

空间索杆式展开结构的动力学研究与分析

谢铁华, 关富玲, 苏 斌, 石 卫华

(浙江大学空间结构研究中心, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 本文针对空间索杆式展开结构的特点, 利用多刚体动力学的研究成果建立展开过程分析的动力学模型, 分析了约束方程及其雅可比矩阵的形成, 结合系统的约束方程来分析机构的运动状态, 最后对系统的机构单元进行数值仿真计算, 得到了对伸展臂的指标确定和设计有重要指导意义的数值分析结果. 计算结果表明, 文中结构模型的设计方案是可行的.

关键词: 空间索杆式; 可展; 多刚体; 约束; 雅可比矩阵

中图分类号: TH122 文献标识码: A 文章编号: 1006-6578(2004)03-0048-07

Research and analysis on dynamic properties of spatial Rod-cable deployable structure

XIE Tie-hua, GUAN Fu-ling, SU Bin, SHI Wei-hua

(Space Structures Research Center, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The paper has introduced the design project of Spatial Rod-Cable Deployable Structure. The dynamic model of Spatial Rod-Cable Deployable Structure is set up based on the theory of multibody rigid system dynamics, analyze how to construct constraint equations and relevant Jacobi matrices accurately, and use system constraint equation to analysis the moving state of the system. In the end an example of dynamics simulation is present, the result has a wider range of application and a good prospect in deployable structure field. The calculation result shows that the structure plan of modle is feasible.

Key words: spatial rod-cable; deployable; multibody rigid system; constraint; Jacobi matrix

1 引 言

空间索杆式展开结构, 也称为伸展臂, 是广为应用的航天结构, 如太阳帆、可展天线背架等, 其展开过程分析是航天可展结构研究的重要内容, 它分析机构从收纳状态运动至完全展开状态及其反过程的运动及力学特性, 从而指导机构的优化设计和加工.

2 空间索杆式展开结构的方案简介

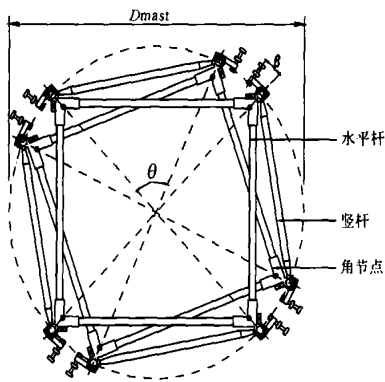
空间索杆式展开结构的主要构成如图 1 所示,

更详细的说明可见参考文献[1].

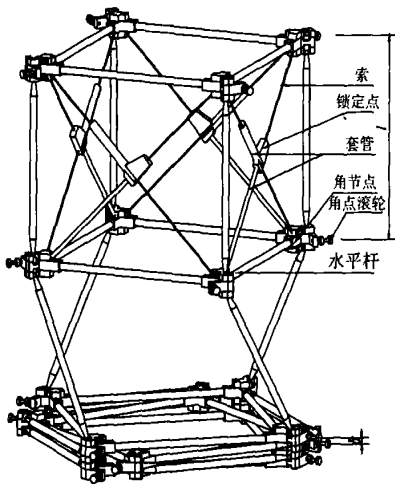
在展开或收纳过程中, 单元属于机构, 情况如图 2 单元简图所示. 空间索杆式展开结构作为机构所具有的自由度仅为 1, 独立的运动坐标可取为两个刚性平面之间转过的角度 θ 或取两个刚性平面之间的距离 z , 机构自由度 $S=1$. θ 与 z 之间的关系由式(1)决定:

$$\left(2R \cdot \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + z^2 = H^2 \tag{1}$$

在展开后, 单元由机构向结构转变, 结构锁定成形后的单元简图就变化为图 3 所示的形式. 由结构自由度分析容易知道, 这样的体系是超静定体系($S=0, n=6$).



