Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I

Blatt 8

Xiheng He

Juni 2021

1. Aufgabe: MONOTONE 3-SAT (10 Punkte)

Eine *monotone* Formel F hat die Form $G \wedge H$, wobei G eine Boole'sche Formel in 3-CNF ist, die ausschließlich positive Literale enthält, und H eine Boole'sche Formel in 3-CNF ist, die ausschließlich negierte Literale enthält. Das Problem $MONOTONE - 3 - SAT$ besteht darin, zu entscheiden, ob eine gegebene monotone Boole'sche Formel F erfüllbar ist. Zeigen Sie, dass dieses Problem NP-vollständig ist.

Zu zeigen ist, dass Problem MONOTONE 3-SAT NP-vollständig ist.

Zunächst zeigen wir, dass MONOTONE 3-SAT $\in \mathcal{NP}$.

- Angenommen, dass MONOTONE 3-SAT n Variable besitzt, dann existiert einen Algorithmus mindestens in $O(2^n)$ um eine Wahrheitsbelegung zu finden.

- Einer Algorithmus zur Validierung der beliebigen Erfüllbarkeit für dass MONOTONE 3-SAT kann aber in polynomieller Laufzeit durchführen da alle Variable festgelegt wurden und nur die Erfüllbarkeit überprüft werden muss. D.h. Es gibt aber eine polynomiell zeitbeschränkte DTM M und ein Polynom q, so dass M in nach höchstens $p(|x|)$ Schritten die Eingabe verfizieren (akzeptieren oder ablehnen) kann.

Daraus folgt: MONOTONE 3-SAT $\in \mathcal{NP}$

Anschließend zeigen wir: $\forall x \in$ **3-SAT** $\Leftrightarrow f(x) \in$ **MONOTONE 3-SAT**, $T(f(x)) \in O(n^k)$

Wir definieren eine beliebige Boole'sche Formel F in 3-CNF-SAT.

- F hätte nur ein Literal: dann muss F entweder positiv oder negativ. Wir umformen die positive F in G, oder die negative F in G.

- F hätte genau zwei Literale: $F := (x \vee \neg y)$, dann gilt nach Umformung: $G \wedge H := (x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z)$ mit $(x \vee z) \in G, (\neg y \vee \neg z) \in H$. Falls die beide zwei Literale in F monoton positiv oder negativ, dann kann F ohne zusätzliche Variable in G (positiv) oder H (negativ) umgeformt werden.

- F hätte genau drei Literale:

  (1):$F := (x \vee y \vee \neg z)$, dann gilt nach Umformung: $G \wedge H := (x \vee y \vee l) \wedge (\neg z \vee \neg l)$ mit

  $(x \vee y \vee l) \in G, (\neg z \vee \neg l) \in H$

  (2):$F := (x \vee \neg y \vee \neg z)$, dann gilt nach Umformung: $G \wedge H := (x \vee l) \wedge (\neg y \vee \neg z \vee \neg l)$ mit

  $(x \vee l) \in G, (\neg y \vee \neg z \vee \neg l) \in H$

  (3):Falls alle drei Literale in F monoton positiv oder negativ, dann kann F ohne zusätzliche Variable in G (positiv) oder H (negativ) umgeformt werden.

In worst-case muss jede Klausel in F transformiert werden und es benötigt höchstens 2 mal Operationen zur Umformung der jeden Klausel damit hat $f(x)$ offensichtlich eine lineare Laufzeit (auch polynomielle Laufzeit). Daraus folgt: $T(f(x)) \in O(n^k)$

- kann F erfüllt werden, bedeutet dass mindestens ein Literal *true* hat damit hat mindestens eine Formel von G und H eine Wahrheitsbelegung. Dann kann die andere Formel auch erfüllt werden denn wir können sowieso die zusätzliche Variable einen *true* setzen somit wird $G \wedge H$ auch erfüllt. Wenn F nicht erfüllbar ist, kann $G \wedge H$ auch nicht.

- Kann $G \wedge H$ erfüllt werden, bedeutet dass beide G und H *true* sind so dass F allerdings eine Wahrheitsbelegung hat. Sind $G \wedge H$ nicht erfüllbar, ist F auch nicht.

Deshalb:

- MONOTONE 3-SAT $\in \mathcal{NP}$

- 3-SAT ist NP-vollständig.

- 3-SAT $\propto$ MONOTONE 3-SAT

- $\Longrightarrow$ MONOTONE 3-SAT ist NP-vollständig.