1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界，设 $f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$, 求 $f(x)$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax+2x}{e^x-1}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{\ln\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}, & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，求常数$a,b.$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ a & x=1,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\pi}(x-1)}-1}{x-1}, & x>1\end{cases}$

（I）当a满足什么条件时，$x=1$是 $f(x)$ 的可去间断点?

(II) 当a为何值时，$f(x)$ 在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$是连续函数?

4.设函数 $f(x)=x^{\sin x}, x\in(0,1]$,对于其他 x, $f(x)$满足$3f(x+1)-f(x)=k$,其中 k 为常数.

（I）写出 $f(x)$ 在 $(-1,0]$上的表达式;

(II)问 k 为何值时, $f(x)$ 在点 x=0 处连续.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求常数 a, b.

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\tan t-\tan x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

7. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\dfrac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

8. (I) 证明:方程 $x^n+nx=2$ 存在唯一的正实根 a_n (其中n为正整数);

(II）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{-2n}$.

[参考答案]

1.

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2+\frac{x^2}{8}+\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4}\right)=x^2+\frac{x^2}{8}+\frac{x^2}{64}+\frac{1}{8}f\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$=\cdots=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2}{8^{i-1}}+\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{8-8^{1-n}}{7}x^2+\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界，令 $n\to\infty$ 可得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{8-8^{1-n}}{7}x^2+\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]=\frac{8x^2}{7}$$

【知识点】函数的连续性与间断点的类型及判断.

2.【解析】这是一个已知分段函数连续求参数问题,转化为分段函数在分段点的左、右极限存在且等于该点处的函数值,求参数.

因为初等函数在其有定义的区间上连续,所以

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin ax+2x}{\mathrm{e}^x-1}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内连续;

当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{\ln\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续.

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，即

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$$

而 $\displaystyle\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin ax+2x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{a\cos ax+2}{\mathrm{e}^x}=a+2$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-\sin x-1}{\ln\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}$$

$$\underline{\underline{taylor公式}}\lim_{x\to0^+}\frac{1+x+\frac{1}{2!}x^2+o\left(x^2\right)-x+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{1}{2}x^2}=1$$

$f(0)=b$，故 $a+2=1=b$，即 $a=-1,b=1$.

3. 【解】(Ⅰ) 分段函数在分段点的连续性(间断点)的讨论应从左、右极限切入. 由于

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi(1-x)}{\pi(1-x)\sin\pi(1-x)}=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{3!}[\pi(1-x)]^3}{[\pi(1-x)]^2}=\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{x}(x-1)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{\pi}(x-1)}{x-1}=\frac{1}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{1}{\pi}$，故当 $a=f(1)\neq\frac{1}{\pi}$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(Ⅱ) 当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，初等函数 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 连续；当

$x>1$ 时,初等函数 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}(x-1)}-1}{x-1}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内连续，故当 $f(x)$ 在点 $x=1$

处连续，即 $\lim\limits_{x\to^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=a=\frac{1}{\pi}$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 是连续函数.

4.【解析】(Ⅰ) 当 $0<x+1\leqslant1$，即 $-1<x\leqslant0$ 时，

$$f(x)=3f(x+1)-k=3(x+1)^{\sin(x+1)}-k\quad\therefore f(x)=\begin{cases}3(x+1)^{\sin(x+1)}-k, & -1<x\leqslant0\\ x^{\sin x}, & 0<x\leqslant1\end{cases}$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[3(x+1)^{\sin(x+1)}-k\right]=3-k$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x}=e^0=1$$

故当 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0),3-k=1$，即 $k=2$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

5. 【解析】这是一个隐性的分段函数连续求参数问题,应先计算极限,求出 f(x)的表达式再从分段点的左、右极限切入.

$$\because\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\1, & |x|=1,\\\infty, & |x|>1,\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1,\\ \dfrac{-1-a-b}{2}, & x=-1,\\ -ax^2+bx, & -1<x<1,\\ \dfrac{1-a+b}{2}, & x=1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$$

当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=-ax^2+bx$ 是连续函数;

当 $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 连续函数,

故 $f(x)$ 在点 $x=-1,x=1$ 处连续时，$f(x)$ 是连续函数,

而 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x}=-1,\quad \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(-ax^2+bx\right)=-a-b$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-ax^2+bx\right)=-a+b,\quad \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1\quad \therefore -1=-a-b=\dfrac{-1-a-b}{2}$

解得 $a=0,b=1$.

