文章编号: 1004-4353(2001)01-0011-04

一刀切下料的数学模型

张军[1],　金明爱[1],　王锡禄[2],　冯恩民[2]
(1. 延边大学师范学院数学系, 吉林 延吉 133002; 2. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 对下料问题中的一刀切原则给出了一个数学描述. 从而给出了一个关于多张料板约束二维一刀切下料问题的数学模型.

关键词: 一刀切; 布局方案; 模型
中图分类号: TB114.1　　文献标识码: A

0　引言

切割问题(又称下料问题)常与装填问题合称切割与装填问题. 它们在玻璃切割、纸张切割、服装制造、造船、运输等行业以及计算机、经济领域中都具有极广阔的应用背景.

切割与装填问题的研究, 开始于 20 世纪四五十年代, 但其奠基性工作当属 Gilmore 与 Gomory 在 60 年代的工作. 此后对此问题的研究, 从一维发展到二、三、四维(引入时间维), 研究的重点则是建立特定问题的数学模型和寻求有效的求解途径. 由于切割与填装问题是 NP 困难的, 虽然在理论上构造了一些精确求解算法, 但这些算法只能用于求解很小规模的问题, 对大规模的问题, 一般是化这些精确算法为启发式算法, 或直接构造启发式算法. 文献中的工作也多是对已有启发式算法计算量或内存占用量上的改进或纠正.

Gilmore 与 Gomory[1~3] 用线性规划建立了一刀切问题的数学模型, 把线性规划的求解转化为一个背包子问题, 然后构造求解背包问题的有效方法. 用的数学工具主要是线性规划、动态规划与背包函数, 算法可用于求解无阶段限制的无约束一二维切割问题.

对无阶段限制的无约束的二维切断型切割问题的研究, Beasley[4] 使用了线性规划与动态规划, 给出了求解大规模问题的一个启发式算法. Morabito 与 Arenales 则用与图、或图来表示其切割方案, 并构造了一个混合树搜索算法. Morabito 等[5] 又推广此方法用于求解分阶段约束二维一刀切下料问题.

到目前为止, 对下料问题的研究主要是针对单料板约束或无约束切割问题, 而对实际中常遇到的多料板下料问题研究较少. 对多料板下料问题第一要解决的问题是选板, 第二是板已定的情况下如何下料, 此时对每张板要求下料最优已变成局部优化问题, 因而并不保证整个切割方案的最优. 文献[6]给出了多张料板约束二维一刀切下料问题的数学模型, 构造了一个有效的启发式算法. 由此算法研制的软件证明了算法的正确性与有效性, 在实际生产中利用率可达到 90% 以上, 深受用户欢迎.

本文对文献[6]的数学模型进行了改进, 给出了一个关于多张料板约束二维一刀切下料问题的较理想的数学模型.

收稿日期: 2000-10-17
作者简介: 张军(1959-), 男, 吉林延吉人, 延边大学师范学院数学系副教授.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

1 布局问题

多张料板的下料问题为:给定 N_s 类料板$\{(L_i, W_i, V_i, N_{si}): i = 1, 2, \cdots, N_s\}$ 和 n_r 类要切割的矩形$\{(l_j, w_j, v_j, n_{rj}): j = 1, 2, \cdots, n_r\}$, 其中 L_i, W_i 为第i 类料板的长和宽, V_i 为料板的价值, N_{si} 为它的数量;同样 l_j, w_j, v_j, n_{rj} 为第j 类矩形的长和宽、价值和数量, 目的是要从这 $\sum_{i=1}^{N_s} N_{si}$ 个料板中切下给定的 $\sum_{j=1}^{n_r} n_{rj}$ 个矩形, 且使所耗费的料板总价值最小, 若假定 $V_i = L_i \cdot W_i$, 则问题即为求废料最小.

假定所有的切割均为正交切断型切割, 料板各向同性, 即矩形可在板上竖放(矩形长边平行料板的宽边) 或横放, 且只有这两种正交的放置方式. 多类料板下料问题首先要解决的是料板的选择问题, 选择标准或目标并不唯一, 为简化问题, 令 $N_s = 1$, 即只有一类料板的多料板情形. 用 S_i 表示第i 张料板, 其长为 L, 宽为 W, 选直角坐标系$\{O, e_1, e_2\}$, 置料板 S_i 于第一象限, 且使它一个顶点与坐标原点重合, 即 $S_i = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant W\}$; F_{ij} 为第i 块板上的一个j 类矩形图元, (x, y) 为其左下角坐标, d 为它的方向($d = 0$为矩形竖放, $d = 1$ 为横放), 则 $F_{ij} = F_{ij}(x, y, d) = \{(x, y) \mid x \leqslant x \leqslant x + (1 - d) w_j + dl_j, y \leqslant y \leqslant y + (1 - d) l_j + dw_j\}$, 其中$(x, y) \in S_i$, $d \in \{0, 1\}$. 又记 n_{rj}^i 为第i张料板上的j 类矩形的数量, $F_{ij}^k(1 \leqslant k \leqslant n_{rj}^i)$ 为第 i 张板上的第 k 个 j 类矩形图元, 并令 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

定义 1[7] 设 S_i 上的布局方案 $Y = \{F_{ij}^k \subset S_i: 1 \leqslant k \leqslant n_{rj}^i, j \in I_{n_r}\}$. 若 Y 中各图元 F_{ij}^k 满足不干涉性, 即

$$\operatorname{int} F_{ij}^k \cap \operatorname{int} F_{ij'}^{k'} = \Phi, \qquad F_{ij}^k, F_{ij'}^{k'} \in Y, \quad (k, j) \neq (k', j'), \tag{1}$$

则称 Y 为S_i 上的一个不干涉布局方案.

