第一章 函数、极限、连续

第四节 无穷小量与无穷大量

- 无穷小量及其阶的概念
- 无穷小的等价代换
- 无穷大量
- 小结与思考题

作业:习题1.4

Page68. A. 4(1)(3)(5), 6, 7.

Page69. B . 1, 2

第一部分　无穷小量及其阶的概念

一、无穷小量

1.定义： 极限为零的变量称为无穷小（量）.

定义1　　如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小)，总存在正数 δ（或正数 X），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|<\varepsilon$，

那么 称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时为无穷小量，

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$）

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0,\quad \therefore$ 函数$\sin x$是当$x\to 0$时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0,\quad \therefore$ 函数$\dfrac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0,\quad \therefore$ 数列$\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$是当$n\to\infty$时的无穷小.

注意 1.无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

2.零是可以看作无穷小的唯一的数.

3.函数是否为无穷小，与自变量变化趋势有关.

2.无穷小与函数极限的关系:

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

$\therefore f(x)=A+\alpha(x).\quad \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x))=A+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=A.$

定理 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,

其中$\alpha(x)$是当$x \to x_0$时的无穷小.

意义 1).将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2).给出了函数$f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x) \approx A$,误差为$\alpha(x)$.

3.无穷小的运算性质:

定理2 在自变量的同一变化过程中,有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

证 设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0$,使得

当 $|x| > N_1$ 时恒有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; 当 $|x| > N_2$ 时恒有 $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$;

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $|x| > N$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$\therefore \alpha \pm \beta \to 0 \ (x \to \infty)$

注意 无穷多个无穷小量的代数和未必是无穷小量.

例如: $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 是无穷小量,

但 n 个 $\frac{1}{n}$ 之和为1不是无穷小量.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2}.$$

定理3 在自变量的同一变化过程中，局部有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

证 设函数u在$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$内有界，

则$\exists M>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,恒有$|u|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小量,

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时, 恒有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|u\cdot\alpha-0|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$ 即$\lim\limits_{x\to x_0}u\alpha=0$,

$\therefore$当$x\to x_0$时,$u\cdot\alpha$为无穷小量.

定理3 在自变量的同一变化过程中，局部有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

以下结论均在相关自变量的同一变化过程中：

推论1 有极限的变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论2 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论3 有限个无穷小量的乘积也是无穷小量.

例如,当$x \to 0$时, $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}$ 都是无穷小量

无穷多个无穷小量的乘积有可能不是无穷小量!

给出一系列数列 $\left\{x_n^{(i)}\right\}, i=1,2,\ldots\ldots n,\cdots$

$$\left\{x_n^{(1)}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$\left\{x_n^{(2)}\right\}: 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$\left\{x_n^{(3)}\right\}: 1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$\vdots$$

$$\left\{x_n^{(m)}\right\}: 1, 1, \ldots, m^{m-1}, \frac{1}{m+1}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

注意 $x_n^{(i)} \to 0 (n \to \infty), i=1,2,\ldots\ldots n$

令 $\boldsymbol{y_n = x_n^{(1)} x_n^{(2)} x_n^{(3)} \ldots x_n^{(n)}}$

注意 $x_n^{(i)} \to 0(n \to \infty), i = 1, 2, \ldots\ldots n$

令 $\boldsymbol{y_n = x_n^{(1)} x_n^{(2)} x_n^{(3)} \ldots x_n^{(n)}}$

则 $\{y_n\}: 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots\ldots$

由于 y_n 的定义方式是由 n 个 x_n 相乘得到 的,

所以当 $n \to \infty, \{y_n\}$ 就趋向于常数列{1},即 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 1$

故: 无穷个无穷小量的乘积有可能不是无穷小量!

二、无穷小量阶的概念

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin \frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{3x} = 0$，　　x^2比$3x$要快得多；

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，　　$\sin x$与x大致相同；

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义（无穷小量的阶）

设α,β是自变量同一变化过程中的两个无穷小,且$\alpha\neq 0$.

(1) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,

记作$\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\ (C\neq 0)$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作$\alpha\sim\beta$;

(3) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\ (C\neq 0,k>0)$,就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶的无穷小.

例1 证明:当$x \to 0$时,$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时,$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

例2 当$x \to 0$时,求$\tan x - \sin x$关于x的阶数.

