第三节 微分及其应用

- 一、微分的定义与几何意义
- 二、微分运算法则
- 三、微分在近似计算中的应用
- 四、小结

P128 习题2.3

(A) 3， 4，5， 7，9，11

一 微分的定义与几何意义

1、问题的提出

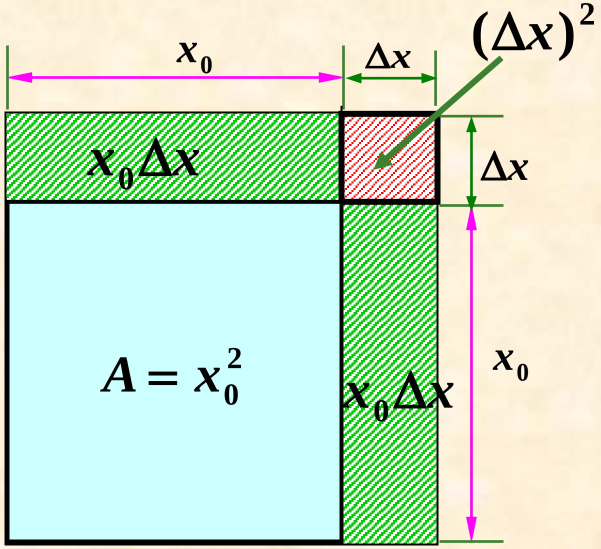
实例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A=x_0^2$,

$$\therefore \Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2): Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

再如，设函数 $y = x^3$ 在点 x_0 处的改变量为 Δx 时，求函数的改变量 Δy.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$$

$$= \underbrace{3x_0^2 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，(2)是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$，

$$\therefore \Delta y \approx 3x_0^2 \cdot \Delta x.$$

既容易计算又是较好的近似值

问题：这个线性函数（改变量的主要部分）是否所有函数的改变量都有？它是什么？如何求？

2、微分的定义

定义　设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数 $y=f(x)$在点x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数 $y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$

微分dy称为函数增量Δy的线性主部.(微分的实质)

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$

$dy = A\Delta x.$

由定义知:

(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是$\Delta x$的高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时, dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0).$$

(4) A是与Δx无关的常数, 但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx dy$ (线性主部).

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上处处可微，则称 $f(x)$在区间I 上可微。

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

两个基本问题：（1）函数可微的条件是什么？

（2）若函数可微，则定义中的 $A=?$

3、可微的条件

定理 函数 $f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证（1）必要性 $\because f(x)$在点x_0可微，

$$\therefore \Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),\ \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$在点x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

定理 函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

（2）充分性 $\because$ 函数$f(x)$在点x_0可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0), \quad 即 \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$,

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \because \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$$

即 函数$f(x)$在点x_0可微,

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微. $A = f'(x_0)$.

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$ $dy = A\Delta x.$

例1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$, $\Delta x = 0.02$时的微分.

解 $\because dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x.$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 0.24.$$

例2 考虑函数 $y = x$ 的微分:

$$dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x$$

即 $dx = \Delta x.$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为**自变量的微分**.

