数学物理方程

6 特征线法

张 丹 副教授/博导
能源与动力工程学院
数学与统计学院(兼)
动力工程多相流国家重点实验室

偏微分方程(PDE)的解法

- **正交分解法**
  - **1822** J.Fourier
  - 分离变量法
    - 未知函数分解为自变量独立函数乘积
    - 一维
      - 特征值问题 $A=-\dfrac{d^2}{dx^2}$ 算子特征方程+齐次边界
      - 初值ODE定解问题
    - 二维
      - 特征值问题 $A=-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=-\left(u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right)$
      - 初值ODE定解问题
    - 高维
    - 有界区域
  - 积分变换法 PDE→ Fourier变换 / Laplace变换 →ODE →求解→反变换→得解
    - 无界/半无界区域
    - 积分变换的本质是无限维向量的正交分解
- **特征线法** 自变量沿特征线整合→消元降维
  - 一阶/二阶波动方程
  - **1747** J.R.D'Alembert
- **Green函数法** Poisson方程→Green函数→镜像法→实现边界条件→得解
  - **1828** G.Green
  - 圆域/半空间等简单区域

1. 数学建模和基本原理介绍
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
   - 6.1 一阶偏微分方程特征线法
     - 一阶线性PDE特征线法
     - 一阶拟线性PDE方程特征线法
     - 特征线法应用举例
   - 6.2 一维波动方程特征线法
7. Legendre多项式

6.1 一阶偏微分方程特征线法

1. 正交分解法→分；特征线法→合
2. 特征线法→寻找PDE特征线→沿特征线积分→转化为ODE
3. 特征线法不仅可以解线性PDE, 还可以解非线性PDE

一阶线性PDE

$$au_t + bu_x + cu = f$$

系数均为自变量 x, t 的函数, 但不显含 u

例1 求解一阶线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = x + t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

定解问题的表述

Cauchy问题 无界区域上的初值问题

A.L.Cauchy
1789-1857
French Math.
Physical Scientist

解 将偏微分项整合为未知量的全导数, 实现PDE→ODE

即 $u_t + 3u_x$ 中, 若 $\dfrac{dx}{dt} = 3$, 则

❶ 方程左端可整合为 $u_t + 3u_x = u_t + u_x \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du}{dt}$

❷ 两个自变量潜在关系 $\dfrac{dx}{dt} = 3, \quad x = 3t + \tau$

任意常数

→ 将 x, t 限制在该直线族上可化简方程

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例1 求解一阶线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = x + t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$3 = \dfrac{dx}{dt}$

❶ 特征线

特征方程

$\dfrac{dx}{dt} = 3$ 满足特征方程的线有无数条 → 特征方程是2自变量满足的ODE

求解特征线 → $x = 3t + \tau$

参数 τ 体现特征线有无数条/不相交

代入

❷ 原PDE可整合为

$$u_t + 3u_x = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = x + t = 4t + \tau$$

改造后定解条件不显含x

❸ 定解条件 $u(x,0) = x^2$

$t = 0$

特征线 $x = 3t + \tau$

$$u(x,0) = (3t + \tau)^2 = \tau^2 = u[x(0),0]$$

$t = 0$

原PDE的Cauchy问题可转化为ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 4t + \tau, \ 0 < t \\ u[x(0),0] = x^2(0) = \tau^2, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

初始条件是任意参量

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例1 求解一阶线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = x + t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

求解全导数化整合后的ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 4t + \tau, \ 0 < t \\ u(t) = \tau^2, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

ODE不含u, 直接积分法

$$u(t) = 2t^2 + t\tau + C$$

由初始条件 $u[x(0),0] = u(t=0) = C = \tau^2$

得 $C = \tau^2$

ODE的解用参数 τ 可表示为

$$u(t) = 2t^2 + t\tau + \tau^2$$

联立特征线方程消去常数 τ

$x = 3t + \tau \rightarrow \tau = x - 3t$

代入 $u(t) = 2t^2 + t\tau + \tau^2$

$$= 2t^2 + t(x-3t) + (x-3t)^2$$

$$= x^2 + 8t^2 - 5xt$$

得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = x^2 + 8t^2 - 5xt, \quad (t > 0)$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法 从变化的初始条件/特征线→解曲面的生成

一阶线性PDE 特征线法几何意义

例1 原一阶线性PDE →

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = x + t,\ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

整合后的ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 4t + \tau,\ 0 < t \\ u[x(0),0] = \tau^2,\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

→ 解曲面

$$u(x,t) = 2t^2 + t(x-3t) + (x-3t)^2 = x^2 + 8t^2 - 5xt$$

❶初始条件 $\varphi(x) = x^2 = \tau^2$

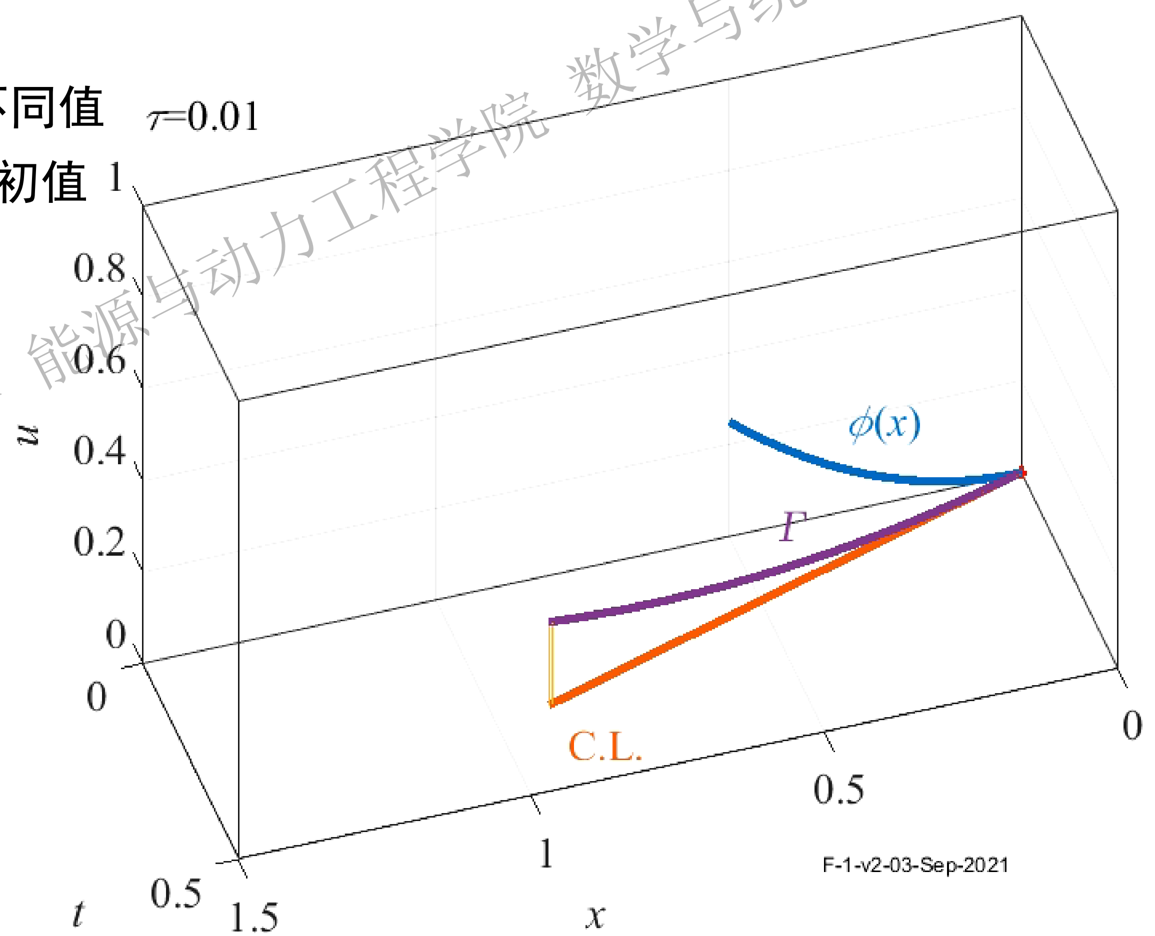
xOu平面上初始曲线→参数τ取不同值时解曲线在xOu上的起点→积分初值

❷特征线 $x = 3t + \tau$ →xOt平面上以τ为参数的平行直线族

❸将x, t限制在某条特征线上→τ为定值→连续改变t→由整合后的ODE→可得连续变化u→1条解曲线 $\Gamma: u(t) = 2t^2 + t\tau + \tau^2$

❹改变τ→令特征线扫过xOt平面→x, t取遍定义域→得解曲面

$$u(x,t) = x^2 + 8t^2 - 5xt$$



一阶线性PDE

$$au_t + bu_x + cu = f$$

系数均为自变量 x, t 的函数, 但不显含 u

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{b}{a} & \text{特征方程 ODE} \\ \psi(x,t) = C & \text{特征线 } xOt\text{平面平面曲线族} \end{cases}$$

特征线法求解步骤

1. 建立/求解特征线ODE
2. 改造原PDE/初始条件
3. 求解解化简后的ODE
4. 从特征线方程解出积分参数τ,
   代入3解 得出原PDE的解

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

变量代换法

一阶线性PDE可视为定义在半平面上的解曲面→该平面可用变量 x, t 表征→自然亦可用其他变量组合 η, ξ 表征→特征线法为坐标变换/变量代换提供了思路→该方法亦可应用于高阶PDE求解

特征线 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{b}{a}$

特征方程 $\psi(x,t) = C$

$(x,t) \to (\eta, \xi)$

$$\begin{cases} \eta = x \\ \xi = \psi(x,t) = \tau \end{cases}$$

$\dfrac{d\eta}{dx} = 1$ ❶

$\xi = \psi(x,t) = \tau = \text{Const.}$

ξ /ˈksaɪ/

ζ /ˈzi:tə/

$au_t + bu_x + cu = f$

$$\xi_x \frac{dx}{dt} + \xi_t = 0$$

$$\xi_x \frac{b}{a} + \xi_t = 0$$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{b}{a}$ 特征线

$a\xi_t + b\xi_x = 0$ ❷

$$au_\xi \xi_t + b\left(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\right) + cu = f$$

$$u_\xi\left(a\xi_t + b\xi_x\right) + bu_\eta \eta_x + cu = f$$

$a\xi_t + b\xi_x = 0$ ❷

❶ $\dfrac{d\eta}{dx} = 1$

$bu_\eta + cu = f$

原方程在新坐标系中转化为一阶线性ODE

1. 仅需改造PDE/无需改造初始条件
2. 求解后回代→还原变量
3. 根据原坐标系初始条件确定常数

6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

$(x,t) \to (\xi,\eta)$

$$au_t + bu_x + cu = f \rightarrow \begin{cases} \eta = x \\ \xi = \psi(x,t) = \tau \end{cases} \rightarrow bu_\eta + cu = f$$

例1 用变量代换的思路再解例1

求解一阶线性PDE的Cauchy问题 $\begin{cases} u_t + 3u_x = x + t,\ 0 < t,\quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2,\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

解 特征方程/特征线 $\dfrac{dx}{dt} = 3,\quad x = 3t + \tau$

定义变量代换 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \eta \\ t = \dfrac{\eta - \xi}{3} \end{cases}$

原方程可化为ODE $u_t + 3u_x = x + t$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} + 3\left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) = \eta + \frac{\eta - \xi}{3}$$

$$u_\xi(-3) + 3(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot 1) = \eta + \frac{\eta - \xi}{3}$$

$$3u_\eta = \frac{4}{3}\eta - \frac{1}{3}\xi$$

$$u_\eta = \frac{4}{9}\eta - \frac{1}{9}\xi$$

两端对η积分 $u(\eta,\xi) = \dfrac{2}{9}\eta^2 - \dfrac{1}{9}\xi\eta + g(\xi)$

仅与ξ有关的连续/可导函数

还原变量 $u(x,t) = \dfrac{2}{9}x^2 - \dfrac{1}{9}(x-3t)x + g(x-3t)$

由初始条件 $u(x,0) = x^2 = \dfrac{2}{9}x^2 - \dfrac{1}{9}x^2 + g(x)$

得 $g(x) = \dfrac{8}{9}x^2$ 原方程的解为

$$u(x,t) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{9}(x-3t)x + \frac{8}{9}(x-3t)^2$$
$$= x^2 + 8t^2 - 5xt$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例2 $\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$ PDE无函数u项/自由项

解法1 特征线法

解 原PDE是无界Cauchy问题, 可用特征线法

第1步 求特征线方程

根据原PDE, 特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 2$

解得特征线方程为 $x = 2t + \tau$

第2步 改造原PDE/定解条件

原PDE可表示为

$$u_t + 2u_x = 0$$
$$u_t + u_x\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{du}{dt} = 0$$

原初始条件可表示为

$$u(x,0) = x^2 = (2t+\tau)^2 = (2\cdot 0+\tau)^2 = \tau^2$$

原定解问题可转化为ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 0, \ 0 < t, -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau,0) = \tau^2, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

第3步 解ODE定解问题

直接积分法→结合初始条件易知

$$u(t) = C = u(0) = \tau^2$$

第4步 消特征线常数 由特征线方程知

$x = 2t + \tau$ → $\tau = x - 2t$ 代入上述解

得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = \tau^2 = (x-2t)^2$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

$(x,t)\to(\xi,\eta)$

$au_t + bu_x + cu = f \;\rightarrow\; \begin{cases}\eta = x\\ \xi = \psi(x,t) = \tau\end{cases} \;\rightarrow\; bu_\eta + cu = f$

例2 $\begin{cases} u_t + 2u_x = 0,\ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x^2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

解 第1步 定义变量代换

根据原PDE, 特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 2$

特征线方程为 $x = 2t + \tau$, 即 $x - 2t = \tau$

可定义变量代换 $\begin{cases}\eta = x\\ \xi = x - 2t\end{cases}$

第2步 改造原PDE

$$u_t + 2u_x = 0$$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} + 2\left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) = 0$$

$$u_\xi(-2) + 2(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot 1) = 0$$

$$u_\eta = 0$$

第3步 解ODE并还原变量

解新变量定义下的ODE 直接积分法

$$u(\eta,\xi) = C = g(\xi)$$

任意连续可导函数

还原变量 $u(x,t) = C = g(x - 2t)$

第4步 确定未知函数

由原初始条件

$$u(x,0) = x^2 = g(x - 2t) = g(x - 2\cdot 0) = g(x)$$

即 $g(x) = x^2$

原定解问题的解为

$$u(x,t) = (x - 2t)^2$$

无 c , f 时两种解法工作量相当

6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, \ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x+2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

自由项含有时间 t

解法1 特征线法

解 原PDE是无界Cauchy问题, 可用特征线法

第1步 求特征线方程

根据原PDE, 特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 2$

解得特征线方程为 $x = 2t + \tau$

第2步 改造原PDE/定解条件

原PDE可表示为 $u_t + 2u_x + u = xt$

$$u_t + u_x \frac{dx}{dt} + u = (2t+\tau)t$$

$$\frac{du}{dt} + u = 2t^2 + \tau t$$

改造初始条件

$$\begin{aligned} u(x,0) &= -x+2 \\ &= -(2t+\tau)+2 \\ &= -2\cdot 0 - \tau + 2 \\ &= -\tau + 2 \end{aligned}$$

原定解问题可转化为ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = 2t^2 + \tau t, \ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau,0) = -\tau + 2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

一阶线性PDE

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt,\ 0<t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x+2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法1 特征线法

第3步 解ODE定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = 2t^2 + \tau t,\ 0<t, & -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau,0) = -\tau + 2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

