习题 11 参考答案

1. (1) $F_0(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $\quad F_{-1}(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ p, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-p, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1;\end{cases}$$

(2) $F_{0,1}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & (x_1<0)\text{或}(x_2<0),\\ 1-p, & (x_1\geqslant 0,0\leqslant x_2<1),\\ 1, & (x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 1),\end{cases}$

$F_{-1,1}(x_1,x_2)=$

$$\begin{cases}0, & (x_1<-1)\text{或}(x_2<0)\text{或}(-1\leqslant x_1<0,0\leqslant x_2<1),\\ 1-p, & (x_1\geqslant 0,0\leqslant x_2<1),\\ p, & (-1\leqslant x_1<0,x_2\geqslant 1),\\ 1, & (x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 1).\end{cases}$$

2. 当 $t<0$ 时 $F_t(x)=\begin{cases}0, & x<t,\\ 1-\dfrac{x}{t}, & t\leqslant x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$

当 $t>0$ 时，$F_t(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{t}, & 0\leqslant x<t,\\ 1, & x\geqslant t,\end{cases}$

当 $t=0$ 时，$F_0(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

3. (1) $F_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\quad F_1(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}$

(2) $\begin{bmatrix}(\cos(\pi t_1),(\cos(\pi t_2),\cdots,\cos(\pi t_n)) & (2t_1,2t_2,\cdots,2t_n)\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$

4. $f_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2n\sigma^2}\right\}$, $(-\infty<x<+\infty)$.

5. (1) $P\{Y(n)=k\}=\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda}, k=0,1,2\cdots$;

(2) $n_1<n_2$ 时,$P\{Y(n_1)=k,Y(n_2)=m\}=\dfrac{\lambda^m}{k!\ (m-k)!}n_1^k(n_2-n_1)^{m-k}\mathrm{e}^{-n_2\lambda}$,

$$k=0,1,2,\cdots,m, m=0,1,2,\cdots.$$

6. $f_t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2(1+t^2)}\right\}, (-\infty<x<+\infty)$,

$f_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2\pi\,|t_2-t_1|}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(t_2-t_1)^2}[(1+t_2^2)x_1^2-2(1+t_1t_2)x_1x_2+(1+t_1^2)x_2^2]\right\}, (-\infty<x_1,x_2<+\infty)$.

7. $F_t(x)=F(x), (-\infty<x<+\infty), F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}), (-\infty<x_1,x_2,\cdots,x_n<+\infty)$.

8. $m_Y(t)=F_t(a), R_Y(t_1,t_2)=F_{t_1,t_2}(a,a)$.

9. $m_X(t)=\dfrac{1}{4}(\sin t+\cos t), R_X(t_1,t_2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cos(t_2-t_1)$.

10. (1) $m_X(t)=pt, R_X(t_1,t_2)=pt_1t_2, C_X(t_1,t_2)=p(1-p)t_1t_2$,

$\sigma_X^2(t)=p(1-p)t^2, \sigma_X(t)=\sqrt{p(1-p)}\,|t|$;

(2) $m_X(t)=\dfrac{1}{2}t, R_X(t_1,t_2)=\dfrac{1}{3}t_1t_2, C_X(t_1,t_2)=\dfrac{1}{12}t_1t_2$,

$\sigma_X^2(t)=\dfrac{1}{12}t^2, \sigma_X(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}|t|$;

(3) $m_X(t)=t+\dfrac{1}{2}\cos\pi t, R_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+\dfrac{1}{2}\cos\pi t_1\cos\pi t_2$,

$C_X(t_1,t_2)=\left(t_1-\dfrac{1}{2}\cos\pi t_1\right)\left(t_2-\dfrac{1}{2}\cos\pi t_2\right)$,

$\sigma_X^2(t)=\left(t-\dfrac{1}{2}\cos\pi t\right)^2, \sigma_X(t)=\left|t-\dfrac{1}{2}\cos\pi t\right|$;

(4) $m_X(t)=0, R_X(t_1,t_2)=1+t_1t_2, C_X(t_1,t_2)=1+t_1t_2$,

$\sigma_X^2(t)=1+t^2, \sigma_X(t)=\sqrt{1+t^2}$.

11. (1) $m_Y(n)=0, C_Y(n_1,n_2)=\sigma^2\min\{n_1,n_2\}$;

（2） $m_Y(n)=n\lambda, C_Y(n_1,n_2)=\lambda\min\{n_1,n_2\}$.

12. $m_Z(t)=\mu_1+\mu_2 t, C_Z(t_1,t_2)=\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2(t_1+t_2)+\sigma_2^2 t_1 t_2$.

13. （1） $f_t(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{t}x^{\frac{\lambda}{t}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2） $m_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+t}$；　（3） $R_X(t_1,t_2)=\dfrac{\lambda}{\lambda+t_1+t_2}$.

14. （1） 略.

（2） $m_Y(t)=m_X(t)+\varphi(t), m_Z(t)=\varphi(t)m_X(t), C_Y(t_1,t_2)=C_X(t_1,t_2)$,

$C_Z(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\varphi(t_2)C_X(t_1,t_2), C_{YZ}(t_1,t_2)=\varphi(t_2)C_X(t_1,t_2)$,

$C_{ZY}(t_1,t_2)=\varphi(t_1)C_X(t_1,t_2)$.

15. 略.

16. 略.

17. 略.

18. 略.

19. （1） 略；

（2） $m_X(t)=\mu(\cos\omega t+\sin\omega t), C_X(t_1,t_2)=\sigma^2\cos\omega t(t_2-t_1)$.

20. 略.

21. 略.

22. 0.831 2.

23. 略.

24. $f(s_1,s_2)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda s_2}, & s_2>s_1>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

25. $m_Y(t)=\mu\lambda t, \sigma_Y^2(t)=(\mu^2+\sigma^2)\lambda t$.

26. 略.

27. 当 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n, 0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n$ 时，

$$P\{N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2,\cdots,N(t_n)=k_n\}$$
$$=\frac{t_1^{k_1}(t_2-t_1)^{k_2-k_1}\cdots(t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}\cdot\lambda^{k_n}}{k_1!\,(k_2-k_1)!\,\cdots(k_n-k_{n-1})!}e^{-\lambda t_n}$$

28. 略.

29. 略.

30. （1） $c_X(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$；

（2） $C_X(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$；

（3） $C_X(s,t)=st+\sigma^2\min\{s,t\}$.