第一章　函数、极限、连续

第三节　函数的极限(3课时)

- 函数极限的概念
- 函数极限的性质与运算法则
- 两个重要极限
- 函数极限的存在准则*

作业:

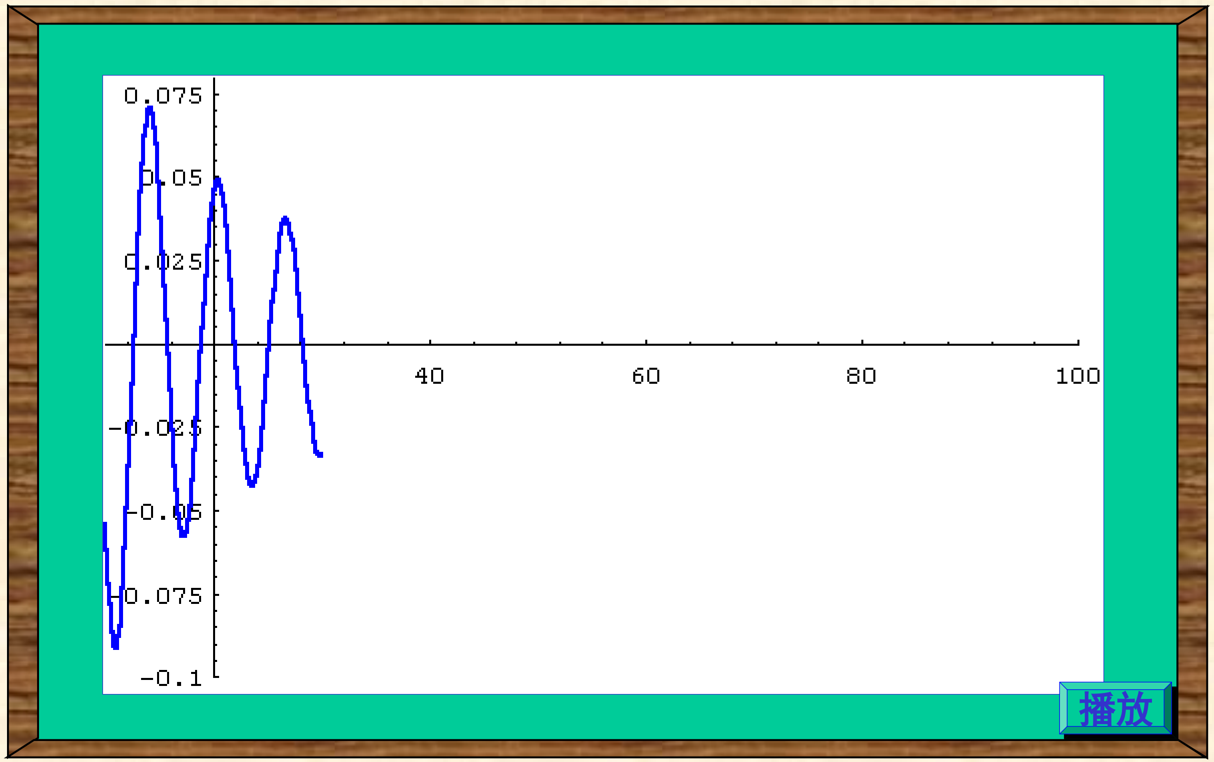
Page 58.

10,11,12,13,17 .

第一部分　函数极限的概念

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to +\infty$ 时的变化趋势



问题：函数 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 的<u>过程中</u>，对应函数值 $f(x)$ 无限<u>趋近于</u>确定值 A？

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时，$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 $\mathbf{0}$.

问题：如何用数学语言刻划函数“无限接近”？

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$x > M$ 表示 $x \to +\infty$ 的过程.

