模型建立

1. $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\Delta u(x)=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$

2. 弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t), & t\ge 0 \quad \text{边界条件} \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l \quad \text{初值条件} \end{cases}$$

$a^2=\frac{T_0}{\rho}$（T_0：张力大小），$f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{\rho}$ → 所受外力的力密度

初值条件：u—初始位移，u_t—初始速度

边界条件：① 已知端点位移变化　　弦两端固定：$u(0,t)=u(l,t)=0$

$u(0,t)=g_1(t)$，$u(l,t)=g_2(t)$

② 已知端点在垂直于弦线平衡位置的外力作用下振动

$-T_0u_x(0,t)=\bar{g}_1(t)$

$T_0u_x(l,t)=\bar{g}_2(t)$

③ 端点与弹性物体连接

$x=0$：$u_x(0,t)-\sigma_1u(0,t)=g_1(t)$　　$\sigma_1=\frac{k_1}{T_0}$（T_0：弦之张力大小），$g_1(t)=-\sigma_1(Q_1(t)+l_1)$

$x=l$：$u_x(l,t)+\sigma_2u(l,t)=g_2(t)$　　$\sigma_2=\frac{k_2}{T_0}$，$g_2(t)=\sigma_2(Q_2(t)+l_2)$

k_1, k_2：弹性系数．l_1, l_2：弹簧长度．$Q_1(t), Q_2(t)$：t时刻弹簧下端位移

3. 热传导方程

$u_t=a^2\Delta u+f$　　$a^2=\frac{k}{\rho c}$，$f(x,y,z,t)=\frac{f_0(x,y,z,t)}{c}$　导热体体密度ρ，比热容c，热源强度$f_0(x,y,z,t)$

初值条件：$t=0$时刻的温度分布　　内部无热源：$f=0$

$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$，$(x,y,z)\in\bar{\Omega}$　表区域Ω与边界的并

边界条件：① 第一类：$\partial\Omega$边界上的温度分布　狄利克雷条件

$u|_\Sigma=g(x,y,z,t)$

② 第二类：单位时间内通过单位边界面流入导热体的热量　一阶导　诺伊曼问题

ku_x　$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma=g(x,y,z,t)$　$g=0$ 表边界面绝热

③ 第三类：导热体置于介质中，介质温度已知　第一类+第二类线性组合　诺伊曼条件

$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_\Sigma=g(x,y,z,t)$

$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=g$　$\sigma=\frac{k_1}{k}$，$g=\sigma u_1$

（k：导热体导热系数．k_1：介质之间热交换系数．u_1：边界$\partial\Omega$外侧的介质温度）

(1) $u_t=0$　区域内各点温度不随时间变化

$-\Delta u=\frac{1}{a^2}f$ —泊松方程　　$f\equiv 0$ —拉普拉斯方程

4. 边界条件 $u(0,t)=g_1(t)$. $u(l,t)=g_2(t)$, $t\geq 0$

齐次: $g_1(t)=g_2(t)=0$

非齐次: 齐次化处理 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

$w(0,t)=g_1(t)$. $w(l,t)=g_2(t)$

$$\Rightarrow w(x,t)=g_1(t)+\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x$$

u和w在两端点必须满足同样的条件

① $u_x(0,t)=g_1(t)$. $u(l,t)=g_2(t)$

$w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$

② $u(0,t)=g_1(t)$. $u_x(l,t)=g_2(t)$

$w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$

③ $u_x(0,t)=g_1(t)$. $u_x(l,t)=g_2(t)$

$$w(x,t)=g_1(t)x+\frac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=f_1(x,t), & 0<x<l,\ t>0 \\ v(0,t)=v(l,t)=0, & t\geq 0 \\ v(x,0)=\varphi_1(x),\ v_t(x,0)=\psi_1(x), & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

$f_1(x,t)=f-w_{tt}$

$\varphi_1(x)=u(x,0)-w(x,0)$

1. 只包含初值条件,而没有边界条件: 柯西问题

2. $-\Delta u=\frac{1}{a^2}f$ 泊松方程

$\Delta u=0$ 拉普拉斯方程

3. 泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega \\ u=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\partial\Omega \end{cases}$$

狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\partial\Omega \end{cases}$$

诺伊曼问题

4. 初值条件: $(x,y,z)\in\bar{\Omega}$ $t=0$ $0\leq x\leq l$

边界条件: $(x,y,z)\in\partial\Omega$ $t\geq 0$

微分方程: $(x,y,z)\in\Omega$ $t>0$ $0<x<l$

分离变量法

·特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l \\ X^{(i)}(0)=0, X^{(j)}(l)=0 \end{cases}$$

