Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I

Blatt 4

Xiheng He

Mai 2021

3. Aufgabe (10 Punkte, Notenbonus):

a) Sei SuperComputer ein leistungsfähiger Rechner, der in einer Sekunde 1.000 Elementaroperationen ausführen kann. Für ein bestimmtes Problem seien fünf verschiedene Algorithmen verfügbar. Hierbei benötigt der i-te Algorithmus bei einer Eingabe der Eingabegröße n genau $T_i(n)$ Elementaroperationen, wobei

$$T_1(n) = 500 \cdot n,\ T_2(n) = 50 \cdot n \log_2(n),\ T_3(n) = n^2,\ T_4(n) = \frac{n^3}{100},\ T_5(n) = \frac{3^n}{1000}$$

ist. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, in der die Eingabegrößen angegeben sind, für die der i-te Algorithmus auf dem SuperComputer (ziemlich) genau eine Sekunde, eine Minute, eine Stunde, einen Tag, einen Monat bzw. ein Jahr Rechenzeit benötigt. Lösungsweg mit angeben!

$\boldsymbol{T_1(n)}$:

60s: $T_1(n) = 500 \cdot n = 1000 \cdot 60 \Longrightarrow n = 120$; 3600s: $T_1(n) = 500 \cdot n = 1000 \cdot 3600 \Longrightarrow n = 7200$; 1d = 86400s: $T_1(n) = 500 \cdot n = 1000 \cdot 3600 \cdot 24 \Longrightarrow n = 172800$; 1M = 2592000s: $T_1(n) = 500 \cdot n = 1000 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 30 \Longrightarrow n = 5184000$; 1Y = 31536000s: $T_1(n) = 500 \cdot n = 1000 \cdot 31536000 \Longrightarrow n = 63072000$

$\boldsymbol{T_2(n)}$:

1s: $T_2(n) = 50 \cdot n \log_2(n) = 1000 \Longrightarrow 2^{20} = n^n \Longrightarrow n \approx 7$; 60s: $T_2(n) = 50 \cdot n \log_2(n) = 1000 \cdot 60 \Longrightarrow n \approx 163$; 1d = 86400s: $T_2(n) = 50 \cdot n \log_2(n) = 1000 \cdot 86400 \Longrightarrow n \approx 103708$;

1M = 2592000s: $T_2(n) = 50 \cdot n \log_2(n) = 1000 \cdot 2592000 \Longrightarrow n \approx 2442956$;

1Y = 31536000s: $T_2(n) = 50 \cdot n \log_2(n) = 1000 \cdot 31536000 \Longrightarrow n^n = \exp(20 \cdot 31536000) \Longrightarrow n \approx 25627375$

$\boldsymbol{T_3(n)}$:

1s: $T_3(n) = n^2 = 1000 \Longrightarrow n = \sqrt{1000} = 31.622 \approx 32$

60s: $T_3(n) = n^2 = 1000 \cdot 60 \Longrightarrow n = \sqrt{60000} \approx 245$

3600s: $T_3(n) = n^2 = 1000 \cdot 3600 \Longrightarrow n = \sqrt{1000 \cdot 3600} \approx 1897$

1d = 86400s: $T_3(n) = n^2 = 1000 \cdot 86400 \Longrightarrow n = \sqrt{86400000} \approx 9295$

1M = 2592000s: $T_3(n) = n^2 = 1000 \cdot 2592000 \Longrightarrow n = \sqrt{1000 \cdot 2592000} \approx 50912$

1Y = 31536000s: $T_3(n) = n^2 = 1000 \cdot 31536000 \Longrightarrow n = \sqrt{1000 \cdot 31536000} \approx 117584$

$\boldsymbol{T_4(n)}$:

1s: $T_4(n) = \frac{n^3}{100} = 1000 \Longrightarrow n = \sqrt[3]{10^5} \approx 46$

60s: $T_4(n) = \frac{n^3}{100} = 1000 \cdot 60 \Longrightarrow n = \sqrt[3]{10^5 \cdot 60} \approx 182$

3600s: $T_4(n) = \frac{n^3}{100} = 1000 \cdot 3600 \Longrightarrow n = \sqrt[3]{10^5 \cdot 3600} \approx 711$

1d = 86400s: $T_4(n) = \frac{n^3}{100} = 1000 \cdot 86400 \Longrightarrow n = \sqrt[3]{10^5 \cdot 86400} \approx 2052$

1M = 2592000s: $T_4(n) = \frac{n^3}{100} = 1000 \cdot 2592000 \Longrightarrow n = \sqrt[3]{10^5 \cdot 2592000} \approx 6376$

