第七章 无穷级数

第1节 常数项级数

第2节 函数项级数

第3节 幂级数

第4节 Fourier级数

作业：Page297

A. 3, 4，5，6

第七章 无穷级数

无穷级数
- 数项级数
- 函数项级数
  - 幂级数
  - Fourier级数

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

作业：Page297 A. 3, 4，5，6

第2节 函数项级数

函数项级数的定义

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在集合$A \subseteq R$上的函数序列，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad （1）$$

称为定义在集合A上的函数项级数. Series of functions

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

通项, 部分和

Term , Partial sum

第2节 函数项级数

2.1 函数项级数的处处收敛性

2.2一致收敛性及其判定

2.3一致收敛级数的性质

2.1 函数项级数处处收敛性

定义2.1（函数项级数处处收敛性与和函数）

取$x_0 \in A$,级数(1)$\Rightarrow u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$(2)

数项级数

如果数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点, 否则称为发散点.

convergence point divergence point

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体 D 称为收敛域,

convergence domain

所有发散点的全体称为发散域.

divergence domain

设 D 是函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域。

则 $\forall x \in D$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称该级数在 D 上**处处收敛**（或**逐点收敛**）。

everywhere convergence or

pointwise convergence to S(x) in D

$\forall x \in D$，设对应的级数和为 $S(x)$，这样，便在 D 中定义了一个函数 $S(x)$，称为该函数项级数的**和函数**，简称为**和**。

设 $S_n(x)$是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的前 n 项和，

则当 $x \in D$ 时，有 $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

称 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 为该函数项级数的**余项**。

Remainder

显然，$\forall x \in D,\quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

例如，几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

它的收敛域为 $|x| < 1$，发散域为 $|x| \geq 1$；在

收敛域内，和函数是 $\dfrac{1}{1-x}$，即有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (x \in (-1,1))$$

一般地，可先固定函数项级数通项中的x后，
按常数项级数审敛法(取绝对值,正项级数等)求收敛域.

例1 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

$$= x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

的收敛性，并求其和函数。

$$(u_1(x) = x, u_n(x) = (x^n - x^{n-1}), n \in N_+)$$

解 $\because s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = x^n,$

$$\therefore s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

例2 求$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$的收敛域

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x}$$

$e^{-x}<1$,即，$x>0$, 级数收敛

$e^{-x}>1$,即，$x<0$, 级数发散

$x=0,\sum_{n=1}^{\infty} n$发散， 原级数发散

故级数的收敛域为（0，+∞）

例3 函数项级数 $\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$

求其收敛域。

解 因为对任意 x 都有:

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以它 在$(-\infty, +\infty)$内处处收敛,

例 4 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

解 取绝对值, 应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$, 即$|x|<\sqrt{2}$时, 级数收敛,

当$\frac{1}{2}x^2>1$, 即$|x|>\sqrt{2}$时, 级数发散,

当$x=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$时, 级数均发散,

原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

注意

有限项和的极限、连续、导数和积分的性质

$$(1)\ \lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

$$(2)\ [f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$(3)\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

对于无限个函数的和是否具有这些性质呢?

考察例1的函数项级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

和函数的连续性.

该级数每一项都在[0,1]是连续的,

但和函数:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

在 $x=1$ 处间断.

例5 函数项级数 $\boxed{\dfrac{\sin x}{1^2}+\dfrac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots}$

因为对任意 x 都有: $\left|\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$

所以它 在$(-\infty, +\infty)$内处处收敛， 但各项求导后的级数

$$\boxed{\cos x+\cos 2^2 x+\cdots+\cos n^2 x+\cdots}$$

其一般项不趋于0，所以对任意 x 都发散 .

问题: 对什么样的函数项级数才有:

逐项连续 $\longrightarrow$ 和函数连续;

逐项求导 = 和函数求导;

逐项积分 = 和函数积分

函数项级数一致收敛性的条件很重要!

