思考题:

下列说法能否作为 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限的等价定义？为什么？

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，恒有不等式 $|a_n - A| < k\varepsilon$ 成立，其中 k 为正常数.

(2) 对于无穷多个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，恒有不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，有无穷多项 a_n，使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

第二部分：收敛数列的性质与极限运算法则

1.有界性

定义：对数列x_n，若存在正数M，使得一切自然数n，恒有$|x_n| \le M$成立，则称数列x_n有界，否则，称为无界.

例如，数列 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$；有界

数列 $x_n = 2^n$. 无界

数轴上对应于有界数列的点x_n都落在闭区间$[-M, M]$上.

上页 下页 返回

定理1　收敛的数列必定有界. **boundedness**

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,　由定义,　取 $\varepsilon = 1$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则对一切自然数 n, 皆有 $|x_n| \le M$, 故 $\{x_n\}$ 有界.

推论　无界数列必定发散.

注意： 有界性是数列收敛的必要条件.

例5 证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 由定义, 对于$\varepsilon=\frac{1}{2}$,

则$\exists N$,使得当$n>N$时,有$|x_n-a|<\frac{1}{2}$成立,

即当$n>N$时, $x_n\in(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$, 区间长度为1.

而x_n无休止地反复取$1,-1$两个数,

不可能同时位于长度为1的区间内.

事实上,$\{x_n\}$是有界的,但却发散.

上页 下页 返回

2.唯一性

定理2　收敛数列的极限只有一个. **uniqueness**

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, a \neq b.$

由定义知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$.使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$;

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

则当 $n > N$ 时有 $|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$

$$\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立. 故收敛数列极限唯一.

定理2　如果数列$\{x_n\}$收敛，则它的极限唯一

证：用反证法　假设同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$,

$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, 则 $\exists N_1$、N_2, 使得当

$n > N_1$时，恒有 $|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2}$,

$n > N_2$时，恒有 $|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

则 $n > N$ 时，$\dfrac{3a-b}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+b}{2} < x_n < \dfrac{3b-a}{2}$,

则 $n > N$ 时, $\frac{3a-b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{3b-a}{2}$,

即 $x_n < \frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2} < x_n$,

这是不可能的，故收敛数列极限唯一.

定理3.（有理运算法则）Rules of rational operations

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$$

（可推广到有限个数列的情形）

该法则要求：参与运算的每个数列的极限均存在.

推论：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = ka$, k为常数. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m = a^m, m \in Z^+$

上页 下页 返回

定理4.保号性 Preservation of sign

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \neq 0$,则$\exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得$\forall \boldsymbol{n} > N$, $\boldsymbol{a_n}$与$\boldsymbol{a}$同号.

并且，若 $\boldsymbol{a} > 0$,则$\exists N \in \mathbf{N}_+$,使得$\forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$,恒有$\boldsymbol{a_n} \geq \boldsymbol{q} > 0$.

反之，若 $\boldsymbol{a} < 0$,则$\exists N \in \mathbf{N}_+$,使得$\forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$,恒有$\boldsymbol{a_n} \leq \boldsymbol{q} < 0$.

证：若$\boldsymbol{a>0}$, 取$\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0, \exists N_1$, 当$n > N_1$时恒有$|a_n - a| < \dfrac{a}{2}$,

即$\dfrac{1}{2}a < a_n < \dfrac{3}{2}a$, 取$q=\dfrac{1}{2}a$ 即可.

若$\boldsymbol{a<0}$, 取$\varepsilon = -\dfrac{a}{2} > 0, \exists N_2$, 当$n > N_2$时恒有$|a_n - a| < -\dfrac{a}{2}$,

即$\dfrac{3}{2}a < a_n < \dfrac{1}{2}a$, 取$q=\dfrac{1}{2}a$ 即可.

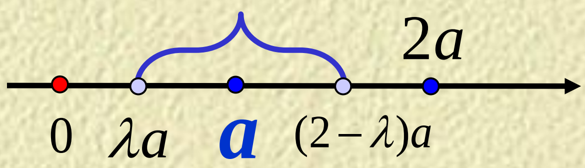
保号性推论

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \neq 0$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+$,

使 $\forall n > N, |a_n| > \lambda |a| \quad (0 < \lambda < 1)$.

