8.2 平面线积分与路径无关的条件

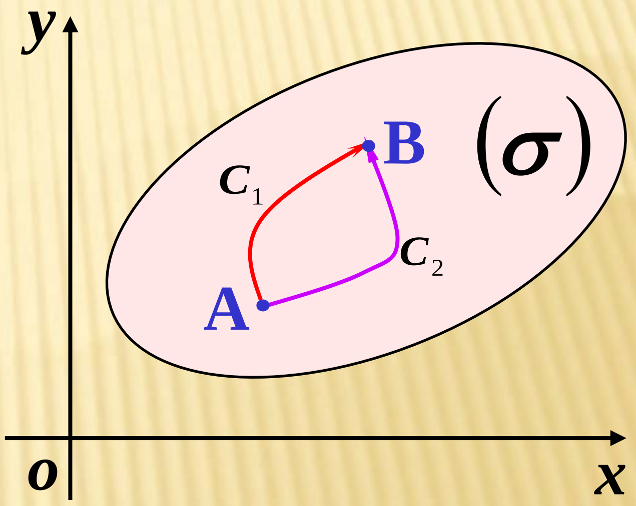
- 曲线积分与路径无关的定义
- 三个等价命题
- 平面曲线积分与路径无关的条件
- 物理意义
- 势函数的求法

- 作业 **P260**

  2，3， 5， 7， 8， 9

一、曲线积分与路径无关的定义

$\forall A$、$B \in (\sigma)$，沿路径(C)从A到B作线积分



如果在区域(σ)内沿任意不同路径有:

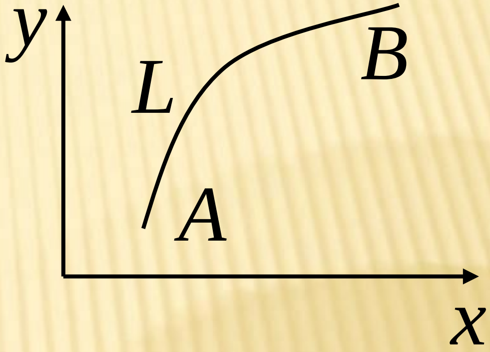
$$\int_{(C_1)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(C_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则称曲线积分$\int_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$内与路径无关,

$$\int_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \Rightarrow \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

否则与路径有关.

第二型曲线积分



引例: 变力沿曲线所作的功.

设一质点受力场中变力 F 作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

在 xoy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B,

求移动过程中场力 F 所作的功W.

$$\boxed{W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y}$$

保守场: **当第二型线积分** $\int_{(C)}\vec{A}(M)\cdot d\vec{s}$ **的值与积分路径无关时,称向量场** $\vec{A}(M)$ **为一保守场。**

二、三个等价命题

定理8.2 设区域$(\sigma)\subseteq R^2, P, Q\in C(\sigma)$,那么下列命题等价:

1．沿(σ)内任一分段光滑的简单闭曲线(C)，线积分

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\,;$$

2. 线积分$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中与路径无关.

3. 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中是某二元函数$\Phi(x,y)$的全微分.

定理8.2 设区域$(\sigma)\subseteq R^2$, $P,Q\in C(\sigma)$,那么下列命题等价:

1．沿(σ)内任一分段光滑的简单闭曲线(C)，线积分

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\,;$$

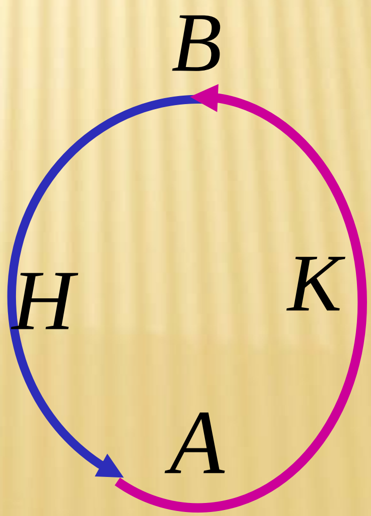
2. 线积分$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中与路径无关.

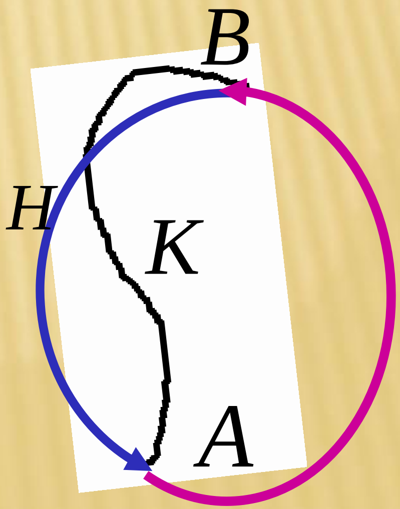
3. 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中是某二元函数$\Phi(x,y)$的全微分.