解 $$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小.

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$$

$$\tan x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

定理4 用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

$$\because \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1, \quad \therefore \lim \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = 0, \quad \text{即 } \beta - \alpha = o(\alpha),$$

于是有 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. α是β的主要部分.

例如，$\sin x = x + o(x)$, $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

当 $\text{🐶} \to 0$ 时

$$\sin \text{🐶} \sim \text{🐶} \qquad \tan \text{🐶} \sim \text{🐶}$$

$$\ln(1+\text{🐶}) \sim \text{🐶} \qquad e^{\text{🐶}} - 1 \sim \text{🐶}$$

$$\arcsin \text{🐶} \sim \text{🐶} \qquad \arctan \text{🐶} \sim \text{🐶}$$

$$\log_a(1+\text{🐶}) \sim \frac{\text{🐶}}{\ln a} \qquad a^{\text{🐶}} - 1 \sim \text{🐶} \ln a$$

$$1 - \cos \text{🐶} \sim \frac{1}{2}\text{🐶}^2 \qquad \sqrt[n]{1+\text{🐶}} - 1 \sim \frac{\text{🐶}}{n}$$

$$\text{🐶} - \sin \text{🐶} \sim \frac{1}{6}\text{🐶}^3 \qquad \tan \text{🐶} - \text{🐶} \sim \frac{1}{3}\text{🐶}^3$$

$$(1+\text{🐶})^\alpha - 1 \sim \alpha \text{🐶} \qquad \arcsin \text{🐶} - \text{🐶} \sim \frac{1}{6}\text{🐶}^3$$

$$\text{🐶} - \arctan \text{🐶} \sim \frac{1}{3}\text{🐶}^3 \qquad \tan \text{🐶} - \sin \text{🐶} \sim \frac{1}{2}\text{🐶}^3$$

第二部分　无穷小的等价代换

定理（**无穷小等价代换定理**）

α, β 是在自变量的同一变化过程中的两个无穷小,

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$= \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\tan 2x\sim 2x$.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(2x)^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=8.$$

注意 不能滥用等价无穷小代换.

通常只能代换乘积的无穷小因子，或分子整体，分母整体.

对于代数和中各无穷小要慎重代换.

设 $\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}$.（$\alpha\sim\alpha$）

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错 解 当 $x\to 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0$.

正 解 当 $x\to 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim \frac{1}{2}x^3,$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\dfrac{1}{16}$.

在自变量的同一变化过程中，α、α'、β、β'均为无穷小量

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq 1$，则 $\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$.

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq -1$，则 $\alpha + \beta \sim \alpha' + \beta'$.

证明： $\because \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'} = \lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c$

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}-1}{\dfrac{\alpha'}{\beta'}-1} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}-1}{\dfrac{\alpha'}{\beta'}-1} = 1 \cdot \frac{c-1}{c-1} = 1.$$

$$\therefore \alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'.$$

常用等价无穷小: 当$x\to 0$时,

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$,

$\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

$\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

用等价无穷小可给出函数的近似表达式:

$\because \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, $\therefore \lim \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = 0$, 即$\beta - \alpha = o(\alpha)$,

于是有 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

例如:

$\sin x = x + o(x)$, $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

$\because \lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1,$

于是有 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

解 $\tan 5x = 5x + o(x),\ \sin 3x = 3x + o(x),$

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{3x+o(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(5x)}{x}=\frac{o(5x)}{5x}\cdot\frac{5x}{x}=0$$

$$\therefore o(5x)=o(x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5+\frac{o(x)}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{o(x^2)}{x}}{3+\frac{o(x)}{x}}$$

$$=\frac{5}{3}.$$

例6 求 $\lim_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+\tan x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\tan x-\sin x}$.

