西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(B) 课时：32 考试时间：2020 年 1 月 7 日

一、(3 分/题×5 题=15 分)

B, B, A, B, B

二、(5 分/题×2 题=25 分)

1、$y = CJ_3(\sqrt{3}x) + DN_3(3x)$ （5 分)

2、$\lambda_n = (\frac{2n+1}{2l}\pi)^2$，$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$ （特征值 3 分，函数 2 分)

3、$\frac{1}{2}x^3 J_3(2x) + C$ （5 分)

4、$I = \Gamma(11) = 10!$ （5 分)

5、设 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_2(\mu_m^{(2)}x)$ （2 分)

$$A_m = \frac{2\int_0^1 \rho^3 J_2\left(\mu_m^{(2)}\rho\right)d\rho}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2} = \frac{2J_3(\mu_m^{(2)})}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2 \mu_m^{(2)}}$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_3(\mu_m^{(2)})}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2 \mu_m^{(2)}} J_2(\mu_m^{(2)}x)$$ (5 分)

三、(10 分)取一点 $M_0(\xi,\eta) \in \Omega$, 其关于 x 轴对称点为 $M_1(\xi,-\eta)$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}$$ （5 分)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$ （8 分, 不计算方向导数不扣分，此处得分算到下一步)

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} G(x,y,\xi,\eta) f(x,y)dxdy$$ （10 分)

四、(10 分) $u = v + x - l$

特征值为 $\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x}) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$, $n \geq 0$. （5 分)

$$T_n(t) = c_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t + d_n\sin a\sqrt{\lambda_n}t$$ （8 分)

$$u = x - l + \sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t + d_n\sin a\sqrt{\lambda_n}t)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$$

$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l (\varphi(x)-x+l)\cos\sqrt{\lambda_n}xdx \qquad d_n=0$ （10 分）

五、（15 分）特征值为$\lambda_n=\left(n\pi\right)^2$，特征函数为$X_n(\mathrm{x})=\sin\left(n\pi x\right)$，$n\ge 1.$ （5 分）

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} T_n\sin n\pi x,\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin n\pi x$$

$$f_n=2\int_0^1 f\cos n\pi xdx,\quad n\ge 0$$

$$\begin{cases}T_n'(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=f_n\\ T_n(0)=0\end{cases}$$ （10 分）

$T_n(t)$通解为

$$T_n(t)=-\frac{f_n}{a^2\lambda_n}e^{-a^2\lambda_nt}+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$$

所以 $$u=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{f_n}{a^2\lambda_n}e^{-a^2\lambda_nt}+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}]\sin n\pi x$$ （15 分）

六、（15 分）解：设$\boldsymbol{u=R(\rho)T(t)}$

$$T''+\lambda T=0$$

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0,T'+\lambda T=0$$

$$R(1)=0,\left|R(0)\right|<+\infty$$

$$\lambda_m=\left(u_m^{(0)}\right)^2,R_m=J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$ (5分)

$$T_m=A_m\cos\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t}+B_m\sin\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t}$$ (8分)

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t}+B_m\sin\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t}\ )J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$1=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0\left(u_m^{(0)}\rho\right),0=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sqrt{\lambda_m}J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$B_m=0$$

$$A_m=\frac{2}{\left[J_0'\left(u_m^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1\rho J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)d\rho.=\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}$$ (14分)

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}\cos\sqrt{\lambda_m}tJ_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$ （15 分）

七、(10 分) 特征方程为$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt}-t=0, t>0 \\ x(0)=\tau \end{cases}$ (2 分)

特征线为$x=\tau+\dfrac{1}{6}t^2$ (4 分)

沿特征线, 原问题转化为$\begin{cases} 3\dfrac{du}{dt}+u=1 \\ u(0)=\tau^2 \end{cases}$ (6 分)

$$u(t)=1+(\tau^2-1)e^{-1/3t}$$

$$=1+((x-t^2/6)^2-1)e^{-1/3t}$$ (10 分)