复杂网路动力学复习资料

钱院学辅-计学组

November 2023

第一版编写说明:

本资料是关于复杂网路动力学这门课程的复习资料。复杂网路动力学在目前计试培养方案里为 4-1 学期 (大四上) 必修课程。主要内容由计试 2101 胡熹瑞提供，计试 2101 杨思成对排版和内容做了些许改动。

由于时间仓促和人手问题，本稿中难免存在错误，恳请大家批评指正！

钱院学辅-计学组网站：

https://books.shinonomelab.net/

目录

1 绪论

复杂网络是指具有复杂拓扑结构和动力学行为的大规模网络

复杂网络连接具有稀疏性，小世界特性，无标度特性

小世界特性：任意两个节点间都有一条相当短的路径

无标度特性：复杂网络的节点的度分布具有幂指数函数规律

矩母函数：$m_X(t)=E[e^{tX}]=E[(e^t)^X], -\infty<t<h, h>0$ 矩母函数类似于概率密度函数。随机变量 X 的矩母函数与分布函数一一对应

$m_X(t)=E[e^{tX}]=\int e^{tx}f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E[X^k]t^k}{k!}$

$E[X^k]=\frac{d^k}{dt^k}m_X(t)|_{t=0}$

一阶中心矩恒为零，二阶中心矩就是方差

k 阶原点矩为：$\int x^k f(x)dx$

特征函数：$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = m_X(it)$ 随机变量 X 在虚轴上求得的矩母函数

概率母函数：$g_X(t) = E[t^X] = m_X(lnt)$ 矩母函数在对数轴上求得

泊松分布：$P\{N = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2 \cdots\cdots$

Gamma 函数：$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

Gamma 分布不是 Gamma 函数,在 Gamma 分布中 $E[X] = \alpha\beta, Var[X] = \alpha\beta^2$

在检验时，犯以真为假的错误的概率定义为显著性水平指标，即：$p = P\{\ \ H_0|H_0\ \ \}$ 犯以假为真的错误的概率定义为显著性水平指标，即：$\eta = P\{\ \ H_0|H_0\ \ \ \}$

置换矩阵：设 P 是一个 mxn 维的（0，1）矩阵，其元素为 0 或 1，如 m<=n 且 $P * P^T = I$，则称 P 为一个 mxn 的置换矩阵

引理：若 L 为实对称且不可约矩阵，其中 $a_{ij}\ >= 0(i \neq j)$，且有 $a_{ii} = -\sum_{j=1,j\neq i}^{N} a_{ij}$ 则存在：

- 零是矩阵 L 的一个重特征值，且 $[1, 1, ..., 1]^T$ 为其对应的特征向量

- 矩阵 L 的其他特征值都小于零

- 存在一个正交矩阵 $\phi = [\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N]$ 使得:$L^T\phi_i = \lambda_i\phi_i\ i = 1, 2, ..., N$ 成立，ϕ_i 表示特征值 λ_i 对应的特征向量，且所有特征向量互相正交。

2 复杂网络特征的数学描述

平均度 $< k >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i = a_{ii}^{(2)} = \frac{tr(A^2)}{N} = \sum kP(k)$

邻接矩阵 A 的平方 A^2 的对角元素 a_{ii} 就等于节点 v_i 的度 $k_i = a_{ii}^{(2)}$

$< k >= \frac{tr(A^2)}{N}$

泊松分布的平均度就是表示网络的特征尺度或特征长度；而幂律分布没有明显的特征尺度或特征长度

幂律分布函数是唯一满足“无标度条件”的概率分布函数。掌握这个函数的推导。

聚类系数：$C_i = \frac{E_i}{C_{ki}^2}$

聚类系数：$C_i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{2n_1}{k_i(k_i-1)} = \frac{a_{ii}^{(3)}}{a_{ii}^{(2)}(a_{ii}^{(2)}-1)}$

