题 目

方框所示题目，具有较强发散性、答案不唯一

基础题

1. 证明式(15)中，取 $\mathbf{y}=\mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。提示：设 $\mathbf{y'}=\mathbf{u}_4+\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明

$$\mathbf{y'}^\top\mathbf{D}^\top\mathbf{D}\mathbf{y'}\geq\mathbf{y}^\top\mathbf{D}^\top\mathbf{D}\mathbf{y}$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

2. 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

提升题

1. 请对测量值加上不同噪声（增大测量噪声方差），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。
2. 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧（如 3，4，5 帧等），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

第一题：证明式（15）的最优解

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

证明方式不唯一

拉格朗日乘子法

问题的最优解，即需要求解的最小二乘解为:

$$\min_{\mathbf{y}} ||\mathbf{D}\mathbf{y}||_2^2,\ s.t. ||\mathbf{y}|| = 1$$

将代价函数展开得:

$$F(\mathbf{y}) = ||\mathbf{D}\mathbf{y}||_2^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{y}$$

对其添加一个微小变化量:

$$F'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{y} - \lambda(\mathbf{y}^T\mathbf{y} - 1) \tag{1}$$

求导，令导数为零:

$$\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y} = 0 \tag{2}$$

可以看到此时$\mathbf{y}$为矩阵$\mathbf{D}^T\mathbf{D}$的特征向量，λ为其对应的特征值。将(2)代入(1)得:

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{y} - \lambda(\mathbf{y}^T\mathbf{y} - 1) \\ &= \lambda\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \lambda \\ &= \lambda \end{aligned}$$

也就是说，要使$F'(\mathbf{y})$最小，等价于使特征值λ最小。即$\mathbf{y}$取$\mathbf{D}^T\mathbf{D}$最小的特征值对应的特征向量$\mathbf{u}_4$时为最小二乘解。

第二题：特征点三角化代码

难度不大，参照课件三角化部分公式(10)~(16)即可

```cpp
/* your code begin */
const auto D_rows = 2*(end_frame_id - start_frame_id);
MatXX D(MatXX::Zero(D_rows, 4));
for (auto i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i) {
    Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    Eigen::Vector3d tcw = -Rcw * camera_pose[i].twc;
    D.block(2*(i - start_frame_id), 0, 1, 3).noalias() = camera_pose[i].uv(0)*Rcw.block(2, 0, 1, 3) - Rcw.block(0, 0, 1, 3);
    D.block(2*(i - start_frame_id), 3, 1, 1).noalias() = camera_pose[i].uv(0)*tcw.segment(2 ,1) - tcw.segment(0, 1);
    D.block(2*(i - start_frame_id) + 1, 0, 1, 3).noalias() = camera_pose[i].uv(1)*Rcw.block(2, 0, 1, 3) - Rcw.block(1, 0, 1, 3);
    D.block(2*(i - start_frame_id) + 1, 3, 1, 1).noalias() = camera_pose[i].uv(1)*tcw.segment(2, 1) - tcw.segment(1, 1);
}
Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(D.transpose()*D, Eigen::ComputeThinU | Eigen::ComputeThinV);
Eigen::Vector4d lameda = svd.singularValues();
std::cout << "singularValues = " <<lameda.transpose() << std::endl;
if (lameda(2)/lameda(3) < 1e-3) {
    std::cout << "The parallax is not enough!" <<std::endl;
    return -1;
}
Eigen::Vector4d u4 = svd.matrixU().block(0, 3, 4, 1);
if (u4(3)!=0 && u4(2)/u4(3) > 0) {
    P_est(0) = u4(0)/u4(3);
    P_est(1) = u4(1)/u4(3);
    P_est(2) = u4(2)/u4(3);
}
/* your code end */
```

```
→ build ./estimate_depth
singularValues =     468.406     7.74642    0.723255 5.30104e-16
ground truth:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
your result:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
```

第三题：评估噪声对比值的影响

噪声处理方式不同、噪声值范围选取不同等差异，因此结果不唯一，逻辑自洽，言之有理即可

```
double x = Pc.x();
double y = Pc.y();
double z = Pc.z();

Pc = Pc / Pc.z();  // 归一化图像平面
Pc[0] += noise_pdf(generator);
Pc[1] += noise_pdf(generator);

camera_pose[i].uv = Eigen::Vector2d(Pc[0],Pc[1]);
```

