凸优化 2023 答案

一、填空题

1. 阻尼牛顿阶段 二次收敛阶段

解析：newton 迭代一开始收敛很慢，算法始终选择步长 t<1，当满足一定条件时，会选择 t=1 收敛很快，详细条件和证明在凸优化书 P466

2. $\nabla f(x^*)=0$ $\|f(x)\|_* \arg\min\{\nabla f(x)^T d \mid \|d\|=1\}$

$-\nabla^2 f(x)^{-1}\nabla f(x)$ $\left[\nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1}\nabla f(x)\right]^{\frac{1}{2}}$

解析：最优点处的梯度为 0，为最优性条件，第二个空是非规范下降方向，规范化下降方向是 $\mathrm{argmin}\{\nabla \mathrm{f(x)}^{\mathrm{T}}\mathrm{d} \mid \|\mathrm{d}\|=1\}$ 非规范要乘 $\|f(x)\|_*$

3. 可行点牛顿方法 不可行点牛顿方法 对偶牛顿方法

ps. 不会可以抄后面的大题

4.
$$\begin{aligned}
&2x_1+\lambda=0\\
&4x_2+\lambda+\nu=0\\
&x_1+x_2-3=0\\
&\nu(x_2-1)=0\\
&x_2\le 1\\
&\nu>0
\end{aligned}$$

拉格朗日函数为 L，等式约束为 g(x), 不等式约束为 f(x)

$$\begin{aligned}
&\nabla L=0\\
&g(x)=0\\
&f_i(x)\le 0\\
&\nu f(x)=0\\
&\nu_i>0
\end{aligned}$$

二、判定凸集及凸函数

1.是凸集

取$\forall x, y \in C$，如下可证$\theta x+(1-\theta) y \in C$

$$
\begin{aligned}
&(\theta x+(1-\theta) y)^T A(\theta x+(1-\theta) y) \\
&=\theta^2 x^T A x+(1-\theta)^2 y^T A y+2(1-\theta) \theta x^T A y \\
&\leq \theta^2 b+(1-\theta)^2 b+2(1-\theta) \theta b \\
&=b
\end{aligned}
$$

解析：从定义入手即可。

2.是凸函数

我们可以计算 Hessian 矩阵

$$
\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} \frac{2}{\mathrm{y}} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix}
$$

计算 Hessian 矩阵特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\frac{2(x^2+y^2)}{\mathrm{y}^3}>0$其为半正定矩阵，则该函数为凸函数。

解析，证明凸函数可以从定义，一阶判定，二阶判定考虑。

三、对以下优化问题

1.X=[3,4]

$$
\begin{aligned}
&x^*=3 \\
&p^*=22
\end{aligned}
$$

2.

$$L(x,\lambda)=(3x^2-2x+1)+\lambda(x-3)(x-4)$$
$$=(3+\lambda)x^2-(7\lambda+2)x+12\lambda+1$$
$$g(\lambda)=\min_x L(x,\lambda)$$
$$=-\frac{\lambda}{4}+\frac{123}{4}-\frac{361}{4\lambda+12}$$
$$g''(\lambda)=\frac{-361}{2(\lambda+3)^3}<0$$

解析$L=f(x)-\lambda g(x)$，证明凹函数对于单变量函数求二阶导即可

3.

$$\max g(\lambda)$$
$$s.t.\lambda>0$$

令 $g'(\lambda)=0$ 得 $\lambda=16$， 此时 $d^*=22$

此时强对偶性成立

根据 slater 条件， 当$x=3.5$时,$(x-3)(x-4)<0$，符合强对偶性。

解析：slater 条件只需找到使 g（x）<0 的非边界点就行。

四、对于无约束优化问题

（a）

由$f(y)\ge f(x)+\nabla f(x)^T(y-x)+\frac{m}{2}\|y-x\|_2^2$

$$f(y)\ge f(x)-\|\nabla f(x)\|_2\|y-x\|_2+\frac{m}{2}\|y-x\|_2^2$$

有$f(x^*)<f(x^k)$

$$0>f(x^*)-f(x^k)\ge-\|\nabla f(x^k)\|_2\|x^*-x^k\|_2+\frac{m}{2}\|x^*-x^k\|_2^2$$

$$\|x^*-x^k\|\le\frac{1}{2m}\|\nabla f(x^k)\|$$

解析：这个证明可以看书 P440

（b） $-\nabla f(x)^T$

解析 Euclid 下降方向为二范数下降方向，最速下降方向就是负梯度方向

（c）

1. 取 $x_0 \in dom f$

2. 终止条件 $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon$

3. 确定 $t > 0, d = -\nabla f(x)^T$ 使 $f(x+td) < f(x)$

4. x=x+td 回 2

（d） $$\begin{aligned} &\text{上界} k \geq \frac{\log((f(x)-p^*)/\varepsilon)}{\log(1/c)} \\ &\text{其中} \mathrm{c} = 1-\mathrm{m}/M \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} &f(x^+) \leq f(x) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|_2^2 \\ &\|f(x)\|_2^2 \geq 2m(f(x)-p^*) \\ &f(x^k) - p^* \leq c^k(f(x^0)-p^*) \\ &\text{其中} c = 1-\frac{m}{M} \end{aligned}$$

解析：这个在书的 P446

五、对于等式约束优化问题

（a）

$$r(x,v)=\begin{bmatrix}\nabla f(x)+A^T v\\ Ax-b\end{bmatrix}$$

dx可由以下方程解得

$$\begin{bmatrix}\nabla^2 f(x) & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dv\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\nabla f(x)+A^T v\\ Ax-b\end{bmatrix}$$

(b)

1. 取x_0符合$Ax=b$

2. 终止条件$\frac{1}{2}\lambda(x^k)^2<\varepsilon$

3. 由 KKT 方程解得 dx

$$\begin{bmatrix}\nabla^2 f(x) & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{dx}\\ \mathrm{w}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\nabla f(x)\\ 0\end{bmatrix}$$

4. t=1

while $f(x^k+tdx)>f(x^k)-\alpha t^k\lambda(x^k)^2$

$t=\beta t$

5. $x^{k+1}=x^k+tdx^k$, 回 2

六、对于等式不等式约束优化问题

（a）

$$\min f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}-\frac{1}{t}\log(-f_i(x))$$
$$s.t. Ax=b$$
$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{m}\log(-f_i(x))$$

（b）

$$t\nabla f(x)+\nabla\phi(x)+A^T v=0$$

$$\begin{bmatrix}t\nabla^2 f_0(x)+\nabla^2\phi(x) & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ v\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}t\nabla f_0(x)+\nabla\phi(x)\\ 0\end{bmatrix}$$

（c）

$$g(\lambda,\nu)=f_0(x^*(t))+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)f_i(x^*(t))+\nu^*(t)^T(Ax^*(t)-b)$$
$$=f_0(x^*(t))-m/t$$
$$f_0(x^*(t))-\mathrm{p}^*\le m/t$$

（d）

$$\min \mathrm{s}$$
$$\mathrm{f(x)}\le \mathrm{s}$$
$$\mathrm{Ax=b}$$

若 p*<0，有严格可行解

若 p*>0 无可行解

若 p*=0 有可行解，无严格可行解

解析：利用障碍方法要计算严格可行点，需要构造初始点，s 可以理解为最大不可行值的上界，我们要使最大值小于零（书 P552）