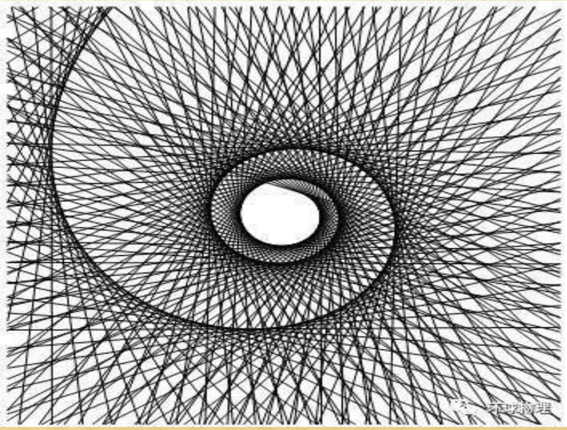
第一章　函数、极限、连续

第五节 连续函数

- 函数的连续性概念与间断点的分类
- 连续函数的运算性质与
  初等函数的连续性
- 闭区间上连续函数的性质
- 函数的一致连续性
- 不动点与压缩映射
- 小结与思考题



作业: Page86.
9, 10, 11, 12, 13

定理5.5（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

考虑不等式：$\alpha \le f(x_{n_k}) < \alpha + \dfrac{1}{n_k} \quad k = 1,2,\cdots$

令$k \to \infty$,由夹逼准则及 $f(x)$在ξ点的连续性知，

$$f(\xi) = \alpha = \inf R_f$$

故$f(x)$在$[a,b]$上的ξ点取到最小值α

同理可证,存在$\eta \in [a,b]$,使得$f(\eta) = \beta = \sup R_f$.

注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.

注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

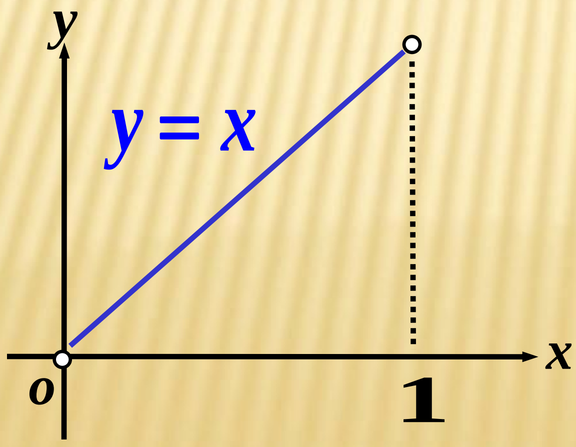
2.若区间内有间断点，定理不一定成立.

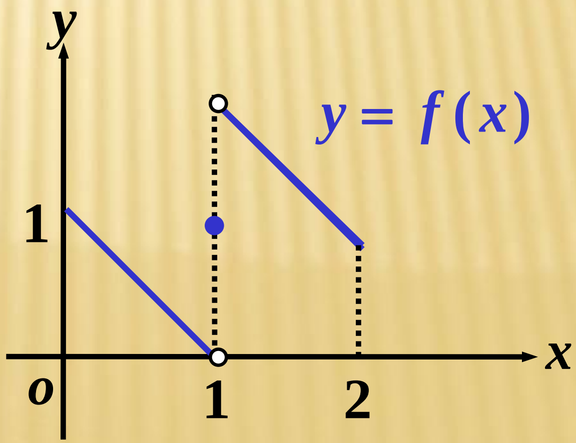
例: $f(x)=x$在$(0,1)$上连续且有界,故有上、下确界:

$$\alpha=\inf\{f(x)\mid x\in(0,1)\}=0 \text{ 和}$$

$$\beta=\sup\{f(x)\mid x\in(0,1)\}=1,$$

但$f(x)$在$(0,1)$上取不到$\alpha=0$和$\beta=1$,如下左图:





三、零点存在定理

定义：若 $f(x_0)=0$，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**零点**.

