# 第四节  含参变量的积分与反常积分

一、被积函数含参变量的积分

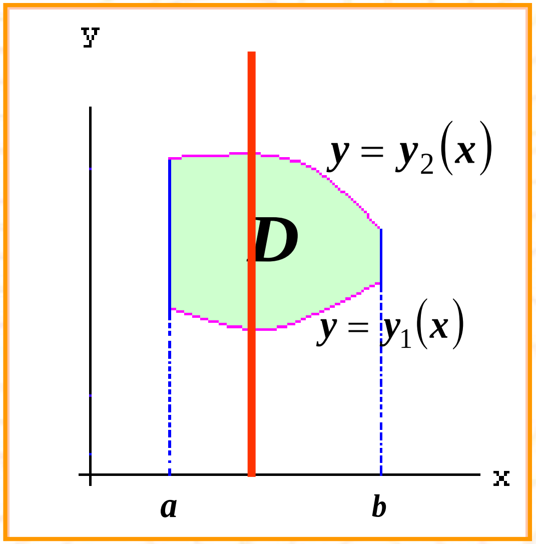
二、积分限含参变量的积分

作业: 习题6.4

1, 2(1)(2), 3, 5

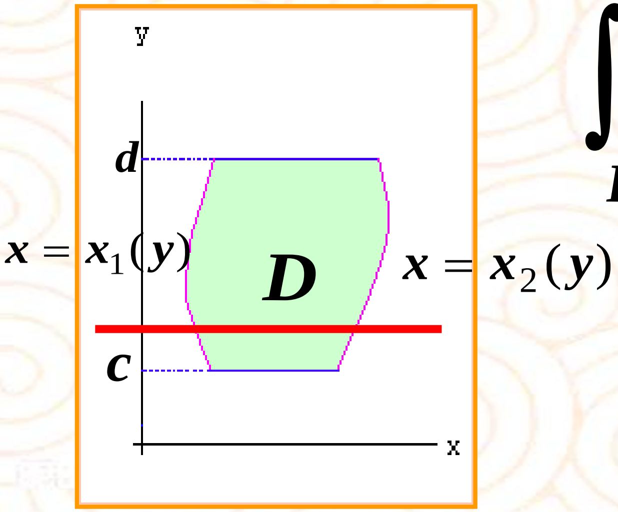
# 直角坐标系下二重积分的计算

［X—型］




$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

［Y—型］




$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

# 特点

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

- 含参变量的积分不是数值，而是参变量的函数；

- 含参变量的积分不仅在被积函数中含有参变量，而且可在积分上、下限中也含有参变量,从而使含参变量积分的形式与性质更为复杂；

- 含参变量积分是一个函数，因此就要讨论它对参变量的连续性、求极限与求积分顺序的可交换性，可导性、求导与求积分顺序的可交换性，以及积分顺序的可交换性。

# 一、被积函数含参变量的积分

设 $f(x,y)$ 是矩形域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ **上的连续函数**，

则积分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 确定了一个定义在 $[a, b]$ 上的关于变量 $x$ 的函数，记作

$$\varphi(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$x$ 称为参变量，上式称为含参变量的积分. 它是自变量x的函数。

**含参变量积分的性质** — **连续性, 可导性, 可积性**

**定理1. (连续性)** 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，

则含参变量积分 $\varphi(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续.

二维连续----→一维连续

**证:** 由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，所以一致连续，即

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对 $D$ 内任意两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，只要

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$，就有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

因此，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $\Delta y=0,|\Delta x|<\delta$ 时，就有

$$|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|=\left|\int_\alpha^\beta[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\le\int_\alpha^\beta|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\,\mathrm{d}y<\varepsilon(\beta-\alpha)$$

$\therefore\ \varphi(x)\in C[a,b]$. 也是一致连续

**定理1. (连续性)** 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续,

则含参变量积分 $\varphi(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 在 $[a,b]$ 上连续.