证明: $1^0\Rightarrow 2^0$

$$\oint_C =0\Rightarrow \int_{AKB}+\int_{BHA}=0$$

$$\Rightarrow \int_{AKB}=-\int_{BHA}=\int_{AHB}$$





$2^0 \Rightarrow 3^0$

欲证$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}\Phi(x,y)=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y$

需$\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\ \dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$且$P,Q$连续

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

只需证:$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)}{\Delta x}=P(x,y)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Phi(x,y+\Delta y)-\Phi(x,y)}{\Delta y}=Q(x,y)$$

$2^0 \Rightarrow 3^0$

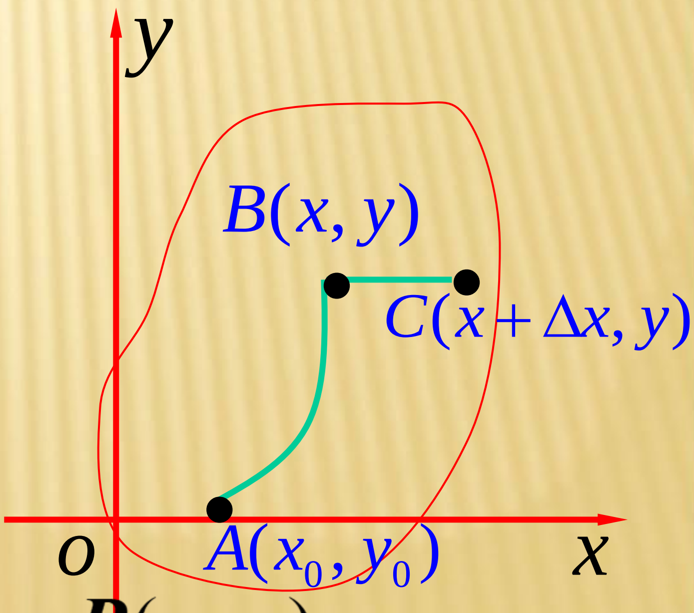
$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad \Phi(x+\Delta x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x$$

$$\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)=P(\xi,y)\Delta x$$

沿水平线段积分,dy=0



$$\frac{\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)}{\Delta x}=P(\xi,y)$$

令$\Delta x\to 0$,得 $\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$

同理知$\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)}{\Delta x}=P(x,y)$$

证: $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\Phi(x,y)$

定理8.2 设区域$(\sigma)\subseteq R^2, P,Q\in C(\sigma)$,那么下列命题等价：

1. 沿(σ)内任一分段光滑的简单闭曲线(C)，线积分

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0;$$

2. 线积分$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中与路径无关.

3. 表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中是某二元函数$\Phi(x,y)$的全微分.

$3^0 \Rightarrow 1^0 \rightarrow$

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$P(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad Q(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$I = \oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

任取(σ)域中一分段光滑简单闭曲线C，

$$C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta)$$

$3^0 \Rightarrow 1^0 \rightarrow$ $\quad \boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Q}\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

任取(σ)域中一分段光滑简单闭曲线C，

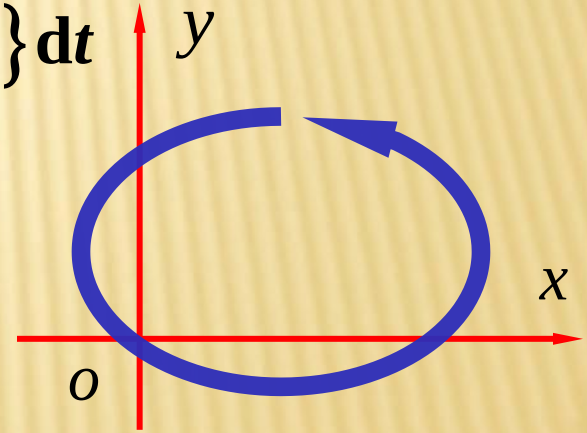
$$P(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad Q(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

$$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta$$

$$x(\alpha)=x(\beta),\ y(\alpha)=y(\beta)$$

$$I=\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P(x(t),y(t))\dot{x}(t)+Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)\}\mathrm{d}t$$



$$=\int_\alpha^\beta \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x}(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y}(t)\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}\Phi(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\Phi(x(t),y(t))\Big|_\alpha^\beta$$

$$=\Phi(x(\beta),y(\beta))-\Phi(x(\alpha),y(\alpha))\boxed{=0}$$

三、物理意义

1. $\oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{(C)} \vec{v}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \oint_{(C)} \vec{v}(M)\cdot\vec{e}_\tau \mathrm{d}s$

