# 第六章  多元函数积分学及其应用

## 第六节 第一型线积分与面积分

- 第一型线积分**Line Integrals of the First Type**
- 第一型面积分**Surface Integrals of the First Type**

作业: 习题6.6 Page 205

1.(2)(4)(6), 3,4,6,8,9,10.(2)(4)(6)(8) (10) 12 14

设$(\Omega)$表示一个有界的几何形体,它是可度量的.

点函数$f:(\Omega)\to R$.

（1）分：$(\Omega)=\bigcup_{k=1}^{n}(\Delta\Omega_k)$

（2）匀：$\forall M_k\in(\Delta\Omega_k)$, $\Delta m_k\approx f(M_k)\Delta\Omega_k$

（3）和：$m\approx\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\Delta\Omega_k$

（4）精：$m=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\Delta\Omega_k$

其中，$d=\max\{\Delta\Omega_k\text{直径},(k=1,2,\cdots,n)\}$

如果不论上述$(\Omega)$如何划分,点$M_k$如何选取,上述极限均为同一值,则称函数 $f$在$(\Omega)$上可积,且称此极限值为多元函数$f$在$(\Omega)$上的积分.

如果不论上述$(\Omega)$如何划分,点$M_k$如何选取,上述极限均为同一值,则称函数$f$在$(\Omega)$上可积,且称此极限值为多元函数$f$在$(\Omega)$上的积分.

记做:

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k$$

积分域

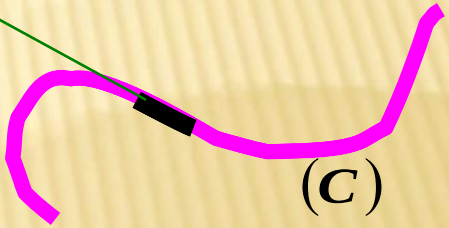
被积函数

被积表达式

积分和

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k$$

弧长微元




如果 $(\Omega)=$(曲线弧段$(C)$)$\subset R^2$(或$R^3$)

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{(C)} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{(C)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

积分路径

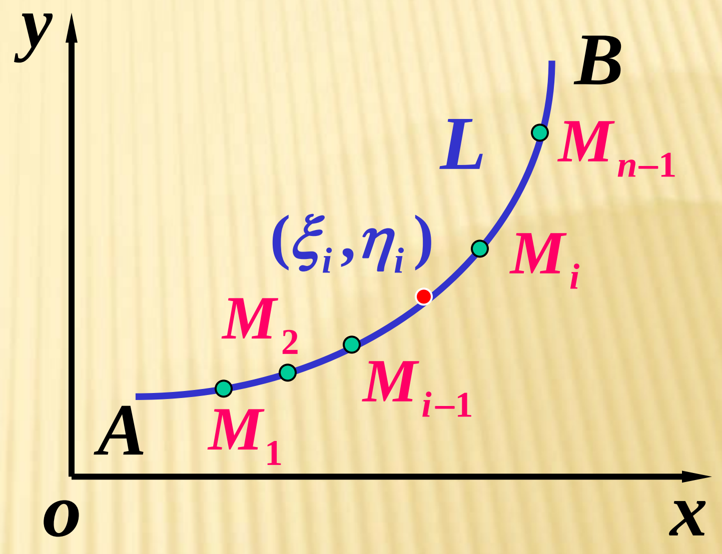
称为对弧长的曲线积分,或第一型线积分.

**特点:**

**上式中的弧段长始终是正的。即曲线积分值与积分路径的方向无关.**

# 第一部分 第一型线积分

## 一、问题的提出




**实例1：曲线形构件的质量**

特殊情形：质量均匀分布时

$$M=\mu\cdot s.$$

一般情形：质量非均匀分布时

1.分 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$,

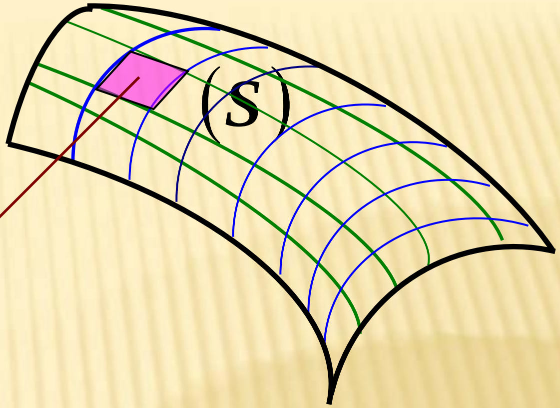
2.匀 取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$, $\Delta M_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$.

3.和 $M\approx\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$. 近似值

4.精 $M=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$. 精确值

曲线形构件的质量 $M=\int_L\mu(x,y)\mathrm{d}s.$

如果 $(\Omega) = (\text{空间曲面}(S)) \subset \boldsymbol{R}^3$




$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

积分曲面

曲面面积微元

称为对面积的曲面积分,或第一型面积分.

**应用实例** 若曲面$(S)$是光滑的，它的面密度为连续函数$\mu(x,y,z)$，求它的质量.

# 二、第一型曲线积分的计算

基本思路：求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

**定理：** 设 $f(x,y)$ 是定义在简单光滑曲线弧

$$L: x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta)$$

上的连续函数,则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，且

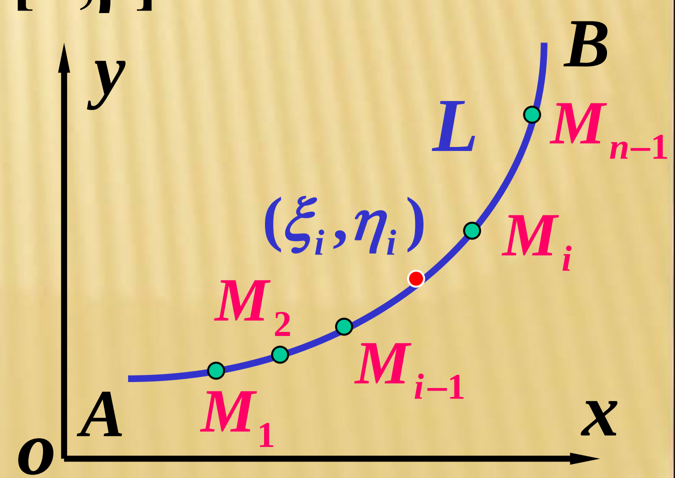
$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

**证：** 根据定义，任意插入分点划分区间[α,β].

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

点 $(\xi_k,\eta_k)$对应参数为 $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$,

设各分点对应参数为 $t_k\,(k=0,1,\cdots,n)$,



设曲线弧方程为:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \ (\alpha \le t \le \beta)$$

$\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数.则弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

点 $(\xi_k, \eta_k)$ 对应参数为 $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$,

设各分点对应参数为 $t_k \ (k=0,1,\cdots,n)$,

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k\,,$$

$$\tau_k' \in [t_{k-1}, t_k]$$

则:

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$$

$f(x,y)$ 连续, $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 连续

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k'),\psi(\tau_k')]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

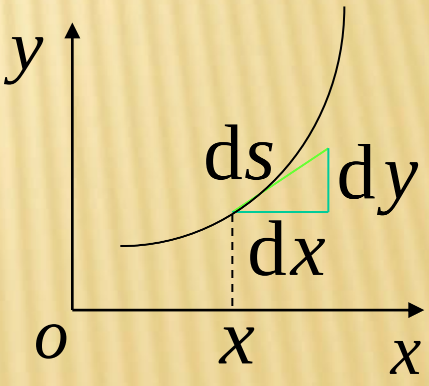
$$\therefore \int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

**说明:**

(1) $\because \Delta s_k > 0,\ \therefore \Delta t_k > 0,$ 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$ !

(2) 注意到 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}\,x)^2 + (\mathrm{d}\,y)^2}$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$




因此上述计算公式相当于“换元法”.

(3). $f\left(x,y\right)$中$x,y$不彼此独立, 而是满足曲线方程的约束.