对于有限项,求极限,求导数,求积分均有线性性质。

问题:对于无穷项,是否也具有相应的线性性质呢?

即: $\lim\limits_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$ ——逐项求极限

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)}_{\lim\limits_{x\to x_0}s(x)}\overset{?}{=}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)}_{s(x_0)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)=\frac{d}{dx}(S(x))\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$ ——逐项求导

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\int_a^b S(x)dx\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$ ——逐项求积分

函数的连续性

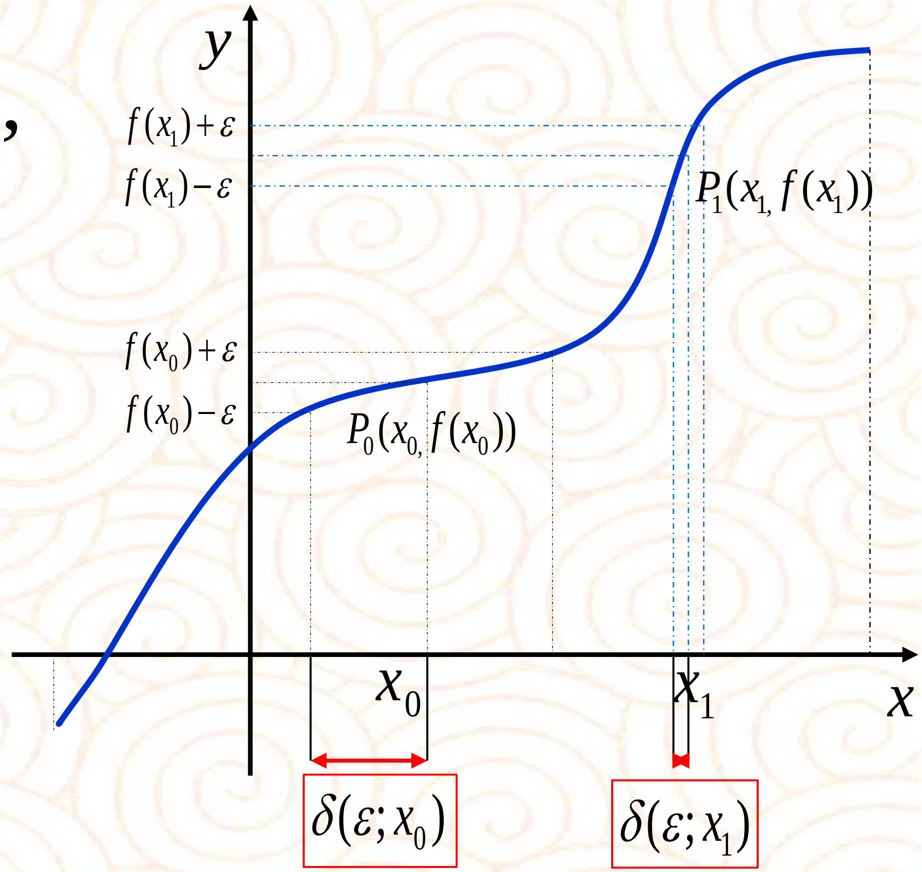
设函数$f(x)$在区间 I 上连续，则对 $\forall x_0 \in I$, $x \in I$, 有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

或: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$|x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (*)

如：连续函数$y = f(x)(x \in I)$,

对于固定的ε ,

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$$|x - x_1| < \delta(\varepsilon, x_1)$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$



走在一条崎岖的山路上，对你前进的步伐作出要求:
每迈出一步所处位置高度的变化量不能超过 ε =1cm. 问:能否做到?

一致连续 设函数$f(x)$在区间 I 上连续，

即处处连续

$\forall x_0 \in I$, $x \in I$, 有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 或:

$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

走在一条崎岖的山路上，对你前进的步伐作出要求:
每迈出一步所处位置高度的变化量不能超过 ε =1cm. 问:能否做到?

可以，把步子迈小些，且步伐的大小跟所处的位置有关.

