

磁场对表面导电轻球振荡的作用效果研究

封皓文 蒋琪 金泊含 林圣翔

(西安交通大学, 陕西 西安 710049)

摘 要: 本文针对一个表面导电且悬挂在一根细导线上的轻球, 研究了当球绕着其垂直轴旋转 (从而扭转导线) 并释放时磁场的存在会如何影响球的振荡, 拟合并建立了轻球的运动方程, 并用实验进行了方程的验证. 本文从理论上分析出了无磁场、平行于转轴的磁场和垂直于转轴的磁场三种情况下轻球振荡的运动方程, 并进行了实地实验. 通过控制变量法, 我们在三种情况下分别采用 Tracker 进行了轻球转动时时间、偏转角度和角速度等数据的收集, 采用 MATLAB 进行了偏转角度与时间关系的数据拟合分析, 再将理论预测值与实际数据进行比较, 对理论方程进行了修正. 我们建立起了在无磁场和匀强磁场情况下轻球的运动方程, 方程揭示了匀强磁场对轻球运动的影响, 同时得出了结论: 与无磁场情况下的轻球振荡相比, 当匀强磁场平行于转轴时, 磁场对轻球的振荡基本没有影响; 当匀强磁场垂直于转轴时, 磁场会降低轻球振荡的振幅, 同时延长轻球振荡的周期. 本研究的结果对于深入理解表面导电物体在磁场中的运动情况具有重要意义, 并为相关领域的应用提供了实验依据和理论支持.

关键词: 磁场; 轻球; 振荡; 拟合

Study on the Effect of Magnetic Field on Surface Conductive Light Ball Oscillation

FENG Haowen JIANG Qi JIN Bohan LIN Shengxiang

(Xi'an Jiaotong University, Shaanxi Xi'an 710049)

Abstract: This study investigates a light ball with a conductive surface suspended on a thin wire. When the ball rotates around its vertical axis (thus twisting the wire) and is released, how the presence of a magnetic field affects the oscillation of the ball is studied. The motion equation of the light ball is simulated and established, and the equation is verified by experiments. In this paper, the equations of motion for the oscillation of a light sphere under the conditions of no magnetic field, a magnetic field parallel to the axis of rotation and a magnetic field perpendicular to the axis of rotation are analyzed theoretically, and field experiments are carried out. Through control variable method, Tracker was used to collect data such as time, deflection angle and angular velocity when the light ball rotates in three cases, MATLAB was used to conduct data fitting analysis of the relationship between deflection angle and time, and then the theoretical predicted value was compared with the actual data, and the theoretical equation was revised. We have established the equations of motion of the light sphere under the condition of no magnetic field and uniform magnetic field, and reveal the effect of uniform magnetic field on the motion of the light sphere. At the same time, it is concluded that compared with the oscillation of the light ball under the condition of no magnetic field, when the uniform magnetic field is parallel to the axis of rotation, the magnetic field has no effect on the oscillation of the light ball. When the uniform magnetic field is perpendicular to the axis of rotation, the magnetic field will reduce the amplitude of the light ball oscillation and lengthen the period of the light ball oscillation. The results of this study are of great significance for in-depth understanding of the movement of surface conductive objects in magnetic fields, and provide experimental basis and theoretical support for the application in related fields.

Keywords: Magnetic field; Light ball; Oscillation; Data fitting

1 引言

电与磁之间的相互转化和相互作用已经广泛地应用于我们的生活,并对我们的生产和生活产生了巨大的影响。例如,利用电磁感应原理制作的线性马达可用作磁悬浮列车的推进系统,利用涡流制动原理制作的减速装置可用作磁悬浮列车的刹车系统。这一原理甚至可以应用于航空航天领域,例如用于保持航天器和空间物体之间的固定方向。而"振荡球"这个问题中涉及的电磁原理与生活有着密切的联系。基于题目的趣味性和实验的便捷性,我们小组决定研究"振荡球"这个问题。

关于在磁场中运动的旋转导电轻球这一问题,早已成为很多研究者关注的重点。Arago (1824) 发现旋转物体的感应磁现象^[1], 随后 Faraday (1831) 用电磁感应帮助解释了这一现象,解决了电磁之间相互感应关系问题^[2], Hertz (1880) 分析并解决了在非均匀恒定磁场中以任意速度旋转的空心球的运动问题,为研究一般性问题提供了一个非常好的理论和思路^{[3][4]}。Halver-son (1964) 指出了均匀磁场中旋转的空心球体扭矩的计算方法^[5]。Youngquist 和 StarrFrederick (2018) 按照磁场类型分析了三种情况下导电轻球以某一初始角速度在磁场中的运动^[6]。以上文献为我们提供了解决磁场对空心球运动

的阻碍作用的方法和思路。侯东晓、刘彬和时培明 (2010) 指出了扭转动力学中的对于轴系系统扭转的多种建模思路和计算方法,为我们搭建扭摆模型和解决导线对空心球运动牵扯与阻碍作用的提供了很大帮助^[7]。

上述文献提供了很多对于该旋转球运动分析的研究角度和研究方法,对于我们建立模型和进行实验都非常有帮助。我们搭建了相关实验装置并进行了具体实验,文献中所提及的思考角度和实验方法我们都有所参考。

我们本次的研究问题是对于一个表面导电且悬挂在一根细导线上的轻球,当球绕着其垂直轴旋转(从而扭转导线)并释放,磁场的存在会如何影响球的振荡。研究目的是要解决这一问题,拟合并建立轻球的运动方程,并用实验进行方程的验证。我们解决了匀强磁场对轻球振荡的影响,建立了关于这一情况下的基本物理模型,从理论和实验上推导出了运动公式,且得到了与实验相比非常好的拟合效果。我们组的论文内容将主要包括以下几点:

- (1) 研究方法,实验材料和装置;
- (2) 理论研究和推导;
- (3) 实验结果分析和数据拟合;
- (4) 对实验结果和缺陷的讨论。

2 研究方法

2.1 理论推导

2.1.1 无磁场

在无磁场的影响下, 导线与轻球组成一个扭摆系统 (如图 1). 轻球在导线的扭矩作用下会进行扭振运动 (或角振动). 假设球壳厚度与质量分布均匀, 球壳的电导率在各处均匀, 球壳的半径远大于球壳的厚度, 且球壳为非铁磁性材料, 即不发生磁化. 为不引起误会, 本文理论推导分析中涉及到物理量的符号均列在附录 C 中以备查找, 我们但后文中仍然会对这些物理量作出说明. 本文取轻球未开始扭振前的位置为平衡位置, 对轻球进行受力分析, 首先轻球会受到导线对球的扭力, 使球趋向平衡位置运动, 假设导线的扭转系数为常数, 且不随初始转动的周数发生变化. 同时假设导线发生了完全弹性形变, 即扭转不会时导线发生任何永久性形变. 记导线扭转系数为 k , 偏离平衡位置的角度为 θ , 则可求得导线对球的扭矩 M_1 :

$$M_1 = -k\theta \quad (1)$$

同时由于导线自身存在阻尼, 球还会受到一个导线对它的阻尼扭矩, 假设导线阻尼系数为一个常数, 记为 c . 设球转动的角速度为 ω , 假定阻尼扭矩与球转动的角速度成正比, 则阻

