

煤车,那么共需用 140 小时/每星期装满煤车并卸满场地。而一星期共有 168 小时,所以就现在的场地规模而言,可以使用第四列标准煤车。由于上面我们已经计算了迟滞费用占整体费用的 44%,所以不建议增加一列标准煤车。

四、模型检验

由于我们的模型是用概率统计方法建立的,因此结果分析只给出了费用估计和误差区间,而不是准确数值。为了检验模型精度,我们使用 pascal 语言,计算煤车随机到达的时间、额外费用及迟滞费用。用此程序迭代 200 次后,输出数据,分别给出了非星期四,星期四的费用均值和标准差及由于星期四的迟滞而造成星期五的损失的费用均值和标准差。正如我们所期望的,模型预测的结果与计算机模拟结果之间的误差非常小,表 3 给出了比较结果。

表 3 模型预测与计算机模拟的比较结果(每天,以千美元为单位)

	非星期四额外消费		星期四额外消费		迟至星期五额外消费	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
计算机模拟	58	45	315	93	60	49
模型预测	60	47	317	95	59	47

五、模型评价

模型的不足之处是在已给的环境条件下需进行大量的时间与误差计算之后,产生费用函数,计算的过程是按天计算的。当场地的装卸时间超过 24 小时时,必然影响第二天的装卸,这样很难准确预测额外迟滞费用。若以一个星期为计算单位,计算费用函数,则可以得到适当的改进。

我们的模型优于基于随机数样本空间建立的模型,因为我们的模型预测结果是分析求得的,模型具有较广泛的适用范围。当环境改变时,只需变动参数,就可以得到预测结果。例如,如果装一列标准煤车需要 5 小时,而不是 3 小时,我们仅改变费用函数的一个参数值进行计算即可。类似,我们也可以根据不同情况,改变装卸队的报酬,场地卸煤时间等参数值,而不必设计新的模型。因此,此模型具有较强的适应性。

参 考 文 献

[1] Mendenhall, William, Dennis D. Wackerly 和 Richard L. Scheaffer. 1990. Mathematical Statistics With Applications, 4th ed. Boston, MA, PWS-Kent.

[2] Ross, sheldon, 1988, A First Course in Probability. 3rd ed. New York, Macmillan.

边馥萍译自 The UMAP Journal, v. 14(1993), no. 3, 259—270.

边馥萍 天津大学数学系 300072

MCM92 问题—A. 空中交通控制雷达的功率问题

要求你决定一个主要城市的机场的空中交通控制雷达发射的功率。机场行政部门希望兼顾安全性与经济性使雷达的发射功率最小。

机场行政部门限于使用现有的天线和接收线路,唯一可以考虑的选择是改进雷达的发射电路使雷达更强大。

你要回答的问题是雷达必须发射多少功率(以瓦特为单位)足以保证能探测到 100 公里以内的标准客机。

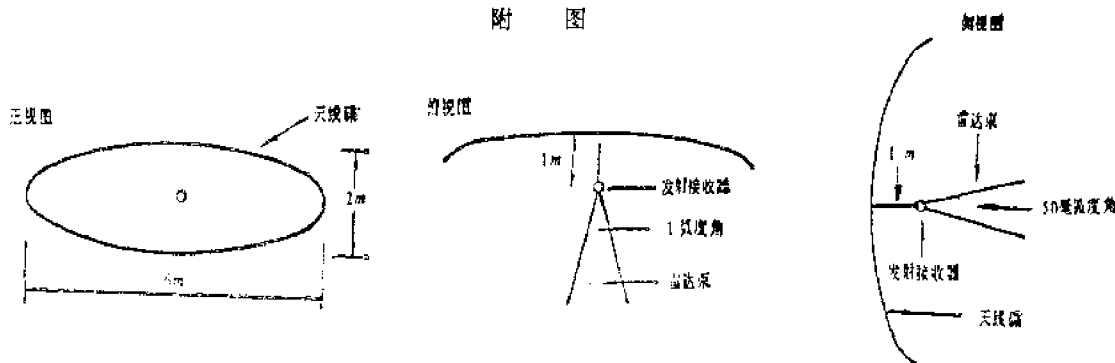
技术说明:

a. 雷达天线是一个旋转抛物面的一部分,该抛物面的焦距为 1 米。它投影至与顶点相切的平面是一个长轴为 6 米,短轴为 2 米的椭圆。从焦点发出的主能量束是一个圆锥,其长轴角为 1 弧度,短轴角为 50 毫弧度。天线和能量束的简图如附图所示。

b. 理想化的一类飞机是具有 75 平方米完全雷达反射截面的飞机。亦即在你的初步模型中飞机等价于一个 75 m^2 的中心位于天线轴线上并垂直于该轴的 100% 反射圆碟,你亦可以考虑其它模型或改进这个模型。

c. 接收线路的灵敏度是雷达天线反馈报警器(位于雷达天线的焦点)对 10 微瓦的回波信号会作出反应。

附 图



(谭永基译)

