仲英学辅模拟考试试题解答

课程：<u>　高等数学　</u>　　考试时间：2020.11.08　考试类型：期中考[√]

一、选择题（共 5 题，每题 3 分，共 15 分）

1. 已知当$x \to 0$时，$\sin x$与$\ln(1+ax)$是等价无穷小，则$a=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ± 1

答案 C

解答 注意到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{ax}=\frac{1}{a}=1$$

故$a=1$。

2. 设多项式函数

$$f(x)=(x-m)(x-n)(x-p)(x-q)(x-h)$$

其中$m<n<p<q<h$，则$f'(x)$的零点个数为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 不确定

答案 B

解答 注意到

$$f(m)=f(n)=f(p)=f(q)=f(h)=0$$

故由 Rolle 中值定理知，存在$x_1\in(m,n)$，$x_2\in(n,p)$，$x_3\in(p,q)$，$x_4\in(q,h)$，使

$$f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=f'(x_4)=0$$

又根据$f(x)$是五次多项式知$f'(x)$是四次多项式，至多有四个零点，故$f'(x)$有四个零点。

3. 设函数$f(x)$满足$f(0)=0$，则$f(x)$在$x=0$处可导且$f'(0)=A$的充要条件是

A. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=A$

B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{h}=A$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=A$

D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{2h}=A$

答案 B

解答 对于选项 A~C，以选项 B 为例，注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0)$$

因此选项 B 正确；对于选项 D，注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{2h}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)-\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}f'(0)$$

故选项 D 不正确。

4. 设数列$\{x_n\}$满足$x_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{3}$$

则下列叙述中正确的是

A. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，但不一定为0

C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在

D. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$可能存在，也可能不存在

答案 A

解答 1 对任意$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{Z}$，当$n>N$时，有

$$\frac{2}{3}-\varepsilon<\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{2}{3}+\varepsilon$$

取$\varepsilon<\frac{1}{3}$，则$\frac{2}{3}+\varepsilon<1$，故

$$\frac{x_{n+1}}{x_N}=\frac{x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{N+1}}{x_N}<\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)^{n-N+1}\to 0$$

故当n充分大时，$x_n\to 0$，进而知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

解答 2 由$x_n>0$知$\{x_n\}$有下界，又对任意$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{Z}$，当$n>N$时，有

$$\frac{2}{3}-\varepsilon<\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{2}{3}+\varepsilon$$

取$\varepsilon=\frac{1}{3}$，则

$$\frac{1}{3} < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

故当$n > N$时$\{x_n\}$单调递减，由单调有界收敛原理知$\{x_n\}$必定收敛，设$\lim_{n\to\infty} x_n = x$，

若$x \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x}{x} = 1 \neq \frac{2}{3}$$

矛盾，故$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。

5. 设函数$f(x)$的二阶导数在$x=0$处连续，$f(0)=f'(0)=0$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^2} = 1$$

由此可知$x=0$是$f(x)$的

A. 极小值点

B. 极大值点

C. 不是$f(x)$的极值点，但是$\big(0,f(0)\big)$是曲线$y=f(x)$的拐点

D. 不是$f(x)$的极值点，同时$\big(0,f(0)\big)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

答案 A

解答 由$f(0)=f'(0)=0$知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{12}x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\frac{1}{3}x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^2} = 1$$

故在0附近，有

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \geq 0$$

因此$x=0$是$f(x)$的极小值点，同时在0附近，有

$$f''(x) = x^2 + o(x^2) \geq 0$$

因此$x=0$不是$f(x)$的拐点。

二、填空题（共 4 题，每题 3 分，共 12 分）

1. 设m，n是正整数，则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

的值为______________。

答案 $\frac{n^2-m^2}{mn}$（或写成$\frac{n}{m}-\frac{m}{n}$）

解答 1 计算得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{m}\cdot\ln(1+nx)}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\cdot\ln(1+mx)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\cdot\ln(1+mx)}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{m}\cdot\ln(1+nx)-\frac{1}{n}\cdot\ln(1+mx)}-1\right)}{x}$$

