Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik I

Blatt 7

Xiheng He

Mai 2021

3. Aufgabe: Reduktion: HP auf HC (10 Punkte)
Ein Hamiltonscher Pfad (HP) ist ein Pfad, der jeden Knoten eines Graphen genau einmal besucht. Reduzieren Sie das Entscheidungsproblem, ob es in einem Graphen einen Hamiltonschen Pfad gibt, auf das Hamiltonscher Kreis (HC) Problem aus der Vorlesung.
Hinweis: Für eine polynomielle Reduktion muss neben der Korrektheit auch die polynomielle Laufzeit nachgewiesen werden!

Sei zwei ungerichtete Graphen G mit $G := (V, E), V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und G' mit $G' := (V', E')$. Wir konstrurieren G' durch:

- Hinzufügen eines Vertex v_{new} in G, sodass $V' = V \cup v_{new}$
- Verbinden v_{new} mit jedem Vertex $v \in V$ in G, sodass $E' = E \cup \{v_i, v_{new} | v_i \in V\}$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Laufzeit in $O(|V|)$ ist um G' zu konstrurieren.
Daraus folgt, dass die Reduktion f polynomielle Laufzeit besitzt, weil $T(f(x)) \in O(|V|) < O(n^k)$.
Anschließend zeigen wir: $\forall x \in \mathbf{HP} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{HC}$

- $\forall x \in \mathbf{HP} \Longrightarrow f(x) \in \mathbf{HC}$
  Angenommen, dass *Hamiltonscher Pfad* (HP) im G existiert, dann gibt eine Permutation der knoten $\{v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, v_{\pi(3)}, \ldots, v_{\pi(n)} | n = |V|\}$ im G. Somit existiert auch eine entsprechende Permutation der Knoten $\{v_{new}, v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, v_{\pi(3)}, \ldots, v_{\pi(n)}, v_{new}\}$ im G' für V'. Diese neue Permutation ist offensichtlich einen *Hamiltonscher Kreis* (HC) im G' da alle knoten genau einmal besucht wurden und sich einen geschlossene Kreis bilden. Im Gegenteil falls *Hamiltonscher Pfad* (HP) im G nicht existiert, dann gibt keine solche Permutation, um einen *Hamiltonscher Kreis* (HC) in G' zu bilden.
- $\forall x, f(x) \in \mathbf{HC} \Longrightarrow x \in \mathbf{HP}$
  Angenommen, dass einen *Hamiltonscher Kreis* (HC) in G' gibt, dann existiert eine Permutation $\{v_0, v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, v_{\pi(3)}, \ldots, v_{\pi(n)}, v_0\}$. Damit bildet die neue Permutation $\{v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, v_{\pi(3)}, \ldots, v_{\pi(n)}\}$ einen *Hamiltonscher Pfad* (HP) im G mit $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)} | v_i \in V\} \in E$. Im Gegensatz wenn keiner *Hamiltonscher Kreis* (HC) in G' existiert, gibt es auch keine solche Permutation um den entsprechenden *Hamiltonscher Pfad* (HP) in G zu bilden.

Somit reduzieren wir *Hamiltonscher Pfad* (HP) auf *Hamiltonscher Kreis* (HC).