(a) 一个单元压缩平面



(b) 单元展开过程中

图 1 空间索杆式展开结构构成说明

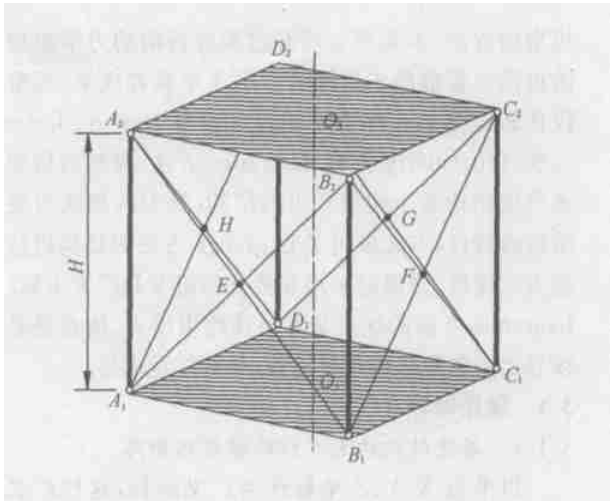


图 3 单元展开后简图



图 4 10 个单元的结构实物模型

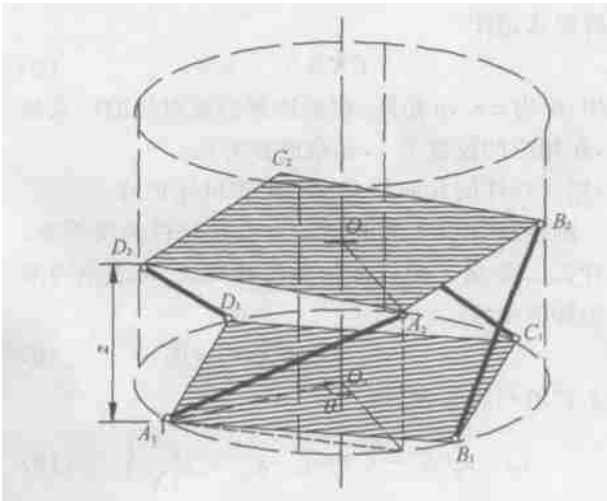


图 2 单元展开(收纳)原理示意图

空间索杆式展开结构实物模型(10 个单元)如图 4, 图 5 所示。

最后用于展开实验的模型共 48 个单元, 长 13.3 米, 总重 33.8kg, 收纳率 5.78%。

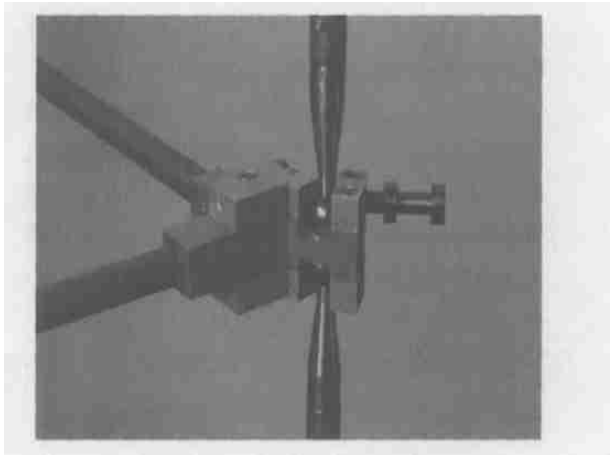


图 5 水平杆、竖杆和节点的连接

3 可展结构展开动力和展开过程数值分析

可展结构展开过程数值分析理论的主要任务是研究建立适用于计算机分析的系统运动学和动力学

模型的方法. 本文建立展开过程分析的动力学模型的理论主要借助于多体力学的多年研究成果. 现阶段比较成熟的多体力学建模方法有 Newton-Euler 方法、Wittenburg 方法、Lagrange 方法. 模型的桁架式可展结构属于构架式可展结构, 针对构架式可展结构的特点, 本文采用了 Lagrange 方法对结构进行动力学建模. 建模时采用非独立的笛卡儿广义坐标. Lagrange 方法的优点是不出现约束反力, 缺点是必须导出动能和势能标量函数, 并对能量求导.

3. 1 理论推导

3. 1. 1 折叠结构约束方程的雅可比矩阵

以节点 X 、 Y 、 Z 坐标作为广义坐标, 这些广义坐标不是独立的, 广义坐标之间必须满足一些约束条件, 这些约束基本可以分为三类: 边界条件约束, 结构的部分自由度和基础相连接, 也称为绝对约束; 刚性杆件对节点坐标运动的约束, 展开过程分析时, 不考虑杆件微小变形的影响, 并认为杆件之间的连接为理想铰接; 各种接点在理想铰接外需要考虑的附加构造约束, 展开结构中主要包括剪式单元、套筒单元、滑枕单元等特殊结构.

(1) 约束方程和约束雅可比矩阵

和普通多刚体系统动力学问题相比较, 可展结构展开过程的动力学分析有不少独特之处. 索杆构架式可展结构的结构单元大多都是杆件, 结构的几何约束均为完全约束, 结构的约束方程易于用程序表示, 有较多的结构约束和很少的可动自由度, 闭环程度很高.