联合度分布：$P(k_1, k_2) = M(k_1, k_2)/M$，这里 k1 和 k2 是没有顺序的

最近邻平均度：$k_{nn,i} = \frac{\sum a_{ij}k_j}{k_i}$

赋权最近邻平均度：$k_{w-nn,i} = \frac{\sum_{j\in N_i} w_{ij}k_j}{S_i}$

所有的度为 k 的节点的最近邻平均度的平均值 $k_{nn}(k)$ 定义为：$k_{nn}(k) = \frac{\sum k_{nn,i}}{NP(k)}$

所有的度为 k 的节点的赋权最近邻平均度的平均值 $k_{w-nn}(k) = \frac{\sum_{ki=k} k_{w-nn,i}}{NP(k)}$

$P(C) = \frac{\sum_i \delta(C_i - C)}{N}$

许多真实网络中节点的聚-度相关性存在近似的倒数关系：$C(k) \propto k^{-1}$

最近邻平均度的平均值 $k_{nn}(k)$ 是随着 k 值上升的增函数，则表明度值大的节点倾向于和度值大的节点相连接，网络具有正相关特性，称为同配网络。反之: 略。

节点的介数就是网络中所有最短路径中经过该节点的数量的比例

边的介数就是网络中所有最短路径中经过该边的数量的比例

掌握书上例题的计算

核数的定义

节点 v_i 的度中心性 $C_D(v_i)$ 就是其度 k_i 除以最大可能的度 $N-1$

网络中心性系数 $H = \sum_{i=1}^{N}[C_D(u_{max}) - C_D(u_i)]$ 对应 N 节点网络的一个特例，H 最大

星型网络的 H 最大，其为 $H = (N-1)[1 - \frac{1}{N-1}] = N-2$

网络 G 的度中心性 $C_D = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{N}[C_D(v_{max}) - C_D(v_i)] = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}[C_D(v_{max}) - C_D(v_i)]$

节点 v_i 的点权 S_i 定义为与它相连接的边权之和 $S_i = \sum_{j\in N_i} w_{ij}$

单位权定义为节点的点权和节点度的比值

节点 v_i 的权重分布差异性 Y_i 定义为 $Y_i = \sum_{j\in N_i}(w_{ij}/S_i)^2$

基于节点的权-度相关性定义为：$S_{vv}(k) = \frac{\sum_{ki=k} S_i}{NP(k)}$

复杂网络中节点 v_i 的度为 k_i，则其重要度可以定义为：$I_i = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N} k_j}$

网络结构熵：$E = -\sum_{i=1}^{N} I_i ln I_i$

一组关系：$|A| = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_N$，$tr(A) = \sum_{j=1}^{N}\lambda_j$，$tr\,(A^p) = \sum_{j=1}^{N}\lambda_j^p$

3 经典复杂网络模型分析

现实世界中的真实复杂网络，一般都表现出小世界特性，无标度幂律分布，高聚类系数等特性。

3.1 规则网络

全局耦合网络:
$L = 1, C = 1$
最近邻耦合网络:
$P(k) = \delta(k - K)$
$C = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}$
$D = \frac{N}{K}$
$L = \frac{N}{2K}$
星型耦合网络:
$L = 2 - \frac{2}{N}$

3.2 随机网络

ER 网络：随机选 M 条边 (二项式模型),ER 随机网络中，如果连接概率 p 大于某个临界值 $p = p_c = \frac{lnN}{N}$，那么几乎每一个随机网络都是连通的。
性质：泊松分布、平均距离短、聚类系数小
度分布
$<k>= p(N-1) = pN$
$p(k) = C_{N-1}^{k} p^{k}(1-p)^{N-1-k} = \frac{<k>^{k} e^{-<k>}}{k!}$
$D = \frac{lnN}{ln<k>}$

随机选择一点，网络中大约有 $<k>^{L_{ER}}$ 个其他节点与该节点之间的距离等于或非常接近于 L_{ER}，固有 $N = \propto k^{L_{ER}}$
$L_{ER} = \frac{lnN}{ln<k>}$
$C = \frac{<k>}{N-1}$

3.3 小世界网络

掌握定义。
性质：平均路径长度短和聚类系数大
WS—-随机化重连
NW—-随机化加边
平均聚类系数为：$C_{WS}(p) = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}(1-p)^{3}$

