第七章 无穷级数 infinite Series

第一节 常数项级数

Series with constant terms

- 常数项级数的概念与性质
- 正项级数的审敛准则
- 变号级数的审敛准则
- 小结

作业: **Page286**

A. 3,6,7,8,12(双号),14, 15, 16,18

B.4

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots\to\infty$$

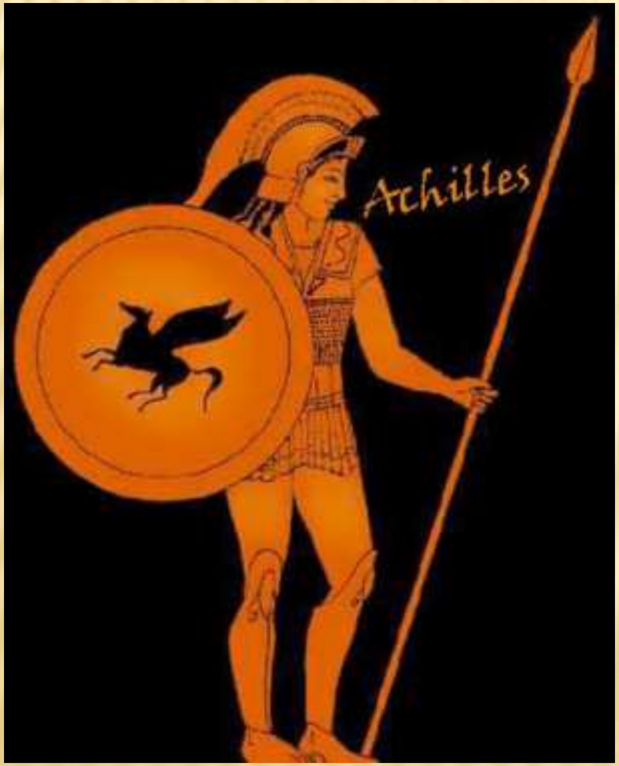
$$1-1+1-1+\cdots(-1)^{n-1}+\cdots=\begin{cases}1（n\text{为奇数}）\\0（n\text{为偶数}）\end{cases}$$

无限个数相加，和是否存在？

若存在，等于多少？

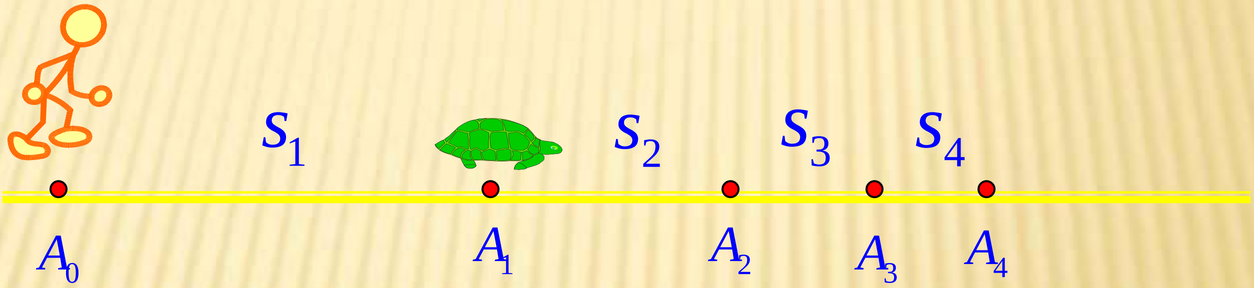
例 (芝诺悖论)乌龟与阿基里斯赛跑问题:

芝诺(古希腊哲学家)认为如果先让乌龟爬行一段路程后, 再让阿基里斯(古希腊神话中的赛跑英雄)去追它, 那么阿基里斯将永远追不上乌龟.



芝诺的理论根据是：阿基里斯在追上乌龟前, 必须先到达乌龟的出发点, 这时乌龟已向前爬行了一段路程, 于是, 阿基里斯必须赶上这段路程, 可是乌龟此时又向前爬行了一段路程如此下去, 虽然阿基里斯离乌龟越来越接近, 但却永远追不上乌龟.

该结论显然是错误的, 但从逻辑上讲这种推论却没有任何矛盾这就是著名的芝诺悖论. 在此, 我们用数学的方法进行分析反驳.



设乌龟与阿基里斯起跑时的间距为 s_1, 乌龟的速度为 v , 阿基里斯的速度是乌龟的100倍, 则由乌龟爬行到 A_2 的时间与阿基里斯到达 A_1 的时间相等有

$$\frac{s_2}{v}=\frac{s_1}{100v}$$ 即 $s_2=\dfrac{s_1}{100}$ 以此类推 $s_n=\dfrac{s_{n-1}}{100}=\left(\dfrac{1}{100}\right)^{n-1}s_1$

所以, 阿基里斯在追赶乌龟时所跑的路程为

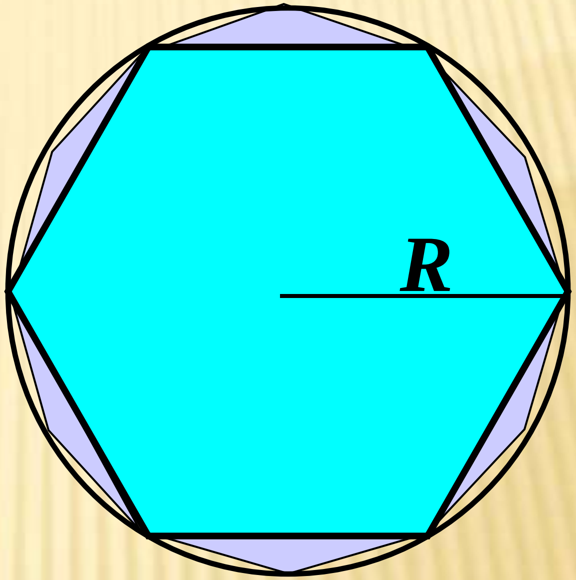
$$s=s_1+s_2+\cdots+s_n+\cdots$$
$$=s_1+\frac{1}{100}s_1+(\frac{1}{100})^2s_1+\cdots+(\frac{1}{100})^{n-1}s_1+\cdots$$
$$=s_1[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+\cdots+(\frac{1}{100})^{n-1}+\cdots]=\frac{100}{99}s_1$$