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

特殊情形

(1). $L: y = y(x), a \le x \le b.$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.\quad (a<b)$$

(2). $L: x = x(y), c \le y \le d.$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_c^d f[x(y), y]\sqrt{1+x'^2(y)}\,\mathrm{d}y.\quad (c<d)$$

(3) $L: r = r(\theta)\,(\alpha \le \theta \le \beta)$, 极坐标

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

## 推 广

设 $f(x,y,z)$在曲线弧$(C)$上有定义且连续，$(C)$的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta), \\ z = z(t) \end{cases}$$

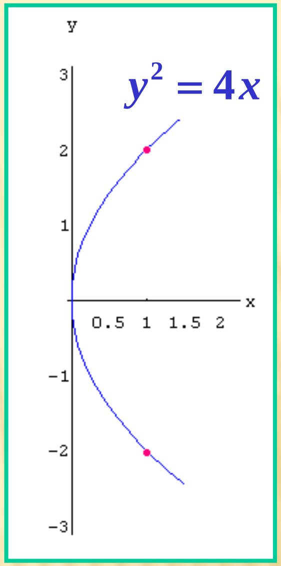
其中$x(t),y(t),z(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数．则

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\,\mathrm{ds}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{dt},(\alpha < \beta)$$

**例1** 求$I=\int_L y\,ds$,

其中$L: y^2=4x$,从(1,2)到(1,−2)一段.




**解** $I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+(\frac{y}{2})^2}\,dy=0.$

**例2** 求$I=\int_\Gamma xyz\,ds$, 其中$\Gamma: x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,$

$z=k\theta$的一段. $(0\le\theta\le 2\pi)$

**解** $I=\int_0^{2\pi} a^2\cos\theta\sin\theta\cdot k\theta\sqrt{a^2+k^2}\,d\theta$

$=-\frac{1}{2}\pi k a^2\sqrt{a^2+k^2}.$

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha<\beta)$$

**例3** 求$I=\int_\Gamma x^2 ds$,

其中$\Gamma$为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

**解** 由轮换对称性, 知 $\int_\Gamma x^2 ds=\int_\Gamma y^2 ds=\int_\Gamma z^2 ds.$

故 $I=\frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$

$=\frac{a^2}{3}\int_\Gamma ds=\frac{2\pi a^3}{3}.$ ($2\pi a=\int_\Gamma ds$,球面大圆周长)

---

**思考:** 上例中$\Gamma$ 改为 $\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$,如何

计算 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$ ?

**思考:** 上例中Γ 改为 $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$, 如何计算 $\oint_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}s$ ?

**解:** 令 $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y+1,\\ Z=z\end{cases}$ 则 $\Gamma':\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=a^2\\ X+Y+Z=0\end{cases}$

$$\oint_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma'}(X+1)^2\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{\Gamma'}X^2\,\mathrm{d}s+2\oint_{\Gamma'}X\,\mathrm{d}s+\oint_{\Gamma'}\mathrm{d}s$$

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu(x,y)\,\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\,\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3+2\cdot\overline{X}\cdot 2\pi a+2\pi a$$

$$=2\pi a\left(\frac{1}{3}a^2+1\right)$$

圆Γ'的形心在原点, 故 $\overline{X}=0$

用形心**或**关于原点对称性**或**轮换对称性

**思考:** 上例中$\Gamma$改为$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0\end{cases}$如何计算$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$？

**解:** 令$\begin{cases}X=x-1\\ Y=y+1\\ Z=z\end{cases}$，则 $\Gamma':\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=a^2\\ X+Y+Z=0\end{cases}$

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma'}(X+1)^2\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{\Gamma'}X^2\,\mathrm{d}s\boxed{+2\oint_{\Gamma'}X\,\mathrm{d}s}+\oint_{\Gamma'}\mathrm{d}s$$

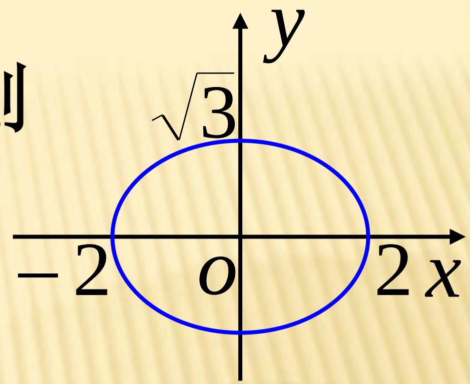
$\forall(X,Y,Z)\in\Gamma'$,总有$(-X,-Y,-Z)\in\Gamma'$ Γ’关于原点对称

$\forall(X,Y,Z)\in\Gamma'$,总有$f(-X,-Y,-Z)=-f(X,Y,Z)$ *f在对称点反值*

$\therefore 2\oint_{\Gamma'}X\,\mathrm{d}s=0$ 用形心**或**关于原点对称性**或**轮换对称性

**例4.** 已知椭圆 $L: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为$a$，则

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=(\qquad).$$




$A.\ 2a$; $B.\ 12a$; $C.\ 24a$

---

提示: 利用对称性 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s=0$

$$\text{原式}=12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s=12\oint_L \mathrm{d}s=12a$$

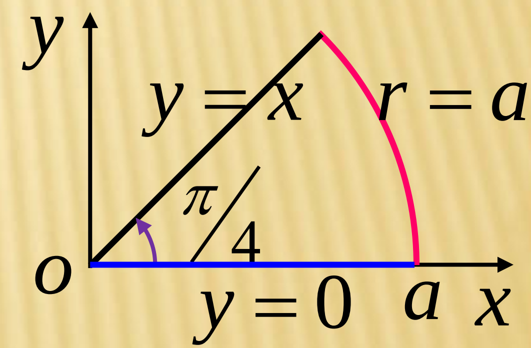
---

或: $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s=\int_{L_上} 2xy\,\mathrm{d}s+\int_{L_下} 2xy\mathrm{d}s$

$$=\int_{-2}^{2} 2x\sqrt{\cdots}\,\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2} 2x(-\sqrt{\cdots})\,\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

**练习：** 设C是由极坐标系下曲线 $r=a,\theta=0$ 及 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 所围区域的边界，则 $I=\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=(\quad)$

$A.(\frac{\pi}{4}a+1)e^a-1$; $B.(\frac{\pi}{4}a+2)e^a-2$; $C.(\frac{3\pi}{4}a+2)e^a-3$




提示: 分段积分

$$I=\int_0^a e^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{x\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=(\frac{\pi}{4}a+2)e^a-2$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$ds=\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

# 三、几何与物理意义

1. 当$\mu(x,y,z)$表示$L$的线密度时,

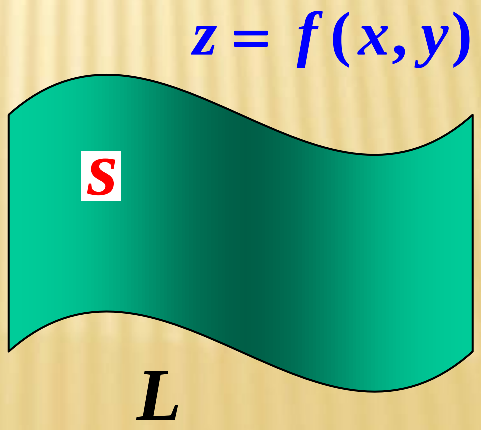
$$M=\int_L \mu(x,y,z)\mathrm{d}s\ ;$$

2. 当$f(x,y,z)\equiv 1$时, $L_{弧长}=\int_L \mathrm{d}s\ ;$

3.如果 $L$ 是闭曲线 , 则记为 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s.$

4. 当$f(x,y)$表示立于$L$上的柱面在点$(x,y)$处的高时,

$$S_{柱面面积}=\int_L f(x,y)ds.$$

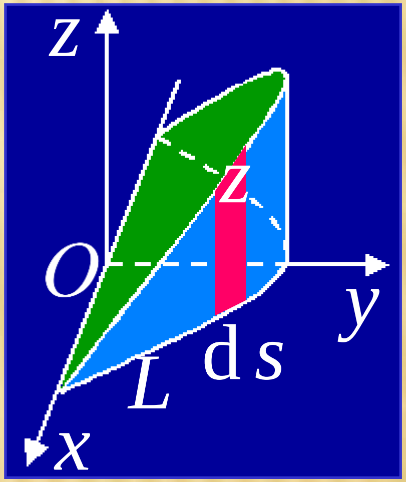


**例5.** 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 $xOy$ 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 $\Sigma$ 的侧面积 $S$ .

