平面图书式嵌入

Yurk Lee

2021/04/26

1 门格尔定理

描述连通度一个重要的定理就是**门格尔定理**.

1927 年，门格尔指出：要分离 s 和 t 所需要的最少顶点数等于 s、t 之间不相交路（独立轨）的最大条数.

门格尔定理的具体含义还要从连通度说起. 点连通度即为："去掉某些点后，整个图还能正常运行"，而如何确定两个点之间的不连通程度（也就是分离程度）呢？即为除了两点之间的通路外，去掉所有的不连通路，也就是不相交路. 一位捷克籍的加拿大学家指出：把门格尔定理中的"最小顶点数"改成"最小的边数"，把"顶点的不相交路"改成"边的不相交路"结论也同样成立. 独立轨的概念最先由惠特尼在他的"一般曲线理论"中提出，然而惠特尼却并没有在提出这个概念后受到学术界的重视. 直到后来著名图论学家**柯尼希**在他的著作《极限图与无向图理论》中将门格尔和惠特尼的理论一同收录其中，才使得二人的名声大噪. 1955 年，号称为美国军方智库的兰德公司两位科学家丹齐格与富兰克林提出了最大流最小截定理可推出门格尔定理. 半年后，兰德公司的另一位科学家鲁拜克尔指出：门格尔定理可以用来推出最大流最小截定理. 于是我们可以得知：最大流最小截定理与门格尔定理互为充要条件.

柯尼希在他的著作中还给出了自己的二部图理论. 有趣的是，在柯尼希发表二部图理论的同一期杂志上，还刊登了另一个人对这个理论的另一种证明方法，这个人叫埃格瓦里. 他们两个人在同一时间分别独立证明了该定理，后人因此将此定理称为**柯尼希-埃格瓦里定理**. 而由埃格瓦里证明方法引申出来的新方法，就是后来计算机理论中的**匈牙利算法**.

言归正传，他们俩提出的理论又被称为**完美匹配理论**，即：每个二部图都有 1 个匹配，每个 $k-$正则的二部图都能分解出 k 个匹配. 直观地理解柯尼希-埃格瓦尔定理，即为在二部图中最大的边匹配数等于最小顶点覆盖数：

也就是说，要想控制整个二部图我们有两种策略：1. 控制它们之间的匹配关系。2. 控制一半的

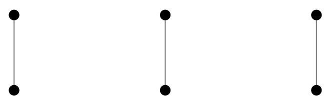

图 1: 最大匹配与最小覆盖

顶点.

2 平面图嵌入

学习了这么久的平面图嵌入，你可能会疑问：究竟什么是嵌入？在学习平面图时，我们学过一个概念叫**可平面图**，意思就是说某个图可以通过同构关系来变成平面图，而平面图嵌入就是指把某个图画成平面图的样子（即直观平面图）.

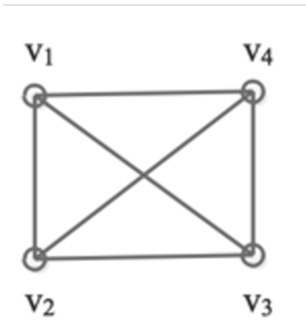

图 2: 平面图

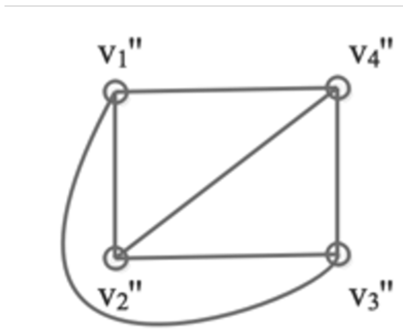

图 3: 平面图嵌入

图 3 是平面图，而图 4 是图 3 的平面图嵌入. 值得注意的是，一般所谈的平面图，不一定是指平面图嵌入，但讨论性质的时候我们都默认指的是平面图嵌入.

平面图嵌入的一条公理就是**三维空间嵌入理论**，即：所有的图都能在三维空间中嵌入. 这是什么意思？举个例子，著名的 K_5 在二维空间一定相交 (因为不满足平面图的必要条件：欧拉判定定理，因此具有可证伪性)，但我们如果把 K_5 的各条线拉伸到三维空间中，我们一定能找到让它各个边不相交的放置方法. 例如著名的圆函数 $(\sin t, \cos t)$，它在二维平面内是相交的，但是通过螺旋线就可以将其嵌入到三维空间中（例如弹簧）.

