西安交通大学考试题

成绩	

课　程 数学物理方程A卷

学　院 ____________

专业班号 ____________　　考试日期 2018 年 1 月 6 日

姓　名 ____________　　学　号 ____________　　期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、单项选择题（5 分/题×4 题=20 分）

1. 下列方程是二阶线性偏微分方程的是(　　).

(A) $u_{xx}y^2+u_xu_y=x^2y$　　(B) $-x^2u_{xx}+u_t=0$

(C) $xyu_{tt}-u_{xxx}=\dfrac{2}{3}u_x$　　(D) $u_{xx}u_{yy}+xu_x^2=e^x$

2. 设$\varphi(x),\psi(x)$具有二阶连续导数，下列不是偏微分方程$u_xu_{xy}-u_yu_{xx}=0$解的函数是(　　).

(A) $x+\varphi(y)$　　(B) $x-\varphi(y)$

(C) $\psi(x+\varphi(y))$　　(D) $\psi(y+\varphi(x))$

3. 对于特征值问题$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,0<x<l\\ X'(0)=X'(l)=0\end{cases}$

下列说法错误的是（　　）

(A) 所有的特征值$\lambda\geq 0$.　　(B) 不同特征值对应的特征函数是正交的.

(C) 对于任意的整数$n\geq 0$，特征值$\lambda_n=(\dfrac{n\pi}{l})^2$，特征函数$X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi}{l}x$.

(D) 任一区间$[0,l]$上分段光滑的函数$f(x)$都可按特征函数系展成傅里叶级数，其中傅里叶系数为$f_n=\dfrac{l}{2}\int_0^l f(x)X_n(x)dx,n\geq 0$.

4. 关于整数阶的贝塞尔函数$J_n(x)$（$n\geq 0$），下列说法错误的是（　　）

(A) $J_n(x)$是n阶贝塞尔方程的解.　(B) $J_n(x)$与$J_{-n}(x)$线性无关.

(C)随$x>0$增大 $J_n(x)$ 振荡衰减.

(D) $J_n(x)$有无穷多个关于原点对称分布的实根，没有复根.

二、填空题（4 分/题×5 题=20 分）

1. 有一根长为l的均匀柔软细弦在无外力时做微小横振动，其左端$x=0$固定在平衡位置，右端$x=l$为自由端，初始位移和速度均为 0, 试写出弦振动的定解问题

____。

2. 长为l的均匀细杆侧面绝缘，内部无热源，左端$x=0$处封闭,右端$x=l$处温度为u_0，初始温度为$\varphi(x)(0\le x\le l)$,试写出相应的温度分布的定解问题

____。

3. 利用贝塞尔方程的性质写出$x^2y''+xy'+(4x^2-2)y=0$的通解________________。

4. 设$J_n(x)$为n阶 Bessel 函数，则$\frac{d}{dx}[x^{-2}J_2(x)]=$____________，$\int_0^1 x^{2018}J_{2017}(x)\mathrm{d}x=$__________________。

5. 已知$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，其中$\Gamma(\cdot)$表示 Gamma 函数，则$\Gamma(\frac{3}{2})=$____，$\Gamma(-\frac{1}{2})=$____。

三、（12 分）利用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\cos\dfrac{3\pi x}{4}, 0<x<2, t>0 \\ u_x(0,t)=0, u(2,t)=0, t\ge 0 \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, 0\le x\le 2. \end{cases}$$

四、（12 分）利用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_t-3u_{xx}=0, 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=0, u_x(\pi,t)=1, t\ge 0 \\ u(x,0)=\sin\dfrac{x}{2}+x, 0\le x\le \pi. \end{cases}$$

五、(10 分)将函数 $f(\rho)=\rho^n$ 在区间 $[0,1]$ 上按 $J_n(\mu_m^{(n)}\rho)$ 展成傅里叶-贝塞尔级数。

六、(6 分)证明 $z=xJ_n(x)$ 是方程 $x^2z''-xz'+(1+x^2-n^2)z=0$ 的解。

七、（10 分）利用格林函数法求解下列狄利克雷问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, z>1$$

$$u(x,y,1)=f(x,y), \qquad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$$

八、（10 分）利用特征线法求解柯西问题

$$\begin{cases} 3u_t+2u_x=0, -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=1-x, -\infty<x<\infty. \end{cases}$$