$$\therefore dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

4 微分的几何意义

$$f'(x_0) = \tan\alpha$$

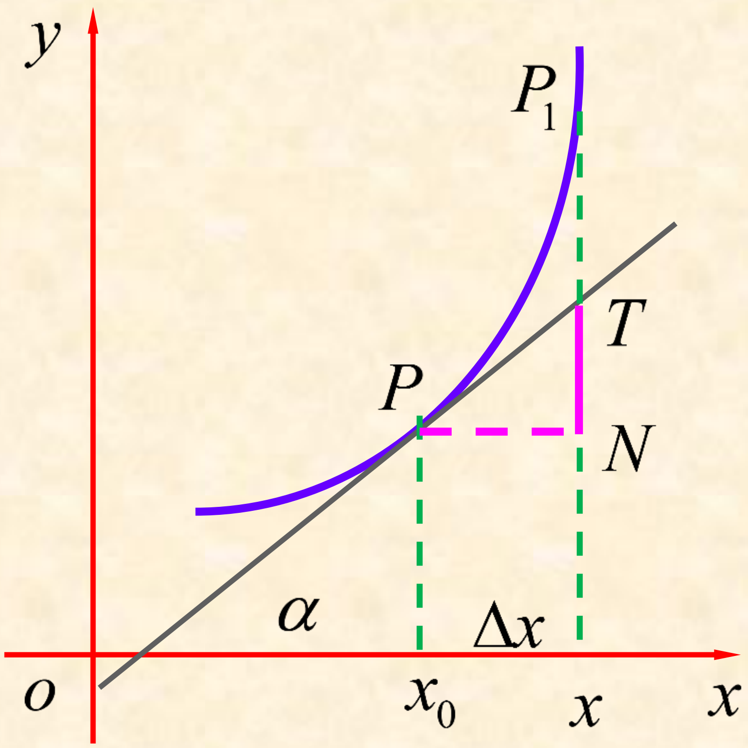
$$NT = \tan\alpha \cdot PN$$

$$= f'(x_0)dx = dy$$

$$NP_1 = \Delta y$$

$$NT = dy$$

$$\Delta y - dy = o(\Delta x),$$

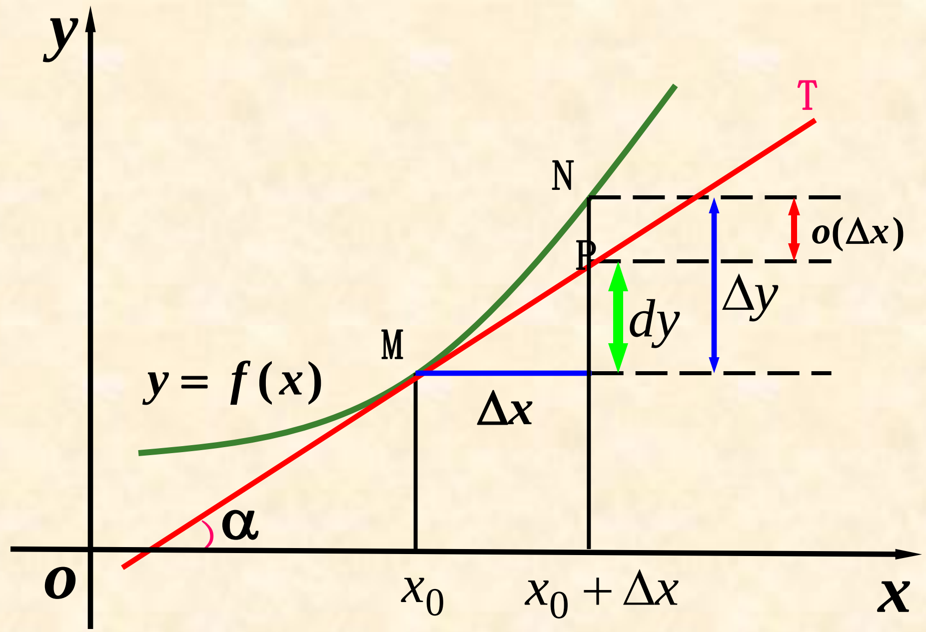


$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

4、微分的几何意义

几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.

二、微分的求法

$$dy = f'(x)dx$$

求法：计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1. 基本初等函数的微分公式

$d(C) = 0$　　$d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$

$d(\sin x) = \cos x dx$　　$d(\cos x) = -\sin x dx$

$d(\tan x) = \sec^2 x dx$　　$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$　　$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad d(arc\cot x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

微分运算法则

$$\frac{d(u\pm v)}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx},\qquad \frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

$$d(u\pm v)=du\pm dv,\qquad d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

例3 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解 $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\quad\therefore dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$

例4 设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

解 $dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$\because (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x}$, $\quad(\cos x)'=-\sin x.$

$\therefore dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$

$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$

3、复合函数的微分（微分形式的不变性）

设函数 $y=f(x)$有导数 $f'(x)$,

(1) 若x是自变量时， $dy=f'(x)dx;$

(2) 若x是中间变量时，即另一变量t的可微函数 $x=\varphi(t)$, 则 $dy=f'(x)\varphi'(t)dt$

$\because \varphi'(t)dt=dx,$ $\qquad\qquad \therefore dy=f'(x)dx.$

结论：无论 x是自变量还是中间变量，函数 $y=f(x)$的微分形式总是 $\boxed{dy=f'(x)dx}$

$$d\square=\square'_{\bigcirc}\,d\bigcirc$$

微分形式的不变性

例 $y=\arctan\ln\cos\sqrt{x^2+1}$ 求dy

解

$$dy = d\arctan[\ \ln\cos\sqrt{x^2+1}\ ]$$

$$=\frac{1}{1+[\ln\cos\sqrt{x^2+1}]^2}\,d[\ \ln(\cos\sqrt{x^2+1})]$$

$$=\frac{1}{1+[\ln\cos\sqrt{x^2+1}]^2}\,\frac{1}{(\ \cos\sqrt{x^2+1}\ )}\,d(\cos\sqrt{x^2+1})$$

$$=\frac{1}{1+[\ln\cos\sqrt{x^2+1}]^2}\cdot\frac{-\sin\sqrt{x^2+1}}{(\cos\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot dx$$

$$d\,\square' = \square_{\bigcirc}\ d\bigcirc$$

2.设函数$f(u)$可导,当$y=f(x^2)$的自变量x在$x=-1$处产生增量$\Delta x=-0.1$时，相应的函数增量Δy的线性主部为0.1,则$f'(1)=($　　$)$.

