二重积分积分区域的对称性

情形一：积分区域 D 关于坐标轴对称

定理4　设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 连续，且 D 关于 x 轴对称，则

1) 当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ (即 $f(x,y)$ 是关于 y 的奇函数)时，有 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$

2) 当 $f(x,-y)=f(x,y)$（即 $f(x,y)$ 是关于 y 的偶函数）时，有

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$. 其中 D_1 是由 x 轴分割 D 所得到的一半区域。

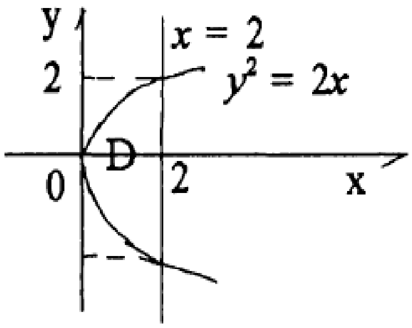
例5　计算 $I=\iint\limits_D (xy+y^3)dxdy$，其中 D 为由 $y^2=2x$ 与 $x=2$ 围成的区域。

解： 如图所示，积分区域 D 关于 x 轴对称，且

$f(x,-y)=-(xy+y^3)=-f(x,y)$

即 $f(x,y)$ 是关于 y 的奇函数，由定理1有

$\iint\limits_D f(xy+y^3)dxdy=0$.

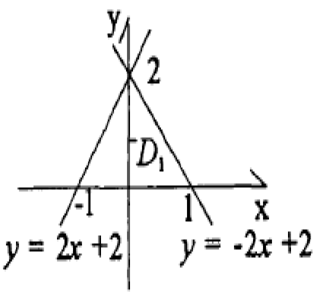


类似地，有：

定理5　设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 连续，且 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy, & \text{当 } f(-x,y)=f(x,y).\\ 0, & \text{当 } f(-x,y)=-f(x,y).\end{cases}$$

其中 D_2 是由 y 轴分割 D 所得到的一半区域。



例6　计算 $I=\iint\limits_D x^2ydxdy$, 其中 D 为由 $y=2x+2$, $y=-2x+2$ 及 $y=0$ 所围成的区域.

解： 如图所示，D 关于 y 轴对称，并且 $f(-x,y)=x^2y=f(x,y)$，即被积函数是关于 x 的偶函数，由对称性定理结论有：

$$I=\iint_{D}x^{2}ydxdy=2\iint_{D_1}x^{2}ydxdy=2\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{-2x+2}x^{2}ydxdy=\frac{2}{15}.$$

定理6 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 连续，且 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，则

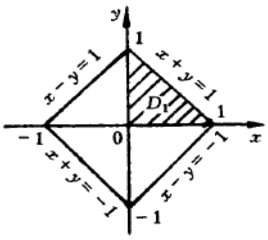
1) 当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 或 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时，$\iint_{D}f(x,y)dxdy=0$.

2) 当 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$ 时, 有

$\iint_{D}f(x,y)dxdy=4\iint_{D_1}f(x,y)dxdy$, 其中 D_1 为由 x 轴和 y 轴分割 D 所的到的 1/4 区域。

例7 计算二重积分 $I=\iint_{D}(|x|+|y|)dxdy$，其中 D：$|x|+|y|\le 1$.

解： 如图所示，D 关于 x 轴和 y 轴均对称，且被积函数关于 x 和 y 均为偶函数，即有



$f(x,-y)=f(-x,y)=f(x,y)$，由定理6得

$$I=\iint_{D}(|x|+|y|)dxdy=4\iint_{D_1}(|x|+|y|)dxdy$$

其中 D_1 是 D 的第一象限部分, 由对称性知(定理8情形(1)):

$$\iint_{D_1}|x|dxdy=\iint_{D_1}|y|dxdy,$$

故 $I=4\iint_{D_1}(|x|+|y|)dxdy=4\iint_{D_1}(|x|+|x|)dxdy=8\iint_{D_1}|x|dxdy=\frac{4}{3}$.