其中i,j均取0或1，则所有特征值λ非负

① $\lambda=0$　$X(x)=C_1+C_2x$

代入边界条件求C_1、C_2，若$X(x)=0$则舍

② $\lambda>0$　$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

利用边界条件求λ_n，C_1、C_2可取特值1（C_1、C_2不能同时为0）

$\Downarrow$

系数行列式必为0

$\Rightarrow \lambda_n$．$X_n(x)$

2. 弦振动方程定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0 \\ u_x(0,t)=0, u_x(l,t)=0, & t\geq0 \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

① 求特征函数

a. 设$u(x,t)=X(x)T(t)$代入$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$得

$$T''(t)X(x)-a^2X''(x)T(t)=0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

$$\Rightarrow X''(x)+\lambda X(x)=0,\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

b. $u(0,t)=X(0)T(t)=0$．$u(l,t)=X(l)T(t)=0$　$T(t)$不恒为0

$$\Rightarrow X(0)=X(l)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\ n=1,2,3\cdots$$

② 求级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\alpha)X(\alpha)d\alpha$　x的范围长度

$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\alpha)X(\alpha)d\alpha$

$f_n=\frac{2}{l}\int_0^lAX(\alpha)d\alpha$

③ 待定系数确定$T_n(t)$

$$\begin{cases} T_n''(t)+\lambda_na^2T_n(t)=f_n & \cdots① \\ T_n(0)=\varphi_n,\ T_n'(0)=\psi_n \end{cases}$$

④ 求解$T_n(t)$

方程1的基础解系　$\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)$．$\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)$

- 若f_n为常数，则特解可为常数$T_n(t)=\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$

$\Rightarrow$ 通解 $T_n(t)=c_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+d_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$

综上四步，$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$

边界条件分类

(1) $u(0,t)=0$. $u(l,t)=0$

$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$

(2) $u_x(0,t)=0$. $u(l,t)=0$

$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$. $X_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

(3) $u(0,t)=0$. $u_x(l,t)=0$

$\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$. $X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

圆域隐含条件

(4) $\Phi(\theta)=\Phi(2\pi+\theta)$

$\lambda_n=n^2$. $\Phi_n(\theta)=\{\cos n\theta, \sin n\theta\}$

$\lambda_n=0$. $\Phi_n(\theta)=1$

• 边界条件非齐次

eg. $u(0,t)=u_0$. $\underline{u_x(l,t)=\sin\omega t}$ — 非齐次

设 $v=u-w \Rightarrow w(x,t)=u_0+\sin\omega t\cdot x$

• 特解求法

① f_n为常数，见上

② f_n非常数 ⇒ (1)单一三角函数

若 $f_n=k_n\sin\omega t$，可设 $T_n(t)=A_n\sin\omega t$

• 第三步 $Y_n''(y)\ominus\lambda_n Y_n(y)=0$ $\left(\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)$

区别："+"变"−"

⇒ 基础解系 $e^{\frac{n\pi}{2}y}$. $e^{-\frac{n\pi}{2}y}$

但是设通解形式为 $Y_n(y)=c_n\underbrace{\mathrm{sh}}_{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}\frac{n\pi}{2}y+d_n\underbrace{\mathrm{ch}}_{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\frac{n\pi}{2}y$

3. 圆域、扇形域拉普拉斯方程

设 $x=\rho\cos\theta$. $y=\rho\sin\theta$. 则 $u_{xx}+u_{yy}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$

令 $u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta) \Rightarrow R''(\rho)\Phi(\theta)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\theta)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\theta)=0$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\theta)=-\left(R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\right)\Phi(\theta)$

$\Rightarrow \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=\frac{R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)}{\frac{1}{\rho^2}R(\rho)}=-\lambda$

☆ 由 $|R(0)|<\infty \Rightarrow C_2=0$ 同理

$\Rightarrow$☆ $\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0$

$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0$ —欧拉方程

令 $\rho=e^\tau$ $R''(\rho)=\frac{1}{\rho^2}(R''(\tau)-R'(\tau))$. $R'(\rho)=\frac{1}{\rho}R'(\tau)$

$\Rightarrow R''(\tau)-\lambda R(\tau)=0 \Rightarrow R(\tau)=C_1e^{\sqrt{\lambda}\tau}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}\tau}$ ☆ $\Rightarrow R_n(\rho)=C_1\rho^{\sqrt{\lambda}}+C_2\rho^{-\sqrt{\lambda}}$ $(\lambda\geqslant1)$

$\lambda=0$. $R_0(\rho)=A_0+B_0\tau$

$=A_0+B_0\ln\rho$

又由 $|u(0,\theta)|<\infty \Rightarrow B_0=0$

$\Rightarrow R_0(\rho)=A_0$

贝塞尔函数

1、Γ函数

$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}dx$

(1) $\Gamma(1)=1$、$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

(2) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

2. $\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R(\rho)=0$ 贝塞尔方程（$n=0$也是）

