蚂蚁分别在 A、B 两点. 甲蚂蚁向乙蚂蚁提出：“咱俩比赛，看谁先把这个图中的九条边都遍历后到达 E 点.” 乙蚂蚁同意. 假定两只蚂蚁爬的速度相同且同时开始. 问：究竟哪只蚂蚁最先到达 E 点？

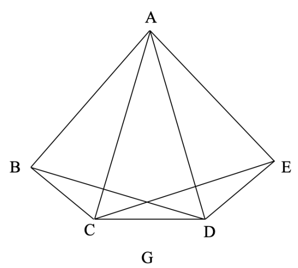


图 1.5: 蚂蚁竞争图

解 把 A、B、C、D、E 作为顶点，原来的 9 条线段作 9 条边，得图 G。G 是连通图，奇顶点个数为 2，它是一条链。由于点 B 是奇顶点，E 也是奇顶点，所以从 B 到 E 存在着

一条链，例如：

$$BCDACEABDE$$

对于乙蚂蚁来说，它可以从 B 点出发，沿着这条链到达 E 点. 但顶点 A 是偶顶点，从 A 出发到达 E 不可能不重复走遍图 G 中所有边，至少要重复经过一条边. 所以蚂蚁乙可以选择一条路线比甲更加先爬到 E 点.

在欧拉提出图论分支后，1856 年，著名英国数学家哈密顿 (Willian Rowan Hamilton) 又提出一个名为"环游世界"的游戏. 他用一个正十二面体的二十个顶点代表二十个大城市，要求沿着棱，从一个城市出发，经过每个城市恰好一次，然后回到出发点.

这个游戏曾经风靡一时，在这个游戏中提到了这样一种链（圈）：它经过图上各个顶点一次并且仅仅一次. 这种链（圈）成为哈密顿链（圈），一个图若包含哈密顿圈，则称这个图为哈密顿图.

从表面上看，哈密顿问题与欧拉问题很相似，实际上有着较大区别. 欧拉问题需要遍历图上的每一条边，而哈密顿图需要遍历每一个顶点. 哈密顿问题是图论中尚未解决的难题之一，迄今为止还没有找到判断它的充分必要条件，所以对不同类型的问题，我们需要不同的方法。

定理 1.3. 一种特殊的判定

在偶图 $G = (V_1, V_2, E)$ 中，若 $|V_1| \neq |V_2|$，则 G 一定无哈密顿圈。若 $|V_1|$ 与 $|V_2|$ 之差大于 1，则 G 一定无哈密顿链. ♡

性质 哈密顿圈（链）的充分条件

1. 设 G 是 $n(n \geqslant 3)$ 阶简单图，且对于每一对顶点 v, v' 有：$d(v) + d(v') \geqslant n - 1$，则 G 有哈密顿链.
2. 设 G 是 $n(n \geqslant 3)$ 阶简单图，且对于每一对不相邻的顶点 v, v' 有：$d(v) + d(v') \geqslant n$，则 G 有哈密顿图.
3. 设 G 是 $n(n \geqslant 3)$ 阶简单图，若对每个顶点 v 的度 $d(v) \geqslant \frac{n}{2}$，则图 G 一定有哈密顿图.

性质 哈密顿圈（链）的必要条件

- 若图 G 有哈密顿图，从 G 中去掉若干个点 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 及与它们关联的边得到图 G'，那么 G' 的连通分支不超过 k 个.

介绍完图论的基本框架，我们要介绍一些基本的概念，这将有助于我们后续课程的学习，也是为了统一数学语言。

子图 (Subgraph): 子图 G' 中所有的顶点和边均包含于原图 G。即 $E' \in E$，并且 $V' \in V$。

生成子图 (Spanning Subgraph): 生成子图 G' 中顶点个数 V' 必须和原图 G 中 V 的数量相同，而 $E' \in E$ 即可。

导出子图 (Induced Subgraph): 导出子图 G' 中 $V' \in V$，但对于 V' 中任一顶点，只要在原图 G 中有对应边，那么就要出现在 E' 中。

1.2 树

在各种各样的图中，有一类简单但是很重要的图，那就是"树". 树之所以重要，不仅仅因为它在众多领域有着广泛的应用，更在于图论本身. 因为树是非常简单的图，所以在讨论关于图的一般性结论或猜想时，可以先考虑树这种情形.

先引入几个概念.