6.【解析】先计算极限求出 $f(x)$ 的表达式,再观察出 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\tan t-\tan x}}=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{\tan t-\tan x}{\tan x}\right)^{\frac{\tan x}{\tan t-\tan x}\cdot\frac{x}{\tan x}}=e^{\frac{x}{\tan x}}.$$

观察易知，$f(x)$ 的间断点为 $x=0,x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots),x=m\pi+\dfrac{\pi}{2}(m=0,\pm1,\pm2，\cdots)$,

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{x}{\tan x}}=\mathrm{e}\qquad \lim\limits_{x\to m\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to m\pi+\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x}{\tan x}}=1$

所以 $x=0,x=m\pi+\dfrac{\pi}{2}(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的第一类(可去)间断点;

又因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi}\mathrm{e}^{\frac{x}{\tan x}}=+\infty$,

所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的第二类(无穷)间断点.

7.【解析】首先观察出 $f(x)$ 的间断点,再求自变量趋向于这些点时 $f(x)$ 的极限并判断其类型.

观察易知，$f(x)$ 的间断点为 $x=-3,x=-2,x=1,x=2$,

因为 $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\frac{1}{x^{-1}}\frac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\lim\limits_{x\to-3}\frac{\ln(-x-2)}{(x+3)(x-2)}$

$$=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\lim_{x\to-3}\frac{\ln[1-(x+3)]}{x+3}=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{x+3}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

所以 $x=-3$ 是 $f(x)$ 的第一类(可去)间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to-2}\ln|x+2|=+\infty$

所以 $x=-2$ 是第二类(无穷)间断点.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}=-\frac{\ln3}{4}\lim_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}=-\frac{\ln3}{4}\lim_{x\to1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=-\infty$$

从而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

由 $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\frac{\ln|x+2|}{(x+3)(x-2)}=\frac{\mathrm{e}\ln4}{5}\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}=\infty$

知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类(无穷)间断点.

【注意】

(1) 由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-x_0}}=0,\lim\limits_{x\to x_0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-x_0}}=+\infty$，如果函数表达式中含有 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x-x_0}}$，求 $x\to x_0$ 时的函数极限,应考虑左、右极限.

类似地，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，如果函数表达式中含有 e^x 求 $x\to\infty$ 时的函数极限,应考虑 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$.

(2) $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，但不是无穷间断点.

8. (I) 证明:方程 $x^n+nx=2$ 存在唯一的正实根 a_n (其中 n 为正整数);

(II) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{-2n}$.

【知识点】闭区间上连续函数的性质.

【题型变化】

(1)利用零点定理证明函数零点(方程根)的存在性.

(2)利用最值定理与介值定型(推论)证明存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

8.【解析】(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 根的存在唯一性等价于函数 $f(x)$ 零点的存在唯一性,利用零点定 理证明函数 $f(x)$ 零点的存在性,利用函数 $f(x)$ 的单调性证明 $f(x)$ 零点的唯一性.

令 $f(x)=x^n+nx-2, x\in[0,+\infty)$，易知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

当 $n=1$ 时，显然 $x=1$ 是 方程 $x^n+nx=2$ 的根;

当 $n>1$ 时，$f(0)=-2<0, f(1)=n-1>0$，

由零点定理，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个零点 a_n，即方程 $x^n+nx=2$ 至少存在一个正根 a_n.

(II) 由(Ⅰ)知，当 $n>1$ 时，$0<a_n<1$．且 $a_n^n+na_n=2$，于是 $a_n=\dfrac{2-a_n^n}{n}$,且 $1<2-a_n^n<2$，

所以 $\lim a_n=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2-a_n^n}{n}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2-a_n^n}{n}\right)^{\frac{n}{2-a_n^n}}\right]^{-2\left(2-a_n^n\right)}=\mathrm{e}^{-4}$$