一阶线性非齐次ODE 常数变易法

先解对应的齐次ODE $\dfrac{du}{dt} + u = 0$

解得 $u(t) = C\exp(-t)$

设非齐次ODE通解为 $u(t) = C(t)\exp(-t)$

代入非齐次ODE

$$C'(t)\exp(-t) - C(t)\exp(-t) + C(t)\exp(-t) = 2t^2 + \tau t$$

$$C'(t)\exp(-t) = 2t^2 + \tau t$$

变易系数满足 $C'(t) = (2t^2 + \tau t)\exp(t)$

$$C(t) = \int (2t^2 + \tau t) e^t dt$$

分部积分得变易系数

$$= (2t^2 + \tau t)e^t - \int (4t + \tau) e^t dt$$

$$= (2t^2 + \tau t)e^t - (4t + \tau)e^t + \int 4e^t dt$$

$$= (2t^2 + \tau t)e^t - (4t + \tau)e^t + 4e^t + C_2$$

$$= (2t^2 + \tau t - 4t - \tau + 4)e^t + C_2$$

代入通解

$$u(t) = \left[(2t^2 + \tau t - 4t - \tau + 4)e^t + C_2\right]e^{-t}$$

$$= C_2 e^{-t} + 2t^2 + \tau t - 4t - \tau + 4$$

通解系数由ODE初始条件确定

$$u(0) = C_2 - \tau + 4 = -\tau + 2$$

$$C_2 = -2$$

ODE的解为

$$u(t) = -2e^{-t} + 2t^2 + \tau t - 4t - \tau + 4$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

习题6, 1 (2)

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x + 2, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法1 特征线法

第4步 消特征线常数 由特征线方程知

$$x = 2t + \tau \ \Rightarrow \ \tau = x - 2t \ \Rightarrow \ u(t) = -2e^{-t} + 2t^2 + \tau t - 4t - \tau + 4$$

得原PDE定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2e^{-t} + 2t^2 + (x - 2t)t - 4t - (x - 2t) + 4 \\ &= -2e^{-t} + xt - x - 2t + 4 \end{aligned}$$

$au_t + bu_x + cu = f$

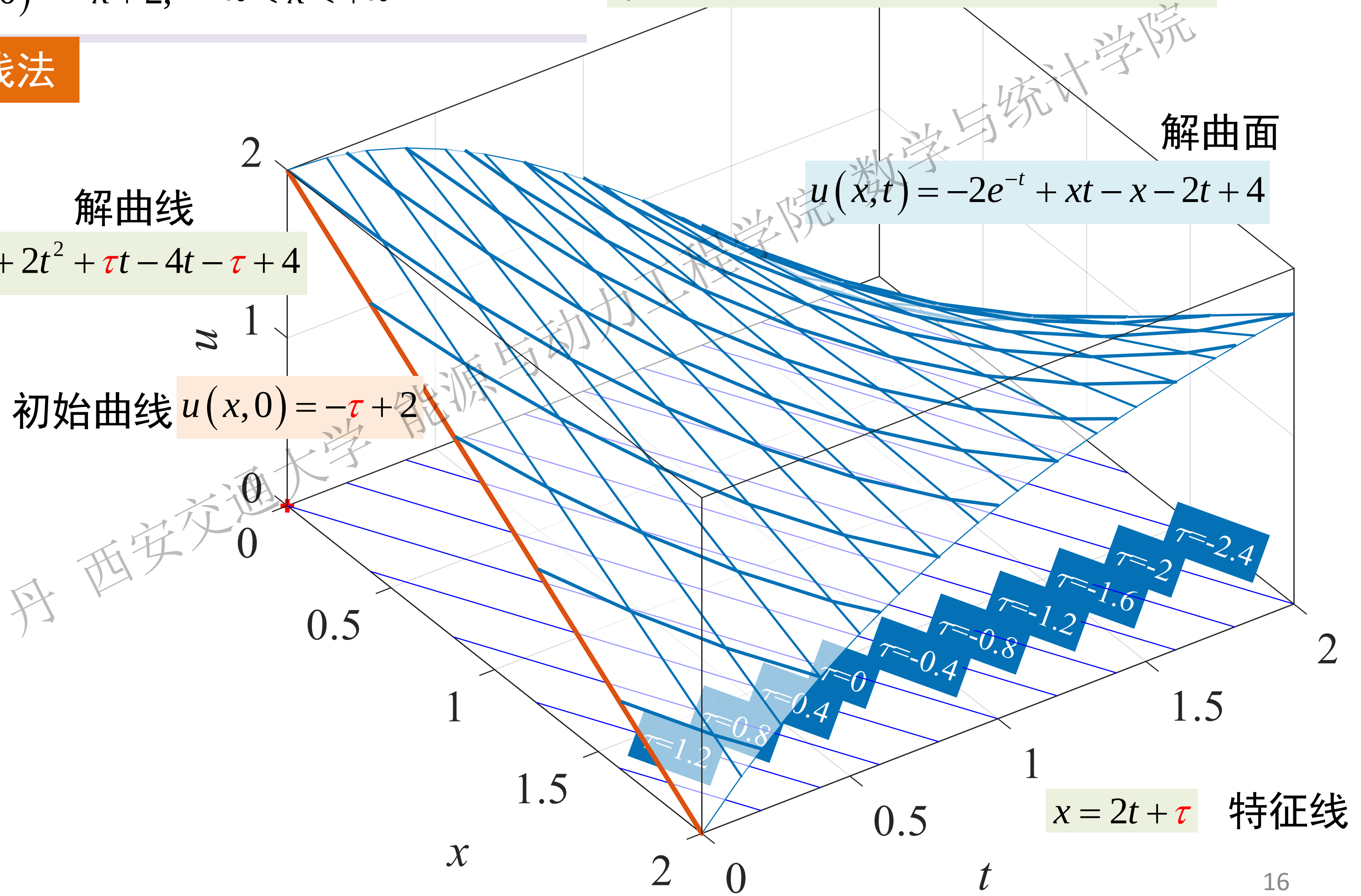
一阶线性PDE

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x + 2, \ \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = 2t^2 + \tau t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau, 0) = -\tau + 2, \ \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法

几何意义



6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, \ 0<t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x+2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

解 第1步 定义变量代换

根据原PDE, 特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 2$

特征线方程为 $x = 2t + \tau$，即 $x - 2t = \tau$

可定义变量代换 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 2t \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} x = \eta \\ t = \dfrac{\eta - \xi}{2} \end{cases}$

第2步 改造原PDE $u_t + 2u_x + u = xt$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} + 2\left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) + u = \eta \frac{\eta - \xi}{2}$$

$$u_\xi (-2) + 2(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot 1) + u = \frac{\eta^2 - \eta\xi}{2}$$

$$2u_\eta + u = \frac{\eta^2 - \eta\xi}{2}$$

第3步 解ODE并还原变量

新变量定义下的ODE $u_\eta + \dfrac{1}{2}u = \dfrac{\eta^2 - \eta\xi}{4}$

一阶线性非齐次ODE 常数变易法

先解对应的齐次ODE $u_\eta + \dfrac{1}{2}u = 0$

$$u(\eta) = C_1 \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right)$$

非齐次ODE通解形式为

$$u = C_1(\eta)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right)$$

代入非齐次ODE

$$C_1'(\eta)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) - \frac{1}{2}C_1(\eta)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}C_1(\eta)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) = \frac{\eta^2 - \eta\xi}{4}$$

变易系数需满足 $C_1'(\eta) = \dfrac{\eta^2 - \eta\xi}{4}\exp\left(\dfrac{\eta}{2}\right)$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt,\ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x + 2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

分部积分计算变易系数

$$C_1(\eta) = \int\left(\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) - \int\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) - 2\int\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) - 4\left[\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\exp\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) + 4\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) + g(\xi)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\xi - 2\eta + \xi + 4\right)\exp\left(\frac{\eta}{2}\right) + g(\xi)$$

得到新变量系统下ODE通解可表示为

$$u(\eta,\xi) = C_1(\eta)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) = g(\xi)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\xi - 2\eta + \xi + 4$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

例3 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, \ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = -x + 2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

$$u(\eta,\xi) = g(\xi)\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\xi - 2\eta + \xi + 4$$

还原变量 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 2t \end{cases}$

原变量下的通解可表示为

$$u(x,t) = g(x-2t)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}x^2$$

$$-\frac{1}{2}x(x-2t) - 2x + x - 2t + 4$$

$$= g(x-2t)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) + xt - x - 2t + 4$$

第4步 确定未知函数 由原初始条件

$$u(x,0) = -x + 2$$

$$g(x - 2\cdot 0)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) + x\cdot 0 - x - 2\cdot 0 + 4 = -x + 2$$

$$g(x)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) - x + 4 = -x + 2$$

$$g(x) = -2\exp\left(\frac{x}{2}\right)$$

代入得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = g(x-2t)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) + xt - x - 2t + 4$$

$$= -2\exp\left(\frac{x-2t}{2}\right)\exp\left(-\frac{x}{2}\right) + xt - x - 2t + 4$$

$$u(x,t) = -2\exp(-t) + xt - x - 2t + 4$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例4 $\begin{cases} 2u_t - u_x + xu = 0,\ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

函数项 u 的系数/自由项不显含时间 t

解法1 特征线法

解 原PDE是无界Cauchy问题, 可用特征线法

第1步 求特征线方程

原PDE可化为 $u_t - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}xu = 0$

特征线应满足 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$

解得特征线方程为 $x = -\frac{1}{2}t + \tau = -\frac{t-2\tau}{2}$

第2步 改造原PDE/定解条件

原PDE可表示为 $u_t - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}xu = 0$

$$u_t + u_x\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\left(-\frac{t-2\tau}{2}\right)u = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{t-2\tau}{4}u = 0$$

原初始条件可表示为

$$u(x,0) = 2xe^{\frac{x^2}{2}} = 2\left(-\frac{1}{2}t + \tau\right)e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t+\tau\right)^2} = 2\tau e^{\frac{\tau^2}{2}}$$

原定解问题可转化为ODE

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{t-2\tau}{4}u = 0,\ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(0) = 2\tau e^{\frac{\tau^2}{2}}, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

例4
$$
\begin{cases}
2u_t - u_x + xu = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\
u(x,0) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}, \ -\infty < x < +\infty
\end{cases}
$$

解法1 特征线法

第3步 解ODE定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} - \dfrac{t-2\tau}{4}u = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\
u(0) = 2\tau e^{\frac{\tau^2}{2}}, \ -\infty < x < +\infty
\end{cases}
$$

分离变量法 $\dfrac{du}{u} = \dfrac{t-2\tau}{4}dt$

$$\ln u = \frac{1}{8}t^2 - \frac{\tau t}{2} + C$$

解得 $u(t) = Ce^{\frac{1}{8}t^2 - \frac{\tau t}{2}}$

通解系数根据初始条件确定 $u(0) = C = 2\tau e^{\frac{\tau^2}{2}}$

代入得ODE通解 $u(t) = 2\tau e^{\frac{\tau^2}{2}} e^{\frac{1}{8}t^2 - \frac{\tau t}{2}}$

第4步 消特征线常数 由特征线方程知

$$x = -\frac{1}{2}t + \tau = -\frac{t-2\tau}{2} \ \Rightarrow \ \tau = x + \frac{t}{2}$$

代入得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = 2\left(x + \frac{t}{2}\right)e^{\frac{1}{2}\left(x+\frac{t}{2}\right)^2} e^{\frac{1}{8}t^2 - \frac{t}{2}\left(x+\frac{t}{2}\right)}$$

$$= (2x+t)e^{\frac{x^2}{2}}$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

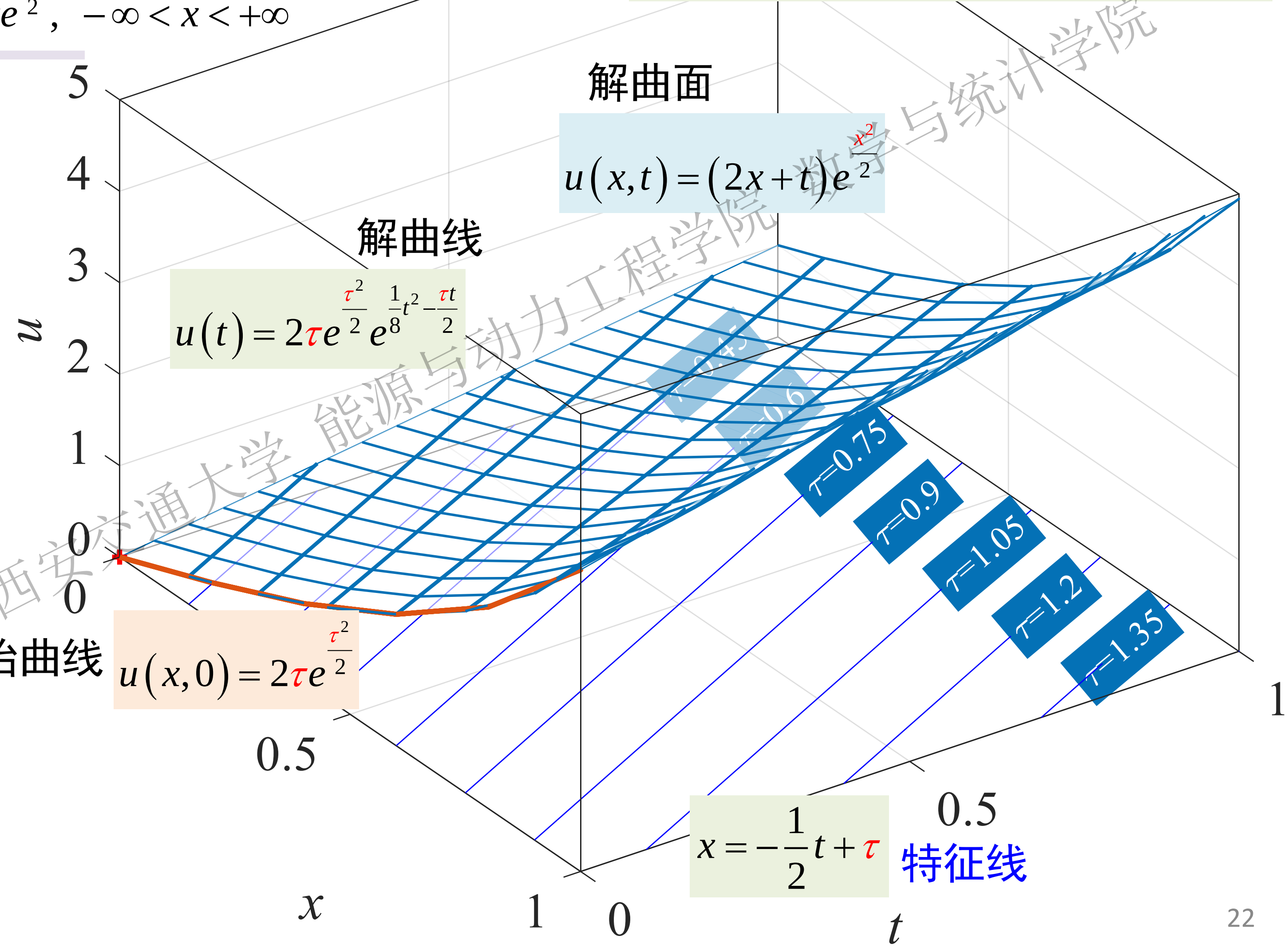
一阶线性PDE

例4
$$\begin{cases} 2u_t - u_x + xu = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \dfrac{t-2\tau}{4} u = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0) = 2\tau e^{\frac{\tau^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法

几何意义



6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例4 $\begin{cases} 2u_t - u_x + xu = 0, & 0<t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

解 第1步 定义变量代换 原PDE可化为

$u_t - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}xu = 0$ 特征线应满足 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}t + \tau \qquad x + \frac{1}{2}t = \tau$

可定义变量代换 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x + \frac{1}{2}t \end{cases}$

第2步 改造原PDE $u_t - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}xu = 0$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{2}\left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) + \frac{1}{2}\eta u = 0$$

$$u_\xi \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\eta u = 0$$

$$-u_\eta + \eta u = 0$$

第3步 解ODE并还原变量

分离变量法 $u_\eta = \eta u$

$$\frac{du}{d\eta} = \eta u$$

$$\frac{du}{u} = \eta d\eta$$

解得 $u(\eta) = Ce^{\frac{\eta^2}{2}} = g(\xi)e^{\frac{\eta^2}{2}}$

还原变量 $u(x,t) = g\left(x + \frac{1}{2}t\right)e^{\frac{x^2}{2}}$

第4步 确定未知函数

由原初始条件

$$u(x,0) = 2xe^{\frac{x^2}{2}} = g\left(x + \frac{1}{2}\cdot 0\right)e^{\frac{x^2}{2}} = g(x)e^{\frac{x^2}{2}}$$