定义 2 设 Y 为S_i 上的布局方案. 若 $Y' \subseteq Y$, $Y' \neq \Phi$, 则称 Y' 为布局方案 Y 的一个子方案.

由 S_i 上布局方案 Y 的所有子方案构成的集合记为$P(Y) = \{Y' \mid Y' \subseteq Y, Y' \neq \Phi\}$.

定义 3 对任意 $Y' \in P(Y)$, 当$|Y'| \geqslant 2$时, 存在正实数 t_0, 坐标向量 e_k, $k \in I_2$, 使 $Y' = Y_-' \cup Y_+'$, Y_-', $Y_+' \in P(Y)$. 满足

$$\max\{\langle \eta, e_k \rangle \mid \eta \in F_{ij}^k, \quad \forall F_{ij}^k \in Y_-'\} \leqslant t_0, \tag{2}$$

$$\min\{\langle \eta, e_k \rangle \mid \eta \in F_{ij'}^{k'}, \quad \forall F_{ij'}^{k'} \in Y_+'\} \geqslant t_0, \tag{3}$$

其中 $e_k = e_1$时, $t_0 < L$; $e_k = e_2$时, $t_0 < W$. 则称 Y 为S_i 上的一刀切布局方案. 特别是在 S_i 上只布一个矩形图元的布局方案 Y, 我们也称 Y 为S_i 上的一刀切布局方案.

事实上, 当 $Y' \in P(Y)$, $|Y'| = 1$时, 表明 Y' 是由唯一一个矩形图元$F_{ij}^k \subset S_i$ 布成的子方案, 显然存在正实数 t_0, 坐标向量 e_k, 使(2) 式成立($Y_-' = Y'$), 或(3) 式成立($Y_+' = Y'$). 当 $Y' \in P(Y)$, $1 < |Y'| \leqslant 3$时, 显然存在正实数 t_0, 坐标向量 e_k, 使 $Y' = Y_-' \cup Y_+'$, Y_-', $Y_+' \in P(Y)$, 满足(2)、(3) 式. 所以在判别一个布局方案 Y 是否为一刀切布局方案时, 只需要判别含有三个以上矩形图元的子方案是否满足条件即可. 因此有性质 1.

性质 1 设 Y 为布局方案. 若 $\forall Y' \in P(Y)$, $|Y'| > 3$, $\exists t_0 > 0$, e_k 使(2)、(3) 式同时成立, 则 Y 为一刀切布局方案.

根据一刀切布局方案的定义显然有性质 2.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

性质 2　设 Y 为布局方案. Y 是一刀切布局方案的充要条件是 $\forall Y' \in P(Y)$ 是一刀切布局方案.

2　数学模型

设 n_s 为所用料板张数, n_r^i 为第 i 张料板上矩形种类的数量, 则多料板下料问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\text{MSC}\quad & \min \quad n_s \\
\text{s.t.}\quad & \bigcup_{j=1}^{n_r^i}\bigcup_{k=1}^{n_{rj}^i} F_{ij}^k \subseteq S_i, \qquad i \in I_{n_s}. \\
& \operatorname{int} F_{ij}^k \cap \operatorname{int} F_{ij'}^{k'} = \Phi, \qquad F_{ij}^k, F_{ij'}^{k'} \in Y, \ (k, j) \neq (k', j'). \\
& \sum_{i=1}^{n_s} n_{rj}^i = n_{rj}, \qquad j \in I_{n_r}, \\
& \max\{\langle \eta, e_k\rangle \mid \eta \in F_{ij}^k, \quad \forall F_{ij}^k \in Y'_- \in P(Y)\} \leqslant t_0, \\
& \min\{\langle \eta, e_k\rangle \mid \eta \in F_{ij'}^{k'}, \quad \forall F_{ij'}^{k'} \in Y'_+ \in P(Y)\} \geqslant t_0, \\
& Y'_- \cup Y'_+ = Y' \in P(Y).
\end{aligned}
$$

其中 $F_{ij}^k = F((x, y, d)_{ijk})$, 即对每个矩形图元确定其板号 $i \in I_{n_s}$, 左下脚坐标与放置方向 (x, y, d), $(x, y) \in R^2$, $d \in \{0, 1\}$, 模型为共有 $3\sum_{j=1}^{n_r} n_{rj}$ 个优化变量的混合整数规划.

