Guilherme Carvalho Lira

Capítulo 1

1.(a) (P Q ∨ P10.000)
Não é fórmula.

(b) (P ∧ Q) → ((Q ↔ P) ∨ ¬¬R)
É fórmula.

(c) ¬¬P
É fórmula.

(d) ∨Q
Não é fórmula.

(e) (P ∧ Q) → ((Q ↔ ¬R))
É fórmula.

As fórmulas da Lógica Proposicional são (b), (c) e (e).

2.(a) Não, não existe fórmula sem símbolo de pontuação na Lógica Proposicional. A pontuação é essencial para indicar a estrutura e a organização das fórmulas, como a precedência dos conectivos e a separação entre proposições.

(b) O alfabeto da Lógica Proposicional possui cinco tipos de símbolos: proposições, conectivos lógicos, parênteses, colchetes e chaves. Os símbolos das proposições são letras maiúsculas, como p, q, r, s, etc. Os conectivos lógicos são: negação (¬), conjunção (∧), disjunção (∨), condicional (→) e bicondicional (↔). Os símbolos dos parênteses são "(" e ")", dos colchetes são "[" e "]" e das chaves são "{" e "}".

(c) Não, não é possível ter uma fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação. Os conectivos lógicos precisam ser combinados com parênteses para indicar a precedência e a organização das proposições. Se não houver símbolos de pontuação, a fórmula seria ambígua e poderia ser interpretada de diferentes formas.

3.(a) Comprimento: 11 símbolos.

Subfórmulas:

(¬¬P ∨ Q)
(P → Q)
((¬¬P ∨ Q) ↔ (P → Q))
P

(b) Comprimento: 13 símbolos.

Subfórmulas:

(Q → R)

(P → R)
((Q → R) → (P → R))
(P → ((Q → R) → ((P → R) → (P → R))))
P → ((Q → R) → ((P → R) → (P → R)))

(c) Comprimento: 9 símbolos.

Subfórmulas:

(P → ¬P)
(¬P)
((P → ¬P) ↔ ¬P)
((P → ¬P) ↔ ¬P) ∨ Q

(d) Comprimento: 5 símbolos.

Subfórmulas:

(P → ¬P)
¬(P → ¬P)

4.(a) (¬¬P ↔ ¬¬¬¬P ∧ P)

(b) (¬P → Q ∨ R) ↔ (P ∧ Q ↔ ¬¬R ∨ ¬P)

(c) P ∨ Q → P → ¬Q

5.(a) É possível obter a fórmula da Lógica Proposicional: (P ∨ ¬Q) → (R ↔ ¬R).

(b) É possível obter a fórmula da Lógica Proposicional: Q → (¬P ∧ Q).

(c) É possível obter a fórmula da Lógica Proposicional: (¬P ∨ Q) ↔ Q.

(d) Não é possível obter uma fórmula da Lógica Proposicional com essa concatenação de símbolos, pois a concatenação "P¬¬R" não é correta. Para formar uma fórmula, é necessário usar um conectivo lógico para unir proposições, como P ∧ ¬¬R.

6.(a)

Exercício 3:
((P ¬¬ Q ∨ ↔ →) ∧ P

Notação polonesa:
∧ ↔ ∨ ¬¬ P Q → P

Exercício 4:

(a) ((¬(¬P)) ↔ ((¬((¬(¬(P ∨ Q))) → R)) ∧ P))
Notação polonesa: ↔ ¬ ¬ P ∧ ¬ → ¬ ¬ ∨ P Q ¬ R ∧ P

(b) (¬P → (Q ∨ R)) ↔ ((P ∧ Q) ↔ (¬¬R ∨ ¬P))

Notação polonesa: ↔ → ¬ P ∨ Q R ↔ ↔ ∧ P Q ∨ ¬¬ R ¬ P

(c) ((P ∨ Q) → (P → (¬Q)))
Notação polonesa: → ∨ P Q → P ¬ Q

(b)

As sequências de símbolos que são fórmulas da Lógica Proposicional utilizando notação polonesa são:

∨ → P Q ↔ R → ∨ P Q ¬ S
Notação convencional: ((P ∨ ¬Q) → R) ↔ (P ∨ Q ¬S)

→↔ P Q∨ → P Q → ¬RR
Notação convencional: (P → (Q ↔ (P ∨ Q))) → (¬R → R)

→ ¬P¬QR ∨ ∨P Q ∨ ¬R¬P
Notação convencional: (¬P → (¬Q ∧ R)) ∨ ((P ∨ Q) ∨ (¬R ∧ ¬P))

↔→ ¬P ∨ QR ↔ ∧P Q ∨ ¬¬R¬P
Notação convencional: ((¬P ∨ Q) → R) ↔ ((P ∧ Q) ∨ ¬¬(R ∧ ¬P))

7.(a) Não é possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, escrita na notação convencional que corresponda a duas fórmulas diferentes escritas na notação polonesa. Isso ocorre porque a notação polonesa é uma notação unívoca, ou seja, a partir de uma sequência de símbolos na notação polonesa é possível determinar única e inequivocamente a fórmula correspondente, sem ambiguidade. Por outro lado, na notação convencional, a ordem dos símbolos pode levar a diferentes interpretações, o que impossibilita que uma mesma sequência de símbolos corresponda a duas fórmulas diferentes.