可伸展结构的几何约束, 它与时间无关, 约束方程为定常的完整约束方程, 可记为

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{3p}, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2)$$

其中 $(x_1, x_2, \dots, x_{3p})$ 为选定的广义坐标, 它决定机构某一时刻 t 的构形, Φ 是所选取的 $3p$ 个广义坐标相关的约束函数, 在展开结构中, 它由几何条件确定, s 为约束方程个数, p 为节点数目. 式(2)对时间 t 求一阶导数, 得

$$\frac{\partial \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{3p}, t)}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j = 0 \quad (3)$$

记作矩阵形式

$$A\dot{X} = 0 \quad (4)$$

式中 A 称为结构约束方程的雅可比矩阵, 为 $s \times 3p$ 矩阵. 分析可展结构展开过程的首要问题是分析系统的约束雅可比矩阵, 对雅可比矩阵 A 作奇异值分解, 并记为

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

$$= U_1 \cdot \Sigma \cdot V_1^T \quad (5)$$

式中 U 和 V 分别为单位正交阵, Σ 为对角阵, 且 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ 为矩阵 A 的奇异值, r 为矩阵的秩, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是 AA^T 的非零特征值的平方根. 由式(5)容易求得雅可比矩阵的 Moore-Penrose 广义逆为

$$A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T = V_1 \cdot \Sigma \cdot U_1 \quad (6)$$

若定义可动机构数 $m = 3p - r$, 当矩阵 A 不是列满秩时, $r < n, m > 0$, 存在非零矢量 V_2 满足

$$AV_2 = 0 \quad (7)$$

根据线性代数理论, 方程 $AX = 0$ 的全部解向量称为矩阵 A 零空间. 约束方程雅可比矩阵的零空间是 $3p \times m$ 矩阵, 其物理意义是结构全部的可能刚体运动, 它的每一列向量对应着一种可能的刚体运动趋势. 若 $m = 1$, 说明结构只有一种运动趋势; 若 $m > 1$, m 个解向量的线性组合构成了全部的可能刚体运动; 若 $m = 0$, 零空间只有零元素, 则方程无非零解, 结构几何不变, 无法展开.

若约束方程(7)是独立的, 雅可比矩阵是非奇异的, 则只要系统在某一标定位形满足约束方程, 隐函数定理就保证在此标定位形的一个领域内, 系统的位置和方位有唯一解.

(2) 边界条件约束和约束雅可比矩阵

假设结构具有 c 个边界运动约束, 则可以得到 c 个约束方程, 由于每个约束方程均可以表示为结构某个节点的三个广义坐标的线性组合, 因而可以用矩阵形式记作

$$G\dot{X} = 0 \quad (8)$$

式中, G 为 $c \times 3p$ 矩阵, 根据边界约束对应的广义位移, 在相应的位置填 1, 其余地方为 0.

(3) 刚性杆件的几何约束和约束雅可比矩阵

刚性杆件引入的几何约束就是杆件长度不变. 设杆长 l_{n0} 为第 n 根杆件初始设计杆长, 可表示为节点坐标的函数:

$$[(X_i - X_j)^T (X_i - X_j)] = l_{n0}^2 \quad (9)$$

对上式求一阶导数, 则:

$$\dot{l}_{n0} = \lambda_n (\dot{X}_j - \dot{X}_i) = [-\lambda_n \quad \lambda_n] \begin{Bmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{X}_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式中 $\lambda_n = \frac{1}{l_{n0}} (X_j - X_i)^T$, 对所有杆单元写成上式, 根据杆件刚性假设得 $\dot{l}_{n0} = 0$, 并整理为矩阵:

$$B\dot{X} = 0 \quad (11)$$

式中: B 为杆长刚体几何约束雅可比矩阵.

3. 1. 2 动力学方程及其求解

应用 Lagrange 方法对结构进行动力学建模. 首

要的问题是解决系统动能的表达问题. 另外, 由于是用非独立的广义坐标来表达系统动能的, 所以 Lagrange 方程中广义坐标的变分不是独立的, 要借助系统的约束方程才能得出一组相互独立的微分方程组. 引入约束方程的方法有两大类, 一类是不定乘子法, 另外一类是嵌入约束法. 考虑在计算机上实现的成本大小, 采用了嵌入约束法中的奇异值分解法, 这种方法不但利于计算机编程实现, 而且方程组的数目最少.