在图 G 中，一个由不同的边组成的序列:

$$e_1, e_2, \ldots, e_m.$$

如果其中边 $e_i = (v_{i-1}, v_i), i = 1, 2, \ldots, m$. 则称这个序列是从 v_0 到 v_m 的**链**. 数 m 称为这条链的长. v_0 与 v_m 称为这条链的圈.

在图1.6中，e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 组成一条链，e_1, e_2, e_3 组成一个圈.

如果图 G 中的任意两个顶点 u 和 v，都有一条从 u 到 v 的链，则称这样的图 G 为**连通图**. 不是连通的图称为不连通图.

图1.6中左侧为连通图，右侧为不连通图.

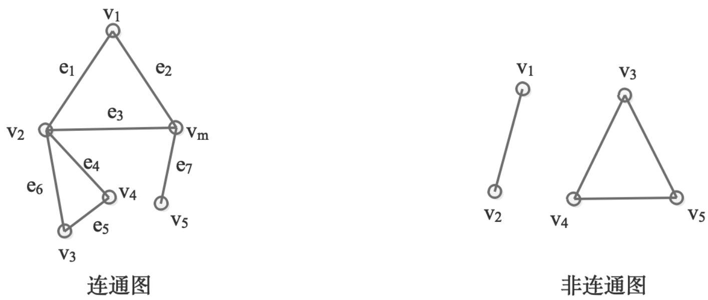


图 1.6: 连通图

现在给出树的定义.

一个连通且没有圈的图称为**树**. 通常用英文字母 T 表示树. 图1.7就是一个有 8 个顶点的树.

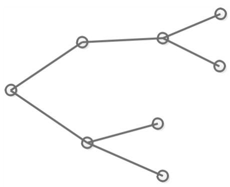


图 1.7: 树

显然，一个不含圈的图必定是由一个或数个顶点不相交的树所组成的. 我们称这样的图为**森林**. 图1.8就是一个森林，它由 3 个树组成.

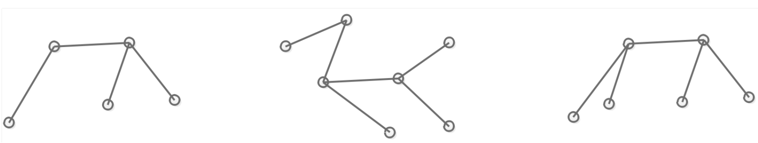


图 1.8: 森林

度为 1 的顶点称为**悬挂点** (或树叶).

定理 1.4. 定理一

如果树 T 的顶点数 $\geqslant 2$，则 T 中至少有两个悬挂点.

证明 设想我们从某个顶点 u 出发，沿着 T 的边走，已经走过的边不再重复. 由于树是没有圈的，因此不会回到已经走过的点，也就是说每个顶点之多走一次. 如果我们走到的一个点不是悬挂点，由于这个点的度大于 1，还可以继续走下去. 但 T 的顶点个数是有限的，所以不可能永远走下去. 如果在顶点 v 处不能再继续走下去了，则顶点 v 就是一个悬挂点.

我们从一个悬挂点 v 出发，又可以走到另一个悬挂点 v'，所以树 T 至少有两个悬挂点.

对于一棵树而言，设顶点数为 n，则它的边数 $e = n - 1$. 这个结论证明并不难，可以通过数学归纳法，在此不再赘述. 此外，对于一个树而言，有如下性质:

性质 设 T 是有 n 个顶点，e 条边的图. 则下列性质是等价的.

1. 图 T 是树;
2. 图 T 无圈，并且 $e = n - 1$;
3. 图 T 连通，并且 $e = n - 1$.

练习 1.3 设 T 是树，则 T 中任何两个顶点之间恰好有一条链；反之，若图 T 中，任何两点之间恰有一条链，则 T 必是树.

证明 若 T 是树，由于 T 是连通的，所以 T 中任意两个顶点之间至少存在一条链，又因为 T 无圈，任意两点之间必有一条链.

反之，若 T 中任何两点之间恰有一条链，则 T 显然是连通的，同时 T 必定无圈. 否则，圈上任意两点之间就至少有两条链，这与假设矛盾.

练习 1.4 n 个城市，每个城市都可以通过一些中转城市与另一个城市通话，证明至少有 $n - 1$ 条直通的电话线路，每条连接两个城市.