本题是由纽约州西点军校数学科学系的 John Edwards 提供的。

确定航空控制雷达系统的功率

一、摘要

如果使用问题给定的初始模型,我们计算出雷达需要一个能够产生 7.3 MW 的发射器。随后我们进一步计算出使用这个模型对一般典型飞机的较实际目标模型所需要的功率高达 $2.6 \times 10^{13} \text{ W}$ 。这使我们对问题中给定的初始条件提出疑问。当我们用一个较实际的接收器取代问题中给定的接收器时,计算出需要的发射功率下降到 36 kW 。产生脉冲信号的雷达比另一种雷达所需功率下降了 5×10^{-6} 。

我们考虑了在暴雨中信号减弱的情况,计算出对于问题给定的模型需要发射功率 $2.8 \times 10^{13} \text{ W}$,而对较实际的模型需要 40 kW ,这两个功率值分别比原来高出 10%。针对一架飞机计算的这些值都比一个城市飞机场所预期的值小,因此需要考虑到可靠性的余量。

二、假设及其合理性

我们做如下假设:

- 最小费用被认为是在一个可接受的可靠性余量下能够探测到飞机所需要的最弱发射器的费用。我们假设机场负责人考虑最小功率的重要因素是尽可能买最弱的发射器。操作费用可在以后通过降低必要的输出功率来改变。

- “探测”定义为设备在物理上能够发现飞机存在。忽略以后的任何人为错误。

- 雷达的波长为 10.5 cm 。雷达波长带在 3 到 25 cm 之间,较短的波长用于气象雷达。在 1947 雷达上,人们选择 10.5 cm 的波长做为在探测和跟踪系统中较为理想的波长[Ridenour

1947,605]。

• 波束的极化不影响我们的任何测量。这个假设大大简化了对反射问题的计算。在实际中,只要目标的面积满足 $2\pi a/\lambda \gg 1$,极化情况便可以忽略,这里 a 为雷达横截面的半径 [Hovanessian 1973,3—11]。当 $\lambda=10.5\text{cm}$ 时,根据这个关系式, a 小于 0.2m 才会发生极化现象,如此的 a 值比最小的客机还小得多。

• 雷达波束的中心波瓣是我们用于探测的唯一波瓣。这个中心波瓣包含了绝大部分的波束能量,并且是沿“探测轴”的唯一部分 [Ridenour 1947,272]。

三、初始模型

首先,确定目标上的能量。为此,需要找出在距雷达 100km 的地方波束覆盖的面积。这个面积是波束在半径为 100km 的球面上的椭圆形投影。我们用下列积分来计算这个面积:

$$A_{\text{area}} = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y + \sin^2 y x}}} \sin \theta d\theta d\phi$$

其中 $r=100\text{km}$, $x=0.5$ 弧度(水平波束角度的一半), $y=0.025$ 弧度(垂直波束角度的一半)。

这个表达式可以通过解球面上的椭圆方程,再利用球坐标积分得到。这个积分没有准确的形式解,因此必须用数值方法求解。我们求出 $\text{Area}=3.88 \times 10^8 \text{m}^2$ 。

其次,我们导出下列关于需要发射功率的公式:

$$\text{Power}_{\text{接收}} = \frac{\text{Power}_{\text{发射}} \cdot \sigma}{\text{Area}}$$

其中 σ 为目标的雷达横截面积(通常这不同于目标的实际面积), Area 为由上述积分得到的波束覆盖的面积。

由目标反射的功率可看做从球面上一点发射出来的。因此,接收器收到的功率可简单地用下式计算:

$$\text{Power}_{\text{接收}} = \frac{\text{Power}_{\text{发射}} \cdot A_{\text{dish}}}{4\pi r^2}$$

其中 A_{dish} 为接收盘的波束横截面积,它通过计算椭圆的面积得到(πab , a, b 分别为长半轴和短半轴)。

由以上两个公式,整理可得到

$$\text{Power}_{\text{接收}} = \frac{\text{Power}_{\text{发射}} \cdot \sigma \cdot A_{\text{dish}}}{\text{Area} \cdot 4\pi r^2}$$

下面的计算当中,大多数使用了这个公式。

考虑初始模型,其中目标为表面积是 75m^2 的大圆盘,雷达横截面积 $\sigma = 4\pi A^2/\lambda^2 = 7 \times 10^6 \text{m}^2$ [Hovanessian 1973,3—10]。把返回的功率 $10\mu\text{W}$ 代入上面的公式,得到发射功率为 7.3MW 。这当然很高,但并非不可达到。

四、第一步修正:

我们使用比较实际的目标来修正这个模型。对一架小飞机而言,它的雷达横截面为 2m^2 [Levanon 1988,6]。当检测的客机不是一架小飞机时,使用这标准相当于对探测系统引入了一个可靠性系数。

对这个新的 σ 值,可计算出,为了使雷达探测到目标需要的发射功率约 $2.6 \times 10^{13} \text{W}$!!! 即使对雷达横截面积为 40m^2 的大飞机 [Levanon 1988,6] 仍需要发射功率 $1.3 \times 10^{12} \text{W}$,这比我们能够产生的功率大许多。这样的功率需求显然是不合理的,如果这样,它将需要接近 1kg/hr 的

