第 7 讲 VINS 初始化和 VIO 系统

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 7 月 28 日

目录

Section 1

VIO 相关知识回顾

IMU 预积分技术

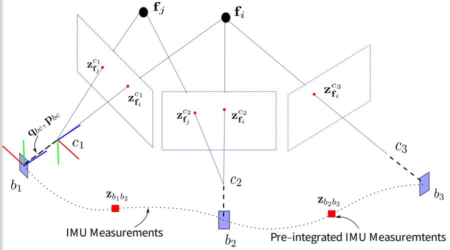
IMU 传感器模型

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b &= \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{b}^g + \mathbf{n}^g \\
\tilde{\mathbf{a}}^b &= \mathbf{q}_{bw}(\mathbf{a}^w + \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}^a + \mathbf{n}^a
\end{aligned} \tag{1}
$$

IMU 预积分

将一段时间内的 IMU 数据直接积分起来就能得到两时刻 i, j 之间关于 IMU 的测量约束，即 **预积分量**：

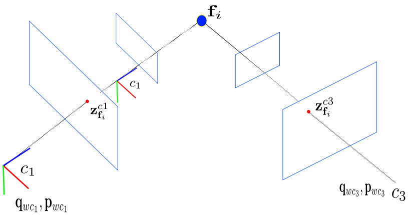
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} &= \iint_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t^2 \\
\boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} &= \int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t \\
\mathbf{q}_{b_i b_j} &= \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{b_i b_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
\end{aligned} \tag{2}
$$



视觉几何基础

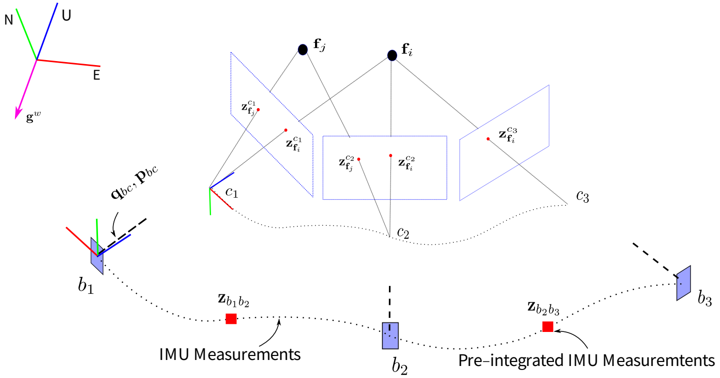
视觉技术

1. 已知俩图像：特征点提取 (fast)，匹配 (光流，特征描述子).
2. 已知俩图像特征匹配点：利用对极几何约束 (E 矩阵，H 矩阵)，计算两图像之间的 pose (update to scale).
3. 已知相机 pose, 已知特征点二维坐标: 通过三角化得到三维坐标.
4. 已知 3d 点，2d 特征点：通过 Perspective-n-Point(PnP) 求取新的相机 pose.



问题

1. IMU 怎么和世界坐标系对齐，计算初始时刻的 $\mathbf{q}_{wb_0}$ ？
2. 单目视觉姿态如何和 IMU 轨迹对齐，尺度如何获取？
3. VIO 系统的初始速度 $\mathbf{v}$，传感器 bias 等如何估计？
4. IMU 和相机之间的外参数等...



Section 2

VINS 鲁棒初始化

视觉和 IMU 之间的联系

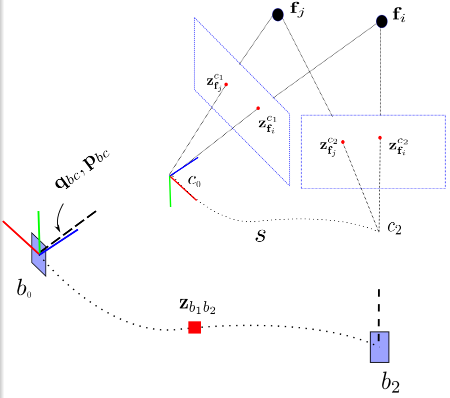
几何约束

考虑相机坐标系 c_0 为世界坐标系，则利用外参数 $\mathbf{q}_{bc}, \mathbf{t}_{bc}$ 构建等式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{c_0 b_k} &= \mathbf{q}_{c_0 c_k} \otimes \mathbf{q}_{bc}^{-1} \\
s\overline{\mathbf{p}}_{c_0 b_k} &= s\overline{\mathbf{p}}_{c_0 c_k} - \mathbf{R}_{c_0 b_k}\mathbf{p}_{bc}
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中，s 为尺度因子,$\overline{\mathbf{p}}$ 表示非米制单位的轨迹。等式(3)等价于