(1) 构架式可展结构的动能表达式

选取笛卡儿节点坐标为广义坐标, 节点坐标用矢量表示为

$$X_i = \{x_i \ y_i \ z_i\}^T \quad X_j = \{x_j \ y_j \ z_j\}^T \quad (12)$$

假设单元的速度模式为

$$\dot{U}^{(e)}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \dot{x}^{(e)}(t) \quad (13)$$

其中 $\dot{U}^{(e)}$ 是单元内任一点的速度向量, $[N]$ 是单元速度函数矩阵, $\dot{x}^{(e)}$ 是单元节点速度向量, 则单元动能可以表示为

$$\begin{aligned} T^{(e)} &= \iiint_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \rho \dot{U}^{(e)T} \dot{U}^{(e)} dV \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^{(e)T} \iiint_{V^{(e)}} \rho [N]^T [N] dV \dot{x}^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^{(e)T} [M^{(e)}] \dot{x}^{(e)} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $V^{(e)}$ 是单元体积, ρ 是单元材料的密度. 对普通的杆元和梁元而言, 如图 6 所示, 在展开过程中, 构件未发生任何变形, 速度模式为线性, 即有

$$\dot{U}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{X}_j \end{Bmatrix} \quad (15)$$

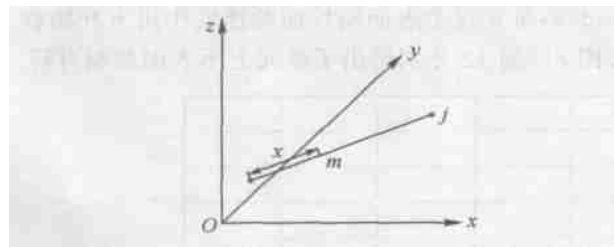


图 6 普通杆件

其中 $[N] = [(1 - \beta) I \quad \beta I]$, $\beta = \frac{x}{L_m}$, I 为 3×3 单位阵.

如果构件的材料密度 ρ 和横截面积 A 均为常数, 则直杆单元的等效质量矩阵为

$$[M^{(e)}] = \iiint_{V^{(e)}} \rho [N]^T [N] dV = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2I & I \\ I & 2I \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} T &= \sum_{e=1}^b T^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{X}^T ([M^{(1)} + \dots + M^{(b)}]) \dot{X} \\ &= \frac{1}{2} \dot{X}^T [M] \dot{X} \end{aligned} \quad (17)$$

矩阵 M 称为构架式结构的等效质量矩阵, 若在第 i 节点处具有集中质量 m , 则相应增加的动能为

$$T_i = \frac{1}{2} m (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (18)$$

只需在原等效质量矩阵的相应对角元上增加 m . 对于构架式可展结构, 杆件的质量与节点质量相比, 通常可以忽略. 可见 M 是常矩阵, 与节点的坐标无关.

(2) 含多余坐标的拉格朗日形式的动力学普遍方程

设一结构含 p 个节点, 系统具有 s 个完整的独立理想约束, 因此它是具有 $(3p - s)$ 个独立自由度的系统. 但对含大量节点的复杂系统, 不经过体系理论分析很难确定独立的运动自由度矢量. 于是含多余坐标的拉格朗日形式的动力学普遍方程可表示为:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3p} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial T}{\partial x_k} - Q_k \right\} \delta x_k &= \\ \delta X^T \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial T}{\partial X} - Q \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

其中 T 为系统总动能, Q 为广义力. 将构架式可展结构的动能表达式 (17) 代入式 (19), 忽略阻尼影响, 可以得到

$$\delta X^T (M \ddot{X} - Q(X)) = 0 \quad (20)$$

式中 M 为质量矩阵, 是正定、非奇异矩阵, 为 $3p \times 3p$ 矩阵. 由于受方程 (3) 的约束, 广义坐标的变分不是独立的, 因而不能由上式直接导出 $3p$ 个方程, 展开过程分析归结为求解微分方程 (20) 和代数方程 (3) 的联立方程组.

(3) 奇异值分解法

求解微分方程 (20) 和代数方程 (3) 的联立方程组时, 可以选择一组满足约束方程 (3) 的独立准速率, 直接将约束方程嵌入动力学方程, 导出一组方程数目等于结构独立自由度数的动力学方程, 其阶数远远少于利用拉格朗日算子得到的微分方程组. 由前面的分析可知, 受式 (3) 约束的结构独立广义自由度数为 $m = 3p - r$, 可以选取和原来广义坐标有线性关系的任意 m 维列向量作求解动力学问题的准速率. 其中最方便的一种方法是利用约束方程的雅可比矩阵零空间的正交矢量构成的矩阵来构造准速率, 即原广义速度 \dot{X} 和准速率 \dot{Z} 的关系有:

$$\dot{X} = V \dot{Z} \quad (21)$$

式中: \dot{Z} 是 m 维列向量, V 是约束雅可比矩阵零空间矢量. 上式和约束方程 (3) 是等价的, 只要在式 (21) 左乘 A , 根据零空间的定义即可检验这一结论. 对等式

