西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称： 数理方程 B　课时：32　考试时间：2017 年 1 月 10 日

一、(5 分/题×4 题=16 分)

1、C　2、C　3、D　4、B

二．(每小题 5 分，共 10 分)

1. $\int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x)dx = \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 d(xJ_1(x)) = x^3 J_1(x)\big|_0^{\mu_m^{(0)}} - \int_0^{\mu_m^{(0)}} 2x^2 J_1(x)dx$

$= \left[\mu_m^{(0)}\right]^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2\int_0^{\mu_m^{(0)}} dx^2 J_2(x) = \left[\mu_m^{(0)}\right]^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2\left[\mu_m^{(0)}\right]^2 J_2(\mu_m^{(0)})$

$= \mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})\left(\left[\mu_m^{(0)}\right]^2 - 4\right)$

2. 令 $t = x^2$，$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} d\sqrt{t} = \int_0^\infty \frac{1}{2} t e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}$

三．(10 分)　首先证明特征值非负：　方程两边同乘以 $X(x)$，即

$$X''(x)X(x) + \lambda X^2(x) = 0, \int_0^l X''(x)X(x)dx + \lambda\int_0^l X^2(x)dx = 0$$

$$X(x)X'(x)\Big|_0^l - \int_0^l (X'(x))^2 dx + \lambda\int_0^l X^2(x)dx = 0$$

由于 $X'(0) = 0, X(l) = 0$，所以 $\lambda = \dfrac{\int_0^l (X'(x))^2 dx}{\int_0^l X^2(x)dx} \ge 0$　　　　(6 分)

①当 $\lambda = 0$ 时，$X''(x) = 0$，则 $X(x) = C_1 + C_2 x, X'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, X(l) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$，则 X=0，不是特征函数

②当 $\lambda > 0$ 时，

$$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$X'(0) = 0 \quad X(l) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,\ \sqrt{\lambda}l = \frac{(2n+1)}{2}\pi \quad n \ge 0$$　　(10 分)

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right]^2 \qquad X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)}{2l}x$$

四．(每小题 15 分，共 30 分)

1.　$u(x,t) = X(x)T(x)$ 代入齐次方程得：

$$XT'' - a^2X''T = 0 \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda,$$

特征值问题为 ： $\begin{cases} X''+\lambda X=0 & 0<x<l \\ X(0)=0\text{，}X'(l)=0 \end{cases}$

其特征值与特征函数为：$\lambda_n=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2 (n\geq 0)$，$X_n(x)=\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$ （6 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$\sin\frac{\pi x}{2l}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n X_n(t) \qquad \varphi_0=1 \quad \varphi_n=0\ (n\geq 0)$$ （9 分）

$$\sin\frac{3\pi}{2l}x=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n X_n(x) \quad \psi_1=1 \quad \psi_n=0\ (n\geq 0\text{且}n\neq 1)$$

代入方程得关于 T 的定解问题

$$\begin{cases} T_n''(t)-\lambda_n T_n(t)=0 \\ T_n(0)=\varphi_n, \qquad T_n'(0)=\psi_n \end{cases}$$

通解为：$T_n(t)=C_1\cos\sqrt{\lambda_n}t+C_2\sin\sqrt{\lambda_n}t$

$n=0$ 时，

$T_0(0)=\varphi_0=1 \quad \mathrm{T}_0'(0)=\psi_0=0$，

所以 $C_1=1, C_2=0$，

$$T_0(t)=\cos\sqrt{\lambda_0}t=\cos\frac{\pi}{2l}t$$

当 $n=1$ 时，

$T_1(0)=\varphi_1=0$

$T_1'(0)=\psi_1=1$，

所以 $C_1=0, C_2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=\dfrac{2l}{3\pi}, T_1(t)=\dfrac{2l}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi}{2l}t$

当 $n\neq 0, n\neq 1$ 时，$T_n(0)=0, T_n{}'(0)=0$，则 $C_1=0, C_2=0, T_n(t)=0$

综上

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi}{2l}x$$ （15 分）

2．令$u(x,t)=X(x)T(t)$．代入齐次方程

$$XT'-a^2X''T=0$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda$$

特征值问题为：$\begin{cases}X''(x)+\lambda X=0, & 0<x<\pi \\ X'(0)=0, & \mathrm{X}(\pi)=0\end{cases}$，解得

$$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \qquad X_n=\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad n\geq 0$$ （6 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$\cos\frac{3x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)X_n(x)\text{，}\ f_1=1 \quad f_n=0 \quad (n\geq 0,n\neq 1)$$