**定理1 表明**,定义在闭矩形域上的连续函数,其极限运算与积分运算的顺序是可交换的. 即 $\forall\, x_0\in[a,b]$, 都有

$$\lim_{x\to x_0}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_{\alpha}^{\beta} f(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_{\alpha}^{\beta}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

**例1.** 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^2 x^2\cos ax\,dx=?$

**解:** $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^2 x^2\cos ax\,dx=\int_0^2\left(\lim\limits_{a\to 0} x^2\cos ax\right)dx=\int_0^2 x^2\,dx=\dfrac{8}{3}$

同理可证，若 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，

则含参变量的积分 $\psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 也在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

由连续性定理易得下述可积性定理:

**定理2. (可积性)** 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，

则 $\varphi(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

同样，$\psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta \psi(y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

即 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$

例2. 求$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x\ (0<a<b)$.

解: 由被积函数的特点想到积分:

$$\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y=\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$$

$$\therefore\ I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\ (x^y\text{在}[0,1]\times[a,b]\text{上连续})$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

**定理3. (可导性)** 若 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则 $\varphi(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，且

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$$

按导数定义也可证明(参课本P179).

**证:** 令 $g(x)=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$，则 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，故当 $x\in[a,b]$ 时，

$$\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x\left[\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \left[ \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[ f(x,y) - f(a,y) \right] \mathrm{d}y \quad = \varphi(x) - \varphi(a)$$

因上式左边的变上限积分可导, 因此右边 $\varphi(x)$ 可导,且有

$$g(x) = \varphi'(x) \quad = \int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad = \int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$$

此定理说明, 被积函数及其偏导数在闭矩形域上连续时, 求导与求积运算是可以交换顺序的 .

例3　求含参变量积分$\int_0^1 \mathbf{arctan}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{dx}(\boldsymbol{y} \neq 0)$对参数$y$的导数.

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$$

此定理说明, 被积函数及其偏导数在闭矩形域上连续时, 求导与求积分运算可以交换顺序 .

例3　求含参变量积分$\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}dx\,(y\neq 0)$对参数$y$的导数.

解: $$\frac{d}{dy}\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}dx=\int_0^1\left(\frac{d}{dy}(\arctan\frac{x}{y})\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{-x}{x^2+y^2}dx$$

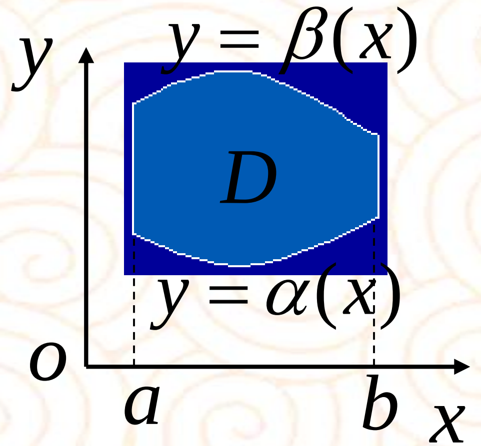
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}$$

# 二、积分限也含参变量的积分

在实际问题中, 常遇到积分限含参变量的情形, 例如,

设 $f(x,y)$ 为定义在区域

$$D:\begin{cases}\alpha(x)\le y\le \beta(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$




上的连续函数, 则

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

也是参变量 **x** 的函数 ,其定义域为 **[ a , b ]** .

**定理4.(连续性)** 若 $f(x,y)$ 在区域

$$D:\{(x,y)\mid \alpha(x)\le y\le \beta(x),\ a\le x\le b\}\text{上连续,}$$

其中 $\alpha(x),\ \beta(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, **则函数**

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续.}$$

---

**证:** 令 $y=\alpha(x)+t[\beta(x)-\alpha(x)],\ t\in[0,1]$, 则

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(x,\ \alpha(x)+t[\beta(x)-\alpha(x)])[\beta(x)-\alpha(x)]\,\mathrm{d}\,t$$

由于被积函数在矩形域 $[a,b]\times[0,1]$ 上连续, 由定理1知,

上述积分确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

---

按连续定义也可证明(下页).

