Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I

Aufgabe 3

Zeigen sie mit vollständiger Induktion, dass $T(n) \in \mathcal{O}(n\ log^2\ n)$ mit

$$T(n) = 2T(n/2) + n\ log\ n, T(1) = 0.$$

Hinweis: $log^2\ n = (log\ n)^2$

Induktionsanfang: $(n = 1)$

$$T(1) = 2T(n/2) + n\ log\ n$$
$$= 2T(1/2) + 1\ log\ 1\ = 0$$

Da 1 log 1 = 0 muss folgendes gelten:

$$T(1/2) = 0$$

sowie

$$2T(n/2) = n\ logn$$

Induktionsvorraussetzung:
Für alle $n \in N\ gilt$:

$$T(n) \in \mathcal{O}(nlog^2\ n)$$

Induktionsschluss: $n + 1 \Rightarrow n$

$$
\begin{aligned}
T(n+1)\ \ &= 2 * T\left(\frac{n+1}{2}\right) + \text{(n+1) log(n+1)}\\
&= 2*\ T\left(\frac{n+1}{2}\right)\ + (n+1)\ log(n+1)\\
&= 2*\ [T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right)]\ + (n+1)\ log(n+1)\\
&= n\ log(n)\ +\ 0\ +\ (n+1)log(n+1)\quad \rightarrow \text{vgl. Induktionsanfang}\\
&= n\ log(n)\ +\ (n+1)\ log[n(1+\frac{1}{n})]\\
&= n\ log(n)\ +\ (n+1)\ [log(n) + log(1+\frac{1}{n})]\\
&= n\ log(n)\ +\ (n+1)\ log(n) + (n+1)\ log(1+\frac{1}{n})\\
&\lim_{n\to\infty} (n+1)\ log(1+\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \text{kann vernachlässigt werden}\\
&= n\ log(n)\ +\ n\ log(n)\ +\ log(n)\\
&\lim_{n\to\infty}\ log(n) = 0 \Rightarrow \text{kann vernachlässigt werden}\\
&= n\ log(n)^2\\
&= n\ log^2(n)
\end{aligned}
$$