1. 定义：

定义 1　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数M，使得对于适合不等式$x > M$的一切x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数A就叫函数$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当 x \to +\infty)$$

$\boxed{\text{"}\varepsilon - M\text{"定义}}$　$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$，使当$x > M$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2.另两种情形:

$(1).\ x \to -\infty$ 情形 : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$ 使当 $x < -M$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

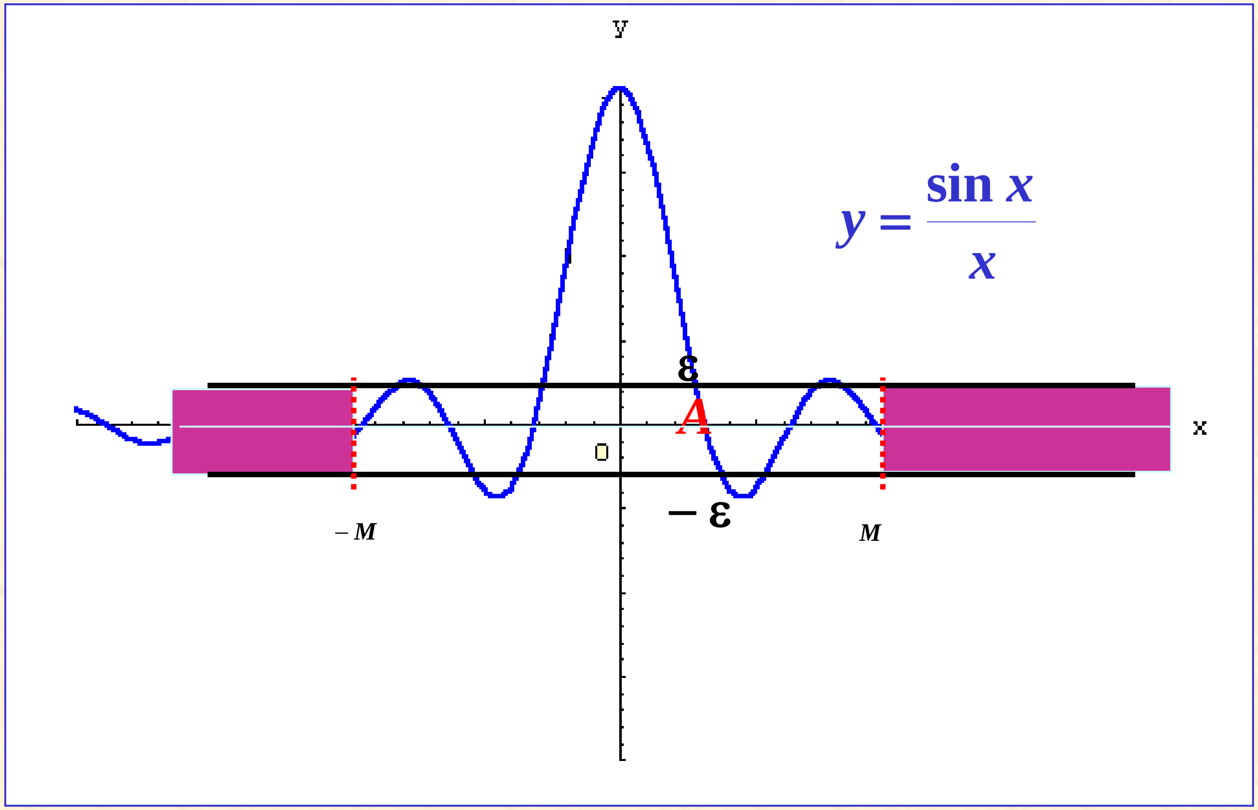
$(2).\ x \to \infty$ 情形 :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$ 使当 $|x| > M$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

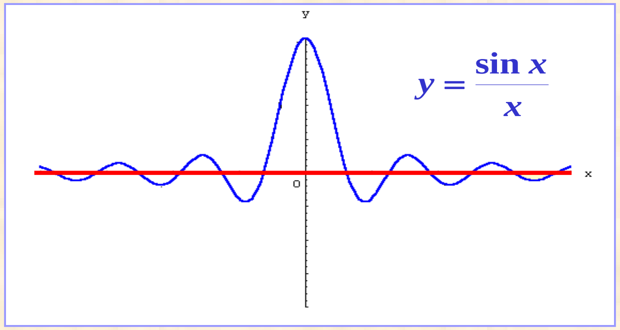
定理 : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

3.几何解释:



当$x < -M$或$x > M$时, 函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线, 宽为2ε的带形区域内

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



证 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$时恒有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