得到 $g(x) = 2x$

原定解问题的解为

$$u(x,t) = 2\left(x + \frac{1}{2}t\right)e^{\frac{x^2}{2}} = (2x+t)e^{\frac{x^2}{2}}$$

原方程 c, f 不显含 t 时用变量代换法更便捷

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例5 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2 - x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法1 特征线法

解 原PDE是无界Cauchy问题, 可用特征线法

第1步 求特征线方程

特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 2$

解得特征线方程为 $x = 2t + \tau$

第2步 改造原PDE/定解条件

原PDE可表示为

$$u_t + 2u_x + u = t$$

$$u_t + u_x \frac{dx}{dt} + u = t$$

$$\frac{du}{dt} + u = t$$

原初始条件可表示为

$$u(x,0) = 2 - x = 2 - (2t + \tau) = 2 - \tau$$

原定解问题可转化为ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = t, \ 0 < t, \ -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau, 0) = 2 - \tau, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

第3步 解ODE定解问题

一阶线性非齐次ODE→常数变易法

先解对应的齐次方程 $\dfrac{du}{dt} + u = 0$

$$u(t) = Ce^{-t}$$

则非齐次通解为 $u(t) = C(t)e^{-t}$

代入非齐次ODE

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = t$$

$$C'(t) = te^{t}$$

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例5 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = t, \ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2 - x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = t, \ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau,0) = 2 - \tau, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法

变易常数为

$$C(t) = \int te^t dt = te^t - e^t + C = (t-1)e^t + C_2$$

非齐次ODE通解为

$$u(t) = C(t)e^{-t} = \left[(t-1)e^t + C_2\right]e^{-t}$$
$$= C_2 e^{-t} + t - 1$$

由ODE初始条件确定系数

$$u(0) = C_2 - 1 = 2 - \tau \ \Rightarrow \ C_2 = 3 - \tau$$

代入ODE得解 $u(t) = (3-\tau)e^{-t} + t - 1$

第4步 消特征线常数 由特征线方程知

$$x = 2t + \tau \ \Rightarrow \ \tau = x - 2t$$

代入ODE的解得原定解问题的解

$$u(x,t) = (-x + 2t + 3)e^{-t} + t - 1$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$$au_t + bu_x + cu = f$$

一阶线性PDE

例5
$$\begin{cases} u_t + 2u_x + u = t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2 - x, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = t, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0) = u(\tau, 0) = 2 - \tau, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法

几何意义

$$u(t) = (3 - \tau)e^{-t} + t - 1$$

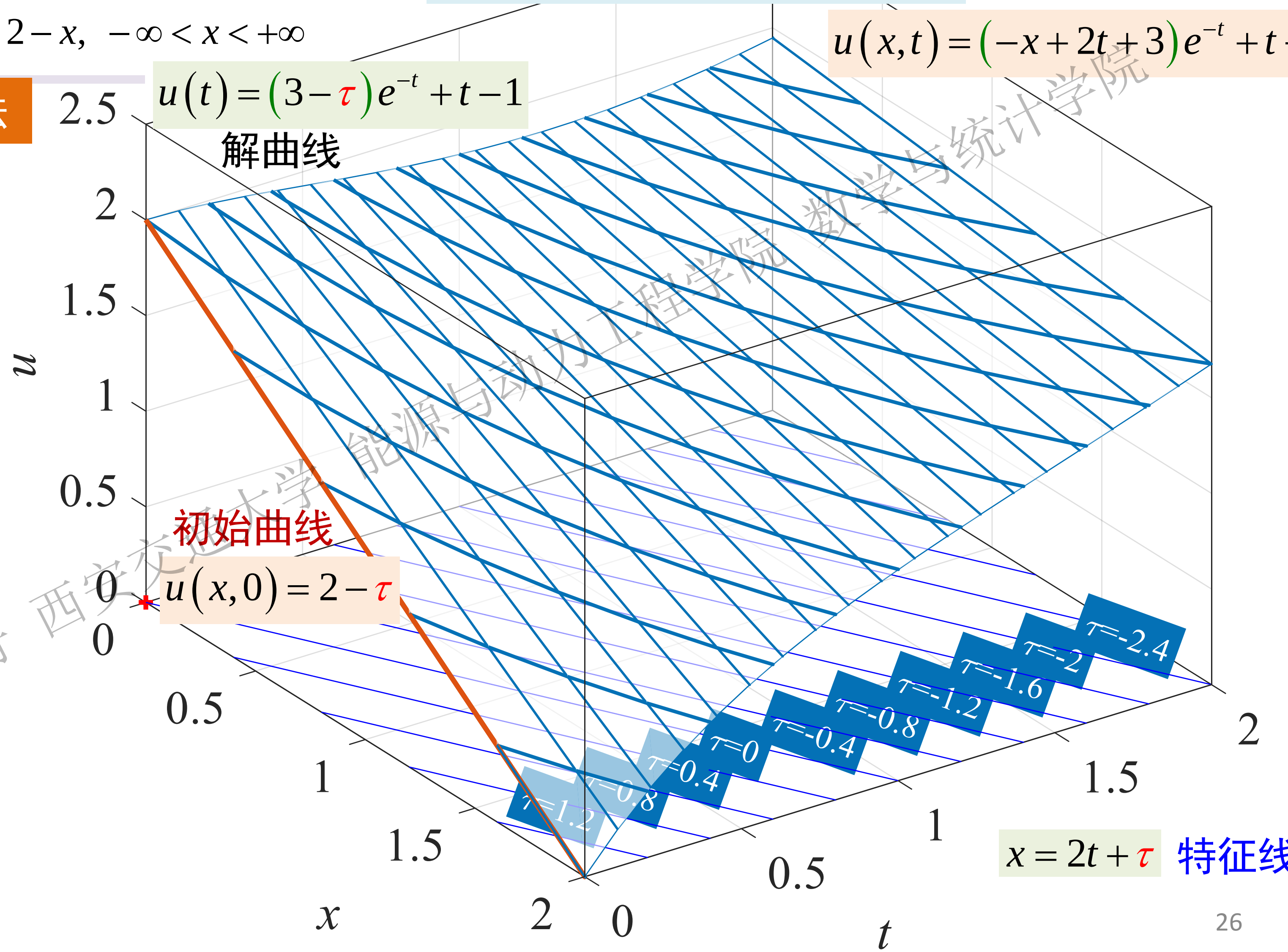
解曲线

解曲面

$$u(x,t) = (-x + 2t + 3)e^{-t} + t - 1$$

初始曲线

$$u(x,0) = 2 - \tau$$



$$x = 2t + \tau$$ 特征线

一阶线性PDE

例5 $\begin{cases} u_t + 2u_x + u = t, & 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2 - x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

解 第1步 定义变量代换

特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 2 \qquad x = 2t + \tau$

可定义变量代换 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 2t \end{cases}$ ➡ $t = \dfrac{\eta - \xi}{2}$

第2步 改造原PDE

原PDE可表示为 $u_t + 2u_x + u = t$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} + 2\left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) + u = \frac{\eta - \xi}{2}$$

$$u_\xi(-2) + 2(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot 1) + u = \frac{\eta - \xi}{2}$$

$$u_\eta + \frac{1}{2}u = \frac{\eta - \xi}{4}$$

第3步 解ODE并还原变量

常数变易法→先解对应的齐次ODE

$$u_\eta + \frac{1}{2}u = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}d\eta$$

得 $u = Ce^{-\frac{\eta}{2}}$ 非齐次通解为 $u = C(\eta)e^{-\frac{\eta}{2}}$

代入非齐次ODE

$$C'(\eta)e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2}C(\eta)e^{-\frac{\eta}{2}} + \frac{1}{2}C(\eta)e^{-\frac{\eta}{2}} = \frac{\eta - \xi}{4}$$

变易系数需满足 $C'(\eta) = \dfrac{\eta - \xi}{4}e^{\frac{\eta}{2}}$

$$C(\eta) = \int \frac{\eta - \xi}{4} e^{\frac{\eta}{2}} d\eta$$

$$= \int \frac{\eta - \xi}{2} d\left(e^{\frac{\eta}{2}}\right)$$

$$= \frac{\eta - \xi}{2} e^{\frac{\eta}{2}} - \int e^{\frac{\eta}{2}} \frac{1}{2} d\eta$$

$$= \frac{\eta - \xi}{2} e^{\frac{\eta}{2}} - e^{\frac{\eta}{2}} + g(\xi)$$

任意连续可导函数

一阶线性PDE

例5
$$\begin{cases} u_t + 2u_x + u = t, \ 0 < t, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 2 - x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法2 变量代换法

$$C(\eta) = \frac{\eta - \xi}{2} e^{\frac{\eta}{2}} - e^{\frac{\eta}{2}} + g(\xi)$$

代入非齐ODE通解→得新变量下原PDE解

$$u(\eta,\xi) = \left[\frac{\eta - \xi}{2} e^{\frac{\eta}{2}} - e^{\frac{\eta}{2}} + g(\xi)\right] e^{-\frac{\eta}{2}}$$

$$= g(\xi) e^{-\frac{\eta}{2}} + \frac{\eta - \xi}{2} - 1$$

还原变量 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 2t \end{cases}$

$$u(x,t) = g(x - 2t) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x - x + 2t}{2} - 1$$

$$= g(x - 2t) e^{-\frac{x}{2}} + t - 1$$

第4步 确定未知函数

由原初始条件 $u(x,0) = 2 - x$

$$g(x - 2\cdot 0) e^{-\frac{x}{2}} + 0 - 1 = 2 - x$$

$$g(x) e^{-\frac{x}{2}} - 1 = 2 - x$$

$$g(x) = (3 - x) e^{\frac{x}{2}}$$

代入原变量通解

$$u(x,t) = g(x - 2t) e^{-\frac{x}{2}} + t - 1$$

$$= (3 - x + 2t) e^{\frac{x-2t}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + t - 1$$

$$= (3 - x + 2t) e^{-t} + t - 1$$

得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = (-x + 2t + 3) e^{-t} + t - 1$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

例6 $\begin{cases} u_t + 3u_x + u = x, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法1 特征线法

解 原PDE是无界Cauchy问题, 可用特征线法

第1步 求特征线方程

特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 3$

解得特征线方程为 $x = 3t + \tau$

第2步 改造原PDE/定解条件

原PDE可表示为 $u_t + 3u_x + u = x$

$$u_t + u_x \frac{dx}{dt} + u = 3t + \tau$$

$$\frac{du}{dt} + u = 3t + \tau$$

原初始条件可表示为

$$u(x,0) = x = 3t + \tau = \tau$$

原定解问题可转化为ODE

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = 3t + \tau, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0) = \tau, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

第3步 解ODE定解问题

一阶线性非齐次ODE→常数变易法

先解对应齐次ODE $\dfrac{du}{dt} + u = 0 \qquad u = Ce^{-t}$

非齐次通解为 $u(t) = C(t)e^{-t}$

代入非齐次ODE

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = 3t + \tau$$

变易系数需满足 $C'(t) = (3t + \tau)e^{t}$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例6 $\begin{cases} u_t + 3u_x + u = x, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u = 3t + \tau, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0) = \tau, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法

分部积分可得变易系数

$$C(t) = \int (3t+\tau)e^t dt = (3t+\tau)e^t - 3\int e^t dt$$

$$= (3t+\tau-3)e^t + C_2$$

代入非齐次ODE通解

$$u(t) = C(t)e^{-t} = \left[(3t+\tau-3)e^t + C_2\right]e^{-t}$$

$$= C_2 e^{-t} + 3t + \tau - 3$$

由改造后ODE的初始条件

$$u(0) = C_2 + \tau - 3 = \tau \Rightarrow C_2 = 3$$

非齐次ODE通解为 $u(t) = 3e^{-t} + 3t + \tau - 3$

第4步 消特征线常数 由特征线方程知

$$x = 3t + \tau \Rightarrow \tau = x - 3t$$

原PDE定解问题的解为

$$u(x,t) = 3e^{-t} + 3t + x - 3t - 3$$

$$= 3e^{-t} + x - 3$$

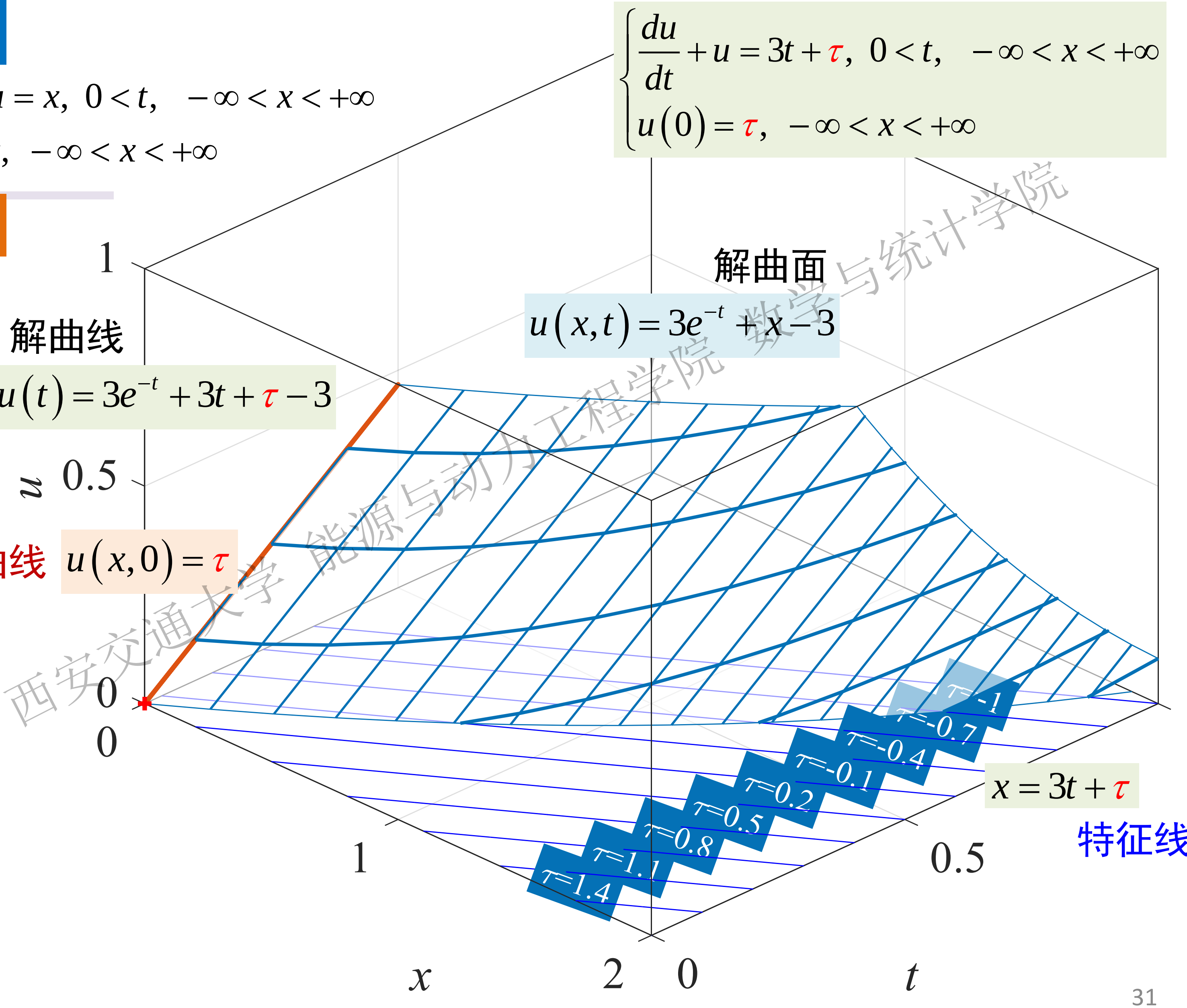
6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例6 $\begin{cases} u_t + 3u_x + u = x, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法1 特征线法



$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例6 $\begin{cases} u_t + 3u_x + u = x, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

