第六章 多元函数积分学及其应用

第五节 重积分的应用

Applications of Multiple Integrals

- 重积分的微元法
- **1.区域函数及其对域的导数**
- **2.变域上的重积分对域的导数**
- **3.微元法**
- 应用举例
- 小结

作业: 习题6.5

A组 1(1) (3), 2(2) (3) , 3, 5, 7

第一部分 重积分的微元法

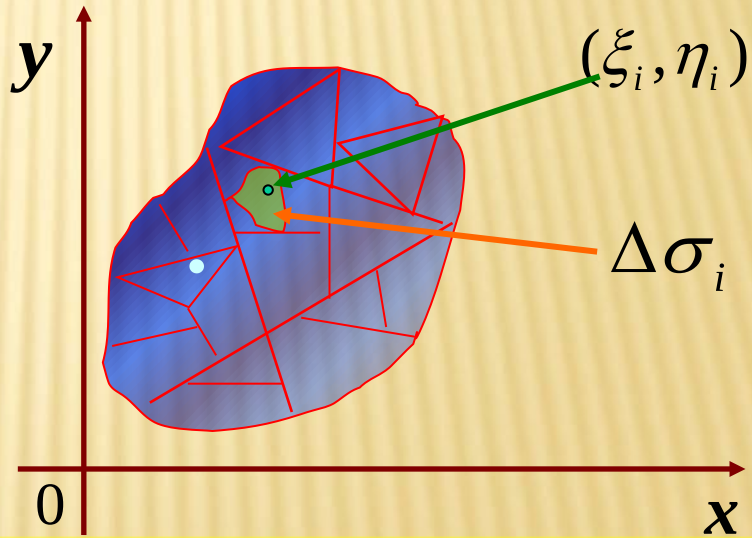
例 设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域(σ)，在点(x,y)处的面密度为$f(x,y)$，假定$f(x,y)$在(σ)上连续，平面薄片的质量为多少？

解：（1）分：$(\sigma)=\bigcup(\Delta\sigma_k)$

（2）匀：$\Delta m_k \approx f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

（3）和：$m \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

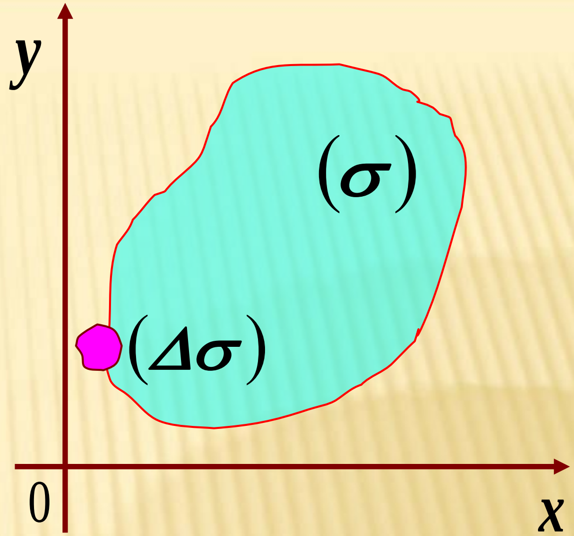
（4）精：$m = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$



问题：

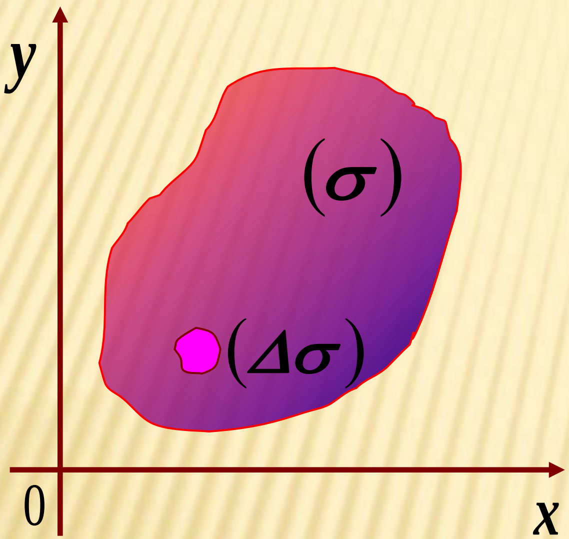
若知道某物质在任一子域$(\Delta\sigma)$上的质量$m=F((\Delta\sigma))$，那么物质在(σ)上分布的疏密如何？

特殊情形：当质量均匀分布时



面密度$\mu = \dfrac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}$,

其中$\Delta\sigma$为子域$(\Delta\sigma)$的度量.



一般情形：当质量非均匀分布时

面密度$\mu = \lim\limits_{(\Delta\sigma)\to(x,y)} \dfrac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma} = f(x,y)$,

$(x,y)\in(\Delta\sigma)$.

一般地，设$\Omega_\sigma = \{(\Delta\sigma) \mid (\Delta\sigma)\subseteq(\sigma)\subseteq \mathrm{R}^2\}$

则映射$F:\Omega_\sigma \to R$称为区域函数.