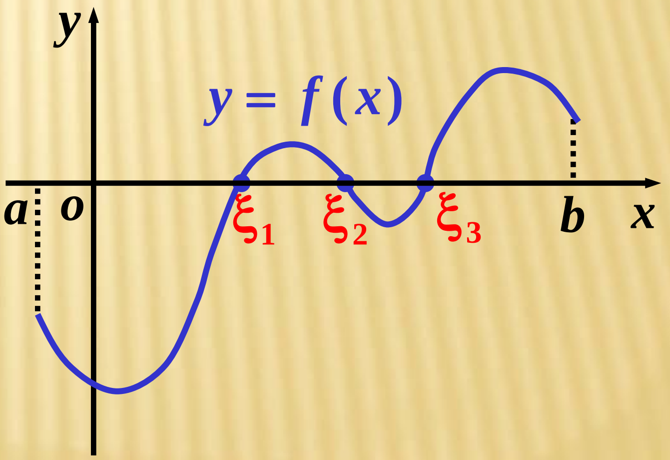
定理 5.6（零点存在定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那末在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi\ (a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

定理 5.6(零点存在定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那末在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi\ (a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

几何解释:

连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



零点存在定理的证明

证明: **(应用闭区间套定理)**

不妨设$f(a)<0,\ f(b)>0$,

将$[a,b]$等分为两个子区间$[a,c]$与$[c,b]$,

若$f(c)=0$,则c即为所求;

若$f(c)\neq 0$,则当$f(c)>0$时记$[a_1,b_1]=[a,c]$,

当$f(c)<0$时记$[a_1,b_1]=[c,b]$,

则有$f(a_1)<0,\ f(b_1)>0$,

且$[a_1,b_1]\subset[a,b],\ b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$.

再从$[a_1,b_1]$出发，重复上述过程，得到:

或者在$[a_1,b_1]$的中点c_1上有$f(c_1)=0$,

或者在$[a_2,b_2]$上满足$f(a_2)<0, f(b_2)>0,$且

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1],\ b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a).$$

将上述过程不断进行下去,将出现两种情形:

(*i*) 在某一区间的中点c_i上有$f(c_i)=0$,则c_i即为所求;

(*ii*) 在任一区间的中点c_i上均有$f(c_i)\neq 0$,

则得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$

则得到闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$满足：$f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$,且

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a), n = 1, 2, \cdots.$$

由闭区间套定理知，存在惟一的数$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$ 下证$f(x_0) = 0$.

由 f 的连续性及极限的保序性得：

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0, \quad f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0,$$

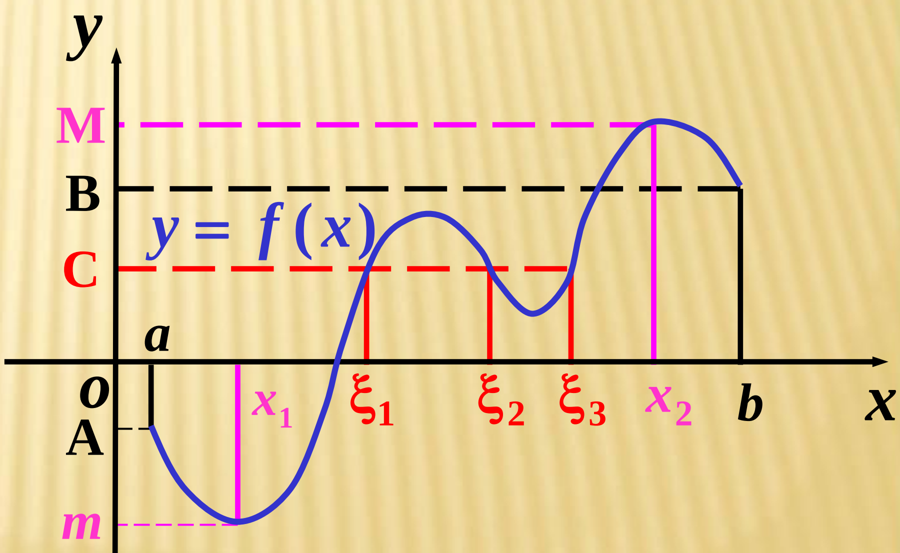
$$\therefore\ f(x_0) = 0.$$

而$x_0 \ne a, x_0 \ne b$.故必有$x_0 \in (a, b)$.

