# 第五章 多元函数微分学及其应用

## 第三节 多元数量值函数的导数与微分

- 偏导数和高阶偏导数
- 全微分
- 方向导数与梯度

**作业：习题5.3**
**1, 2, 3, 4, 5,**
**7,8,12,13,14**
**19, 20, 22,**
**18,23**

# 第一部分　偏导数

## 一、二元函数的偏导数和偏导函数

**定义 1**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，当 $y$ 固定在 $y_0$ 而 $x$ 在 $x_0$ 处有增量 $\Delta x$ 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 的偏导数。

记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$.

同理可定义函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$y$的偏导数为：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

如果二元函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$x$和对$y$的偏导数均存在，则称函数 $z=f(x,y)$在点（$x_0,y_0$）处可偏导.

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

**定义 2** 如果函数$z=f(x,y)$在区域$D$内任一点$(x,y)$处对$x$的偏导数都存在，那么这个偏导数就是$x$、$y$的函数，它就称为**函数$z=f(x,y)$对自变量$x$的偏导函数**.

记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$或$f_x(x,y)$.

即

**二元函数:**

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

同理可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量$y$的偏导函数，记作$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$或$f_y(x,y)$.

例 1　求 $z = x^2 + 3xy + y^2$在点(1,2)处的偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$;　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$.

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2\times1 + 3\times2 = 8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 3\times1 + 2\times2 = 7.$$

例 2　设$z = x^y\ (x>0, x\neq 1)$，

求证 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

证　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$，

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x}x^y \ln x$$

$$= x^y + x^y$$

$$= 2z.$$ 故结论成立.

**例 3**　设$z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**解**　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\qquad(\sqrt{y^2}=|y|)$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2}.$$

$$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_y'$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|y|} \cdot \frac{(-xy)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

$$= -\frac{x}{x^2 + y^2} \operatorname{sgn} \frac{1}{y} \qquad (y \neq 0)$$

## 有关偏导数的几点说明：

1、偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号，不能拆分;

2、求分界点、不连续点处的偏导数可考虑用定义;

**例** 设$z = f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 求$f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$.

**解**

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{|y \cdot 0|} - 0}{y} = 0$$

## 3、偏导数存在与连续的关系

一元函数 在某点可导 $\longrightarrow$ 连续，

多元函数 在某点偏导数存在 $\overset{?}{\longrightarrow}$ 连续，

例如,函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$,

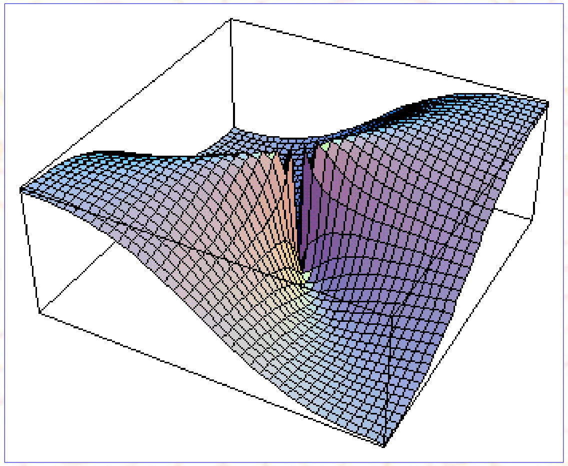
依定义知在(0,0)处， $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$

但函数在该点处并不连续.

偏导数存在 $\not\longrightarrow$ 连续.

**例** 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$



在(0,0)的连续性.

**解** 取 $y=kx$

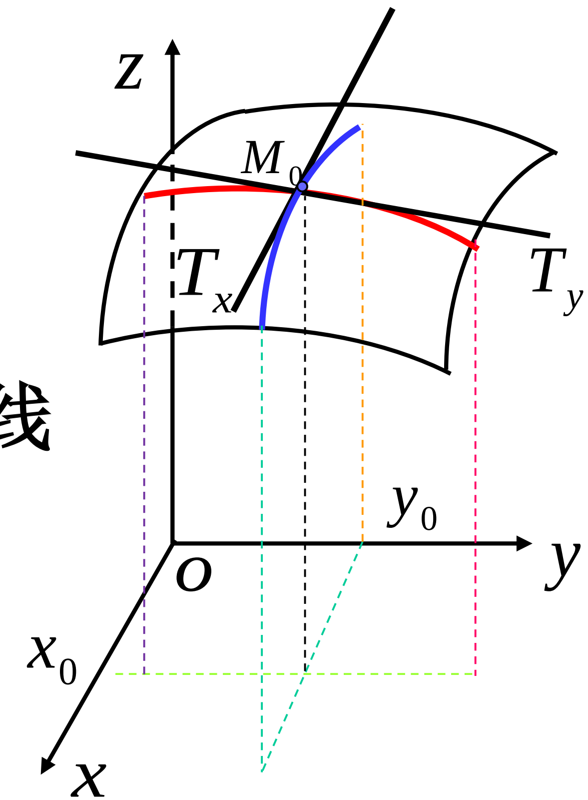
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随$k$的不同而变化，极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

# 4、二元函数偏导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$




是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0$ 处的切线

$M_0T_x$ 对 $x$ 轴的斜率.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_y$ 对 $y$ 轴的斜率.