**解:** $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

投影圆弧 $L: x=\sqrt{5}\cos t,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le\pi)$

面积微元: $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$




$$S=\int_L z\,\mathrm{d}s\ =\int_L y\,\mathrm{d}s$$

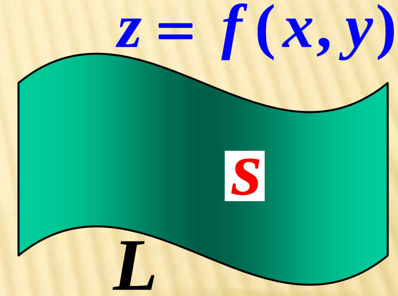
$$=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

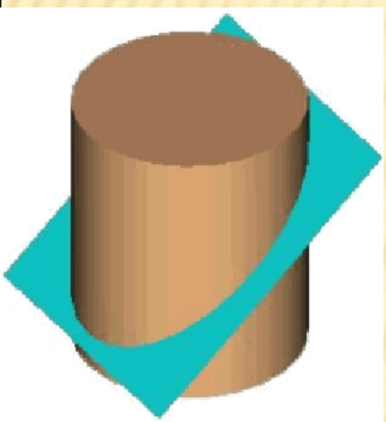
$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

4. 当 $f(x,y)$ 表示立于 $L$ 上的柱面在点 $(x,y)$ 处的高时，

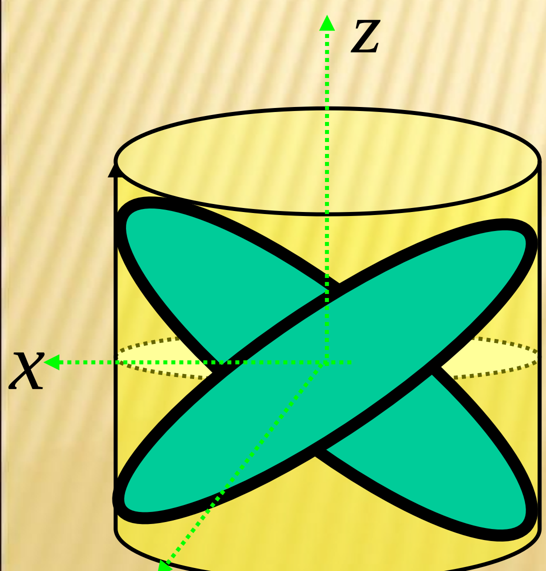
$$S_{\text{柱面面积}}=\int_L f(x,y)ds.$$



例5' 求柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被 $x+z=0$，$x-z=0$ 所截部分的面积.

z=x对应的一部分投影圆弧 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}, t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$




$$S=8S_1=8\int zds=8\int xds$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\,dt=8a^2$$

5. $xoy$平面曲线弧 $L$ 对 $x$ 轴及 $y$ 轴的转动惯量，

$$I_x=\int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s,\quad I_y=\int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

6. 空间曲线弧 $L$ 对 $x$ 轴，$y$ 轴及 $z$ 轴的转动惯量，

$$I_x=\int_L\left(y^2+z^2\right)\mu(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad I_y=\int_L\left(x^2+z^2\right)\mu(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

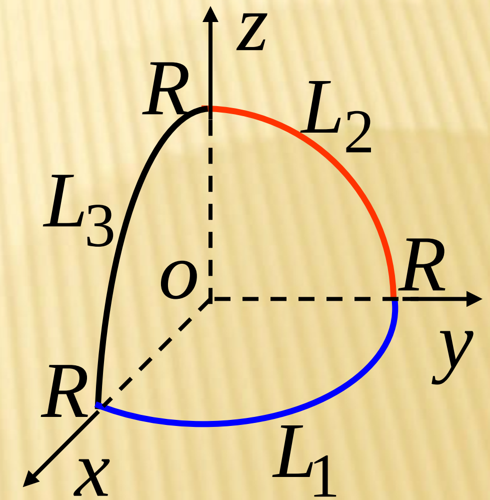
$$I_z=\int_L\left(x^2+y^2\right)\mu(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

7. 曲线弧的质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L\mu(x,y,z)\mathrm{d}s},\ \bar{y}=\frac{\int_L y\mu(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L\mu(x,y,z)\mathrm{d}s},\ \bar{z}=\frac{\int_L z\mu(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L\mu(x,y,z)\mathrm{d}s}.$$

**例6.** $L$为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限与三个坐标面的交线，求其形心.

**解:** 如图所示，线密度为1，交线长度为:




$$l=3\int_{L_1}\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{3\pi R}{2}$$

由对称性，形心坐标为

$$\bar{z}=\bar{y}=\bar{x}=\frac{1}{l}\int_{L_1+L_2+L_3}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{l}\Big[\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s+\underline{\underline{\int_{L_2}x\,\mathrm{d}s}}+\int_{L_3}x\,\mathrm{d}s\Big]=\frac{2}{l}\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta=\frac{4R}{3\pi}$$

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\int_L x\mu(x,y)\,\mathrm{d}s}{\int_L\mu(x,y)\,\mathrm{d}s}}$$

如果 $L$ 是 $xoy$ 面上的曲线弧，则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

如果 $L$ 是闭曲线，则记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

**思考:**

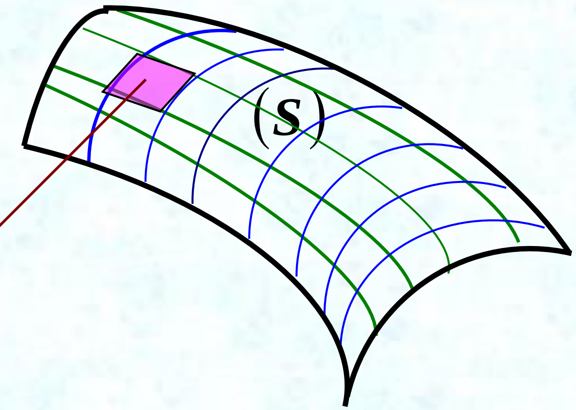
(1) 若在 $L$ 上 $f(x,y)\equiv 1$, 问 $\int_L \mathrm{d}s$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例？

否! 对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s\ge 0$，但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

# 第二部分 第一型面积分

如果 $(\Omega) = ($空间曲面$(S)) \subset \boldsymbol{R}^3$




$$\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

积分曲面

曲面面积微元

称为对面积的曲面积分,或第一型面积分.

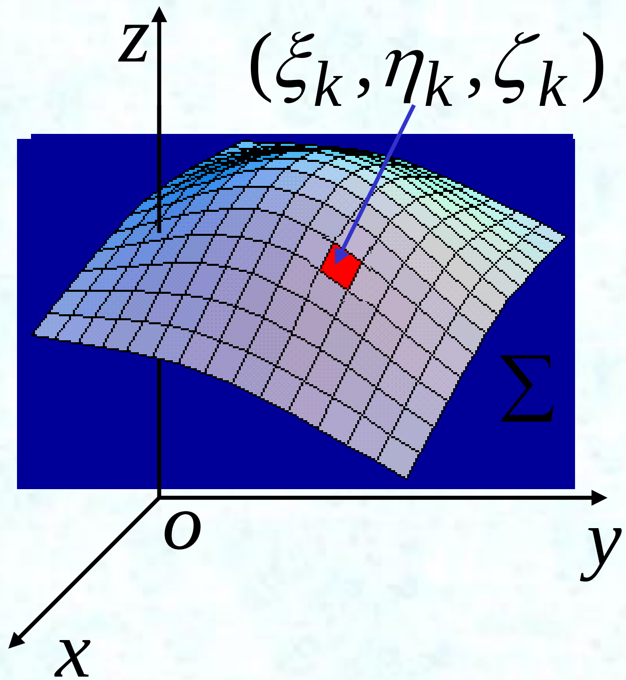
**应用实例** 若曲面$(S)$是光滑的，它的面密度为连续函数$\mu(x,y,z)$，求它的质量.