证明 作图 G：用 n 个顶点表示 n 个城市，若两个城市之间有直通电话，则在相应的顶点之间连一条边. 由题意知，图 G 是连通图. 故 G 的边数一定 $\geqslant n - 1$，从而至少有 $n - 1$ 条直通的电话线连接两城市.

本题也可这样考虑：若得到的连通图 G 有圈，我们就去掉这个圈的一条边，得图 G_1，此时 G_1 比 G 少了一条边，但仍然是连通的. 如果 G_1 还有圈，在去掉圈的一条边得到连通图 G_2，这样下去，直到图中没有圈，这个图当然就是树. 它有 $n - 1$ 条边. 故图 G 至少有 $n - 1$ 条边.

关于树的定理和习题还有许多，为了避免弄混本章的重点，我们在此不再赘述。如有兴趣可以自行查找离散数学相关材料进行学习.

1.3 平面图的预备知识

定义 1.1. 完全二部图与完全偶图

设 $G=(V,E)$ 为二部图，$V=X\cup Y$，且 X 中的任一顶点与 Y 中每一个顶点均有且仅有唯一的一条边相连，则称 G 为完全二部图或完全偶图. ♣

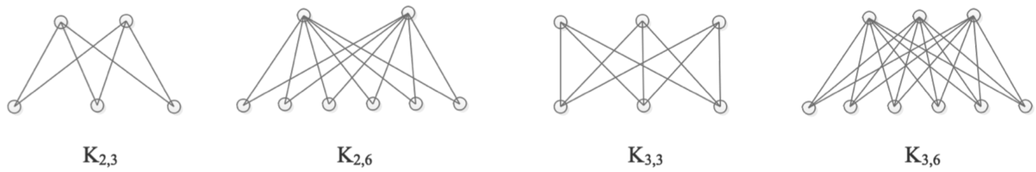


图 1.9: 完全二部图与完全偶图

二部图理论在图的实际应用中有着重要的地位. 如果 $|X|=m,|Y|=n$ 且 X 中的每一个节点与 Y 中的每一个节点相关联，我们称其为完全二部图 $K_{m,n}$. 历史上最为著名的二部图是 $K_{3,3}$，其重要性在于它基本上可以刻画所有的平面图性质. 如果一个图 G 可以画在平面上，使得边与边仅仅在节点处相交，我们称其为**平面图**. 1930 年波兰数学家库拉托夫斯基 (Kuratowski) 指出，只要一个图中有 $K_{3,3}$ 结构，那么他是不可能画在平面图上的. 这一结构从内在结构上反映出了图的拓扑性质，被当今最为著名的拓扑图论学家托马森 (C.Thomassen) 称为迄今为止最为深刻的图论结果之一. 当一个连通图 G 中的节点的度均为偶数时，被称为**欧拉图**. 这是为了纪念伟大的瑞士数学家欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题时所作出的突出贡献. 他的那篇文章称工地解决了哥尼斯堡七桥问题，同时表明了一条新的数学分支——拓扑学的诞生.

图论中，我们常用 $G-\{e\}$ 来表示删除某条边，用 $G+w$ 来表示添加某条边。当然，对图的操作不仅仅局限于添加或删除一些点或边，还常常用到“收缩边”这一操作，其定义如下：

定义 1.2. 可收缩边

设 G 是 k 连通图，e 为 G 的边，G 收缩 e 后所得到的图记为 G/e，若 G/e 仍未 k 连通图，则称 e 为 G 的 k 可收缩边，简称可收缩边. 不含 k 可收缩边的非完全 k 连通图称为收缩临界 k 连通图. ♣

如果你觉得上面的概念难以理解，那么我们可以换一种思路认识边收缩。可收缩边的逆运算就是顶点分裂，即将一个顶点分裂成两个，然后再将两个顶点等价替换原来的点。

由可收缩边直接引出的一个概念就是**桥**，也称为**割边**，它的含义为：若切断了该边，则整个图的连通情况就发生了变化，则该边为桥或割边.