直接的质量到能量的转换。

五、第二步修正:

我们进一步的研究发现,当信噪比为 1db 时,用 1947 典型雷达能够探测到目标[Ridenow 1947, 46]。进而发现,这雷达发射的不是连续波,取而代之的是发射脉冲信号。合理的可使用脉宽 1 微秒,速度为 500 脉冲/秒的信号[Hovanessian 1973, 1—3]。显然,1db 的信噪比是很小的。这里电路中唯一的噪声来自电路本身的热噪声[Hovanessian 1973, 1—8],可由下式得到:

$$\text{Noise} = F T k B n$$

其中, F 为对给定的系统不变的噪声(典型值为 3[Hovanessian 1973, 1—13], T 为 Kelvin 温度(正常的运行温度为 290K, [Hovanessian 1973, 3—24]), k 为 Boltzmann 常数 ($1.38 \times 10^{-23}/\text{K}$), Bn 为接收器带宽,接近脉宽的倒数[Levanon 1988, 11]。

因为最终的信号强度为噪声乘以信噪比,所以信噪比可由下式计算。

$$\text{信噪比} = \frac{\text{Power}_{\text{发射}} \cdot \sigma \cdot \text{Adish}}{\text{Area} \cdot 4\pi r^2 F T k B n}$$

在 1947 雷达中,典型的信噪比为 1db(实际上约 1.25)。用以上公式计算噪声,再乘以信噪比,可得到最小检测信号的功率只有 $1.5 \times 10^{-14} \text{W}$! 即使允许可靠度大出 6,7 个数量级,这结果仍比原问题中给的值小得多。

通过上述公式整理后求发射功率,我们高兴地发现只需要 36kW 的发射器就能够探测到小飞机 ($\sigma = 2\text{m}^2$)。如果使用脉宽为 1 微秒,速度为 500 脉冲/秒的信号,平均消耗功率只有 18kW。然而,发射器仍需发射 36kW 的信号。

五、气候的修正飞机和可靠性系数

在理想的天气情况下,上面给出了准确的答案。晴天时,空气对能量的影响可以忽略,即使在云层中传播,对我们使用的这种波长的电磁波来说,影响也很小[Ridenow 1947, 605]。然而在雨或雾中,水滴将对雷达发出的电磁波有较大影响。在开始下雨时,我们不希望关闭飞机场,这时我们需要一个有足够大功率的发射器,以使发射的信号能穿过暴雨。

在下面的模型中,我们考虑 25mm/hr(约 1 英寸/hr)的暴雨情况。假设水滴直径约 3mm,则体积约 14mm^3 ,再设飞机在 10000m 高处,雨云层在 1000m 处。

要确定由于大雨而造成的波束能量减弱的量,我们需要知道波束将遇到的雨滴个数。雨滴个数涉及雨滴的平均密度,单位为:雨滴数/ m^3 。记 R 为雨滴的下落速度,单位:mm/hr,那么,在给定面积 A 上单位时间的落雨体积 $V = RA$ 。当落雨速度 $R = 25\text{mm/hr}$ 时,每小时在面积 A 上的总雨量的体积为 $V = 0.025A\text{m}^3$ (编译者注:这里取 A 的单位为 m^2)。于是,在暴雨中每小时的雨滴数量为体积 V 除以每个雨滴的体积,这样可得到雨滴个数约为 $1.8 \times 10^6 A$ 。

计算雨滴密度的一个重要因素是雨滴下落速度。对直径 3mm 的雨滴,最终速度为 7m/秒。

这个速度在雨滴开始生成后下降 6m 之内就可达到,因此在下落 1000m 的过程中,雨滴的平均速度很接近这个最终速度[Halliday and Resnick, 1988, 110]。

如果速度 R 在整个下落过程中是常数,这情况类似于一个充满雨滴的,底面为 A ,高为 H 的物体。若高度 H 选择为使得顶部的一个雨滴下落 1 小时所经过的距离,那么这个系统刚好与 1000m 高处云层产生的雨量相同。两者之间的区别在于,实际系统是连续产生雨滴,而这个模型系统是在一瞬间空中充满了雨滴。然而,由于穿过 H 的雷达横截面所具有的雨滴和穿过云层下的雷达横截面的相同,所以,这个系统中的平均雨滴密度等于云层下的雨滴密度。

对下落速度为 7m/秒的雨滴, H 应为 25200m(注: 7×3600)才能使它在 1 小时落下。于是

这个物体的体积为 $V=HA=25200\text{Am}^3$, 它所含的雨滴密度为雨滴个数除以这个体积 V 。根据上面计算得到雨滴个数为 1.8×10^6 , 于是得到雨滴密度约为 70 个/ m^3 。