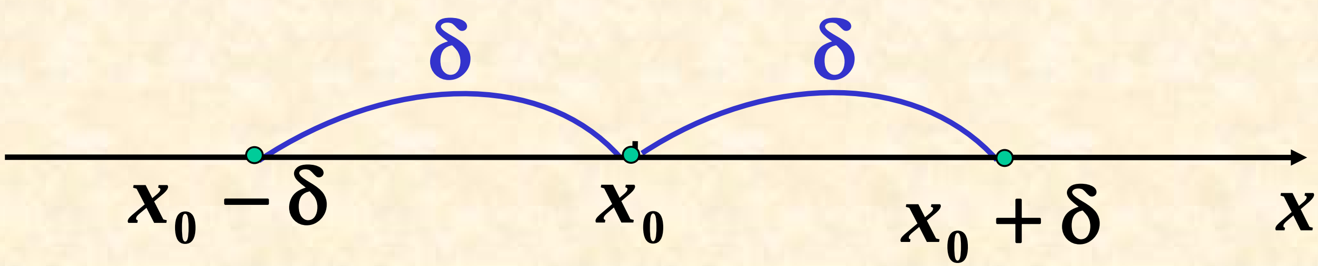
定义：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

二、自变量趋向有限值时函数的极限

问题：函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的<u>过程中</u>，对应函数值 $f(x)$ 无限<u>趋近于</u>确定值 A？

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小；

$0 < |x - x_0| < \delta$ **表示** $x \to x_0$ **的过程**



点 x_0 的去心 δ 邻域，δ 体现 x 接近 x_0 程度.

1.定义:

定义 2　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ,使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

"$\varepsilon-\delta$"定义

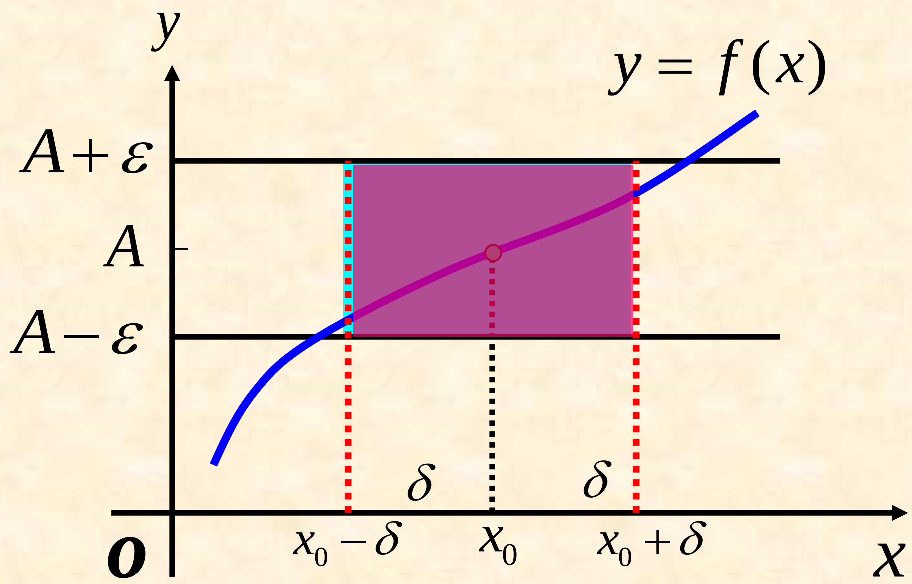
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注意: 1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.δ与任意给定的正数ε有关.

2.几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后,所有比δ更小的δ'也能满足要求.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, ($C$为常数).

证 任给$\varepsilon > 0$, 任取$\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证 $\because |f(x) - A| = |x - x_0|$, 任给$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$时,

$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

"$\varepsilon - \delta$"定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

证 函数在点x=1处没有定义.

$\because \left|f(x)-A\right| = \left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \left|x-1\right|$ 任给$\varepsilon>0$,

要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$, 只要取$\delta=\varepsilon$,

当$0<\left|x-1\right|<\delta$时, 就有$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

例5 证明：当$x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 $\because \left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\dfrac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt{x_0}}$,

任给$\varepsilon>0$，要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,

只要$\left|x-x_0\right|<\sqrt{x_0}\,\varepsilon$且$x$不取负值 取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\varepsilon\}$,

则当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时，就有$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

例4* 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}.$

分析 $\because \left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x-1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{|x-1|}{2|x+1|}$

令 $0<x<2$，则 $-1<x-1<1, |x-1|<1.$

$1<x+1<3, |x+1|>1, \dfrac{1}{|x+1|}<1;$

$\left|f(x)-A\right|=\dfrac{|x-1|}{2|x+1|}<\dfrac{|x-1|}{2}<\varepsilon \quad \therefore |x-1|<2\varepsilon.$