如果不先固定位置，可否找到一个统一的步伐，使你无论身在何处，每迈一步，只要不超过这个数，所处位置高度的变化不超过1cm?

在最陡峭处，要不断地缩小步子.
若能找到一个统一的步伐，无论身在何处，对所有位置都适合.

成语：步调一致

2. 2一致收敛性及其判定

定义2.2 （一致收敛） Uniform convergence

设有函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，都存在着一个只依赖于 ε 的自然数 N，使得当 $n > N$ 时，对区间 D 上的一切 x，都有不等式

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

成立，则称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 D 上**一致收敛**于和 $s(x)$，也称函数序列 $s_n(x)$ 在区间 D 上一致收敛于 $s(x)$.

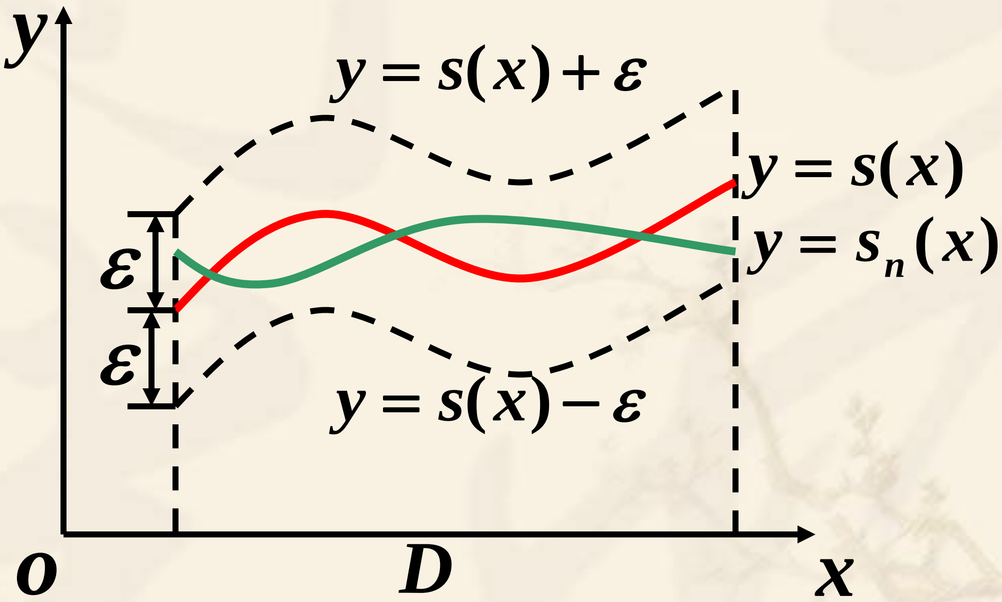
$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n > N,$

对 $\forall x \in D$, 有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

几何解释:

只要 n充分大$(n>N)$,在 D 上所有曲线 $y=s_n(x)$(部分和函数列)的图像将位于曲线

$$y=s(x)+\varepsilon \text{与} y=s(x)-\varepsilon \text{之间.}$$



例6 研究级数

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots$$

在区间$[0,+\infty)$上的一致收敛性.

解 $\because s_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$,

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0\quad(0\le x<+\infty)$$

余项的绝对值 $|R_n|=|s(x)-s_n(x)|=\left|\dfrac{1}{x+n+1}-\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x+n+2}-\dfrac{1}{x+n+1}+\cdots\right|$

$$=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+n+2}+\cdots$$

$$<\frac{1}{x+n}<\frac{1}{n}\quad(0\le x<+\infty)$$

例6 研究级数

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots$$

在区间$[0,+\infty)$上的一致收敛性.

