

§ 2.3 创新的供热技术——北卡科学与数学学校队的优秀论文^[1]

2.3.1 摘要

代之以通过门窗的对流，室内的加热和致冷系统，住宅的温度变化仅仅是作为混凝土地板的传热的结果，给定了周围环境温度的一张表，什么样形状和尺寸的混凝土地板才能保持舒适的地板和室内的平均温度。

我们考虑的第一个模型认为地板的顶部和底部绝热，只是通过地板周边的简单热传导的模型。我们对任意形状的地板完成了一般分析，并找到了一个能很好近似地板上任意一点温度的正弦函数；通过地板表面的数值积分来得到平均温度。我们把这个模型用到圆形和方形地板上去，发现大小至少为 $30\text{m} \times 30\text{m}$ 的方形地板将能有效地控制住宅内的温度。

假设地板的底部绝热可能是不现实的。在我们的第二个模型中地板底部和周边一样可以有热传导。我们再次找到了一条正弦曲线，并应用于方形地板。板上任意一点的温度变化总是在地基温度的周围振动。

然而，如果我们希望通过混凝土地板的传热来加热居室的话，假设地板的顶部绝热是不得要领的。在我们的第三个模型中，我们考虑了通过地板的辐射来加热住宅中的空气。（UMAP 编者注：我们略去了这个模型的细节）

我们建议住房与城市发展部建造能与地基交换热量的相对大的方形住宅。

2.3.2 问题的重述

代之以通过门窗的对流，室内的加热和致冷系统，住宅的温度变化仅仅是作为混凝土地板的传热的结果。表 2-2 给出了用绝

对温度表示的最高和最低的周围环境温度和舒适温度.

表 2-2 用绝对温度给出的温度

	周边环境温度	舒适温度范围
最高	302.6°K	297.6°K
最低	288.7°K	291.5°K

因为我们假定周围温度按正弦曲线变化, 按所述的最高和最低温度的近似正弦函数为

$$T_a(t) = 6.94 \cos\left(\frac{2\pi t}{1440}\right) + 295.7, \quad (1)$$

其中 $t=0$ 表示正午时刻, t 的单位用分来表示.

如果地板的顶部和底部都绝热的话, 地板的形状和尺寸应怎样才能保持舒适温度? 当把顶部和底部的绝热条件去掉时我们的解答会怎样变化以及怎么能使建筑物内达到舒适温度?

2.3.3 假设

问题陈述中隐含的假设

- 周边温度接近似的正弦曲线变化, 正午温度最高, 午夜温度最低. 周边温度曲线可以随、也可以不随季节变化. 若它随季节变化, 变化也是微小的, 而且最高和最低温度之差不变.
- 住宅的墙壁绝热性良好, 所以墙壁外的温度变化只影响混凝土地板的温度.
- 混凝土地板的顶部和底部可以绝热, 也可以不绝热. 若不绝热的话:
 - 热从地基向地板底传热.
 - 地基的温度保持常温 $70^\circ\text{F} = 294.3^\circ\text{K}$, 而且不因混凝土地板的热损失/辐射而变化.
 - 在居室中热从混凝土地板向居室空间传送.

附加的假设

- 混凝土地板是由标准的 Portland 和砂子、碎石混合组成的.

其比热为 $2\text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{K}$ (2 焦耳/公斤 $^{\circ}\text{K}$, 实际上是 $1.4\sim 3.6$), 辐射系数为 0.9, 密度为 3000kg/m^3 (3000 公斤/立方米).

- 混凝土地板的厚度是均匀的.
- 混凝土地板周边的温度实际上就是周围的环境温度 (若周边不绝热就是这种情况).
- 当考虑两个方向的热流时, 一个方向的热流与另一个方向的热流无关. 类似地, 当把混凝土地板看成是由无穷多根导热杆组成时, 单个杆之间没有热传导.
- 在居室的空气中可以有也可以没有湍流. 如果确有湍流, 它实际上是使空气中的温度变均匀.