二分法求
方程近似根

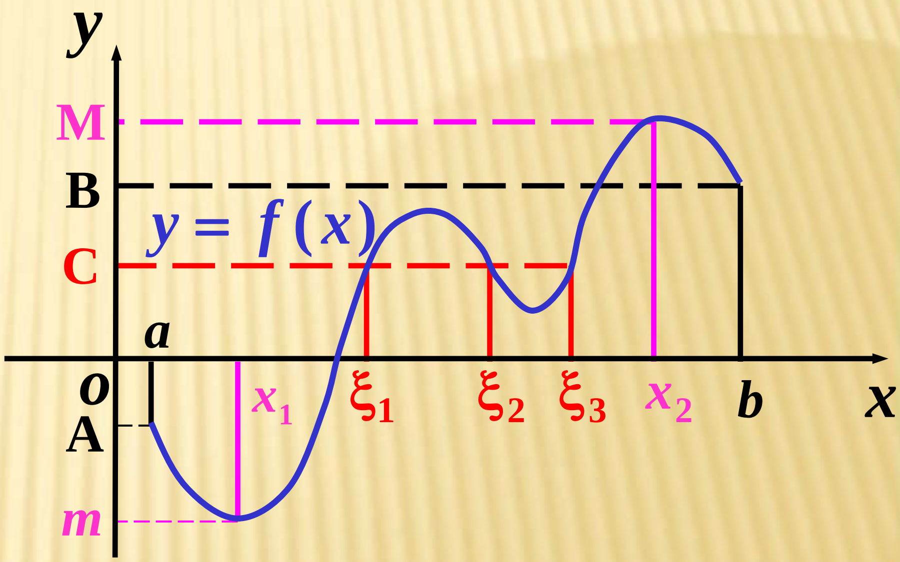
在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.（**介值定理**）

定理 5.7（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A, f(b)=B$. $A\neq B$, 则 $\forall C\in(A,B)$, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$ $(a<\xi<b)$.



几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少有一个交点. $A\leq C\leq B$

定理 5.7（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A, f(b)=B$. $A\neq B$，则 $\forall C\in(A,B)$，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C\ (a<\xi<b)$.



证 设 $\varphi(x)=f(x)-C$,

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

且 $\varphi(a)=f(a)-C=A-C$,

$\varphi(b)=f(b)-C=B-C$,

$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, 由零点存在定理, $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使

$\varphi(\xi)=0$, 即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$, $\therefore f(\xi)=C$.

几何解释： 连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少有一个交点. $A\leq C\leq B$

推论5.1 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.（**介值定理**）

例15 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\,\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

例16 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$，

$F(b)=f(b)-b>0$，　　由零点存在定理，

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，

即 $f(\xi)=\xi$.

定理 5.7(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A, f(b)=B$. $A\neq B$, 则 $\forall C\in(A,B)$, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$ $(a<\xi<b)$.

推论5.1 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.（介值定理）

推论5.2 （值域定理）

若 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(x)\neq$ 常数，则 $f([a,b])=[m,M]$.

即 $f([a,b])$ 是一个闭区间.

$$\left.\begin{array}{l}\text{最值定理}\Rightarrow f([a,b])\subseteq[m,M].\\ \text{介值定理}\Rightarrow[m,M]\subseteq f([a,b]).\end{array}\right\}$$

函数的连续性

设函数$f(x)$在区间 I 上连续，则对 $\forall x_0 \in I$，$x \in I$，有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

