西安交通大学考试题

成绩	

课　　程 数学物理方程 B 卷

学　　院 ______________

专业班号 ______________　　考试日期 2018 年 1 月 6 日

姓　　名 ______________　　学　号 ______________　　期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一(5 分/题×4 题=20 分)

1. 下列方程是线性非齐次偏微分方程的是().

(A) $u_x u_y + 2u = 0$　　(B) $u_{xxxx} + u_{yyyy} + \cos u = u_x^2 + xy$

(C) $\sin x u_{tt} - u_{xx} = x^3 t$　　(D) $x u_t - 2u_{xx} + e^x u = u_x$

2. 特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$，特征值和特征函数为()

(A) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi}{l}x \end{cases}$ $n \geq 0$　　(B) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x \end{cases}$ $n \geq 1$

(C) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x \end{cases}$ $n \geq 0$　　(D) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \\ X_n(x) = \cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x \end{cases}$ $n \geq 0$

3. 设 u_1 和 u_2 是方程 $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ 的两个解，λ 为任意常数，β 是 x 和 y 的任意函数，则下列()种组合一定也是 $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ 的解.

(A) $\lambda u_1 + \beta u_2$　　(B) $\beta u_1 + \lambda u_2$

(C) $\beta(u_1 - u_2) + u_1$　　(D) $\lambda(u_1 - u_2) + u_2$

4. 对于 Bessel 函数 $J_n(x)$ (n 为整数)，下列说法不正确的是()

(A) Bessel 函数是有界函数

(B) $J_n(x) = 0$ 的根全部为单重根

(C) $J_{n+1/2}(x)$ 与 $J_{-(n+1/2)}(x)$ 是线性无关的

(D) $J_n'(x)$ 有无穷多个零点

二.（每题 5 分, 共 10 分）

1 求 $\int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x)dx$.　　2 求 $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

三.（10 分）考虑特征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & 0<x<l \\ X'(0)=0,\ \ X(l)=0 \end{cases}$。

证明 $\lambda\geq 0$，并求解特征值问题。

四．（每小题 15 分，共 30 分） 试用分离变量法求解下列各方程：

1. $$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & 0<x<l,\quad t>0 \\ u(0,t)=0, u_x(l,t)=0 & t\geq 0 \\ u(x,0)=\sin\dfrac{1}{2l}\pi x,\ \ u_t(x,0)=\sin\dfrac{3}{2l}\pi x & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\cos\dfrac{3x}{2} & 0<x<\pi\quad t>0 \\ u_x(0,t)=0, u(\pi,t)=0 & t\geq 0 \\ u(x,0)=0 & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

五．（10 分）已知 $\lambda>0, n$ 为正整数，试求贝塞尔方程特征值问题：

$$\begin{cases} \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R(\rho)=0, & 0<\rho<2 \\ R(2)=0,\ |R(0)|<+\infty \end{cases}$$

六．（10 分）．利用格林函数法求解下列狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y),\quad -\infty<x<+\infty,\ y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

七．（10 分）．利用特征线法求解下列柯西问题

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=x+y, -\infty<x<+\infty, y>0 \\ u|_{y=0}=0, \quad u_y|_{y=0}=0, -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t-3u_{xx}=0, 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=0, u_x(\pi,t)=1, t\geq 0 \\ u(x,0)=\sin\dfrac{x}{2}+x, 0\leq x\leq \pi. \end{cases}$$

五、(10 分)将函数 $f(\rho)=\rho^n$ 在区间 $[0,1]$ 上展成 $J_n(\mu_m^{(n)}\rho)$ 的傅里叶−贝塞尔级数。

六、(6 分)证明 $z=xJ_n(x)$ 是方程 $x^2z''-xz'+(1+x^2-n^2)z=0$ 的解。

七、(10 分)利用格林函数法求解下列狄利克雷问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, z>1$$

$$u(x,y,1)=f(x,y), \quad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$$

八、(10 分)利用特征线法求解柯西问题

$$\begin{cases} 3u_t+2u_x=0, -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=1-x, -\infty<x<\infty. \end{cases}$$