表 2-3

符号索引

A	地面的面积; 混凝土地板的顶表面或底面的面积
C	杆的横截面的面积
c	材料的比热; 对混凝土而言为 $2\text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{K}$
d	圆内一点 P 到圆周上一点的距离
h	混凝土地板的厚度
I	见(8)
k	材料的热传导系数; 对混凝土而言为 $90\text{J/minute}\cdot\text{m}\cdot^{\circ}\text{K}$ (90 焦耳/分 \cdot 米 $\cdot^{\circ}\text{K}$)
O	平面上的点
ΔQ	热
r	热流
R	从一点向外辐射的不同的杆的长度
s	圆板的半径
t	板的周边的弧长
T	时间
T_u	混凝土地板顶部一点处的温度
T_a	周围环境的温度
u	地基温度, 294.3°K
θ	正方形混凝土地板周长的一半
ρ	密度

2.3.4 混凝土地板顶部和底部都绝热的模型

一般的凸混凝土地板中的热传导

我们认为混凝土地板周边的温度为周围环境的温度。因为混凝土地板顶部和底部都是绝热的，所以地板中的传热只能以热传导的方式发生。在一杆中，从温度为 T 的一端到温度为 T_a 的另一端的稳定热流由

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kC \frac{T_a - T}{r}$$

给出，其中 k 是材料的均匀的热传导系数， C 是杆的不变的横截面积， r 是杆的长度，我们把这个方程理想化为

$$\frac{dQ}{dt} = kC \frac{T_a - T}{r}. \quad (2)$$

热流 dQ 也与杆的质量 m ，比热 c 和温度的改变 dT 成比例，

$$dQ = mcdT. \quad (3)$$

把 dQ 代入(2)，我们得到 (UMAP 编者注：如同在后面的实践者的评论中指出的，这里的两个 dQ 是不同的)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa C(T_a - T)}{mcr}. \quad (4)$$

现在我们考虑面积为 A ，密度为 ρ ，厚度为 h 的凸混凝土地板。我们把要研究其温度的混凝土地板看成是由板上一点向外辐射开去的角度从 0 到 2π 的许多杆组成的，如图 2-1 所示，其横截面取作杆在周边处的面积，即， $dC = hds$ ， ds 是周边处的弧长。(UMAP 编者注：本文计算经常是假设 $ds = r d\theta$ ，就结果而言，这给出了 O 位于中心处的情形的大体上正确的结果。事实上，在极坐标系中微分 ds 的表达式是 $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$ ；例如参见 L. Ross, L. Finney, George B. Thomas, Jr., Calculus, p. 703. (Reading, MA: Addison-Wesley, 1990)).

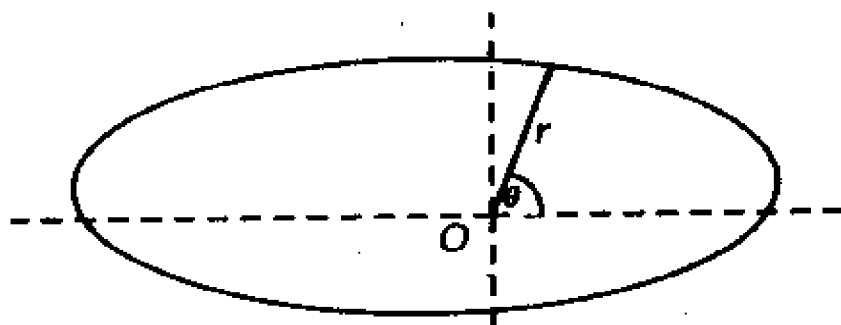


图 2-1 一般的混凝土地板

此外, $m = \rho Ah$, 故(4)成为

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa(T_a - T)}{\rho Ahc} \sum_n \frac{C_n}{r_n} = \frac{\kappa(T_a - T)}{\rho Ahc} \int \frac{dC}{r(\theta)}. \quad (5)$$

因为 $dC = h ds$, 我们可以把(5)写作

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa(T_a - T)}{\rho Ac} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{r(\theta)}. \quad (6)$$

注意 T 与混凝土地板的厚度无关.

