西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(A) 课时：32 考试时间：2020 年 1 月 7 日

一、(3 分/题×10 题=30 分)

A, A， A, B, A, A, B, A, A, B

二、(5 分/题×2 题=10 分)

1、$y = CJ_1(\sqrt{2}x) + DN_1(\sqrt{2}x)$ （5 分)

2、$y = \frac{1}{2}[(x-t)^2 + (x+t)^2] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin x dx = x^2 + t^2 + \sin x \sin t$

（公式 3 分，结果 2 分)

三、(5 分/题×2 题=10 分) 1、$I = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ （5 分)

2、设 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_1(\mu_m^{(1)} x)$ （2 分)

$$A_m = \frac{2\int_0^1 \rho^2 J_1\left(\mu_m^{(1)}\rho\right) d\rho}{[J_1'\left(\mu_m^{(1)}\right)]^2} = \frac{2J_2(\mu_m^{(1)})}{[J_1'\left(\mu_m^{(1)}\right)]^2 \mu_m^{(1)}} = \frac{2}{J_2(\mu_m^{(1)})\mu_m^{(1)}}$$ (不化简也可以)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} = \frac{2J_2(\mu_m^{(1)})}{[J_1'\left(\mu_m^{(1)}\right)]^2 \mu_m^{(1)}} J_1(\mu_m^{(1)} x)$$ (5 分)

四、(10 分) 取一点 $M_0(\xi,\eta) \in \Omega$, 其对称点为 $M_1(\xi,-\eta)$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}$$ （5 分)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$ （8 分)

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\varphi(x)dx$$ （10 分)

五、(10 分) 特征值为 $\lambda_n = (n\pi)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x}) = \sin(n\pi x)$, $n \ge 1.$ （5 分)

$$T_n(t) = c_n e^{-a^2\lambda_n t}$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin n\pi x$$ （9 分)

$$c_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin n\pi x dx, n \ge 1$$ （10 分)

六、特征值为$\lambda_n=(n\pi)^2$，特征函数为$X_n(\mathrm{x})=\cos(n\pi x)$，$n\ge 0$.（3 分）

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}T_n\cos n\pi x，\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos n\pi x+\frac{\psi_0}{2}$$

$$\psi_n=2\int_0^1\psi\cos n\pi x dx，n\ge 0$$

$$\begin{cases}T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=f_n\\ T_n(0)=0,T_n'(0)=\psi_n\end{cases}$$

其中 $f_n=\begin{cases}1 & n=2\\ 0 & n\ne 2\end{cases}$（6 分）

$T_n(t)$通解为

$$T_n(t)=c_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t+d_n\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$$

即 $$T_n(t)=\begin{cases}-\frac{1}{a^2\lambda_2}\cos a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\psi_2}{a\sqrt{\lambda_2}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{1}{a^2\lambda_2}, & n=2\\ \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t, & n\ne 2\end{cases}$$（9 分）

所以

$$u=\sum_{\substack{n=0\\ n\ne 2}}^{\infty}\frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t\cos n\pi x\cos n\pi x+$$

$$+[-\frac{1}{a^2\lambda_2}\cos a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\psi_2}{a\sqrt{\lambda_2}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{1}{a^2\lambda_2}]\cos n\pi x$$

（10 分）

七、解：设$\boldsymbol{u=R(\rho)T(t)}$

$$T'+\lambda T=0$$

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0$$

$$R(1)=0,|R(0)|<+\infty$$

$$\lambda_m=\left(u_m^{(0)}\right)^2,R_m=J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right),T_m=A_me^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2t}$$ 5分

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}A_me^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2t}J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$\varphi(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$A_m=\frac{2}{\left[J_0'\left(u_m^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1\rho\phi(\rho)J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)d\rho.=\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}$$ (9分)

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2 t}J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$ (10 分)

八、(10 分) 特征方程为 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-x=0,t>0\\ x(0)=\tau\end{cases}$ (2 分)

特征线为 $x=\tau e^t$ (4 分)

沿特征线, 原问题转化为 $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\tau te^t\\ u(0)=\tau^2+1\end{cases}$ (6 分)

$$\begin{aligned}u(t)&=\tau e^t(t-1)+\tau^2+\tau+1\\ &=xt-x+x^2e^{-2t}+xe^{-t}+1\end{aligned}$$ (10 分)