(21) 求导, 得到准加速度 $\ddot{\mathbf{Z}}$ 和原广义加速度 $\ddot{\mathbf{X}}$ 的关系

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\ddot{\mathbf{Z}} + \dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A}\ddot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{Z}} \tag{22}$$

由式(22)可直接变分得到

$$\delta\mathbf{X} = \mathbf{V}\delta\mathbf{Z} \tag{23}$$

式(23)代入式(20), 得

$$\delta\mathbf{Z}^T \mathbf{V}^T (\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{Z}} - \mathbf{M}\mathbf{A}^+ \mathbf{A}\ddot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{F}) = 0 \tag{24}$$

因为准速率是相互独立的, 上式可以导出 m 个独立的方程

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{V}^T (-\mathbf{M}\mathbf{A}^+ \mathbf{A}) \dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{V}^T \mathbf{F} = 0 \tag{25}$$

上式即构架式可展结构展开过程分析的动力学方程, 是关于 m 个独立变量 \mathbf{Z} 的一阶微分方程组. 在数值积分时, 系数矩阵和常数项含有 \mathbf{X} 和 $\dot{\mathbf{X}}$, \mathbf{X} 由式(21)得到, $\dot{\mathbf{X}}$ 则由 $\dot{\mathbf{X}}$ 积分得到. 因此式(25)和(21)一起构成封闭方程组. 对动力学方程进行数值积分时, 已知 t 时刻的位形和节点速度, 利用四阶 Ronge-Kutta 公式对式(25)进行数值积分, 得到下一时刻的节点准速率, 由式(21)得到广义速度, 并积分得到下一时刻的位形. 逐步积分, 直至结构完全展开为止. 由于式(21)中 \mathbf{V} 是 \mathbf{X} 和 t 的函数, 不能由该式直接积分得到

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{Z} + \mathbf{C}_0 \tag{26}$$

一阶微分方程组(26)的初始条件可以表示为 $\dot{\mathbf{Z}}_0 = \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{X}}_0$. 根据初始条件, 由逐步数值积分法可以求出每一时间增量时各参数的增量, 从而得到结构的展开历程.

并非所有的荷载组合都能驱动结构展开, 若荷载矢量和所有的刚体位移模态均正交

$$\mathbf{V}^T \mathbf{F} = 0 \tag{27}$$

在上式两边均左乘 \mathbf{Z}^T , 可得

$$\mathbf{X}^T \mathbf{F} = 0 \tag{28}$$

说明外加荷载并未对结构做功, 因而可以称之为“零

功力系”. 若结构没有初速度, 在零功力系作用下, 结构的势能和位形将保持不变.

4 空间索杆式展开结构动力学分析

4.1 单元分析

下面以机构的一个单元为分析模型, 主要分析单元的运动情况和受力情况, 即单元中刚性面的运动情况和竖杆的运动情况.

单元分析模型如图 7, 其中刚性下表面固定在地面, 上下两个正方形刚性面的边长(即杆长)为 300mm, 竖杆长为 260mm, 所有杆件都为直径为 10mm 的实心钢管.

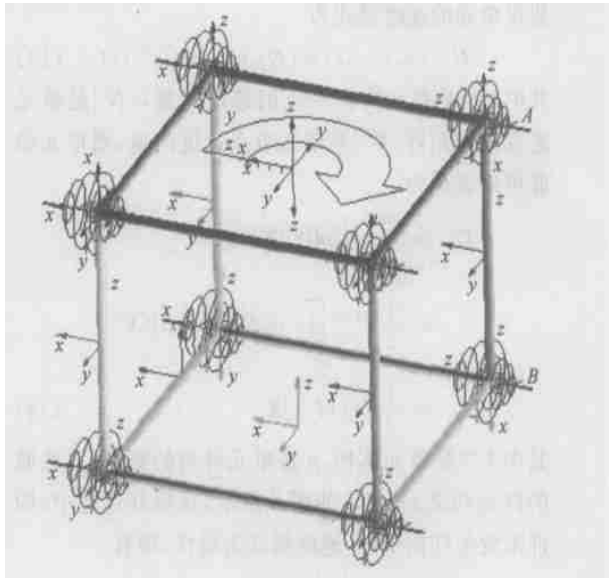


图 7 单元数值仿真分析模型

首先给上表面一个绕 z 轴的恒定角速度 $\omega = 10\text{rad/s}$, 单元在上表面刚性面的速度作用下开始收缩. 图 8 ~ 图 12 分别给出了单元上下表面的相对转