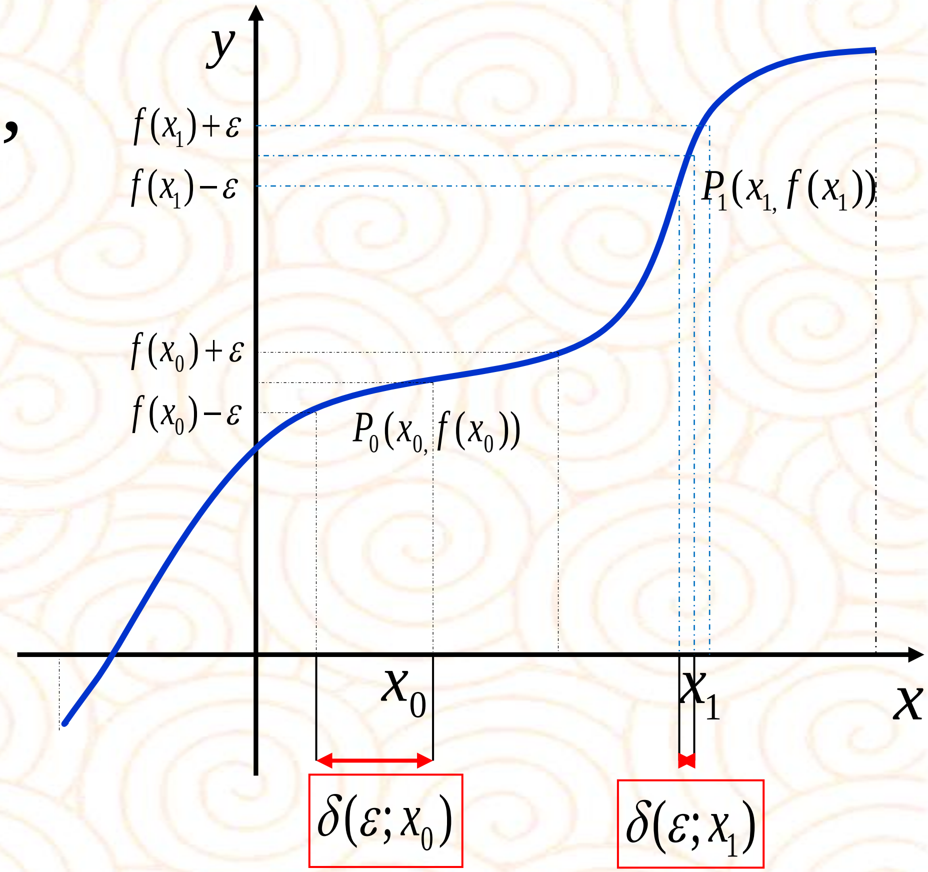
或：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (*)

如：连续函数 $y = f(x)(x \in I)$，

对于固定的 ε，

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|x - x_1| < \delta(\varepsilon, x_1) \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$



走在一条崎岖的山路上，对你前进的步伐作出要求：
每迈出一步所处位置高度的变化量不能超过 ε =1cm. 问：能否做到?

一致连续 设函数$f(x)$在区间 I 上连续，

即处处连续

$$\forall x_0 \in I,\ x \in I, 有 \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ 或：}$$

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 当 |x - x_0| < \delta 时, 有 |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

走在一条崎岖的山路上，对你前进的步伐作出要求：
每迈出一步所处位置高度的变化量不能超过 ε =1cm. 问：能否做到?

可以，把步子迈小些，且步伐的大小跟所处的位置有关.

如果不先固定位置，可否找到一个统一的步伐，使你无论身在何处，每迈一步，只要不超过这个数，所处位置高度的变化不超过1cm?

在最陡峭处，要不断地缩小步迈.

若能找到一个统一的步伐，无论身在何处，对所有位置都适合.

成语：步调一致

$\forall\varepsilon>0, \delta>0,$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (*)

问题: 给定一个 $\varepsilon>0$，是否可找到满足 (*)式一个最小的 δ，对 I 中的一切 x_0 点都适合？

例 $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x\in[0.1,1].$

$\forall\varepsilon>0$，要找对一切 $x_0\in[0.1, 1]$ 都适用的 δ。从主要不等式 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$ 出发，

$$\Rightarrow \frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{-x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}<x-x_0<\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon},\quad \text{取 } \min\delta=\frac{0.1^2\varepsilon}{1+\varepsilon}<\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}.$$

定义 设$f(x)$在区间 I 上连续，若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$

（δ仅与ε有关，与x_0无关），对于 I 上任意二点

x', x''，只要$|x'-x''|<\delta$，就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，此时称

$f(x)$ 在 I 上**一致连续**。

注 1）非一致连续函数的分析描述

对于某一 $\varepsilon>0$，对于任意的$\delta>0$，总可以找到区间 I

中的两点 x', x''，虽然$|x'-x''|<\delta$，但是$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$

f在区间 I上非一致连续：

$\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，总存在 $x_\delta', x_\delta''\in I$,

满足 $|x_\delta'-x_\delta''|<\delta$，但是 $|f(x_\delta')-f(x_\delta'')|\geq\varepsilon_0$.

非一致连续

f在区间 I上非一致连续：

$\exists \varepsilon_0 > 0$ ，对 $\forall \delta > 0$，总存在 $x_\delta', x_\delta'' \in I$,

满足 $|x_\delta' - x_\delta''| < \delta$，但是 $|f(x_\delta') - f(x_\delta'')| \geq \varepsilon_0$.