定理 1.5. Kőnig 定理

一个图是二分图当且仅当它不包含奇列环. ♡

证明 显然，一个二分图没有奇长的环，等价转化为图 G 无奇长环，为了更具一般性，我们

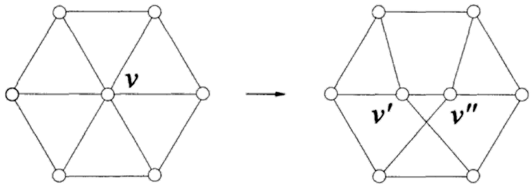


图 1.10: 顶点分裂

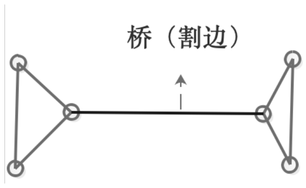


图 1.11: 割边示意图

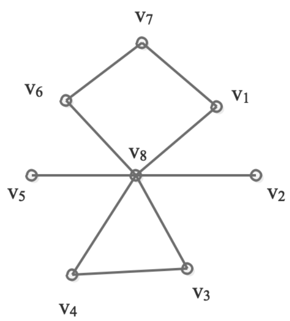
假定 G 是联通的。令 T 为 G 的生成子树，那么 T 是二分的且有 $V(T)=V(G)=V_1\cup V_2$，若 T 表示 G 二分图的一个部分，那么 G 就有一条边 $e=xy$ 两端都在 V_1 中，T 中从 x 到 y 的路径 P 长度是偶数. 因此，G 中循环 $P+e$ 的长度为奇数.

定义 1.3. 匹配与极大匹配

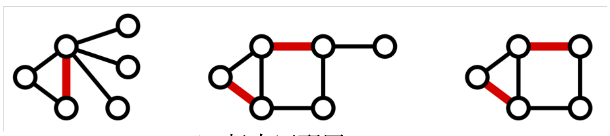
若边集 $M\subseteq E(G)$ 中的两条边都没有一个端点是相同的，则 M 称为 G 中的一个匹配 (Matching). 若 M 是图 G 中包含边数最多的匹配，则称 M 为 G 的一个最大匹配. 若最大匹配包含了所有的顶点，则称它为 G 的一个完美匹配. 一个图不一定包含完美匹配. ♣

如何判断一幅图中是否存在完美匹配呢？塔特给出了一则定理：G 有完美匹配当且仅当 $odd(G-S)\leqslant |S|$，对所有 $S\subset V$ 成立。

例如，在图1.12(a)，设 $M_1=\{v_6v_7\}, M_2=\{v_6v_7, v_1v_8\}, M_3=\{v_6v_7, v_1v_8, v_3v_4\}$，则 M_1, M_2, M_3 都是 G 的匹配. 而图1.12(b) 中的三幅图则是极大匹配.



(a) 匹配图



(b) 极大匹配图

图 1.12: 匹配与极大匹配

如果 G 的每一条边都至少一个端点在 U 上，则称顶点集 $U \subseteq V(G)$ 是 G 上的一个**顶点覆盖**. 于是我们可以引出下面的定理.

定理 1.6. Kőnig-Egerváry 定理

二分图中的最大匹配数等于这个图中最小顶点覆盖数.

这个定理的证明需要用到我们后面才会学习的门格尔定理，此处先留下一个伏笔.

1.4 块与连通性

如果 G 是一个图，我们在边集 E 上定义一个关系如下: 若 $e_1 = e_2$ 或 G 有一个包含 e_1 和 e_2 的循环，则 $e_1 \sim e_2$. 易知，$\sim$ 是一种等价关系. 一个等价类连通该类中所有边的顶点若是 G 的子图，则称它为 G 中的**块**. 我们将孤立的顶点也视为块，因此各种图就等价于它全部块的并集. 因此，一条与其他边不相等的边 e 是 G 的割边，两个块的公共点称为割点. 易知，下列叙述是等价的：设图为 G

1. G 中的一条边 e 是切边，当且仅当 e 的两端属于不同的连通分量.
2. G 中的 v 是切点，当且仅当 $G - v$ 有更多的连通分量.
3. 若 u, v 是 B 块中至少两条边的顶点，那么 B 有一个包含 u 和 v 的圈.
4. 一般情况下，图 G 中两个块最多只有一个共同顶点，该点称为 G 的切点.
5. 若 $B_1, B_2, \dots, B_k (k \geqslant 3)$ 是 G 中的不同块，使得 $B_i \cap B_{i+1} =\neq \emptyset$，其中 $i = 1, 2, \dots, k-1$，并且 $B_1 \cap B_2, B_2 \cap B_3, \dots, B_{k-1} \cap B_k$ 是不同的块，那么 $B_1 \cap B_k = \emptyset$.