余项的绝对值 $|R_n|=|s(x)-s_n(x)|$

$$<\frac{1}{x+n}<\frac{1}{n}\quad(0\le x<+\infty)$$

对于任给$\varepsilon>0$，取自然数$N\ge\dfrac{1}{\varepsilon}$,

则当$n>N$时，对于区间$[0,+\infty]$上的一切x，有 $|R_n(x)|<\varepsilon$,

根据定义,

所给级数在区间$[0,+\infty]$上一致收敛于$s(x)\equiv 0$.

例7 研究级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

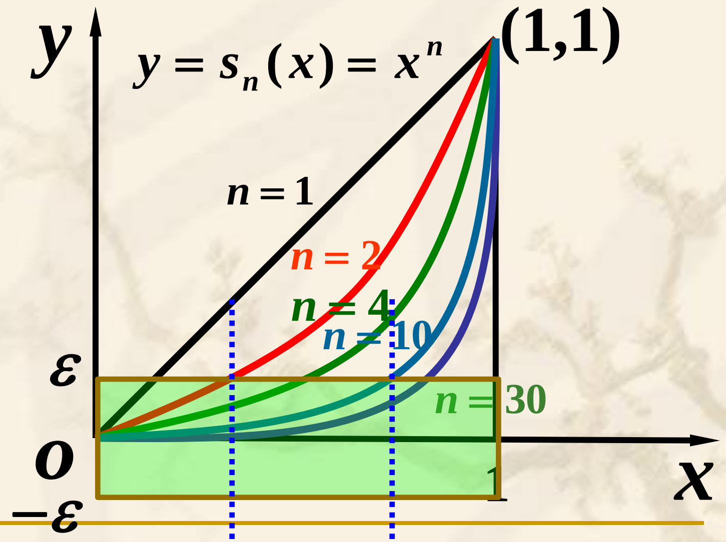
在区间(0 , 1）内的一致收敛性.

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

当$0\le x<1$时,

$$\forall\varepsilon>0,\left|s_n(x)-0\right|=x^n<\varepsilon$$

$$N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$$与ε和x有关



例7 研究例1中的级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

在区间(0 , 1）内的一致收敛性.

解 该级数在区间(0,1)内处处收敛于和$s(x)\equiv 0$，但并不一致收敛.

$$s_n(x)=x^n$$

对于任意一个自然数 n，取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$，于是

$$s_n(x_n)=x_n^n=\frac{1}{2},$$

但 $s(x_n)=0$，从而 $|R_n(x_n)|=|s(x_n)-s_n(x_n)|=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore$ 只要取 $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$，不论 n 多么大，在(0,1)总存在