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{p}}_{c_0 b_k} &= \overline{\mathbf{p}}_{c_0 c_k} - \frac{1}{s}\mathbf{R}_{c_0 b_k}\mathbf{p}_{bc} \\
\overline{\mathbf{p}}_{c_0 c_k} &= \frac{1}{s}\mathbf{R}_{c_0 b_k}\mathbf{p}_{bc} + \overline{\mathbf{p}}_{c_0 b_k}
\end{aligned} \tag{4}
$$



视觉 IMU 对齐流程

估计流程

1. 旋转外参数 $\mathbf{q}_{bc}$ 未知，则先估计旋转外参数.
2. 利用旋转约束估计陀螺仪 bias.

$$\mathbf{q}_{c_0 b_k} = \mathbf{q}_{c_0 c_k} \otimes \mathbf{q}_{bc}^{-1}$$

3. 利用平移约束估计重力方向，速度，以及尺度初始值.

$$s\bar{\mathbf{p}}_{c_0 b_k} = s\bar{\mathbf{p}}_{c_0 c_k} - \mathbf{R}_{c_0 b_k}\mathbf{p}_{bc}$$

4. 对重力向量 $\mathbf{g}^{c_0}$ 进行进一步优化.
5. 求解世界坐标系 w 和初始相机坐标系 c_0 之间的旋转矩阵 $\mathbf{q}_{wc_0}$，并将轨迹对齐到世界坐标系。

以 VINS-mono 方法为基础进行讲解[1,2].

[1] Zhenfei Yang and Shaojie Shen. “Monocular visual–inertial state estimation with online initialization and camera–IMU extrinsic calibration”. In: *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 14.1 (2016), pp. 39–51.

[2] Tong Qin and Shaojie Shen. “Robust initialization of monocular visual-inertial estimation on aerial robots”. In: *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE. 2017, pp. 4225–4232.

利用旋转约束估计外参数旋转 $\mathbf{q}_{bc}$

相邻两时刻 $k, k+1$ 之间有：IMU 旋转积分 $\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}}$，视觉测量 $\mathbf{q}_{c_k c_{k+1}}$。则有：

$$\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}} \otimes \mathbf{q}_{bc} = \mathbf{q}_{bc} \otimes \mathbf{q}_{c_k c_{k+1}} \tag{5}$$

上式可写成：

$$\left(\left[\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}} \right]_L - \left[\mathbf{q}_{c_k c_{k+1}} \right]_R \right) \mathbf{q}_{bc} = \mathbf{Q}^k_{k+1} \cdot \mathbf{q}_{bc} = \mathbf{0} \tag{6}$$

其中，$[\cdot]_L$, $[\cdot]_R$ 表示 left and right quaternion multiplication。

将多个时刻线性方程(6)累计起来，并加上鲁棒核权重得到：

$$\begin{bmatrix} w_1^0 \cdot \mathbf{Q}_1^0 \\ w_2^1 \cdot \mathbf{Q}_2^1 \\ \vdots \\ w_N^{N-1} \cdot \mathbf{Q}_N^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}_{bc} = \mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{q}_{bc} = \mathbf{0} \tag{7}$$

其中：

$$w_{k+1}^k = \begin{cases} 1, & r_{k+1}^k < \text{threshold} \\ \frac{\text{threshold}}{r_{k+1}^k}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

由旋转矩阵和轴角之间的关系 $\operatorname{tr}(\mathbf{R}) = 1 + 2\cos\theta$，能得到角度误差 r 的计算为：

$$r_{k+1}^k = \operatorname{acos}\left(\left(\operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{R}}_{bc}^{-1}\mathbf{R}_{b_k b_{k+1}}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{bc}\mathbf{R}_{c_k c_{k+1}}\right) - 1\right)/2\right) \tag{9}$$

公式(7)的求解同样采用 SVD 分解，即最小奇异值对应的奇异向量。

具体代码见：initial_ex_rotation.cpp 函数 CalibrationExRotation().