(b) Também não é possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional escritas na notação convencional. Isso ocorre porque a notação polonesa é equivalente à notação convencional, ou seja, toda fórmula da Lógica Proposicional escrita em uma notação pode ser escrita na outra, e vice-versa, sem perda de informação. Dessa forma, se uma sequência de símbolos na notação polonesa corresponde a uma fórmula na notação convencional, não há outra fórmula da notação convencional que corresponda a essa sequência na notação polonesa.

8.Respostas 5:
(a) P ¬Q R → ¬R ↔
(b) Q P¬ ∧ Q →
(c) ¬P Q ∨ Q ↔
(d) ¬¬P Q → ↔ P P¬¬R ∧

Respostas 6:
(a) ¬¬P Q ∨ ↔ P Q → ↔ ∧P10.000
(b) P ¬Q ¬¬R ∨ ↔ Q → ∧P Q → ¬R
(c) P ¬P → ↔ ¬P Q ∨ ↔

(d) $P \neg \rightarrow \neg\neg Q \leftrightarrow \neg R \wedge \neg P \vee Q \rightarrow$

9. A paridade do número de símbolos de pontuação em uma fórmula da Lógica Proposicional sempre será par. Isso ocorre porque cada símbolo de pontuação, como parênteses, vírgulas ou pontos, é utilizado em pares, um para abrir e outro para fechar uma subfórmula. Portanto, a quantidade total de símbolos de pontuação deve ser um número par.

10.(a) A paridade de comp[H] será sempre ímpar, pois a fórmula H não contém o conectivo ¬ e, portanto, não há um número par de negações a serem aplicadas.

(b) A relação entre comp[H] e o número de conectivos de H depende do tipo de conectivos presentes em H. Para os conectivos binários (ou seja, que possuem dois argumentos), como ∧, ∨, → e ↔, cada vez que um desses conectivos é aplicado, o número de componentes da fórmula é reduzido em 1. Por exemplo, se H contém n conectivos binários, então comp[H] será igual a $n + 1$.

Já para os conectivos unários, como ¬, cada vez que é aplicado, o número de componentes da fórmula é mantido ou aumentado em 1, dependendo de onde o conectivo é aplicado. Por exemplo, se H contém m negações, então comp[H] será igual a $2m + 1$ se a negação é aplicada no começo da fórmula, ou comp[H] será igual a $2m + 2$ se a negação é aplicada dentro da fórmula.

Portanto, para fórmulas sem o conectivo ¬, o número de componentes da fórmula será sempre um número ímpar, e o número de conectivos binários presentes em H pode ser calculado subtraindo-se 1 do número de componentes da fórmula e dividindo o resultado por 2.

Capítulo 2

1. a) true é um símbolo sintático, que pertence ao alfabeto da Lógica Proposicional e T é um símbolo semântico. c) → é um conectivo, que pertence ao alfabeto da Lógica Proposicional e ⇒ é um símbolo da metalinguagem. Observe, portanto, que ⇒ não pertence à linguagem da Lógica Proposicional.

2. Sintaxe e semântica são duas noções fundamentais na lógica e em outras áreas da matemática. A sintaxe está relacionada à estrutura formal das fórmulas, ou seja, a maneira como os símbolos podem ser combinados de acordo com as regras da linguagem. Por exemplo, a sintaxe da lógica proposicional nos diz quais são os conectivos permitidos, como eles podem ser combinados com as proposições e com outros conectivos, e como as fórmulas devem ser escritas.

Já a semântica se refere ao significado das fórmulas, ou seja, a maneira como as fórmulas se relacionam com a realidade que elas representam. Na lógica proposicional, a semântica está relacionada à atribuição de valores verdadeiro ou falso às proposições e à determinação do valor verdadeiro ou falso das fórmulas a partir desses valores.

Assim, a diferença entre sintaxe e semântica é fundamental, pois a sintaxe diz respeito à maneira como as fórmulas são escritas, enquanto a semântica está relacionada ao significado das fórmulas e à sua interpretação. Embora a sintaxe seja importante para garantir que as fórmulas sejam escritas de maneira consistente e coerente, é a semântica que permite que as fórmulas sejam utilizadas para representar e raciocinar sobre a realidade.

4. a) Não temos a possibilidade: $I[P\ ] = T$ e $I[Q] = F$. b) $I[Q] = T$ c) $I[H] = T$ d) Nada podemos concluir a respeito de $I[Q]$? e) $I[H] = F$

5. a) $I[(\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \to Q)] = T$ e nada podemos concluir a respeito de $J[Q]$ e $J[R]$.

