4、单选 下述结论正确的是（ ） (10分)

A 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

B 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数。

D 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

第 3 章习题

1. 选择题(在下列各题给出的四个选项中，只有一个是正确的，试选择正确的选项并说明理由.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$，则(   ).

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积　　(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

(C) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$　　(D) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则(   ).

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数　　(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

(C) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多只能有有限个间断点　　(D) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

2、单选

当 $\Delta x \to 0$ 时，α 是比 Δx 高阶的无穷小,函数 $y(x)$ 在任意 x 点处的增量 $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ 且 $y(0) = \pi$，则 $y(1) =$（ ）.

(10分)

A π

B $\dfrac{5\pi}{4}$

C $e^{\frac{\pi}{4}}$

$V=C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,$V$的子集$W$是满足方程 $f'+2f=0$的可微函数 f 的全体. W是否构成V的子空间?

$f+g\in W$?

$kf\in W$?

若W是V的子空间，求其基与维数.

$f=ke^{(-2x)}$, k取任意实数

工科数学分析基础 (上)

第四章 常微分方程

第一节 几类简单的微分方程

第一节 几类简单的微分方程

- 几个基本概念
- 可分离变量的微分方程
- 一阶线性 微分方程
- 可变量代换的一阶微分方程

齐次微分方程 **Bernoulli**

- 可降阶的高阶微分方程
- 应用举例

作业: Page265,
1(双号), 2(双号), 3(双号)
4(双号), 6(单号)

第一部分　基本概念

一、问题的提出

例1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为$y=y(x)$

$$\frac{dy}{dx}=2x$$ 其中$x=1$时, $y=2$

$y=\int 2x\,dx$ 即$y=x^2+C$, 求得$C=1$,

所求曲线方程为$y=x^2+1$.

二、微分方程的定义

凡含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**.

例 $y' = xy$, $y'' + 2y' - 3y = e^x$,

$(t^2 + x)dt + xdx = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y$, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

实质: 联系自变量, 未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)的关系式

微分方程的阶: 最高阶导数的阶数.

分类: 常微分方程, 偏微分方程.

常微分方程: 微分方程中的未知函数y是x的一元函数.

偏微分方程: 微分方程中的未知函数y是x的多元函数.

微分方程的解: 满足微分方程的函数 $y=f(x)$

分类1：常微分方程，偏微分方程.

微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数.

分类2：

一阶微分方程 $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

高阶(n)微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

分类3：线性与非线性微分方程.

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

分类4：单个微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z, \end{cases}$$

三、主要问题------求方程的解

微分方程的解: 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数.

若微分方程为: $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$,

设$y = \varphi(x)$在区间I 上有n阶导数, 且

$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$ 则$y = \varphi(x)$为解

微分方程的解的分类:

(1) **通解:** 微分方程的解中含有任意常数, 且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解.

独立: 不能通过运算合并为一个

微分方程的通解：解中含有任意常数，且其中独立的任意常数的个数等于该方程的阶数.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a$$ 的通解是：$$y=-\frac{1}{2}ax^2+c_1x+c_2$$

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{1}{2}ax^2+c_1x \\ y&=-\frac{1}{2}ax^2+c_1+2c_2 \end{aligned}\right\}$$ 也都是解, 但不是通解！

定解条件： 根据具体情况对通解提出的一些附加条件.

