西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(B) 课时：32 考试时间：2019 年 5 月 11 日

一．判断题（每小题 5 分）。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	B	A	A	B	B	B	A	B	A	A

二、（10 分）解：$u(x,t)=X(x)T(t)$，特征值问题

$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$，$\lambda_n=\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$，$X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$，$n\geq 0$，

（5 分）

$\begin{cases} T_n'(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0 \\ T_n(0)=\varphi_n \end{cases}$，

$T_n(t)=\varphi_n e^{-a^2\lambda_n t}$，$\varphi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi X_n dx=\begin{cases}1, n=1\\ 0, n\neq 0\end{cases}$ （9 分）

$u=e^{-a^2\lambda_1 t}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2l}x\right)$ （10 分）

三、（10 分）设$u=R(\rho)T(t)$

$$\begin{aligned}&\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0, T'+\lambda T=0\\&R(1)=0, |R(0)|<+\infty\end{aligned}$$ （5 分）

$$\begin{aligned}&\lambda_m=\left(u_m^{(0)}\right)^2, R_m=J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right), T_m=A_m e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2 t}\\&u=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2 t} * J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)\end{aligned}$$ （10 分）

$$\varphi(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$A_m=\frac{2}{\left[J_0'\left(u_m^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1 \rho\phi(\rho)J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)d\rho.$$

四、(10 分) 解：特征方程：$\dfrac{dx}{dt}+1=0,x(0)=\tau,x+t=\tau$ 5 分

$$\frac{du}{dt}+u=0,u\,|_{t=0}=\tau^3$$

$$u=\tau^3e^{-t}=(x+t)^3e^{-t}$$ 5 分

五、(10 分) 解：任取 $M_0(x_0,y_0),y_0>0,$ 其对称点为 $M_1(x_0,-y_0)$. (2 分)

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$$ (5 分)

$$\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\Big|_{y=0}=-\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial y}=-\frac{1}{4\pi}\frac{4y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

$$u(M_0)=-\int_{y=0}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\varphi(M)ds+\int_{y>0}G(M,M_0)f(M)dxdy$$

(10 分)

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^{\infty}\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}f(x,y)dy$$