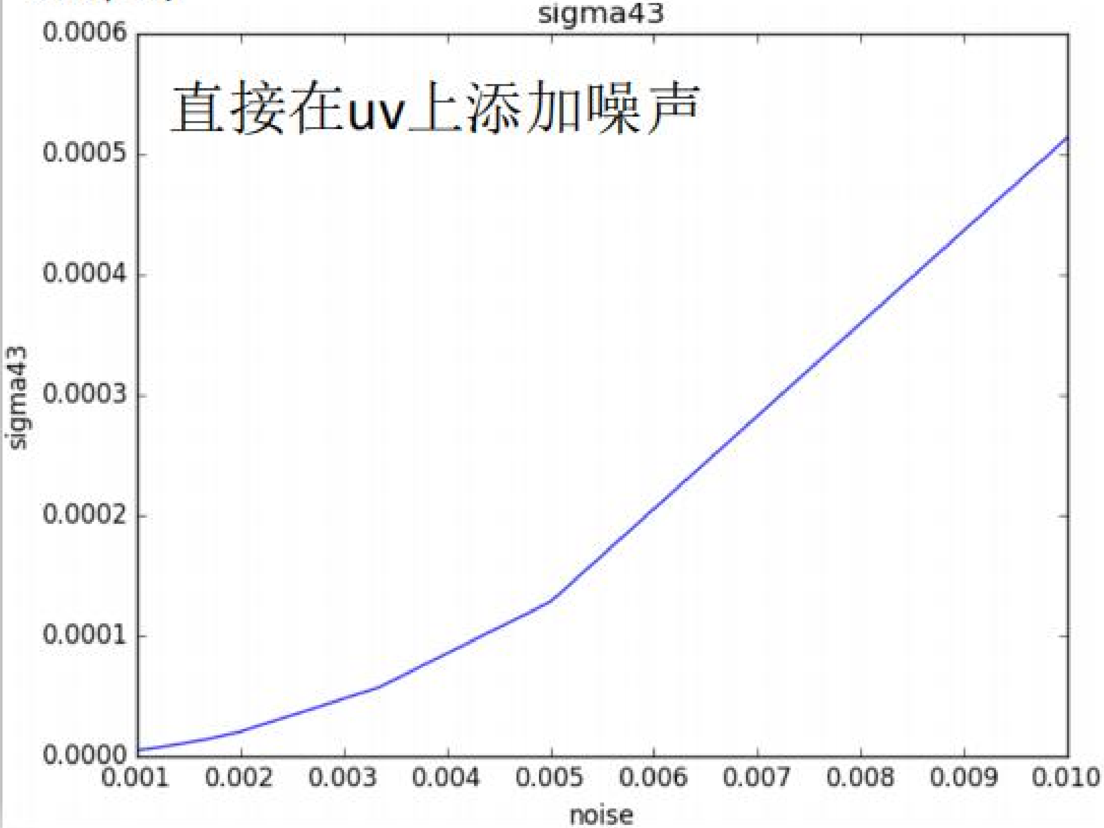
直接在uv上添加噪声

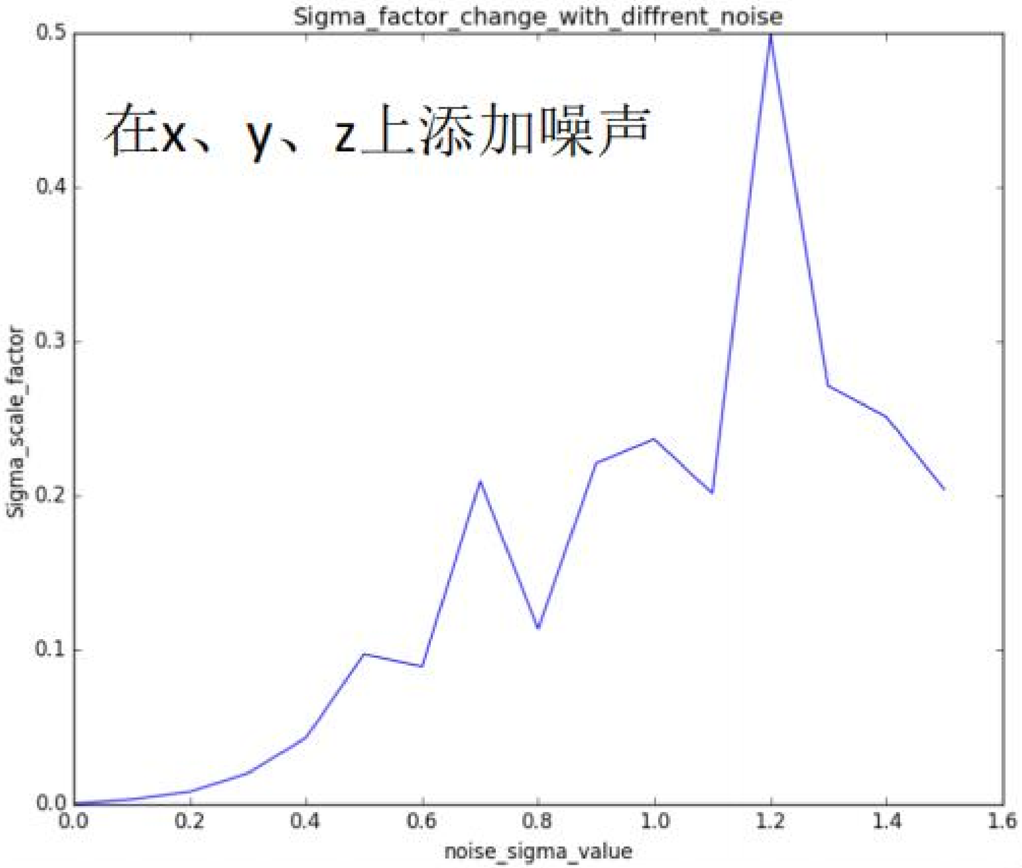
```
Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[i].Rwc.transpose();
Eigen::Vector3d Pc = Rcw * (Pw - camera_pose[i].twc);
noise = noise_pdf(generator);
double x = Pc.x() + noise;
noise = noise_pdf(generator);
double y = Pc.y() + noise;
noise = noise_pdf(generator);
double z = Pc.z() + noise;
camera_pose[i].uv = Eigen::Vector2d(x / z, y / z);
```