(A) -1；　(B) 0.1；　(C) 1；　(D) 0.5.

$$\because \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}} = f'(x^2)\cdot 2x\cdot\Delta x\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}} = f'(1)\cdot 2(-1)(-0.1)$$

$$=0.2f'(1)=0.1, \therefore\ f'(1)=\frac{0.1}{0.2}=0.5$$

4. 高阶微分

$$dy = f'(x)dx$$

$dx = \Delta x$，与 x 无关

$$d(dy) = d[f'(x)dx] = f''(x)(dx)^2$$

$$d^2 y = f''(x)dx^2$$ 二阶微分

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$ 高阶微分(二阶及二阶以上)

高阶微分没有形式不变性

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$

$dy = A(x)\Delta x.$

三. 微分在近似计算应用

1、函数的近似计算

当$|\Delta x|$很小, 且 $f'(x_0)\neq 0$时,

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x \qquad (1)$$

$$\because \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

令 $x = x_0 + \Delta x$, 则

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad (2)$$

特别当 $x_0 = 0$时, $f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad (2)$$

特别当 $x_0 = 0$时, $f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$

例 证明如下近似公式：

（1） $e^x \approx 1 + x$;

（2） $\ln(1+x) \approx x$

（1）令 $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ $\quad x = 0$, $\quad f(0) = 1, f'(0) = 1$

（2）令 $f(x) = \ln(1+x)$， $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ，

$x = 0 \quad f(0) = 0, f'(0) = 1$

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

例 证明如下近似公式：。 $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$

（1） $e^x \approx 1+x$;

（2） $\ln(1+x) \approx x$

证 （1）令 $f(x)=e^x, f'(x)=e^x$ ，当 $x=0$时，

$f(0)=1, f'(0)=1$，由 $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$

得 $f(x) \approx 1+x$ ，即 $e^x \approx 1+x$

（2）令 $f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，当 $x=0$

时，$f(0)=0, f'(0)=1$，由 $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$

得 $f(x) \approx x$ ，即 $\ln(1+x) \approx x$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$$

几个常用的近似公式（x 很小时）

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$;

(2) $\sin x \approx x$ （x的单位: 弧度);

(3) $\tan x \approx x$ （x的单位: 弧度);

(4) $e^x \approx 1 + x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

用等价无穷小可给出函数的近似表达式:

$\because \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, $\quad \therefore \lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$, $\quad$ 即 $\beta - \alpha = o(\alpha)$,

于是有 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

例：计算arctan1.05的近似值。

例：计算arctan1.05的近似值。

解：设 $f(x)=\arctan x$,

$$\because \quad f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$\therefore \quad \arctan(x_0+\Delta x)\approx \arctan x_0+\frac{1}{1+x_0^{\,2}}\Delta x.$$

这里 $x_0=1, \Delta x=0.05$, 于是有

$$\arctan 1.05=\arctan(1+0.05)$$

$$\approx \arctan 1+\frac{1}{1+1^2}\cdot 0.05$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{0.05}{2}\approx 0.8104$$

例 求 $\sqrt{24.6}$ 的近似值。

例 求 $\sqrt{24.6}$ 的近似值。

解 $$\sqrt{24.6}=\sqrt{25(1-\frac{0.4}{25})}=5\sqrt{1-0.016}$$

$$f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=1,\quad \Delta x=-0.016$$

$$\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{2}$$

$$\sqrt{1-0.016}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot(-0.016)=0.992$$

所以 $\sqrt{24.6}\approx 5\times 0.992=4.960.$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

例 求 $\sin 46^\circ$ 的近似值。

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

例 求 $\sin 46^\circ$ 的近似值。

解 取 $f(x) = \sin x,\quad x_0 = \dfrac{\pi}{4},\qquad x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}$

$$\sin 46^\circ \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{180}\right) \approx 0.7194.$$