Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I

Blatt 5

Xiheng He

Mai 2021

3. Aufgabe: 'Collatz'-Zahlenfolge (10 Punkte, Bonus)

Eine Folge $a_0, a_1, \dots a_n$ natürliche Zahlen ist durch einen Startwert $a_0 > 1$ und die folgende Vorschrift (3-5_Collatz) bestimmt:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i \div 3 & \text{falls } a_i \text{ (ohne Rest) durch 3 teilbar} \\ a_i + 5 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Für welche Startwerte a_0 gibt es ein n mit $a_n = 1$?

$$a_0 = 2 : 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 3 : 3, 1$$

$$a_0 = 4 : 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 5 : 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, 10, 15, \cdots \Longrightarrow 5 - 10 - 15 - 5$$

$$a_0 = 6 : 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 7 : 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 8 : 8, 13, 18, 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 9 : 9, 3, 1$$

$$a_0 = 10 : 10, 15, 5, 10, \cdots \Longrightarrow 5 - 10 - 15 - 5$$

$$a_0 = 11 : 11, 16, 21, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 12 : 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 13 : 13, 18, 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 14 : 14, 19, 24, 8, 13, 18, 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 15 : 15, 5, 10, 15, \cdots \Longrightarrow 5 - 10 - 15 - 5$$

$$a_0 = 16 : 16, 21, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 17 : 17, 22, 27, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 18 : 18, 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 19 : 19, 24, 8, 13, 18, 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1$$

$$a_0 = 20 : 20, 25, 30, 10, 5, 10, 15, 5, 10, \cdots \Longrightarrow 5 - 10 - 15 - 5$$

Vermutung 1: Für alle näturliche Zahlen $a_0 > 1$, die durch 5 teilbar sind, werden in den Zyklus 5, 10, 15, 5 übergehen und können sich nicht beenden.

Vermutung 2: Für alle natürliche Zahlen $a_0 > 1$, die nicht durch 5 teilbar sind, werden in den Zyklus 9, 3, 1 übergehen und können sich an 1 beenden.

Beweisen Sie Ihre Vermutung, zum Beispiel durch vollständige Induktion!

Vermutung 1:

- Induktionsanfang: $a_0 = 5 : 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, 10, 15, \cdots \Longrightarrow \textbf{Zyklus} : 5 - 10 - 15 - 5$
- Induktionsvoraussetzung: Für alle näturliche Zahlen $a_0 > 1$, die durch 5 teilbar sind, werden in den Zyklus 5, 10, 15, 5 übergehen und sich nicht beenden.
- Induktionschritt: $n \longrightarrow n+1$
- Induktionsbeweis: a_n, a_{n+1} sei näturliche Zahlen und sind durch 5 teilbar.

$$a_{n+1} = \begin{cases} 5+5=10 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 15, 5, 10, 15, 5 \Longrightarrow \textbf{Zyklus} : 5-10-15-5 & \text{falls } a_n = 5 \\ 10+5=15 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 5, 10, 15, 5 \Longrightarrow \textbf{Zyklus} : 5-10-15-5 & \text{falls } a_n = 10 \\ 15+5=20 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 25, 30, 10, 5, 10, 15, 5 \Longrightarrow \textbf{Zyklus} : 5-10-15-5 & \text{falls } a_n = 15 \end{cases} \quad \square$$

Vermutung 2: a_n, a_{n+1} sei näturliche Zahlen und sind nicht durch 5 teilbar. Setze $f(a_n) := a_{n+1}$ d.h. $f(a_n)$ sei 'Collatz' Funktion.

- Induktionsanfang $a_0 = 2 : 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1 \wedge a_1 = 7, 12, 4, 9, 3, 1 \Longrightarrow \textbf{Zyklus} : 9-3-1 \wedge \textbf{endet an } 1$
- Induktionsvoraussetzung: Für alle natürliche Zahlen $a_0 > 1$, die nicht durch 5 teilbar sind, können sich an 1 beenden.
- Induktionschritt: $n \longrightarrow n+1$
- Induktionsbeweis:

$$a_{n+1} = f(a_n) \begin{cases} f(9) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(3) \overset{(1)}{\Longrightarrow} 1 \Longrightarrow \textbf{Zyklus} : 9-3-1 \wedge \textbf{endet an } 1 & \text{falls } a_n = 9 \\ f(3) \overset{(1)}{\Longrightarrow} 1 \underset{\text{abgeleitet werden}}{\overset{\text{3 kann nur aus 9}}{\Longrightarrow}} \textbf{Zyklus} : 9-3-1 \wedge \textbf{endet an } 1 & \text{falls } a_n = 3 \end{cases} \quad \square$$

Was ist der Unterschied zur Collatz-Folge, die Sie aus der Vorlesung kennen? Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, in welchen Fällen die Reihe konvergiert bzw. nicht konvergiert.

- Die Vorschrift ist unterschiedlich. In dieser Alternative eine natürliche Zahl wird entweder durch 3 geteilt falls sie ohne Rest teilbar ist oder 5 addiert 5. In originaler Collatz-Folge wird eine nicht gerade Zahl mit 3 multipliziert und 1 addiert und eine gerade Zahl durch 2 geteilt.
- In dieser Alternative ist es gezeigt, dass für alle natürliche Zahlen die durch 5 teilbar sind, sich nicht beenden können. In originaler Collatz-Folge wurden noch keine endlose Zahlenfolge gefunden.
- In dieser Alternative gibt ein Zyklus 9, 3, 1 für endliche Zahlenfolge und ein Zyklus 5, 10, 15, 5 für endlose Zahlenfolge. In originaler Collatz-Folge endet eine Zahlenfolge in den Zyklus 4, 2, 1.