设 G 是图，k 是自然数，那么 G 是 k 连接的，如果 G 的次序至少是 $k+1$，并且对任何集合 S，最多有 $k-1$ 个顶点，$G - S$ 是连通的。图 G 的连通量是使 G 是 k-连通的最大的 k 值.

如果一个多图没有环路，并且底层是 2-连通的，那么这个多图是 2-连通的。注意到 2-连通的多图至少有 3 个点，当 $k \geqslant 3$ 时，一个多图是 k 连通的当且仅当它是 k 连通图 (并且即没有环也没有多边).

若 $G - S$ 是不连通的，则图 G 的顶点集合 S 是分离的，若 u, v 是 $G - S$ 的不同分量中的顶点，那么我们就称 S 将 u, v **分离** ($separating$). 于是有：

定理 1.7. 连通性定理

设 G 是至少为 3 连通的图，那么下面几句是等价的.

1. G 是 2 连通的.
2. G 中任意两点共环.
3. G 中任意两边共环.
4. G 无割点.
5. 对 G 中的任意顶点 $v, G - v$ 连通.
6. G 仅有一个块.

显然，一个长度至少为 3 的图是 2 连通的. 若 H 是 2-连通图，并且 P 是一条路，使得 $P \cap H$ 由 P 中两条边组成. 显然，$H \cup P$ 是 2 连通的，因此我们可以通过一个长度至

少为 3 的循环开始，然后依次添加一条只有与当前图端点相同的路来构造 2-连通图，如此得到所有的 2-连通图.

这个性质的证明也十分简单. 令 H 为 G 中的一个环，若 $H = G$，显然成立. $H \neq G$ 时，因图 G 是连通的，它应包含一条边 $u, v \in E(G) \backslash E(H)$ 使得 $v \in V(H)$. 因此，G 是 2-连通的. $G - u$ 是连通的. 令 Q 为 $G - u$ 中从 v 到 H 中某些点的最短路径，那么由 uv 边和 Q 组成的路径 P 与 H 的终点完全相同，将这条路加入当前图中，重复上述操作可得完全图 G.

一个 2-连通图在一个循环和一个路径序列中的分解称为图的 ear 分解。

定理 1.8. 塔特定理

每一个 3 连接图都可以通过顶点分割和边缘添加的序列从轮子中得到，所以所有的中间图都是 3 连接的。

托马森证明了下面的 “广义收缩” 运算足以将每一个 3 连通图简化为 K_4. 若 G 是图，$e \in E(G)$，设 $G//e$ 是缩边图 G/e 通过将多条边替换为连接同一对顶点的单条边而得到的图。那么对于每条不与中心相关联的边 e，$W_n//e = w_{n-1}$(若 $n > 3$). 这里的证明过程不再赘述，此外，原书中还罗列了如下定理:

- 至少为 5 阶的 3 连通图 G 包含一条边 e，使图 G//e 是 3 连通的.
- 如果 G 是一个 2 连通图，那么 G 有一个环 C，使得对于 G 的每条边 e, G/e 都没有割点.
- 如果 G 是至少有 5 个顶点的 3 连通图，且 $e_0 = x_0y_0$ 是 G 的一条边，则 G 与 e_0 有一条无端点的可收缩边.

除上述外，图论中最基本的定理就是**门格尔定理**，设 s 和 t 是图 G 中互不相连的两个顶点，且 k 是一个自然数，那么下列定义是定价的:

1. 若两条联结的 u 和 v 路，除 u 和 v 外没有公共顶点，则称此两条路是联结的 u 和 v 的不相交路.
2. 若联结 u 和 v 的两条路上没有公共边，则称这两条路是联结 u,v 的边不相交路.

由门格尔定理直接得出的另一个推论是: 设 k 为自然数，若图 G 中至少包含 $k + 1$ 个顶点，那么下列描述是等价的:

1. G 是 k 连通的.
2. 如果 x 和 y 是 G 的两个不同的顶点，那么 G 从 x 到 y 有 k 条路径，使得它们中除了 x 和 y 之外没有一个顶点.
3. 若 $A = \{a_1, \ldots, a_p\}, B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ 是 G 中不相交的点集，并且 $s_1 + \cdots + s_p = t_1 + \cdots + t_q = k$，那么 G 有 k 条从 A 到 B 的路径使得 s_i 从 $a_i(i = 1, \ldots, p)$ 开始，t_j 在 $b_j(j = 1, \ldots, q)$ 结束，并且这些路径中没有两条在 $V(G) \backslash (A \cup B)$ 中有共同顶点.