解 第1步 定义变量代换

特征线应满足 $\dfrac{dx}{dt} = 3$ 即 $x - 3t = \tau$

可定义变量代换 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 3t \end{cases}$

第2步 改造原PDE $u_t + 3u_x + u = x$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} + 3\left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) + u = \eta$$

$$u_\xi(-3) + 3\left(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot 1\right) + u = \eta$$

$$3u_\eta + u = \eta$$

第3步 解ODE并还原变量

一阶线性非齐次ODE→常数变易法

解对应齐次ODE $3u_\eta + u = 0$ $\qquad \dfrac{du}{u} = -\dfrac{1}{3}d\eta$

齐次ODE通解为 $u(\eta) = Ce^{-\frac{1}{3}\eta}$

非齐次ODE通解可设为 $u(\eta) = C(\eta)e^{-\frac{1}{3}\eta}$

代入非齐次ODE

$$3\left[C'(\eta)e^{-\frac{1}{3}\eta} - \frac{1}{3}C(\eta)e^{-\frac{1}{3}\eta}\right] + C(\eta)e^{-\frac{1}{3}\eta} = \eta$$

变易系数需满足 $C'(\eta) = \dfrac{\eta}{3}e^{\frac{1}{3}\eta}$

$$C(\eta) = \int \frac{\eta}{3}e^{\frac{1}{3}\eta}d\eta$$

$$= \int \eta d\left(e^{\frac{1}{3}\eta}\right)$$

$$= \eta e^{\frac{1}{3}\eta} - \int e^{\frac{1}{3}\eta}d\eta$$

$$= (\eta - 3)e^{\frac{1}{3}\eta} + g(\xi)$$

任意连续可导函数

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例6 $\begin{cases} u_t + 3u_x + u = x, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x, \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$

解法2 变量代换法

非齐次ODE通解为

$$u(\eta) = \left[(\eta - 3) e^{\frac{1}{3}\eta} + g(\xi) \right] e^{-\frac{1}{3}\eta}$$

$$= g(\xi) e^{-\frac{1}{3}\eta} + \eta - 3$$

还原变量 $\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x - 3t \end{cases}$

$$u(x,t) = g(x - 3t) e^{-\frac{1}{3}x} + x - 3$$

第4步 确定未知函数

由原初始条件 $u(x,0) = x$

$$g(x - 3\cdot 0) e^{-\frac{1}{3}x} + x - 3 = x$$

$$g(x) = 3e^{\frac{1}{3}x}$$

代入得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = 3e^{\frac{1}{3}(x-3t)} e^{-\frac{1}{3}x} + x - 3$$

$$= 3e^{-t} + x - 3$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例7 求解一阶线性PDE的Cauchy问题
$$\begin{cases} u_t + x\cos t \cdot u_x = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法

解 特征方程为 $\dfrac{dx}{dt} = x\cos t$

分离变量 $\dfrac{dx}{x} = \cos t dt \qquad \ln x = \sin t + \tau$

特征线为 $x = \tau \exp(\sin t)$

特征线为曲线

沿特征线改造原PDE
$$u_t + x\cos t \cdot u_x = \frac{du}{dt} = 0$$

改造初始条件为
$$u(x,0) = \frac{1}{1+[\tau \exp(\sin t)]^2} = u(t=0) = \frac{1}{1+\tau^2}$$

原Cauchy问题转化为ODE
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0) = \dfrac{1}{1+\tau^2}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解为 $\quad u(t) = C = u(0) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$

由特征线解出 $\tau = x\exp(-\sin t)$ 代入
$$u(x,t) = \frac{1}{1+x^2\exp(-2\sin t)}$$

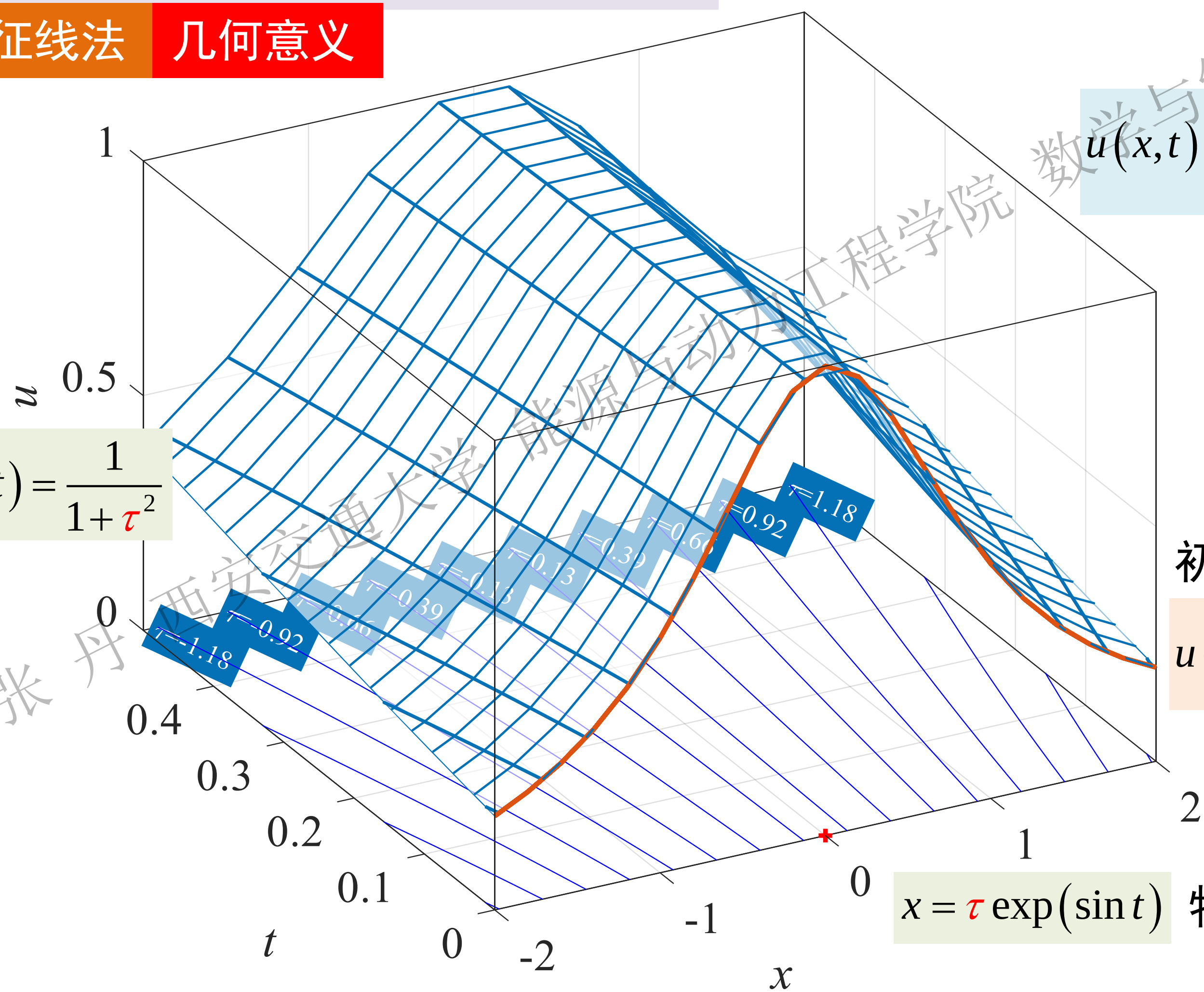
6.1 一阶偏微分方程特征线法

一阶线性PDE

例7 求解一阶线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + x\cos t \cdot u_x = 0,\ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法1 特征线法　几何意义



解曲面

$$u(x,t) = \frac{1}{1+x^2\exp(-2\sin t)}$$

解曲线

$$u(t) = \frac{1}{1+\tau^2}$$

初始曲线

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x = \tau\exp(\sin t)$$ 特征线

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例7 求解一阶线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + x\cos t \cdot u_x = 0, \ 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解法2 变量代换法

解 第1步 定义变量代换

特征线满足 $\dfrac{dx}{dt} = x\cos t$

分离变量 $\dfrac{dx}{x} = \cos t dt \quad \ln x = \sin t + \tau$

特征线为 $x = \tau\exp(\sin t)$

特征线为曲线

特征线常数 $\tau = x\exp(-\sin t)$

定义变量代换

$$\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x\exp(-\sin t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \eta \\ t = \arcsin\left[\ln\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)\right] \end{cases}$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$au_t + bu_x + cu = f$

一阶线性PDE

例7 求解一阶线性PDE的Cauchy问题
$$\begin{cases} u_t + x\cos t \cdot u_x = 0, \ 0<t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta = x \\ \xi = x\exp(-\sin t) \end{cases}$$

解法2 变量代换法

$$\begin{cases} x = \eta \\ t = \arcsin\left[\ln\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)\right] \end{cases}$$

第2步 改造原PDE

$$u_t + x\cos t \cdot u_x = 0$$

$$u_\xi \frac{d\xi}{dt} + x\cos t \cdot \left(u_\eta \frac{d\eta}{dx} + u_\xi \frac{d\xi}{dx}\right) = 0$$

$$u_\xi \cdot x\exp(-\sin t)\cdot(-\cos t) + x\cos t \cdot \left(u_\eta \cdot 1 + u_\xi \cdot \exp(-\sin t)\right) = 0$$

$$x \cdot \cos t \cdot u_\eta = 0$$

❶ ❷ ❸

欲使上式恒=0, 只可能 $u_\eta = 0$

第3步 解ODE并还原变量

积分上式 $u = g(\xi)$

还原变量 $u(x,t) = g\left[x\exp(-\sin t)\right]$

第4步 确定未知函数

代入初始条件 $u(x,0) = g\left[x\exp(-\sin 0)\right]$

$$= g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

得原PDE定解问题的解

$$u(x,t) = \frac{1}{1+\left[x\exp(-\sin t)\right]^2} = \frac{1}{1+x^2\exp(-2\sin t)}$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

小结

一阶线性PDE $au_t + bu_x + cu = f$ 系数均为自变量 x, t 的函数, 但不显含 u

特征线法	变量代换法

第1步 求特征线方程

特征线微分/积分形式

第2步 改造原PDE/定解条件

微分形式　积分形式

$$\begin{cases} au_t + bu_x + cu = f \\ \text{定解条件} \end{cases} \longrightarrow \text{ODE } [u(t)]$$

定解条件：积分形式

第3步 解ODE定解问题

利用改造后的定解条件确定积分系数

得到ODE通解 $u(t)$

第4步 消特征线常数

特征线积分形式解出τ, 代入$u(t)$

得到 $u(x,t)$

第1步 定义变量代换

解特征线

特征线微分/积分形式

$$\begin{cases} \eta = x \\ \xi = C \end{cases}$$

特征线积分常数

第2步 改造原PDE

$$au_t + bu_x + cu = f \longrightarrow \text{ODE } [u(\eta)]$$

第3步 解ODE并还原变量

令积分系数为$g(\xi)$→还原变量

第4步 确定未知函数

利用原定解条件确定未知函数 $g(x)$ →代回通解时注意 x 应被$\xi=\varphi(x,t)$取代

1. 数学建模和基本原理介绍
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
   - 6.1 一阶偏微分方程特征线法
     - 一阶线性PDE特征线法
     - 一阶拟线性PDE方程特征线法
     - 特征线法应用举例
   - 6.2 一维波动方程特征线法
7. Legendre多项式

一阶拟线性PDE

一阶线性

$au_t+bu_x+cu=f$　系数均为自变量 x, t 的函数, 但不显含 u

一阶拟线性

$$a(x,t,u)\cdot u_x+b(x,t,u)\cdot u_t=c(x,t,u)$$

系数均为自变量 x,t,u 的函数, 显含 u

区别

1. 偏导数次序不同
2. 拟线性系数/自由项可显含u→模型方程不再单列函数u项
3. 一阶拟线性PDE可能是线性的/也可能是非线性的

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

借助几何意义探寻解法,一般形式移项

$$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t + c(x,t,u)(-u_u) = 0$$

❶ 解曲面 $u(x,t)$ 任意点法线

$$\nabla u = (u_x, u_t, u_u)$$

$$\boldsymbol{n} = (u_x, u_t, -u_u) = (u_x, u_t, -1)$$

解曲面法向量

向量场

原PDE等价于 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha} = 0$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[a(x,t,u), b(x,t,u), c(x,t,u)\right]$$

向量场α→空间曲线的切线→构造空间曲线

→同一曲线上 u, t, x关系唯一确定→特征线

❷ 假设 $u(x,t)$ 可化为变量 s 的全导数 $u(s)$

特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{ds} = a(x,t,u), & x(s_0) = \tau \\ \dfrac{dt(s)}{ds} = b(x,t,u), & t(s_0) = t_0 \\ \dfrac{du(s)}{ds} = c(x,t,u), & u(s_0) = \varphi\left[x(s_0)\right] = \varphi(\tau) \end{cases}$$

描述特征线族参数

题设的初始时刻

特征线起点u值

ds →特征曲线弧微分→特征方程描述曲线任意位置处ds的三维切向量→确定了三维特征曲线族

解曲面该点法线与同点特征曲线切线垂直 → 改变参数τ →解曲面由三维特征曲线直接扫成 → 给定初始曲线→通过求解特征曲线即可确定解曲面

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$$

一阶拟线性PDE

$$\begin{cases} a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u),\ t_0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t + c(x,t,u)(-u_u) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{ds} = a(x,t,u),\quad x(s_0)=\tau \\ \dfrac{dt(s)}{ds} = b(x,t,u),\quad t(s_0)=t_0 \\ \dfrac{du(s)}{ds} = c(x,t,u),\quad u(s_0)=\varphi[x(s_0)]=\varphi(\tau) \end{cases}$$

特征线方程

确定初始条件

解曲面与xOu平面的交线为初始曲线

$$u(x=\tau,t=0,u)=\varphi(x)=\varphi[x(s_0)]=\varphi(\tau)$$

初始曲线与特征曲线的交点是特征曲线的起点→特征线方程的初始条件

$$[x(s_0)=\tau, t(s_0)=t_0,\ u(s_0)=\varphi[x(s_0)]=\varphi(\tau)]$$

参数 τ 的变化→特征曲线移动

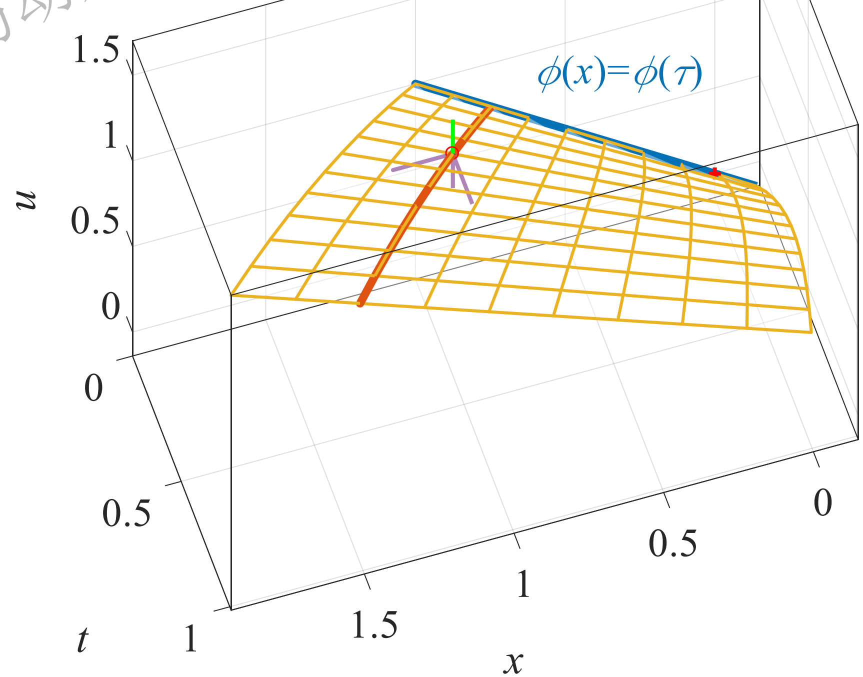
→扫出解曲面→原PDE得解

与一阶线性PDE特征线比较

同 从初始曲线出发沿特征线积分

异 特征线为空间曲线

F-2-06-Sep-2021



6.1 一阶偏微分方程特征线法

$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

例1 求解一阶拟线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u\cdot u_x + (t+1)u_t = 1, \ 0<t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解 第1步 建立特征线方程