例7 求 $\lim_{n\to\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

当$x\to 0$时,

$\sin x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

$\tan x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$

$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2.$

第三部分　无穷大量

一、无穷大量

定义2 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数δ(或正数X),使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$) 的一切 x ,所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|>M$,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时为无穷大量。

记作： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

特殊情形：正无穷大，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty$

负无穷大 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty)$

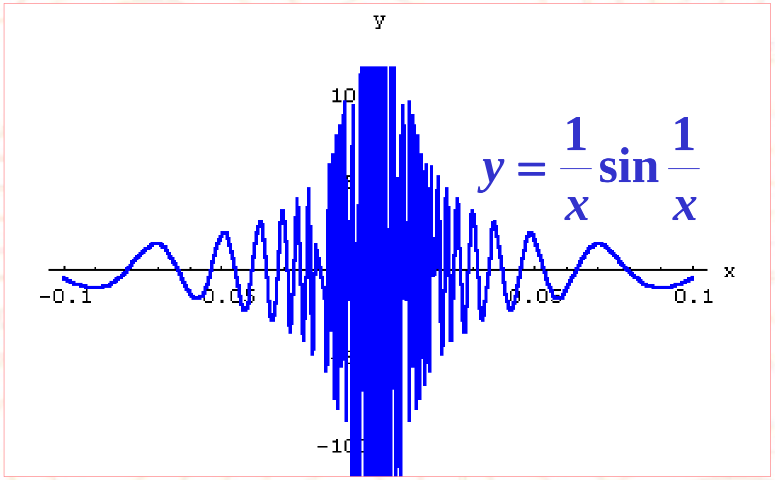
注意 1.无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

2.切勿将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

例如, 当$x \to 0$时, $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

是一个无界变量, 但不是无穷大.



$\forall M > 0,$

(1) 取 $x_0 = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$ $y(x_0) = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$

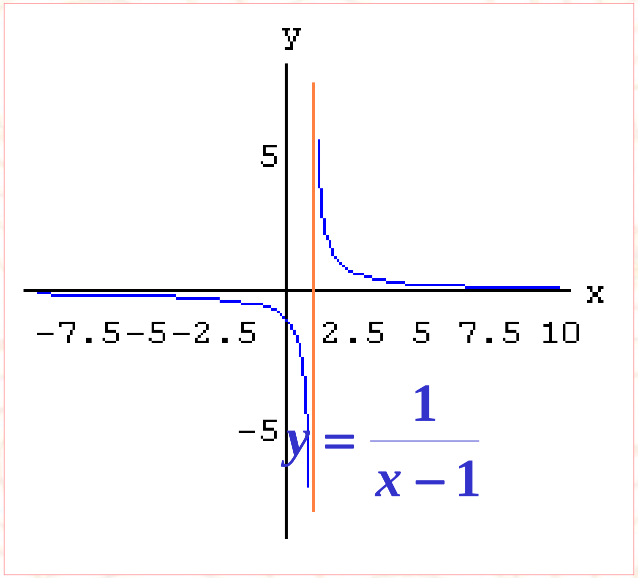
$\exists \delta > 0,\ 0 < |x - 0| < \delta$ 时 (k充分大), $y(x_0) > M$. 故 y 无界.

(2) 取 $x_0 = \dfrac{1}{2k\pi}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$

当k充分大时, $x_0 < \delta$, 但 $y(x_0) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0 < M$.

故 y不是无穷大.

例8 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证: $\forall M>0.$ 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M},$ 取 $\delta=\dfrac{1}{M},$

当 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

定义1:如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的垂直渐近线

定义2:如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$,则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线

P69斜渐近线

二、无穷小与无穷大的关系

定理4 在自变量的同一变化过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \dfrac{1}{\varepsilon}>0,$ 对正数 $\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta>0,$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon},$ 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}-0\right|<\varepsilon.$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$.

$\therefore \forall M>0$,则 $\dfrac{1}{M}>0$,对 $\dfrac{1}{M}$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)|<\dfrac{1}{M}$,由于 $f(x)\neq 0$,从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M$.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$. $\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时,$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可转化为关于无穷小的讨论.

定理5 **在自变量的同一变化过程中:**

有限个无穷大量的乘积是无穷大量;

无穷大量与有界变量之和是无穷大.

局部有界记号: 若 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在x_0的某邻域内局部有界,

记作:$f(x)=O(g(x))$

如:$\sin(x)=O(1)$

$x\sin(x)=O(x)$

第四部分　小结

1.无穷小概念及其阶的比较:

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

2.等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法，注意适用条件.

3.无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

（1）无穷小（大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的可看做无穷小的数；

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小.

（3）无界变量未必是无穷大.