尼扭矩 M_2 为:

$$M_2 = -c\omega \quad (2)$$

设球的转动惯量为 J , 球转动的角加速度为 β , 合扭矩为 M , 则由转动定律可建立关于 θ 的二阶常微分线性微分方程:

$$M = J\beta = -k\theta - c\omega \quad (3)$$

即

$$k\theta + c\dot{\theta} + J\ddot{\theta} = 0 \quad (4)$$

解这个方程, 我们可以得到关于偏离平衡位置的角度 θ 与时间 t 的关系 (n 为扭转导线的圈数):

$$\theta(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (5)$$

其中

$$\gamma = \frac{c}{2J}, \omega = \sqrt{\frac{k}{J} - \gamma^2}$$

$$C_1 = 360n, C_2 = \frac{1}{C_1\omega\gamma}$$

从而我们得到无磁场条件下轻球运动公式, 即式(5).

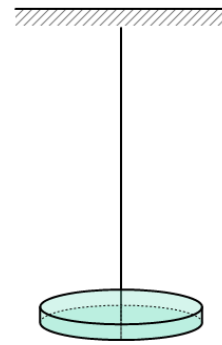


图 1: 扭摆模型示意图

2.1.2 平行于转轴的匀强磁场

为方便解决问题, 我们先对球体运动情况进行简化, 不考虑导线对球

的扭转作用, 单独考虑磁场对有初始角速度的球壳的运动的影响.

在阐述匀强磁场的两种情况前, 先进行一个一般性的讨论. 我们知道, 带电的轻球会在磁场中运动, 可能的两个原因是受到了洛伦兹力和电场力. 现选取球上一个具体带电粒子作为研究对象, 则可暂时不考虑电荷 q 的问题. 下面讨论带电粒子受到的洛伦兹力和电场力.

以球心为坐标原点, 建立一个空间直角坐标系, 记球的半径为 R , 原点到球面上一点的连线与 z 轴正方向之间的角为 θ , 记原点 O 到点 P 的连线在 xOy 平面的投影与 x 轴正方向之间的夹角为 φ (如图 2). $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为三个坐标轴正方向单位向量, 这样我们可以建立球面上一点的位矢 \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \quad (6)$$

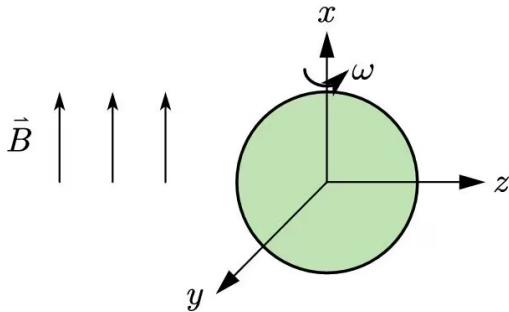


图 2: 平行于转轴的匀强磁场示意图

假设角速度 ω 和磁感应强度 \mathbf{B} 满

足

$$\omega = \omega \mathbf{i}, \mathbf{B} = B \mathbf{i} \quad (7)$$

那么, 合洛伦兹力可以表示为:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\omega R B \sin \theta (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \quad (8)$$

由于球壳很薄, 所以不考虑粒子在球体径向方向的移动, 也就不需要考虑径向方向的洛伦兹力, 只需要切向方向的洛伦兹力. 将洛伦兹力沿切向和径向方向分解, 如图 3 所示. 注意到

$$\cos \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}$$

那么洛伦兹力可以表示为:

$$\mathbf{F}_L = q\omega R B \sin \theta (\sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}) \quad (9)$$

切向方向洛伦兹力即为

$$\mathbf{F}_\tau = q\omega R B \sin \theta \cos \theta \boldsymbol{\theta} \quad (10)$$

下面讨论切向电场力: 记电荷密度为 ρ , 电流密度为 \mathbf{J} , 时间为 t . 由于球壳的最终状态是稳态, 所以电荷密度与时间无关, 由电荷守恒方程得:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

记球的电导率为 σ , 再由广义欧姆定律:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (12)$$

上述两个方程联立可求得一个关于电场的方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13)$$

记真空介电常数为 ε_0 , 由高斯定理可知电场与球壳表面电荷密度关系:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14)$$

联立上述方程,可求得球壳表面电荷密度,再进行切向和径向的分解,取切向电荷密度

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\tau \\ &= -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\omega R B \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (15) \\ &= -\varepsilon_0 \omega B (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

从该方程中可看出电荷在球面上的分布是不均匀的,与 θ 有关,如图 4 所示.

再由泊松方程我们可求电势 Φ ,由电势与电场关系我们即可求得电场

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

因此,我们可以得到切向的电场强度

$$\mathbf{E}_\tau = -\omega R B \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (16)$$

最后求得电场力

$$\mathbf{F}_E = q \mathbf{E}_\tau = -q \omega R B \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (17)$$

由方程(9)和方程(17)可以看出,洛伦兹力与电场力大小相等,方向相反,合力为零,说明球面上所有电荷都是受力平衡的,且球面上没有电流.因此可以得出结论,当磁场平行于转轴时,磁场对球的扭振没有影响,因此球的运动仍然遵循方程(5).

为使结果更为严谨,下面我们来解释一些容易产生的困惑.一个很容易想到的问题是,电荷随球体旋转也会产生一个绕 z 轴的环形电流,在磁场作用下,球体自身一定会受到一个磁场对它的扭矩.但实际上球的转动速度很慢,且 ε 数量级特别小,由方

程(15)知,球壳表面电荷密度也会很小,所以产生的电流也会很小,几乎可以忽略不计,因此我们不作考虑.