特征曲线对应的向量场 $\boldsymbol{\alpha} = (u, t+1, 1)$

$s=0$

特征方程组
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = u, \ x(0) = \tau & ❶ \\ \dfrac{dt}{ds} = t+1, \ t(0) = 0 & ❷ \\ \dfrac{du}{ds} = 1, \ u(0) = u\left[x(0), 0\right] = \tau & ❸ \end{cases}$$

❸的初始条件 $u(0) = u(s=0)$

$$= u\left[x(s=0), 0\right]$$
$$= u(\tau, 0)$$
$$= \tau$$

第2步 求解特征线方程组

特征线方程组是ODE方程组→先解不含其他维度变量的ODE →本例中的 ❷ ❸

❷ 分离变量法 $\dfrac{dt}{ds} = t+1$

$$\frac{dt}{t+1} = ds$$
$$\ln(t+1) = s + C_2$$
$$t(s) = C_2 e^s - 1$$

由定解条件 $t(0) = 0 = C_2 e^0 - 1$ ，得 $C_2 = 1$

故 $t(s) = e^s - 1$

❸ 直接积分法 $\dfrac{du}{ds} = 1, \ u(s) = s + C_3$

由定解条件 $u(0) = \tau = s + C_3$，得 $C_3 = \tau$

$$u(s) = s + \tau$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

例1 求解一阶拟线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u\cdot u_x + (t+1)u_t = 1,\ 0<t, & -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=x, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

① 含有其他维度u, 先用参数 s, τ 表示后求解→借助 ③ 解, 式 ① 可转化为

$$u(s)=s+\tau \ \Rightarrow\ \frac{dx}{ds}=u=s+\tau$$

直接积分法得 $x=\frac{1}{2}s^2+\tau s+C_1$

由定解条件 $x(0)=\tau$

$$\frac{1}{2}0^2+\tau\cdot 0+C_1=\tau$$

$$C_1=\tau$$

$$x(s)=\frac{1}{2}s^2+\tau s+\tau$$

特征方程的解为

原PDE参数形式解

$$\begin{cases} x(s)=\frac{1}{2}s^2+\tau s+\tau & ④ \\ t(s)=e^s-1 & ⑤ \\ u(s)=s+\tau & ⑥ \end{cases}$$

第3步 还原变量 消 s, τ

由式 ⑤ 得 $s=\ln(t+1)$

联立式 ⑥ 得 $\tau=u-s=u-\ln(t+1)$

代入式 ④

$$x(s)=\frac{1}{2}s^2+\tau s+\tau$$

$$=\frac{1}{2}s^2+us-s^2+u-s$$

$$=-\frac{1}{2}s^2+(s+1)u-s$$

解出未知函数u, 并代入⑤ $s=\ln(t+1)$

$$u=\frac{x+s+\frac{1}{2}s^2}{s+1}=\frac{x+\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln^2(t+1)}{1+\ln(t+1)}$$

原定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{x+\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln^2(t+1)}{1+\ln(t+1)}$$

$$a(x,t,u)\cdot u_x+b(x,t,u)\cdot u_t=c(x,t,u)$$

一阶拟线性PDE

例1 求解一阶拟线性PDE的Cauchy问题

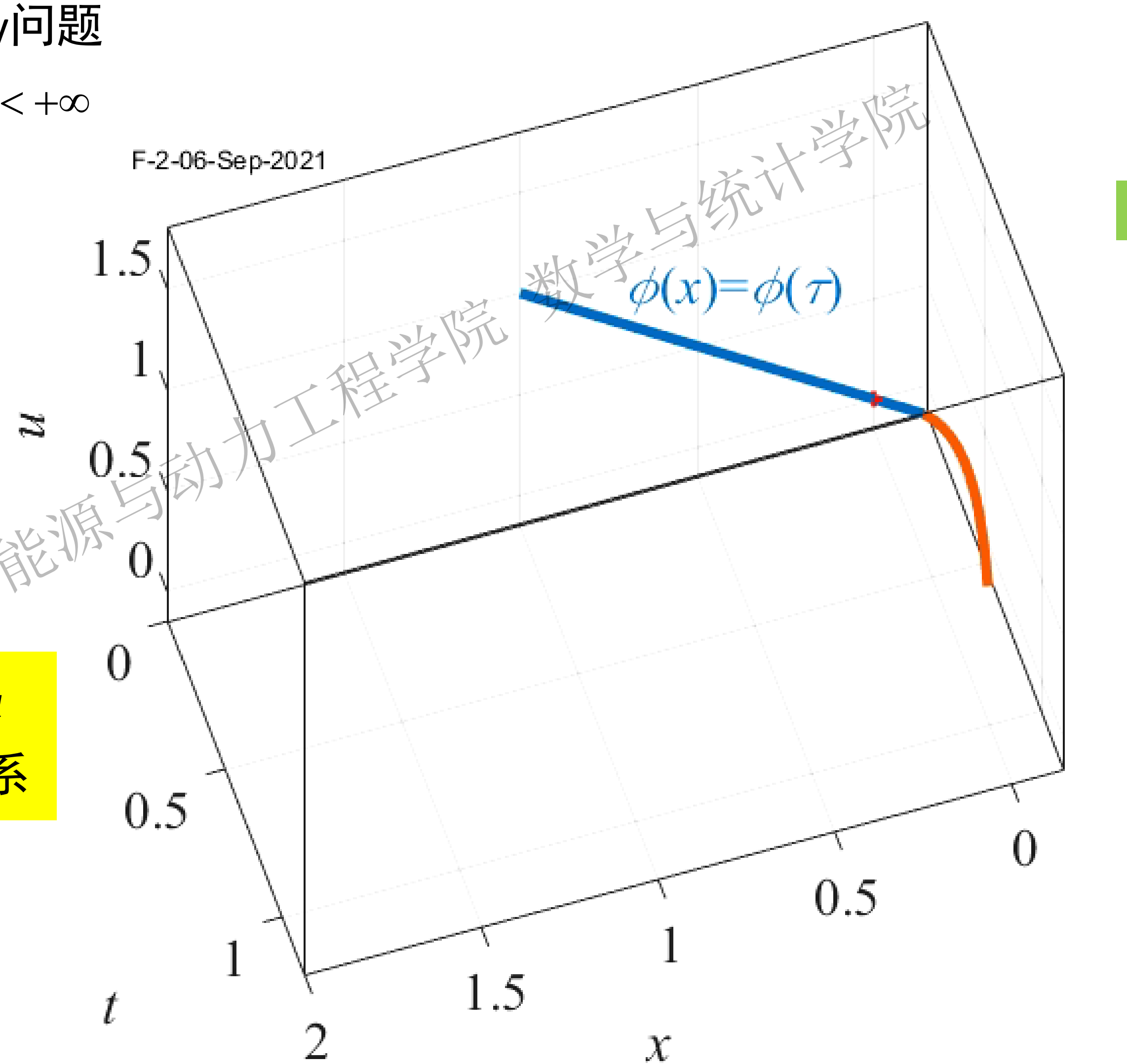
$$\begin{cases} u\cdot u_x+(t+1)u_t=1,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=x,\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=u,\ x(0)=\tau \\ \dfrac{dt}{ds}=t+1,\ t(0)=0 \\ \dfrac{du}{ds}=1,\ u(0)=u\left[x(0),0\right]=\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s)=\dfrac{1}{2}s^2+\tau s+\tau \\ t(s)=\exp s-1 \\ u(s)=s+\tau \end{cases}$$

沿特征线 x, t, u 有唯一确定关系

$$u(x,t)=\ln(t+1)+\frac{x-\frac{1}{2}\ln^2(t+1)}{1+\ln(t+1)}$$



一阶拟线性PDE

例2 求解一阶拟线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t+u\cdot u_x=0,\ 0<t,\quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\dfrac{1}{2}+\sin x,\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

解 第1步 建立特征线方程

注意到与标准形式次序不同

特征曲线向量场为 $\boldsymbol{\alpha}=(u,1,0)$

特征方程组
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=u,\ x(0)=\tau & ① \\ \dfrac{dt}{ds}=1,\ t(0)=0 & ② \\ \dfrac{du}{ds}=0,\ u(0)=\dfrac{1}{2}+\sin\tau & ③ \end{cases}$$

③的初始条件
$$\begin{aligned} u(0)&=u(s=0)\\ &=u[x(s=0),0]\\ &=u(\tau,0)\\ &=\frac{1}{2}+\sin\tau \end{aligned}$$

第2步 求解特征线方程组

特征线方程组是ODE方程组→先解不含其他维度变量的ODE →本例中的 ② ③

解②得 $t=s+C_2$

由定解条件 $t(0)=0=0+C_2$，得 $C_2=0$

故 $t(s)=s$

解③得 $u=C_3$

由定解条件 $u(0)=\dfrac{1}{2}+\sin\tau=C_3$ 得 $u(s)=\dfrac{1}{2}+\sin\tau$

代入①有 $\dfrac{dx}{ds}=u=\dfrac{1}{2}+\sin\tau$

得 $x(s)=\left(\dfrac{1}{2}+\sin\tau\right)s+C_1$

由定解条件 $x(0)=\tau$

$$\left(\frac{1}{2}+\sin\tau\right)\cdot 0+C_1=\tau$$
$$C_1=\tau$$

得到
$$x(s)=\left(\frac{1}{2}+\sin\tau\right)s+\tau$$

$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

例2 求解一阶拟线性PDE的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + u\cdot u_x = 0,\ 0<t, & -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\dfrac{1}{2}+\sin x, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

特征线3个维度的解为

$$\begin{cases} x(s)=\left(\dfrac{1}{2}+\sin\tau\right)s+\tau & ④ \\ t(s)=s & ⑤ \\ u(s)=\dfrac{1}{2}+\sin\tau & ⑥ \end{cases}$$

第3步 还原变量 消去参数 $s,\ \tau$

联立 ④ ⑤ ⑥ 得

$$x=\left(\frac{1}{2}+\sin\tau\right)t+\tau=u(s)\cdot t+\tau$$

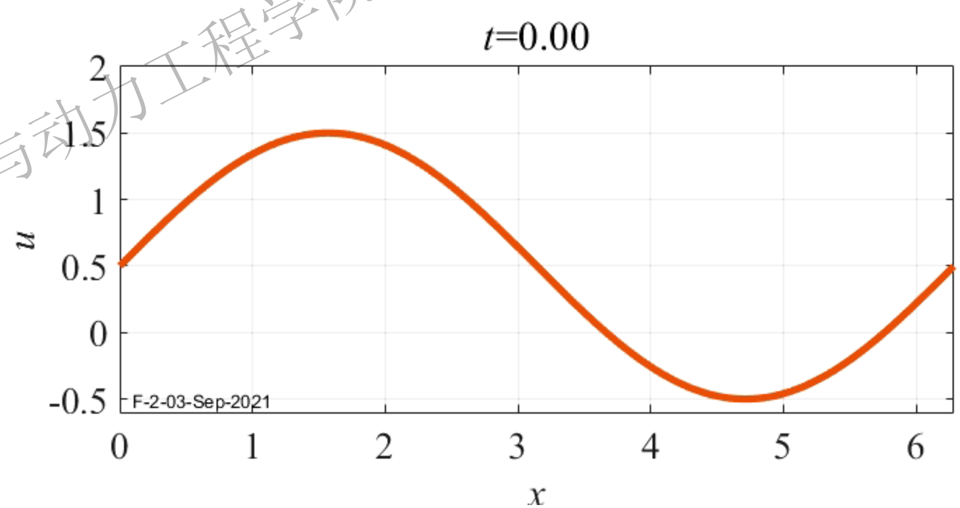
得参数 τ 可表示为 $\tau=x-u(s)\cdot t$

代入式 ⑥

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\sin\tau=\frac{1}{2}+\sin\left[x-t\cdot u(x,t)\right]$$

原PDE解只能用隐函数表示为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\sin\left[x-t\cdot u(x,t)\right]$$



爆炸/激波/局部解/古典解

1983 Harten TVD Total Variation Diminishing

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$a(x,t,u)\cdot u_x+b(x,t,u)\cdot u_t=c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

例3 求解Burgers方程的Cauchy问题, 其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & (x<0)\\ 1-x & (0\le x\le 1)\\ 0 & (1<x)\end{cases}$

$$\begin{cases}u_t+u\cdot u_x=0,\ 0<t, & -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

解 第1步 建立特征线方程

注意到与标准形式次序不同

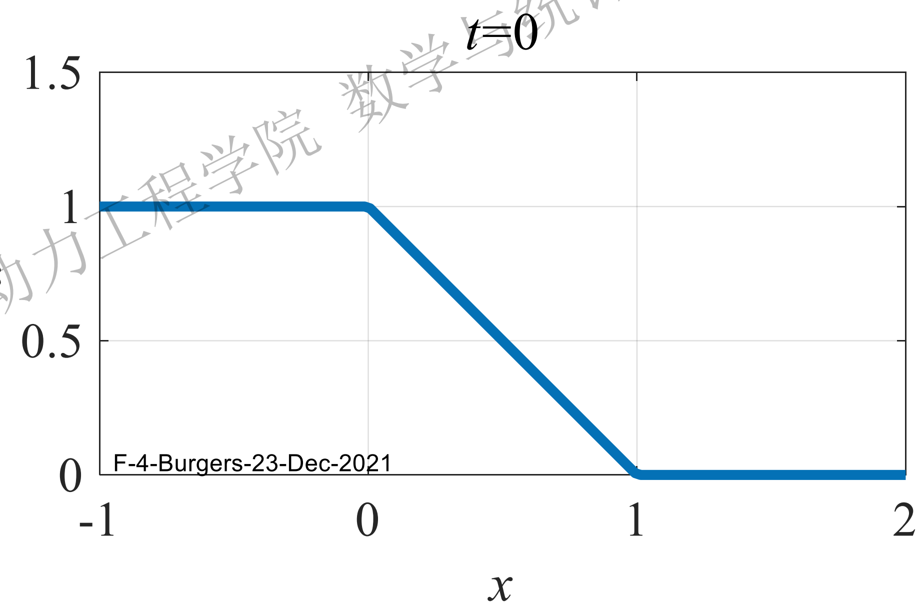
特征曲线向量场为 $\boldsymbol{\alpha}=(u,1,0)$

特征方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=u,\ x(0)=\tau & ❶\\[2mm] \dfrac{dt}{ds}=1,\ t(0)=0 & ❷\\[2mm] \dfrac{du}{ds}=0,\ u(0)=\varphi(\tau)=\begin{cases}1, & (\tau<0)\\ 1-\tau & (0\le\tau<1)\\ 0 & (1<\tau)\end{cases} & ❸\end{cases}$$

任意常数描述特征线族

题设的初始时刻



变量的初始分布为分段折线

式❸的初始条件 $u(0)=u(s=0)$

$$=u\left[x(s=0),0\right]$$

$$=u(\tau,0)=\varphi(\tau)$$

将题设分段函数中的 x 改为用 τ 表示

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

例3 求解Burgers方程的Cauchy问题，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & (x<0)\\ 1-x & (0\le x<1)\\ 0 & (1<x)\end{cases}$

$$\begin{cases}u_t + u\cdot u_x = 0,\ 0<t, & -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

第2步 求解特征线方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=u,\ x(0)=\tau & ①\\ \dfrac{dt}{ds}=1,\ t(0)=0 & ②\\ \dfrac{du}{ds}=0,\ u(0)=\varphi(\tau)=\begin{cases}1, & (\tau<0)\\ 1-x & (0\le\tau<1)\\ 0 & (1<\tau)\end{cases} & ③\end{cases}$$

特征线方程组是ODE方程组→先解不含其他维度变量的ODE →本例中的② ③

解②，并根据初始条件得 $t(s)=s$

解③得 $u(s)=C_3=\varphi(\tau)$

代入①有 $\dfrac{dx}{ds}=u=\varphi(\tau)$ $\quad x(s)=u(s)\cdot s+C_1$

结合初始条件 $x(0)=\tau$ 得 $x(s)=u(s)\cdot s+\tau$

特征线3个维度的解为

$$\begin{cases}x(s)=u(s)\cdot s+\tau & ④\\ t(s)=s & ⑤\\ u(s)=\varphi(\tau)=\begin{cases}1, & (\tau<0)\\ 1-\tau, & (0\le\tau<1)\\ 0, & (1<\tau)\end{cases} & ⑥\end{cases}$$