1.5 平面图基础

关于平面图嵌入，我们在前文提到过平面图的概念：如果把一个图画在平面上时，能够使它的边仅在端点处相交，那么称这个图为**平面图**，也称为**可以嵌入平面的**。有些图从表面上看有几条边是相交的，我们不能就此肯定它就不是平面图，有时可以通过找到其同构图来确定.

下面我们将用所谓的“球极平面射影”来说明平面可嵌入图与球面可嵌入图是一样的. 为了证明这一点，我们作一个称为球极平面射影的映射. 考虑放在平面 P 上的一个球面 S，并且用 z 表示 S 上与 S 和 P 的切点正相对的点. 给出映射 $\pi : S/\{z\} \longrightarrow P$，定义当且仅当 z, s, p 共线时 $\pi(s) = p$，称 π 为从 z 出发的“球极平面映射”，在图??中做出了说明.

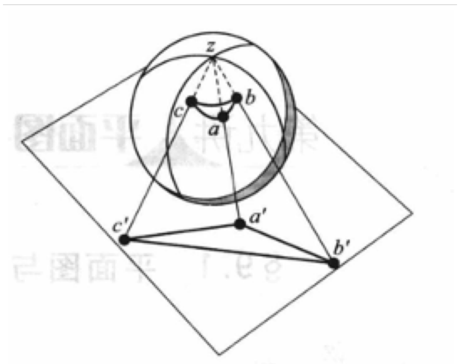


图 1.13: 球极平面映射

于是我们可以得到：**当且仅当图 G 可以嵌入到平面时，它可以嵌入球面.**

同样地，我们可以将一个空间中的多面体 Ω 放入到一个球面内部，利用球心向外的射影技术我们可以知道下面的推论.

当且仅当图 G 是一个空间多面体时，它可以嵌入球面.

此外，所有图均可嵌入 R^3 中，以后我们可以不区分球面嵌入图、平面嵌入图和空间多面体，即可以在这三个概念之间相互切换使用.

在平面拓扑学中一个十分重要又明显的结果，就是下面的定理.

定义 1.4. 若尔当曲线

平面 R^2 上的任意一个简单封闭曲线 C 将 R^2 分成三个部分：C 的内部 $int(C)$，C 的外部 $ext(C)$ 和 C. 特别地，联结 $int(C)$ 中的一个点 s 与 $ext(C)$ 中的一个点 t 的任何一条曲线 γ 必定与 C 相交于某一点. ♣

注意，有时候我们也将 $Int(C) = C \cup int(C)$ 和 $Ext(C) = C \cup ext(C)$ 分别称为 C 的内部和外部. 实际上，他们分别是 $int(C)$ 和 $ext(C)$ 的（拓扑意义下的）“闭包”.

性质 平面图的一些引理

1. 若 G 是一个平面图，那么 G 平面上存在一个表示使得所有的边都是简单的多边形弧.
2. 如果 Q 是平面上的开弧连通集，则 S 中的任意两点，都由 S 中的一个简单的多边

形弧连接.

3. 如果 C 是平面上的一个简单的、闭合的多边形弧，那么 $R2/C$ 由两个精确的弧连接的分量组成，每一个都以 C 为边界.

关于这些引理的描述和证明，书上给出了明确的解释，我们直接把目光放在平面图的本意上。下面我们将通过对欧拉定理的重述来定义平面图。对任意一个平面图，我们将图中的每个区域称之为一个平面图的一个面。在中学课本中我们已经学习过关于凸多面体的欧拉公式，设凸多面体有 v 个顶点、e 条棱和 f 块面，则 $v-e+f=2$. 我们可以把这个公式推广到平面图上来。

定理 1.9. 欧拉定理

如果一个连通的平面图 G 有 v 个顶点、e 条边、f 个面，那么

$$v-e+f=2$$

♡

证明 我们用数学归纳法证明结论成立.

若 G 只有一个顶点，则 $v=1$，$e=0$，$f=1$，故 $v-e+f=2$ 成立.

若 G 为一条边，则 $v=2$，$e=1$，$f=1$，所以 $v-e+f=2$ 成立.

设 G 为 k 条边时欧拉公式成立，即：$v_k-e_k+f_k=2$，现考察 G 为 $k+1$ 条边时的情形.