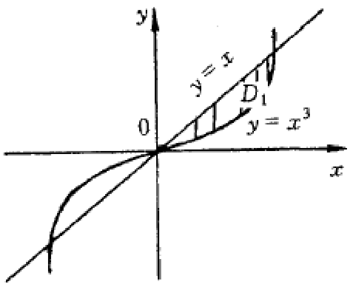
情形二、积分区域 D 关于原点对称

直角坐标系中, 一点 (x,y) 关于原点对称的点为 $(-x,-y)$

定理7 设平面区域 $D=D_1+D_2$, 且 D_1, D_2 关于原点对称, 则当 D 上连续函数 $f(x,y)$ 满足

1) $f(-x,-y)=f(x,y)$ 时, 有 $\iint_{D}f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1}f(x,y)dxdy$

2) $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 时, 有 $\iint_{D}f(x,y)dxdy=0$.



例8 计算二重积分 $\iint_{D}(x^{3}+y^{3})dxdy$, D 为 $y=x^{3}$ 与 $y=x$ 所围区域.

解: 如图所示, 区域 D 关于原点对称, 对于被积函数

$f(x,y)=x^3+y^3$, 有

$$f(-x,-y)=(-x)^3+(-y)^3=-(x^3+y^3)=-f(x,y)$$ 由定理7, 得

$$\iint_D (x^3+y^3)dxdy=0.$$

情形三、积分区域 D 关于直线 $y=\pm x$ 对称

直角坐标系中(x,y)关于$y=x$的对称点是(y,x)

(x,y)关于$y=-x$的对称点是$(-y,-x)$

定理8 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 连续, 且 $D=D_1+D_2$, D_1, D_2 关于直线 $y=x$ 对称, 则

1) $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(y,x)dxdy$;

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\iint_{D_2} f(y,x)dxdy$$

2) 当 $f(y,x)=-f(x,y)$ 时, 有: $\iint_D f(x,y)dxdy=0$.

3) 当 $f(y,x)=f(x,y)$ 时, 有:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=2\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

例9 求 $I=\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$, D 为 $x^2+y^2\le R^2$ 所围.

解: 积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称, 由定理8, 得

$$\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=\iint_D (\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})dxdy,$$

故 $$I=\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=\frac{1}{2}[\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy+\iint_D (\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})dxdy]$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2 rdr$$

$$=\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}).$$

练习:求 $I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}dxdy$, D 为 $x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0$ 所围.

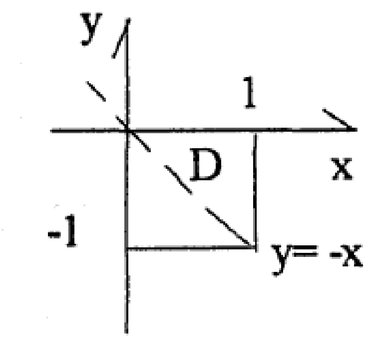
$key:\frac{a+b}{2}\pi$

类似地，可得:

定理9 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 连续, 且 $D=D_1+D_2$, D_1, D_2 关于直线 $y=-x$ 对称, 则

1) 当 $f(-y,-x)=-f(x,y)$, 则有 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$;

2) 当 $f(-y,-x)=f(x,y)$, 则有 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$.



例10 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\arcsin(x+y)dxdy$, 其中 D 为区域: $0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0$.

解: 如图所示, 积分区域 D 关于直线 $y=-x$ 对称, 且满足 $f(-y,-x)=-f(x,y)$,

由以上性质, 得:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\arcsin(x+y)dxdy=0.$$

注：在进行二重积分计算时, 善于观察被积函数的积分区域的特点, 注意兼顾被积函数的奇偶性和积分区域的对称性, 恰当地利用对称方法解题, 可以避免繁琐计算, 使一些二重积分的计算大大简化。