利用(1)中关于 T_a 的表达式并应用待定系数法, 我们求得(6)的解为:

$$\begin{aligned} T = & \left[\frac{6.94 \cdot \left(\frac{2\pi}{1440} \right) I}{\left(\frac{2\pi}{1440} \right)^2 + I^2} \right] \sin\left(\frac{2\pi}{1440} t\right) \\ & + \left[\frac{6.94 I^2}{\left(\frac{2\pi}{1440} \right)^2 + I^2} \right] \cos\left(\frac{2\pi}{1440} t\right) + 295.7, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$I = \frac{\kappa}{\rho Ac} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{r(\theta)}. \quad (8)$$

我们通过简单地改变与不同的混凝土地板的形状相应的 $r(\theta)$ 和 A 把这个方程用于许多不同的情形.

为求平均温度, 我们在地板面上求温度的积分并除以地板的面积. 我们有

$$\bar{T} = \frac{\iint_A T dA}{A}.$$

非凸的混凝土地板的模型

在计算非凸混凝土地板中的温度时碰到了极大的困难. 总可以把一个非凸区域分成若干个小的凸区域, 它们每个都可以看做是杆的聚集物. 于是一点处温度的基本表达式具有如同凸混凝土地板同样的一般特征. 然而, 凸混凝土地板问题的分析是极难进行的, 因为沿着区域边界的“周围环境温度”是在变化的. 此外, 暴露在空气中的非凸混凝土地板的周边长度要大于具同样面积的凸混凝土地板的周边长度. 因此, 在非凸混凝土地板中的温度震荡要比在凸混凝土地板中的温度震荡厉害, 而且其震荡很可能会超出舒适区域的范围. 所以, 住房与城市开发部大概不应该建造地板形状为非凸区域的住宅.

圆形混凝土地板

我们首先讨论圆形混凝土地板, 因为它具有最小的周长—面积比(即, 周长一定面积最大). 考虑半径为 R 的圆形混凝土地板上的一点 P , P 到中心的距离为 $(R-d)$, 如图 2-2 所示.

利用余弦定律可得 $r(\theta)$ 的表达式:

$$r(\theta)^2 = R^2 + (R-d)^2 - 2R(R-d)\cos\theta.$$

把表达式代入(6)就给出(7)中的解, 其差别只是 I 的公式中的 $r(\theta)$ 不同而已. 图 2-3(a)和 2-3(b)表示了地板上一点关于时间变化的温度.

正方形混凝土地板

由于造价的原因, 不会有很多人取造圆柱形的房屋. 所以, 我们考虑如图 2-4 所示的周长为 $2u$ 的正方形混凝土地板.

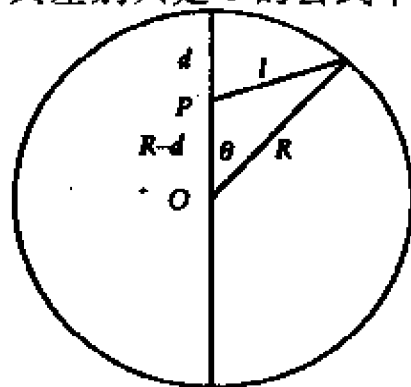


图 2-2 圆形混凝土地板

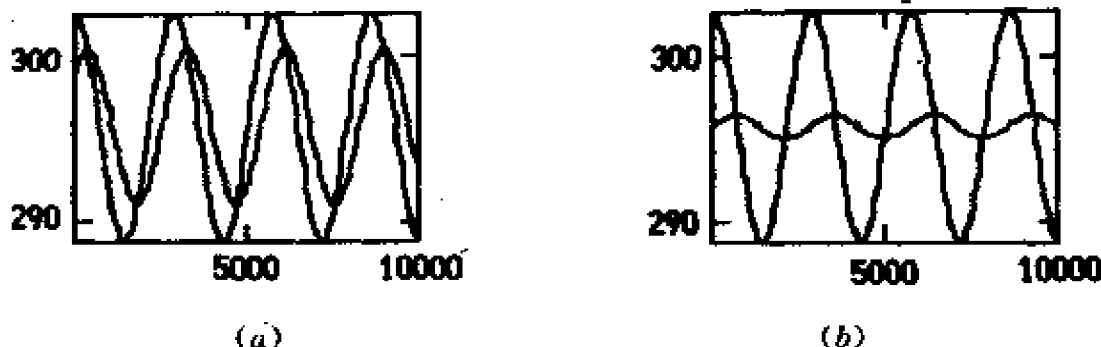


图 2-3 关于时间变化的周围环境温度(变化较大)以及圆形混凝土板上一点的温度(变化较小)
(a) $R=10$ 而 $d=5$. (b) $R=30$ 而 $d=15$