基于旋转约束的 Gyroscope Bias

如果外参数 $\mathbf{q}_{bc}$ 已标定好，利用旋转约束，可估计陀螺仪 bias：

$$arg \min_{\delta \mathbf{b}^g} \sum_{k \in B} \left\| 2 \left\lfloor \mathbf{q}_{c_0 b_{k+1}}^{-1} \otimes \mathbf{q}_{c_0 b_k} \otimes \mathbf{q}_{b_k b_{k+1}} \right\rfloor_{xyz} \right\|^2 \tag{10}$$

其中，B 表示所有的图像关键帧集合，另有预积分的一阶泰勒近似：

$$\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}} \approx \hat{\mathbf{q}}_{b_k b_{k+1}} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \mathbf{J}_{b^g}^{\mathbf{q}} \delta \mathbf{b}^g \end{bmatrix} \tag{11}$$

公式(10)为普通的最小二乘问题，求取雅克比矩阵，构建正定方程 $\mathbf{HX} = \mathbf{b}$ 即可以求解。

具体代码见：initial_aligment.cpp 函数 solveGyroscopeBias().

初始化速度、重力和尺度因子

需要估计的变量

$$\mathcal{X}_I = \left[\mathbf{v}_0^{b_0}, \mathbf{v}_1^{b_1}, \cdots \mathbf{v}_n^{b_n}, \mathbf{g}^{c_0}, s\right]^\top \tag{12}$$

其中，$\mathbf{v}_k^{b_k}$ 表示 k 时刻 body 坐标系的速度在 body 坐标系下的表示。$\mathbf{g}^{c_0}$ 为重力向量在第 0 帧相机坐标系下的表示。s 表示尺度因子，将视觉轨迹拉伸到米制单位。

回顾：预积分量约束

世界坐标系 w 下有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} &= \mathbf{q}_{b_i w}\left(\mathbf{p}_{w b_j} - \mathbf{p}_{w b_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2\right) \\ \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} &= \mathbf{q}_{b_i w}\left(\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t\right)\end{aligned} \tag{13}$$

将世界坐标系 w 换成相机初始时刻坐标系 c_0 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{b_k b_{k+1}} &= \mathbf{R}_{b_k c_0}\left(s\left(\overline{\mathbf{p}}_{c_0 b_{k+1}} - \overline{\mathbf{p}}_{c_0 b_k}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{g}^{c_0}\Delta t_k^2 - \mathbf{R}_{c_0 b_k}\mathbf{v}_k^{b_k}\Delta t_k\right)\\ \boldsymbol{\beta}_{b_k b_{k+1}} &= \mathbf{R}_{b_k c_0}\left(\mathbf{R}_{c_0 b_{k+1}}\mathbf{v}_{k+1}^{b_{k+1}} + \mathbf{g}^{c_0}\Delta t_k - \mathbf{R}_{c_0 b_k}\mathbf{v}_k^{b_k}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

将公式(3)代入公式(14)进行简单整理有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{b_k b_{k+1}} =& s\mathbf{R}_{b_k c_0}\left(\overline{\mathbf{p}}_{c_0 c_{k+1}} - \overline{\mathbf{p}}_{c_0 c_k}\right)\\ &- \mathbf{R}_{b_k c_0}\mathbf{R}_{c_0 b_{k+1}}\mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{bc} + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{b_k c_0}\mathbf{g}^{c_0}\Delta t_k^2 - \mathbf{v}_k^{b_k}\Delta t_k\end{aligned} \tag{15}$$

将待估计变量放到方程右边，有：

$$\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{b_k b_{k+1}} - \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{R}_{b_k c_0}\mathbf{R}_{c_0 b_{k+1}}\mathbf{p}_{bc} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{b_k b_{k+1}} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{b_{k+1}}^{b_k}\mathcal{X}_I^k + \mathbf{n}_{b_{k+1}}^{b_k} \tag{16}$$