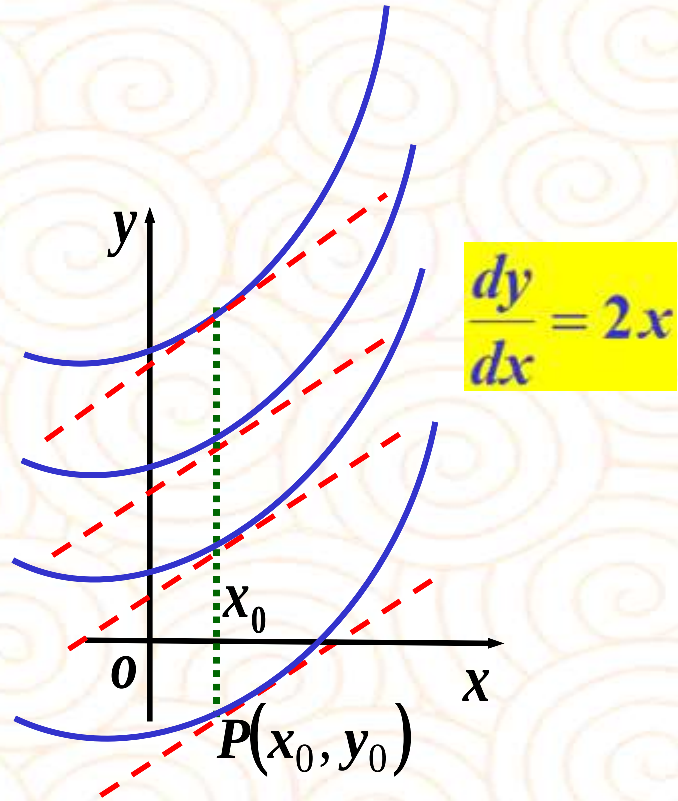
初始条件： 已知初始状态或某一特定状态的条件.

(2) 特解： 确定了通解中任意常数以后的解.

线素： 平面上每点处指定斜率的切线段.

线素场： 分布在xoy面上的小线段场.

(切线段族).