在x、y、z上添加噪声

第三题：评估噪声对比值的影响

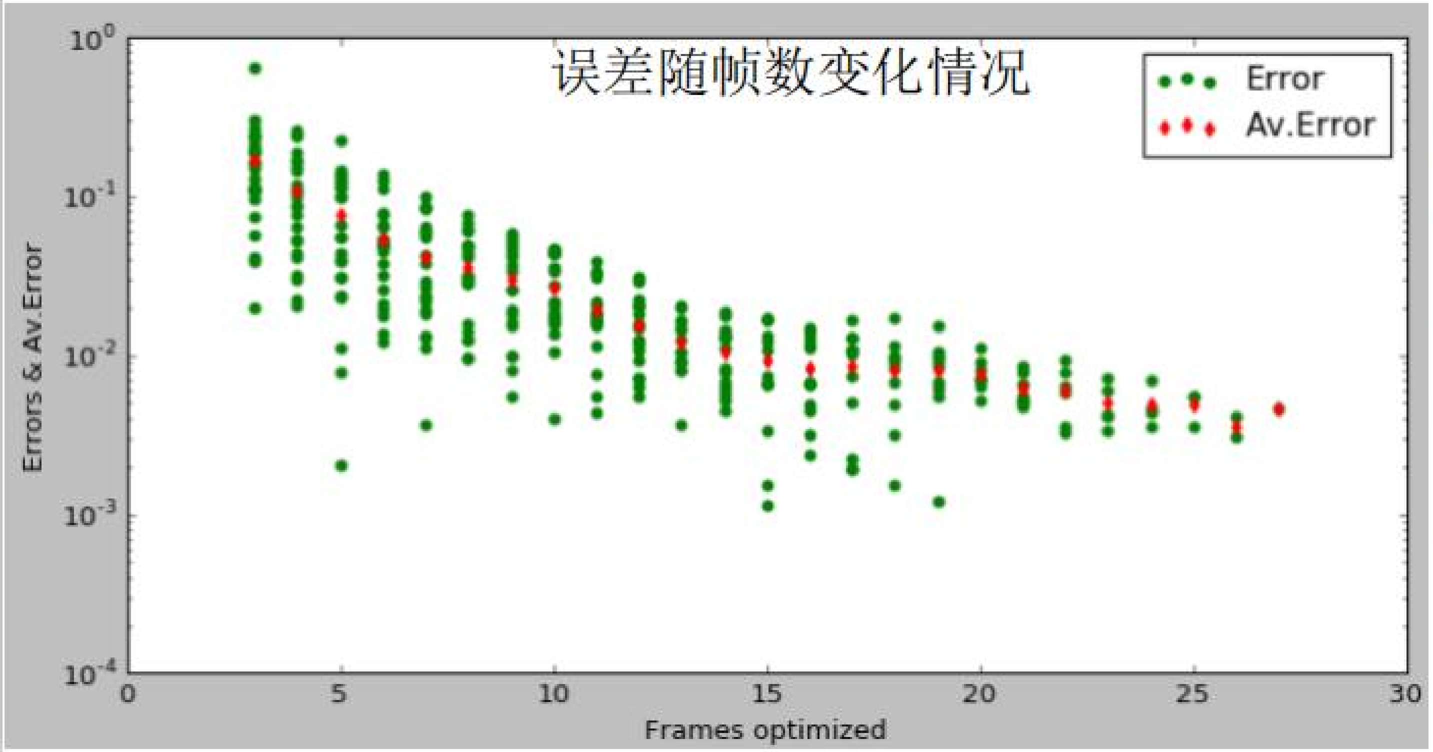
噪声处理方式不同、噪声值范围选取不同等差异，因此结果不唯一，逻辑自洽，言之有理即可