公式(16)中：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_I^k &= \left[\mathbf{v}_k^{b_k}, \mathbf{v}_{k+1}^{b_{k+1}}, \mathbf{g}^{c_0}, s\right]^\top \\
\mathbf{H}_{b_{k+1}}^{b_k} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}\Delta t_k & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{R}_{b_k c_0}\Delta t_k^2 & \mathbf{R}_{b_k c_0}\left(\overline{\mathbf{p}}_{c_{k+1}}^{c_0} - \overline{\mathbf{p}}_{c_k}^{c_0}\right) \\ -\mathbf{I} & \mathbf{R}_{b_k c_0}\mathbf{R}_{c_0 b_{k+1}} & \mathbf{R}_{b_k c_0}\Delta t_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

公式(16)转化成线性最小二乘问题对状态量进行求解：

$$
\min_{\mathcal{X}_I} \sum_{k\in\mathcal{B}} \left\| \hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k} - \mathbf{H}_{b_{k+1}}^{b_k}\mathcal{X}_I^k \right\|^2 \tag{18}
$$

具体代码见：initial_aligment.cpp 函数 LinearAlignment().

优化重力向量 $\mathbf{g}^{c_0}$

疑问：为什么需要优化重力向量

利用公式(16)求解重力向量 $\mathbf{g}^{c_0}$ 过程中，并没有加入模长限制 $\|\mathbf{g}^{c_0}\| = 9.81$。三维变量 $\mathbf{g}^{c_0}$ 实际只有**两个自由度**。

重力向量参数化

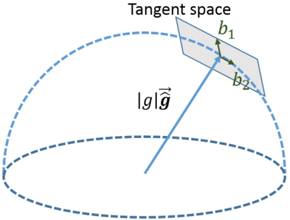
三维向量自由度为 2，可以采用球面坐标进行参数化：

$$\hat{\mathbf{g}}^{c_0} = \|g\| \cdot \hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} + w_1\vec{b}_1 + w_2\vec{b}_2 \tag{19}$$

其中，$w1, w2$ 为待优化变量

$$\vec{b}_1 = \begin{cases} (\hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} \times [1,0,0]), & \hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} \neq [1,0,0]^\top \\ (\hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} \times [0,0,1]), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\vec{b}_2 = \hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} \times \vec{b}_1 \tag{20}$$



图：两自由度的重力矢量参数化

将公式 (19) 代入公式(16)，待优化变量变为：

$$\mathcal{X}_I^k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^{b_k} \\ \mathbf{v}_{k+1}^{b_{k+1}} \\ \mathbf{g}^{c_0} \\ s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^{b_k} \\ \mathbf{v}_{k+1}^{b_{k+1}} \\ \mathbf{w}^{c_0} \\ s \end{bmatrix} \tag{21}$$

公式(16)中的观测方程变为：

$$\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{b_k b_{k+1}} - \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{R}_{b_k c_0}\mathbf{R}_{c_0 b_{k+1}}\mathbf{p}_{bc} - \frac{1}{2}\mathbf{R}_{b_k c_0}\Delta t_k^2 \|g\| \cdot \hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} \\ \boldsymbol{\beta}_{b_k b_{k+1}} - \mathbf{R}_{b_k c_0}\Delta t_k \|g\| \cdot \hat{\bar{\mathbf{g}}}^{c_0} \end{bmatrix} \tag{22}$$

采用最小二乘对 $\mathcal{X}_I$ 进行重新优化。

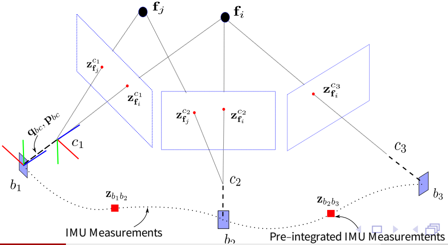
将相机坐标系对齐世界坐标系

对齐流程

1. 找到 c_0 到 w 系的旋转矩阵 $\mathbf{R}_{wc_0} = \exp([\theta \mathbf{u}])$

$$\mathbf{u} = \frac{\hat{\mathbf{g}}^{c_0} \times \hat{\mathbf{g}}^{w}}{\left\| \hat{\mathbf{g}}^{c_0} \times \hat{\mathbf{g}}^{w} \right\|}, \quad \theta = atan2(\left\| \hat{\mathbf{g}}^{c_0} \times \hat{\mathbf{g}}^{w} \right\|, \hat{\mathbf{g}}^{c_0} \cdot \hat{\mathbf{g}}^{w}) \tag{23}$$