又$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\cdot\ln(1+mx)}\to 1$，$\frac{1}{m}\cdot\ln(1+nx)-\frac{1}{n}\cdot\ln(1+mx)\to 0$，故

$$LHS=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{m}\cdot\ln(1+nx)-\frac{1}{n}\cdot\ln(1+mx)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{1+nx}-\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1+mx}}{1}=\frac{n^2-m^2}{mn}$$

解答 2 注意到$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}$和$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$的极限都存在，且分别为$\frac{n}{m}$和$\frac{m}{n}$，计算得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n}{m}x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{n}x}{x}=\frac{n^2m^2}{mn}$$

2. 曲线

$$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)(x>0)$$

的渐近线的方程是______________。

答案 $y=x+\frac{1}{e}$（或写成$ex-ey+1=0$）。

解答 计算得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{e+t}}{1}=\frac{1}{e}$$

故渐近线的方程为

$$y=x+\frac{1}{e}$$

3. 函数

$$f(x)=x+2\cos x$$

在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为______________。

答案 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$（或写成$\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$）

解答 计算得

$$f'(x)=1-2\sin x$$

故$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$单调递增，在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$单调递减，因此

$$f(x)_{max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

4. 若

$$\lim_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$$

则极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$$

的值为______________。

答案 2

解答 容易证明$f(x)$是无穷小，计算得

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=\exp\left(1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\right)=\exp 3$$

解得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

三、解答题（共 7 题，第 1 题 20 分，第 2~4 题每题 8 分，第 5 题 9 分，第 6~7 题每题 10 分，共 73 分）

1.（每小题 5 分，共 20 分）计算下列极限或导数。

（1）设a为常数，对于参数方程

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（用$t$表示）。

解答 计算得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$$

（2）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}$$

解答 计算得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1+\tan x)}-1}{x^2}$$

又$x\cdot\ln(1+\tan x)\to 0$，$\tan x\to 0$，故

$$LHS=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

（3）求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$$

解答 1 计算得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}$$

又$\arccos x \to \frac{\pi}{2}$，故

$$\begin{aligned} LHS &= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x - 1}{x} \\ &= \exp\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

解答 2 注意到

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x} \\ &= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x - 1}{x} \\ &= \exp\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

（4）求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$$

解答 1 计算得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)}{x}$$

又

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)=\frac{n}{n}=1$$

故

$$LHS=\exp \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}-1}{x}=\exp\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\cdot\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{kx}-1}{x}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{kx}-1}{x}\right)=\exp\frac{\mathrm{e}}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}\cdot \mathrm{e}}$$

解答 2 计算得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)}{x}$$

记

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)}{x}$$

由 L'Hopital 法则得

$$L=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}=\mathrm{e}\cdot\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}\cdot\mathrm{e}$$

故

$$LHS=\exp L=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}\cdot\mathrm{e}}$$

2.（共 8 分）设函数

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}\cdot\sin x}{|x|}$$

求函数$f(x)$的全部间断点及其类型。

解答 计算得

$$\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin x}{x}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0^{-}}f(x)=-\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin x}{x}=-\mathrm{e}$$

故$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点，属于第一类间断点；又计算得

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{\sin 1}{1}\cdot\lim_{t\to -\infty} \mathrm{e}^t=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\sin 1}{1}\cdot\lim_{t\to +\infty} \mathrm{e}^t=\infty$$

故$x=1$是$f(x)$的无穷间断点，属于第二类间断点。

3.（共 8 分）设数列$\{x_n\}$满足$0<x_n<1$，且

$$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}$$

证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解答 计算得

$$x_{n+1}-x_n>\frac{(2x_n-1)^2}{4(1-x_n)}>0$$

故$\{x_n\}$单调递增，又$0<x_n<1$，故由单调有界收敛原理知$\{x_n\}$必定收敛，设$\lim_{n\to\infty} x_n=x$，则有

$$(1-x)x\geq\frac{1}{4}$$

另一方面，由均值不等式得

$$(1-x)x\leq\left(\frac{1-x+x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

