优化方法基础

神秘

2024 年 11 月 25 日

一、填空题

1. 凸集的定义：________________。

2. 凸函数的两种判定方法：________，________。

3. 对于①、不满足 Slater's 条件的非凸优化问题 ②、不满足 Slater's 条件的凸优化问题 ③、满足 Slater' 条件的非凸优化问题 ④、满足 Slater' 条件的凸优化问题，请选出弱对偶性一定成立的选项________ 和强对偶性一定成立的选项________

4. 采用牛顿方法求解优化问题时，所经历的两种迭代过程分别是 ____ 和 ____ 。

5. 处理只包含等式约束凸优化问题的常用方法有：____，____，____。

$$
\begin{aligned}
\min\ & f_0(x) \\
\text{s.t.}\ & g_i(x) \le 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{aligned}
$$

写出该优化问题满足的 KKT 方程：

____________ ____________ ____________ ____________ ____________

三、判定凸集及凸函数

1. $D=\{x:\|Ax+b\|\leq c\}$，判断是否是凸集，并证明。

2. $f(x,y)=x^4+y^4+3x^2+3y^2+\mathrm{e}^{x+y}$，判断是否是凸函数，并证明。

四、对以下优化问题

$$
\begin{aligned}
&\min\ 4x^2-6x+3\\
&\text{s.t. } (x-2)(x-4)\leq 0
\end{aligned}
$$

1. 请求出该优化问题的可行解集 X、最优解 x^* 和最优值 p^*。

2. 请写出该优化问题对应的拉格朗日函数 $L(x,\lambda)$ 及对偶函数 $g(\lambda)$，λ 为不等式约束对应的拉格朗日乘子。并证明该对偶函数 $g(\lambda)$ 是凹函数。

3. 请写出该优化问题的拉格朗日对偶问题，并求解对偶最优解 λ^* 及对偶最优值 d^*。判断此时强对偶性是否成立，并说明理由。

五、对于无约束优化问题

1. 写出 d^k 为下降方向的充要条件，并证明。

2. 写出非规范最速下降方向和规范化最速下降方向，证明 Euclid 范数 $\|\cdot\|_2$ 下的非规范化最速下降方向是负梯度方向。

3. 写出此时对应的采用回溯直线搜索的下降方法。

六、对于等式约束优化问题

$$\min_x f(x), \text{s.t. } Ax=b$$

满足以下假设：

1. 函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为二阶连续可微的凸函数;

2. 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathrm{rank}(A) = p < n$。

1. 用二阶近似最优性得到牛顿下降方向 d_x 并证明证明牛顿下降方向 d_x 是**可行**的**下降**方向。

2. 写出牛顿减少量 $\lambda(x)$ 的形式并证明 $f(x) - p^* \approx \frac{1}{2}\lambda(x)^2$。

3. 写出可行迭代点的牛顿下降回溯直线搜索算法。

七、对于等式不等式约束优化问题

$$\min_x f_0(x), s.t. f_i(x) \le 0, i = 1, 2, ...m, Ax = b$$

满足如下假设:

1. 函数 $f_0, ...f_m : R^n \Rightarrow R$ 为二阶连续可微的凸函数;

2. 矩阵 $A \in R^{p\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = p < n$;

3. 该优化问题严格可行,即存在 $x \in D$ 满足 $Ax = b$, $f_i(x) < 0, i = 1, ..., m$

4. 该问题对偶问题的可行解为 $\lambda \in R^m$, $v \in R^p$。

记 x^* 为该优化问题的最优解,p^* 为最优值。

根据假设现使用障碍方法求解该优化问题,请完成下列问题:

1. 请使用近似示性函数将将该优化问题转化为近似等式约束优化问题,并写出所对应的对数障碍函数

2. 请写出 $x^*(t)$ 满足的 $f(x^*(t)$ 与 p^* 差值的上界

3. 写出从可行初始点 x^0 出发的障碍方法;并估计至多需要多少轮外部迭代,能够达到 ϵ 的精度要求。