**定理4.4** 设$f(x,y)\in C(D)\cdot x_i(y)\in C[c,d], i=1,2,$且其值域均为$[a,b]$.

$$\text{则}: F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\text{必在}[c,d]\text{上连续.}$$

证 $\forall y\in[c,d]$,令$y+\Delta y\in[c,d]$,有

$$\Delta F=F(y+\Delta y)-F(y)=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x-\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,\text{由于}$$

$$\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x_1 y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ \Delta F=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x+\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x$$

由于$f\in C(D)$,令$\Delta y\to 0$,注意到上式右端第二个积分的

上下限与$\Delta y$无关,故由定理4.1可知,其值趋于0;

$$\therefore\ \Delta F=\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x+\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x$$

**又由于$f$在闭域 $D$ 有界，设$|f(x,y+\Delta y)|\leqslant M$． 则有**

$$\left|\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\left|x_1(y+\Delta y)-x_1(y)\right|,$$

$$\left|\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\left|x_2(y+\Delta y)-x_2(y)\right|.$$

再由条件$x_1(y),x_2(y)\in C[c,d]$,由上两不等式可知当$\Delta y\to 0$时，上述$\Delta F$表示式右端第一个与第三个积分也均趋于0.

$$\therefore \lim_{\Delta y\to 0}\Delta F=0.$$

**即**$F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$**在**$[c,d]$**上连续**

**定理4. (可导性)** 若 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $\alpha(x),\beta(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上 其值域含于 $[c,d]$ 中的可导函数, 则

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$ 在 $[a,b]$ 上也可导, 且

$$\varphi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

**证:** 把 $\varphi(x)$ 看作三元复合函数, 令 $\beta=\beta(x),\ \alpha=\alpha(x)$

$$\varphi(x)=H(x,\alpha,\beta)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

利用复合函数求导法则及变限积分求导, 得

$$\varphi'(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial \alpha}\alpha'(x)+\frac{\partial H}{\partial \beta}\beta'(x)$$

$$=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

**例4.** 设 $\varphi(x)=\int_{x}^{x^2}\frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}\,y$, 求 $\varphi'(x)$.

**解:** $\varphi'(x)=\int_{x}^{x^2}\cos xy\,\mathrm{d}\,y+\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}\cdot 1$

$$=\left[\frac{\sin xy}{x}\right]\Bigg|_{x}^{x^2}+\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}$$

$$=\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}$$

$$\varphi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

**例5.** 设 $F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $f$ 为可微函数, 求 $F''(x)$

**解:** $$F'(x)=\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y+2xf(x)$$

或 $F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y = x\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y$

再按一元变上限积分求导.

$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)$$

$$=3f(x)+2xf'(x)$$

$$\varphi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

# 4.2 反常二重积分

与反常定积分相同，二重积分也可推广到积分区域是无界的和被积函数是无界的两种情形，统称为反常二重积分.

## 一、无界区域上的二重积分

## 二、无界函数的二重积分

作业: 习题6.4

1, 2(1)(2), 3, 5

# 一、无界区域上的二重积分

**定义1** 设$(\sigma)$是一无界区域. $f(x,y)\in C(\sigma)$

任作一有界区域序列$(\sigma_1)$, $(\sigma_2)$,$\cdots$, $(\sigma_n)$,$\cdots$

$(\sigma_n)\underset{\neq}{\subset}(\sigma)$, 当$n\to+\infty$时，$(\sigma_n)$扩张成$(\sigma)$.

若不论$(\sigma_n)$如何作法, 极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_n)} f(x,y)d\sigma$总存在,

则称 $f(x,y)$ 在$(\sigma)$上的反常二 重积分收敛， 并记

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_n)} f(x,y)d\sigma;$$

否则称 $f(x,y)$ 在 $D$ 上的反常二重积分发散,

或简称 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

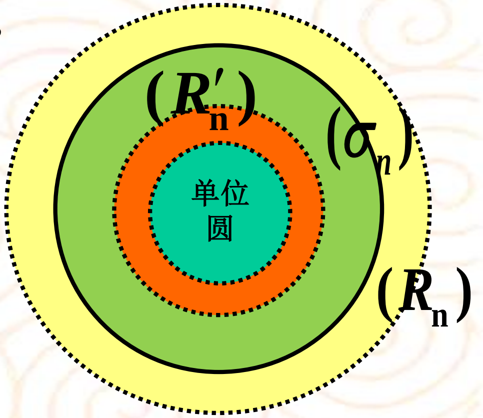
**例1** 讨论无界区域的二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \mathrm{d}\sigma$ 的敛散性. 其中

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$(\sigma)$是去掉以原点$O$为中心的单位圆内部的全平面.