例：函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上连续但非一致连续。

例：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续但非一致连续。

连续的证明：对任意 $x_0\in(0,1)$, $\forall\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$),

找 $\delta>0$, 只要 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \frac{1-x_0\varepsilon}{x_0}<\frac{1}{x}<\frac{1+x_0\varepsilon}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x_0}{1+x_0\varepsilon}<x<\frac{x_0}{1-x_0\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ \frac{-x_0^{\ 2}\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}<x-x_0<\frac{x_0^{\ 2}\varepsilon}{1-x_0\varepsilon}$$

因此，取 $\delta(\varepsilon,x_0)=\dfrac{x_0^{\ 2}\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}$，即可。

f在区间 I 非一致连续：

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对 $\forall \delta > 0$，总存在 $x_\delta', x_\delta'' \in I$,

满足 $|x_\delta' - x_\delta''| < \delta$, 但是 $|f(x_\delta') - f(x_\delta'')| \geq \varepsilon_0$.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 区间 $(0,1)$ 上非一致连续的证明：

对 $\forall \delta > 0$($\delta < 1$) 选取 $x_\delta' = \dfrac{\delta}{2}, x_\delta'' = \delta \in (0,1)$

满足 $|x_\delta' - x_\delta''| < \delta$, 但是

$$\left|\frac{1}{x_\delta'} - \frac{1}{x_\delta''}\right| = \frac{1}{\delta} > 1.$$ 故取 $\varepsilon_0 = 1$ 即可。

思考：函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(\alpha,1)(0 < \alpha < 1)$ 上一致连续？

思考： 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(\alpha,1)(0<\alpha<1)$ 上一致连续?

例 $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x\in[0.1,1]$.

$\forall\ \varepsilon>0$，要找对一切 $x_0\in[0.1, 1]$都适用的δ。从主要不等式 $|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}|<\varepsilon$ 出发，

$$\Rightarrow \frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{-x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}<x-x_0<\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon},$$ 取 $$\min\delta=\frac{0.1^2\varepsilon}{1+\varepsilon}<\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}.$$

一致连续性 uniformly continuous

定义 设函数$f(x)$在区间X上定义，若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,

只要$x', x'' \in X$,满足$|x' - x''| < \delta$,

就成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$,

则称函数$f(x)$在区间X上**一致连续**.

$f(x)$在 X上一致连续$\Rightarrow$ $f(x)$在 X上连续

$f(x)$在X上连续，不一定保证$f(x)$在X上一致连续.

$f(x)$在$[a,b]$上一致连续 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $f(x)$在$[a,b]$上处处连续

定理5.8（康托定理）

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在$[a,b]$上一致连续.

证 (反证法及致密性定理证明)

假设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上非一致连续，

$\exists\, \varepsilon_0>0$，对$\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$\exists\{x_n'\}$和$\{x_n''\}$，$x_n', x_n''\in[a,b]$，满足

$|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$，但$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0, n=1,2,\cdots$

因$\{x_n'\}$有界，由Bolzano－Weierstoass定理，

存在收敛子列$\{x_{n_k}'\}$：$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}'=\xi, \xi\in[a,b]$，

在点列$\{x_n''\}$中取子列$\{x_{n_k}''\}$，其下标与$\{x_{n_k}'\}$下标相同，

则由$|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\dfrac{1}{n_k}(k=1,2,\cdots)$又得到

定理5.8（康托定理）

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在$[a,b]$上一致连续.

在点列$\{x_n''\}$中取子列$\{x_{n_k}''\}$,其下标与$\{x_{n_k}'\}$下标相同,

则由$\left|x_{n_k}'-x_{n_k}''\right|<\dfrac{1}{n_k}(k=1,2,\cdots)$又得到

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}''=\lim_{k\to\infty}[x_{n_k}'+(x_{n_k}''-x_{n_k}')]=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=\xi,$$

由于$f(x)$在点ξ连续，因而有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}')=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')=f(\xi)$$

于是得到：$\lim\limits_{k\to\infty}[f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')]=0$

但这与$\left|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')\right|\geq\varepsilon_0$产生矛盾,证毕.

非一致连续 f在区间 I 上非一致连续：

$\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，总存在 $x_\delta', x_\delta''\in I$,

满足 $|x_\delta'-x_\delta''|<\delta$, 但是 $|f(x_\delta')-f(x_\delta'')|\ge\varepsilon_0$.

例 $f(x)=x^2$在$[0,+\infty)$上非一致连续，但在$[0,A]$上一致连续（A为任意有限正数）.

