1.【解析】当 $x\to\infty$ 时,如果函数表达式中含有 $\sqrt{\ }$,令 $x=-t$，则已知极限可化为

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{at^2-bt+1}-2t\right)=3$$

方法 1 分子有理化,得

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{at^2-bt+1}-2t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(a-4)t^2-bt+1}{\sqrt{at^2-bt+1}+2t}=3$$

于是 $a-4=0$，即 $a=4$，从而

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{at^2-bt+1}-2t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{-bt+1}{\sqrt{4t^2-bt+1}+2t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-b+\frac{1}{t}}{\sqrt{4-\frac{b}{t}+\frac{1}{t^2}}+2}=-\frac{b}{4}=3$$

所以 $b=-12$.

方法 2 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$，则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线,

其中 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{at^2-bt+1}-2t\right)=3\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{at^2-bt+1}-2t-3\right)=0$.

利用上面公式,有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{at^2-bt+1}}{t}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{a-\frac{b}{t}+\frac{1}{t^2}}=\sqrt{a}=2,a=4,\text{则:}$$

$$3=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{4t^2-bt+1}-2t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{-bt+1}{\sqrt{4t^2-bt+1}+2t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-b+\frac{1}{t}}{\sqrt{4-\frac{b}{t}+\frac{1}{t^2}}+2}=\frac{-b}{4}$$

$\therefore b=-12.$

2. $x\to0$ 时，$e^{x^2}-1\sim x^2$,

$$(\cos x)^x-1=e^{x\ln\cos x}-1\sim x\ln\cos x=x\ln[1+(\cos x-1)]\sim$$

$$x(\cos x-1)\sim-\frac{1}{2}x^3,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)^x-1}{x\left(e^{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{x\,x^2}=-\frac{1}{2}.$$

3.【解析】这是一个隐性的利用左极限与右极限讨论函数极限的存在性问题. 当 $x\to1$ 时, 由于函数表达式中含 $e^{\frac{x}{x-1}},\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$, 故应从 $x\to1^-,x\to1^+$ 求函数的左极限、右极限入手. 因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\left[\frac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}\right]=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\frac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}+\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right]=-2+1=-1,$

$$\lim_{x\to1^+}\left[\frac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right]=0-1=-1,$$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}\right]=-1$$

4.【解析】这是一个已知一个函数极限求与其相关的另一个函数极限问题, 由于已知极限是幂指函数的极限, 可考虑利用对数恒等式或等式两边同时取自然对数切入解决问题.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{2^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos2x}}=8$, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{2^x-1}\right]}{\ln\cos2x}=3\ln2$$

由于当 $x\to0$ 时, $\ln\left[1+\frac{f(x)}{2^x-1}\right]\sim\frac{f(x)}{2^x-1}\sim\frac{f(x)}{x\ln2}$,

$$\ln\cos2x=\ln[1+(\cos2x-1)]\sim\cos2x-1\sim-\frac{1}{2}(2x)^2=-2x^2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{2^x-1}\right]}{\ln\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x\ln2}}{-2x^2}=-\frac{1}{2\ln2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=3\ln2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=-6\ln^2 2$$