由于要拓展到一般空间中，而现在的“边”的概念又较为局限，因此我们将一般空间中的“边”拓展为“简单多边形弧”（例如将正方形的边拓展为正方体的棱）. 何为“简单多边形弧”？平面上非闭合曲线中，连接相邻两点的边即为**简单多边形弧** (引理 2.1.2). 易知：平面图嵌入后的边都是简单多边形弧 (引理 2.1.1).

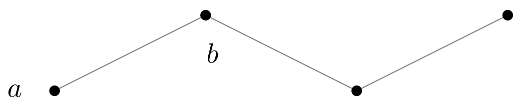

图 4: 简单多边形弧

上图中，a、b 两点组成的即为简单多边形弧.

3 若尔当曲线与欧拉定理

在前面我们已经简略介绍过若而当曲线定理：一个闭合曲线 C 将平面分为三个部分：内侧面、外侧面与曲线自己. 现在我们分别在内侧与外侧取两个点，并且将它们相连，令交点为上述两个点，

可得如图:

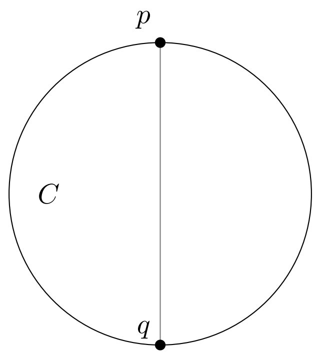

图 5: 若尔当示意图

我们将 pq 分离 C 左半部分时称为分离集 S_1，分离 C 右半部分时称为 S_2. 我们令 pq 曲线为 P. 现在思考这样一个问题：整幅图的边界都有谁? C、P$\bigcup S_1$ 与 P$\bigcup S_2$(含义即为 P 作为左侧边界与右侧边界时). 此时图中共有 3 个面，比原来多了一个. 这给我们的直观感受就是：**添加了一条简单多边形弧等价于添加一个面.**

欧拉定理：如果一个连通的平面图 G 有 v 个顶点、e 条边、f 个面，那么

$$v-e+f=2$$

我们用数学归纳法证明结论成立.

若 G 只有一个顶点，则 $v=1$，$e=0$，$f=1$，故 $v-e+f=2$ 成立.

若 G 为一条边，则 $v=2$，$e=1$，$f=1$，所以 $v-e+f=2$ 成立.

设 G 为 k 条边时欧拉公式成立，即：$v_k-e_k+f_k=2$，现考察 G 为 $k+1$ 条边时的情形.

由于在 k 条边的连通图上增加一条边，使它仍为连通图，只有两种情形：

1. 增加一个新顶点 v'，v' 与图中的一点 v 相邻，如图6(1) 所示，此时 v_k 与 e_k 都增加 1，而面数 f_k 不变，故
$$(v_k+1)-(e_k+1)+f_k=v_k-e_k+f_k=2$$

2. 用一条边连接图中的两个顶点 v 和 v'，如图6(2) 所示，这是 e_k 和 f_k 都增加 1 而顶点数 v_k 没有变，故
$$v_k-(e_k+1)+(f_k+1)=v_k-e_k+f_k=2$$

欧拉定理的一个推论:$e\leqslant 3v-6$ 在此就不再展开讨论，借助该定理我们可以知道 K_5 $K_{3,3}$ 都不是平面图。

若而当曲线定理指出：一个封闭的曲线将整个平面分成两部分，其中一部分为内部，另一部分为外部（如果算上曲线本身的话应该是三部分）. 沙里弗斯指出：在若而当曲线所分成的两个部分中，其中任意一个部分的一个封闭曲线都能逐渐缩小成为一个点，这是拓扑学上一种较为直观的认识. 于是我们将两者的定理进行综合，得出**若尔当-沙里弗斯定理**：若 f 是可令闭合曲线 C 变化为另一个闭合曲线的同胚关系，那么 f 同样可以令 C 等价于整个平面.