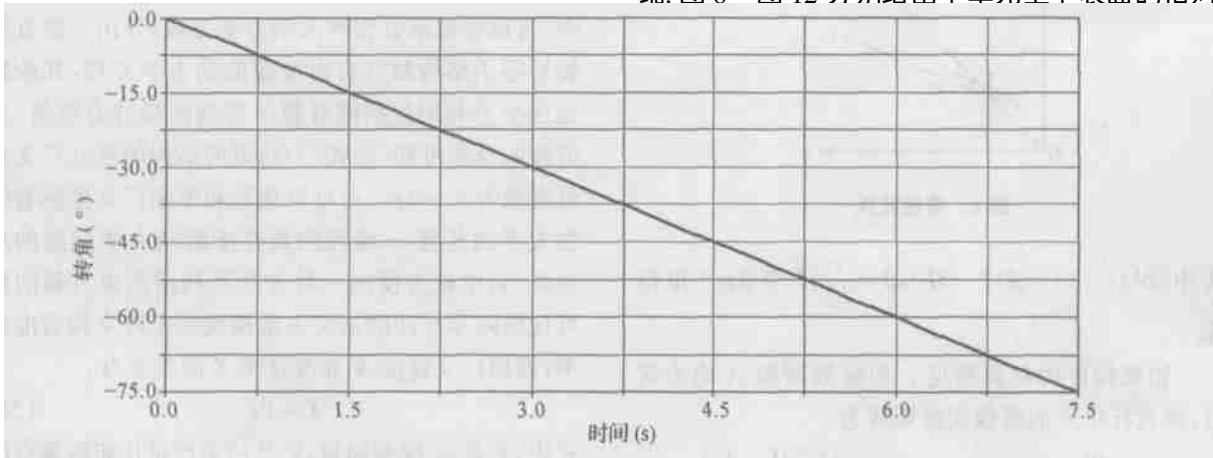


图 8 单元上下表面(即上下两个刚性面)之间相对转角随时间变化关系图

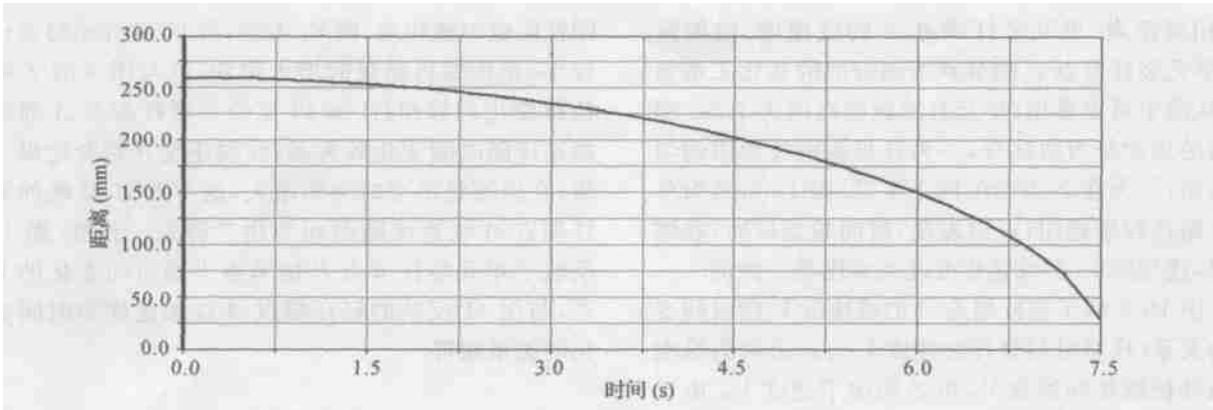


图 9 单元上下表面(即上下两个刚性面)之间相对距离 z 随时间变化关系图

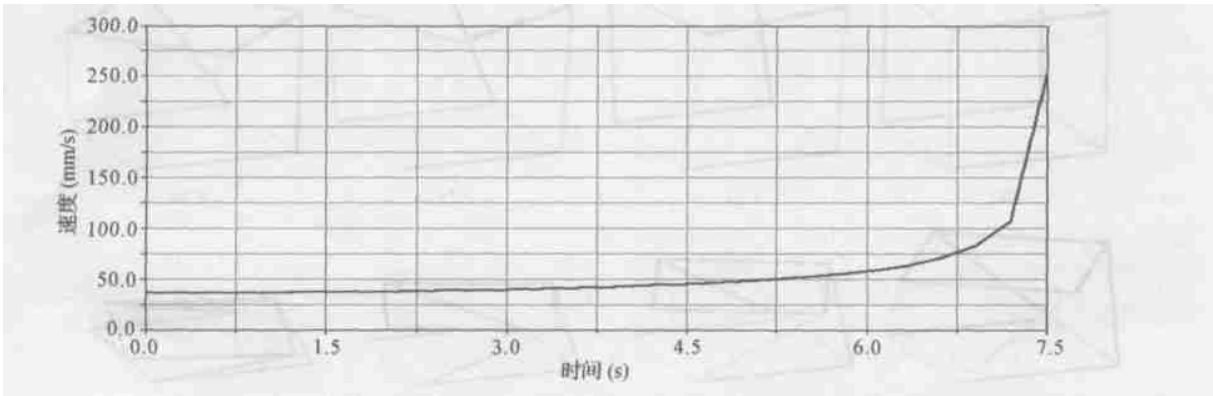


图 10 单元竖杆端点 A 的线速度随时间变化关系图

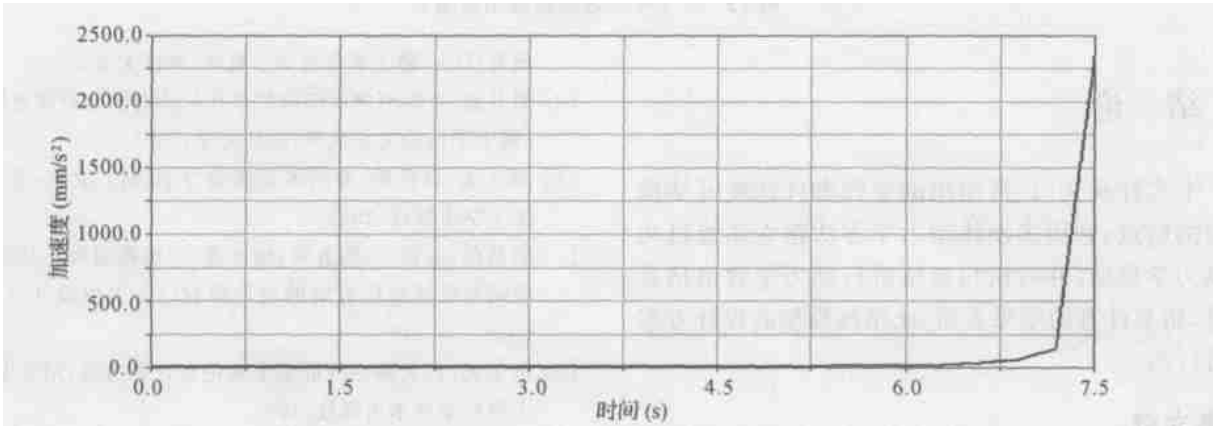


图 11 单元竖杆端点 A 线加速度随时间变化关系

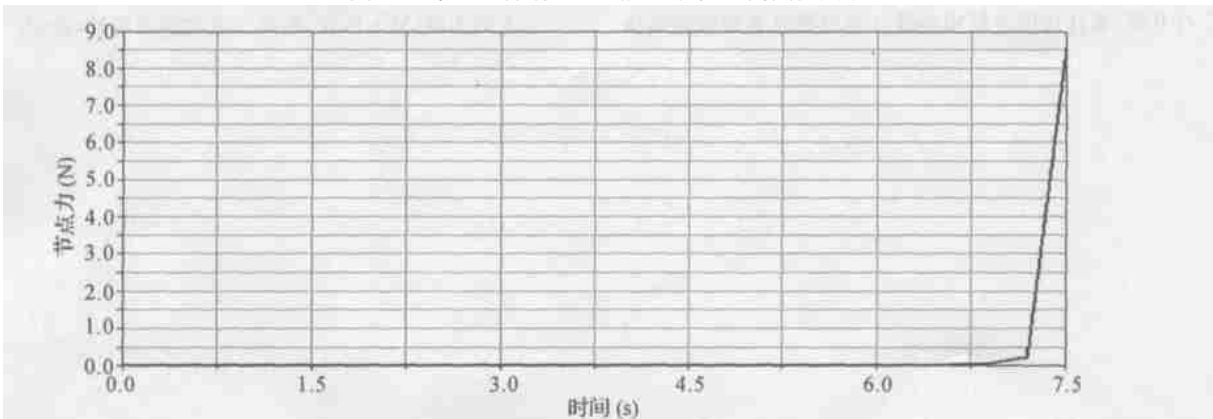


图 12 单元竖杆节点 B 的节点力随时间变化关系图

角、相对距离、单元竖杆端点 A 的线速度、线加速度、单元竖杆节点 B 的节点力随时间的变化关系曲线。从图中可以看出, 单元总的收缩时间为 7.5s 。刚性面的运动分为两部分, 一为自身在刚性面内的匀速转动, 一为在 Z 方向的向下平动。图 13 所示为单元收缩过程示意图, 可以发现, 时间越到后面, 收缩越快, 这与图 10 的线速度变化关系图是一致的。