## 偏导数的概念可以推广到二元以上函数

如 $u=f(x,y,z)$ 在 $(x,y,z)$ 处

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

**例5** 设 $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$，求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}$

## 回顾　　一元函数微分的概念

给定函数 $y=f(x)$,

$$y=x^3 \qquad \Delta y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

$$\Delta y=3x^2\Delta x+o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0)$$

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0)$$

$f'(x_0)\Delta x$ 构成了 $\Delta y$ 的主要部分--**线性主部**

对于多元函数,$\Delta y$ 与 $\Delta x$ 之间的关系是比较复杂的,

能否用线性关系去近似?

若可以,近似误差又如何?

# 第二部分　全微分

## 一、全微分的定义

由一元函数微分学中增量与微分的关系得：

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \approx f_x(x, y)\Delta x$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \approx f_y(x, y)\Delta y$$

二元函数
对 $x$ 和对 $y$ 的**偏增量**

二元函数
对 $x$ 和对 $y$ 的**偏微分**

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域内有定义.

则 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

称为函数在点 $P$ 对应于自变量增量 $\Delta x, \Delta y$ 的**全增量**.

# 全微分的定义

如果函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

可以表示为$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

其中$A$, $B$不依赖于$\Delta x$,$\Delta y$而仅与$x$, $y$有关,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

则称函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，$A\Delta x + B\Delta y$

称为函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分，记作$dz$,

即 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

或 $dz = Adx + Bdy$

若函数$f$在某区域D内各点处处可微分，则称函数$f$在D内可微分.

若函数 $f$ 在某区域D内各点处处可微分，则称函数 $f$ 在D内可微分.

证明：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微分，则函数在该点连续.

可微时，$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$$\therefore \lim_{\rho\to 0}\Delta z = 0,$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z] = f(x,y)$$

故函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处连续.

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\because \quad 0 \le |\Delta x| \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho$$

$$\therefore \rho \to 0 \Rightarrow |\Delta x| \to 0$$

而： $\left.\begin{array}{ll} \Delta x \ge 0\text{时}, & 0 \le \Delta x \le |\Delta x| \\ \Delta x \le 0\text{时}, & -|\Delta x| \le \Delta x \le 0 \end{array}\right\}$ $\quad -|\Delta x| \le \Delta x \le |\Delta x|$

$$\therefore \rho \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$$

易知： $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow \rho \to 0$

$$\boxed{\therefore \rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0}$$

# 二、可微的条件

**定理 1（必要条件）** 如果函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，则：

1、函数 $f(x,y)$ 在该点连续.

2、函数 $f(x,y)$ 在点$(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，且$z = f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

已证明：如果函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，则函数在该点连续.

函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微，则：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

证　如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分，

$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)\in P$ 的某个邻域

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$　总成立，

当$\Delta y=0$时，上式仍成立，此时$\rho=|\Delta x|$，

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A=\frac{\partial z}{\partial x},$$

同理可得 $B=\frac{\partial z}{\partial y}$.　$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} \cdot \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\Delta x > 0\text{时}, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

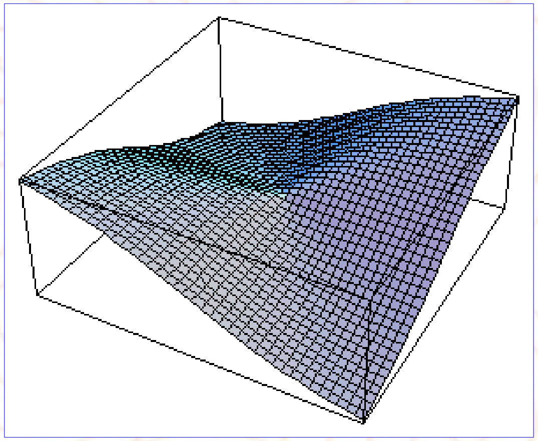
$$\Delta x < 0\text{时}, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} \cdot \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 0 \times 1 = 0, & \text{右极限} \\ 0 \times (-1) = 0, & \text{左极限} \end{cases}$$

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在.

多元函数的各偏导数存在(可偏导) $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

例: $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$



在(0,0)连续,可偏导但不可微

由定义知，在点(0,0)处有

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,y)$在(0,0)点连续, 但不可微!

说明：多元函数在某点可偏导并不能保证在该点可微.