2023 学年秋季学期 凸优化

ysc

一、填空题 (共 30 分，每空 2 分) .

1. 采用牛顿回溯直线搜索方法求解优化问题时，所经历的两种迭代过程分别是 ___ 和 ___ 。
2. 对于无约束的凸优化问题 $\min_{x\in R^n} f(x)$，其最优解 x^* 应满足的最优性条件为 ___ 。使用迭代下降方法求解该优化问题，在点 $x^k \in domf$ 处的非规范化最速下降方向为 ___ ，牛顿方向为 ___ ，在该处的牛顿减少量 $\lambda(x^k)$ 为 ___ 。
3. 处理只包含等式约束凸优化问题的常用方法有: ___ , ___ , ___ 。
4. 对于以下等式不等式限制的二次凸优化问题：$\min_{x_1,x_2} x_1^2+2x_2^2 \quad s.t. x_1+x_2=3, x_2\le 1, x_1,x_2\in R$
令 $x_1^*, x_2^* \in R$ 为该问题最优解，$\lambda^*\in R$ 为等式约束的最优拉格朗日乘子，$v^*\in R$ 为不等式约束的最优拉格朗日乘子，请写出该优化问题满足的 KKT 方程 ___ 。

二、判定凸集及凸函数 (共 10 分) .

1. 考虑集合 C 定义为: $C=\{x\in R^n | x^TAx\le b\}$
其中,$A\in R^{n*n}$ 为一个给定的半正定矩阵，b 是一个给定的常数。请判新集合 C 是否为凸集，并给出证明。(4 分)
2. 设函数 $f: R^2 \Rightarrow R$ 定义为 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$
其中 $domf=\{(x,y)|x\in R, y\in R_{>0}\}$ 判断函数 f 是否为凸函数，并给出证明。(6 分)
注：本题证明中可直接使用以下不等式: 对任意 $x,y\in R^n$，$|x^Ty|\le \|x\|_2\|y\|_2, \sqrt{x^Tx}\sqrt{y^Ty}\le \frac{1}{2}(x^Tx+y^Ty)$
(友情提示: 以上不等式仅供参考非必用，存在无需使用的解题路径。)

三、对以下优化问题 (共 14 分)

$\min_x 3x^2-2x+1, s.t. (x-3)(x-4)\le 0$
1. 请求出该优化问题的可行解集 X、最优解 x^* 和最优值 p^*。(3 分)
2. 请写出该优化问题对应的拉格朗日函数 $L(x,\lambda)$ 及对偶函数 $g(\lambda)$,λ 为不等式约束对应的拉格朗日乘子。并证明该对偶函数 $g(\lambda)$ 是凹函数。(5 分)
3. 请写出该优化问题的拉格朗日对偶问题，并求解对偶最优解 λ^* 及对偶最优值 d^*。判断此时强对偶性是否成立，并说明理由。(6 分)

四、对于无约束优化问题 (21 分)

$\min_x f(x)$ 满足如下假设:
(1) 函数 $f: R^n \Rightarrow R$ 为二阶连续可微的凸函数;

(2) 在使用迭代算法求解该无约束优化问题时，初始点 $x_0 \in dom f$，且水平集 $S = \{x|f(x) \leq f(x^0)\}$ 为闭集;
(3) 根据强凸性不等式和 (2) 中假设，对任意 $x \in S$, 存在 $m, M > 0$ 满足 $ml \leq \nabla^2 f(x) \leq MI$。
记 x^* 为优化问题最优解,$p*$ 为最优值。现请根据题设，完成下列问题:
(a) 请写出迭代求解过程中任意迭代点 x^k 与最优解 x^* 距离的上界，并证明。(5 分)
(b) 请写出迭代求解过程中任意迭代点 x^k 处采用 $Euclid$ 范数的非规范化最速降方向。(5 分)
(c) 请写出该优化问题从初始点 x^0 出发的采用 (b) 中下降方向的精确直线搜索算法。(5 分)
(d) 请证明 (c) 中搜索算法的收敛性，并写出其迭代次数上界。(6 分)

五、对于等式约束优化问题 (10 分)

$\min_x f(x), s.t. Ax = b$ 满足以下假设:
(1) 函数 $f : R^n \Rightarrow R$ 为二阶连续可微的凸函数;
(2) 矩阵 $A \in R^{p \times n}$,$rank(A) = p < n$。
(3) 存在消除矩阵 $F \in R^{n \times (n-p)}$ 及可行解 $\hat{x}$ 满足 $A\hat{x} = b$。
在此，记该优化回题的最优解为 x^*，最优值为 p^*，请问答下列问题:
(a) 已知不可行迭代点 x，使用牛顿方法直接求解等式限制优化问题，请写出原对偶残差 $r(x, v)$，并计算该点处的牛顿方向 d_x。(5 分)
(b) 从不可行初始点 x^0 出发使用牛顿法造代至可行解 x^k 时，可切换至可行初始点的牛顿法、请写出此时等式限制凸优化问题的牛顿下降回溯直线搜索算法。(5 分)

六、对于等式不等式约束优化问题 (15 分)

$\min_x f_0(x), s.t. f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, ...m, Ax = b$
满足如下假设:
(1) 函数 $f_0, ...f_m : R^n \Rightarrow R$ 为二阶连续可微的凸函数;
(2) 矩阵 $A \in R^{p \times n}$，$rank(A) = p < n$;
(3) 该优化问题严格可行，即存在 $x \in D$ 满足 $Ax = b, f_i(x) < 0, i = 1, .., m$
(4) 该问题对偶问题的可行解为 $\lambda \in R^m, v \in R^p$。
记 x^* 为该优化问题的最优解，p^* 为最优值。
根据题设现使用障碍方法求解该优化问题，请完成下列问题:
(a) 请使用近似示性函数将该优化问题转化为近似等式约束优化问题，并写出所对应的对数障碍函数。(3 分)
(b) 请写出近似等式限制优化问题中心路径上的点 $x^*(t)$ 应满足的条件，并将其与以上等式不等式限制优化问题的 KKT 方程对应，写出 $x^*(t)$ 满足的修改后的 KKT 方程。(5 分)
(c) 请估计 $x^*(t)$ 与相应对偶可行解 $\lambda_i^*(t), v^*(t)$ 的对偶间隙。(4 分)
(d) 已知不可行初始点 $x^0 \in dom f_1 \cap ... \cap dom f_m$ 满足 $Ax^0 = b$, 请通过构建优化问题寻找严格可行初始解，并分析严格可行解存在的条件。(3 分)