一阶拟线性PDE

例3 求解Burgers方程的Cauchy问题, 其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & (x<0)\\ 1-x & (0\le x<1)\\ 0 & (1<x)\end{cases}$

$$\begin{cases}u_t+u\cdot u_x=0, & 0<t, \quad -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

第3步 还原变量 消去参数 s, τ

$$\begin{cases}x(s)=u(s)\cdot s+\tau & ④\\ t(s)=s & ⑤\\ u(s)=\varphi(\tau)=\begin{cases}1, & (\tau<0)\\ 1-\tau, & (0\le\tau<1)\\ 0, & (1<\tau)\end{cases} & ⑥\end{cases}$$

自变量范围也需还原

联立④⑤有 $x=u\cdot t+\tau$

参数 τ 可表示为 $\tau=x-u\cdot t$

代入⑥式 $u(s)=\varphi(\tau)$

$$u(x,t)=\varphi(x-u\cdot t)$$

下面根据函数 $\varphi(\tau)$ 分段区间→分别讨论区间表达式/自变量范围

❶ 当 $x-u\cdot t<0$ 时 $u(x,t)=\varphi(x-u\cdot t)=1$

自变量需满足 $x-u\cdot t=x-1\cdot t=x-t<0$

❷ 当 $0<(x-u\cdot t)<1$ 时

$$u(x,t)=\varphi(x-u\cdot t)=1-(x-u\cdot t)$$

解得 $u(x,t)=\dfrac{1-x}{1-t}$

自变量需满足 $0<(x-u\cdot t)<1$

$$0<\left(x-\frac{1-x}{1-t}\cdot t\right)<1$$

$$0<\frac{x-t}{1-t}<1$$

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u)$

一阶拟线性PDE

例3 求解Burgers方程的Cauchy问题，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & (x<0)\\ 1-x & (0\le x<1)\\ 0 & (1<x)\end{cases}$

$$\begin{cases}u_t+u\cdot u_x=0, & 0<t, \quad -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

3 当 $1<(x-u\cdot t)$ 时 $u(x,t)=\varphi(x-u\cdot t)=0$

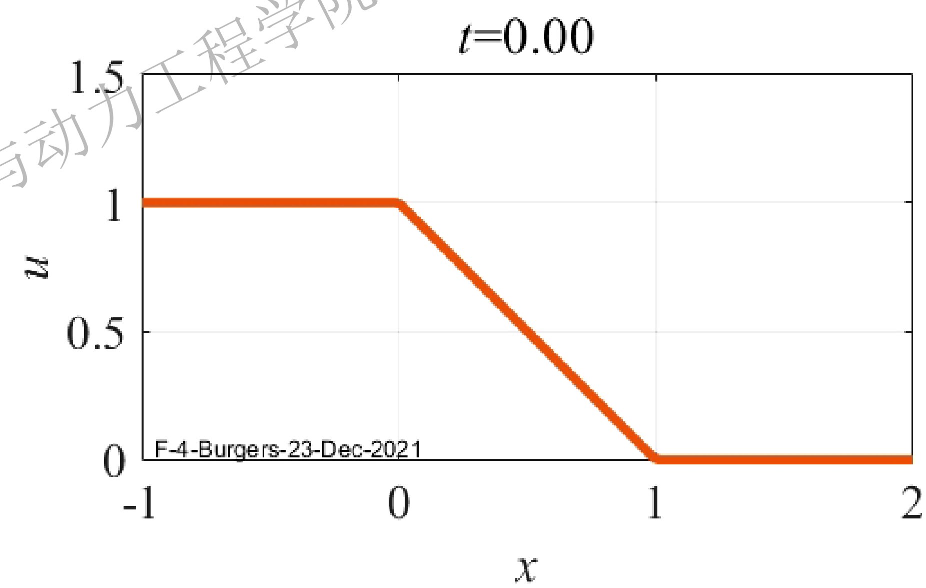
自变量需满足 $1<(x-u\cdot t)$

$1<(x-0\cdot t)$

$1<x$

综上, 原PDE的解可表示为

$$\begin{cases}u(x,t)=1, & x-t<0\\ u(x,t)=\dfrac{1-x}{1-t}, & 0<\dfrac{x-t}{1-t}<1\\ u(x,t)=0, & 1<x\end{cases}$$



6.1 一阶偏微分方程特征线法

$$a(x,t,u)\cdot u_x+b(x,t,u)\cdot u_t=c(x,t,u)$$

一阶拟线性PDE

例3 求解Burgers方程的Cauchy问题，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & (x<0)\\ 1-x & (0\le x<1)\\ 0 & (1<x)\end{cases}$

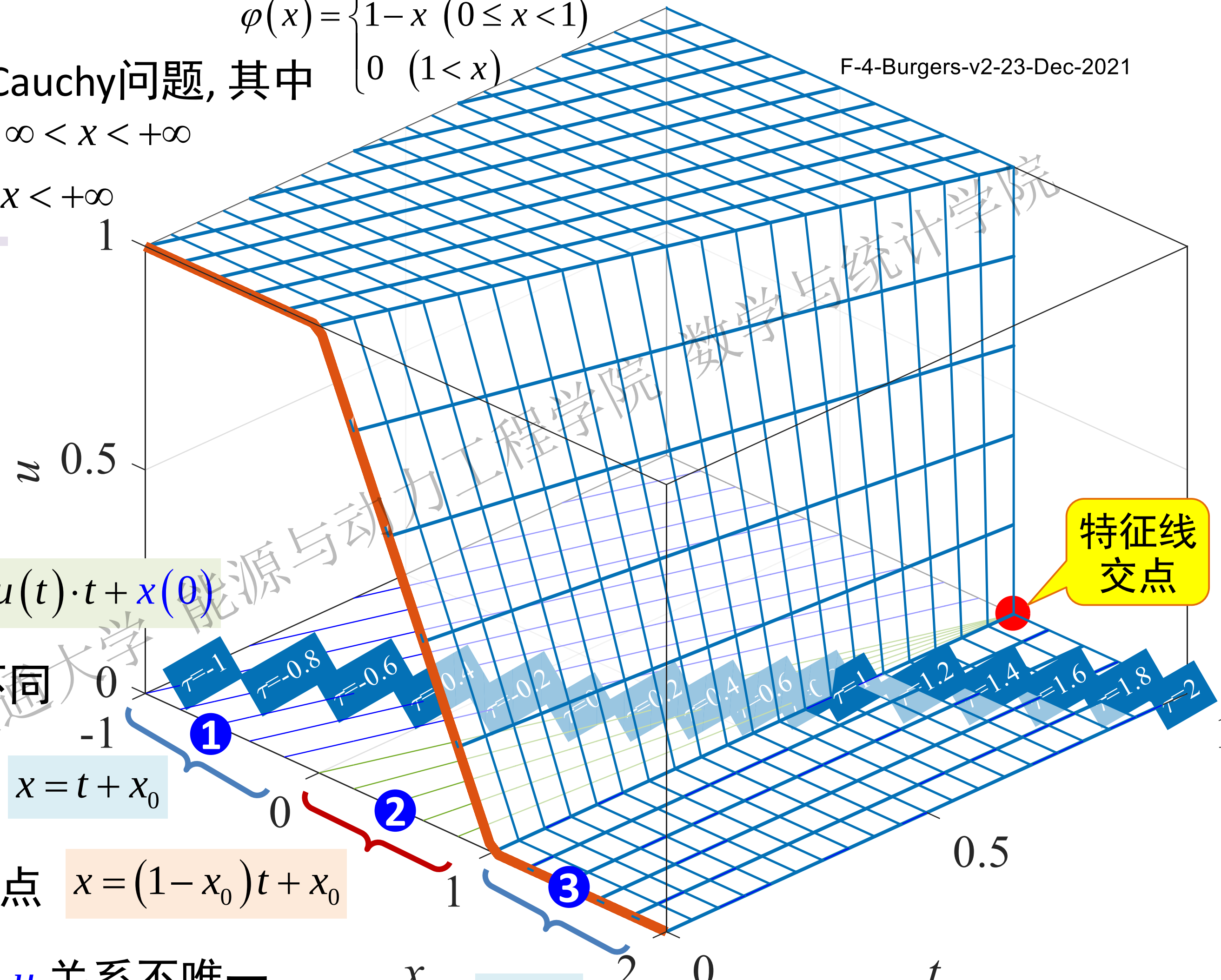
$$\begin{cases}u_t+u\cdot u_x=0,\ 0<t, & -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

讨论 间断的产生

$$\begin{cases}u(x,t)=1,\ x-t<0\\ u(x,t)=\dfrac{1-x}{1-t},\ 0<\dfrac{x-t}{1-t}<1\\ u(x,t)=0,\ 1<x\end{cases}$$

xOt平面上特征线为 $x(t)=u(t)\cdot t+x(0)$

初始折线→ 3区间特征线不同



特征线平行 $x=t+x_0$

特征线相交于(1,1) 点 $x=(1-x_0)t+x_0$

$x=x_0$

特征线平行

交点处特征线刻画的 x, t, u 关系不唯一→原PDE在该点解不唯一→产生间断→为使解唯一→解的最大存在区间是 t $[0,1)$

特征线相交→产生间断→一阶拟线性PDE求解困难

6.1 一阶偏微分方程特征线法

$$\begin{cases} a(x,t,u)\cdot u_x + b(x,t,u)\cdot u_t = c(x,t,u), \\ \qquad t_0 < t, -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

小结

一阶线性PDE

$$au_t + bu_x + cu = f$$

系数均为自变量 x, t 的函数, 但不显含u

特征线 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{b}{a}$ 平面曲线

❶ 一阶拟线性PDE

特征线

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{ds} = a(x,t,u), \quad x(s_0) = \tau \\ \dfrac{dt(s)}{ds} = b(x,t,u), \quad t(s_0) = t_0 \\ \dfrac{du(s)}{ds} = c(x,t,u), \quad u(s_0) = \varphi[x(s_0)] = \varphi(\tau) \end{cases}$$

❷ 空间曲线

初始曲线上某点→沿特征线积分→解曲线→改变 τ →解曲线扫成解曲面

❸ τ 变化→特征曲线直接扫成解曲面

❹ 特征线上 u, x, t 关系唯一确定

$\underbrace{\text{特征线法 \quad 变量代换法}}$

借助特征线→整合为ODE
→解出后还原变量

特征线不相交, 无间断

❺ 解特征线ODE方程组→消去 s, τ
→还原变量得解

难点
1.变量还原困难→解可能用隐函数表示
2.特征线相交→ u, x, t 唯一性破坏→产生间断

1. 数学建模和基本原理介绍
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
   - 6.1 一阶偏微分方程特征线法
   - 6.2 一维波动方程特征线法
7. Legendre多项式

6.2 一维波动方程特征线法

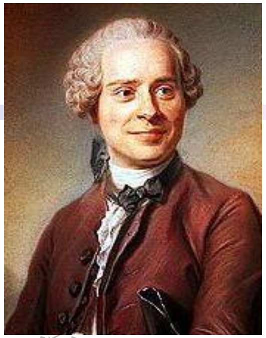
例1 推导D'Alembert公式

一维弦振动方程的Cauchy问题, 无界弦振动

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

1.1747,张紧的弦振动时形成的曲线的研究, 首次采用偏微分, 首次导出弦振动方程, 首次利用特征线思想导出该方程通解

2.开启了数学新分支-偏微分方程



J.R.D'Alembert
1717-1783
French Math.
Physical Scientist

解 通过特征线上的变量代换→把一维波动方程化为可直接积分的PDE

第1步 定义变量代换 定义特征线ODE

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-a^2=0 \qquad \frac{dx}{dt}=\pm a \rightarrow \begin{cases} x-at=C_1 \\ x+at=C_2 \end{cases}$$

特征线是2族直线→与一阶PDE变量代换法相仿→由特征线常数定义变量代换

$$\begin{cases} \xi=x-at \\ \eta=x+at \end{cases} \quad \text{易知} \quad \begin{matrix} \xi_x=1,\ \xi_t=-a \\ \eta_x=1,\ \eta_t=a \end{matrix}$$

第2步 改造原PDE 各阶导数用新变量表达

$$u_t=u_\xi\xi_t+u_\eta\eta_t=u_\xi(-a)+u_\eta a=-au_\xi+au_\eta$$

可能含 ξ,η

$$\begin{aligned} u_{tt}&=-au_{\xi\xi}\xi_t-au_{\xi\eta}\eta_t+au_{\eta\eta}\eta_t+au_{\eta\xi}\xi_t \\ &=a^2u_{\xi\xi}+a^2u_{\eta\eta}-2a^2u_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta$$

$$\begin{aligned} u_{xx}&=u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x+u_{\eta\xi}\xi_x \\ &=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta} \end{aligned}$$

代入弦振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$

$$\left(a^2u_{\xi\xi}+a^2u_{\eta\eta}-2a^2u_{\xi\eta}\right)-a^2\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}\right)=0$$

二阶导数项仅剩交叉导数项 $u_{\xi\eta}=0$

6.2 一维波动方程特征线法

ξ /ˈksaɪ/

ζ /'ziːtə/

例1 推导D'Alembert公式

一维弦振动方程的Cauchy问题, 无界弦振动

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

第3步 解PDE并还原变量

$u_{\xi\eta}=0$ 可直接积分

两边先对 η 积分→积分常数为 ξ 函数

$$u_\xi=C=f_1(\xi)$$

两边再对 ξ 积分→积分常数为 η 函数

$$u(\xi,\eta)=\int f_1(\xi)d\xi+g(\eta)=f(\xi)+g(\eta)$$

$f(\xi),\ g(\eta)$ 有二阶连续偏导数的任意函数

还原变量 $u(x,t)=\int f_1(\xi)d\xi+g(\eta)$

$$=f(x-at)+g(x+at)$$

第4步 确定未知函数

下面根据初始条件确定未知函数 f,g

$$u(x,0)=\varphi(x)=f(x)+g(x) \quad ❶$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=-a\cdot f'(x)+ag'(x) \quad ❷$$

对式❷两端在 $[0,x]$上积分

$$\int_0^x\psi(s)ds=-a\cdot f(x)+a\cdot f(0)+a\cdot g(x)-a\cdot g(0)$$

移项有

$$f(x)-g(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\psi(s)ds+\left[f(0)-g(0)\right] \quad ❸$$

与❶联立得

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds+\frac{1}{2}\left[f(0)-g(0)\right]$$

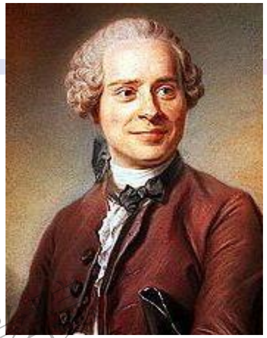
$$g(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds-\frac{1}{2}\left[f(0)-g(0)\right]$$

6.2 一维波动方程特征线法

例1 推导D'Alembert公式

一维弦振动方程的Cauchy问题, 无界弦振动

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$



J.R.D'Alembert
1717-1783
French Math.
Physical Scientist

代入通解

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

右传波　　左传波

$$=\boxed{\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(s)ds}+\frac{1}{2}[f(0)-g(0)]+\boxed{\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(s)ds}-\frac{1}{2}[f(0)-g(0)]$$

$$=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

为数不多的能写出通解的PDE

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

1747
D'Alembert公式

1. 通解
2. 无限长弦振动初值问题的解由右传波 $f(x-at)$ 与左传波 $g(x+at)$ 叠加而成
3. 左传波/右传波完全由初始波形和初始速度确定→行波法

6.2 一维波动方程特征线法

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

D'Alembert公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

例2 利用D'Alembert公式写出下列问题的解

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=a\cos x,\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

解 无界弦振动初值问题直接利用D'Alembert公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$=\frac{\sin(x-at)}{2}+\frac{\sin(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}a\cos s\cdot ds$$

$$=\frac{\sin(x-at)}{2}+\frac{\sin(x+at)}{2}+\frac{1}{2}\left[\sin(x+at)-\sin(x-at)\right]$$

$$=\underbrace{\left[\frac{\sin(x-at)}{2}-\frac{\sin(x-at)}{2}\right]}_{\text{右传波为0}}+\underbrace{\left[\frac{\sin(x+at)}{2}+\frac{\sin(x+at)}{2}\right]}_{\text{左传波不为0}}$$

$$=\sin(x+at)$$

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds+\frac{1}{2}\left[f(0)-g(0)\right]$$

$$g(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds-\frac{1}{2}\left[f(0)-g(0)\right]$$