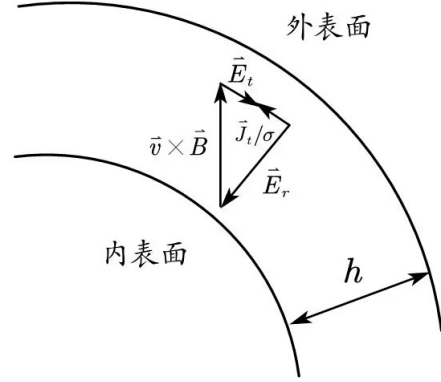


图 3: 洛伦兹力沿径向切向分解示意图

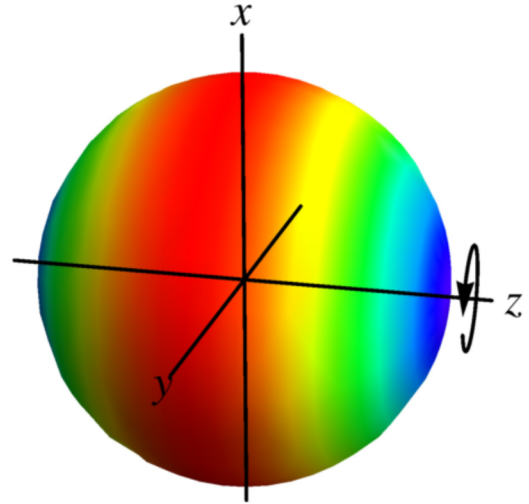


图 4: 球面上电荷分布示意图 1

2.1.3 垂直于转轴的匀强磁场

下面我们再讨论均匀磁场垂直于转轴的情况,前面的推导思路与之前的思路基本一致,相关物理量的记号同上.

以球心为坐标原点,建立一个空

间直角坐标系, 如图 5. 由此我们可以得到球面上一点的位矢

$$\mathbf{r} = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \quad (18)$$

由于要使磁场方向垂直于转轴方向, 这里我们改变角速度方向, 磁场方向与前面保持一致:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i}, \mathbf{B} = B \mathbf{k} \quad (19)$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = -\omega R(\cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{k}) \quad (20)$$

记关于变量 θ, φ 的二元函数为 $f(\theta, \varphi), g(\theta, \varphi), h(\theta, \varphi)$, 其中 f, g, h 满足

$$f(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi$$

$$g(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta \cos \varphi$$

$$h(\theta, \varphi) = \cos \theta \sin \varphi$$

则合洛伦兹力为:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= -q\omega BR \cos \theta \mathbf{i} \\ &= -q\omega BR(f\mathbf{r} + g\boldsymbol{\theta} - h\boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (21)$$

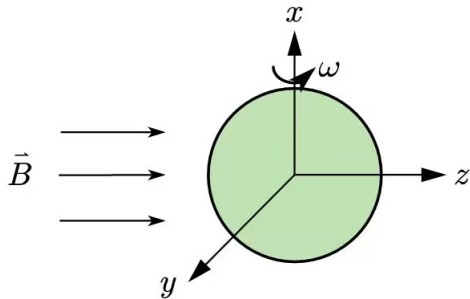


图 5: 垂直于转轴的匀强磁场示意图

依然将洛伦兹力沿切向和径向方

向分解, 得切向方向的洛伦兹力:

$$\mathbf{F}_\tau = -q\omega BR(g\boldsymbol{\theta} - h\boldsymbol{\varphi}) \quad (22)$$

下面讨论切向电场力. 由于球壳的最终状态是稳态, 所以电荷密度与时间无关, 由电荷守恒方程得:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

再与广义欧姆定律联立, 可求得关于电场的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_\tau = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\tau \quad (24)$$

再与高斯定律联立, 求得球壳表面电荷密度, 同时进行切向和径向的分解, 取切向电荷密度

$$\frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\tau$$

那么, 有

$$\begin{aligned} \rho_t &= -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\tau \\ &= -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\omega BR(g\boldsymbol{\theta} - h\boldsymbol{\varphi})) \\ &= -3\varepsilon_0 \omega B \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (25)$$

这里得到的结果与平行转轴磁场时所得结果不同, 如图 6 所示.

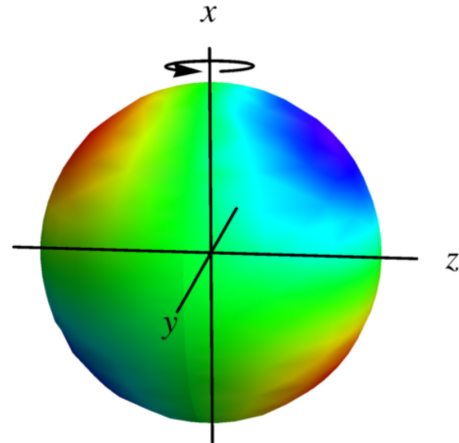


图 6: 球面上电荷分布示意图 2

然后由泊松方程和电场电势关系

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

可求得切向方向电场力:

$$\mathbf{F}_\tau = q\mathbf{E}_\tau$$

$$= -\frac{q\omega RB}{2}(\cos 2\theta \cos \varphi \mathbf{\theta} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{\varphi})$$

(26)

由方程(22)和方程(26)能看出此时洛伦兹力和电场力并非等大反向, 它们没有相互抵消, 也就是说此时球壳表面会产生电流, 因此球壳一定会受到一个安倍力的扭矩. 我们先根据广义欧姆定律求出球壳表面电流密度

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$= -\frac{\sigma\omega RB}{2}(\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \cos \varphi \mathbf{k})$$

(27)

记球壳厚度为 h , 从而可以求得安倍力

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L &= \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \\ &= \frac{\sigma\omega RB^2 h}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta \mathbf{j} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(28)

而扭矩

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \\ &= \frac{\sigma\omega RB^2}{2} \int_V \mathbf{r} \times (\cos \theta \mathbf{j}) dV \quad (29) \\ &= -\frac{2\pi\sigma\omega B^2 R^4 h}{3} \mathbf{i} \end{aligned}$$

由上述方程可知, 与无磁场情况下相比, 垂直于转轴的磁场会对球壳产生一个电磁场力的扭矩, 设常数 α

满足

$$\alpha = \frac{2\pi\sigma R^4 h}{3}$$

对方程(4)修正得:

$$k\theta + c\dot{\theta} + J\ddot{\theta} + \alpha B^2 \dot{\theta} = 0 \quad (30)$$

解得

$$\theta(t) = e^{-\gamma' t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (31)$$

其中

$$\gamma' = \frac{c + \alpha B^2}{2J}, \omega = \sqrt{\frac{k}{J} - \gamma'^2}$$

$$C_1 = 360n, C_2 = \frac{1}{C_1 \omega \gamma'}$$

此时该方程即为磁场垂直于转轴时轻球的运动方程.

2.2 实验研究

我们在西安交通大学的物理实验室中于 2023 年 4 月至 5 月进行了探究实验, 主要目的是在实验中观察小球运动情况并收集数据, 用理论推导所得公式进行数据拟合, 以验证理论推导的可靠性和有效性.

在实验中, 本文对三个变量进行了系统研究, 分别是拴住导线扭转的圈数、磁场大小和方向. 通过控制变量法, 我们可以独立地观察与分析每个变量对球壳振荡运动的影响.