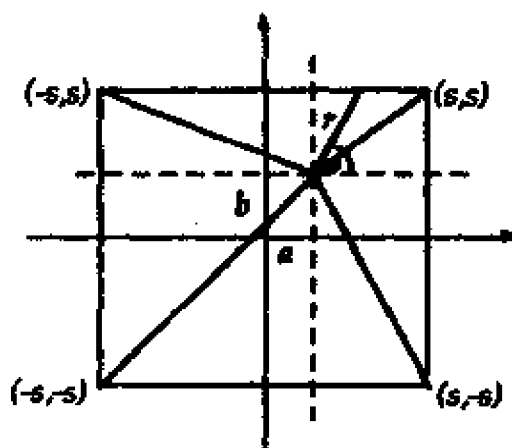


图 2-4 正方形混凝土板

设 a 和 b 是图 2-4 所示板上一点的直角坐标. 正方形混凝土板的 $r(\theta)$ 的分段定义如下:

$$r(\theta) = \begin{cases} \frac{s-a}{\sin\theta}, \arctan\left(\frac{s-a}{s-b}\right) < \theta \leq \arctan\left(\frac{s+b}{s-a}\right) + \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{s+b}{\cos\theta}, \arctan\left(\frac{s+b}{s-a}\right) + \frac{\pi}{2} < \theta \leq \arctan\left(\frac{s+a}{s+b}\right) + \pi; \\ -\frac{s+a}{\sin\theta}, \arctan\left(\frac{s+a}{s+b}\right) + \pi < \theta \leq \arctan\left(\frac{s-a}{s-b}\right) + \frac{3\pi}{2}; \\ \frac{s-b}{\cos\theta}, \arctan\left(\frac{s-a}{s-b}\right) + \frac{3\pi}{2} < \theta \leq \arctan\left(\frac{s-a}{s-b}\right) + 2\pi. \end{cases}$$

相应的微分方程给出和(7)一样的解, 只是 I 稍有不同. 图 2-5 展示了两种情形.

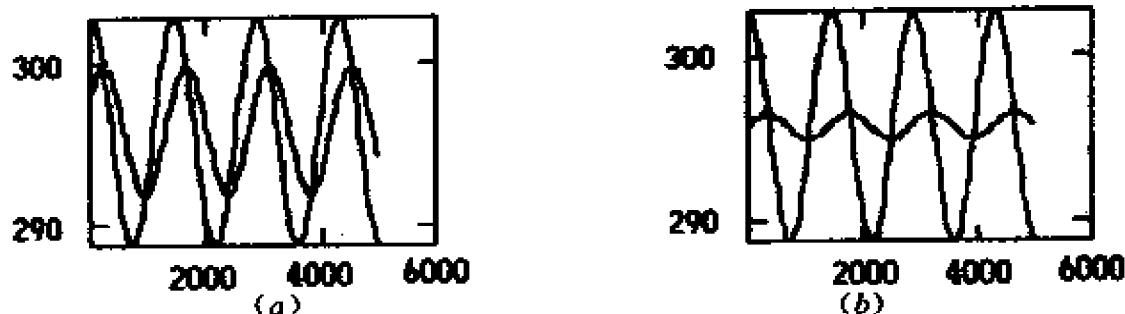


图 2-5 关于时间变化的周围环境温度(变化较大)以及圆形混凝土地板上一点的温度(变化较小)
(a) $u=10$ 而 $a=b=7$, (b) $u=20$ 而 $a=b=8$

我们的建议

具有较小的周长一面积比的混凝土地板的温度很可能保持在舒适温度的范围内。由于矩形板容易制造，又因为周长一面积比最小的矩形是正方形，因此我们建议住房与城市开发部建造正方形板基的房屋。为免去加热和致冷的费用，板基应相对大一点，至少为 $30\text{m} \times 30\text{m}$ ，这样大小的混凝土地板能使板面平均温度保持在舒适温度的范围内。因为我们用了非常粗糙的数值方法，所以我们的结果也是很粗略的。