第四题：评估帧数对比值的影响

噪声取值不同、**图像帧选取不同、图像帧数不同**等差异，因此结果不唯一，逻辑自洽，言之有理即可

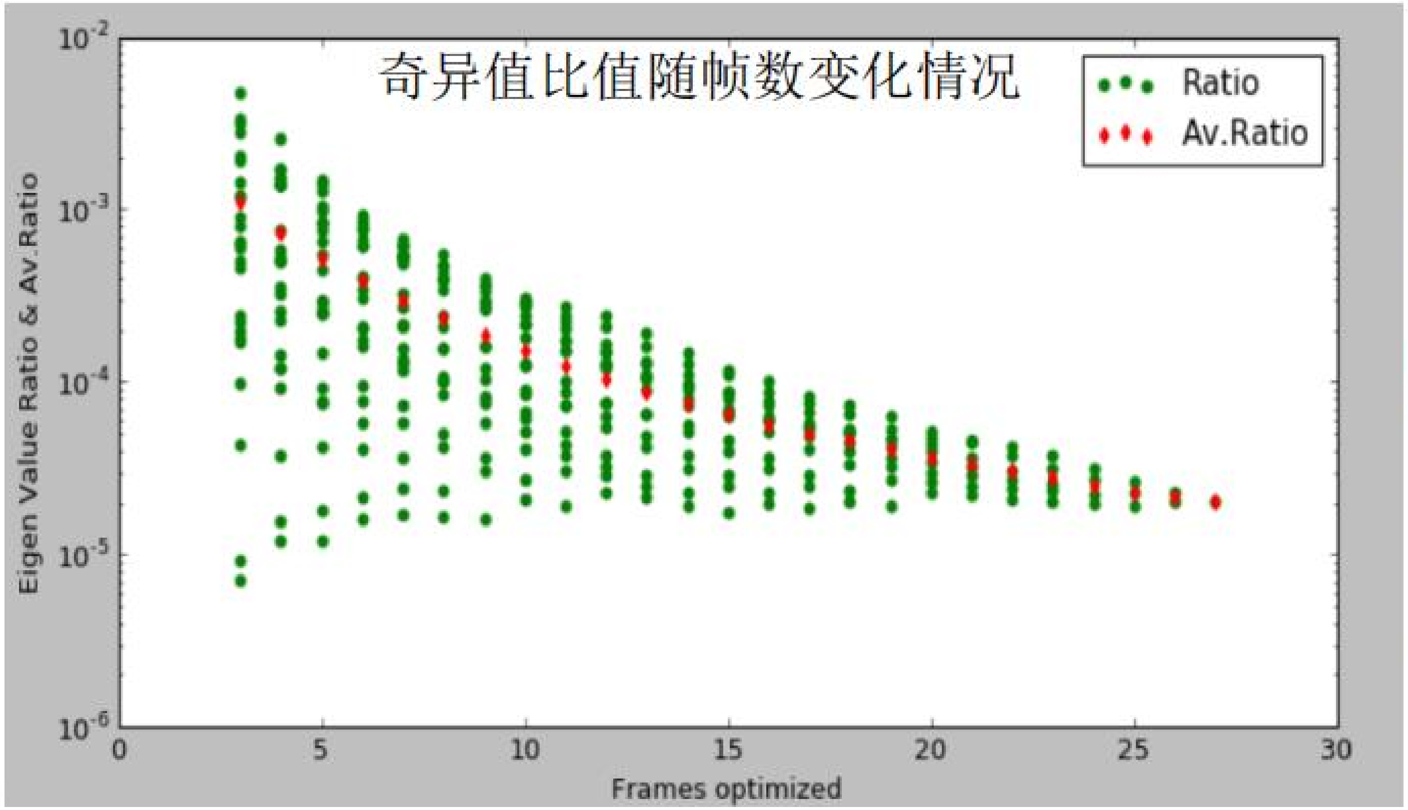


1、 参与求解的观测数据（图像帧数）越多，解的精度就越高（误差小），解的稳定性也好（解的散布小）。

2、 参与求解的观测数据为 3 帧的时候，从图中看到，有最小特征值远远小于与次小特征值的（在 1E-5 左右），但是从上图中看出其对应的误差仍然大于帧数更多的求解结果的误差。说明最小特征值和次小特征值的比例只能大致判断解的精度，但是不绝对。