首先, 我们制备了导电的不锈钢球壳, 并使用导电喷剂将棉线涂上一层石墨漆, 使其具有导电性. 然后, 将棉线拴在球壳正上方, 并将导线固定在铁架台上. 在球壳底部贴上一个小小纸条, 并用马克笔进行标记, 以便在

实验中能够清楚地观察球壳的运动情况. 在实验过程中, 我们首先将导线扭转一定的圈数, 然后释放球壳, 同时使用手机拍摄视频记录球壳的运动. 利用 Tracker 等视频处理软件, 可以获取球壳偏离平衡位置的角度和瞬时角速度随时间的变化数据. 最后, 我们将实验得到的数据导入 MATLAB 等数学建模软件进行数据拟合. 通过拟合实验数据, 我们可以建立起球壳偏离平衡位置的角度和瞬时角速度与时间的函数关系, 从而建立一个大致模型.

进一步地, 我们将理论推导得到的运动方程与实验数据进行比较, 以验证理论推导的可靠性和有效性. 通过比较理论模型与实验数据的吻合程度, 我们可以评估理论模型的准确性, 并讨论和分析实验结果的局限性.

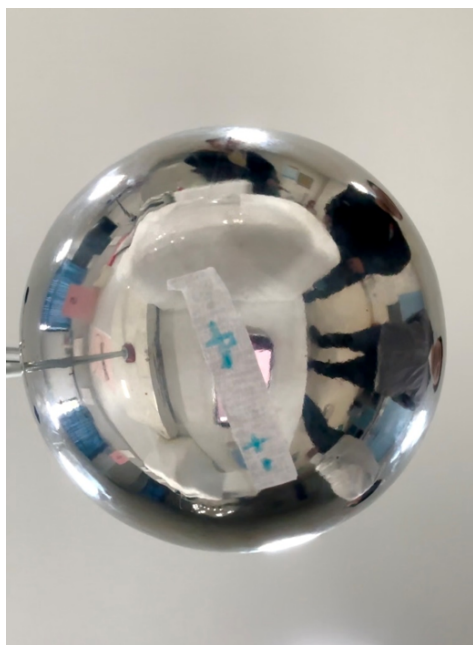


图 7: 对球底部的标记

2.2.1 无磁场

方法如上所示, 摆放图片见下



图 8: 无磁场摆放图片

2.2.2 平行于转轴的匀强磁场

用一个与铁架台等高的纸盒罩住铁架台, 在纸盒正上方放置一块磁铁, 其余器材布置与前面中相同 (具体装置摆放见图 9). 磁铁产生的磁感应强度由手机磁力计测出.



图 9: 平行转轴磁场摆放图片

2.2.3 垂直于转轴的匀强磁场

将两块大小一样的磁铁放在泡沫块上, 间隔一定距离, 使两块磁铁中心的连线与球壳中心对齐, 仍然采用前面所叙述的方法进行实验准备、记录和统计数据. 我们通过改变两块磁铁间的距离来改变磁场大小 (具体装置摆放见下图). 磁铁产生的磁感应强度由手机磁力计测出.

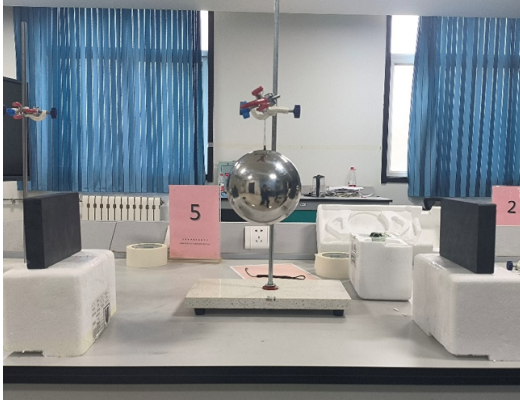


图 10: 垂直转轴磁场摆放图片

3 实验结果与说明

在前面的理论推导中, 我们已经得到了三种情况下轻球的运动方程, 见方程(5)和(31).

由于实际试验中的一系列测量问题, 为了使实验数据中 θ 与理论中的 θ 对应, 我们重新将 θ 记为轻球偏离释放位置时的角度, 则上述运动方程可以改写为:

$$\theta = Ae^{-Bt} \sin(\omega t + \varphi) + D \quad (32)$$

我们将每种情况下由 Tracker 记录

的关于角度与时间和角速度与时间的数据导入 MATLAB 进行数据拟合 (拟合和作图的代码见 E) 建立起轻球运动的基本函数模型, 然后再将理论预测的数据与实际数据进行比较, 以验证理论的准确性和有效性. 在进行实验前, 我们已通过测量球壳的振幅衰减系数与周期测量等实验手段测得了理论方程中的四个常数 c, J, k, α (数值见附录 B).

我们将理论所得方程与实验数据和 MATLAB 拟合的函数进行比较讨论, 以验证理论的准确性和有效性. 在进行每种情况讨论之前, 要说明的是, 本文提到的拟合的有效性和准确性主要针对原始数据的前 6000 份 (约旋转开始后的 200 秒以内). 因为当时间足够长时, 轻球振荡的角速度会变的很小, 此时除磁场和导线对球的阻力之外的其他阻力 (如空气阻力) 对轻球振荡的影响将变得非常显著, 不能再忽略不计, 因此此时的方程(5)和方程(31)不再适用于轻球的运动.

3.1 无磁场

我们通过 Tracker 收集了在无磁场情况下, 扭转导线圈数分别为 15 圈和 20 圈时轻球旋转角度与时间关系的数据 (表 1.1 和表 1.2). 我们用 MATLAB 按照式(5)进行了函数拟合, 得到的拟合函数作图如下所示:

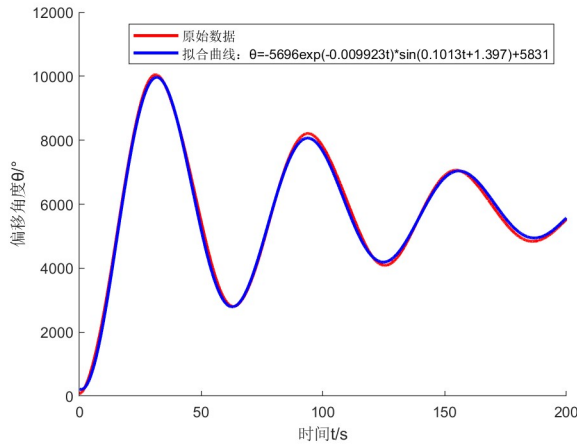


图 11: 转动 15 圈函数图像

比较, 如下所示:

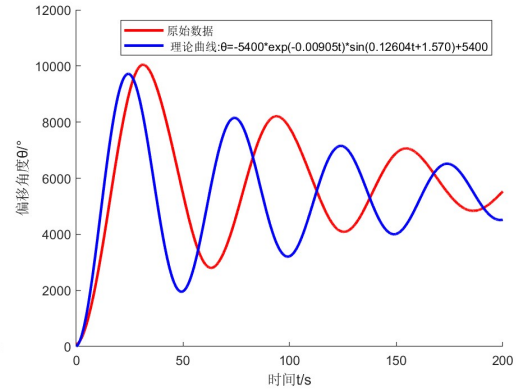


图 13: 转动 15 圈理论实验比较

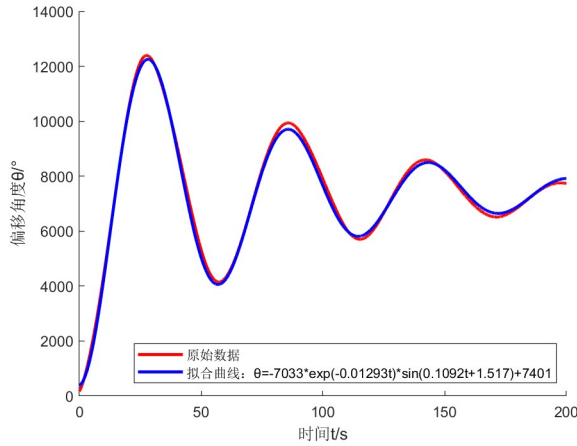


图 12: 转动 20 圈函数图像

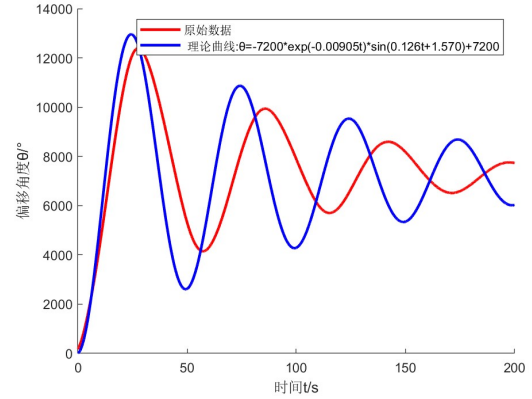


图 14: 转动 20 圈理论实验比较

由图 11 和 12 可看出, MATLAB 所拟合的函数与原数据曲线非常接近, 两图像 R^2 分别为 0.9938, 0.9914, 证实了我们的理论具有一定可靠性, 同时得到了实验中 θ 与 t 的函数关系.

由方程(15)我们可以从理论上得到 θ 与 t 的函数关系, 在 MATLAB 中分别作出转动 15 圈与 20 圈时理论所得函数的图像, 并将其与数据曲线

由图 13 和图 14 可看出理论曲线与数据曲线的偏差非常大, 我们通过多次实验推测原因可能有两个. 第一, 导线自身的扭转能力不好, 使得轻球在振荡过程中平衡位置发生了改变, 即 C_1 与 C_2 的几何平均数并非恒等于在 $360n$, b 也并未局限在 $360n$, 而是在原位置上的一个邻域内波动. 为使理论更符合于实际, 我们考虑平衡位置的波动误差, 波动范围约为 $(360n \pm$

500) 度. 第二, 我们推测可能是导线在扭转过程中的扭转常数发生了变化, 而我们在理论中则是假定导线扭转常数不随导线扭转圈数变化而变化. 为符合实际情况, 我们需要考虑这种波动误差, 波动范围为 10^{-5} 和 3×10^{-5} 之间. 考虑上述两个误差波动后, 我们重新进行一个理论上的修正, 可得一个新的最符合原始数据的新的方程 (具体方程见附录 D). 再将其与数据曲线和拟合曲线比较, 如下图:

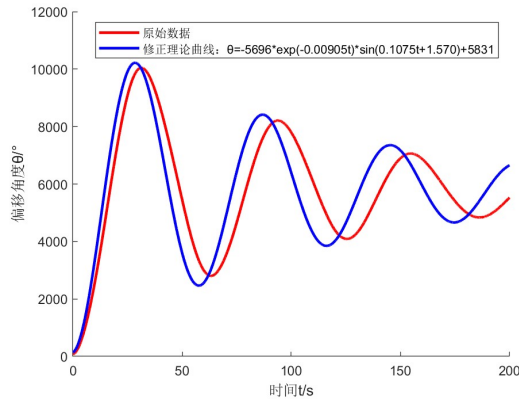


图 15: 转动 15 圈修正后比较

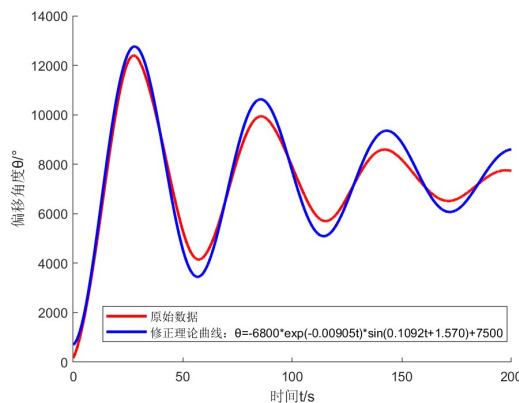


图 16: 转动 20 圈修正后比较

3.2 平行于转轴的匀强磁场

我们通过 Tracker 收集了在磁场平行于转轴情况, 扭转导线圈数为 20 圈时轻球旋转角度与时间关系的数据 (表 2). 我们用 MATLAB 进行了函数拟合, 得到的拟合函数作图如下:

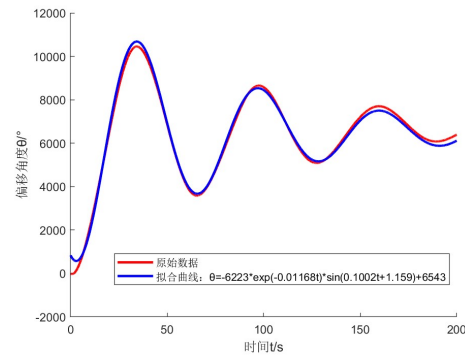


图 17: 平行转轴磁场函数图像

由上图看出, MATLAB 拟合函数与原曲线非常接近, 其 $R^2 = 0.9938$, 证实了我们的理论具有可靠性, 同时得到了实验中 θ 与 t 的函数关系.