表示在单位时间内，流速场$\vec{v}(M)$沿闭曲线(C)流动流体的流量，力学上称其为沿曲线(C)的环流量。

$\oint_{(C)} \boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0$ 表明向量场$\vec{A}(M)$在(σ)内围绕任一点均无旋转趋势，称为无旋场。

2 线积分$\int_{(A)}^{(B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的值在$(\sigma)$内与积分路径无关表明:

向量场$\vec{A}(M) = (P,Q)$为保守场。

3. $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}u(x,y)$表明$(P,Q) = \nabla u(x,y)$，$(\sigma)$内的向量场$\vec{A}(M) = (P,Q)$由梯度确定，称为梯度场。

这时称向量场$\vec{A}(M) = (P(x,y),Q(x,y))$为有势场。

$u(x,y)$称为势函数。 Potential field , Potential function

三个等价命题

定理8.2 设区域$(\sigma)\subseteq R^2, P, Q\in C(\sigma)$,那么下列命题等价:

1. 沿(σ)内任一分段光滑的简单闭曲线(C)，线积分

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0\,;$$

2. 线积分$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中与路径无关.

3. 表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中是某二元函数$\Phi(x, y)$的全微分.

说明：无旋场，保守场，有势场等价

单连通、复连通区域均可

四、平面曲线积分与路径无关的条件

定理8.3

设区域(σ)是一个平面单连通域,函数

$P(x,y)$, $Q(x,y)\in C^{(1)}((\sigma))$,则定理 8.2 中三个命题成立的

充要条件是$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$(\sigma)$内恒成立.

说明: (1) 区域(σ)是一个单连通域.

(2) 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在(σ)内且具有一阶连续

偏导数$\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$f(x,y)\in C^{(1)}((\sigma))$: f 在 (σ) 上具有连续的一阶偏导数

定理 8.3 设(σ)为平面单连通域, $P(x,y),\ Q(x,y)\in C^{(1)}((\sigma))$,

则 沿(σ)中任一分段光滑的简单闭曲线C, 线积分

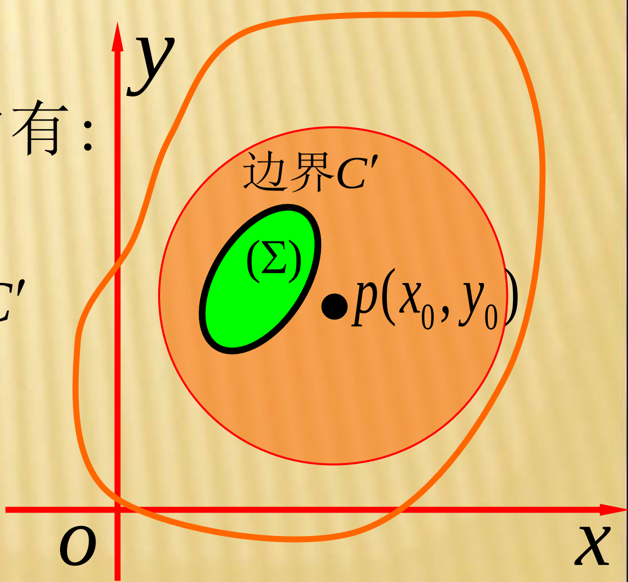
$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\text{在}(\sigma)\text{中所有点成立}$$

证明 $\Leftarrow$

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0$$

$\Rightarrow$（反证）假设$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_p>0$, 则在点$p$某邻域内有:

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_p\geq q>0$, 任取$(\Sigma)\subset$该邻域,$(\Sigma)$边界为$C'$