取等时当且仅当$1-x=x$，也即$x=\frac{1}{2}$，故数列$\{x_n\}$的极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$$

4.（共 8 分）将4次多项式函数

$$f(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x-1$$

按$(x-2)$展开。

解答 1 只需将$f(x)$在$x=2$处展开即可，计算得

$$f'(x)=12x^3-15x^2+8x-2,f''(x)=36x^2-30x+8$$

$$f'''(x)=72x-30,f''''(x)=72,f'''''(x)=\cdots=0$$

同时

$$f(2)=19,f'(2)=50,f''(x)=92,f'''(x)=114,f''''(x)=72$$

故

$$f(x)=19+50(x-2)+46(x-2)^2+19(x-2)^3+3(x-2)^4$$

解答 2 计算得

$$f(x+2)=19+50x+46x^2+19x^3+3x^4$$

因此

$$f(x)=19+50(x-2)+46(x-2)^2+19(x-2)^3+3(x-2)^4$$

5.（共 9 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=0$，$f(1)=\pi$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=\tan f(\xi)$$

解答 令

$$\varphi(x)=\frac{\sin f(x)}{\mathrm{e}^x}$$

则$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$\varphi(0)=\varphi(1)=0$，故由 Rolle 中值定理知，存在$\xi\in(0,1)$，使

$$\varphi'(\xi)=\frac{\cos f(\xi)\cdot f'(\xi)-\sin f(\xi)}{\mathrm{e}^{\xi}}=0$$

若$f(\xi)=\frac{\pi}{2}$，则$\cos f(\xi)=0$，$\sin f(\xi)=1$，此时$\varphi'(\xi)\neq 0$，故$\cos f(\xi)\neq 0$，进而知

$$f'(\xi)=\tan f(\xi)$$

6.（共 10 分）设$C_i(i=1,2,3,4)$为常数，验证函数

$$y=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

满足$y^{(4)}+y=0$，其中$y^{(n)}$表示函数$y=y(x)$的n阶导数。

解答 记

$$z_1=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{2}},z_2=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{x}{\sqrt{2}},z_3=\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{2}},z_4=\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

计算得

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}x^2}=-\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3z_1}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right),\frac{\mathrm{d}^4z_1}{\mathrm{d}x^4}=-\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^4z_1}{\mathrm{d}x^4}+\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}=0$$

同理可证明

$$\frac{\mathrm{d}^4z_2}{\mathrm{d}x^4}+\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}=0,\frac{\mathrm{d}^4z_3}{\mathrm{d}x^4}+\frac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}x}=0,\frac{\mathrm{d}^4z_4}{\mathrm{d}x^4}+\frac{\mathrm{d}z_4}{\mathrm{d}x}=0$$

又$y=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3+C_4z_4$，故有$y^{(4)}+y=0$。

7.（共 10 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，并且在$[0,1]$上函数$f(x)$的最小值为-1，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使

$$f''(\xi)\geq 8$$

解答 设$f(x)$在$[0,1]$上的最小值点为x_0，则$f(x)$在$x=x_0$处的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-x_0)^2$$

进而知

$$f''(\xi)=\frac{2f(x)+2}{(x-x_0)^2}$$

取$x=0$得

$$f''(\xi_0)=\frac{2}{x_0^2}$$

取$x=1$得

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$$

又

$$\max\{f''(\xi_0),f''(\xi_1)\}=\begin{cases}\dfrac{2}{x_0^2},0<x_0<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{(1-x_0)^2},\dfrac{1}{2}\leq x_0<1\end{cases}$$

故$\max\{f''(\xi_0),f''(\xi_1)\}\geq 8$，取$f''(\xi)=\max\{f''(\xi_0),f''(\xi_1)\}$即可。

