高等数学下册期中考试模拟题（二）答案

一．单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$，其中 $\alpha>0$ 为常数，则 $f(x,y)$ 在(0,0)处（ D ）.

A．连续但不可偏导　　B．可偏导但不连续

C. 可微且 $df\big|_{(0,0)}\neq 0$　　D. $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续

2．已知 D 为顶点坐标为 A(1,1)，B(-1,1)和 C(-1,-1)的三角形区域，D_1 为 D 的第一象限部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$ 等于（ A ）.

A．$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y d\sigma$　　B．$2\iint\limits_{D_1} xy d\sigma$　　C．$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$　　D． 0

3．设有直线 L：$\begin{cases} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-4\boldsymbol{z}+1=0 \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-3=0 \end{cases}$ 和曲面 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面为 π，则直线 L 和平面 π 的位置关系为（ C ）.

A．$\boldsymbol{L}\subset\pi$　　B．$\boldsymbol{L}/\!/\pi$　　C．$\boldsymbol{L}\perp\pi$　　D．$\boldsymbol{L}$ 与 π 斜交

4．设空间曲线 Γ：$\begin{cases} \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=2 \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=1 \end{cases}$ 在点 P(-1,1,1)处的切线的单位方向向量为 $\vec{a}$，且该向量与 z 轴正向夹角为锐角，则函数 $u=x^2+2y^2-3z^2$ 在点 M(2,-1,-1)沿方向 $\vec{a}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial\vec{a}}\right|_M$ 为（ B ）.

A．$-2\sqrt{6}$　　B．$2\sqrt{6}$　　C. 12 或-12　　D．$2\sqrt{6}$ 或 $-2\sqrt{6}$

5. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，若 $f(x,x^2)=x^3$, $f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y(x,x^2)$ 等于（ A ）.

A. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^3$　　B．$2\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}^4$　　C．$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^5$　　D．$2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^2$

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设函数 $u=e^{-\pi z}\cos\frac{x}{y}$ 在点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{\pi},0)$ 处的全微分 $du=$ $\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}(dx-\frac{\pi}{4}dy+dz)}$

2. $u=z^2-2xy+y^2$ 在点 $(1,-1,\frac{1}{2})$ 处的方向导数的最小值为 $\underline{-\sqrt{21}}$

3. 交换二次积分的次序（其中 $f(x,y)$ 连续）.

$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y=$ $\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x}$

4. 使二重积分 $\iint\limits_D (4-4x^2-y^2)d\sigma$ 达到最大的平面区域 D 为 $\underline{4x^2+y^2\le 4}$

5. 设 $z=f(x^2-y^2,\varphi(xy))$，其中 f,φ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{2(x^2+y^2)f_1}$

三. 计算下列各题(每小题 8 分，共 16 分)

1. 设 $z=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)+\dfrac{y}{g(x^2+y^2)}$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 二阶可导， 求

$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2-\dfrac{2xyg'}{g^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}+(1+xy)e^{xy}f_2+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}+xye^{2xy}f_{22}-\frac{2x}{g^2}(gg'+2y^2gg''-4y^2(g')^2)$$

2. 设 $\mathrm{r}=\mathrm{r}(t)$ 为空间 R^3 中动点 $(x(t),y(t),z(t))^T$ 的向径，证明 $\|\mathrm{r}(t)\|=c\Leftrightarrow$ 内积 $\langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}'(t)\rangle=0$. (c 为常数)

解：必要性：$\|\mathrm{r}(t)\|=c,\ \langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}(t)\rangle=c$，两边对 t 求导，$2\langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}'(t)\rangle=0$，$\langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}'(t)\rangle=0$.

充分性：$\langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}'(t)\rangle=0$，即 $\frac{d}{dt}\langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}(t)\rangle=0$，因此 $\langle \mathrm{r}(t),\mathrm{r}(t)\rangle=c$，$\|\mathrm{r}(t)\|=c$.

四. 计算下列各题（每题 8 分，共计 24 分）

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$.其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及坐标轴所围成的第一象限内的闭区域.

解： $I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\rho\ln(1+\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{4}\int_0^4\ln(1+t)dt=\frac{\pi}{4}(5\ln 5-4)$

2. 设函数 $f(x)$ 连续，平面有界闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,|y|\le|x|\le 1\}$，证明：.

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\pi\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{\sqrt{2}}(\pi-4\arccos\frac{1}{x})xf(x)dx.$$

证：设 D_1 是 D 在第一象限的区域，利用对称性，作极坐标变换，写成先 θ 后 ρ 的累次

积分：

$$\iint\limits_{D} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=4\iint\limits_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=4(\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho f(\rho)d\theta+\int_1^{\sqrt{2}}d\rho\int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}}\rho f(\rho)d\theta$$

$$=\pi\int_0^1\rho f(\rho)d\rho+\int_1^{\sqrt{2}}(\pi-4\arccos\frac{1}{\rho})\rho f(\rho)d\rho$$

3. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数 $u(x,y,z)=f(r)$，其中 $f(r)$ 具有二阶连续导数。

（1）把 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 表示成 r 的函数.

（2）若 u 满足 $\Delta u=0$，求 $f(r)$.

解：（1）$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)(\frac{x}{r})^2+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}$，同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)(\frac{y}{r})^2+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)(\frac{z}{r})^2+f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

故 $\Delta u=f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}$.

（2）$f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}=0$，分离变量解得 $f'(r)=\frac{C_1}{r^2}$，从而 $f(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$.

五.（12 分） 求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$ 在闭域 $D: x^2+2y^2\le 3$ 上的最值.

解：在 D 内，$f_x=4x+6y=0,\ f_y=6x+2y=0$，解得驻点 $x=0,y=0$，$f(0,0)=0$.

在 D 边界上，令 $L(x,y,\lambda)=2x^2+6xy+y^2+\lambda(x^2+2y^2-3)$，$L_x=0,L_y=0,L_\lambda=0$，解得

$\lambda=1$ 或 $\lambda=-\frac{7}{2}$，得驻点 $(1,-1),(-1,1),(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，比较函数值，可得函数在

$(1,-1),(-1,1)$ 取得最小值 $f(\pm1,\mp1)=-\frac{1}{3}$，在 $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 取得最大值

$f(\pm\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{21}{2}$.

六（10 分）讨论函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续，偏导是否存在，是否可微？

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，所以函数在 $(0,0)$ 处连续.

$f_x(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$f_y(0,0)=0$，所以函数在(0, 0)处的偏导数存在.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2\cdot kx}}{\sqrt{x^2+(kx)^2}}$ 与 k 有关，所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

七.（8 分）设 $F(x,y)$ 可以表示为 $F(x,y)=f(x)g(y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ 其中 f,g,φ 都是连续函数. 证明：$F(x,y)=C_2e^{C_1(x^2+y^2)}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

证：对 $f(x)g(y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ 两边同时求偏导，得

$$f'(x)g(y)=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f(x)g'(y)=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

从而 $yf'(x)g(y)=xf(x)g'(y)$，分离变量得 $\dfrac{f'(x)}{xf(x)}=\dfrac{g'(y)}{yg(y)}=C_1$，$C_1$ 为常数，

因此 $f(x)=C_2e^{\frac{1}{2}C_1x^2}$, $g(y)=C_3e^{\frac{1}{2}C_1y^2}$，故 $F(x,y)=C_2C_3e^{\frac{1}{2}C_1(x^2+y^2)}=\tilde{C}e^{\tilde{C}_1(x^2+y^2)}$.