现对第 i 张料板 S_i 建立数学模型. 首先定义如下集合及运算, $P_r = \{\{1, n_{r1}\}, \{2, n_{r2}\}, \cdots, \{n_r, n_{rn_r}\}\}$, $P_{rh} = \{\{1, n_{r1}^h\}, \{2, n_{r2}^h\}, \cdots, \{n_r, n_{rn_r}^h\}\}$, 其中 $n_{rj}^h \geqslant 0$, $j \in I_{n_r}$, $P_r \setminus P_{rh} = \{\{1, n_{r1} - n_{r1}^h\}, \{2, n_{r2} - n_{r2}^h\}, \{n_r, n_{rn_r} - n_{rn_r}^h\}\}$, $\cup_h P_{rh} = \{\{1, \sum_h n_{r1}^h\}, \{2, \sum_h n_{r2}^h\}, \cdots, \{n_r, \sum_h n_{rn_r}^h\}\}$, $P_{rh} \leqslant P_{rk}: = n_{rj}^h \leqslant n_{rj}^k$, $\forall j \in I_{n_r}$, 又记 D_{ri} 是第 i 张板 S_i 的可选矩形图元集, 则 $D_{ri} = P_r \setminus \cup_{h=1}^{i-1} P_{rh}$, 对料板 S_i 有如下数学模型:

$$
\begin{aligned}
\text{MMSC}\quad & \min \quad LW - \bigcup_{j=1}^{n_r^i} n_{rj}^i \cdot l_j \cdot w_j \\
\text{s.t.}\quad & \bigcup_{j=1}^{n_r^i}\bigcup_{k=1}^{n_{rj}^i} F_{ij}^k \subseteq S_i, \\
& \operatorname{int} F_{ij}^k \cap \operatorname{int} F_{ij'}^{k'} = \Phi, \quad F_{ij}^k, F_{ij'}^{k'} \in Y, \ (k, j) \neq (k', j'). \\
& P_{ri} \leqslant P_r \setminus \bigcup_{h=1}^{i-1} P_{rh}, \\
& \max\{\langle \eta, e_k\rangle \mid \eta \in F_{ij}^k, \quad \forall F_{ij}^k \in Y'_- \in P(Y)\} \leqslant t_0, \\
& \min\{\langle \eta, e_k\rangle \mid \eta \in F_{ij'}^{k'}, \quad \forall F_{ij'}^{k'} \in Y'_+ \in P(Y)\} \geqslant t_0, \\
& Y'_- \cup Y'_+ = Y' \in P(Y).
\end{aligned}
$$

这样把 MSC 分成多步求解的 MMSC 形式, 此时即使对 $\forall S_i$, $i \in I_{n_s}$ 用精确方法求出 MMSC 的最优解, 最后得到的也只是 MSC 的一个可行解, 并不能保证是原问题的最优解. 这种方法在开始时能达到很高的材料利用率, 但到后面则效果很差, 这是因为可选矩形集逐渐变小的缘故, 即 $D_{r,i+1} \leqslant D_{r,i}$, $i = 1, 2, \cdots, n_s - 1$. 假若不使用精确算法求解 MMSC, 而是按一定度量将矩形排序后再根据一定的启发式规则下料, 材料利用率也基本符合利用率先好

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

后坏的规律, 并在加快速度方面具有一定的最优性. 我们先按启发式得到那些材料利用率高的板, 当可选矩形集很小时, 再使用较精确的算法, 并引入一定的回退技巧对最后的一些板下料. 计算表明这同样能够得到问题 MSC 的较好的解, 且有较快的速度.

参考文献:

[1] Gilmore P C, Gomory R E. A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part 1)[J]. Operations Research, 1961, 9: 849-859.

[2] Gilmore P C, Gomory R E. A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part 2)[J]. Operations Research, 1963, 11: 863-888.

[3] Gilmore P C, Gomory R E. Multistage cutting-stock problems of two and more dimensions[J]. Operations Research, 1965, 13: 94-120.

[4] Beasley J E. Algorithms for unconstrained two dimensional gullotine cutting[J]. Journal of the Operational Research Society, 1985, 4: 297-306.

[5] Morabito R N, Arenales M N, Arcoro V F. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94: 548-560.

[6] 王锡禄, 冯恩民. 矩形图元下料的优化模型、算法及应用[A]. 中国工业与应用数学学会第五次大会论文集[C]. 北京: 清华大学出版社, 1998. 603-607.

[7] 冯恩民, 王锡禄, 王秀梅, 等. 带性能约束布局问题的全局优化算法[J]. 高校应用数学学报, 1999, 14A(1): 98-104.

A mathematical model for guillotine cutting stock

ZHANG Jun[1], JIN Ming-ai[1], WANG Xi-lu[2], FENG En-min[2]

(1. *Department of Mathematics, Teachers College, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*;
2. *Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

Abstract: In this paper, a mathematical description for guillotine principle in cutting stock problems is shown. Finally, a mathematical model for constraints two-dimensional guillotine cutting stock problems of some stock plates is constructed.

Key words: Guillotine; Layout schemes; Model

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net