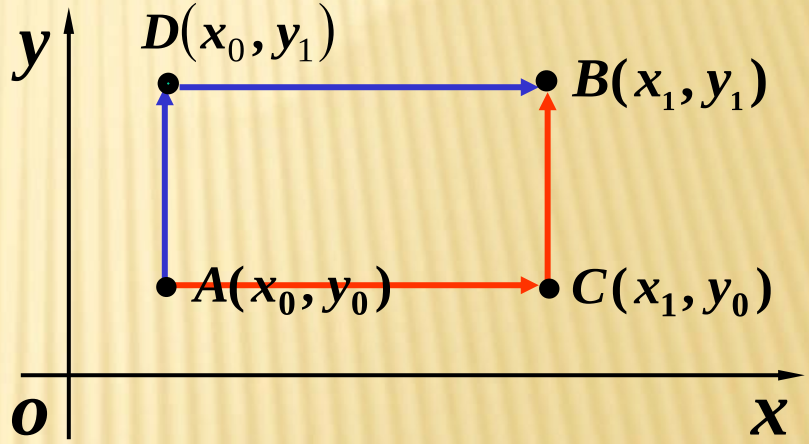
则$$\oint_{(C')} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{(\Sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\geq q\Sigma>0$$

$\therefore \oint_{(C')} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y>0$ 矛盾，故假设错误！$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$

注意： 设区域(σ)是一个单连通域,函数

$P(x,y),\ Q(x,y)\in C^{(1)}((\sigma))$,等式$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$(\sigma)$内恒

成立时，线积分与路径无关，但**与起点，终点有关**.



此时 $\displaystyle\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)} Pdx+Qdy \ =\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)dy$

或$\displaystyle=\int_{y_0}^{y_1}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_1)dx$

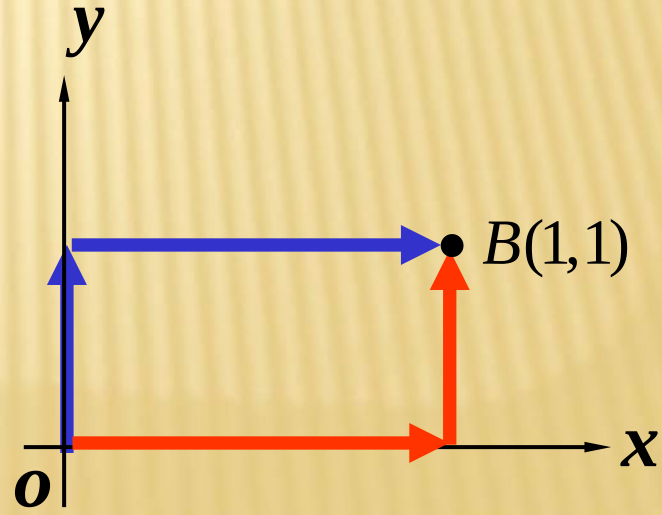
例3 计算 $\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$. 其中

L 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线弧 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$.

解

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\therefore$ 原积分与路径无关



故原式 $=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy$

$$=\frac{23}{15}.$$

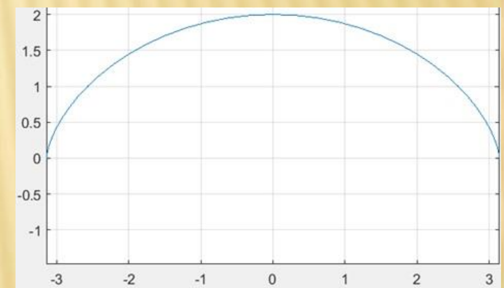
沿其它路径如 $y=x$ 也可

往年试题：求曲线积分$\int_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为摆线

$$\begin{cases} x = t - \sin t - \pi \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$ 上由$t=0$到$t=2\pi$的一段.

解： $t=0$对应的点是$(-\pi,0)$，$t=2\pi$对应的点是$(\pi,0)$.

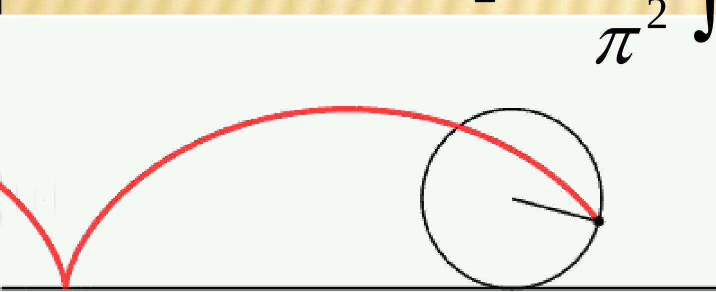
记$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，