由理论推导知, 磁场平行于转轴时, 磁场对轻球的振荡不会产生影响, 故函数图像关系仍为上图. 再将其与数据曲线比较, 如下所示:

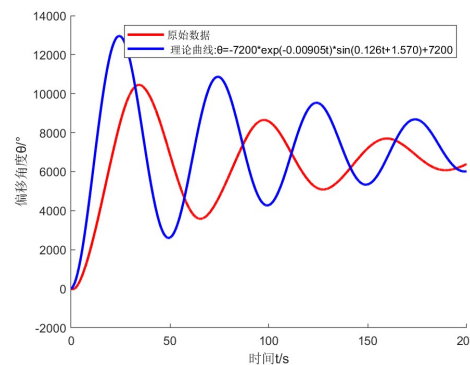


图 18: 平行转轴磁场理论实验比较

由图 16 可以看出,理论曲线和实际曲线也存在一定偏差. 依然考虑两种误差波动影响,我们重新进行一个理论上的修正,可得一个新的最符合原始数据的新的方程(具体方程见附录 D). 再将其与数据曲线和拟合曲线比较,如下图:

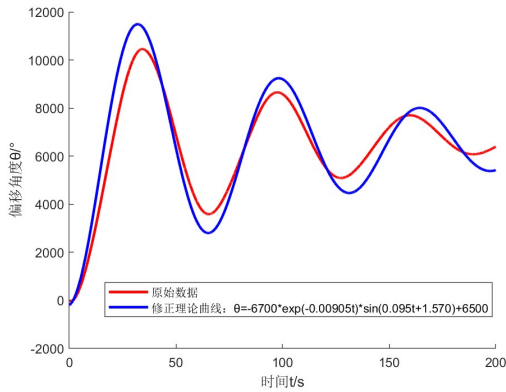


图 19: 平行转轴磁场修正后比较

此时,通过比较两函数曲线,仍可以看出二者存在一定偏差,不过,该偏差在可接受范围之内. 此时产生的偏差可能有两个原因,一是空气阻力等因素使得轻球振荡运动振幅变小,二是我们所搭建的磁场由于受到实际空间等因素的影响,并不完全是一个匀强磁场,有 $\pm 50\mu\text{T}$ 偏差,因此磁场会对轻球振荡产生实质性影响,而不是完全遵循理论推导中关于平行于转轴的匀强磁场对轻球振荡无影响的原理和结论. 但相较于图 18,本偏差是可以接受的,同时在一定程度上从实验上证明了理论推导的可靠性.

3.3 垂直于转轴的匀强磁场

我们通过 Tracker 收集了在磁场垂直于转轴,扭转导线圈数为 20 圈情况下,磁场强度分别为 $2800\mu\text{T}$ 和 $3200\mu\text{T}$ 时轻球旋转角度与时间关系的数据(表 3.1 和表 3.2). 我们用 MATLAB 进行了函数拟合,得到了拟合函数(具体方程见附录 D),原始数据与拟合函数图像见下图:

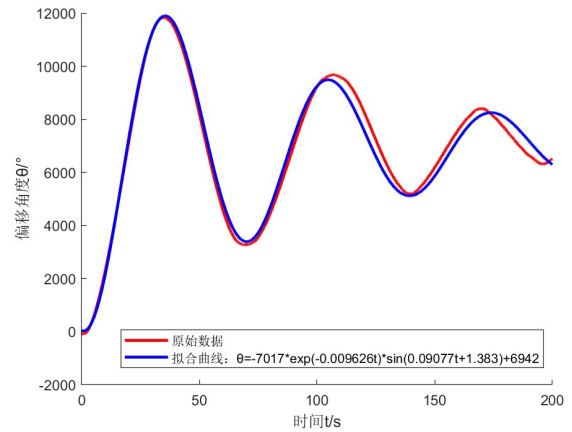


图 20: $2800\mu\text{T}$ 磁场函数图像

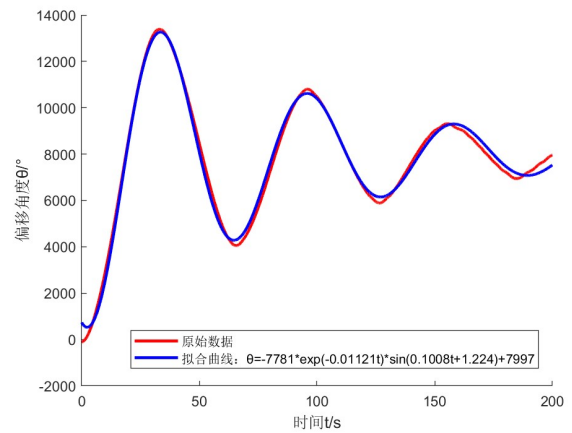


图 21: $3200\mu\text{T}$ 磁场函数图

由图 20 和图 21 看出, MATLAB 所拟合的函数与原数据曲线非常接近, 其 R^2 大小分别为 0.9849 和 0.9930, 证实了我们的理论具有可靠性, 同时得到了实验中 θ 与 t 的函数关系.

由理论推导的运动方程可得理论上轻球运动方程 (具体方程见附录 D). 再将其与数据曲线比较, 见下图:

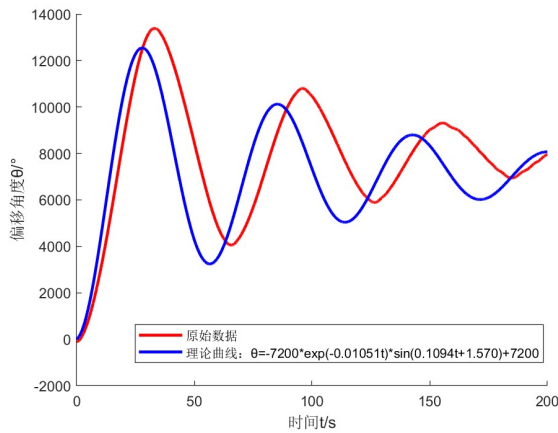


图 22: 2800 μ T 磁场理论实验比较

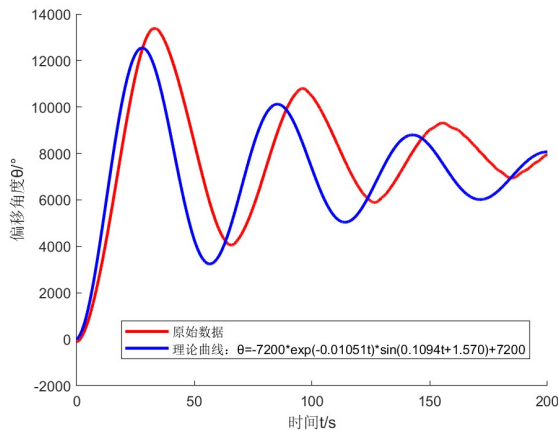


图 23: 3200 μ T 磁场理论实验比较

由图 22 和 23 可以看到理论曲线和实际曲线也存在一定偏差, 依然考

虑两种误差波动影响, 我们重新进行一个理论上的修正, 可得一个新的最符合原始数据的新的方程 (具体方程见附录 D).