3.4 无标度网络

无标度网络不是小世界网络，但是，无标度网络具有小世界特性。
小世界网络的度分布为泊松分布，属于均匀分布；无标度网络的度分布为幂律分布，属于非均匀分布。

BA 无标度网络模型

增长特性

优先连接 $P = \frac{k_i+1}{\sum(k_j+1)}$

掌握课本连续场理论证明。

$$\begin{cases} L \propto lnlnN, 2 < \gamma < 3 \\ L \propto \frac{lnN}{lnlnN}, \gamma = 3 \\ L \propto lnN, \gamma > 3 \end{cases}$$

3.5 层次网络

掌握定义

层次网络用来描述局部拓扑结构，它具有层次和模块结构。这种具有倒数关系的聚类-度相关性称为层次性，把具有层次性的网络称为层次网络 $C = k^{-1}$

ER 随机图和 BA 无标度网络都不具备层次拓扑结构，因为这两类网络的局部聚类系数与节点的度无关。

4 复杂网络动力学模型分析

一些用于生物病毒传播的模型（疾病传播模型）可以被移植过来，用于研究复杂网络中病毒的传播模型，其中最具代表性的传染病传播模型有：SI，SIS，SIR 和 SIRS 模型。

S-易感染状态，I-染病状态，R-免疫状态

4.1 SI 模型

$$
\begin{aligned}
&\frac{di(t)}{dt}=\alpha i(t)s(t)\\
&i(t)+s(t)=1\\
&i\left(t_0\right)=0\\
&\frac{di(t)}{dt}=\alpha i(t)(1-i(t))\\
&i(t)=\frac{1}{1+(1/i_0-1)e^{-at}}
\end{aligned}
$$

4.2 SIS 模型

$\frac{di(t)}{dt}=\alpha s(t)i(t)-\beta i(t), 1=s(t)+i(t)$
令 $\beta=1$（表示单位速率，表示一个治愈单位则 $\lambda=\alpha/\beta=\alpha$
$\frac{d\rho(t)}{dt}=-\rho(t)+\lambda<k>\rho(t)(1-\rho(t))$ 有 k 个染病节点对易感染节点施加病毒影响;
令 $\frac{d\rho(t)}{dt}=0$ $\rho(t)!=0$ ，得到解:
$\lambda=\frac{1}{<k>(1-\rho(t))}$, 由 SIS 模型可知，当 t 趋于无穷时，$\rho(t)=i(t)=C$, 所以传播阈值: $\lambda_c\propto\frac{1}{<k>}$

4.3 SIR 模型

$$
\begin{cases}
\frac{ds(t)}{dt}=-\lambda<k>s(t)i(t)\\
\frac{di(t)}{dt}=\lambda<k>s(t)i(t)-i(t)\\
\frac{dr(t)}{dt}=i(t)
\end{cases}
$$

$\frac{ds(t)}{dr(t)}=-\lambda<k>s(t)$
r(0)=0,i(0)=0,s(0)=1
$s(t)=e^{-\lambda<k>r(t)}$
$s(t)+i(t)+r(t)=1$ 趋于无穷大时，i(t)=0
$r=1-e^{-\lambda<k>r(t)}$ r 是 i(t) 的积分
要求非平凡解 $\frac{d}{dr}(1-e^{-\lambda<k>r})|_{r=0}>=1$
$\lambda>=\frac{1}{<k>}$
这个条件等价于 $\lambda>=\lambda_c$，其传播阈值可取为 $\lambda=\frac{1}{<k>}$，在 $\lambda=\lambda_c$ 处对上式进行 Taylor 展开，得到传染效率为 r 正比于 $\lambda-\lambda_c$

非均匀网络上 SIS 和 SIR 传播模型的传播阈值都为：$\lambda_c = \frac{<k>}{<k^2>}$

研究表明，对于幂律指数为 $2 < \gamma <= 3$ 的无标度网络，当网络规模趋于无穷大时，$< k^2 >$ 趋于无穷大，从而 λ_c 趋于 0. 由此可见，在无标度网络中，无论传染概率多么小，流行病都能传播并持续存在，这个结果很好的解释了为什么病毒和舆论可以在互联网和社会网络中传播的如此之快。