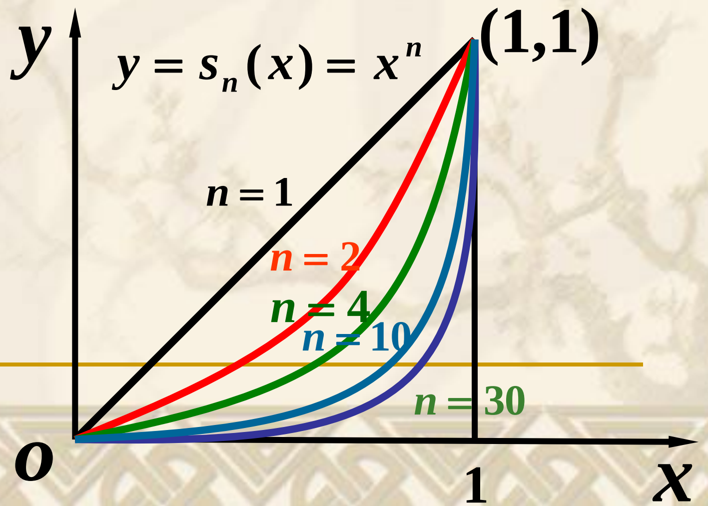
点 x_n，使得 $|R_n(x_n)| > \varepsilon$,

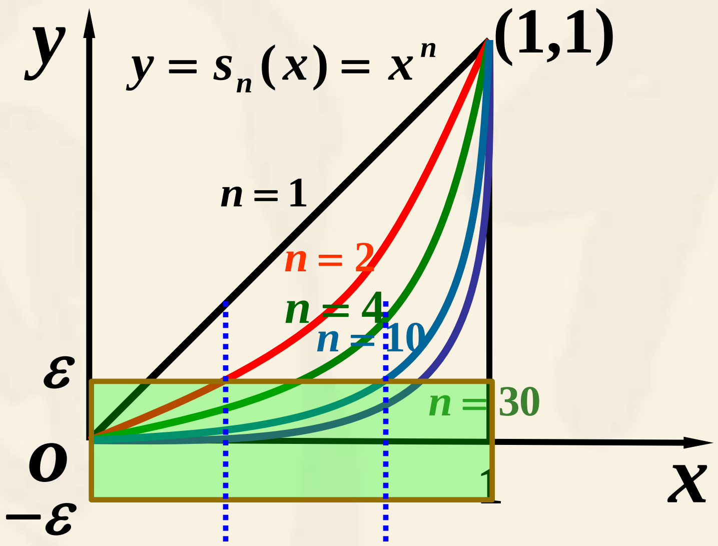
因此级数在$(0, 1)$内不一致收敛.

说明: 虽然函数序列 $s_n(x) = x^n$ 在$(0, 1)$内处处

收敛于 $s(x) \equiv 0$, 但 $s_n(x)$在$(0, 1)$内各点处收

敛于零的“快慢”程度是不一致的.





注意：对于任意正数 $r < 1$，该级数在 $[0, r]$ 上一致收敛.

小结　一致收敛性与所讨论的区间有关.

定理2.1 （Cauchy一致收敛原理）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的充分必要条件是：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 时，对 $\forall x \in D$

及任何的自然数 P，有

$$\left|S_{n+P}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+P} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^{+}$ 当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in N_{+}$，有

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

定理2.1 （Cauchy一致收敛原理）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D上一致收敛的充分必要条件是：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时，对 $\forall x \in D$

及任何的自然数 P，有

$$\left|S_{n+P}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+P} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

必要性：

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|S_{n+p}(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \left|S_{n+P}(x) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

定理2.1 （Cauchy一致收敛原理）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D上一致收敛的充分必要条件是：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 时，对 $\forall x \in D$

及任何的自然数 P，有

$$\left|S_{n+P}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+P} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

充分性：固定x，由常数项级数cauchy原理知其处处收敛，

记其和函数为$S(x)$，在$\left|S_{n+P}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$中令$P \to \infty$

得 $n > N$ 时，对 $\forall x \in D$，$\left|S(x) - S_n(x)\right| \le \varepsilon$

即$S_n(x)$一致收敛于$S(x)$，故原级数为一致收敛.

一致收敛性简便的判别法：

也称为M判别准则

定理2.2(Weierstrass)准则） 魏尔斯特拉斯准则

如果函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间 D 上满足条件:

(1) $|u_n(x)| \le M_n \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$;

(2) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$收敛,

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$D$上一致收敛.

证 由条件(2)，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，根据常数项级数的柯西收敛原理，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，对于任意的自然数 p 都有

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon.$$

由条件(1)，对任何 $x \in D$，都有

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right|$$

$$\leq \left|u_{n+1}(x)\right| + \left|u_{n+2}(x)\right| + \cdots + \left|u_{n+p}(x)\right|$$

$$\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon,$$

因此函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛.

例8 证明$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$[\delta,+\infty]$上一致收敛。（$\delta > 0$）

解 在$[\delta,+\infty]$上，$\left|ne^{-nx}\right| \le ne^{-n\delta}$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)\delta}}{ne^{-n\delta}} = e^{-\delta} < 1$$

由检比法知$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\delta}$ 收敛，

由$M-$判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$[\delta,+\infty]$上一致收敛

例9 证明级数

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证 $\because$ 在$(-\infty,+\infty)$内 $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ $\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛， 由魏尔斯特拉斯判别法，

$\therefore$ 所给级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

说明: 1.维尔斯特拉斯判别法也称为M判别法,

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的优级数或控制级数.