这个密度表明, 每个雨滴所占空间为一个边长为 24cm 的立方体, 这立方体的雷达横截面积约为 580cm^2 (注: $24^2=576$)。由于此立方体的方向是任意的, 为了方便, 我们设信号波束垂直于立方体底面。类似地可得到雨滴的雷达横截面积为 7mm^2 (注: $\pi 1.5^2$)。如果我们把信号波束横截面分成许多小区域 da , 那么, 任一小区域 da 的波在一个立方体中遇到雨滴的概率为雨滴的雷达横截面积除以立方体的雷达横截面积, 约为 $\frac{1}{8000}$ 。

由于云层高 1000m , 飞机在 10000m 处距雷达天线 100km 。可计算出波束在到达飞机之前必须穿过 1000m 的雨, 因此每个小区域 da 上的信号波在到达飞机的途中要穿过 42000 个雨滴立方体 (注: $10000 \div 0.24 \approx 42000$, 0.24m 为雨滴立方体的边长), 返回时, 信号波束同样要穿过这么多的雨滴立方体, 所以, 在每个小区域 da , 信号往返途中共约穿过 84000 个雨滴立方体。按照概率, 每经过 8000 个立方体会遇到 1 个雨滴, 因此, 在小区域 da 上遇到雨滴的期望个数为 10.5 个。

如果有 N 个小区域 da , 那么每个小区域 da 上将携带信号波的功率为 $1/N$ 。若每个 da 上的信号强度最终被减弱到 x/N ($x < 1$), 那么整个信号的功率将减弱到 x , 所以整个信号的纯效率等于每个小区域 da 上信号的平均效率。这种假设情况的雨滴衰减系数为 9.26×10^{-3} [Herman et al. 1961], 经过 10.5 个雨滴, 每个小区域 da 上的信号强度将被减弱到原来强度的 90.7% (注: $1 - 9.26 \times 10^{-3} \times 10.5$), 也就是说, 整个信号波的纯效率为 90.7% 。为了得到足够强的返回信号, 以便使我们能够探测到飞机, 我们发射的信号波束功率必须是理想条件下的 110% 。这样, 如果用给定的雷达, 需要发射功率为 $2.8 \times 10^{13}\text{W}$, 而采用上面提到的 1947 雷达, 由于有高灵敏度接收器, 需要发射功率为 40kW 。

当我们面对的目标是小型客机而不是一般小飞机时, 这些计算得到的需要功率中都包含了用于探测大型商用飞机的一个内在的可靠性系数 (这对问题给定的雷达和实用的雷达都一样)。因此, 我们不必在计算中考虑进一步的可靠性要求。因为除非在紧急关头, 否则不可能让一架小型客机在暴雨中降落到城市飞机场地上。

六、结论

我们详细讨论了如何确定雷达能可靠探测所有预期飞机所必需的功率, 我们选择处理了一个比给定 75m^2 圆盘更合乎实际的飞机模型, 并讨论了坏天气对信号功率的可能影响。

根据我们的结论, 建议飞机场购买最大输出功率为 $2.8 \times 10^{13}\text{W}$ 的发射器。然而, 我们针对实际问题得到的结果中, 假设接收器接收功率为 15fw ($1\text{fw} = 10^{-15}\text{W}$), 而不是 $10\mu\text{W}$, 这比问题中给出的接收器要灵敏得多。这样, 发射器只要能发射 40kW 的功率就可以。由此, 如果我们接到的问题是设计接收能力为 $10\mu\text{W}$, 而需要可靠地探测 100km 处飞机的雷达发射器时, 我们将建议他们重新检查其接收器的灵敏度, 因为这个灵敏度是不合理的。然后我们再按照上面的方法去做。

参 考 文 献

- [1] Halliday, David and Robert Resnick. 1988, Fundamentals of Physics. New York: Wiley.
- [2] Herman, Benjamin M. et al. 1961, Tables of the Radar Cross Sections of water Sphere. Tucson, AZ: University of Arizona.
- [3] Hovanessian, S. A. 1973, Radar Detection and Tracking Systems. Dedham, MA: Artech House.

[4]Levanon, Nadav. 1988. Radar Principles. New York: Wiley. McCarthy, Earl J. 1988. Optics of the Atmosphere. New York: Wiley. Ridenour, Louis N. 1947. Radar System Engineering. New York: McGraw Hill.

吴祈宗编译 The UMAP Journal, V. 13(1992), No. 3, 205—210.

吴祈宗 北京理工大学应用数学系 邮编: 100081

利用价格确定雷达设计式样

一、问题

我们按照给定的参数确定在给定的区域探测飞机所需的发射功率。

我们首先研究了雷达及可能影响发射功率的各个因素。我们发现某些因素对功率有显著的影响,例如天气和气压,而其它一些因素没有影响。

根据我们对问题的理解,提出了两个模型,同时还提供了对我们结果的检验。我们构造了一个模型,另一个模型取自文献[Skolnik 1962]。

最后,我们发现功率的需要太过分,因而指出,或者重新设计雷达,或者重新检查这个雷达的规格要求是很必要的。

二、假设及想法

雷达波束指向的方向是被限制在一个特定范围内,具有最大波束能量的方向。对具有这性质的波,旁瓣的影响很小,而很难检测。因此,我们首先假设飞机处在主波束幅射范围内。

我们将忽略极偶然的事件和场合,例如天线上有冰,极恶劣的天气条件等,同时也忽略一些次要的因素,如天线温度。我们假设这些情况或者作为雷达工作所必需的功率,或者在雷达设计中已得到补偿。

我们不涉及天线工作方面本身的情况,例如,部件承受功率的可能性。我们无法估计这些方面,因此我们假设它们在设计时已经得到补偿。

三、模型分析

我们要解决能够探测到目标的问题。该目标是距雷达 100km,有 75m² 的雷达横截面的飞机。这个接收器能接收的最小功率为 10 μ W,飞机可以远离 100km,有 75m² 的雷达横截面积的目标反射到接收器的功率为 10 μ W,需要多大的功率?