记作： $F = F((\Delta\sigma)), (\Delta\sigma)\in\Omega_\sigma$, 其中$\Omega_\sigma$为定义域.

1. 区域函数对域的导数

设$\Omega_\sigma=\{(\Delta\sigma)|(\Delta\sigma)\subseteq(\sigma)\subseteq \mathrm{R}^2\}$ 映射$F:\Omega_\sigma\to R$,

点$M(x,y)\in(\sigma)$. 设$\forall(\Delta\sigma)\subset(\sigma)$,且$M(x,y)\in(\Delta\sigma)\in\Omega_\sigma$.

如果当$(\Delta\sigma)$的直径$d\to 0$时, $\dfrac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}$的极限存在,

则称该极限值为区域函数F在点M处对区域(σ)的导数.

记作: $\dfrac{\mathrm{d}F}{d\sigma}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{F((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(M)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}F}{d\sigma}=f(x,y)$

并称$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$为区域函数F在点M处对区域(σ)的微分.

记作: $\mathrm{d}F=f(x,y)d\sigma$

实例:

1. 面密度μ是质量函数$m = F((\Delta\sigma))$对区域(σ)的导数.

即: $$\frac{\mathrm{d}m}{d\sigma} = \mu(x, y)$$

2. 体密度μ是质量函数$m = F((\Delta V))$对区域(V)的导数.

即: $$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \lim_{d\to 0}\frac{F((\Delta V))}{\Delta V} = \mu(x, y, z)$$

3. 平面压强p是压力函数$P((\Delta\sigma))$对区域(σ)的导数.

即: $$p(x, y) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\sigma} = \lim_{d\to 0}\frac{P((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}$$

微积分第一基本定理

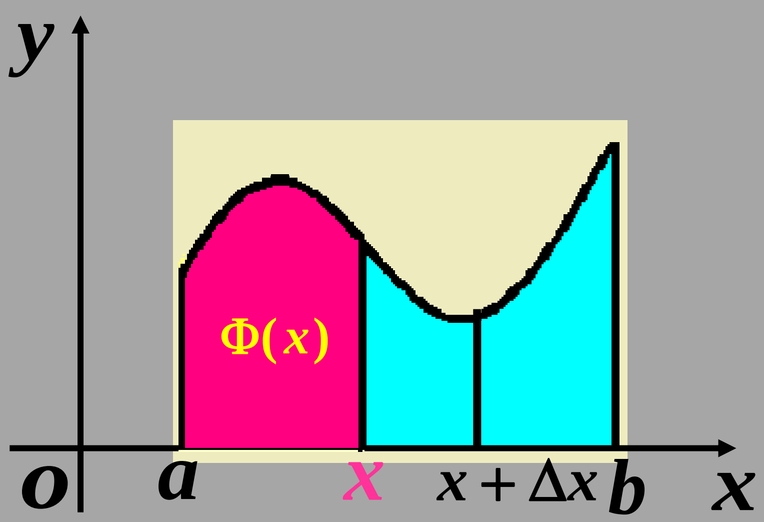
如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a,b]$上具有导数，且它的导数为

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (a\le x\le b)$$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$



2. 变域上的重积分对域的导数

回忆: 若$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 则$\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)$

同理可得 若$f\in C((\sigma))$, 点$M(x,y)$为域(σ)内任一点,

任作一包含点M的子域$(\Delta\sigma)$,即$M\in(\Delta\sigma)$,$(\Delta\sigma)\subseteq(\sigma)$.

$\iint\limits_{(\Delta\sigma)} f(M)\mathrm{d}\sigma$的值将随$(\Delta\sigma)$而变，是区域$(\Delta\sigma)$的函数.

记作：$\Phi((\Delta\sigma))=\iint\limits_{(\Delta\sigma)} f(M)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\Delta\sigma$

则 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi((\Delta\sigma))}{\mathrm{d}\sigma}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=\lim\limits_{(\xi,\eta)\to(x,y)} f(\xi,\eta)=f(x,y)$

$\mathrm{d}\Phi=f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 就是区域函数$\Phi((\Delta\sigma))$在点(x,y)处对区域(σ)的微分

$$\frac{\mathrm{d}\Phi((\Delta\sigma))}{\mathrm{d}\sigma}=\lim_{d\to 0}\frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=\lim_{(\xi,\eta)\to(x,y)} f(\xi,\eta)=f(x,y)$$

$$\lim_{d\to 0}\frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(x,y)$$

$$\frac{\Phi((\Delta\sigma))}{\Delta\sigma}=f(x,y)+\alpha,\alpha\text{为无穷小量.}$$

$$\Phi((\Delta\sigma))=f(x,y)\Delta\sigma+\alpha\Delta\sigma$$

$$\Phi((\Delta\sigma))=\boxed{f(x,y)\Delta\sigma}+O(\Delta\sigma)$$

$$\mathrm{d}\Phi=f(x,y)\Delta\sigma$$

$$=f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

就是区域函数$\Phi((\Delta\sigma))$在点(x,y)处

关于$\Delta\sigma$的线性主部

3. 微元法

把定积分的微元法推广到二重积分的应用中.