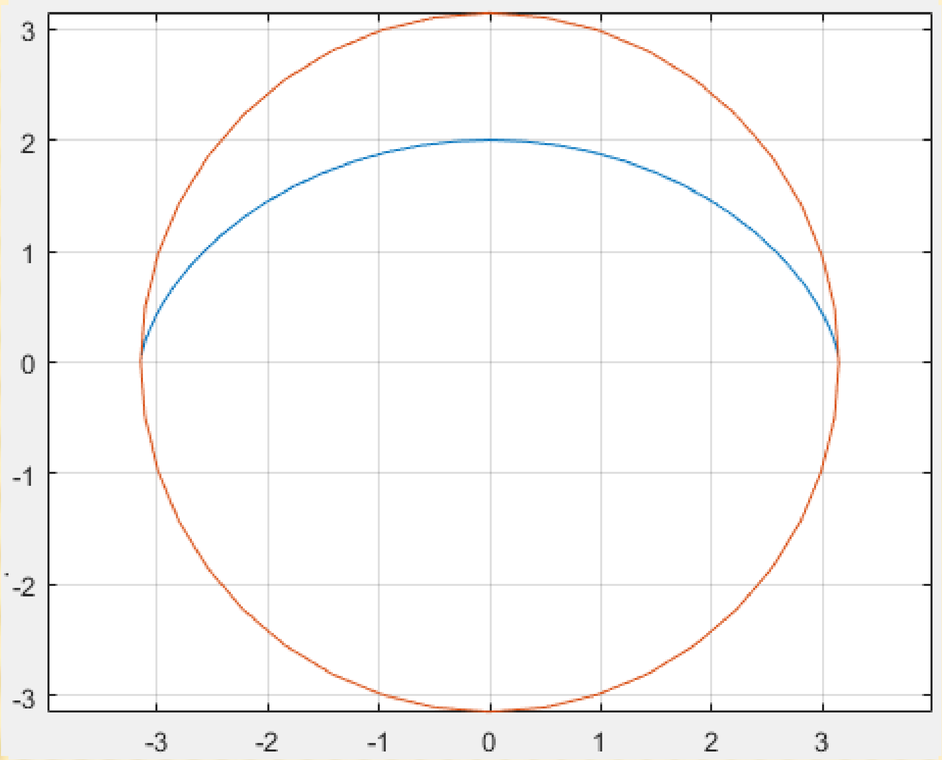
则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故曲线积分与路径无关.

可选积分路径$C: x=\pi\cos t,\ \ y=\pi\sin t$，$t$从$\pi$到0，

$$I=\frac{1}{\pi^2}\int_\pi^0[-\pi\sin t(-\pi\sin t)+\pi\cos t(\pi\sin t)]\mathrm{d}t$$



$$=-\pi.$$




```
t=0:0.05*pi:2*pi;
x = t-sin(t)-pi;
y = 1-cos(t);
plot(x,y);
axis equal;
grid on;
```

如作连接左右端点的圆周，则**发现:**
沿y>0上半圆周计算正确，沿y<0下半圆周计算则错误，

原因:

下半圆周和摆线构成的平面区域包含了原点（坏点），P,Q在原点均不连续，不符合**定理8.3**的前提条件.
二线形成封闭曲线，转成sigma区域(σ)，P,Q在(σ) 中要连续方可

例4 设曲线积分$\int_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy$.

解 $P(x,y)=xy^2,\quad Q(x,y)=y\varphi(x)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=2xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)]=y\varphi'(x),$$

因积分与路径无关，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由$y\varphi'(x)=2xy \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2+c$

由$\varphi(0)=0$，知$c=0 \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2$.

故 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy = \int_0^1 0dx + \int_0^1 ydy = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

例4 设曲线积分$\int_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy$.

Phi(0)=k也可，
先竖后横，
避开求phi(x)

解 $P(x,y)=xy^2,\quad Q(x,y)=y\varphi(x),$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=2xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)]=y\varphi'(x),$$

因积分与路径无关，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由$y\varphi'(x)=2xy \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2+c$

由$\varphi(0)=0$，知$c=0 \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2$.

故 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy = \int_0^1 0dx + \int_0^1 ydy = \boxed{\frac{1}{2}}.$

例4 设曲线积分$\int_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy$.