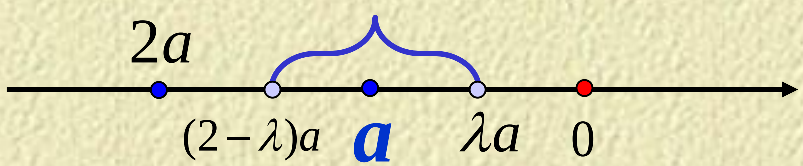
证:若 $a>0$, 取 $\varepsilon = (1-\lambda)a > 0, \exists N_1,$ 当 $n > N_1$ 时恒有 $|a_n - a| < (1-\lambda)a$,

即 $\lambda a < a_n < (2-\lambda)a \quad \therefore |a_n| > \lambda |a|$



若 $a<0$, 取 $\varepsilon = (\lambda-1)a > 0, \exists N_2,$ 当 $n > N_2$ 时恒有 $|a_n - a| < (\lambda-1)a$,

即 $(2-\lambda)a < a_n < \lambda a, \quad \therefore |a_n| > \lambda |a|$



上页 下页 返回

定理5.保序性 isotone

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.若$\exists N \in \mathbf{N}_+$,使得$\forall n > N$,

恒有$a_n \le b_n$, 则$a \le b$.

(反证法) 设$a>b$, 由保号性可证

上页 下页 返回

定理6. 夹逼定理 (Squeeze Theorem)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 若$\exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得$\forall n > N$,

恒有$a_n \le c_n \le b_n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

例6 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

例7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3+1}$

例8 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例8 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\left(a>0\right)$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 (1)当 $a>1$ 时, $\sqrt[n]{a}=1+h_n\,(h_n>0)$,

由牛顿二项公式，得

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^{\ 2}+\cdots+h_n^n\geq nh_n,$$

$$\Rightarrow 0<h_n\leq\frac{a}{n},$$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1.$$

上页 下页 返回

例8 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

当 $a=1$ 时，显然成立。

当 $0<a<1$ 时，令 $b=\dfrac{1}{a}>1$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$,

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

综上可知，当 $a>0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(2). $n>1$. 令 $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, 则 $\sqrt[n]{n}-1=x_n$, 且 $x_n>0$.

$$n=(1+x_n)^n=\mathbf{1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2!}x_n^2+\cdots+x_n^n}$$

$$n>\frac{n(n-1)}{2!}x_n^2,\quad 0<x_n\le\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由夹逼定理得证

上页　下页　返回

例9　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos n}$;

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)\left(1+\sqrt[n]{2}\right)$;

$$\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{3+\cos n}\le\sqrt[n]{4};$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})(1+\sqrt[n]{2})=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt[n]{2})=0.$$

上页　下页　返回

例10 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

分析： 考虑利用夹逼性. 构造夹逼数列

$$\because \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

所以, 所求极限为 $\frac{1}{2}$.

思考题:

1. 下面的求极限过程是否正确?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0++\cdots+0$$

$$=0$$

提示

2. 当$a_0\neq 0, b_0\neq 0, k$和l为非负整数时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}$$ 的取值有哪些情况?

提示

提示

思考题

1. 错误. 数列极限的有理运算法则仅适用于有限个极限的情况. 正确的求极限过程如下:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}$$

$$=0+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

返回

提示

思考题

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}=\begin{cases}a_0/b_0, & \text{当} l=k;\\ 0, & \text{当} l>k;\\ \infty, & \text{当} l<k.\end{cases}$$

返 回

第三部分：数列收敛的判别准则

单调性：设有数列$\{a_n\}$，若$\forall n \in \mathbf{N}_+$，都有$a_n \le a_{n+1}(a_n \ge a_{n+1})$，

则数列$\{a_n\}$是单调增（减）的

若以上不等式是严格成立的，则称该数列是严格单调增（减）的。

定理2.6 (单调有界准则) monotone boundedness criterion

单调增（减）有上（下）界的数列必定收敛。

证明：设数列$\{x_n\}$单增，有上界. 则必有上确界，记为a

可证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

a为上确界$\Rightarrow x_n \le a$ 且$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，使$x_N > a - \varepsilon$.

又数列$\{x_n\}$单调增，故 $\forall n > N, x_n \ge x_N$，

$\therefore \forall n > N$，恒有$a - \varepsilon < x_N \le x_n \le a < a + \varepsilon$.

a为上确界 $\Rightarrow x_n \le a$ 且 $\underline{\forall \varepsilon > 0}, \underline{\exists N}$, 使 $x_N > a - \varepsilon$.

又数列 $\{x_n\}$ 单增, 故 $\forall n > N, x_n \ge x_N$,

$\therefore \underline{\forall n > N}$, 恒有 $\underline{a-\varepsilon} < x_N \le \underline{x_n} \le a < \underline{a+\varepsilon}$.