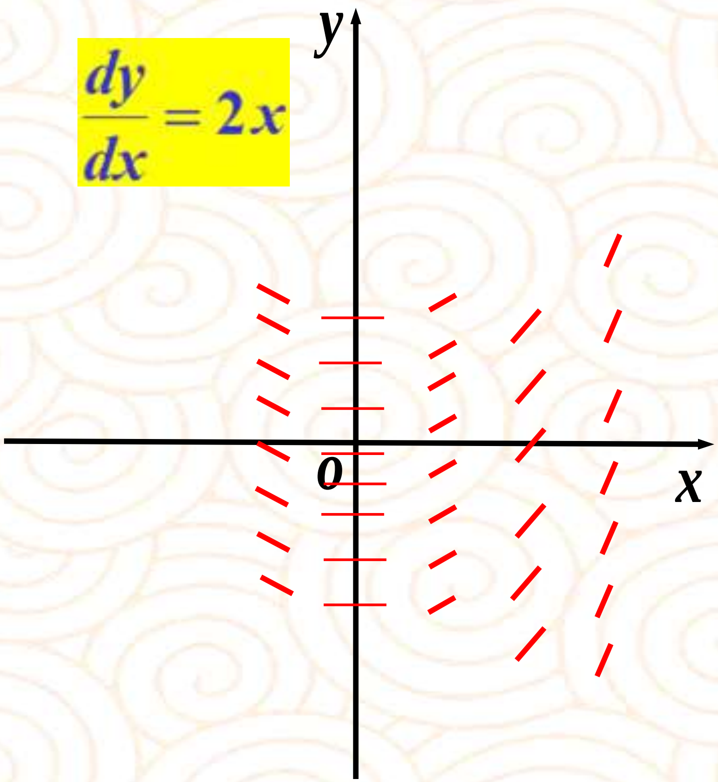


通解的图象： 求无穷多条曲线，在任一点处的切线恰与该点线素重合

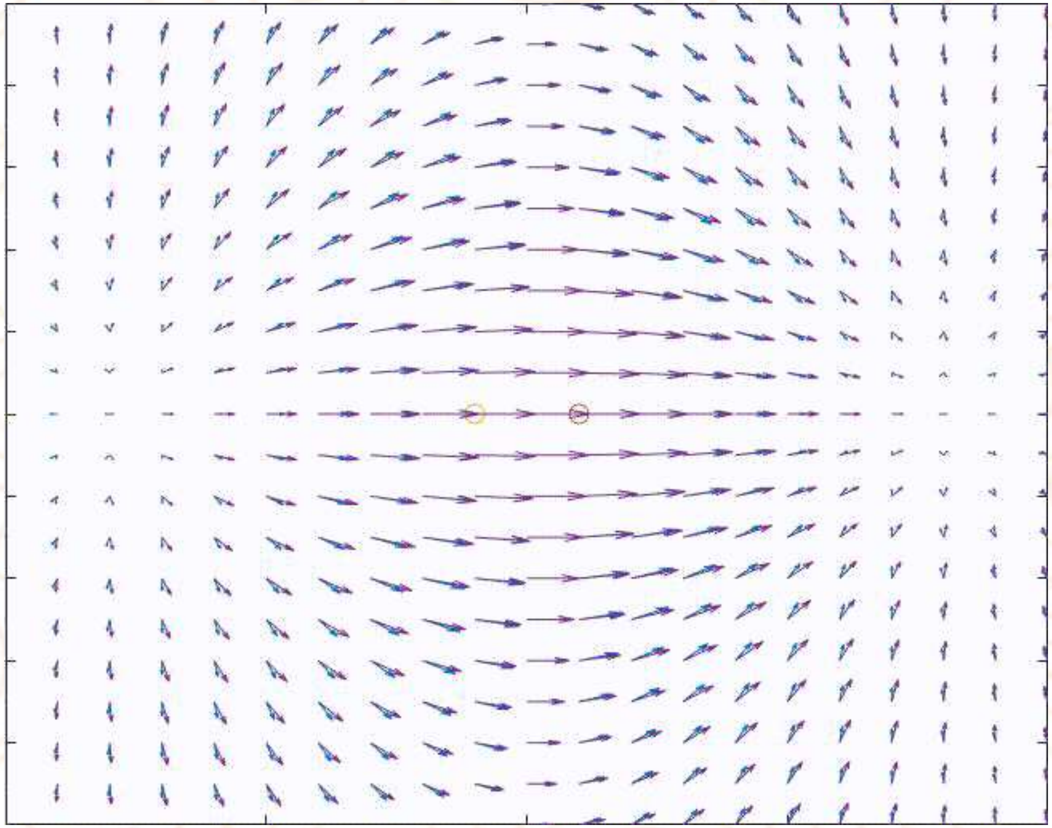
(积分曲线族)

积分曲线： 通解中满足初值条件的特定曲线.

$$\frac{dy}{dx}=2x$$



时不变线素场



时变线素场

给定一个一阶微分方程,就在一个平面区域上确定了一个线素场.

求微分方程的通解,就是求一族积分曲线,使它们在此平面区域内任一点处的切线都与该点的线素相重合.

求该方程满足初值条件$y(x_0)=y_0$的特解,就是在积分曲线族中求出通过点(x_0,y_0)的那一条积分曲线.

初值问题: **求微分方程满足初始条件的解的问题.**

一阶: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为给定值的积分曲线.

例3 验证:函数$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$是微分方程$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$的特解.

解 $\because \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2C_1 \cos kt - k^2C_2 \sin kt,$$

将$\frac{d^2x}{dt^2}$和x的表达式代入原方程

$$-k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

例3 验证:函数$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0}=A,\ \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0$$的特解.

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

故$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$是原方程的解

$$\because\ x\big|_{t=0}=A,\quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0,\qquad \therefore\ C_1=A,\quad C_2=0.$$

所求特解为$x=A\cos kt.$

第二部分　可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$ 为可分离变量的微分方程.

$$\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx,\quad g(y)\neq 0$$

例如 $\dfrac{dy}{dx}=2x^2y^{\frac{4}{5}}\Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy=2x^2dx,$

解法　设函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的,

分离变量法

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$$

设函数 $G(y)$ 和 $F(x)$ 是依次为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的原函数, $G(y)=F(x)+C$ 为微分方程的解.

$g(y_0)=0$ 时, $y=y_0$

例4 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 当 $y\neq 0$ 时, 分离变量为: $\dfrac{dy}{y}=2xdx,$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$

$$\ln|y|=x^2+C_1 \quad \therefore\ y=ce^{x^2}$$

可以验证 $y=0$ 包含在上式解的表达式中.