解

Phi(0)=k也可，
先竖后横，避开求phi(x)

五、求势函数的三种方法

求势函数$u(x,y)$,使$\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

称为全微分求积问题

势函数$u(x,y)$也称为全微分$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的一个原函数

$u(x,y)+C$也是原函数

例5　验证向量场$A = (2x\cos y - y^2\sin x)\vec{i} + (2y\cos x - x^2\sin y)\vec{j}$为有势场,并求其势函数.

解　$P(x,y) = 2x\cos y - y^2\sin x$,　$Q(x,y) = 2y\cos x - x^2\sin y$

则 $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x$,　$\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y$,

所以 $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. 即向量场为一有势场.

例5 验证向量场 $A=\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\vec{i}+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\vec{j}$ 为有势场,并求其势函数.

解 $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x,\qquad Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$

所以 $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. 即向量场为一有势场.

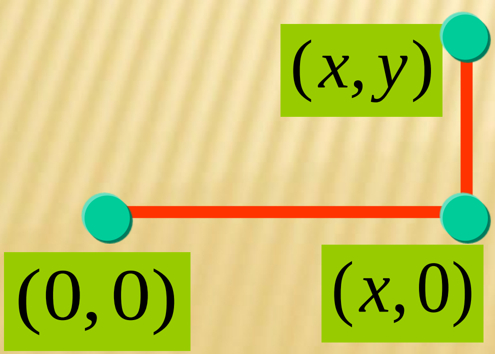
A.用线积分法求势函数: $\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y+C$$

$$=x^2+y^2\cos x+x^2(\cos y-1)+C$$

$$=y^2\cos x+x^2\cos y+C$$



例5 验证向量场 $A=\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\vec{i}+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\vec{j}$ 为有势场,并求其势函数.

B.用偏积分求: $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x,\ Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x,$

所以 $u(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x=\int\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\mathrm{d}x$

$$=x^2\cos y+y^2\cos x+\varphi(y)$$

又因为 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin y+2y\cos x+\varphi'(y)$

$$=Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$$

所以 $\varphi'(y)=0$ 即 $\varphi(y)=C$

即势函数为: $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C$

例5 验证向量场 $A=(2x\cos y-y^2\sin x)\vec{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\vec{j}$ 为有势场,并求其势函数.

C.用凑全微分法求: $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x,$

$Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$

$$du=Pdx+Qdy=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$

$$=\cos y d(x^2)+y^2 d(\cos x)+\cos x d(y^2)+x^2 d(\cos y)$$

$$=\cos y d(x^2)+x^2 d(\cos y)+y^2 d(\cos x)+\cos x d(y^2)$$

$$=d(x^2\cdot\cos y)+d(\cos x\cdot y^2)$$

$$=d(x^2\cdot\cos y+\cos x\cdot y^2)$$

即势函数为: $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C$

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

为一势函数.

$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的全体势函数为: $\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y+C$

若 $(0,0)\in\sigma$, 常取(x_0,y_0)为$(0,0)$, 则

势函数可取为:

$$\Phi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{x} P(x,0)\mathrm{d}x+\int_{0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

定理8.2 设区域$(\sigma)\subseteq R^2$, $P,Q\in C(\sigma)$,那么下列命题等价:

1. 沿(σ)内任一分段光滑的简单闭曲线(C), $\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$;
2. 线积分$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中与路径无关.
3. 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$(\sigma)$域中是某二元函数$\Phi(x,y)$的全微分.

$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关$\Rightarrow \mathrm{d}F(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ F是一个原函数

而$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 也是一个原函数

$\therefore \Phi(x,y)=F(x,y)+C$ 但 $\Phi(x_0,y_0)=0$ $\therefore C=-F(x_0,y_0)$

$\therefore \Phi(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)$

设(x_1,y_1)、(x_2,y_2)为σ内两个点, 则:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=F(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

曲线积分的Newton-Leibniz公式.

例6 计算$\int_{(1,0)}^{(0,1)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$和$\oint_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)}\frac{\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}}=\int_{(1,0)}^{(0,1)}\mathrm{d}\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}\Big|_{(1,0)}^{(0,1)}=0.$$

（除原点外，能找到被积函数的原函数，积分仅与起、终点有关，与路径无关, Th8.2,单、复连通域均可 ）

$$\oint_{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=1}\frac{\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}}=\oint_{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=1}\mathrm{d}\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}=0$$

（含原点， Th8.2要求C（sigma）,单、复连通域均可 **---------用挖洞法化为小圆，半径为r ,分母提出去**

但该题结果不能从定理8.3得出.因被积函数不满足在单位圆域内(单连通域内)具有一阶连续偏导数及 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.