# 一、对面积的曲面积分的概念与性质

**例:** 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$，求质量 $M$.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

“分、匀、和、精” 的方法,




可得 $M=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$

其中, λ 表示 $n$ 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

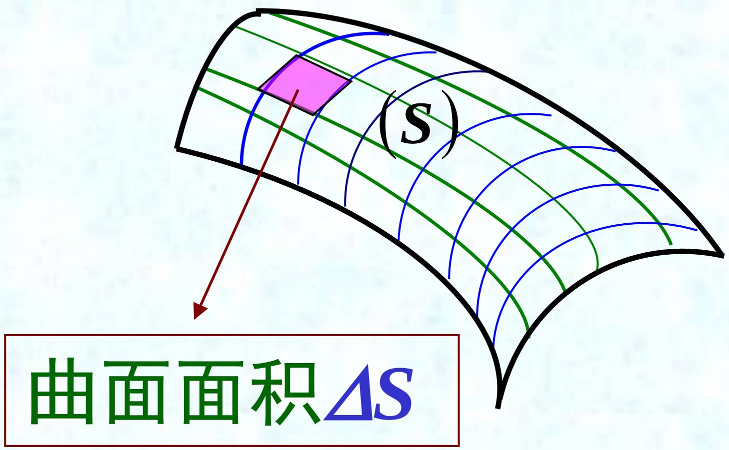
据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

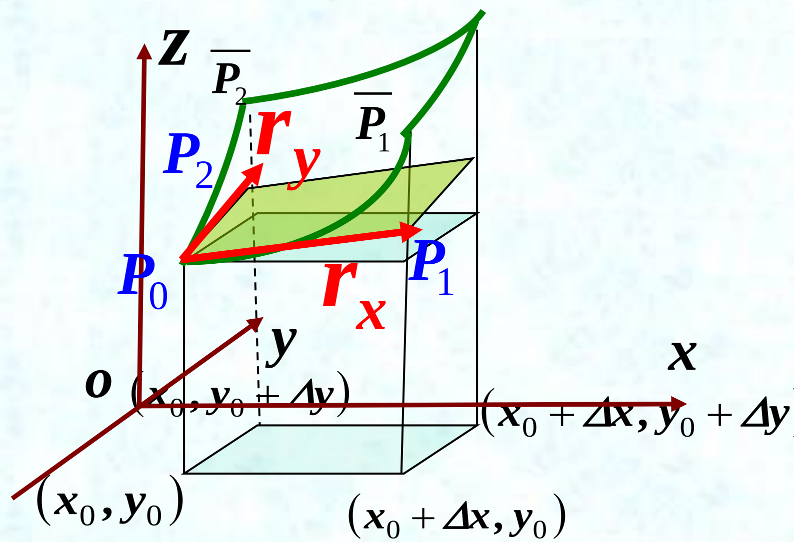
$\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k\ ,\ \Delta S_k=?$

# 二、曲面面积的计算

若曲面$(S)$参数方程:$r = r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$.

$$(u,v) \in (\sigma) \subseteq R^2.$$

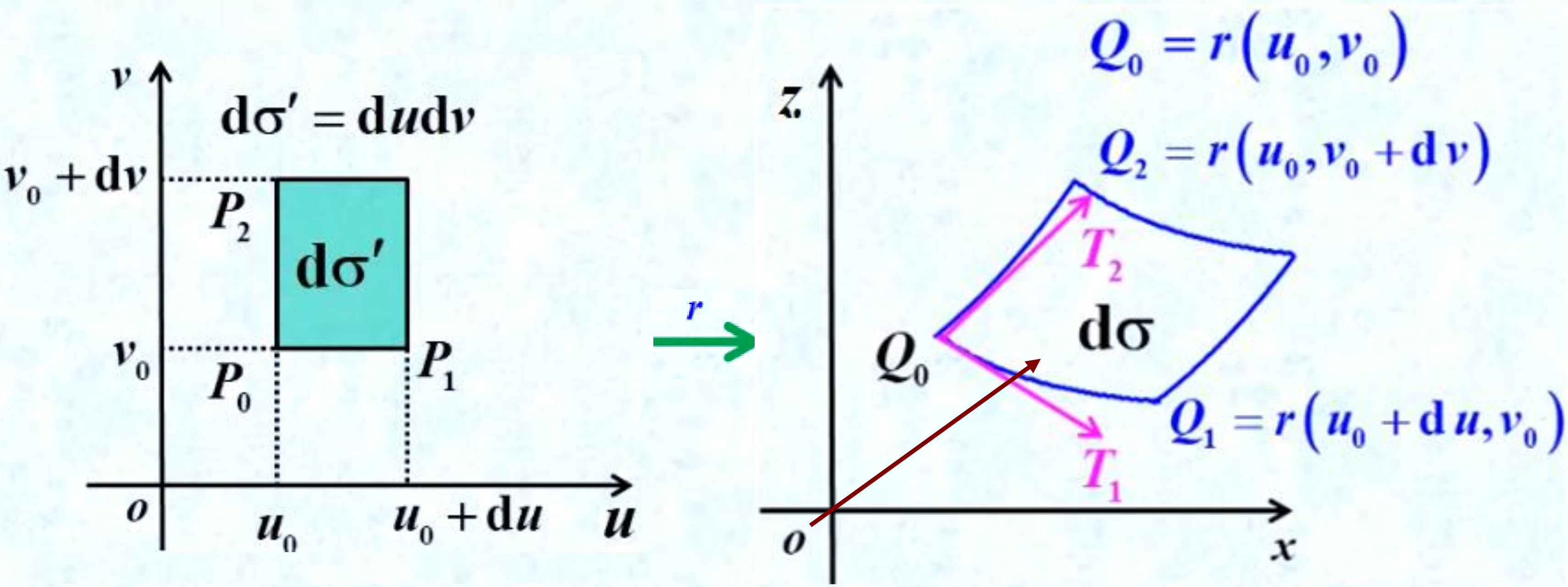



则 $\Delta S \approx \Delta\tau = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} \right\|$

若曲面$(S)$参数方程:$r = r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$.

$(u,v) \in (\sigma) \subseteq R^2$.




$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = r(u_0 + \mathrm{d}u, v_0) - r(u_0, v_0) = r_u(u_0, v_0)\mathrm{d}u + o_1(\mathrm{d}u),$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_2} = r(u_0, v_0 + \mathrm{d}v) - r(u_0, v_0) = r_v(u_0, v_0)\mathrm{d}v + o_2(\mathrm{d}v),$$

$$\mathrm{d}\sigma \approx \left\|\overrightarrow{Q_0Q_1} \times \overrightarrow{Q_0Q_2}\right\| \approx \|r_u \times r_v\|_{(u_0,v_0)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

曲面面积 $S = \iint\limits_{(\sigma_{uv})} \|r_u \times r_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$

曲面面积 $S=\iint\limits_{(\sigma_{uv})}\|r_u\times r_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

**曲面 $(S)$ 方程为:** $z=z(x,y),(x,y)\in(\sigma)\subseteq R^2$ **时,**

**其向量方程为:** $r=r(x,y)=\big(x,y,z(x,y)\big),(x,y)\in(\sigma)\subseteq R^2$

$\vec{r}_x=(1,0,z_x)\qquad \vec{r}_y=(0,1,z_y)$

$$r_x\times r_y=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & z_x\\ 0 & 1 & z_y\end{vmatrix}=(-z_x,-z_y,1)$$

从而，曲面面积微元为:

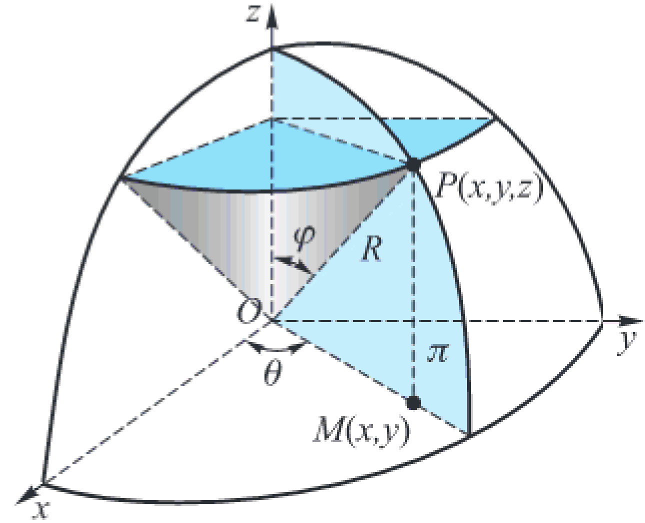
$$\mathrm{d}S=\|r_x\times r_y\|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲面面积为: $S=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