图 10 反映了竖杆端点 A 的线速度 V 随时间变化的关系。任意时刻竖杆的速度 V 可以分解为沿刚性面外接圆切向速度 V_τ 和 Z 向向下速度 V_z 。由于

刚性面做匀速转动, 则 V_τ 不变; 而 V_z 在开始时变化较小, 在压缩将结束时增大很快, 这与图 9 的 Z 向位移变化趋势相符。图 11 反映了竖杆端点 A 的线加速度随时间变化的关系, 线加速度开始变化很平缓, 在压缩将结束时突然增大, 这与图 10 反映的竖杆端点 A 线速度随时间变化趋势是一致的。图 12 反映了单元竖杆节点 B 的节点力随时间变化的关系, 与图 11 反映的竖杆端点 A 线加速度随时间变化的关系相符。

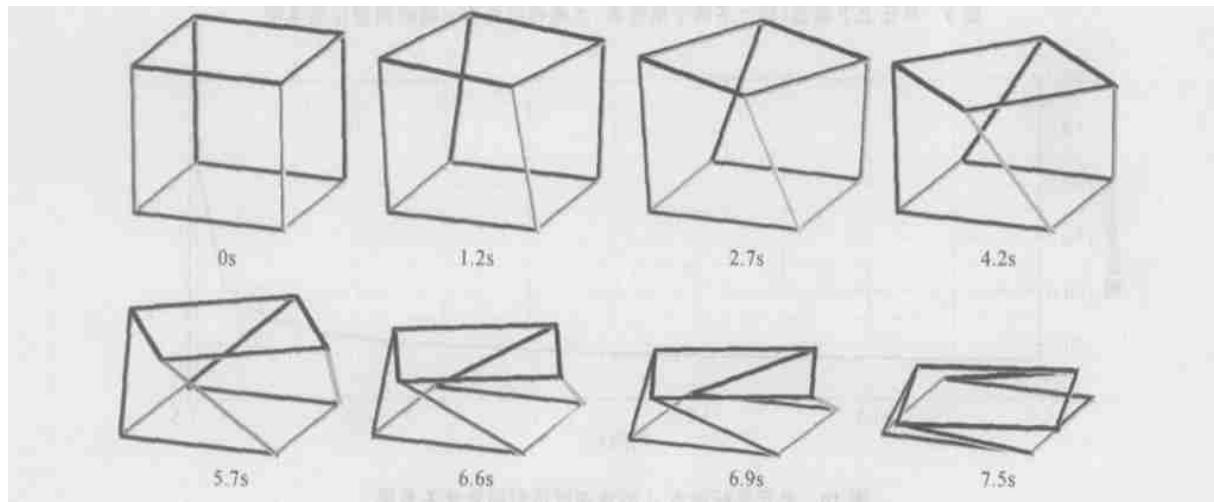


图 13 一个单元收缩过程示意图

5 结 论

本文针对文[1]所给出的空间索杆式展开结构模型的特点, 利用多刚体动力学方法建立系统机构的动力学模型, 并对机构系统进行动力学数值仿真计算, 仿真计算的结果表明, 此结构模型的设计方案是可行的。

参考文献

[1] 石卫华. 索杆式展开结构的设计与分析及骨架式膜结构

研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2003.

[2] 胡其彪. 空间可伸展结构的设计与动力学分析研究[D]: [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2001.

[3] 袁士杰, 吕哲勤. 多刚体系统动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1992.

[4] 胡其彪, 关富玲, 陈务军, 杨玉龙. 一种新型展开/折叠式空间伸展臂结构方案的设计研究[J]. 工程设计, 1999, 19(2): 36-40.

[5] 何旭初. 广义逆矩阵的基本理论和计算方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.

[6] 王国强, 张进平, 马若丁. 虚拟样机技术及其在 ADAMS 上的实践[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2002.