原定解问题的解为

$$u(x,t)=\sin(x+at)$$

6.2 一维波动方程特征线法

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

D'Alembert公式

D'Alembert公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

例2 求解无界弦振动

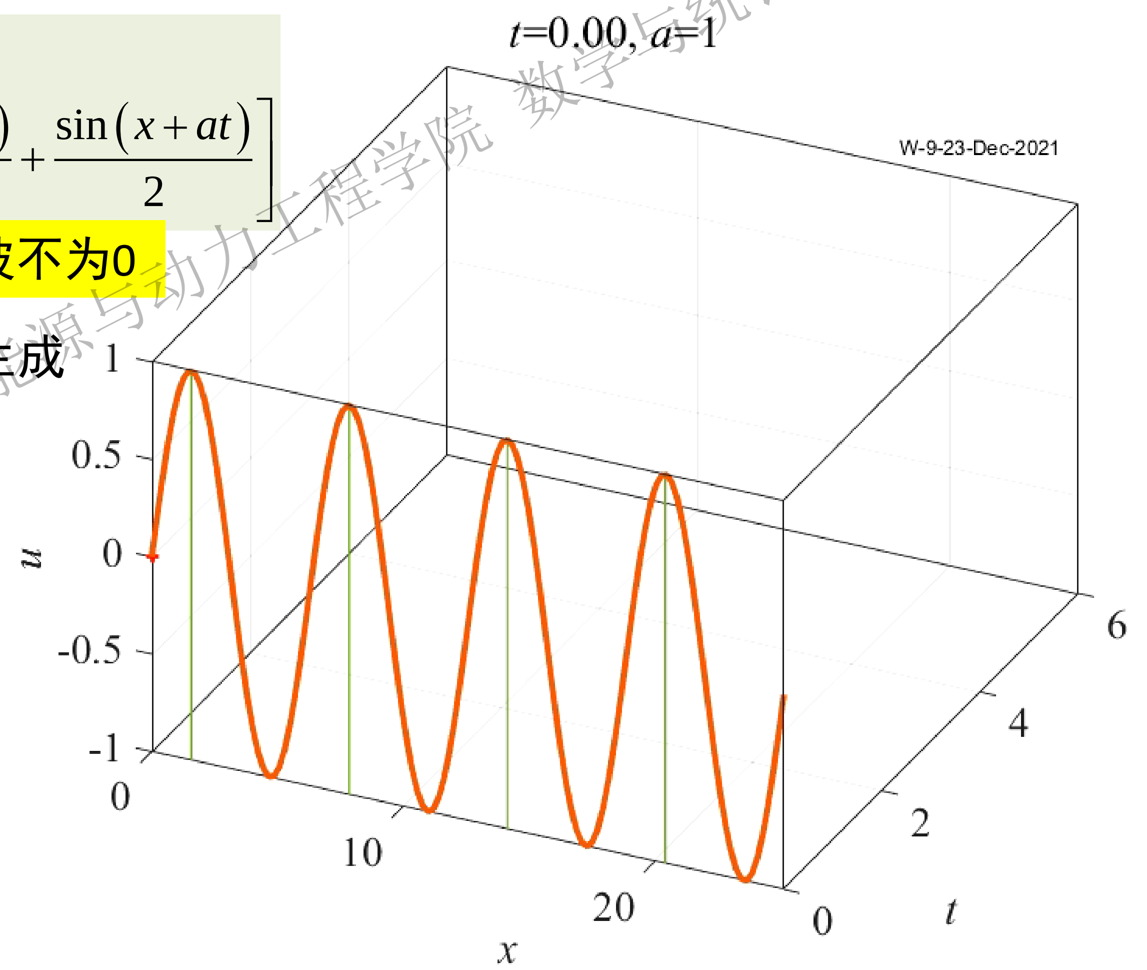
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=a\cos x,\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$u(x,t)=\sin(x+at)$$

$$=\left[\frac{\sin(x-at)}{2}-\frac{\sin(x-at)}{2}\right]+\left[\frac{\sin(x+at)}{2}+\frac{\sin(x+at)}{2}\right]$$

右传波为0　　左传波不为0

本例 t 时刻波形仅由初始波形左传生成



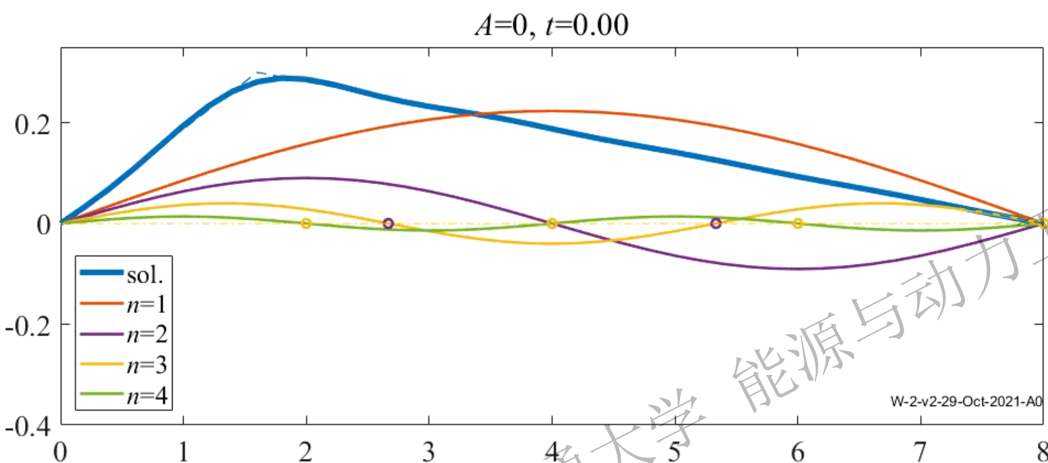
6.2 一维波动方程特征线法

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

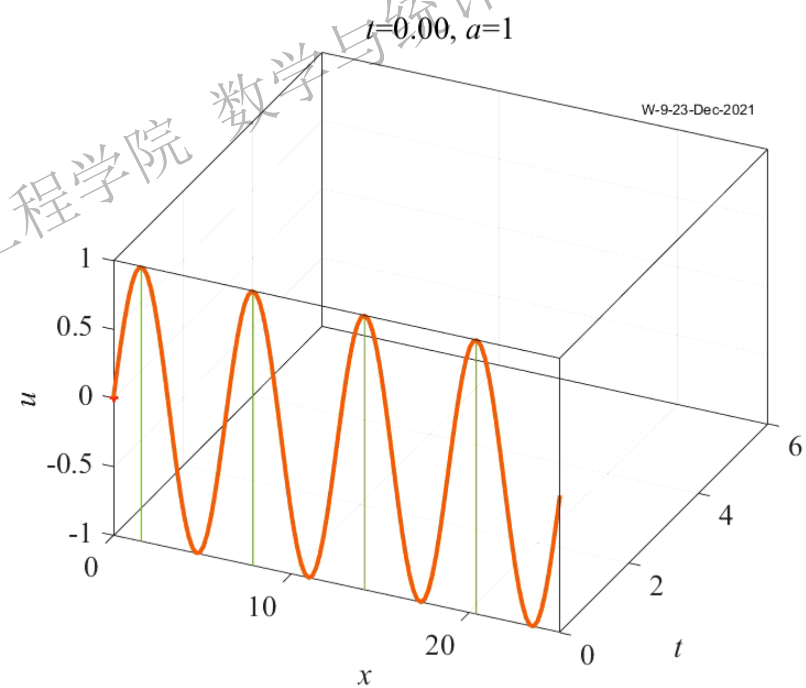
驻波法/行波法

波动方程两大解法解的物理意义

驻波法	行波法
分离变量→无数简谐波叠加	特征线→左传波/右传波 叠加
每个谐波自身不移动→就地叠加	初始波形/速度向上下游传播/叠加



$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\cdot\cos\frac{n\pi a}{l}t+\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\frac{1}{n^3}\left(1-\cos\frac{n\pi a}{l}t\right)(1-\cos n\pi)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$



$$u(x,t)=0+\sin(x+at)$$

6.2 一维波动方程特征线法

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

D'Alembert公式

例3 半无界弦振动问题
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ 0\le x<+\infty \\ u(0,t)=0,\ 0\le t \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x<+\infty \end{cases}$$

解 D'Alembert公式定义在整个实数域→本例为半无界→不能直接使用

思路 延拓该定解问题定义域→利用D'Alembert公式求解后限制 $x\ge 0$ 即可

考虑到左边界齐次 $u(0,t)=0,\ 0\le t$ 可对初始分布做奇延拓

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\le x \\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases} \qquad \psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & 0\le x \\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

即认为初始位移/速度均为奇函数

❶ 当 $x\ge 0$ 且 $x-at\ge 0$ 时, 直接使用D'Alembert公式有

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds,\quad x-at\ge 0$$

D'Alembert公式

例3 半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ 0\le x<+\infty \\ u(0,t)=0,\ 0\le t \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x<+\infty \end{cases}$$

❷ 当 $x\ge 0$ 且 $x-at<0$ 时, 根据奇延拓定义

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds \\ &= \frac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}-\psi(-s)ds+\int_0^{x+at}\psi(s)ds\right] \\ &= \frac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{-(x-at)}-\psi(s)ds+\int_0^{x+at}\psi(s)ds\right] \\ &= \frac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{-(x-at)}^{0}\psi(s)ds+\int_0^{x+at}\psi(s)ds\right] \\ &= \frac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-(x-at)}^{x+at}\psi(s)ds \end{aligned}$$

综上, 半无界弦振动的解为

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at\ge 0 \\ \dfrac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-(x-at)}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at<0 \end{cases}$$

6.2 一维波动方程特征线法

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

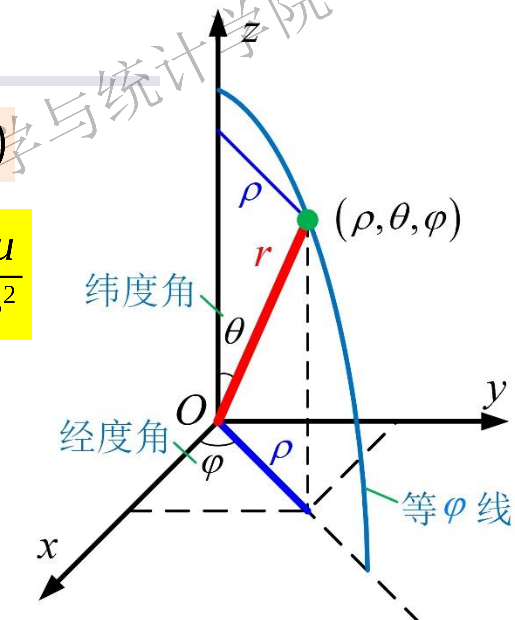
D'Alembert公式

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at\ge 0\\ \dfrac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-(x-at)}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at<0\end{cases}$$

例4 三维波动方程定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0,\ 0<t,\ 0\le\rho<+\infty\\ u(\rho,0)=0,\ u_t(\rho,0)=\psi(\rho),\ 0\le\rho<+\infty\end{cases}$$

解 原定解问题初始条件仅与极径 ρ 有关→球对称问题 $u=u(\rho,t)$



球系下Δu的展开为

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$$

代入径向波动方程

$$u_{tt}=a^2\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)$$

$$u_{tt}=a^2\frac{1}{\rho^2}\left(2\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho^2\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\right)$$

两端乘以ρ

$$\rho u_{tt}=a^2\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=a^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\rho}+u\frac{\partial^2\rho}{\partial\rho^2}\right)$$

$$\rho u_{tt}=a^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+u\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)$$

ρ与时间无关

$$(\rho u)_{tt}=a^2\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial\rho^2}$$

即原方程可视为以 ρu 为未知函数的半无界弦振动方程

6.2 一维波动方程特征线法

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

D'Alembert公式

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at\ge 0\\ \dfrac{-\varphi[-(x-at)]}{2}+\dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-(x-at)}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at<0\end{cases}$$

例4 三维波动方程定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0,\ 0<t,\ 0\le\rho<+\infty\\ u(\rho,0)=0,\ u_t(\rho,0)=\psi(\rho),\ 0\le\rho<+\infty\end{cases}$$

$$(\rho u)_{tt}=a^2\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial\rho^2},\quad \rho>0$$

新未知函数 ρu 下的初始条件为

$$\varphi_1(\rho)=\rho\cdot u(\rho,0)=0$$

$$\psi_1(\rho)=\rho\cdot u_t(\rho,0)=\rho\cdot\psi(\rho)$$

根据上例半无界弦振动D'Alembert公式

$$\rho\cdot u(\rho,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}s\cdot\psi(s)ds, & x-at\ge 0\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-(x-at)}^{x+at}s\cdot\psi(s)ds, & x-at<0\end{cases}$$

调整积分变量

所以原定解问题的解为

$$u(\rho,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{\rho-at}^{\rho+at}s\cdot\psi(s)ds, & x-at\ge 0\\ \dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{-(\rho-at)}^{\rho+at}s\cdot\psi(s)ds, & x-at<0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$u(\rho,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}s\cdot\psi(s)ds, & x-at\ge 0\\ \dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{-(x-at)}^{x+at}s\cdot\psi(s)ds, & x-at<0\end{cases}$$

D'Alembert公式

例4 三维波动方程定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0,\ 0<t,\ 0\le\rho<+\infty\\ u(\rho,0)=0,\ u_t(\rho,0)=\psi(\rho),\ 0\le\rho<+\infty\end{cases}$$

讨论 变化率初始分布为 $u_t(\rho,0)=\psi(\rho)=\dfrac{1}{\rho^2}$

$$u(\rho,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{\rho-at}^{\rho+at}\alpha\cdot\frac{1}{\alpha^2}d\alpha, & (\rho-at\ge 0)\\ \dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{-(\rho-at)}^{\rho+at}\alpha\cdot\frac{1}{\alpha^2}d\alpha, & (\rho-at<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{\rho-at}^{\rho+at}\frac{1}{\alpha}d\alpha, & (\rho-at\ge 0)\\ \dfrac{1}{2a\rho}\displaystyle\int_{-(\rho-at)}^{\rho+at}\frac{1}{\alpha}d\alpha, & (\rho-at<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\rho}\ln\dfrac{\rho+at}{\rho-at}, & (\rho-at\ge 0)\\ \dfrac{1}{2a\rho}\ln\dfrac{\rho+at}{-(\rho-at)}, & (\rho-at<0)\end{cases}$$

