

文章编号: 1005-3085(2003)05-0094-06

# 彩票运行方案的合理性研究

刘 伟, 陈银冬, 梁志聪

指导教师: 梁满发

(华南理工大学, 广州 510640)

**编者按:** 本文依据题目的条件和要求建立了两个评价模型: 吸引力指数模型、稳定性指数模型。前者的构造联想到 Logistic 模型, 说明作者思路较开阔, 会借鉴成熟的方法。在设计方案时两个模型采用了先粗后精、逐步优化的方案, 有较好的操作性和一定的创新性。得到的结果有一定的意义。建模过程中将奖额、比例综合考虑, 化简合理。不足之处有: 求解只用了计算机模拟; 对吸引力指数中两种彩民的权重和综合指数模型设计的解释不够。

**摘 要:** 本文建立了评价彩票销售规则及奖金设置方案合理性的模型。通过对 Logistic 函数的改造, 建立了评价彩票对彩民吸引程度的“吸引力指数”; 运用计算机模拟的方法评价方案运行的稳定性; 最后根据由以上两个因素共同决定的综合指数作出方案合理性的评价。

**关键词:** 彩票; 彩票奖金设置; Logistic 函数; 计算机模拟

**分类号:** AMS(2000) 90C05

**中图分类号:** O221.1

**文献标识码:** A

## 1 模型的假设

- 1) 彩民投注的号码是均匀分布的。
- 2) 彩民依据风险偏好程度分为“冒险型”和“稳健型”两类。

## 2 模型的分析与建立

建立本模型的目的是评价需要考察的若干不同的种彩票销售规则和奖金设置方案的合理性。而“合理性”是一种抽象概念, 不易用绝对的标准来衡量, 所以我们转而通过对比各个方案的特点, 得出相对意义下的合理性评价。根据各方案的具体销售规则, 很容易得到其所设置各奖项的中奖概率。但仅从中奖概率的大小, 还不能直接判断方案是否合理。考虑到彩票是政府授权专门的彩票经营机构发行的一种按特定规则取得奖金的凭证, 我们从方案是否对彩民具有吸引力和能否给经营管理部门带来利润这两各方面, 分析各个方案的合理性。为此我们建立了以下三个评价指数模型。

### 2.1 “吸引力指数”模型

评价方案的合理性, 最直接的标准就是购买这种彩票的彩民的多少, 即彩票对彩民的吸引力如何, 为此建立“吸引力指数”模型, 用以评估不同的彩票销售规则和奖金设置方案吸引力的相对大小。总体上说, 彩民购买彩票的目的是在付出一定代价的情况下, 获得“意外”的

财富收益,这种收益在彩票的低中奖概率下具有极大的不确定性。现在从两方面考虑这种不确定性带来的影响。有一部分彩民,他们购买彩票的目的在于追求高额的奖金,即不会过多地考虑亏损的可能,而十分看重这种彩票最高奖金的设置;还有一部分彩民,他们的目的在于通过购买彩票,能够或多或少地得到收益,并把经常性的中奖当成一种乐趣,因而在选择彩票时偏重中奖面的大小,而对最高奖金额的重视程度远不如前一种彩民。

基于这样的分析,我们把全体彩民分为两类:看重高额奖金而忽略亏损风险的彩民为“冒险型”,用集合  $A$  表示;看重中奖面而不太在意最高奖金的彩民为“稳健型”,用集合  $B$  表示。我们假设全体彩民只由这两类组成,即如果用  $E$  表示彩民的全体,则有

$$A \cap B = \Phi \quad A \cup B = E$$

对于某个具体的彩票发售地区而言,如果设该地区的总人口数为  $P$ ,某种类型彩民购买的彩票数为  $N$ ,则这种彩票的吸引力指数的定义式为

$$d_1 = \frac{N}{P \cdot k} = P \cdot d_1 \cdot k \quad (1)$$

其中  $k$  为常数,表示购买彩票数与总人口的比例。

以上是对吸引力指数的整体分析。下面我们将分别对“冒险型”彩民和“稳健型”彩民设计不同的吸引力因子  $f_1$ 、 $f_2$ 。

题中的 29 种方案均采用如下规则计算最高奖金额:

$$\text{高项奖额} = [(\text{当期销售总额} \times \text{总奖金比例}) - \text{低项奖总额}] \times \text{单项奖比例}$$