# 球面面积的计算

球面$(S)$的参数方程: $r=r(\varphi,\theta)=(R\sin\varphi\cos\theta,R\sin\varphi\sin\theta,R\cos\varphi)$

$$(\varphi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$$




$$r_\varphi=(R\cos\varphi\cos\theta,R\cos\varphi\sin\theta,-R\sin\varphi)$$

$$r_\theta=(-R\sin\varphi\sin\varphi,R\sin\varphi\cos\theta,0)$$

$$r_\varphi\times r_\theta=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0\end{vmatrix}$$

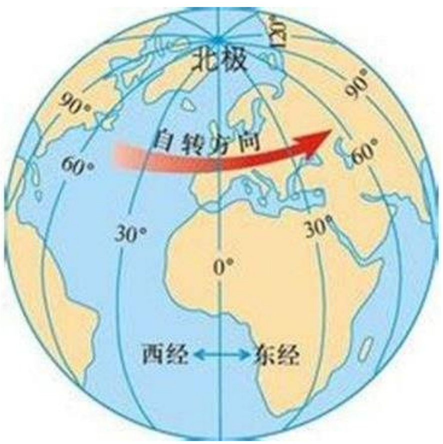
$$=(R^2\sin^2\varphi\cos\theta,R^2 sin^2\varphi sin\theta,R^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

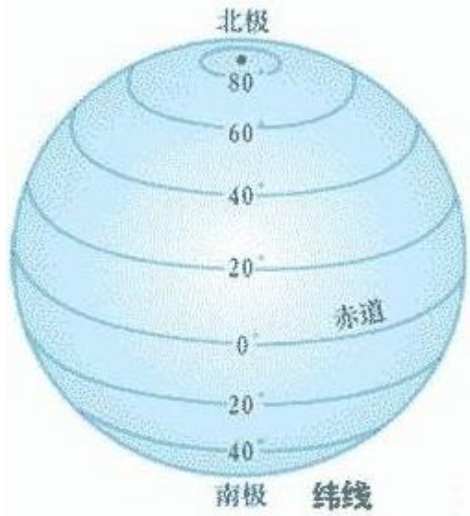
$$\left\|r_\theta\times r_\varphi\right\|=\sqrt{R^4\sin^4\varphi+R^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=R^2\sin\varphi$$

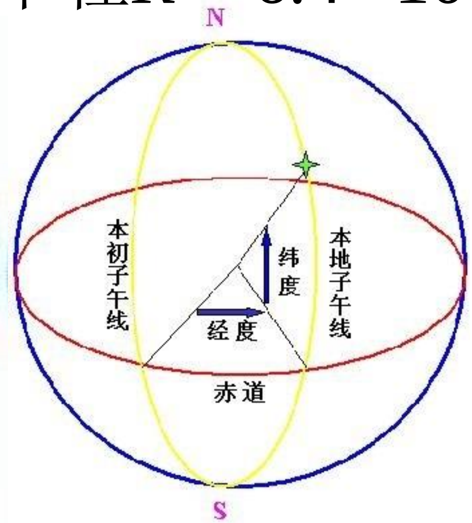
曲面面积微元: $\mathrm{d}S=\left\|r_\theta\times r_\varphi\right\|\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

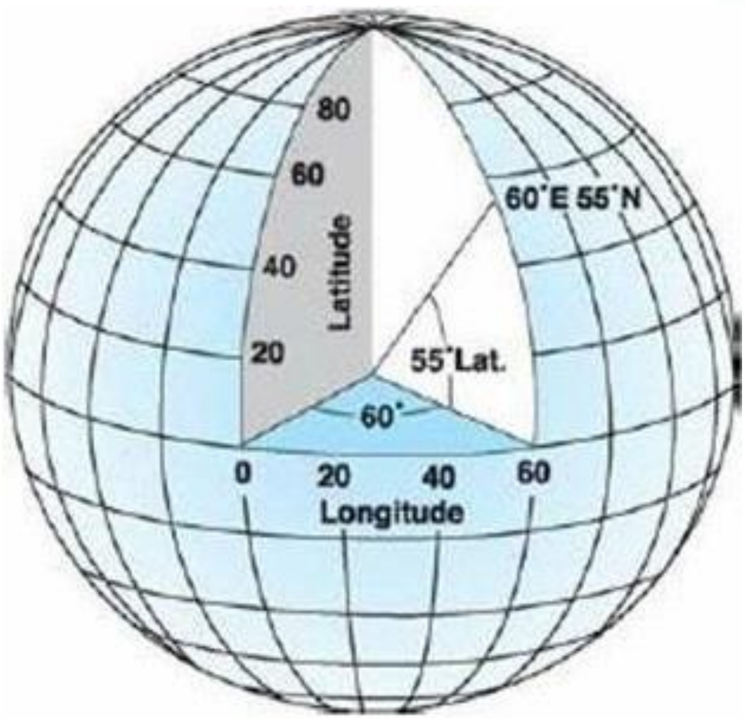
球面面积: $S=\iint\limits_{(D)}R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=4\pi R^2$

**例** 求地球上由子午线$\theta=30^\circ,\theta=60^\circ$和纬线$\varphi=45^\circ,\varphi=60^\circ$所围部分的面积(把地球近似看成是半径$R=6.4\times10^6\,\mathrm{m}$的球)




纬线是地球表面某点随地球自转所形成的轨迹。

纬度是过椭球面上某点作法线，法线与赤道平面的夹角。

经度是指通过某地的经线面与本初子午面所成的二面角。

**例** 求地球上由子午线$\theta=30^\circ,\theta=60^\circ$和纬线$\varphi=45^\circ,\varphi=60^\circ$所围部分的面积(把地球近似看成是半径$R=6.4\times10^6\,\mathrm{m}$的球).

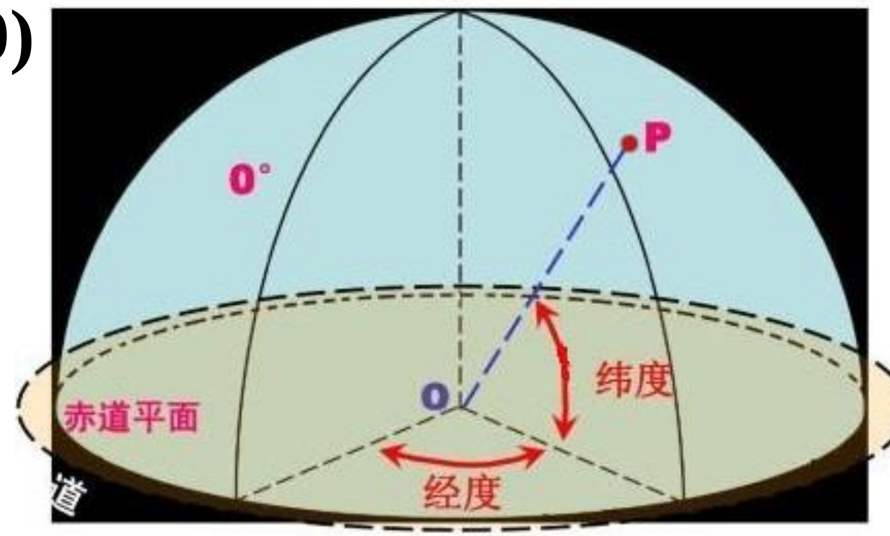
**球面$(S)$的参数方程:** $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\varphi,\theta)=(R\sin\varphi\cos\theta,R\sin\varphi\sin\theta,R\cos\varphi)$

$$(\varphi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=(R\cos\varphi\cos\theta,R\cos\varphi\sin\theta,-R\sin\varphi)$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-R\sin\varphi\sin\varphi,R\sin\varphi\cos\theta,0)$$

$$\left\|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi\right\|=R^2\sin\varphi$$




$(R=6.4\times10^6\mathrm{m})$

$$S=\iint_{(D)}R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{6}R^2\left(-\cos\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{12}R^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