2. 把所有 c_0 坐标系下的变量旋转到 w 下。
3. 把相机平移和特征点尺度恢复到米制单位。
4. 至此，完成了系统初始化过程。



VINS 初始化拓展

疑问

1. 加速度 bias 为何没有估计？
2. 平移外参数 $\mathbf{p}_{bc}$ 为何没有初始化？

其他初始化方法

1. 静止初始化：直接用加速度测量重力方向，初始速度为 0.
2. 除 vins-mono 外的其他运动初始化方案[a],[b]。

[a] Janne Mustaniemi et al. "Inertial-based scale estimation for structure from motion on mobile devices". In: *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE. 2017, pp. 4394–4401.

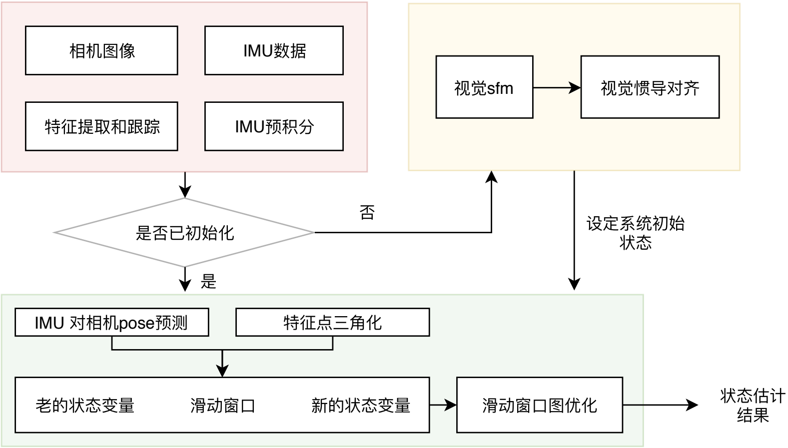
[b] Javier Domínguez-Conti et al. "Visual-Inertial SLAM Initialization: A General Linear Formulation and a Gravity-Observing Non-Linear Optimization". In: *2018 IEEE International Symposium on Mixed and Augmented Reality (ISMAR)*. IEEE. 2018, pp. 37–45.

Section 3

VINS 系统

VINS 系统三大块

1. 前端，数据处理：特征提取匹配，imu 积分
2. 初始化：系统初始状态变量（重力方向，速度，尺度等等）
3. 后端：滑动窗口优化



后端滑动窗口优化

VINS 系统优化的状态变量为：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \left[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_c^b, \lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_m\right] \\
\mathbf{x}_k &= \left[\mathbf{p}_{wb_k}, \mathbf{v}_k^w, \mathbf{q}_{wb_k}, \mathbf{b}_k^a, \mathbf{b}_k^g\right], k \in [0, n] \\
\mathbf{x}_{bc} &= \left[\mathbf{p}_{bc}, \mathbf{q}_{bc}\right]
\end{aligned} \tag{24}
$$

通过最小化滑动窗口中的残差项来估计系统的状态变量：

$$
\min_{\mathcal{X}} \left\{ \underbrace{\left\|\mathbf{r}_p - \mathbf{J}_p \mathcal{X}\right\|^2}_{\text{先验}} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{B}} \left\| \mathbf{r}_{\mathcal{B}}\left(\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k}, \mathcal{X}\right) \right\|_{\mathbf{\Sigma}_{b_k b_{k+1}}}^2}_{\text{IMU 残差}} + \underbrace{\sum_{(l,j) \in \mathcal{C}} \rho\left(\left\| \mathbf{r}_{\mathcal{C}}\left(\hat{\mathbf{z}}_l^{c_j}, \mathcal{X}\right) \right\|_{\mathbf{\Sigma}_l^{c_j}}^2 \right)}_{\text{视觉残差}} \right\} \tag{25}
$$

注意：其中鲁棒核函数 $\rho(\cdot)$ 仅处理视觉 outlier.

Section 4

作业

作业

1. 将第二讲的仿真数据集（视觉特征，imu 数据）接入我们的 VINS 代码，并运行出轨迹结果。
    - 仿真数据集无噪声
    - 仿真数据集有噪声（不同噪声设定时，需要配置 vins 中 imu noise 大小。）