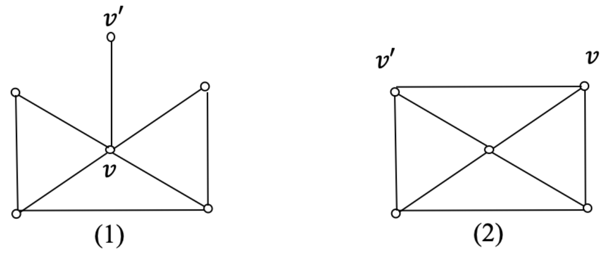

图 6: 欧拉公式证明

最开始的人们无法确认这是一条定理，还是一条公理. 人类经历了漫长岁月，才认识到这一事实需要严格的证明. 又花了漫长岁月才给出了严格的证明. 我们为什么要用如此晦涩的语言来描述如此直观的事实？其原因在于人的直觉往往并不可靠，此外，人类在拓扑学方面的直觉相对有限.

沙里弗斯定理在三维空间中就已经失效. 而若而当定理在三维的推广留下了这样一个问题：一个二维的球面拓扑嵌入三维球面中，是否将三维球面分成两个三维球体？科学家们给出了反例：Alexander Horned Sphere，这需要沙里弗斯定理的帮助. 如果需要光滑，那么若而当引理的推论在四维情形仍未解决，这与四维光滑的庞加莱猜想有关.

书中 2.2 部分是通过沙里弗斯视角来证明整个定理的成立的，在此之前我们需要加经历一段较为漫长的逻辑重塑，来重新认识一下若尔当曲线定理是如何证明的.

定理 2.1.8 指出，若将闭合曲线去掉，那么平面将不连通并且它最多只能将平面分成两个部分（2.1.12）. 而如果曲线不是闭合的呢？定理 2.1.11 指出：此时平面去掉非闭合曲线后，平面仍然是连通的.

值得注意的是，对于两个集合而言，如果它们之间存在着一种对应关系，那么这种关系是唯一确定的，即为同胚 (2.1.9:Γ_3 在同构性之下是唯一确定的). 至于托马森的 92 定理，可能是介于内外面的一种拓扑学定义，在此不再赘述.

4 库拉托夫斯基定理

欧拉定理给出了判断是否是平面图的必要条件，但是仅此还不够，我们迫切需要找到一种充要条件进行描述. 假设某地有三座工厂，分别供应着城市的电力、光缆与供水管道. 工厂的对面坐落着三个城市，每座城市都需要这三种管道接入. 那么是否存在一种情况，使得三种管道尽量不相交地在同一深度地下铺开？

答案显然是否定的，这个问题等价于 $K_{3,3}$ 是否是可嵌入平面. 但是数学应该有推广一般的能力，也就是说：如果我们把其中的一两个点分裂，那么结论是否仍然成立？很显然，结论仍然成立. 在前面的章节中我们已经学习，可收缩边与顶点分裂是一种互逆运算. 运用直观感受来说：可收缩边即为在该边两端点系一根皮带，然后用力拉伸皮带，两个端点就会很丝滑地变成一个端点.

由于平面图的拓扑变化无穷，因此即便是“嵌入”这个词，对于众多的平面图而言也太过于泛化. 本部分中，我们将“直线嵌入”与“凸嵌入”分别讨论. 事实上，这两种嵌入不过是平面图的两种画法而已，任何一个平面图都可以进行“直线嵌入”与“凸嵌入”，并且两种画法并不是非此即彼的.

5 平面图性质

6 3-连通平面图

7 对偶图

何为对偶图？定义：设 G 是平面图的某个平面嵌入，构造 G 的对偶图 G^* 如下：

(1) 在 G 的面 R_i 中放置 G^* 的顶点 v_i^*.

(2)e 为 G 中的任意一条边，若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上，作 G^* 的边 e^* 与 e 相交，且 e^* 关联 G^* 的位于 R_i 与 R_j 中的顶点 v_i^* 与 v_j^*，即：

$$e^* = (v_i^*, v_j^*)$$

若 e 为 G 中的桥，且在面 R_i 的边界上，则 e^* 是以 R_i 中 G^* 的顶点，v_i^* 为端点的环，即：$e^* = (v_i^*, v_i^*)$.

G 的对偶图有如下性质: (1)G^* 是平面图，且是平面嵌入的.
(2)G^* 是连通图.
(3) 若边 e 为 G 中的环，则 G^*j 与 e 对应边 e^* 为桥；若 e 为桥，则 G^* 中与之对应的 e^* 为环.
(4) 在多数情况下，G^* 为多重图.
(5) 同构的平面图（平面图嵌入）的对偶图，不一定是同构的.