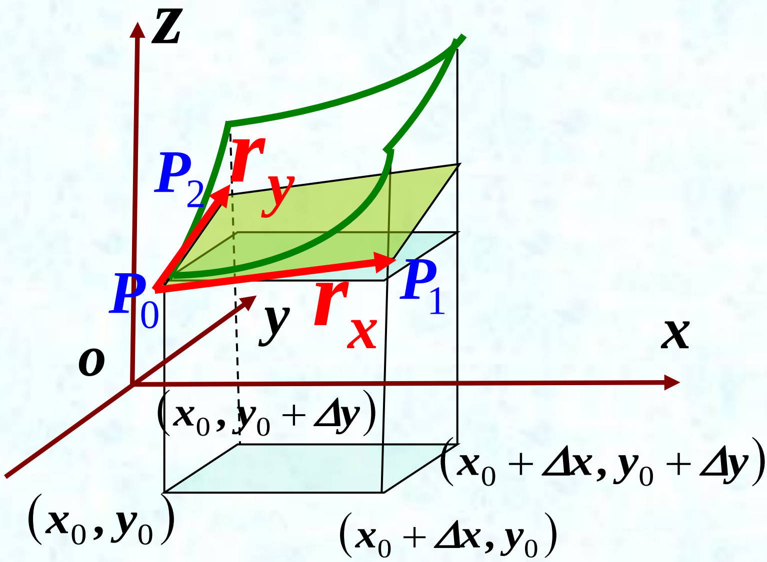
## 三、几何关系

曲面$(S)$方程为:$z=z(x,y),(x,y)\in(\sigma)\subseteq R^2$ 时,

其向量方程为:$r=r(x,y)=\left(x,y,z(x,y)\right),(x,y)\in(\sigma)\subseteq R^2$

$$\vec{n}=r_x\times r_y=-z_x i+-z_y j+k$$

为曲面上$P_0$点处的法向量.




其方向余弦 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}}$

则: $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即 $\mathrm{d}S\cdot\cos\gamma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

这表明，面积微元dxdy就是曲面面积微元d$S$在$xoy$平面上的投影。

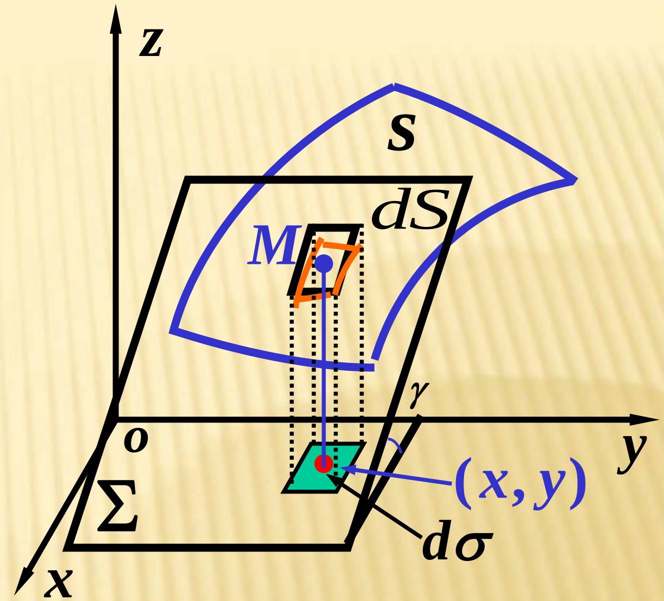
# 四、曲面面积的计算

**①．设曲面S的方程为：$z=f(x,y)$**

**S在 $xoy$ 面上的投影区域记为 $D$，如图，**

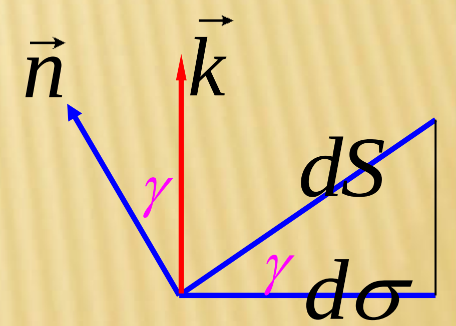
**设绿色小区域 $d\sigma\in D$，点 $(x,y)\in d\sigma$，**

**$\Sigma$ 为 $S$ 上过 $M(x,y,f(x,y))$ 的切平面.**




$\because d\sigma$ 为 $dS$ 在 $xoy$ 面上的投影,

$$\therefore\quad d\sigma=dS\cdot\cos\gamma,\quad \vec{n}=\left\{-z_x,-z_y,1\right\}$$




$$\because \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

S的面积微元 $dS=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma \quad \therefore S=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$

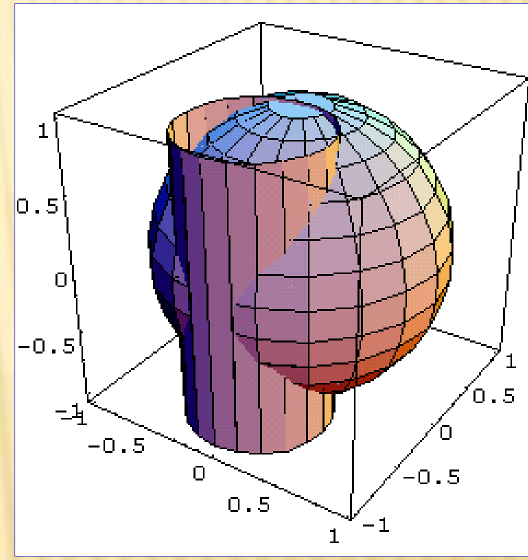
②．设曲面的方程为：$x = g(y,z)$

曲面面积公式为：$$A = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz;$$

③．设曲面的方程为：$y = h(z,x)$

曲面面积公式为：$$A = \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dzdx.$$

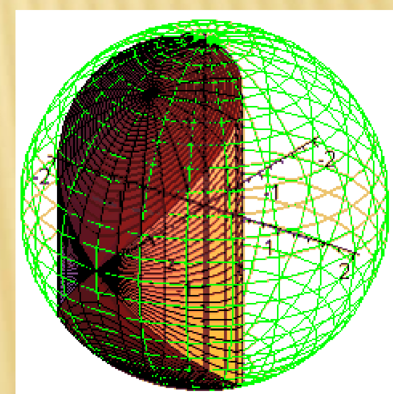
**例.** 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，含在圆柱体 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.




**解** 由对称性知：$S=4S_1$

$$D_1:\ x^2+y^2\le ax,\quad (x,y\ge 0)$$

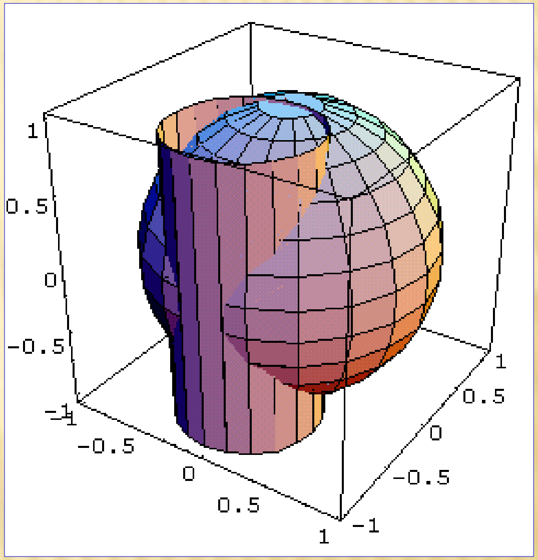
曲面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,



于是 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

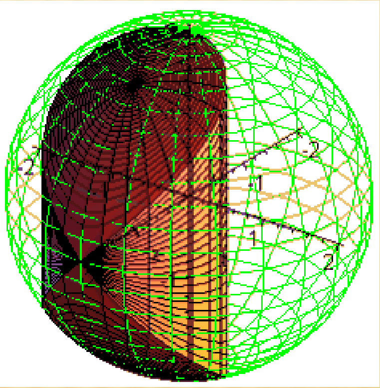
面积 $S=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy$