对于 BA 无标度网络而言，$< k^2 >= \sum k^2 P(k) = \sum k^2 (2m^2 k^{-3})$

5 复杂网络中的同步动力学分析

Li-Yorke 定义刻画了混沌模型的三个本质特征：有界的，非周期的，对初始值敏感的。

对于一维动力学系统 f(x)，满足 $f(x) = x$ 的点 x^*，则称 x^* 为系统的不动点。

需要记住 Jacobi 矩阵公式, 矩阵的每个元素表示一个系统，Jacobi 矩阵可以用来计算矩阵的特征值，还可以对非线性系统进行线性化处理。

混沌需要李雅普诺夫指数至少有一个为正值；混沌的完全同步需要所有的条件李雅普诺夫指数皆为负值。

需要掌握 n-周期点的定义。

需要掌握完全同步的定义。

需要掌握混沌同步的实现方法。

需要掌握 F, c, l_{ij}, H 所代表的含义。

根据同步化区域的不同类型，可以把连续时间耗散耦合动态网络分为三种类型：

类型 I 网络: 同步化区域为无界区域 $U = (-\infty, \alpha_1)$，其中 $-\infty < \alpha_1 < 0$，对于此类网络如果耦合强度 c 和外耦合矩阵 L 的特征值满足：$c\lambda_2 < \alpha_1 \ c > \frac{\alpha_1}{\lambda_2} > 0$，则类型 I 网络的同步流形是渐近稳定的，可实现混沌同步。λ_2 越小，同步化能力越强。

类型 II 网络: 同步化区域为有界区域 $U = (\alpha_1, \alpha_2)$，其中 $-\infty < \alpha_2 < \alpha_1 < 0$，对于此类网络如果耦合强度 c 和外耦合矩阵 L 的特征值满足：$c\lambda_2 < \alpha_1, c\lambda_N > \alpha_2$，即为 $\frac{\alpha_1}{\lambda_2} < c < \frac{\alpha_2}{\lambda_N}$ 时，类型 II 网络的同步流形是渐近稳定的，可实现混沌同步。$\frac{\lambda_N}{\lambda_0} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\lambda_N}{\lambda_0}$ 越小，同步化能力越强

类型 III 网络: 略。

性质分析：

类型一网络：

- 对给定的耦合强度 c，不管多大，当网络规模充分大时，最近邻耦合网络无法实现完全同步
- 对于给定的非零耦合强度 c，不管他多小，只要网络规模充分大，全局耦合网络都可以实现完全同步
- 星型耦合网络的同步化能力与网络规模无关，即当耦合强度 c 大于一个与网络规模无关的临界值时，星型网络可以实现完全同步

类型二网络：

- 对给定的耦合强度 c，不管它多大，当网络规模充分大时，最近邻耦合网络和星型耦合网络都无法实现完全同步
- 全局耦合网络的同步化能力与网络规模无关，只要 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 1$，全局耦合网络就能实现完全同步

表 1: 网络特征值

网络	λ_1	λ_2	λ_N
最近邻耦合网络	0	$-4\sum_{j=1}^{K/2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{N}\right)$	$\frac{\lambda_n}{\lambda_2} = \frac{(3\pi+2)N^2}{2\pi^3(K+1)(K+2)}$ $1 \ll K \ll N$
全局耦合网络	0	-N	-N
星型耦合网络	0	-1	-N

6 考试相关事项

2023 年考试总结。

6.1 题型

概念解释、填空、判断、简答题、证明题、计算题

6.2 回忆版

一、概念解释 (20 道，每一题 1 分)
二、填空 (30 个空)
三、判断 (5 道判断)
前三部分为老师所划重点里的基础概念。
四、简答题:
1. 无标度网络的鲁棒性/脆弱性
2. 驱动-响应同步法
3.$x_i = F(x_i) + c\sum_{j=1}^{N} l_{ij}H(X_j), i = 1, 2, ...N$ 各参数的含义
五、证明题:
证明无标度条件推导到幂律 $F(ax) = bF(x) \to x^{-\gamma}$
六、计算题：(公式均在旁边给出)
(1) 计算 S_{vv}
(2) 计算所有节点的聚类系数 (H 版本的定义)