假设的实用性和敏感性

改变表示周围温度的函数不会造成很大的误差，混凝土地板的温度仍将在最高和最低温度的范围内并围绕着平均温度震荡。因为我们假定余弦函数的振幅不变，又因为我们考虑的所有函数都只依赖于温度之差而与其绝对值无关。平均温度的最小和最大值关于时间的图形是一样的，只是关于最高和最低温度的算术平均值有一个上下的移动而已。如果混凝土板基很大，就像是很大的公寓单元房的地基板，则温和的季节温度变化(温度变化小于一个数量级)还是可以允许的。但是由于舒适温度的范围只有 10°F ，季节温度变化一定要很温和，否则仅仅由混凝土地板的作用是不能保证屋内温度保持在舒适温度范围内的。

然而，住房与城市开发部肯定不应考虑在周围环境温度随季节的变化会很大的非温和气候地区建造这样的住房。如果在一年中任何时间内平均周围温度的升和降超出舒适温度的范围，那么只靠混凝土地板来加热和致冷以使屋内平均温度保持在舒适温度范围内是不可能的。

本模型对于假定墙壁是不传热的这点来说是很敏感的。如果墙壁是导热的，那么它们的作用和混凝土地板是一样的，从而将改变混凝土和建筑物内空气的温度。然而，尽管有这种敏感性，本假设还是有效的，因为美国的建筑标准中有建筑物墙壁绝热的标准等级，这些材料几乎没有导热性。

另一方面，混凝土地板顶部绝热使得数学处理更容易，但就人们希望利用它来加热混凝土地板上的居室而言，这是很愚蠢的想法。但地下温度不在舒适温度范围内时，使混凝土地板的底部绝热是一个很好的想法，但并不总是现实的。所以，我们将考虑混凝土地板的顶部和底部不一定绝热的情形。

2.3.5 混凝土地板的顶部或底部不绝热的情形

混凝土地板的作用是把热传入室或传送出室外，而绝热会阻止这样做。

当底部不绝热时，如图 2-6 所示，对于小的 h （混凝土地板的厚度），在房屋地板附近温度震荡的平均值将趋于地下的温度。混凝土地板的温度将紧紧围绕地下温度震荡。因此，在地下温度超出舒适温度范围的地区，住房与城市发展部可能希望混凝土地板的底部绝热。既不在顶部也不在底部绝热的混凝土地板的情形没有太大的差别。

图 2-7 表示了正方形一半边长范围内最高和最低温度的变化。混凝土地板不必如前面建议的那么大，因为居室中的空气起到了绝热的作用。具体说，混凝土地板必须有一边长为 $20 \pm 3\text{m}$ 。（UMAP 编者注：全面的分析和计算略去了。）