代入原方程得$T_n(t)$的定解问题 $\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_1 a^2T_n(t)=f_n \\ T(0)=0\end{cases}$ （9 分）

① 当$n=1$时，$\begin{cases}T_1'(t)+\lambda_1 a^2T_1(t)=1 \\ T_1(0)=0\end{cases}$，齐次方程通解$\overline{T}_1(t)=C_1e^{-\lambda_1a^2t}$，令特解

$\tilde{T}_1(t)=d$，代入方程得$d=\dfrac{1}{\lambda_1a^2}$，则

$$T_1(t)=C_1e^{-\lambda_1a^2t}+\frac{1}{\lambda_1a^2}\text{。}$$

由$T(0)=0$得，$T_1(t)=\dfrac{1}{\lambda_1a^2}(1-e^{-\lambda_1a^2t})$

② 当$n\neq 1$时，$\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0 \\ T_n(0)=0\end{cases}$，

由 $\quad T_n(t)=C_1e^{-\lambda_n{}^2a^2t},T_n(0)=0 \quad \Rightarrow C_1=0,T_n(t)=0$

$$u(x,t)=\frac{1}{\lambda_1a^2}(1-e^{-\lambda_1a^2t})\cos\frac{3x}{2}$$ （15 分）

五．作变量代换$x=\sqrt{\lambda}\rho$ ，原方程变为：

$$x^2R''(x)+xR'(x)+(x^2-n^2)R(x)=0$$ （5 分）

为 n 阶贝塞尔方程，其通解为：$R(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x)$。 （7 分）

则 $R(\rho)=C_1J_n(\sqrt{\lambda}\rho)+C_2N_n(\sqrt{\lambda}\rho)$

由于 $|R(0)|<+\infty$，则 C_2=0；由于 $R(2)=0$，则 $J_n(2\sqrt{\lambda})=0$

$$\lambda_m=(\frac{\mu_m^{(n)}}{2})^2, R_m(\rho)=J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{2}\rho)$$ （10 分）

六.（10 分）设 $\Omega=\{(x,y)\big|y>0\}$, $P_0(x_0,y_0)\in\Omega$, 则 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点为 $P_1(x_0,-y_0)$，于是可以构造格林函数为

$$\begin{aligned}G(P,P_0)&=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{1}{r_1}\right)\\&=\frac{1}{4\pi}\left(-\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)+\ln\left((x-x_0)^2+(y+y_0)^2\right)\right)\\&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\end{aligned}$$

显然有 $G(P,P_0)$=0，$P\in\partial\Omega$. （8 分）

直接计算可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}&=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right)\Bigg|_{y=0}\\&=-\frac{y_0}{\pi}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}\right),\end{aligned}$$

（9 分）

所以原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x_0,y_0)&=-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}ds+\iint_{\Omega}Gfd\sigma\\&=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx+\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dx.\end{aligned}$$

（10 分）

七.（12 分）该问题特征方程为：

$$(\frac{dy}{dx})^2-2\frac{dy}{dx}-3=0\text{可得}\frac{dy}{dx}=3\text{和}\frac{dy}{dx}=-1$$

特征线为：

$$x-\frac{y}{3}=c_1\text{和}x+y=c_2$$

做变量代换：

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$$

原方程化简为：

$$\frac{16}{3}u_{\xi\eta}=\eta$$

（7 分）

解之得：

$$\frac{16}{3}u_{\xi}=\frac{\eta^2}{2}+f_1(\xi)$$

$$u(\xi,\eta)=\frac{3}{32}\xi\eta^2+\int f_1(\xi)d\xi+g(\eta)=\frac{3}{32}\xi\eta^2+f(\xi)+g(\eta)$$

$$u(x,y)=\frac{3}{32}(x-\frac{y}{3})(x+y)^2+f(x-\frac{y}{3})+g(x+y)$$

由初始条件得：

$$\begin{cases}u(x,0)=\dfrac{3x^3}{32}+f(x)+g(x)=0\\ u_y(x,0)=\dfrac{5x^2}{32}-\dfrac{1}{3}f'(x)+g'(x)=0\Rightarrow-\dfrac{1}{3}f(x)+g(x)+\dfrac{5x^3}{96}=c\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{3}{4}c-\frac{1}{32}x^3,g(x)=\frac{3}{4}c-\frac{1}{16}x^3$$

$$u(x,y)=\frac{3}{32}(x-\frac{y}{3})(x+y)^2-\frac{1}{32}(x-\frac{y}{3})^3-\frac{1}{16}(x+y)^3$$

（10 分）