Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I

Blatt 3

Xiheng He

Mai 2021

2. Aufgabe (10 Punkte):

wenden Sie das Master-Theorem an um die Laufzeit für folgende Rekursionsgleichungen zu bestimmmen (mit T(1) = 1) oder begründen Sie, warum das Master-Theorem nicht anwendbar ist.

Master-Therorm: $T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$ für $n > 1$ und $T(1) = d$. dann gilt:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b(a)}) & falls\ f(n) = O(n^{\log_b(a)-e}), e > 0 \\ \Theta(n^{\log_b(a)}\log(n)) & falls\ f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) \\ \Theta(f(n)) & falls\ f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+e}), e > 0\ und\ a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n), c < 1 \end{cases}$$

(a) $T(n) = 16 \cdot T(n/4) + n^2$

aus (a) ist $f(n) = n^2, a = 16, b = 4$

$f(n) = n^2 \Longrightarrow f(n) \in \Theta(n^2) \wedge \log_b(a) = \log_4 16 = 2 \Longrightarrow f(n) \in \Theta(\log_a(b))$

Daraus folgt: $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}\log(n)) = \Theta(n^2\log(n))$

(b) $T(n) = 4 \cdot T(n/3) + n\log(n)$

aus (b) ist $f(n) = n\log(n), a = 4, b = 3$

$\log_b(a) = \log_3 4 \approx 1.26$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\log(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \log(n) = \infty \Longrightarrow f(n) \in O(n^k)$ mit $k > 1$, muss ein $e < 0.26$ hier betrachtet werden.

setze $e = 0.01$,

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{n^{\log_a(b)-e}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{n^{1.25}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{0.25}} \overset{\text{Satz von}}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n\log n)'}{(n^{0.25})'} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^{0.25}} = 0 \Longrightarrow f(n) = o(n^{1.25})$

$f(n) \in O(n^{1.25}) \wedge e = 0.01 > 0 \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^{\log_3 4})$

(c) $T(n) = 4 \cdot T(n/3) + n^2$

$f(n) = n^2, a = 4, b = 3, \log_b(a) = \log_3 4 \approx 1.26$

$f(n) = \Theta(n^2) \Longrightarrow f(n) = \Omega(n^2) = \Omega(n^{1.26+e})$ mit $e = 0.74 > 0 \wedge a \cdot f(n/b) = 4(n/3)^2 = \dfrac{4}{9}n^2 \leq c \cdot n^2$ mit $\dfrac{4}{9} \leq c < 1$

$\Longrightarrow T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$

(d) $T(n) = 3 \cdot T(n/3) + n\log(n)$

$f(n) = n\log(n), a = 3, b = 3, \log_a(b) = 1$ und aus (b) ist $f(n) = o(n^{1.25})$

$\Longrightarrow f(n) = O(n^{1.25}) \Longrightarrow f(n) \neq O(n^{\log_b(a)-e})$ mit $e > 0 \wedge f(n) \neq \Theta(n^{log_b(a)}) = \Theta(n)$

$n = \Omega(n) \wedge \log(n) \neq \Omega(n^k)$ mit $k > 0 \Longrightarrow n\log(n) \neq \Omega(n^{1+k})$ mit $k > 0$ ($n\log(n)$ ist nicht polynomiell größer als n)

$\Longrightarrow f(n) \neq \Omega(n^{\log_b(a)+e})$ mit $e > 0 \Longrightarrow$ Master-Therorm nicht anwendbar