Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I
Blatt 3

Xiheng He

Mai 2021

1. Aufgabe (10 Punkte):
Lösen Sie die folgende inhomogene lineare Rekursionsgleichung mit Hilfe des Satzes zur Lösung homogener linearer Rekursionsgleichungen endlicher Ordnung aus der Vorlesung.

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \qquad \text{und} \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Zeigen Sie mit vollständige Induktion, dass Ihre Lösung richtig ist.

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \tag{1}$$
$$a_{n-1} = 2a_{n-2} - a_{n-3} + 1 \tag{2}$$
$$(1) - (2): \quad a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0 \quad \text{(Umformung der inhomogenen linearen Rekursionsgleichung)} \tag{3}$$
$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3 \quad \text{(Charakteristische Polynom)} \tag{4}$$

Aus (4) folgt $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, Nach allgeminer Lösung homogener linearer Rekursionsgleichung folgt, dass

$$a_n = \sum_{i=1}^{m=1} \sum_{j=0}^{2} C_j \cdot n^{\underline{j}} \cdot x^n \tag{5}$$
$$= C_0 \cdot 1 \cdot 1 + C_1 \cdot n \cdot 1 + C_2 \cdot n(n-1) \cdot 1 \quad (C_j := \alpha_{i,j}) \tag{6}$$

Aus (6), Mit $a_0 = 0, a_1 = 1$ und $a_2 = 2a_1 - a_0 + 1 = 3$ folgt:

$$a_0 = C_0 + C_1 \cdot 0 + C2 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow C_0 = 0 \tag{7}$$
$$a_1 = C_0 + C_1 + C2 \cdot 0 = C_0 + C_1 = 1 \Longrightarrow C_1 = 1 \tag{8}$$
$$a_2 = C_0 + 2C_1 + 2C_2 = 3 \Longrightarrow C_2 = \frac{1}{2} \tag{9}$$
$$a_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \tag{10}$$

Induktionsanfang: $n = 0 \Longrightarrow a_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$
Induktionsvoraussetzung: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
Induktionschritt: $n \longrightarrow n+1$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - a_{n-1} + 1 \\ &\overset{(10)}{=} 2(\frac{n(n+1)}{2}) - \frac{(n-1)n}{2} + 1 \\ &= \frac{2n^2 + 2n - n^2 + n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square \end{aligned}$$