例4* 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$,

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

就有 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{x-1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,

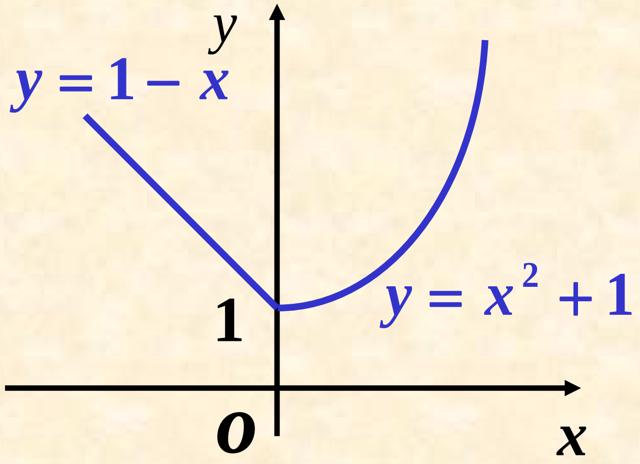
$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

3.单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;

x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^+$

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\boxed{\text{记作} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A.}$$

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\boxed{\text{记作} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A.}$$

注意：$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$

$$= \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\}$$

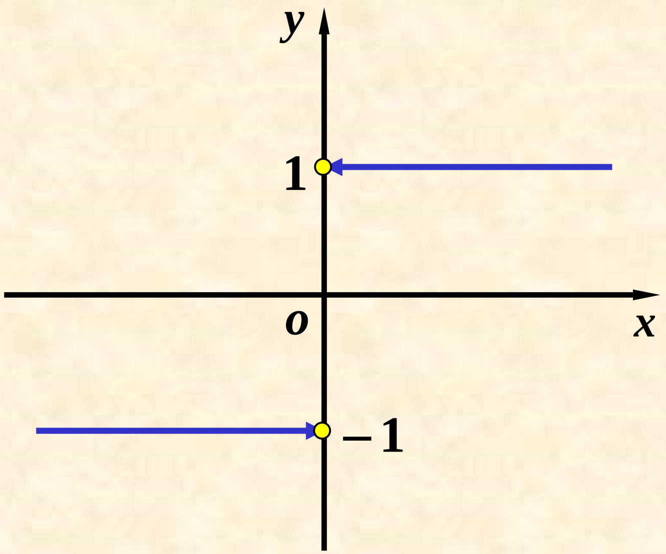
定理：$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$

例6 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$



左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(5+x^2) = 5,$$ 左极限存在,

$$\left| x\sin\frac{1}{x} - 0 \right| \le |x| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$,使当$0 < x < 0+\delta$时,

恒有$\left| x\sin\frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$ 右极限存在,

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

解

$$f(0-0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

故原极限不存在。

例8 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ e^{x}, & x<0 \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ___(1)___

(1) $=1$　(2) 不存在

(3) $=2$　(4) $=e$

4.函数极限与数列极限的关系

设 $f:\overset{0}{U}(x_0)\to R$, 对$\overset{0}{U}(x_0)$中任何数列$\{x_n\}$,

对应于 $f(x)$, 有数列$\{f(x_n)\}$,

即$f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots\ ,\ f(x_n),\ \cdots$

定理:（函数极限的归并原理—Heine定理）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$$\forall\{x_n\}\in\overset{0}{U}(x_0),\lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

对 $x\to x_0, x\to x_0^+$,或 $x\to x_0^-, x\to\infty, x\to\pm\infty$ 亦成立.

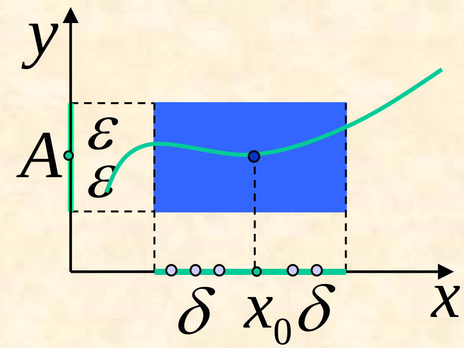
定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \{x_n\}: x_n \neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A.$

证: "$\Longrightarrow$" 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

$\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$,

对上述 $\delta, \exists\ N$, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$,

于是当 $n > N$ 时 $|f(x_n) - A| < \varepsilon.$



故 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

"$\Longleftarrow$" 可用反证法证明