由计算可知当阿基里斯追到离起点处 $\dfrac{100}{99}s_1$ 时已经追赶上了乌龟.

第一部分　常数项级数的概念与性质

一、问题的提出

1. 计算圆的面积



正六边形的面积　a_1

正十二边形的面积　$a_1 + a_2$

正3×2^n形的面积　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

即　$A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

2. $$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

设数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

将数列的所有项按照给定的次序相加，得到表达式

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \quad (1)$$

用 S_n 表示上式的前 $\boldsymbol{n}$ 项和，即

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\quad \cdots,S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n},\cdots$$

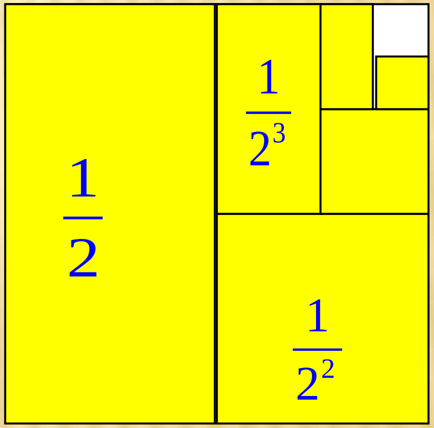
这样就得到一个数列 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$

由数列极限概念，可知数列 $\{S_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时的极限，可以看成（1）式的和.

由等比数列求和公式得 $S_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2^n}$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = 1$

所以 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots = 1$



此例说明为了解决无穷项相加

问题，按照有限与无限之间的辨证转化关系，可以通过数列极限给出其和的概念，即数项级数概念.

二、级数的概念

1. **级数的定义:** 把数列各项用加号连起来的式子

一般项

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$ 称为(常数项)无穷级数.

级数的部分和: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

部分和数列:

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\cdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

2. 级数的收敛与发散:

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{s_n\}$有极限s，即$\lim_{n\to\infty} S_n = s$，

则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 这时极限s叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的和

记作$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

如果数列$\{s_n\}$极限不存在, 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

即　常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$存在(不存在)

级数收敛时，$R_n = s - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$

称为余项.　$s_n \approx s$. 误差为$|R_n|$　$(\lim_{n\to\infty} R_n = 0)$

例1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$的收敛性.$(a \neq 0)$

解 $q \neq 1$时 $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q| < 1$时, $\because \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q| > 1$时, $\because \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

当$|q| = 1$, $q = 1$时, $s_n = na \to \infty$ 发散

$q = -1$时, 级数变为$a - a + a - a + \cdots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在 发散

例1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$ 的收敛性.$(a \neq 0$

综上所述知:
$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时,收敛,和为\dfrac{a}{1-q} \\ 当|q|\geq 1时,发散 \end{cases}$$

例2 判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$$ 的收敛性.

解 $\because \quad u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}),$

$$\therefore \; s_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2},\; \therefore$ 级数收敛，和为$\frac{1}{2}$.

三、收敛级数的基本性质

性质1 设两收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$

则：(1) $\forall \alpha, \beta \in R$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n)$ 也收敛,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha s \pm \beta \sigma$$

(2) 若 $a_n \le b_n (\forall n \in \mathbb{N}_+)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

特别地, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 亦收敛.

级数的每一项同乘一个不为零的常数, 敛散性不变.

性质2 在级数中任意删去、添加、改变有限项不改变该级数的敛散性.

例如 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$也收敛 $(k \geq 1)$.

且其逆亦真.

证明

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

部分和 $S_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = S_{n+k} - S_k$,

则 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+k} - \lim_{n\to\infty} S_k = s - S_k$. $\therefore \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$收敛

性质3 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$ 收敛的必要条件

级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ 则 $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$

而 $R_n = s - S_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n = 0 \Leftrightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

注意

1. 如果级数的通项不趋于零, 则级数发散;

例如 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

2. 通项趋于零只是收敛的必要条件, 非充分条件.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数是否收敛?

例 证明：数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 发散。

证 $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in N_+$,当 $n > N$,

$$\exists\ p = n \in N_+,$$

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| = \left| a_{2n} - a_n \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

故 $\{a_n\}$不是柯西数列，故发散。

性质 4 不改变收敛级数各项顺序，任意加括号后所成的新级数仍收敛，且其和不变.

证明 $(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+(u_6+u_7+u_8)+\cdots$

$$\sigma_1=s_2,\quad \sigma_2=s_5,\quad \sigma_3=s_8,\quad \cdots,\sigma_m=s_n,$$

由归并原理知, $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s.$

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

Cauchy收敛原理

定理1.1 Cauchy收敛原理

级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+,$

使得$\forall p \in N_+$,当$n > N$时,

恒有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$

$$\boxed{\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon.}$$

例 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$收敛.

7.1 − B1.　设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, $a_n > 0$, $b_n > 0$

证明: