西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：数学物理方程(不卷)　课时：32　考试时间：2018年9月日

一、(6分/题×6题=36分)

1. 方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}, 0\le x\le L$, 边界条件：$u(0,t)=0, u(L,t)=0$。 2. n 为偶数时是偶函数，n 为奇数时是奇函数。 3. $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f, f=f_0/c$,

4. 特征值 $\lambda_n=(\frac{2n+1}{2})^2, n\ge 0$，特征函数 $X_n(x)=\sin\frac{2n+1}{2}x, n\ge 0$ 5、$\frac{9!!}{2^5}\sqrt{\pi}$。

6、$C_1J_2(\sqrt{2}x)+C_2N_2(\sqrt{2}x)$

二、(**10分**)解：根据达朗贝尔公式

$$u=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{2}t)^2+1+(x-\sqrt{2}t)^2+1]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t}e^x dx$$

(两式各5分)

$$=x^2+2t^2+1+\frac{1}{2\sqrt{2}}[e^{x+\sqrt{2}t}-e^{x-\sqrt{2}t}]$$

三、(**10分**)解：特征方程为 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+t=0\\ x(0)=\tau\end{cases}$ (4分)，特征线为 $x+t^2/2=\tau$, 沿特征线, 原问题转化为 $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=0\\ u(0)=u(x(0),0)=\varphi(\tau)\end{cases}$ (4分)

解得 $u(t)=\varphi(\tau)=\varphi(x+t^2/2)$ (2分)

四、(**10分**)解：根据对称法：$P_0(\xi,\eta)\in\Omega, P_1(-\xi,\eta)$ 是其对称点，(2分)

$$G(P,P_0)=\Gamma(P,P_0)-\Gamma(P,P_1)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_1}}$$ (4分)

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right]$$ (4分)

五、(**10分**)解：**设**

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(\mu_m^{(0)}x),$$ (2分)

$$A_m=\frac{1}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2}\int_0^2 xJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x)dx=\frac{4}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2(\mu_m^{(0)})^2}\int_0^{\mu_m^{(1)}}xJ_0(x)dx$$

(6分)

$$=\frac{4}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2\mu_m^{(0)}}J_1(\mu_m^{(0)})$$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2\mu_m^{(0)}}J_1(2\mu_m^{(0)})J_0(\mu_m^{(0)}x)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{J_1(\mu_m^{(0)})\mu_m^{(0)}}J_0(\mu_m^{(0)}x)$$ （2 分）

六．(10 分) **解：设** $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 得

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

代入齐次边界条件得 $X(0)=0$， $X'(l)=0$ 。该问题的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l\\ X'(0)=0, X(l)=0\end{cases}$$ （5 分）

特征值为 $\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$ 其中 $n\geq 0$

$$T''(t)+a^2\lambda T=0$$

$$T_n(t)=A\cos\sqrt{\lambda_n}t+B\sin\sqrt{\lambda_n}t$$ （3 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x)$$

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nX_n(x), 0=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}X_n(x)，\quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)X_n(x)dx，\ \mathrm{Bn}=0$$

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\sqrt{\lambda_n}tX_n(x)$$ （2 分）

七、(14 分) **解：**易知对应的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<l\\ X(0)=0,\quad X'(l)=0\end{cases}$$

其解为 $\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2, X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x, n\geq 0$. （5 分）

将自由项和初始条件按照特征函数系展开成傅里叶级数

$$f(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{n=0}^{\infty}f_nX_n(x),\quad \varphi(x)=x=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_nX_n(x)，$$

$$f_0=1, f_n=0\quad(n\neq 0)，\ \varphi_n=2\int_0^1\varphi(x)X_n(x)dx=\frac{2}{\lambda_n}(-1)^n，$$ （4 分）

令 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$ 并代入方程和初始条件得 $T_n(t)$ 满足下面的定解问题

$$\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=f_n,\ t>0\\ T_n(0)=\varphi_n,\end{cases}$$

解得 $T_n(t)=Ce^{-\lambda_n a^2 t}+\dfrac{f_n}{\lambda_n a^2}$，$C=\varphi_n-\dfrac{f_n}{\lambda_n a^2}$ （4 分）

于是

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(\varphi_n-\frac{1}{\lambda_n a^2})e^{-\lambda_n a^2 t}+\frac{f_n}{\lambda_n a^2}]\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x$$ （1 分）