第四题：评估帧数对比值的影响

噪声取值不同、图像帧选取不同、图像帧数不同等差异，因此结果不唯一，逻辑自洽，言之有理即可



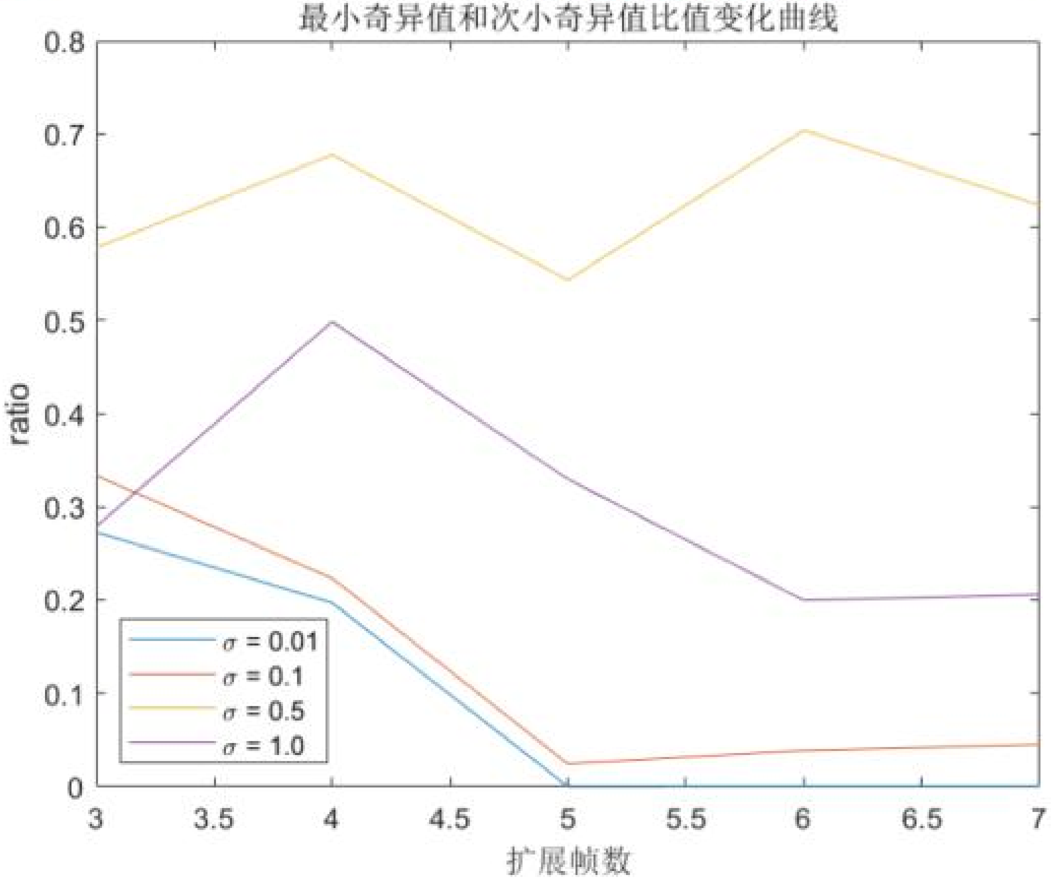
1、 参与求解的观测数据（图像帧数）越多，解的精度就越高（误差小），解的稳定性也好（解的散布小）。

2、 参与求解的观测数据为 3 帧的时候，从图中看到，有最小特征值远远小于与次小特征值的（在 1E-5 左右），但是从上图中看出其对应的误差仍然大于帧数更多的求解结果的误差。说明最小特征值和次小特征值的比例只能大致判断解的精度，但是不绝对。

第四题：评估帧数对比值的影响

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

噪声取值不同、图像帧选取不同、图像帧数不同等差异，因此结果不唯一，逻辑自洽，言之有理即可



从图中可看出，当σ较小时（例如σ=0.01，0.1），比值随着扩展帧数逐渐减小，并趋于稳定；但当σ较大时（例如σ=0.5，1.0），比值随着扩展帧数增大而出现波动