设  $t$  为最高奖奖金数,令  $f_1$  为  $t$  的函数,而  $f_2$  为既为  $t$  和各项奖总中奖概率  $p$  的二元函数,并令  $d_1$  满足

$$d_1 = \delta_1 \cdot f_1 + \delta_2 \cdot f_2 \quad (2)$$

其中  $\delta_1$ 、 $\delta_2$  为两种类型彩民在总的“吸引力指数” $d_1$  中的权重,为简化分析得到计算范例,我们假设  $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$ 。

由(2)式可以看出, $d_1$  与  $f_1$ 、 $f_2$  成线性关系,因此  $f_1$ 、 $f_2$  的函数应该和  $d_1$  具有相似的表达式。我们建立  $d_1$  的目的在于评价某种方案在对彩民的吸引力方面的相对合理性,为了使结果更加直观,不妨将  $d_1$  定义在 0 到 100 之间,且值越大方案相对越合理。而  $d_1$  又可以视为  $f_1$ 、 $f_2$  的加权平均,故也令  $f_1$ 、 $f_2$  在 0 到 100 之间变动。

对“冒险型”的彩民,当最高奖金的奖金数额越小时,对他们的吸引力较小。最高奖金额提高到一定程度,由于可以使彩民实现某种心理期望(如购房、买车、创业等),吸引力将会大大提高。当最高奖超过一定限度,吸引力增加将会减慢。因此,我们假设吸引力与最高奖金  $t$  的关系有类似 Logistic 函数形式

$$f_1 = \frac{M}{1 + (\frac{M}{m} - 1) \cdot e^{-\sqrt{\gamma_0} \cdot t}} - 1 \quad (3)$$

其中  $M$ 、 $m$ 、 $\gamma_0$  为参数。当然,实际中最高奖金额受中最高奖人数影响,因此我们用最高奖金占彩票销售额比例代替。

对“稳健型”彩民,他们主要受中奖面大小影响,但最高奖金额也有一定影响。因此我们假设

$$f_2 = \frac{M}{1 + (\frac{M}{m} - 1) \cdot e^{-[\omega \cdot \sqrt{P} + \ln(r_0 \cdot t)]}} \quad (4)$$

其中  $\omega$  为常数。

为了使  $f_1, f_2$  的取值范围在 0 到 100 之间, 可取  $M = 100, m = 1$ 。又根据彩票销售的实际情况, 当最高奖金达到 200 万元, 中奖总概率达到 0.02 时, 吸力基本达到“饱和”, 即指数接近 100, 为此我们确定  $\gamma_0 = 50, \omega = 500$ 。