面积 $S = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\, dxdy$




$$= 4\iint\limits_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, rdr$$

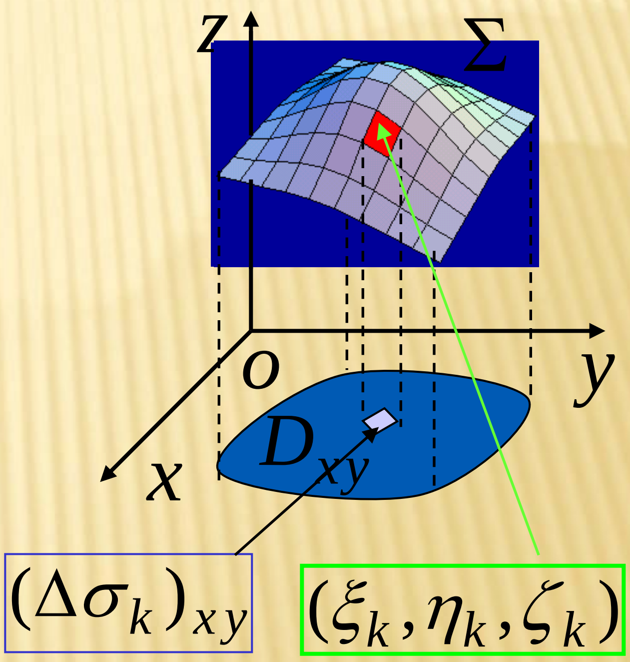


$$= 2\pi a^2 - 4a^2.$$

# 五、第一型曲面积分(对面积) 的计算法

**定理：　设有光滑曲面**

$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$




$f(x, y, z)$ **在 $\Sigma$ 上连续, 则曲面积分**

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$ **存在，且有**

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, \underline{z})\underline{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \boldsymbol{z(x, y)})\sqrt{\boldsymbol{1 + z_x{}^2(x, y) + z_y{}^2(x, y)}}\boldsymbol{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

计算方法：化为平面区域$D_{xy}$上的二重积分

$D_{xy}$是积分曲面$\Sigma$向$xoy$坐标面投影后所得区域

1. 若曲面$(S)$: $z=z(x,y)$ 则

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma_{xy})} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

2. 若曲面$(S)$: $y=y(x,z)$ 则

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma_{xz})} f\left[x,y(x,z),z\right]\sqrt{1+y_x^{\ 2}+y_z^{\ 2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z;$$

3. 若曲面$(S)$: $x=x(y,z)$ 则

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma_{yz})} f\left[x(y,z),y,z\right]\sqrt{1+x_y^{\ 2}+x_z^{\ 2}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

- 注意利用对称性、形心公式　简化计算的技巧.

**定理:** 设有光滑有界曲面

$$S: r = r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \quad (u,v) \in (\sigma)$$

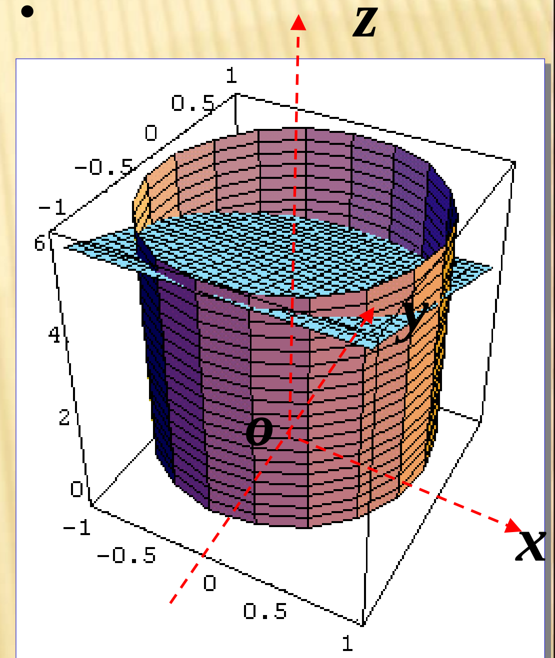
$f(x, y, z)$ 在 S 上连续, 则第一型曲面积分

$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在，且有

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{(\sigma)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|r_u \times r_v\| dudv$$

**例1** 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中Σ为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分.




**解** 积分曲面 Σ：$z=5-y$，

投影域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 25\}$

$$dS=\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}\,dxdy$$

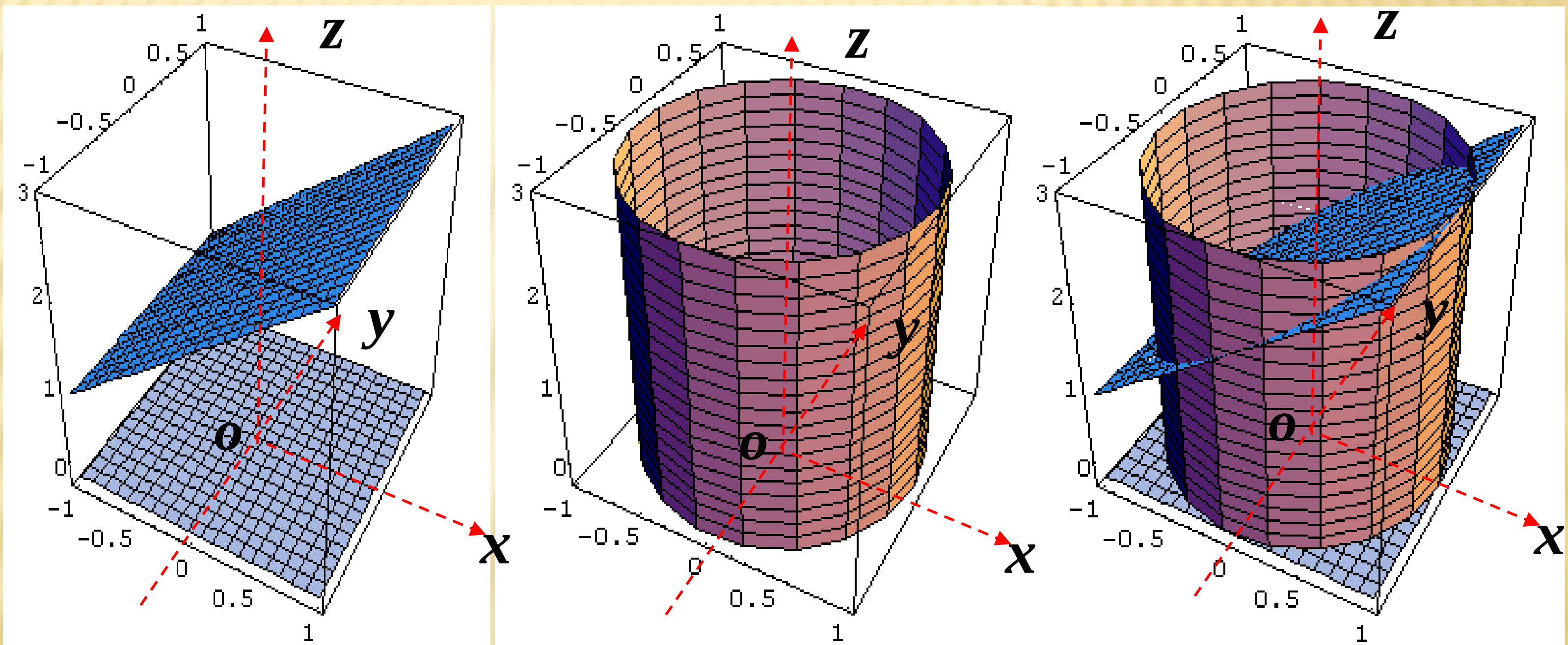
$$=\sqrt{1+0+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy,$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$$