原问题指明,要求可靠性最大而费用最小。问题的可靠性是检测问题,而费用实质上是功率需求问题。作为一般准则,检测有随机性,例如在坏天气,需要提高发射功率来得到较强的检测能力。

然而初始的问题涉及到功率及能造成其影响的因素,对功率的影响是大气层的空气和气候现象共同造成的,因此,这二者必须同时予以考虑。

其它的一些影响不那么重要。例如鸟和昆虫可能被雷达探测到。地面的因素,如汽车和地形特征也能影响雷达,然而这些对输出功率的影响是很小的。因此,我们假设这些影响对原来的雷达都已存在,并在设计中已得到了补偿。

噪声也会对信号产生干扰,我们假设这个影响在以前的雷达设计中已予考虑,而 10 μ W 的接收功率表示了这个最小探测的限制。

四、模型设计

我们的设计方案建立在分别确定最好情况,和最坏情况下探测飞机的条件下。为此,要同时了解最小和最大的功率需求,然后基于费用和可靠性两个方面来做出判断。

我们使用了两个有某些类似的模型。如果能够从两个模型得到同样的结果,并借助于这些

结果的可靠性分析,这个设计思想就明确了。我们还对从正在运行的雷达上找到的数据进行研究,来证实由模型给出的结果。虽然我们不能找到完整的数据,但我们能得到足够的信息来确定模型的参数并因此弄清了这些结果是否合理。

为了这个目的,我们假设雷达工作在 S 频段,即波长为 10cm,频率为 3GHz(注:G 表示千兆,10⁹)。这样不仅使计算上比较简单,而且它接近上述雷达发射器发射的实际波长。这种波长发射器的说明可参考文献[Skolnik 1988, 50]。这个波长的电磁波在云层中传播有很好的特性,并能扩展到一个合理的范围中使用。

两个模型都在所有这些必要的假设下进行讨论。对于飞机不需要模型,因为计算中都假设 75m² 的雷达横截面而没有变化。气候的影响将在后面引入,可以表示为每单位距离的信号减弱,故不需要特殊的模型。

五、本队模型

第一个模型是我们设计的,故称为“本队模型”。记发射器的输入功率为 4。我们设唯一的功率因子由最终发射的功率决定,记这个效率因子为 ξ (注:最终发射功率 = 4 ξ)。

雷达波束沿长轴的角度为 1 弧度,沿短轴为 50 毫弧度向外发射。当波束向外发射时,最简单的情况是它的功率保持不变。在距雷达天线一个给定距离处,波束的功率分布在由波阵面(波前)围成的表面积上。因此,在 100km 处给定点的波束功率等于从天线发射的功率除以波阵面所占区域的表面积。记这个表面积为 A_1 ,我们得到

$$\text{功率密度} = \frac{4\xi}{A_1}$$

用飞机的雷达横截面 σ 乘上述功率密度就得到从飞机反射的波束的功率。飞机实质上是一个全方位天线,即它(由反射)发出的功率在各个方向都是相等的。这意味着这个反射功率将均匀地分布在半径为 R 的球面上,所以这个反射的功率密度为:

$$\frac{4\xi}{A_1} \times \sigma \times \frac{1}{4\pi R^2}$$

由于天线接收的功率等于反射的功率密度乘以天线的面积,我们记这个面积为 A_r ,于是,描述雷达接收功率的方程为:

$$\frac{4\xi}{A_1} \times \sigma \times \frac{A_r}{4\pi R^2} = \rho$$

其中 ρ 是到达接收器的信号强度。

六、Skolnik 模型

我们用的第二个模型取自文献[Skolnik, 1962]。记发射功率为 P_t 。那么

$$\text{来自定向天线的功率密度} = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2}$$

其中 G_t 为天线的发射功率增益系数。天线的发射功率增益系数为发射天线沿某个方向发射的功率同具有 100%效率的全方位天线沿相同方向发射的功率的比率。一个全方位天线是沿所有方向发射电磁波的,在这种情况下,距天线的距离为给定 R 处的功率密度为天线的发射功率除以电磁波所占区域的表面积。因此,上式即为自全方位天线发射的功率乘以功率增益系数。

