西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(A) 课时：32 考试时间：2018 年 1 月 6 日

一、(5 分/题×4 题=20 分)

1. B　　2. D　　3. D　　4. B

二、(4 分/题×5 题=20 分)

1. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$.

2.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = u_0, t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

3. $C_1 J_{\sqrt{2}}(2x) + C_2 J_{-\sqrt{2}}(2x)$

4. $-x^{-2} J_3(x)$， $J_{2018}(1)$

5. $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$， $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

三、(12 分) $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入齐次方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 得

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

代入齐次边界条件得 $X'(0) = 0$， $X(2) = 0$。所以该问题的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < 2 \\ X'(0) = 0, X(2) = 0 \end{cases} \qquad (4 分)$$

特征值为 $\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x}) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}x\right)$, $n \geq 0$.　　(6 分)

$T_n(t)$ 满足方程 $\begin{cases} T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases}$

其中 $f_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$　　(8 分)

$T_n(t)$ 通解为 $T_n(t) = c_1 \cos a\sqrt{\lambda_n} t + c_2 \sin a\sqrt{\lambda_n} t + \frac{f_n}{a^2 \lambda_n}$

代入初始条件得$T_n(t)=\dfrac{f_n}{a^2\lambda_n}(1-\cos a\sqrt{\lambda_n}t)$，

即$T_n(t)=\begin{cases}\dfrac{f_1}{a^2\lambda_1}(1-\cos a\sqrt{\lambda_1}t), & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$ （10 分）

所以$u(x,t)=X_1(x)T_1(t)=\dfrac{16}{9a^2\pi^2}(1-\cos\dfrac{3\pi a}{4}t)\cos\dfrac{3\pi}{4}x$ （12 分）

四、（12 分）取$w(x,t)=x$，令$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$将边界条件齐次化，原定解问题变为

$$\begin{cases}v_t-3v_{xx}=0,0<x<\pi,t>0\\ v(0,t)=0,v_x(\pi,t)=0,t\geq 0\\ v(x,0)=\sin\dfrac{x}{2},0\leq x\leq\pi.\end{cases}$$ （2 分）

（齐次化，方程各 1 分）

该问题的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,0<x<\pi\\ X(0)=0,X'(\pi)=0\end{cases}$$ （6 分）

特征值为$\lambda_n=\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$，特征函数为$X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)$, $n\geq 0$. （8 分）

$T_n(t)$ 满足方程 $\begin{cases}T_n'+3\lambda_nT_n(t)=0\\ T_n(0)=\varphi_n\end{cases}$，其中$\varphi_n=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

$T_n(t)$通解为$T_n(t)=ce^{-3\lambda_nt}$

代入初始条件得$T_n(t)=\varphi_ne^{-3\lambda_nt}$ ，即$T_n(t)=\begin{cases}\varphi_0e^{-3\lambda_0t}, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$ （10 分）

所以$u(x,t)=X_0(x)T_0(t)=x+\sin\dfrac{x}{2}e^{-\frac{3t}{4}}$ （12 分）

五、(10 分）设$\rho^n=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n(\mu_m^{(n)}\rho)$ 4 分）

$$A_m=\frac{2\int_0^1\rho\rho^nJ_n\left(\mu_m^{(n)}\rho\right)d\rho}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}=\frac{\dfrac{2}{\left(\mu_m^{(n)}\right)^{n+2}}\int_0^{\mu_m^{(n)}}t^{n+1}J_n(t)\mathrm{d}t}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}$$ （8 分）

少权函数扣一分。

$$=\frac{\frac{2}{\left(\mu_m^{(n)}\right)^{n+2}}t^{n+1}J_{n+1}(t)\Big|_0^{\mu_m^{(n)}}}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}=\frac{\frac{2}{\mu_m^{(n)}}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}=\frac{\frac{2}{\mu_m^{(n)}}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}{[J_{n+1}(\mu_m^{(n)})]^2}=\frac{2}{\mu_m^{(n)}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}\quad\text{(10 分)}$$

六、(6 分) $z'=J_n(x)+xJ_n'(x)$,

$$z''=J_n'(x)+J_n'(x)+xJ_n''(x)=2J_n'(x)+xJ_n''(x)\quad\text{(4 分)}$$

$$x^2z''-xz'+(1+x^2-n^2)z$$

$$=x^2(2J_n'(x)+xJ_n''(x))-x(J_n(x)+xJ_n'(x))+(1+x^2-n^2)xJ_n(x)$$

$$=x^2J_n'(x)+x^3J_n''(x)+(x^2-n^2)xJ_n(x)\quad\text{(5 分)}$$

$$=x[x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)]=0\quad\text{(6 分)}$$

七、(10 分) 取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 其对称点为 $M_1(x_0,y_0,2-z_0)$ (2 分)

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}}\quad\text{(4 分)}$$

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}}-\frac{1}{4\pi\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-2+z_0\right)^2}}\quad\text{(6 分)}$$

$$u(M_0)=-\iint_\Gamma\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}f(M)\mathrm{dS}=\iint_\Gamma\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial z}\Big|_{z=1}f(x,y)\mathrm{d}S\quad\text{(8 分)}$$

方向导数、公式各一分。

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0-1}{\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z_0-1\right)^2\right]^{3/2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{(10 分)}$$

七、(10 分) 特征方程为 $\begin{cases}3\dfrac{dx}{dt}+2=0,t>0\\ x(0)=\tau\end{cases}$ (2 分)

特征线为 $x=\dfrac{2t}{3}+\tau$ (4 分)

沿特征线, 原问题转化为 $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=0\\ u(0)=u(x(0),0)=1-x(0)=1-\tau\end{cases}$ (6 分)

解得 $u(t)=1-\tau$ (8 分)

将 $\tau=x-\dfrac{2t}{3}$ 代入得到最终解 $u(x,t)=1-x+\dfrac{2t}{3}$. (10 分)