证：对$\varepsilon=1$, $\forall\delta>0$, 取 $x_n'=\sqrt{n+1}$, $x_n''=\sqrt{n}$, $n=1,2,\cdots$

于是 $|x_n'-x_n''|=|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\delta$,但是

$|f(x_n')-f(x_n'')|=1=\varepsilon$,

可知$f(x)=x^2$在$[0,+\infty)$上非一致连续.

例 $f(x)=x^2$在$[0,+\infty)$上非一致连续，但在$[0,A]$上一致连续（A为任意有限正数）.

当区间限制在$[0,A]$时，有

$$\left|x'^2-x''^2\right|=\left|(x'+x'')(x'-x'')\right|\le 2A\left|x'-x''\right|$$

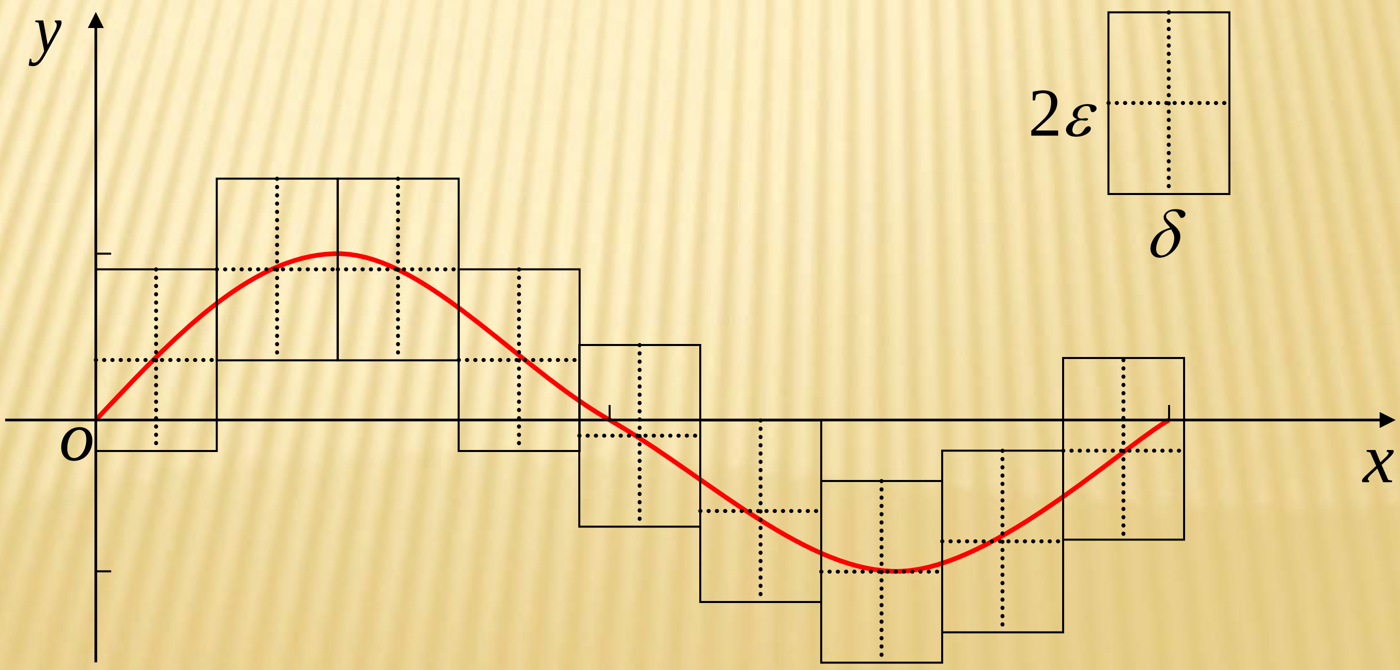
$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2A}>0$, $\forall x',x''\in[0,A]$, 只要$\left|x'-x''\right|<\delta$, 就有

$$\left|x'^2-x''^2\right|<\varepsilon,$$

即$f(x)=x^2$在$[0,A]$上一致连续.

区别:

- 连续是局部性质；一致连续是整体性质。
- 一致连续函数的几何意义：一条一致连续函数的曲线可以用一系列长为 δ，宽为 2ε，且与 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$轴平行的小矩形覆盖它。



压缩映射： 设映射$f:R\to R$满足$\left|f(x)-f(y)\right|\le k\left|x-y\right|$

其中$x,y\in R, 0<k<1$则称 f 为压缩映射.