1Y = 31536000s: $T_4(n) = \frac{n^3}{100} = 1000 \cdot 31536000 \Longrightarrow n = \sqrt[3]{10^5 \cdot 31536000} \approx 14665$

$\boldsymbol{T_5(n)}$:

1s: $T_5(n) = \frac{3^n}{1000} = 1000 \Longrightarrow n = \log_3(10^6) \approx 13$

3600s: $T_5(n) = \frac{3^n}{1000} = 1000 \cdot 3600 \Longrightarrow n = \log_3(10^6 \cdot 3600) \approx 20$

1d = 86400s: $T_5(n) = \frac{3^n}{1000} = 1000 \cdot 86400 \Longrightarrow n = \log_3(10^6 \cdot 86400) \approx 23$

1M = 2592000s: $T_5(n) = \frac{3^n}{1000} = 1000 \cdot 2592000 \Longrightarrow n = \log_3(10^6 \cdot 2592000) \approx 26$

1Y = 31536000s: $T_5(n) = \frac{3^n}{1000} = 1000 \cdot 31536000 \Longrightarrow n = \log_3(10^6 \cdot 31536000) \approx 28$

	1s	1m = 60s	1h = 3.600s	1d = 86.400s	2.592.000s	1Y = 31.536.000s
$T_1(n)$	2	120	7200	172800	5184000	63072000
$T_2(n)$	7	163	5763	103708	2442956	25627375
$T_3(n)$	32	245	1897	9295	50912	117584
$T_4(n)$	46	182	711	2052	6376	14665
$T_5(n)$	13	16	20	23	26	28

b) Sie haben sich einen HyperComputer zugelegt, der eine Weiterentwicklung von SuperComputer und 100 mal schneller ist, also 100.000 Elementaroperationen pro Sekunde ausführen kann. Um wieviel kann man die Eingabegröße für die fünf verschiedenen Algorithmen gegenüber SuperComputer erhöhen, wenn man dieselbe Rechenzeit zur Verfügung hat? Diese Veränderung ist (möglichst genau) als Funktion der Eingabegröße (beispielsweise als Faktor oder ähnliches) anzugeben, wobei das für T_2 nicht genau möglich ist.

Hinweis: Es ist **nicht** noch einmal eine Tabelle wie bei Aufgabe 3 anzugeben. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.

$\boldsymbol{T_i(n)}$: SuperComputer $\quad$ $\boldsymbol{T_i(n)'}$: HyperComputer

$$\boldsymbol{T_1(n)} = 500 \cdot n = 10^3 \wedge T_1(n)' = (500 \cdot n) \cdot 100 = 10^3 \cdot 100 \Longrightarrow T_1(n)' = 100 \cdot T_1(n)$$

$$\boldsymbol{T_2(n)} = 50 \cdot n \log_2(n) = 10^3 \Longrightarrow n^n = \exp(20) \Longrightarrow n \approx 7 \wedge T_2(n)' = 50 \cdot n' \log_2(n')$$
$$= 10^3 \cdot 100 \Longrightarrow n'^{n'} = \exp(20 \cdot 100) \Longrightarrow n' \approx 251 \Longrightarrow T_2(n)' = 35.857 \cdot T_2(n) \approx 36 \cdot T_2(n)$$

$$\boldsymbol{T_3(n)} = n^2 = 1000 \Longrightarrow n = 10\sqrt{10} \wedge T_3(n)' = n'^2 = 1000 \cdot 100 \Longrightarrow n' = 10^2\sqrt{10} \Longrightarrow T_3(n)' = 10 \cdot T_2(n)$$

$$\boldsymbol{T_4(n)} = \frac{n^3}{100} = 1000 \Longrightarrow n^3 = 10^5 \wedge T_4(n)' = \frac{n'^3}{100} \Longrightarrow n'^3 = 10^7 \Longrightarrow \frac{n'}{n} = \sqrt[3]{100} = 4.6416 \Longrightarrow T_4(n)'$$
$$\approx 4.64 \cdot T_4(n)$$

$$\boldsymbol{T_5(n)} = \frac{3^n}{1000} = 1000 \Longrightarrow n = \log_3 10^6 \wedge T_5(n)' = \frac{3^{n'}}{1000} = 1000 \cdot 100 \Longrightarrow n' = \log_3 10^8 \Longrightarrow \frac{n'}{n} = \frac{\log_3 10^8}{\log_3 10^6} = \frac{4}{3}$$
$$\Longrightarrow T_5(n)' = \frac{4}{3} \cdot T_5(n) \approx 1.33 \cdot T_5(n)$$