从目标反射的功率等于上述功率密度乘以目标的雷达横截面积。这个功率相当于由一个全方位天线反射的,因此它的功率密度为反射功率除以球面面积。如果接收天线的有效捕获面积为 A_r ,那么这个雷达功率表示式为:

$$P_r = \frac{P_t G_t A_r \sigma}{(4\pi R^2)^2}$$

其中 σ 为目标的雷达横截面积, 并且

$$G_t = \frac{4\pi A_t}{\lambda^2}$$

这里 λ 为雷达波的波长。(最后公式中左端为发射增益系数, 而右端为接收功率增益, 根据天线理论, 二者是相等的)。

七、计算

7.1 第一试验情况

我们用模型来检验一批予知的实际雷达数据。这批数据来自 ASR-8 型飞机场监视雷达, 选自文献[Skolnik 1988, 50]用 Skolnik 模型检验时, 由于这些数据取自最适于这个模型本身的情况, 因而很简单。本队模型仅仅给出一个近似的效率常数, 这个常数有巨大的内在误差而这个误差本身对一个实际系统而言是较小的值。

对于 ASR-8 型, 天线规格为 $4.9\text{m} \times 2.7\text{m}$, 得到 $A_t = 13.2\text{m}^2$ (注: 4.9×2.7), 给定 $G_t = 2000$ 。设备的峰功率值为 1.4mW , 因此, 一个在 100km 处有 75m^2 雷达横截面积的目标, 接收器得到的信号强度为:

$$\frac{1.4 \times 10^6 \times 2 \times 10^3 \times 13.2 \times 75}{(4\pi \times 10^{10})^2} = 1.8 \times 10^{-10}\text{W}.$$

分母中 10^{10} 是由 $R = 100\text{km}$ 变换为以 m 为单位得到的。这个模型说明特定接收器要有接收 10^{-10}W 信号的探测能力。

7.2 第二试验情况

[Brookner 1988, 490]给出了一个用 10cm 波长工作的雷达, 它可探测弱到 10^{-14}W 的反射信号, 峰功率可达 10^6W , 天线增益为 4×10^4 。他们还给出在 20km 范围内最小可探测的雷达横截面为 $2.0 \times 10^{-7}\text{m}^2$ 。如果把这些数据引入 Skolnik 模型, 也可得到最小可探测的雷达横截面积是 $2 \times 10^{-7}\text{m}^2$ 。所以, 至少 Skolnik 模型同这个试验情况的结果是一致的。

7.3 波阵面的面积

在计算问题中描述的雷达所需要的实际功率之前, 我们必须计算本队模型的参数 A_1 , 即向前波阵面的面积。这是一个椭圆抛物面, 它的表面积很难计算。我们选择计算两个椭圆的面积来代替, 其中一个面积小于这个椭圆抛物面, 另一个大于它, 并对二者的差进行分解。这个小的椭圆长轴为 96km , 短轴为 5km , 它对应抛物面下面的面积, 实际上是抛物面的底片, 较大的椭圆是抛物面的顶片, 它的边与波束的边重合。这个大椭圆长轴 109km , 短轴 5km 。两个椭圆的平均面积为 $(128 \pm 8) \times \pi (\text{km})^2$ (注^[1])。

7.4 给定雷达所需要的功率

现在计算问题中给定雷达在最好的情况下(即大气压对雷达波束的减弱为零等)所需要的功率。天线为长, 短轴分别是 6m 、 2m 的椭圆截面, 它的有效面积为 9.4m^2 (注: $\frac{1}{4} \times 6 \times 2 \times \pi$)。

在波长为 10cm 时, 增益约为 12000 (注: $G_t = \frac{4\pi A_t}{\lambda^2} = \frac{4 \times \pi \times 9.4}{0.1^2}$)。目标距离为 100km , 最小的雷达横截面积 75m^2 。假设本队模型的发射效率因子为 $\xi = 60\%$ (这是从查阅的原始资料中得来的)。再给这个数规定 $\pm 10\%$ 的误差。利用这些参数, 计算出本队模型的峰功率为 $P = 1.2 \times 10^{12}\text{W}$ 。

Skolnik 模型得到的峰功率为

$$P_i = 1.9 \times 10^{10} \text{W}$$

在这两个难以置信的大数之间有巨大的误差！

[Skolnik 1962, 516]中给出了一个表列出电磁波能量在大气层中减弱的情况。对于 10cm 波长的电磁波，在空气中的减弱约为 0.01db/km，这意味着，信号通过 200km 的距离，约减弱 2db。这相应于乘上功率因子 1.58，于是本队模型得到的功率为 $1.9 \times 10^{12} \text{W}$ ，第二模型为 $2.95 \times 10^{10} \text{W}$ 。

[Skolnik 1962, 544]还给出电磁波通过雨层的减弱情况表。在最坏情况下，雨层造成的减弱接近 0.01db/km，它也对应着在 200km 途中，信号减弱 2db 的情况。如果再加入这个因素，计算可得本队模型所需功率为 $3.0 \times 10^{12} \text{W}$ ，第二个模型为 $4.7 \times 10^{10} \text{W}$ 。Skolnik 还在同一页上给出雾对信号影响的表，雪也是需考虑的因素，然而，这些减弱都不如雨的影响大。所以，上面计算的数据 ($3.0 \times 10^{12} \text{W}$ 及 $4.7 \times 10^{10} \text{W}$) 代表了波束功率减弱的绝对情况。