$\therefore\ y=ce^{x^2}$ 为所求通解.

例5 求方程 $f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$ 通解.

解 令$u=xy$, 则$du=xdy+ydx$,

$$f(u)ydx+g(u)x\cdot\frac{du-ydx}{x}=0,$$

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}dx+g(u)du=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=0,$$

通解为 $\ln|x|+\int\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=C.$

第三部分　一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程的标准形式:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$ ，未知函数及导数均为一次

当$Q(x) \equiv 0$，上方程称为**齐次的**.

当$Q(x) \not\equiv 0$，上方程称为**非齐次的**.

例如 $\dfrac{dy}{dx} = y + x^2$，$\dfrac{dx}{dt} = x\sin t + t^2$，线性的;

$yy' - 2xy = 3$，$y' - \cos y = 1$，非线性的.

一阶线性微分方程的解法

1. 齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,\qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln C_1,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

$y=0$ 也包含在内.

2. 非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

设上述非齐次方程的解为 $y=y(x)$, 则

$\boxed{\frac{y(x)}{e^{-\int P(x)dx}}\text{必是}x\text{的函数}}$

令 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

常数变易法:

把齐次线性微分方程通解中的常数变易为待定函数.

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$,

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$,

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$\boxed{y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)e^{-\int P(x)dx}}$$

$$=\boxed{Ce^{-\int P(x)dx}}+\boxed{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}$$

对应齐次方程通解

非齐次方程特解

(令C=0即可得)

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$\boxed{y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}}$$

例8 求方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解 $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{\sin x}{x}$,

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln|x|}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln|x|}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int\sin x\,dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right).$$

例8 求方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=x$ 的通解。

解 1° 先求齐次的通解

$$\frac{dy}{dx}+y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=-dx\ \Rightarrow\ln|y|=-x+C$$

$$\Rightarrow y=\pm e^{C}e^{-x}\Rightarrow y=Ce^{-x}$$

2° 常数变易法　设 $y=h(x)e^{-x}$ 代入方程

$$y'=h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}=x-y$$

有 $h'(x)e^{-x}=x\Rightarrow h'(x)=xe^{x}\Rightarrow h(x)=xe^{x}-e^{x}+C$

$\therefore$ 原方程的通解为 $y=Ce^{-x}+x-1$

例9 求方程 $(y^2+x)y'=y$ 的通解。

分析： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y^2+x}$ (把 x 看成因变量，把 y 看成自变量)

解 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y$

1° 齐次通解 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}$ $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$ $\ln|x|=\ln|y|+C$

$$x=Cy$$

2° 常数变易法 $x=h(y)y$, 两边同时对自变量 y 求导

$$x'=h'(y)y+h(y)y',\quad \because y'=1\quad x'=h'(y)y+h(y),$$

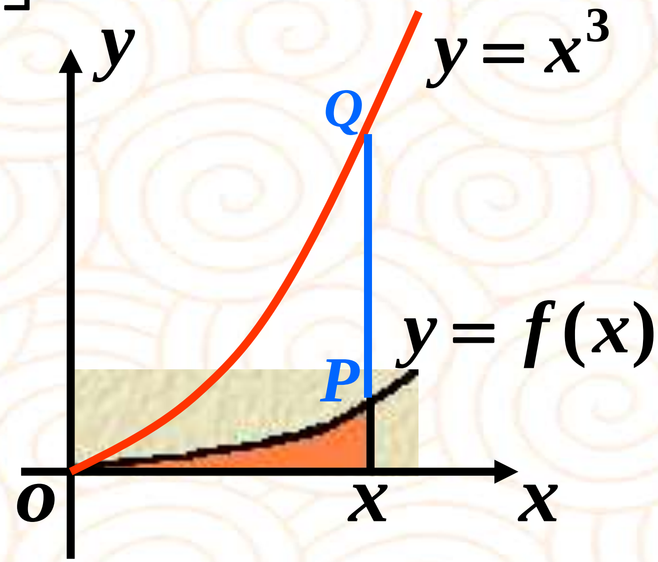
$$x'=h'(y)y+h(y)\text{代入一阶方程}\Rightarrow h'(y)y=y\quad \therefore h(y)=y+C$$

$\therefore$ 原方程的通解为 $x=y^2+Cy$

例10 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^3\ (x \geq 0)$ 截下的线段PQ的长度等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.

