Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik
Blatt 1

Xiheng He

April 2021

1. Aufgabe (10 Punkte):
Beweisen Sie die folgende Gleichung für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(a) durch vollständige Induktion;
Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \binom{1}{1} = \binom{1}{1} = \binom{2}{2} = \binom{n+1}{k+1} \, (k = 1, n = 1)$$

Induktionschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$,

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Induktionsbeweis:
Zu zeigen ist, dass $\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \binom{(n+1)+1}{k+1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} \\
&= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \binom{n+2}{k+1} \text{(Rekursionsgleichung } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\text{)} \\
&= \binom{(n+1)+1}{k+1}
\end{aligned}$$

(b) durch Verwendung der folgenden Gleichung;

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \left(\binom{i}{k+1} + \binom{i}{k} \right)$$

und Indexverschiebung sowie $\binom{k}{k+1} = 0$.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\because \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} &= \sum_{i=k}^{n} \left(\binom{i}{k+1} + \binom{i}{k} \right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} + \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \\
\therefore \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} + \binom{n+1}{k+1} \text{(Indexverschiebung)} \\
&= \binom{n+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} \overset{\binom{k}{k+1}=0}{=} \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$