最后要考虑的因素是噪声，主要来自发射器和连续天线的传输线。我们选择噪声减弱因子为 20db，这是我们在计算中使用的一个因子（由于本队模型中已包含了效率因子，因而这个因子只用于 Skolnik 模型）。这个因子相当于在 Skolnik 模型中，用峰功率乘以 10^2 得到的效果。现在两个模型得到的结果合理地接近了。^[注2]

所有这些数据给出了雷达的峰功率。人们更感兴趣的是雷达的平均功率，它决定在给定时间内的工作费用，这比任何事情更为重要。

平均功率定义为

$$P_{av} = \frac{P_i \tau}{T_r} = P_i \tau f_r$$

其中 τ 为脉宽， $T_r = \frac{1}{f_r}$ 为脉冲的重复周期。这脉冲重复周期大约是雷达信号到达预期目标过程中通过最大区域所花费的时间。这里预期目标的距离是 100km，由于脉冲信号高速传输，我们得到 $T_r = \frac{1}{3 \times 10^8}$ 秒，（注：100km/300000km 电磁波速度等于光速）。并且脉宽为 $\tau = 3 \times 10^{-9}$ 秒。^[注3]

这些数据给出平均功率

$$P_{av} = P_i \times 10^{-6}$$

从上计算的峰功率，我们可得到本队模型在最好和最坏情况下的平均功率分别为 $1.2 \times 10^6 \text{W}$ 和 $3.0 \times 10^6 \text{W}$ ，而对于 Skolnik 模型，最好和最坏情况下的平均功率分别为 $1.9 \times 10^6 \text{W}$ 和 $4.7 \times 10^6 \text{W}$ 。

八、讨论

在确定本队模型的误差时，我们假设初始问题的数据是不变的。由于我们无法确定给定数据的测量精度（如飞机的雷达横截面积），故假设这些测量是精确的。于是模型中的误差就仅仅在于 A_1 的值及效率因子 ξ ，这二者都出现在本队模型。我们选择 A_1 的值为 $(128 \pm 8) \times \pi (\text{km})^2$ ，效率 ξ 为 $60 \pm 10\%$ 。为了计算相对误差 e ，对这些分量的平方和进行开方：

$$e = \sqrt{\left(\frac{0.1}{0.6}\right)^2 + \left(\frac{8\pi}{128\pi}\right)^2}$$

总体误差由前面计算的峰功率乘以 e 得到，这里得出 0.5mW 范围的误差，这个误差值非常大。

对 Skolnik 模型讨论误差有较大的问题。由于变量的近似误差没有给出，因此同本队模型

一样无法确定其误差。我们感到,假设的任何误差都只不过是关于测量精度的简单推测,所以,对第二个模型我们不给出任何误差估计。

我们最初计算的平均功率和峰功率结果很奇怪。需要几兆瓦的平均功率在实际上是讲不通的。然而,借助于对试验情况的比较可帮助我们理解这个问题。在试验数据中,发射器的峰功率分别为 1.4MW 和 1MW。为什么我们不能得到这类似的结果呢?因为第一个试验接收器可检测 10^{-10}W 的信号,而第二个试验接收器可检测 10^{-14}W 的信号。另一方面,我们的接收器的检测能力只有 10^{-5}W 。这就是我们计算出需要巨大功率的主要原因。^[4]

所以在给定问题的参数范围内,如果我们要搜索 100km 的飞机,就至少需要平均 1MW 的连续功率,我们以为较好的数应是 3MW。这个功率将穿透可观的大雨而保持尽可能低的费用。当然,在目前 1MW 的功率不便宜,所以我们认为,若希望雷达合理地运行,应改换这个设计。

例如,除非这个雷达能够检测较小功率的信号,否则可以要求缩小探测区域,比如说 20km。这样,需要的平均功率将下降到 4.8kW。

两个模型的主要优点是它们简单,直接了当,并得出了合理的结果。对于数据的小变化(除第二个模型的 R^4 项),它们没有灵敏性问题。它们有合理的柔顺性:本队模型中由于有效率因子,Skolnik 模型中由于有噪声因子,两个模型最终得到较接近的结果。这两个因子都分别允许这两个模型对实际雷达中可变化的小参数进行调整。

缺点或许是它们的结果不精确。没有具体的实际经验数据,要说明模型精度是很困难的:但是在文献[Skolnik 1962]中给出许多复杂公式,我们认为或许这两个模型给出实际雷达性能的一个相当粗略的估计。^[5]

参 考 文 献

- [1] Brookner, Eli. 1988. Aspects of Modern Radar. Boston, MA: Artech House.
- [2] Hall, John. 1964. Radar Aids to Navigation. Boston, Technical Publishers.
- [3] Skillman, William A. 1983. Radar Calculations Using the TI-59. Boston, MA: Artech House.
- [4] Skolnik, Merrill I. 1962. Introduction to Radar systems. New York: McGraw-Hill.
- [5] Skolnik, Merrill I. 1988. Radar Applications. New York: IEEE Press.