下面绘出  $f_1, f_2$  (当  $t = 500$ )、 $d_1$  函数的图象分别为图 1、图 2 和图 3。

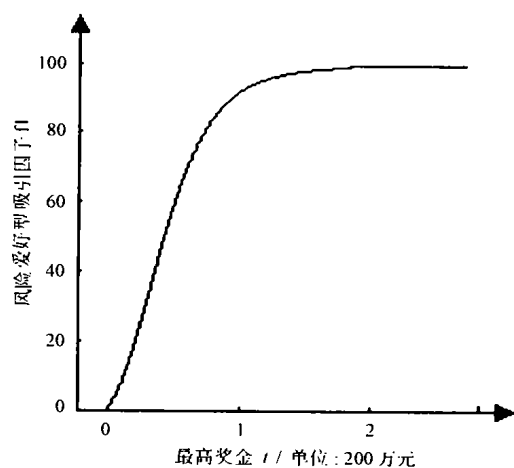


图 1  $f_1$  函数图像

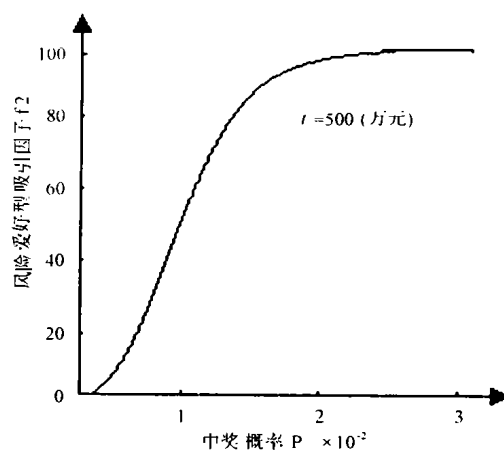


图 2  $f_2$  函数图像

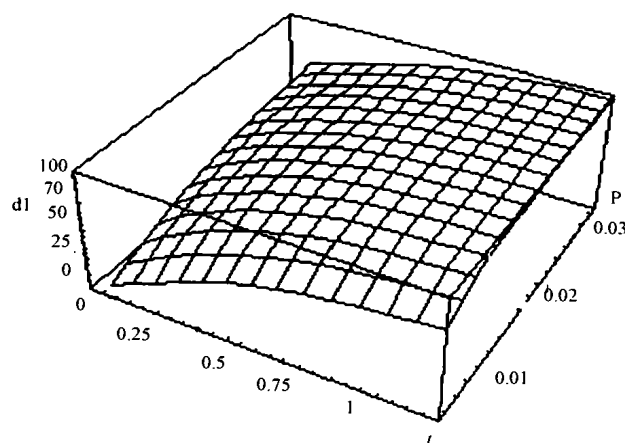


图 3  $d_1$  函数图像

题目给出的 29 种方案的计算值见表 1。

表1 吸引力指数计算结果

方案号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	77.9	79.8	78.5	79.3	80.9	82.2	85.0	87.3	89.2	
方案号	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	82.4	86.9	81.5	84.1	86.2	83.2	89.2	79.6	86.3	81.2
方案号	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	87.2	89.1	90.8	88.4	89.1	89.7	87.1	79.1	79.3	79.3

从表1可以看出第25号方案的值最大,即对彩民的吸引力最大,也就是在这一指标下最为合理的方案。在得到了“吸引力指数” $d_1$ 后,我们可以准确地评估某方案的相对合理性。但回顾前面的模型建立过程,可以看出增大彩票吸引力的途径只有提高最高奖项金额或中奖率。如果让这两个参数取各自意义下的最大值,“吸引力指数”甚至可以达到100。

## 2.2 “稳定性指数”模型

不难发现,极端情况下“吸引力指数”“不正常”增长的前提是牺牲交易的另一参与者——彩票经营管理机构的利益。合理的情况应该是在吸引更多的彩民的同时,必须使经营管理机构获得相应的利润。然而不论何种彩票,其总中奖概率均较小,因而大多数方案都不存在绝对亏损的可能,即不存在发出的奖金数额超过彩票的总销售额。事实上,大多数经营机构发行彩票时只承诺拿出总销售额的50%作为返还给彩民的奖金,另外50%用来维持彩票的运转。

从彩票经营管理机构的角度看,合理的方案应该使总盈利比较大。在返还率 $c$ 已定的情况下想要增加彩票的盈利,只有吸引更多的彩民使总销售收入增大。但返还率 $c$ 只是期望值,每次实际开奖后未必会发出与期望值相等的奖金额。如果某种方案经常会使实际返还率低于 $c$ ,即出现“盈利过度”,彩票今后的销售量就会减少;相反如果经常使实际返还率高于 $c$ ,即实发奖金超过预定的总奖金额,就会造成“相对亏损”。所以实际返奖率高于或低于期望值 $c$ 都会带来不利影响。

根据上面的分析,同时考虑到可操作性,不宜直接通过盈利多少衡量方案的合理性,因而我们从彩票销售是否稳定的角度评价合理性,为此建立“稳定性指数” $d_2$ 。

进一步分析发现,影响实际返还率的因素是彩票奖金设置中关于一等奖保底金额60万元和封顶金额500万元的规定,以及低等奖采用固定金额带来的总奖金数的不确定性。

设为中 $n_i$ 等奖的人数, $a_i$ 为 $i$ 等奖对应的奖金数, $t_1$ 为一等奖的分配比例, $N$ 为总奖金数,则当

$$60 \times 10^4 n_1 \leq (N - \sum_{i=4}^s a_i \cdot n_i) \cdot t_1 \leq 500 \times 10^4 n_1 \quad (5)$$

时,实际平均返奖率为 $c$ 。根据这个式子,我们建立如下函数来反映实际返奖率的变化

$$f(n_1, n_4, n_5, n_6, n_7, \dots, n_s) = \frac{(N - \sum_{i=4}^s a_i \cdot n_i) \cdot t_1}{n_1} \quad (6)$$