两式可合并为

$$u(\rho,t)=\frac{1}{2a\rho}\ln\frac{\rho+at}{|\rho-at|},\quad \rho>0$$

6.2 一维波动方程特征线法

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

D'Alembert公式

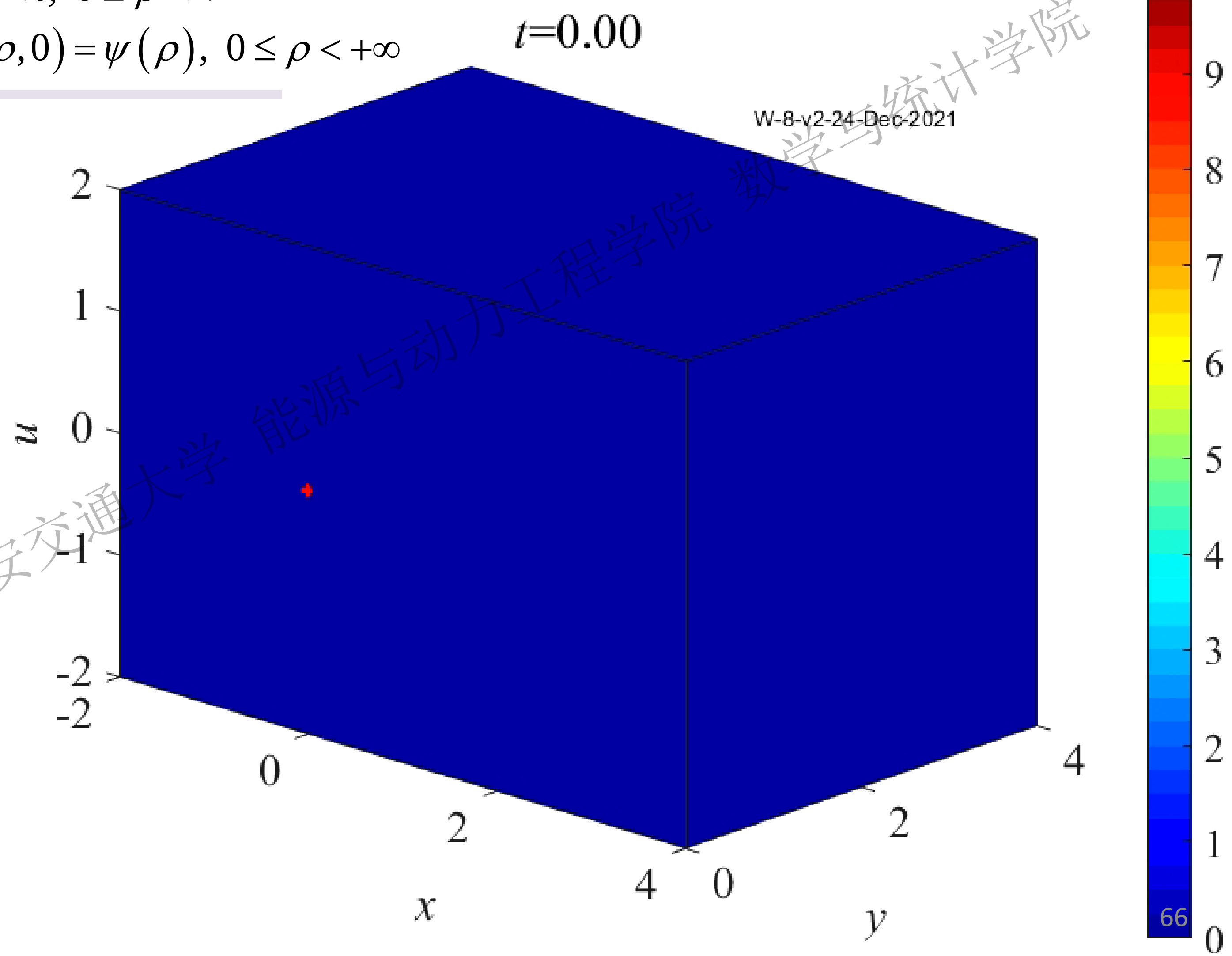
例4 三维波动方程定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0,\ 0<t,\ 0\le\rho<+\infty \\ u(\rho,0)=0,\ u_t(\rho,0)=\psi(\rho),\ 0\le\rho<+\infty \end{cases}$$

初始速度分布 $\psi(\rho)=\frac{1}{\rho^2}$

$$u(\rho,t)=\frac{1}{2a\rho}\ln\frac{\rho+at}{|\rho-at|},\quad \rho>0$$

讨论



6.2 一维波动方程特征线法

含交叉导数项的二阶PDE

D'Alembert 公式→利用特征线→一维波动方程化为仅含交叉导数项PDE→可直接积分求解

该思路用于一般二阶PDE→沿特征线变量代换→二阶项仅保留交叉导数项→寻找特征线??

寻找特征线

设未知函数 $u(x, y)$，二阶线性PDE的一般形式为

ξ /ˈksaɪ/

ζ /ˈziːtə/

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

设变量代换为 $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$，则各阶导数可表示为

含 ξ,η

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\xi\xi_{xx}+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\eta\eta_{xx}$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\eta\eta_{xy}$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_\xi\xi_{yy}+u_{\eta\eta}\eta_\eta^2+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_\eta\eta_{yy}$$

用新变量表示原变量导数

二阶PDE一般式可化为

$$\left(a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\right)u_{\xi\xi} \quad ❶$$
$$+2\left[a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+a_{22}\xi_y\eta_y\right]u_{\xi\eta} \quad ❷$$
$$+\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_\eta^2\right)u_{\eta\eta} \quad ❸$$
$$+\left(a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\right)u_\xi$$
$$+\left(a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\right)u_\eta$$
$$+cu=f$$

6.2 一维波动方程特征线法

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

ξ /ˈksaɪ/

ζ /ˈzi:tə/

含交叉导数项的二阶PDE

寻找特征线

$$\left(a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\right)u_{\xi\xi} \quad ①$$

$$+2\left[a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+a_{22}\xi_y\eta_y\right]u_{\xi\eta} \quad ②$$

$$+\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_\eta^2\right)u_{\eta\eta} \quad ③$$

$$+\left(a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\right)u_\xi$$

$$+\left(a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\right)u_\eta$$

$$+cu=f$$

① 式=0 变形

$$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\xi_x}{\xi_y}+a_{22}=0$$

③ 式=0 变形

$$a_{11}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\eta_x}{\eta_y}+a_{22}=0$$

特征线斜率

$$\frac{\xi_x}{\xi_y}=\frac{\eta_x}{\eta_y}=-\frac{dy}{dx}$$

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

任意位置

特征线上

$$\begin{cases}\xi(x,y)=C\\ \eta(x,y)=C\end{cases}$$

变量代换沿特征线为常数

$$\xi_x dx+\xi_y dy=0$$

$$\eta_x dx+\eta_y dy=0$$

代数方程

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2a_{12}\left(-\frac{dy}{dx}\right)+a_{22}=0$$

特征方程

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

求解得出特征线ODE

6.2 一维波动方程特征线法

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}\quad a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

含交叉导数项的二阶PDE

例1 $\begin{cases}u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0,\ 0<y,\ -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=3x^2,\ u_y(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$

解 二阶PDE, 含交叉项, 无一阶项, 可用变量代换法求解

第1步 定义变量代换

原PDE对应的特征方程为 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}-3=0$

解得特征线ODE $\frac{dy}{dx}=3,\ \frac{dy}{dx}=-1$

特征线为 $y=3x+C_1,\ y=-x+C_2$

变形可得 $x-\frac{y}{3}=C_1,\ \ x+y=C_2$

定义变量代换 $\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$ 逆变换为 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\xi+\dfrac{1}{4}\eta\\ y=-\dfrac{3}{4}\xi+\dfrac{3}{4}\eta\end{cases}$

第2步 改造原PDE

新变量对原变量的导数 $\xi_x=1,\ \xi_y=-\frac{1}{3},\quad \eta_x=\eta_y=1$

$$\begin{aligned}u_{xx}&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\xi\xi_{xx}+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\eta\eta_{xx}\\&=u_{\xi\xi}\cdot1+u_{\xi\eta}\cdot1+u_\xi\cdot0+u_{\eta\eta}\cdot1+u_{\xi\eta}\cdot1+u_\eta\cdot0\\&=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{xy}&=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y\\&\quad+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\eta\eta_{xy}\\&=u_{\xi\xi}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+u_{\xi\eta}\cdot1+u_\xi\cdot0\\&\quad+u_{\eta\xi}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+u_{\eta\eta}\cdot1+u_\eta\cdot0\\&=-\frac{1}{3}u_{\xi\xi}+\frac{2}{3}u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{yy}&=u_{\xi\xi}\xi_y^2+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_\xi\xi_{yy}+u_{\eta\eta}\eta_\eta^2+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_\eta\eta_{yy}\\&=u_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)+u_{\xi\eta}\cdot1+u_\xi\cdot0+u_{\eta\eta}\cdot1+u_{\xi\eta}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+u_\eta\cdot0\\&=\frac{1}{9}u_{\xi\xi}-\frac{2}{3}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{aligned}$$

6.2 一维波动方程特征线法

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

含交叉导数项的二阶PDE

例1

$$\begin{cases}u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0,\ 0<y,\ -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=3x^2,\ u_y(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

ξ /ˈksaɪ/

ζ /'zi:tə/

代入原方程得

$$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0$$

$$u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+2\left(-\frac{1}{3}u_{\xi\xi}+\frac{2}{3}u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}\right)-3\left(\frac{1}{9}u_{\xi\xi}-\frac{2}{3}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)=0$$

$$\frac{16}{3}u_{\xi\eta}=0$$

第3步 解仅含交叉项PDE

直接积分两次得该PDE通解 $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$

还原变量 $u(x,y)=f\left(x-\dfrac{y}{3}\right)+g(x+y)$

第4步 确定未知函数

由边界条件得

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)+g(x)=3x^2 \quad ①\\ u_y(x,0)=-\dfrac{1}{3}f'(x)+g'(x)=0 \quad ②\end{cases}$$

式② 积分有 $-\dfrac{1}{3}f(x)+g(x)=C$

联立① 有 $f(x)=\dfrac{9}{4}x^2-\dfrac{3}{4}C$

$$g(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}C$$

$$u(x,y)=f\left(x-\frac{y}{3}\right)+g(x+y)$$

代入通解 $=\dfrac{9}{4}\left(x-\dfrac{y}{3}\right)^2-\dfrac{3}{4}C+\dfrac{3}{4}(x+y)^2+\dfrac{3}{4}C$

原PDE的解为 $u(x,y)=3x^2+y^2$

6.2 一维波动方程特征线法

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

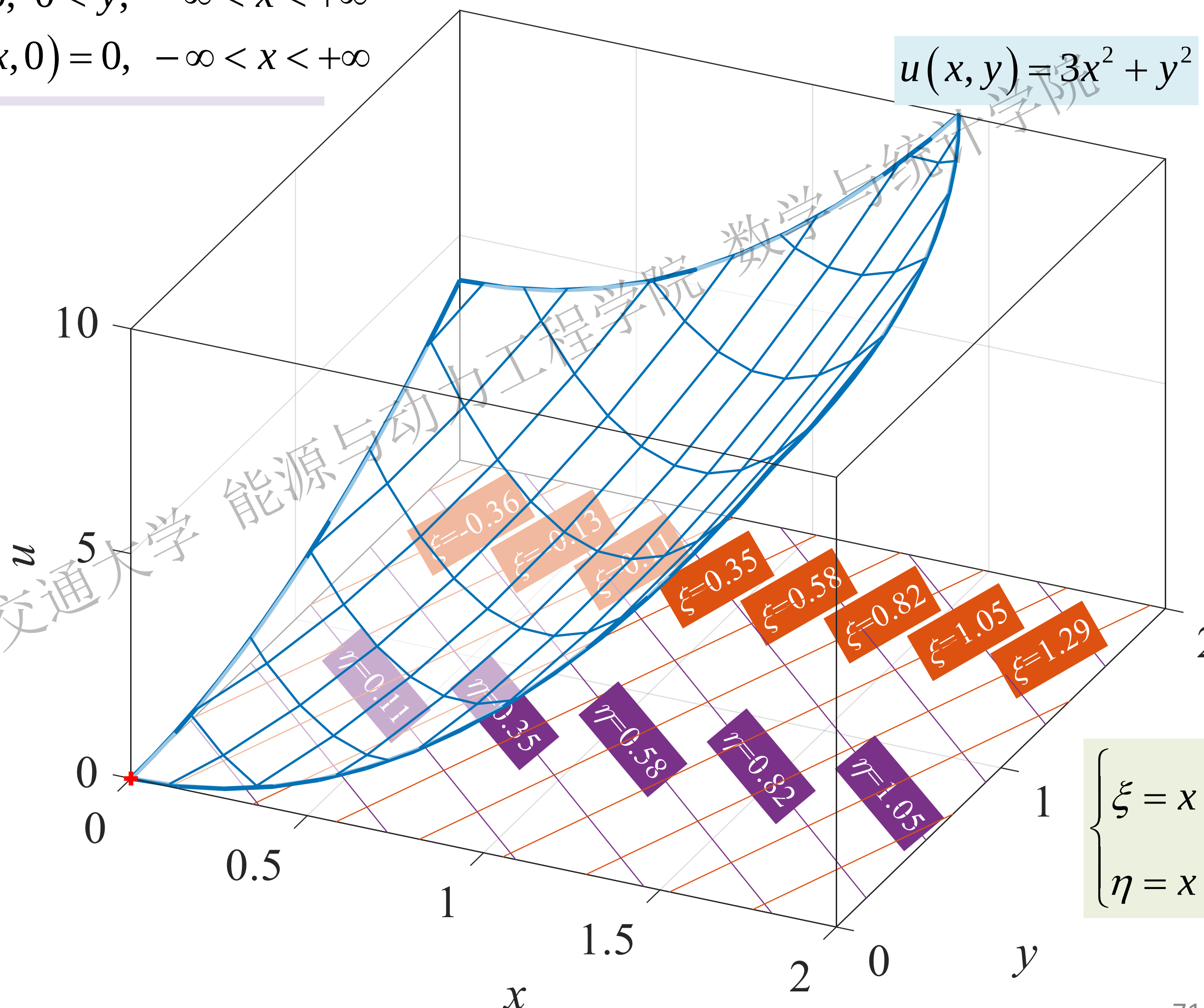
含交叉导数项的二阶PDE

例1 $\begin{cases}u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0,\ 0<y,\ -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=3x^2,\ u_y(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$

两组解曲线

$$f(\xi)=\frac{9}{4}\xi^2-\frac{3}{4}C$$

$$g(\eta)=\frac{3}{4}\eta^2+\frac{3}{4}C$$



$$u(x,y)=3x^2+y^2$$

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$$

本章总结

1 一阶线性PDE

$$au_t+bu_x+cu=f$$

特征线法 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{b}{a}$

变量代换法 $\begin{cases}\eta=x\\ \xi=\psi(x,t)=\tau\end{cases}$ $bu_\eta+cu=f$

原方程 c, f 不显含 t 时用变量代换法更便捷

特征线法把一阶PDE→ODE

特征线在xOt平面，从初始曲线出发沿特征线积分获得解曲线

解曲面由特征线直接扫成

2 一阶拟线性PDE

$$\begin{cases}a(x,t,u)\cdot u_x+b(x,t,u)\cdot u_t=c(x,t,u),\ t_0<t,\ -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx(s)}{ds}=a(x,t,u),\ x(s_0)=\tau\\ \dfrac{dt(s)}{ds}=b(x,t,u),\ t(s_0)=t_0\\ \dfrac{du(s)}{ds}=c(x,t,u),\ u(s_0)=\varphi[x(s_0)]=\varphi(\tau)\end{cases}$$

特征曲线的切向量ODE方程组

难点 变量还原可能产生隐函数/特征线投影相交产生间断

3 一维无界波动方程

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<t,\ -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

D’Alembert公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

特征线法无法把二阶PDE全导数化→但可化为仅含交叉项的PDE

4 含交叉导数项的二阶PDE

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)=C_1\\ \eta=\eta(x,y)=C_2\end{cases}$$

二阶交叉导数项直接积分

难点 定解条件含一阶导数时未知函数需积分确定

本章作业

1. 分别用特征线法/变量代换法解下列一阶线性PDE

$$\begin{cases} u_t+\left(1+x^2\right)u_x-u=0,\ 0<t, \quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\arctan x, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$u(x,t)=(\arctan x-t)e^t$$

$$\begin{cases} u_t+2u_x+u=xt,\ 0<t, \quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=-x+2, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$u(x,t)=-2e^{-t}+xt-x-2t+4$$

$$\begin{cases} 2u_t-u_x+xu=0,\ 0<t, \quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=2xe^{\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$u(x,t)=(2x+t)e^{\frac{x^2}{2}}$$

2. 用特征线法解下列一阶拟线性PDE

$$\begin{cases} u_t+u\cdot u_x=0,\ 0<t, \quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\frac{1}{2}+\sin x, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\sin\left[x-t\cdot u(x,t)\right]$$

本章作业

3. D’Alembert公式的运用

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \sin x, & u_t(x,0) = a\cos x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sin(x + at)$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \sin x, & u_t(x,0) = x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sin x \cos at + xt$$

4. 含有交叉项的二阶PDE

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, & 0 < y, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = 3x^2, & u_y(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$u(x,y) = 3x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} u_{xy} = x^2 y, & 0 < y, \quad 1 < x \\ u(x,0) = x^2, & u_y(1,y) = \cos y \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + x^2 + \cos y - \frac{1}{6}y^2 - 1$$