注记

[注 1]编译者注:这里应是在以 100km 为半径的球面上截取的一个截面投影为椭圆的部分,文中大小椭圆的长,短轴如下图示:



作者注释:波阵面的形状在球面上投影是一个椭圆。在三维空间,这有些类似一个下垂的球面。对这个波阵面面积的一个较好的近似是求半径为 2.5km 的半球面与半径为 48km 的半球面的平均值。这些数来自波束的宽度:如果有一个 50 毫弧度波束宽度的圆形天线,那么在 100km 处球面半径为 2.5km;而对于 1 弧度角度的圆形天线,这个半径为 48km。这个波阵面的面积应该在这两个半球面的面积之间。为了得到精确的答案,可用球坐标的二重积分来计算。利用这些数,我们得到面积

$$A_1 \approx 4615\pi \text{ (km)}^2$$

所以,在第一次近似中有一些偏离。本队模型的结果将增加几十倍。

[注 2] 一个更合理的噪声因子为 2db, 相当于约 60% 的发射效率, 我们把它用于本队模型。利用这个噪声因子, 得到发射功率为 $7.4 \times 10^{11} \text{W}$ 。Skolnik 模型的结果仍然大于原来情况, 而小于本队模型的结果。我们将在下面的篇幅中进一步讨论。

[注 3] 编者记: 作者在这里把雷达的脉冲概念理解错了, 因而对脉宽及脉冲重复周期的理解也有错误。按照前面那篇文章, 合理值应为: 脉宽为 1 微秒 (故 $\tau = 10^{-6}$), 脉冲频率为 500 脉冲/秒 ($f_r = 500$)。由这些数字得到 $P_{av} = P_t \times 5 \times 10^{-4}$, 随后需要乘上因子 20, 得到需要的功率。

[注 4] 作者注释: 两个模型间的巨大差异为什么大体是一致的? 问题发生在第二个模型的增益项, 它的计算使用了一些近似, 例如对较小的 θ 值取 $\sin \theta \approx \theta$ 。

另外, 衍射理论指出最小的波束散射对圆形小孔而言是波长除以直径, 而对椭圆形小孔为波长除以轴长。根据这个事实, 我们发现雷达天线的衍射限制为分别沿长、短轴的 50 和 20 毫弧度的波束宽度。然而, 这里的问题给定的波束宽度分别为 50 毫弧度和 1 弧度。由于绝大多数雷达在衍射限制下来建造 (主要的是因为类似我们上述的理由), 因此即使具有巨大的雷达横截面的飞机, 雷达天线通过顶部发射所需功率的波束也只散布到这样一个宽度的面积。

本队模型给出了一个较好的答案。Skolnik 模型没给出这样的结果, 因为增益不正确 (由于计算中使用近似), 而且错误地认为这个雷达是以合理方案建造的。

比较: 在美国总的消耗功率 500GW, 即 $5 \times 10^{11} \text{W}$ 。这个雷达使用几京兆 (10^9 兆) 的功率会引起大气中的氮在一定范围内燃烧。

[注 5] 作者注释: 有些人问, 我们是否学习过雷达设计课程或具有某种雷达的工作经验。回答是, 没有。

吴祈宗编译自 The UMAP Journal, V. 13(1992), No. 3, 211—218。

吴祈宗 北京理工大学应用数学系) 邮编 100081

MCM92 问题—B. 应急电力修复系统

为沿海地区服务的电力公司必须具备应急系统来处理风暴引起的电力中断。这样的系统需要由估计修复的时间和费用和由客观准则判定的停电的“价值”构成的数据输入, 过去 HECO 电力公司曾因缺乏优先方案而遭受传播媒介的批评。

假设你是 HECO 电力公司顾问, HECO 具有一个实时处理, 通常包含下述信息的服务电话的计算机数据库:

报修时间; 需求者类型; 估计受害人数; 地点 (x, y)。

工程队调度所位于 (0, 0) 和 (40, 40), 其中 x, y 以英里为单位。HECO 的服务区域在 $-65 < x < 65$ 和 $-50 < y < 50$ 之内。因为有极好的道路网络, 该地区完全都市化了。工程队只是在上班和下班时必须回调度所。公司的政策是若停电的设施是铁路或医院只要有工程队可派就立即处理, 其它情形都要等暴风雨离开这一地区后才开始工作。

HECO 雇你为表 1 所列的暴风雨修复请求和表 2 所列的维修能力建立客观准则和安排工作计划。注意, 第一个电话是 4: 20(a.m.) 接到的, 暴风雨是 6: 00a.m. 离开该地区, 还要注意很多停电是当日很迟才报修的。

HECO 出自自身的目的需要一份技术报告和一份用外行术语写就的“执行摘要”可提交新闻媒介。他们希望对将来的建议。为决定你的优先计划安排系统, 你还需作一些附加的假设, 详述这些假设。将来你可能希望有附加的数据, 如果是, 详述这些需要的信息。