**解** $(\sigma_n) \underset{\neq}{\subset} (\sigma)$， 当$n \to +\infty$时,$(\sigma_n)$扩张成$(\sigma)$.

$$(R_n') \subseteq (\sigma_n) \subseteq (R_n)$$

当$n \to +\infty$时,$(R_n)(R_n')$的半径$\rho_n, \rho_n' \to +\infty$.




$$\iint\limits_{(R_n')} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{(\sigma_n)} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{(R_n)} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \mathrm{d}\sigma$$

取根限，两边夹

$$\iint\limits_{(R_n)} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^{\rho_n} \frac{1}{\rho^{\alpha}} \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \frac{(\rho_n^{2-\alpha} - 1)}{2-\alpha} \quad (\alpha \neq 2)$$

$$\iint\limits_{(R_n)} \frac{1}{\rho^{2}} \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^{\rho_n} \frac{1}{\rho^{2}} \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \ln \rho_n \quad (\alpha = 2)$$

$$\iint\limits_{(R_n)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^{\rho_n} \frac{1}{\rho^\alpha} \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \frac{(\rho_n^{2-\alpha} - 1)}{2-\alpha} \quad (\alpha \neq 2)$$

$$\iint\limits_{(R_n)} \frac{1}{\rho^2} \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^{\rho_n} \frac{1}{\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \ln \rho_n \quad (\alpha = 2)$$

反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma \begin{cases} 当\alpha > 2时收敛; \\ 当\alpha \leq 2时发散. \end{cases}$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$(\sigma)$是去掉以原点$O$为中心的单位圆内部的全平面

---

**定理4.6 (收敛判别法)** 设 $f(x,y)$在无界区域$(\sigma)$上连续,若存在$\rho_0>0$,使当$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \geq \rho_0$且$(x,y) \in (\sigma)$时,有

$$|f(x,y)| \leq \frac{M}{\rho^\alpha} \ (M,\alpha为常数),$$

则当 $\alpha > 2$ 时, 反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛;

**定理4.6 (收敛判别法)** 设 $f(x,y)$在无界区域$(\sigma)$上连续,若存在$\rho_0>0$,使当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\geq\rho_0$且$(x,y)\in(\sigma)$时，有

$$|f(x,y)|\leq\frac{M}{\rho^\alpha}\ (M,\alpha\text{为常数}),$$

则当 $\alpha>2$ 时, 反常二重积分$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛;

---

**例1** 证明反常二重积分$\iint\limits_{(R^2)}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$ 收敛, 并求其值.

**解** $\because \forall\alpha>0, \lim\limits_{\rho\to+\infty}\dfrac{e^{-\rho^2}}{\dfrac{1}{\rho^\alpha}}=0<1$ $\therefore \exists\rho_0>0,\rho>\rho_0$时,$e^{-\rho^2}<\dfrac{1}{\rho^\alpha}$

由定理4. 6知，该反常二重积分收敛.

**例1** 证明反常二重积分 $\iint\limits_{(R^2)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$ 收敛, 并求其值.

**解** 取$(\sigma_{\mathrm{n}})=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a_n^2\right\}$, 当$\mathrm{n}\to+\infty$时， $a_n\to+\infty$.

$$\therefore I=\iint\limits_{(R^2)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_{\mathrm{n}})} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a_n}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\lim_{n\to+\infty}\pi(1-e^{-a_n^2})=\pi$$

若取$(\sigma_{\mathrm{n}})=\left\{(x,y)\middle|-n\le x\le n,-n\le y\le n\right\}$, 则:

$$\therefore I=\iint\limits_{(R^2)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{(\sigma_{\mathrm{n}})} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\pi$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

在概率论中经常用到这一反常积分

# 二、无界函数的二重积分

**定义2** 设$f(x,y)$在有界闭区域$(\sigma)$上除去点$P_0(x_0,y_0)$外处处连续. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty.$

任作点$P_0$的邻域$U(P_0,d)$. 记$N_d=U(P_0,d)\cap(\sigma)$

若不论$U(P_0,d)$如何选取, $d\to 0$时（$N_d$缩为点$P_0$）, 极限

$$\lim_{d\to 0}\iint\limits_{(\sigma)\setminus(N_d)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