不动点： 设映射$f:A\to A$,若$\exists x\in A$, 满足$f(x)=x$,

则称x为映射 f 的一个不动点.

压缩映射原理：

设映射$f:R\to R$是一个压缩映射. 则 f 在R上有唯一的不动点.

证明：$\forall x_0\in R$,作迭代序列$\{x_n\}$:

$$x_1=f(x_0), x_2=f(x_1), \cdots, x_n=f(x_{n-1}), \cdots$$

下面证明这个数列收敛.

$\forall x_0 \in R$,作迭代序列$\{x_n\}: x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots$

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \le k|x_{n-1} - x_{n-2}| = k|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})|$$

$$\le k^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \le \cdots \le k^{n-1}|x_1 - x_0|,$$

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\le (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n)|x_1 - x_0| = \frac{k^n - k^{n+p}}{1-k}|x_1 - x_0|$$

$$\le \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$,使得$\forall n > N$,及$\forall p \in N_+$,

恒有: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$收敛。

即数列$\{x_n\}$是收敛数列, 设$x_n \to x^*$, $(n \to \infty)$

压缩映射原理：

设映射$f: R \to R$ 是一个压缩映射. 则 f 在R上有唯一的不动点.

给迭代序列 $x_n = f(x_{n-1})$两边取极限,

由条件$|f(x_1) - f(x_2)| \le k|x_1 - x_2|$知函数 f 在 $[a,b]$上连续,

故得:$x^* = f(x^*)$, 即 x^* 为映射 f 的一个不动点.

唯一性：假设存在两点 x_1, x_2满足$f(x_1) = x_1$，　$f(x_2) = x_2$

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \le k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|.$$

矛盾

$f(x)=x$,不动点等价于方程有一个根.

例 $x^2+x-3=0$

构造迭代格式 $x_{k+1}=3-x_k{}^2$

取初值 $x_0=0$

迭代序列

$\{x_k\}=0,3,-6,-33,\cdots$

$\to -\infty$

构造迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{3-x_k}$

取初值 $x_0=0$

迭代序列

$\{x_k\}\to 1.3027756$

第四部分　小结与思考题

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;

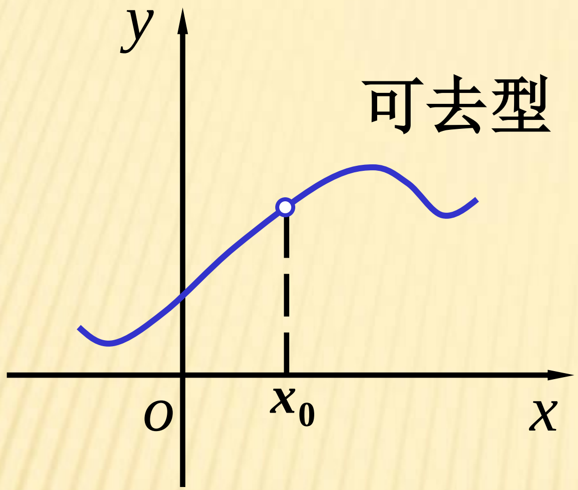
2.区间上的连续函数;

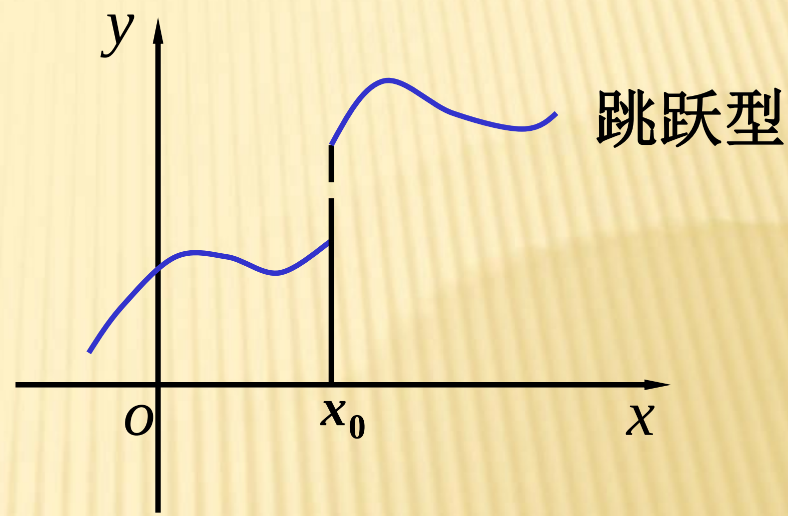
3.间断点的分类与判别;