四、附加题（不算在总分内，第 1~2 题每题 6 分，第 3 题 8 分，共 20 分）

1.（共 6 分）设数列$\{x_n\}$中的每一项x_n都满足方程

$$nx-1+\ln x=0$$

证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解答 令

$$f_n(x)=nx-1+\ln x$$

注意到对任意$n\in\mathbb{N}^*$，有$f_n(x)$单调递增，且

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=-\ln n<0$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}-1-\ln\sqrt{n}>0$$

因此

$$\frac{1}{n}<x_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

根据夹逼准则知必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

（董晟渤 **供题**）

2.（共 6 分）证明e是无理数。

解答 1 由 Taylor 展开式知存在$\xi\in(0,1)$，使

$$\mathrm{e}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}$$

假设e是有理数，则存在正整数p，q，满足$(p,q)=1$，且

$$\mathrm{e}=\frac{p}{q}$$

由$2<\mathrm{e}<3$知$q>1$，又$q!\cdot\mathrm{e}$必定是整数，取$n=q$，计算得

$$q!\cdot\mathrm{e}=q!\cdot\left(\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\right)+\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{q+1}$$

其中$q!\cdot\left(\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\right)\in\mathbb{Z}$，但是由$q\geq 2$，$\mathrm{e}<3$知

$$0<\frac{e^{\xi}}{q+1}<\frac{e}{3}<1$$

此与$q!\cdot e\in\mathbb{Z}$矛盾，故e是无理数。

解答 2 由 Taylor 级数得

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

假设e是有理数，则存在正整数p，q，满足$(p,q)=1$，且

$$e=\frac{p}{q}$$

由$2<e<3$知$q>1$，又$q!\cdot e$必定是整数，计算得

$$q!\cdot e=q!\cdot\left(\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\right)+q!\cdot\left(\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)$$

其中$q!\cdot\left(\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\right)\in\mathbb{Z}$，但是

$$\begin{aligned}&0<q!\cdot\left(\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\\&<\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots+\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}+\cdots\\&<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots+\frac{1}{(q+n-1)(q+n)}+\cdots\\&<\frac{1}{q+1}+\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{q+n-1}-\frac{1}{q+n}\right)+\cdots\\&=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+1}=\frac{2}{q+1}<1\end{aligned}$$

此与$q!\cdot e\in\mathbb{Z}$矛盾，故e是无理数。

（高逸飞 **供题**）

3.（共 8 分）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^{2n}-(\tan x)^{2n}}{\left(1-\prod_{k=1}^{2n}\cos kx\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(\cos^k x-1)\right)}$$

解答 当$x\to 0$时，根据

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

得

$$\tan x^{2n} = x^{2n} + \frac{1}{3}x^{6n} + o(x^{6n})$$

$$(\tan x)^{2n} = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^{2n} = x^{2n} + \frac{2n}{3} \cdot x^{2n+2} + o(x^{2n+2})$$

因此

$$\tan x^{2n} - (\tan x)^{2n} = -\frac{2n}{3}x^{2n+2} + o(x^{2n+2})$$

又根据

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

得

$$\prod_{k=1}^{2n} \cos kx = \prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{1}{2}k^2x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} k^2x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \prod_{k=1}^{2n} \cos kx = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{6}x^2 + o(x^2)$$

$$\prod_{k=1}^{n}(\cos^k x - 1) = \prod_{k=1}^{n}((1 + \cos x - 1)^k - 1) = \prod_{k=1}^{n}\big(k(\cos x - 1) + o(x^2)\big)$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2}x^2 + o(x^2)\right) = (-1)^n\frac{n!}{2^n}x^{2n} + o(x^{2n})$$

计算得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2n}{3}x^{2n+2} + o(x^{2n+2})}{\left[\frac{n(2n+1)(4n+1)}{6}x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[(-1)^n\frac{n!}{2^n}x^{2n} + o(x^{2n})\right]}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+2}}{n! \cdot (2n+1) \cdot (4n+1)}$$

（赵佳明 **供题**）

※解答到此结束※