由于在 k 条边的连通图上增加一条边，使它仍为连通图，只有两种情形：

1. 增加一个新顶点 v'，v' 与图中的一点 v 相邻，如图1.14(1) 所示，此时 v_k 与 e_k 都增加 1，而面数 f_k 不变，故

$$(v_k+1)-(e_k+1)+f_k=v_k-e_k+f_k=2$$

2. 用一条边连接图中的两个顶点 v 和 v'，如图1.14(2) 所示，这是 e_k 和 f_k 都增加 1 而顶点数 v_k 没有变，故

$$v_k-(e_k+1)+(f_k+1)=v_k-e_k+f_k=2$$

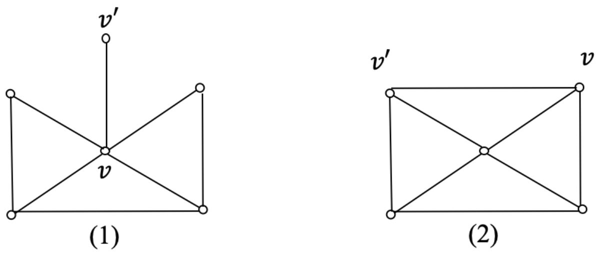


图 1.14: 欧拉公式证明

欧拉定理的一个重要应用是由此可以决定一个平面简单图中最多的边数. 因为一个面上至少有 3 条边，f 个面的边界上至少有 $3f$ 条边. 另外，一条边最多是两个面的边界，所以

$$2e \geqslant 3f, f \leqslant \frac{2}{3}e.$$

即

$$e \leqslant 3v - 6.$$

这就证明了下面的定理.

定理 1.10. 非平面图的判定

一个连通的平面简单图 G 有 $v(v \geqslant 3)$ 个顶点及 e 条边，则

$$e \leqslant 3v - 6.$$

♡

上述定理可以用来判断某些图是非平面图.

练习 1.5 证明完全图 K_5 不是平面图.

证明 因为 $v = 5, e = 10$ 不满足 $e \leqslant 3v - 6$，所以 K_5 不是平面图.

练习 1.6 证明 $K_{3,3}$ 图不是平面图.

证明 如果 $K_{3,3}$ 是平面图，因为在 $K_{3,3}$ 中任取三个顶点，其中必有两个顶点不相邻，故每一个面都至少有 4 条边围成，由

$$4f \leqslant 2e, f \leqslant \frac{e}{2}.$$

代入欧拉公式

$$2 = v - e + f \leqslant v - e + \frac{e}{2}$$

即

$$e \leqslant 2v - 4.$$

在 $K_{3,3}$ 中，$v = 6$，$e = 9$，且 $9 > 2 \times 6 - 4$，矛盾. 故 $K_{3,3}$ 不是平面图.

除了上面的应用外，欧拉公式还证明了一个重要结论：存在且只存在 5 种正多面体：正四面体、正方体、正八面体、正十二面体和正二十面体。欧拉公式和导出的不等式虽然可以用来否定一些图是平面图，但是它们对于肯定一个图是平面图却无能为力. 1930 年，波兰数学家库拉托夫斯基证明了一个简洁而漂亮的结果：所有非平面图都包含着 K_5 或 $K_{3,3}$ 作为子图. 为了明确的叙述这个结果，先给出两个图“同胚”的概念.

如果两个图中的一个图是由另一个图的边上插入一些新的顶点而得到的，那么，这两个图称为同胚的. 根据两个图同胚的概念，可以知道一个图的边上插入或删去一些度数为 2 的顶点后，不影响图的平面性. 于是我们可以给出库拉托夫斯基定理

定理 1.11. 库拉托夫斯基定理

一个图是平面图当且仅当它不包含同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

♡

第一章习题

1. 国际乒乓球男女混合双打大奖赛有 24 对选手参加，赛前一些选手握了手，但同一对选手之间不握手. 赛后某个男选手问每个选手的握手次数，各人的回答个不相同，问这名男选手的女搭档和多少人握了手?
2. 在 7 天内安排 7 门课的考试，要使得同一位教师所教的两门课考试不排在接连的两天里. 如果每一位教师教的考试课最多 4 门，证明这种安排是可能的.

3. 有 n 名选手 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 参加数学竞赛，其中有些选手是相互认识的，而且任何两个不认识的选手都恰好有两个共同的熟人. 若一直选手 A_1 与 A_2 相互认识，但他们俩没有共同的熟人，证明他们俩的熟人一样多.