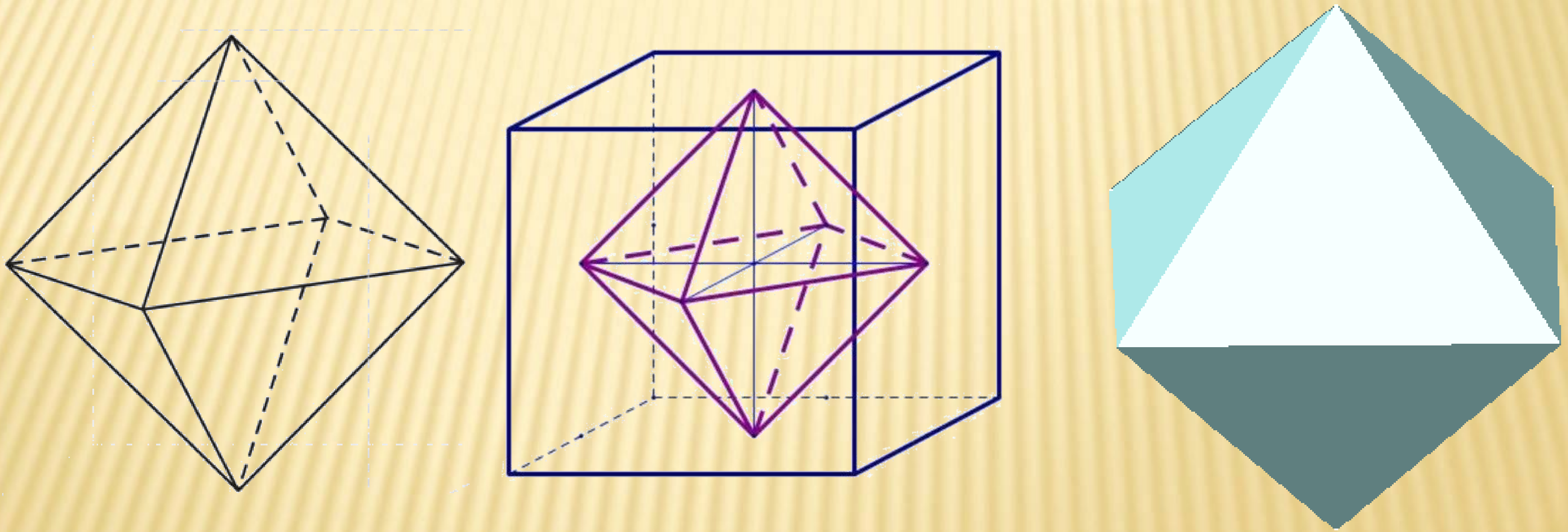
$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+5-y)dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(5+x)dxdy$$

$$=5\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy+0=125\sqrt{2}\pi.$$

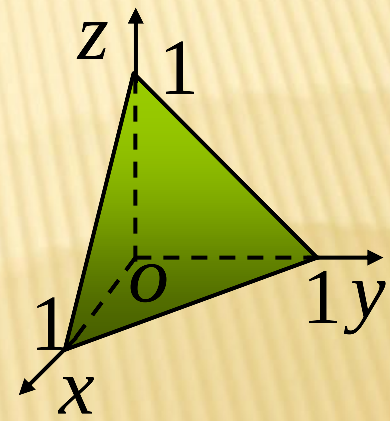
**例2** 计算$\displaystyle\oiint_{\Sigma} x\,dS$，其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+y^2=1$，平面$z=x+2$及$z=0$所围成的空间立体的表面.



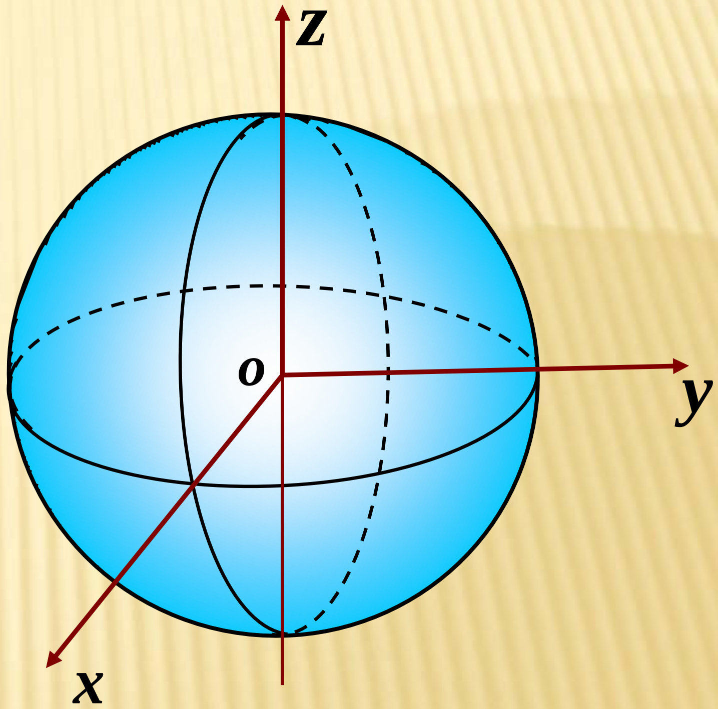
**例3** 计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中$\Sigma$为内接于球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.



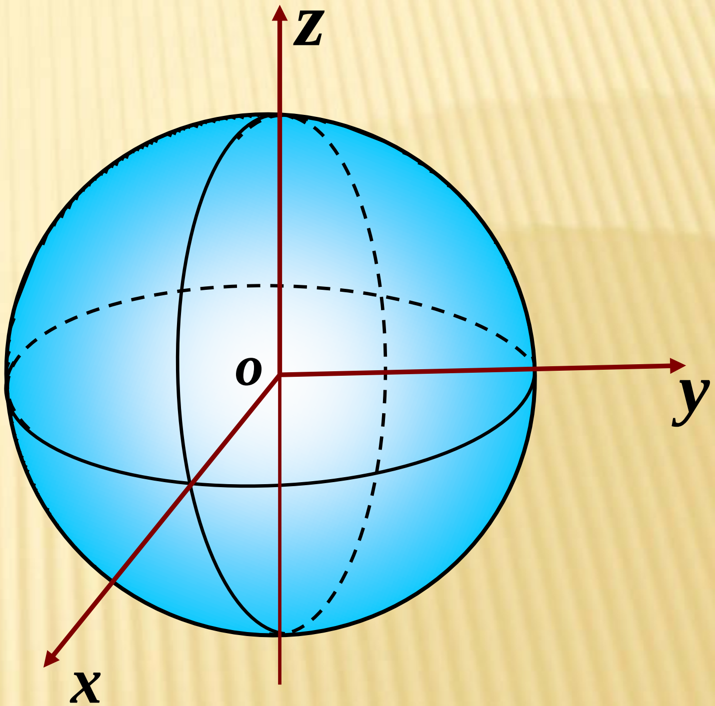
**例4.** 设 $\Sigma$ 是四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的表面, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S.$



**例5** 求质量均匀分布的球面$(S)$: $x^2+y^2+z^2=R^2$ 对$z$轴的转动惯量 .



**例**　求质量均匀分布的球体$(V)$:$x^2+y^2+z^2=R^2$对$z$轴的转动惯量.



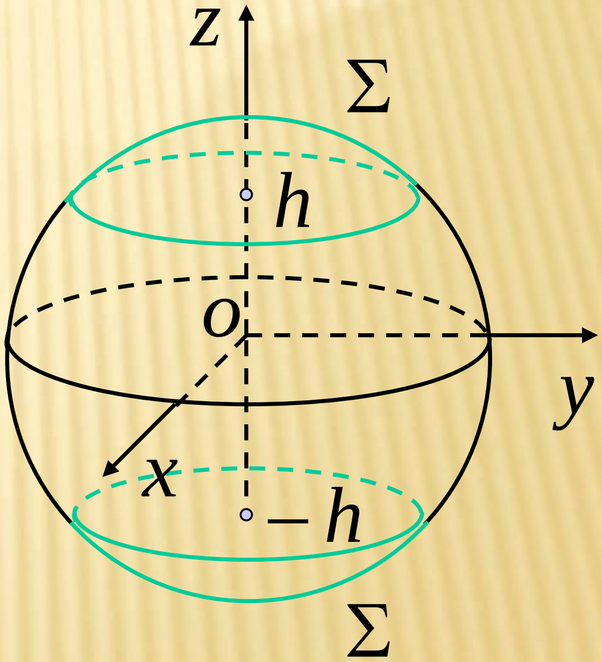
**例6.** 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

## 思考:

若 $\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\qquad\qquad\qquad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\qquad\qquad\qquad)$$



**例8.** 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma$ 是球面:

$$x^2+y^2+z^2=2(x+y+z).$$

**例.** 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$, $\Sigma_1$为$\Sigma$在第一卦限中的部分, 则有(　　　　).

(A) $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$;

(B) $\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$;

(C) $\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$;

(D) $\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$.

**思考：** 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $\Sigma$ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.