$\boxed{\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

定理2.6 （单调有界准则） **monotone boundedness criterion**

单调增（减）有上（下）界的数列必定收敛。

重要极限 $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.}$

（1）可以证明它是单调增的;

（2）可以证明它有上界3。

例　证明：$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 收敛.

证 (1)　先证$\{a_n\}$是单调增加的。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

下一步，各项分子分母同时约去 n 的相同的幂次

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

大于零(>0)

$$=a_{n+1}$$

这就证明了$\{a_n\}$是单调增加的。

(2) 再证$\{a_n\}$是上有界的。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

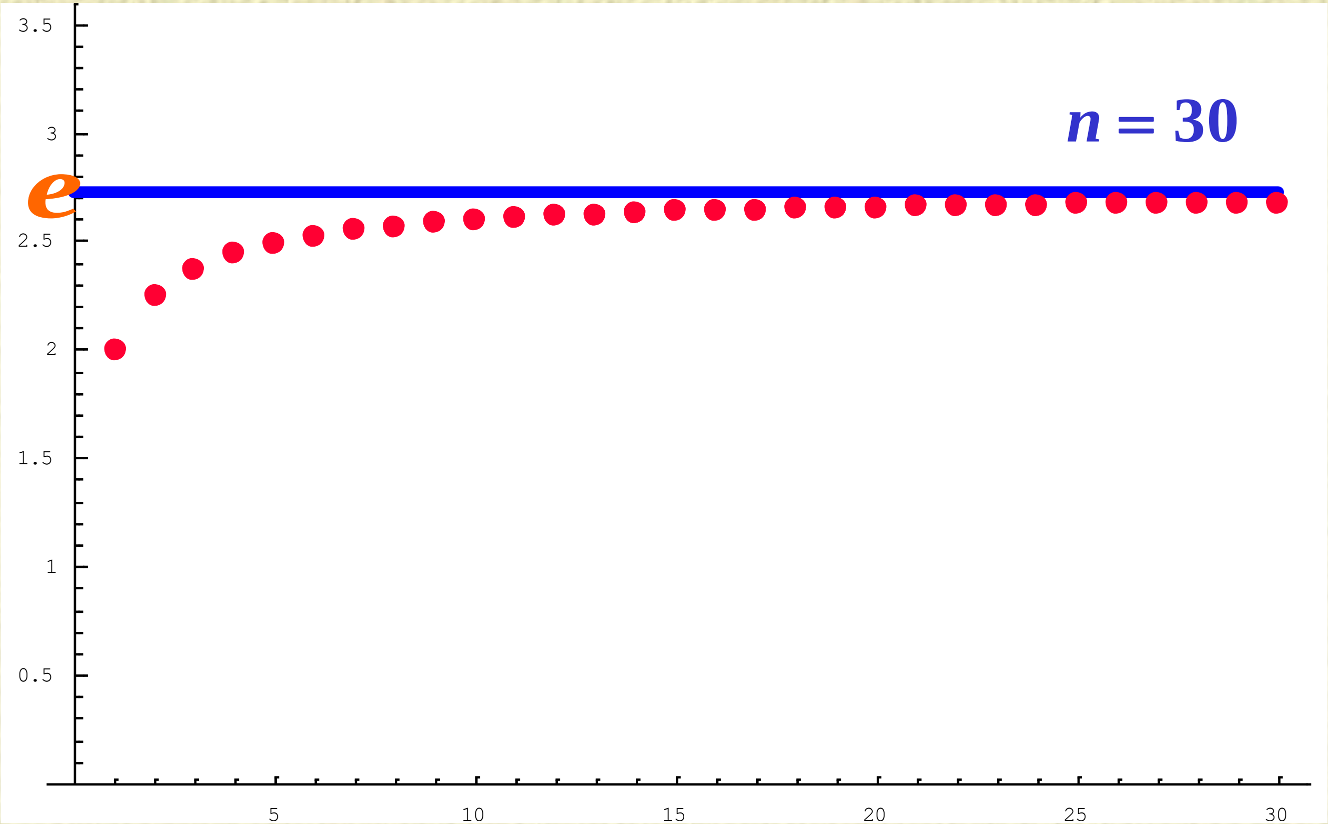
$$< 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$= 3 - \dfrac{1}{n} < 3$， 因此$\{a_n\}$又是上有界的。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xlongequal[\text{记作}]{\text{存在}} e$

$$e = 2.71828128459\cdots$$



® (1) 这是有理数列的极限是无理数的重要例子，它说明了有理数集对于极限运算是不封闭的，极限理论必须在实数范围内研究。（实数完备性）

(2) 可以解决一大批类似极限问题。

例10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

例　证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

例 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $x_1>0$，$a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

例 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$