$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+\lambda R=0$ 欧拉方程

3、n阶贝塞尔方程的特征值问题

$$\begin{cases}\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R(\rho)=0,\ 0<\rho<\rho_0\\ R(\rho_0)=0.\ |R(0)|<+\infty\end{cases}$$

$\lambda_m=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2$. $R_m(\rho)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\cdot\rho\right)$, $m\geq1$

4. $\begin{cases}T'(t)+a^2\lambda_m T(t)=0\\ T(0)=\varphi(\rho)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $T_m(t)=A_m e^{-a^2\lambda_m t}$

$$A_m=\frac{2}{[\rho_0 J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}\int_0^{\rho_0}\rho\varphi(\rho)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)d\rho$$

5. 贝塞尔方程 $x^2u''(x)+xu'(x)+(x^2-n^2)u(x)=0$

通解 $y(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x)$　$n>0$且不为整数 $y(x)=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$

6. $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$

$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$

$J_n(x)=(-1)^nJ_n(-x)$

$(x^nJ_n(x))'=x^nJ_{n-1}(x)$　$J_0'(x)=-J_1(x)$

1. $u=u(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\vec{n}$为该圆域单位外法向量

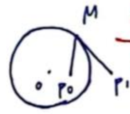
则 $u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow u_{rr}+\frac{1}{r}u_r=0$

$\vec{n}=\frac{1}{r}(x,y)$

2. $u=u(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{n}$为该球形域单位外法向量

则 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \Rightarrow u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=0$

3. 圆域上的狄利克雷问题



$$\frac{r_{P_0M}}{r_{P_1M}}=\frac{|OP_0|}{R}$$

$P_0(\xi,\eta)$, $P_1(\bar{\xi},\bar{\eta})$为关于圆域的对称点

格林函数 $G(P_0,P_1)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_0}-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{R}{|OP_0|}\cdot\frac{1}{r_1}\right)$

$$P_1=\left(\frac{R^2\xi}{\xi^2+\eta^2},\ \frac{R^2\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$$

4. 拉普拉斯方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0\\ u|_\Gamma=\varphi\end{cases}$$

若解存在，则解一定能表示为 $u=-\iint_\Gamma \varphi\cdot\frac{\partial G}{\partial n}dS$ 空间域

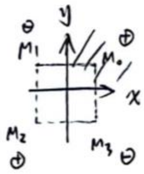
$u=-\int \varphi\cdot\frac{\partial G}{\partial n}ds$ 平面域

基本步骤：①写出格林函数G

②写出边界Γ, $\frac{\partial G}{\partial n}$, 积分区间 (不同积分形式)

5. 1/4平面内的格林函数

$$G=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{1}{r_{MM_1}}+\ln\frac{1}{r_{MM_2}}-\ln\frac{1}{r_{MM_3}}\right)$$



特征线法

一维波动方程特征线法

考虑弦振动方程柯西问题 $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$

①写出特征方程 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-a^2=0$

特征线 $x-at=C_1$, $x+at=C_2$

②变量代换 $\begin{cases}\xi=x-at\\ \eta=x+at\end{cases}$

③偏导数代入得 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

④积分求得通解 $u(x,t)=f(\xi)+g(\eta)$

$=f(x-at)+g(x+at)$

⑤根据初值条件确定解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

1. 线性偏微分方程：函数和各阶导函数之间不能有加减以外的运算.

$$\underbrace{g(x,t)}_{\text{只与}x,t\text{有关}}\cdot u_{xx}\ \checkmark \qquad u_x\cdot u_{xx}\ \times \qquad \cos u\ \times$$

齐次偏微分方程：不含 $\underbrace{f(x,t)}_{\text{与未知函数}u\text{无关的项}}$ 项

2. $x=y$ 为边界，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=y}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{x=y}$

3. 注意边界条件是否齐次

4. $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$. $(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$

5. $u_{xx}+u_{yy}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$

6. 欧拉方程 $R(\rho)=A_n\rho^{\sqrt{\lambda}}+B_n\rho^{-\sqrt{\lambda}}$

对于 $\lambda_0=0\Rightarrow R_0(\rho)=A_0+B_0\ln\rho$

7. 圆域隐含条件：$\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$

8: Γ函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

9. $T_n(t)=$ 齐次通解 + 特解. 后代入初值条件待定系数

10. $J_r(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^r\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!\,\Gamma(k+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ r为奇：奇函数. r为偶：偶函数

$$\underline{\underline{N_r(x)}}=\frac{J_r(x)\cos(r\pi)-J_{-r}(x)}{\sin(r\pi)}$$

无界函数