☆ 2.当不易观察到不等式$|u_n(x)| \le M_n$时可利用导数求

$$M_n = \max_{x \in I} |u_n(x)|$$

例: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in [0, +\infty)$, $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$,

用求导法可得 $a_n = \max_{[0,+\infty)} \frac{nx}{1+n^5x^2} = u_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,

已知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛, 因此原级数在$[0, +\infty)$上一致收敛.

2.3一致收敛级数的性质

定理2.3 （和函数的连续性）

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上也连续.

设 x_0, x 为$[a,b]$上任意点. 由

$$|s(x)-s(x_0)|$$

$$= |s(x)-s_n(x)+s_n(x)-s_n(x_0)+s_n(x_0)-s(x_0)|$$

证　设 x_0, x 为$[a,b]$上任意点．由

$$\therefore \left|s(x)-s(x_0)\right|$$

$$=\left|s(x)-s_n(x)+s_n(x)-s_n(x_0)+s_n(x_0)-s(x_0)\right|$$

$$\le \left|s(x)-s_n(x)\right|+\left|s_n(x)-s_n(x_0)\right|+\left|s_n(x_0)-s(x_0)\right|$$

$\because$　级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛于$s(x)$，

对$\forall \varepsilon>0$，必$\exists$自然数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，

对$[a,b]$上的一切 x 都有$\left|s(x)-s_n(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ ……………….(1)

同样有 $\left|s_n(x_0)-s(x_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. ……………………………..(2)

$\because s_n(x)$是有限项连续函数之和，故$s_n(x)(n>N)$在点x_0连续，

$\exists \delta>0$当$\left|x-x_0\right|<\delta$时总有 $\left|s_n(x)-s_n(x_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ ……….(3)

$$\therefore |s(x)-s(x_0)| \le |s(x)-s_n(x)| + |s_n(x)-s_n(x_0)| + |s_n(x_0)-s(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

由(1)、(2)、(3)可见，对任给$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，

当$|x-x_0|<\delta$时，有 $|s(x)-s(x_0)|<\varepsilon.$

所以$s(x)$在点 x_0处连续，而 x_0 在$[a,b]$上是任意的，因此$s(x)$在$[a,b]$上连续.

定理2.3（和函数的连续性） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上也连续.

即：

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\lim_{x\to x_0}s(x)=s(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)$$

逐项求极限

定理2.3（和函数的连续性） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上也连续.

定理2.4 （和函数的可积性）

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上可以逐项积分，即 $\forall x \in [a,b]$

$$\int_a^x s(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

$$= \int_a^x u_1(t)dt + \int_a^x u_2(t)dt + \cdots + \int_a^x u_n(t)dt + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt \qquad (4)$$

定理2.5 （和函数的可导性）

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上处处收敛于$s(x)$，各个$u_n(x)$都具有连续导数$u_n'(x)$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则$s(x)$有连续的导数，且

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) \qquad (5)$$

注意:级数一致收敛并不能保证可以逐项求导.

例如，级数 $\dfrac{\sin x}{1^2}+\dfrac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$

在任何区间$[a,b]$上都是一致收敛的.

逐项求导后得级数

$$\cos x+\cos 2^2 x+\cdots+\cos n^2 x+\cdots,$$

因其一般项不趋于零,所以对于任意值x都是发散的.

所以原级数不可以逐项求导.

小结

1、函数项级数一致收敛的定义；

2、一致收敛级数的判别法——魏尔斯特拉斯判别法；

3、一致收敛级数的基本性质；

判别一个给定的函数列或函数项级数在某个区间D上是否一致收敛，一般有以下几个方法:

（1）直接由定义出发来验证;

（2）运用Cauchy一致收敛准则;

(3) 对函数项级数可用M判别法.

注意: (1)中必须先求得其和函数