当 $f \leq 60 \times 10^4$ 时,实际返奖率大于 $c$ ,对应“相对亏损”的情况;当 $f \geq 500 \times 10^4$ 时,实际返

奖率小于  $c$ , 对应“盈利过度”的情况。

然而计算(6)式的值, 必须知道待评估的方案在某一次实际开奖后各奖项的中奖人数, 而这些数据无法事先知道, 即使知道也只能评估该方案对于这次开奖是否合理。因此只能考虑(6)式的函数值落在三个区间内的概率为多少, 我们采用计算机模拟的方法, 模拟一千万次投注, 得到各奖项中奖频率, 再根据大数定理得到各奖项中奖概率。

同时通过计算机模拟的方法, 可以进一步模拟出每次开奖后实际发出的总奖金额及实际返还率, 再根据实际返还率与  $c$  的偏离程度评价方案的稳定性, 则定义如下:

$$d_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - R)^2}{n} \quad (7)$$

其中  $x_i$  为第  $i$  次模拟产生的总奖金额,  $R$  为预定奖金额,  $n$  为模拟次数,  $d_2$  值越小越合理。我们进行了  $2 \times 10^7$  次模拟, 计算结果见表 2。

表 2 稳定性指数计算结果

方案号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	1.214	1.163	1.122	1.212	1.075	1.056	1.092	1.099	1.105	
方案号	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	1.108	1.105	1.136	1.146	1.143	1.161	1.165	1.183	1.187	1.213
方案号	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	1.206	1.211	1.214	1.332	1.236	1.229	1.235	1.250	1.170	1.164

### 2.3 综合指数模型

为了能够同时反映吸引力和稳定性两方面因素, 全面评价方案的合理性, 我们建立综合指数  $D$  的模型, 定义为:

$$D = \frac{d_1}{d_2} \quad (8)$$

由于该模型用“稳定性指数”做分母, “吸引力指数”做分子, 所以  $D$  值较大的情况对应于稳定性好, 吸引力强, 即比较合理的方案, 从而可以同过比较  $D$  值, 找出最为合理的方案。计算结果见表 3。

表 3 综合指数计算结果

方案号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	64.2	68.6	70.0	65.4	75.3	77.8	77.8	79.4	80.7	74.4
方案号	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	74.4	78.6	71.7	73.4	75.4	71.7	76.6	67.3	72.7	66.9
方案号	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	72.3	73.6	74.8	66.4	72.1	73.0	70.5	63.3	67.1	68.1

可见第 9 号方案是本评价模型下最为合理的彩票销售规则和奖金设置方案。

### 3 模型优缺点评价

优点:

1). 影响每一个方案合理性的因素有很多,若一一讨论显然不切实际。为此,本文提取出两个主要因素,分别建立了指标函数:吸引力指标和风险指标。于是,对每一个具体的方案,我们都可以通过权衡这两个指标,最后达到评估每一个方案的合理性。

2). 本文建立的模型需要确定的参数很少,避免了一般的多目标规划方法对参数估计的不确定性。

缺点:

风险指标的计算,我们是通过计算机模拟投注实现的,而计算机模拟选号的覆盖率要比实际的人工选号的覆盖率高得多,风险指标会跟它的实际数值存在一定的误差。

参考文献:

- [1] 姜启源. 数学模型[M]. 北京:高等教育出版社,1993.8.
- [2] 魏陆. 彩票市场的均衡分析财经研究[M]. 长春:东北财经大学出版社,2000.9.
- [3] 陆剑清,马胜祥,彭贺,李同庆. 投资心理学[M]. 长春:东北财经大学出版社,2000.
- [4] 柯林斯(美). 变中取胜——新经济投资法则[M]. 北京:机械工业出版社,2001.7.

### Research on the Rationality of Lottery Rules

LIU Wei, CHEN Yin-dong, LIANG Zhi-cong

Advisor: LIANG Man-fa

(South China University of Technology, Guangzhou 510640)

**Abstract:** In this paper, we have set up a model to evaluate the rationality of the lottery sale rules and award settings. With the "Charming Index" transformed from the Logistic function, we can evaluate how much a certain lottery attracts people. Then we analyze the stability of sale in term of computer simulation. Finally, according to the two factors, we can get a comprehensive index that determines whether the rule and award of a certain lottery is reasonable or not.

**Keywords:** lottery; logistic function; computer simulation