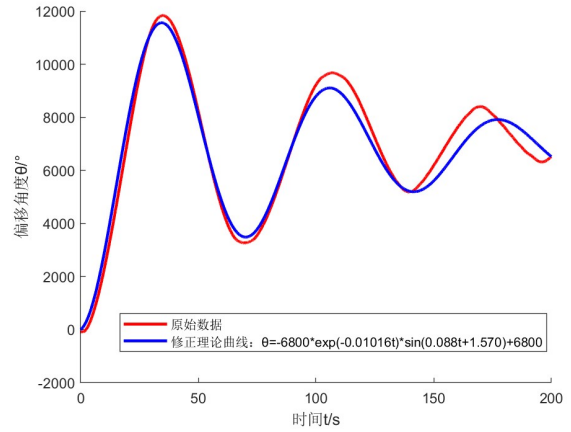


图 24: 2800 μ T 磁场修正后比较

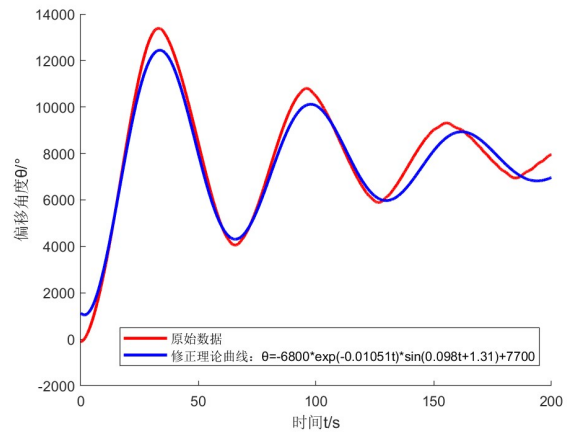


图 25: 3200 μ T 磁场修正后比较

这里我们刻意将方程中指数前的系数均改成 -6800 . 此时我们重新观察导线扭转 20 圈时, 无磁场情况和磁场垂直于转轴且磁场磁感应强度大小不同的情况下轻球的运动方程 (具体方程见附录 D).

通过比较上述方程,我们可以得出两个结论:

首先,当磁场垂直于转轴时,相比于无磁场情况, B (指代公式(31)中系数 B)增大,在函数图像上表现为振幅减小,在物理上表现为轻球振荡的振幅减小,因此垂直于转轴的磁场会减小轻球振荡的振幅.

其次,当磁场垂直于转轴时,相比于无磁场情况, ω 减小,在图像上表现为函数周期增大,在物理上表现为轻球振荡的周期延长.

因此我们可以得出结论,垂直于转轴的磁场会使轻球振荡的振幅减小,且使振荡周期增大,轻球的运动满足我们理论推导中得到的方程.

同时必须要指出的是,根据方程,外界磁场越大,轻球振荡的振幅会减小,周期会增大.但通过比较两个不同磁场下的轻球方程不难发现,轻球振幅的变化满足运动方程的推论,而周期却随着磁场的增大而变小,与方程的推论相悖.我们推测有两个原因,一是这只是因为实验次数过少或者操作上的不规范导致的失误,二是轻球过大导致磁场对轻球运动的影响太弱,产生不了方程推论所描述的现象.在理论计算过程中我们发现,我们所采用的轻球过大,导致外界磁场的对球产生的扭矩对轻球的作用比较弱,实验现象并不明显.

3.4 一般的匀强磁场

本研究中之所以没有涉及这方面的理论和实验研究,是因为一个一般的匀强磁场都可以分解成一个平行于转轴的磁场和另一个垂直于转轴的磁场,因此不难预见一个一般匀强磁场的作用效果与其按平行与垂直转轴方向分解后与转轴方向垂直的分磁场的作用效果等价.这一情况又可以转化为一个垂直于转轴的匀强磁场的作用效果的讨论,而这又是本研究的一个关注重点,在前面已经进行了详细的论述,因此不再赘述.

4 实验缺陷和改进

从上述三种情况的讨论中可以看出,我们通过理论推导所得的轻球运动方程,在经过一系列修正后,基本可以模拟实验中实际情况的轻球运动,拟合效果良好.然而,需要指出的是,本研究中仍存在很多不可忽视的缺陷.

首先,实际实验的有效性和可靠性需要进一步考察.由于空间受限和时间紧迫,我们未能进行更多的对照实验以收集更多的数据,并未进行充分的拟合验证.特别是磁场平行于转轴的情况只进行了一次实验,缺乏对照实验.因此,实验次数过少会导致实验存在一定的偶然性,从而削弱了证明的可靠性和有效性.

其次,受仪器设备所限,理论推

导中的四个常数 c, k, J, α 都不是通过实际实验测得的, 而是根据实际实验数据计算分析出来的. 因此, 与实际值相比可能存在一定的偏差, 但我们并不了解这种偏差的程度. 这将导致理论得到的方程也存在一定程度的偏差. 此外, 由于磁铁自身的缺陷, 无法产生完全均匀的磁场, 球体附近的磁场并不是均匀的, 存在约为 $\pm 50\mu\text{T}$ 的波动. 尤其对于磁场平行于转轴的情况, 我们采用搭纸盒的方法构建匀强磁场时, 形成的磁场与理想的匀强磁场存在较大差距. 此外, 由于手机磁力计精确度有限, 测得的磁场也会存在一定的误差.

最后, 由于放置仪器时的疏漏, 以及未能正确估计磁场强度的大小, 我们将轻球和磁铁长时间放在一起, 导致球体被磁化, 而产生了额外的干扰实验的因素.

综上所述, 在接下来的实验中, 为建立更稳定的匀强磁场, 我们将会采用亥姆霍兹线圈来搭建匀强磁场, 并采用专业磁力计测出磁场, 以减小实验误差. 此外, 在时间充裕的情况下,

我们会进行更多组的对照实验, 比如更多次地改变匀强磁场大小、改变导线扭转圈数、导线长度和轻球半径等, 以探究更多因素对轻球振荡的影响, 并进行更多次的拟合, 以获得更准确、有效和可靠的结果. 基于我们现有的理论推导和实验验证, 我们推测本实验中平行于转轴情况和垂直于转轴情况下轻球运动方程会得到更好的证明和拟合数据. 另外, 我们会采用更好的实验手段和设备来测出理论推导的四个常数, 如使用欧姆表测出球壳电导率, 采用扭摆法测出球壳转动惯量等. 受时空限制以及能力所限, 我们未能深入探究非匀强磁场下磁场对轻球振荡的影响, 做出的实验也并不理想. 因此在未来的实验中, 我们将会进一步研究非匀强磁场对轻球振荡的影响, 以完善我们对这个问题的解答.

最后的最后, 特别感谢物理学院毛胜春老师对我们本次研讨课实验提供的支持与指导, 感谢赵述敏、胡昊、张乐三位老师在我们汇报过程中给予的帮助与鼓励.

参考文献

- [1] Babbage C, Herschel W F J. Account of the Repetition of M. Arago's Experiments on the Magnetism Manifested by Various Substances during the Act of Rotation[J]. Philosophical Transactions, 1825, 115(0).