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点:可去型,跳跃型.}\\ \\ \text{第二类间断点:无穷型,振荡型.}\end{cases}$$

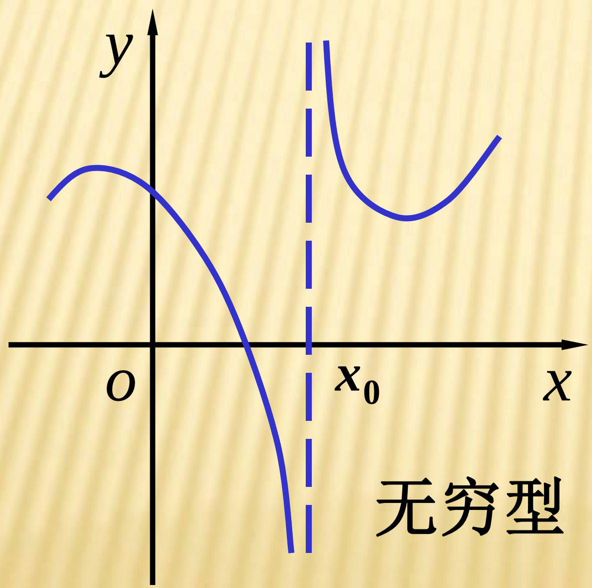
(见下图)

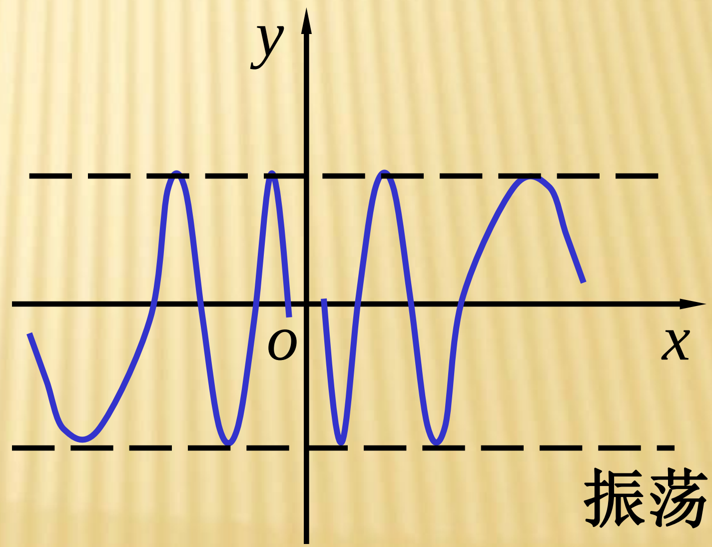
第一类间断点





第二类间断点





4.连续函数的和差积商的连续性.

5.反函数的连续性.

6.复合函数的连续性.

7.初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

求极限的又一种方法.

8. 六个定理

有界性定理;最值定理; 零点存在定理;介值定理;值域定理.一致连续定理

注意 1. 闭区间; 2. 连续函数.

这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路

1. **直接法:**先利用最值定理,再利用介值定理;

思考题

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续？又若 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续？

2. 设 $f(x) = \operatorname{sgn} x$，$g(x) = 1 + x^2$，试研究复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的连续性.

3. 下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

思考题1解答

$\because f(x)$在x_0连续， $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

且 $0\le \left|\left|f(x)\right|-\left|f(x_0)\right|\right| \le \left|f(x)-f(x_0)\right|$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|f(x_0)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]=f^2(x_0)$$

故$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0都连续.

但反之不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在$x_0=0$不连续

但$|f(x)|$、$f^2(x)$在$x_0=0$连续

思考题2解答

$\because \quad g(x) = 1 + x^2 \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\therefore \quad f[g(x)] = \operatorname{sgn}(1 + x^2) = 1$

$f[g(x)]$在$(-\infty, +\infty)$上处处连续

$$g[f(x)] = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$g[f(x)]$在$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$上处处连续

$x = 0$是它的可去间断点

思考题3解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但 $f(x)$在$(0,1)$内无零点.