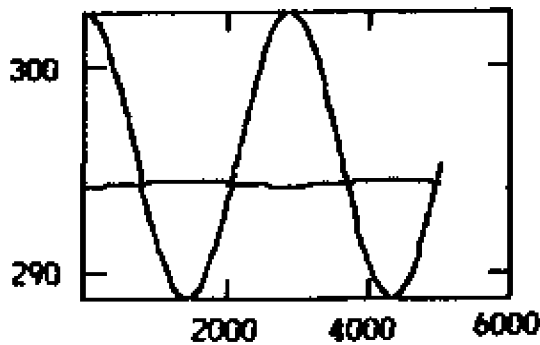


图 2-6 关于时间变化的周围环境温度(变化较大)以及正方形混凝土地板上一点的温度(变化较小), 包括地下温度的效应, $u=5$, $a=b=0$

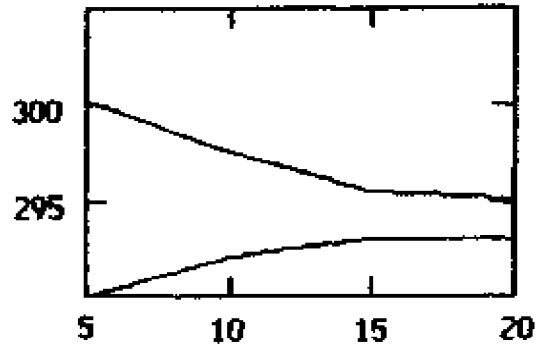


图 2-7 未经绝热的正方形混凝土地板在一半边长范围内(以米为单位)最高和最低温度

2.3.6 模型设计的分析

敏感性分析

当混凝土地板的底部没有绝热时, T_x 在决定混凝土地板和居室温度时起决定作用, 致使所有其他的因素, 甚至周围环境温度的因素, 几乎都可以忽略. 而且在周围环境温度范围内, 如果 T_x 在周围环境温度范围内的话, 混凝土地板和室内温度总是绕着接近 T_x 的一个值震荡. 所以, 在地下温度于舒适温度范围内的气候条件下, 则无需去做混凝土地板底部的绝热, 从而降低了成本, 同时又提供了很好的解决办法. 此外, 在通常建造的地基板下面几英尺深的地方温度不随时间变化. 如果季节温度变化很大而地下温度在舒适温度范围内, 这种情形将确保在加热和致冷方面只要花一点点钱或者根本不用花钱. 如果地下温度不是很接近或不在舒适温度范围内, 而且周围环境温度又不是那么有运气的话, 因此就无法以这样的方式控制房屋的温度. 因此, 我们就要来分析一下有绝热或没有绝热的混凝土地板的成本.

当混凝土地板的底部绝热时, 平均温度仍不特别敏感. 但是, 平均温度的小的改变会在混凝土地板的特定点上得到放大.

我们建议，如果住房与城市发展部对所用的混凝土的类型要说什么的话，那就是要采用高强度和高比热的混凝土。从(7)可知，如果这些值大，那么 I 就小，从而温度的震荡就比较小。然而，相当小的能效的增加，尤其是对大建筑物来说，往往并不能说明花费的增加是值得的。

成本分析

混凝土各组成部分在 1994 年 2 月的价格是：

- Portland 水泥 \$ 63.55/吨；
- 砂子 \$ 7.11/吨；
- 碎石 \$ 6.25/吨。

因为构成房基的混凝土通常是按大致 1 : 8 : 8 的比例混合而成的，这种混凝土的实际价格为 \$ 7/吨 或 \$ 22/立方米。绝热的成本是每 16 平方英尺 \$ 2.11，或 \$ 1.42/平方米。这种混凝土一般用的厚度为 0.1~0.15 米。如果我们大量生产 0.15 米的混凝土地板的话，这种房基板(绝热加混凝土)的价格约为 \$ 2.50/平方米，但是不绝热的房基板的价格为 \$ 1/平方米。对于 500 平方米的建筑物来说，绝热要花掉 \$ 710 多。若地下的温度超出了舒适温度范围，而且是要居住多年的房屋是值得绝热的。如果地下温度不在舒适温度范围内，则混凝土地板的底部需要绝热；而且我们推荐采用面积不小于 400 平方米的正方形混凝土地板。如果地下温度在舒适温度范围内，那么我们推荐采用未经绝热过的大正方形混凝土地板。

实际上，住房的地板应铺上瓷砖使之与空气间的传热更有效，因为地毯和地板的导热性并不好。

2.3.7 讨论

模型的测试

为测试本模型，住房与城市发展部应建造一幢以混凝土地板

为基础的样板楼，并用温度传感器来验证本模型关于平均温度随时间变化的预测。

Felix Trombe 博士曾在法国南部建造了一所住房，其南墙是混凝土墙。该墙的作用类似于我们的问题中的混凝土地板的作用，但我们的问题中还讨论季节温度的变化。因为该墙是直立的，它接受的太阳辐射热流随季节和太阳辐射的角度的变化而变化以调节房屋的温度。从地基板下的地下传热的房屋也曾建造过。根据我们的模型，以及他们的观察，他们的加热和致冷系统应该是很合算的。

模型的改进

我们模型的一个缺点就是本模型严重依赖于假定混凝土地板是由无穷多根导热杆组成的，杆之间互不影响。对于精确求解这一假设可能并不成立。

本模型的另一个缺点就是除了盖一幢样板楼外无法进行测试。

2.3.8 参考文献

Giancoli, Douglas C. 1991. *Physics: Principles with Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Kong, F. K., et. al. 1983. *Handbook of Structured Concrete*. New York: McGraw-Hill.

Materials prices. 1994. *ENR* (7 February 1994).

Neville, A. M. *Properties of Concrete*. New York: John Wiley and Sons, 1973.

Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling. 1990. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press.