习题 3 参考答案

1. 否.

2. (1) $F(a,+\infty)$; (2) $1-F(+\infty,b)$;

(3) $1-F(a,+\infty)-F(+\infty,b)+F(a,b)$; (4) $F(b,c)-F(a,c)$.

3. (1) $\frac{1}{\pi^2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{1}{16}$; (3) $\frac{1}{16}$;

(4) $F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)$, $F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$.

4. (1)

X	Y	
	1	2
1	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x\geqslant 2,y\geqslant 2,\\ \frac{1}{3}, & x\geqslant 2,1\leqslant y<2 \text{ 或 } 1\leqslant x<2,y\geqslant 2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(2)

X	Y	
	1	2
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ 或 } y<1,\\ \frac{1}{9}, & 1\leqslant x<2,1\leqslant y<2,\\ \frac{1}{3}, & x\geqslant 2,1\leqslant y<2 \text{ 或 } 1\leqslant x<2,y\geqslant 2,\\ 1, & x\geqslant 2,y\geqslant 2.\end{cases}$$

5.

Y	X				$p_{\cdot j}$
	0	1	2	3	
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

6. $f(x,y)=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$, $f_X(x)=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$, $f_Y(y)=\dfrac{3}{\pi(9+y^2)}$.

7. (1) 12; (2) $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

8. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\leqslant x\leqslant y\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) $\frac{3}{4}$;

(3) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{3-x}{2}, & 1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2}, & 1\leqslant y\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

9. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $e^{-\frac{1}{4}}-e^{-1}$.

10. (1) $\frac{21}{4}$; (2) $\frac{7}{10}$; (3) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{5/2}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

11.

$X=i$	0	1	2	3
$P\{X=i \mid Y=1\}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$X=i$	0	1	2	3
$P\{X=i \mid Y=3\}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

12. （1）当 $1<y\leqslant 3$ 时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y-1}, & 1\leqslant x\leqslant y,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

当 $1\leqslant x<3$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3-x}, & x\leqslant y\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）当 $0<y\leqslant 1$ 时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & |x|\leqslant\sqrt{y},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

当 $|x|<1$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（3）$\frac{9}{16},\frac{3}{4}$.

13. （1）$P\{X=n,Y=k\}=\dfrac{1}{k!\ (n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}, k=0,1,\cdots,n, n=0,1,2,\cdots;$

（2）$P\{Y=k\}=\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{2}}, k=0,1,2,\cdots;$

（3）当 $k=0,1,2,\cdots$ 时，

$$P\{X=n\mid Y=k\}=\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k}e^{-\frac{\lambda}{2}}, n=k,k+1,\cdots.$$

14. （1）$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-xy}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}[1-(1+y)e^{-y}], & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0;\end{cases}$

（3）当 $y>0$ 时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2e^{(1-x)y}}{e^y-(1+y)}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

15. （1）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{-y}+\dfrac{4}{3}e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）当 $y>0$ 时

$$P\{X=1\mid Y=y\}=\frac{e^{-y}}{e^{-y}+4e^{-2y}},$$

$$P\{X=2\mid Y=y\}=\frac{4e^{-2y}}{e^{-y}+4e^{-2y}}.$$

16. $\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{9}$.

17.

X	Y			
	0	2	5	6
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{60}$

18. （1）不独立；（2）独立；（3）不独立；（4）独立.

19. （1）$\dfrac{6}{\pi^3}$；（2）独立.　　**20.** 略.

21. （1）

$X+Y$	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（2）

$2X$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

（3）

XY	0	1
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

（4）

X^2	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

22. 如果 $\lambda_1=\lambda_2$，则 $f_Z(z)=\begin{cases}\lambda_1^2 z\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0;\end{cases}$

如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 z}), & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

23. （1）$f_U(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}, & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0;\end{cases}$ （2）$f_V(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{120}v^5\mathrm{e}^{-v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}$

24. （1）$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}(a-|z|), & |z|\leqslant a,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}(a-z), & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

25. $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{24}(8-|z|^3), & |z|\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

26. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{b}{2a}, & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{a}{b},\\ \dfrac{a}{2bz^2}, & z>\dfrac{a}{b}.\end{cases}$

27. （1）$f_{\rho,\theta}(\rho,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}, & \rho\geqslant 0,0<\theta\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ （2）ρ 与 θ 相互独立.

28. (1) $f_{X+Y}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{5}(1-\mathrm{e}^{-5t}), & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ \dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{25}-1)\mathrm{e}^{-5t}, & t>5;\end{cases}$

(2)

Z	0	1
p	$\dfrac{24+\mathrm{e}^{-25}}{25}$	$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-25}}{25}$

29. (1) $f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\dfrac{2(z-a)}{(b-a)^2}, & a<z<b,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) $f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\dfrac{2(b-z)}{(b-a)^2}, & a<z<b,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{2}{(b-a)^2}, & a\leqslant z_2<z_1\leqslant b,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(4) $f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{2(b-a-r)}{(b-a)^2}, & 0<r<b-a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

30. 略.

31. (1)

Z	0	1	2	3	4	5
p	0	0.06	0.19	0.35	0.28	0.12

(2)

U	0	1	2	3
p	0	0.15	0.46	0.39

(3)

V	0	1	2
p	0.28	0.47	0.25

32. 当 $Z=0$ 时，X 的条件分布为单点分布：$P\{X=0 \mid Z=0\}=1$；当 $Z=n>0$ 时，X 的条件分布为二项分布 $B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

33. (1) $P\{Z=n\}=(n+1)p^2q^n, n=0,1,2,\cdots$；

(2) 对给定的 $n=0,1,2,\cdots, P\{X=k \mid Z=n\}=\frac{1}{n+1}, k=0,1,2,\cdots n$；

(3) $P\{W=n\}=pq^n(2-q^n-q^{n+1}), n=0,1,2,\cdots$；

(4) $P\{V=n\}=(1+q)pq^{2n}, n=0,1,2,\cdots$.

34. $$F_z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 0.6(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}), & 0\leqslant z<1,\\ 1-0.6\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-0.4\mathrm{e}^{-\frac{z-1}{2}}, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

35. $$f(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0<s<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$