6. a) $I[(P \lor R) \to (Q \lor R)] = T$ b) $I[(P \land R) \to (Q \land R)] = T$ c) Nada se pode concluir a respeito de $I[(\neg P \lor Q) \to (P \lor Q)]$

7.
Supondo $I[P \leftrightarrow Q] = T$:

(a) $I[\neg P \land Q] = T \land T = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $\neg P \land Q$ é verdadeira sob a interpretação I.
(b) $I[P \lor \neg Q] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $P \lor \neg Q$ é verdadeira sob a interpretação I.
(c) $I[Q \to P] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $Q \to P$ é verdadeira sob a interpretação I.
(d) $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)$ é verdadeira sob a interpretação I.
(e) $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)$ é verdadeira sob a interpretação I.

Supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$:

(a) $I[\neg P \land Q] = F \land T = F$. Portanto, sabemos que a fórmula $\neg P \land Q$ é falsa sob a interpretação I.
(b) $I[P \lor \neg Q] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $P \lor \neg Q$ é verdadeira sob a interpretação I.
(c) $I[Q \to P] = F$. Portanto, sabemos que a fórmula $Q \to P$ é falsa sob a interpretação I.
(d) $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)$ é verdadeira sob a interpretação I.
(e) $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)$ é verdadeira sob a interpretação I.

8. a) $I[H] = F$ b) $I[H] = T$

9.
A afirmação é verdadeira. Cada linha da tabela-verdade corresponde a uma combinação de valores verdade para as proposições que ocorrem em H, e existem infinitas interpretações possíveis para essas proposições. Por exemplo, se H é uma fórmula que contém proposições P e Q, existem infinitas interpretações possíveis para P e Q, como por exemplo P = "hoje é terça-feira" e Q = "chove". Para cada combinação de valores verdade para P e Q, teremos uma linha na tabela-verdade correspondente. Portanto,

cada linha da tabela-verdade representa uma interpretação diferente para H.

10.
(a) P: José virá à festa, Q: Maria não gostará da festa.
$(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

(b) P: a novela será exibida, Q: o programa político será exibido.
$\neg Q \rightarrow P$

(c) P: vai chover, Q: irei para casa, R: ficarei no escritório.
$P \rightarrow Q$, $\neg P \rightarrow R$

(d) P: Maria é bonita, Q: Maria é inteligente, R: Maria é sensível, S: Rodrigo ama Maria, T: Rodrigo é feliz.
$(P \land Q \land R \land S) \rightarrow T$

(e) P: sr. Oscar é feliz, Q: sra. Oscar é infeliz.
$(P \rightarrow \neg Q) \land (\neg P \rightarrow Q)$

(f) P: Maurício virá à festa, Q: Kátia não virá à festa, R: Kátia ficará infeliz.
$(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land R)$

12.
(a) Não considera elementos internos da sentença, pois a expressão "Possivelmente" não pode ser representada diretamente na Lógica Proposicional. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Irei ao cinema", e então representar como "Possivelmente P" utilizando um conectivo modal, por exemplo: $\Diamond P$ (lê-se "Possivelmente P").

(b) Não considera elementos internos da sentença, pois a mudança de estado físico do sujeito não pode ser representada diretamente na Lógica Proposicional. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Eu sou gordo" e outra como Q = "Eu sou magro", e então representar como $P \rightarrow Q$ (lê-se "Se eu sou gordo, então sou magro").

(c) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um indivíduo em particular, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Existe um aluno no curso de Ciência da Computação que é admirado por todos", e representar como P.

(d) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um indivíduo em particular, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega", e representar como P.

(e) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um grupo de indivíduos, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Existe um aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas", e representar como P.

(f) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um grupo de indivíduos, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Existe pelo menos um político desonesto", e representar como $\Diamond P$.

(g) Podemos considerar duas proposições auxiliares, P = "Irei ao cinema" e Q = "Irei ao teatro", e representar como $P \land Q$ (lê-se "Eu irei ao cinema e irei ao teatro").

(h) Não considera elementos internos da sentença, pois a expressão "Quase todo" não pode ser representada diretamente na Lógica Proposicional. Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Um grande número de políticos é desonesto", e então representar como $\Box P$ (lê-se "Necessariamente P").

(i) Podemos considerar duas proposições auxiliares, P = "Adalton sempre foi amigo de João Augusto" e Q = "Hoje é um novo dia", e representar como $P \land Q$ (lê-se "Adalton sempre foi amigo de João Augusto e hoje é um novo dia").

(j) Podemos considerar uma proposição auxiliar como P = "Existe uma regra que não tem exceção", e representar como $\neg P$ (lê-se "Não é o caso que existe uma regra que não tem exceção").

(k) Não considera elementos internos da sentença, pois a expressão "Quase todo" não pode ser representada diretamente.