存在, 则称无界函数$f(x,y)$在区域$(\sigma)$上的反常二重积分收敛.该极限值称为反常二重积分的值

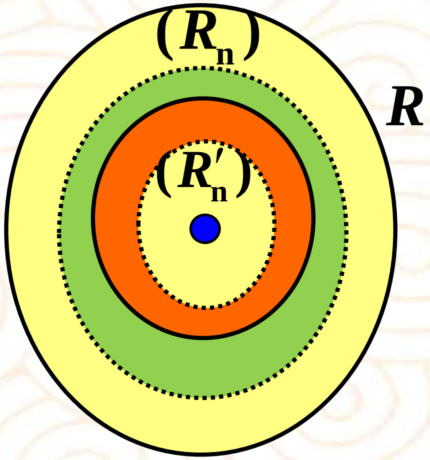
记作:
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to 0}\iint\limits_{(\sigma)\setminus(N_d)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

否则称反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

**例**　讨论无界函数的二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma \ (\alpha > 0)$ 的敛散性.

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(\sigma)$是以原点$O$为圆心，半径为$R$的圆域.

**解**　$(\sigma_n) \subsetneq (\sigma)$，当$n \to +\infty$时，$(\sigma_n)$缩小为原点.




$(R'_n) \subseteq (\sigma_n) \subseteq (R_n)$　　$\rho'_n < \rho_n < R$

当$n \to +\infty$时，$(R_n)(R'_n)$的半径$\rho_n, \rho'_n \to 0$.

$$\iint\limits_{(\sigma)\setminus(R_n)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{(\sigma)\setminus(\sigma_n)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{(\sigma)\setminus(R'_n)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma$$

取根限，两边夹

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{(\sigma)\setminus(R_n)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\rho_n}^{R} \frac{1}{\rho^\alpha} \rho \mathrm{d}\rho = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 2\pi(\ln R - \ln \rho_n) & (\alpha = 2) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\pi \dfrac{(R^{2-\alpha} - \rho_n{}^{2-\alpha})}{2-\alpha} & (\alpha \ne 2) \end{cases}$$

$$\therefore \iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^\alpha} \mathrm{d}\sigma \begin{cases} \text{当} 0 < \alpha < 2 \text{时收敛;} \\ \text{当} \alpha \ge 2 \text{时发散.} \end{cases}$$

**定理4.7 (收敛判别法)**

设$f(x,y)$在有界闭区域$(\sigma)$上除去点$P_0(x_0,y_0)$外处处连续.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty.$$

若不等式$|f(x,y)|\le\dfrac{M}{\rho^{\alpha}}$($M,\alpha$为常数)

在$(\sigma)$上除点$P_0(x_0,y_0)$外处处成立, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

则当 $\alpha<2$ 时, 反常二重积分$\displaystyle\iint_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛;

**例** 证明反常二重积分$\displaystyle I=\iint_{(\sigma)}\frac{1}{|x|+|y|}\mathrm{d}\sigma$ 收敛,

其中$(\sigma)=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$.

**例** 证明反常二重积分$\mathrm{I}=\iint\limits_{(\sigma)}\dfrac{1}{|x|+|y|}\mathrm{d}\sigma$收敛，

其中$(\sigma)=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$.

**证：** $(|x|+|y|)^2\geqslant x^2+y^2$,

从而在$(\sigma)$内除点$(0,0)$外有$\dfrac{1}{|x|+|y|}<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\rho}$

由定理4.7 可知反常重积分 $I$ 收敛.

**定理4.7 (收敛判别法)**

**设$f(x,y)$在有界闭区域$(\sigma)$上除去点$P_0(x_0,y_0)$外处处连续.**

**$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty$. 若不等式$|f(x,y)|\leq\dfrac{M}{\rho^\alpha}$($M,\alpha$为常数)**

**在$(\sigma)$上除点$P_0(x_0,y_0)$外处处成立，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$**

**则当 $\alpha<2$ 时，反常二重积分$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$收敛；**