解 $$\int_0^x f(x)dx = \sqrt{\left[x^3 - f(x)\right]^2},$$

$$\int_0^x ydx = x^3 - y,$$



两边求导得 $\boxed{y' + y = 3x^2,}$

解此微分方程

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)}\quad \boxed{y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}}$$

$$y'+y=3x^2$$

$$y=e^{-\int dx}\left[C+\int 3x^2e^{\int dx}dx\right]$$

$$=Ce^{-x}+3x^2-6x+6,$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=-6$,

所求曲线为 $y=3(-2e^{-x}+x^2-2x+2).$

第四部分　可变量代换求解的一阶微分方程

一、齐次微分方程

1. 定义　形如$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$的微分方程称为齐次微分方程.

2.解法　用变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$，　即 $y=xu$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入原式得：$u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$,

可分离变量的方程

即 $$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}.$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}.$$

可分离变量的方程

当 $f(u)-u\neq 0$时，得 $\displaystyle\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C_1,$

即 $x=Ce^{\varphi(u)}$，（$\displaystyle\varphi(u)=\int\frac{du}{f(u)-u}$）

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得通解 $x=Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$，

当 $\exists u_0$，使 $f(u_0)-u_0=0$，则 $u=u_0$ 是新方程的解，

代回原方程，得齐次方程的解 $y=u_0x$.

例7 求解微分方程 $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$.

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux,\ \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2},$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}$$

$$\frac{1}{\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}-u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}-u}=\frac{1}{\frac{2u^2-u-u+u^2-u^3}{1-u+u^2}}=\frac{1-u+u^2}{-2u+3u^2-u^3}$$

$$\frac{1-u+u^2}{-2u+3u^2-u^3}=\frac{u-1-u^2}{u(u-1)(u-2)}=\frac{1}{u(u-2)}-\frac{u}{(u-1)(u-2)}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u^2 - u}{1 - u + u^2}$$

$$\frac{1}{\frac{2u^2 - u}{1 - u + u^2} - u}du = \frac{dx}{x}$$

$$[\frac{1}{2}(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}) - (\frac{2}{u-2} - \frac{1}{u-1})]du = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u-1| - \frac{3}{2}\ln|u-2| - \frac{1}{2}\ln|u| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

$$\frac{(u-1)^2}{u(u-2)^3} = Cx^2. \qquad u = \frac{y}{x},$$

微分方程的解为$(y-x)^2 = Cy(y-2x)^3$.

例 设一曲线过点(1,0),曲线上任一点$P(x,y)$ 处的切线在y 轴上的截距等于原点到P点的距离,求此曲线的方程 .

例10 求解微分方程

$$(x-y\cos\frac{y}{x})dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0.$$

解 令$u=\frac{y}{x}$, 则$dy=xdu+udx$,

$$(x-ux\cos u)dx+x\cos u(udx+xdu)=0,$$

$$\cos u du=-\frac{dx}{x},\qquad \sin u=-\ln|x|+C,$$

微分方程的解为 $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C.$

二、伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (n \neq 0,1)$$

其中$P(x), Q(x)$为连续函数

当$n = 0,1$时，方程为线性微分方程.

当$n \neq 0,1$时，方程为非线性微分方程.

解法： 需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令$z=y^{1-n}$， 则 $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$,

代入上式 $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

$$\therefore y^{1-n}=z$$

$$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

$$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)e^{-\int P(x)dx}$$

例11 求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

例12　用适当的变量代换解下列微分方程:

1.　$2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$;

2. $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x};$$

3. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y};$$