- [2] C. J. O. Garrard, "Faraday Lecture," in *Electronics and Power*, vol. 32, no. 8, pp. 569-, August 1986, doi: 10.1049/ep.1986.0349.
- [3] G. F F G. Hertz's Miscellaneous Papers[J]. *Nature*,1896,55.
- [4] H. Hertz. On induction in rotating spheres, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10:64, 451-452, DOI: 10.1080/14786448008626960.
- [5] P. R. H ,H. C. Torque on a Spinning Hollow Sphere in a Uniform Magnetic Field[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics*,1964,ANE-11(2).
- [6] Youngquist R. C. ,Nurge M. A. ,Starr S. O. ,et al . A slowly rotating hollow sphere in a magnetic field: First steps to de-spin a space object[J]. *American Journal of Physics*, 2016, 84(3):181-191.
- [7] 侯东晓, 刘彬, 时培明. 旋转机械传动系统连续扭振动力学建模与仿真 [J]. *中国机械工程*,2010,21(01):30-34.

附录

A 实验所用轻球参数

轻球各项参数	数据
质量	126.95g
直径	11.824cm
厚度	0.10cm
电导率	$9 \times 10^6 \text{S/m}$

B 论文中涉及到的常数

常数	数据
$c/(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$	2.204×10^{-5}
$J/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	1.217×10^{-3}
$k/(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$	$1 \times 10^{-5} - 3 \times 10^{-5}$
$\alpha/(\text{S} \cdot \text{m}^4)$	3.458×10^{-1}

C 论文中涉及到的物理量及其含义

物理量	含义
M	扭矩
k	导线扭转常数
θ	偏离平衡位置的角度
ω	角速度
β	角加速度
c	导线的扭转阻尼常数
J	转动惯量
t	时间
n	导线扭转圈数
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	空间直角坐标系的三个方向单位向量
$\mathbf{r}, \theta, \varphi$	球坐标系的三个方向单位向量
θ (仅针对于直角坐标系中 θ)	原点到球面上一点的连线与 \mathbf{k} 之间的角
φ	原点到球面上一点的连线在 xOy 平面投影与 \mathbf{i} 夹角
\mathbf{r}	位矢
\mathbf{B}	磁感应强度
\mathbf{F}_L	洛伦兹力
τ	切向方向
\mathbf{J}	电流密度
ρ	电荷密度
\mathbf{E}	电场
ε_0	真空介电常量
Φ	电势
\mathbf{F}_E	电场力
τ	扭矩
σ	电导率
h	球壳厚度

D 轻球运动方程

无磁场情况		
15 圈	拟合函数	$\theta = -5696e^{-0.00992t} \sin(0.1013t + 1.367) + 5831$
	理论函数	$\theta = -5400e^{-0.00905t} \sin(0.1260t + 1.570) + 5400$
	修正理论函数	$\theta = -5696e^{-0.00905t} \sin(0.1075t + 1.570) + 5831$
20 圈	拟合函数	$\theta = -7033e^{-0.01293t} \sin(0.1092t + 1.517) + 7401$
	理论函数	$\theta = -7200e^{-0.00905t} \sin(0.1260t + 1.570) + 7200$
	修正理论函数	$\theta = -6800e^{-0.00905t} \sin(0.1092t + 1.570) + 7500$
磁场平行于转轴		
20 圈	拟合函数	$\theta = -6223e^{-0.01168t} \sin(0.1002t + 1.159) + 6543$
	理论函数	$\theta = -7200e^{-0.00905t} \sin(0.1260t + 1.570) + 7200$
	修正理论函数	$\theta = -6700e^{-0.00905t} \sin(0.0950t + 1.570) + 6500$
磁场垂直于转轴		
2800 μ T	拟合函数	$\theta = -7017e^{-0.00963t} \sin(0.0908t + 1.383) + 6942$
	理论函数	$\theta = -7200e^{-0.01016t} \sin(0.1095t + 1.570) + 7200$
	修正理论函数	$\theta = -6800e^{-0.01016t} \sin(0.0880t + 1.570) + 6800$
3200 μ T	拟合函数	$\theta = -7781e^{-0.01121t} \sin(0.1008t + 1.224) + 7997$
	理论函数	$\theta = -7200e^{-0.01051t} \sin(0.1094t + 1.570) + 7200$
	修正理论函数	$\theta = -6800e^{-0.01051t} \sin(0.0980t + 1.310) + 7700$

E MATLAB 代码

```

%%我们在数据处理时使用的代码都是相近的
%%只需要导入轻球在不同情况运动状态记录的excel表格
%%因此在这里只放一份代码，供参考

D1=table2array(E2(:,1:3));

time=zeros(6535,1);

theta=zeros(6535,1);

```

```

omega=zeros(6535,1);
for i=1:6535
time(i)=D1(i,1);
theta(i)=D1(i,2);
omega(i)=D1(i,3);
end
plot(time,theta,'Linewidth',2)

theta2=zeros(6535,1);
for i=1:6535
theta2(i)=theta(i)+3200;
end

D2=table2array(mag1(:,1:3));
ttime=zeros(6512,1);
ttheta=zeros(6512,1);
oomega=zeros(6512,1);
for i=1:6512
ttime(i)=D2(i,1);
ttheta(i)=D2(i,2);
oomega(i)=D2(i,3);
end
plot(ttime,ttheta,'Linewidth',2)

ttheta2=zeros(6512,1);
for i=1:6512
ttheta2(i)=ttheta(i)-8300;
end

t=0:0.001:250;
f=3213*exp(-0.01336*t).*sin(0.1134*t+1.337)-3200-52.74;
figure

```

```

plot(t,f,'r','Linewidth',2);

figure
ff=-8123*exp(-0.01107*t).*cos(0.09822*t+6.128)+8300+106.4;
plot(t,ff,'r','Linewidth',2)

D3=table2array(mag2(:,1:3));
tttime=zeros(7929,1);
tttheta=zeros(7929,1);
oomega=zeros(7929,1);
for i=1:7929
    tttime(i)=D3(i,1);
    tttheta(i)=D3(i,2);
    oomega(i)=D3(i,3);
end
plot(tttime,tttheta,'Linewidth',2)

tttheta2=zeros(7929,1);
for i=1:7929
    tttheta2(i)=tttheta(i)-5900;
end

fff=-5705*exp(-0.01117*t).*cos(0.09852*t-0.1971)+5900-193.1;
plot(t,fff,'r','Linewidth',2)

\figure
plot(tttime,oomega,'r',t,ggg,'b','Linewidth',2);
plot(t,-f,'r',t,ff,'b',t,fff,'k','Linewidth',2);
xlabel('t/s');
ylabel('\theta/\circ');
legend('实验1曲线','实验2曲线','实验3曲线');
title('\theta-t 图像拟合曲线');

```