若要计算的某个量 Φ 对于闭区域 (σ) 具有可加性，并且在闭区域 (σ) 内任取一个直径很小的子区域 $(\Delta\sigma)$ 时，相应的部分量可近似地表示为 $f(x,y)d\sigma$ 的形式，其中 $(x,y)\in(\Delta\sigma)$．这个 $f(x,y)d\sigma$ 称为所求量 Φ 的积分微元，记为 $\mathrm{d}\Phi = f(x,y)\mathrm{d}\sigma$．

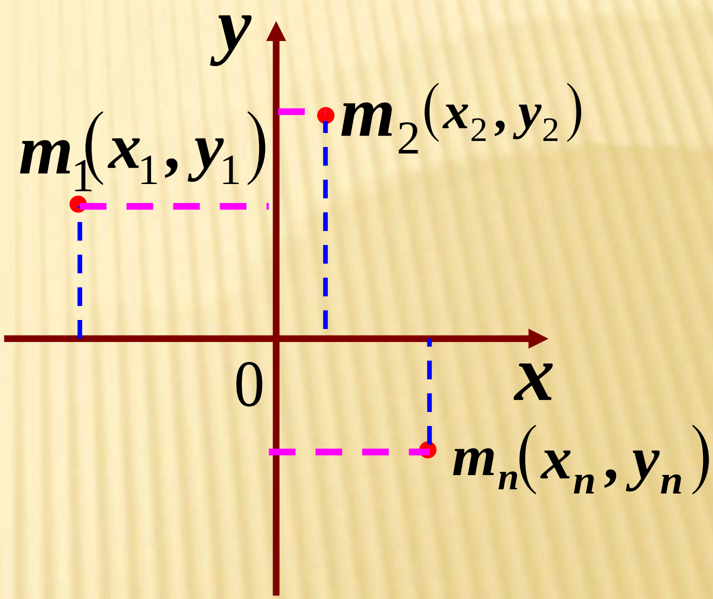
就是区域函数 $\Phi((\Delta\sigma))$ 在点 (x,y) 处关于 $\Delta\sigma$ 的线性主部

则 $\Phi = \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

第二部分　　应用举例

1.质心(质量的中心)

设xoy平面上有n个质点，它们分别位于(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n)处，质量分别为$m_1,m_2,\cdots,m_n$.



则该质点系的质心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

一般地,

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域(σ)，在点(x,y)处的面密度为$\mu(x,y)$，假定$\mu(x,y)$在(σ)上连续，平面薄片的质心

由微元法得 $$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)} x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{(\sigma)} \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)} y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{(\sigma)} \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma},$$

当薄片均匀时，质心称为**形心**. 此时:

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_{(\sigma)} xd\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{(\sigma)} yd\sigma.$$

其中 $A=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma$

推广至空间物体的质心

设物体占有空间闭区域(Ω)，在点(x,y,z)处的密度为$\mu(x,y,z)$，假定$\mu(x,y,z)$在(Ω)上连续，则该物体的质心为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_{(\Omega)}x\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_{(\Omega)}y\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

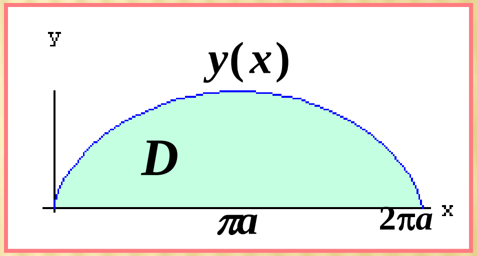
$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{(\Omega)}z\mu(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

其中 $M=\iiint_{(\Omega)}\mu(x,y,z)\mathrm{d}v$为几何体质量.

例1

设平面薄板由 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，$(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴围成，它的面密度 $\mu = 1$，求形心坐标.

解 先求区域 D 的面积 A,



$\because 0 \le t \le 2\pi$

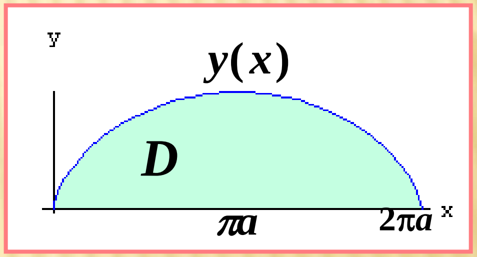
$\therefore 0 \le x \le 2\pi a$

$$A = \int_0^{2\pi a} y(x)dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)d[a(t - \sin t)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

设平面薄板由$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，$(0 \le t \le 2\pi)$与$x$轴围成，它的面密度$\mu = 1$，求形心坐标.

由于区域关于直线$x = \pi a$对称，



所以形心在$x = \pi a$上，即 $\bar{x} = \pi a.$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)} y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2\pi a}[y(x)]^2\mathrm{d}x = \boxed{\frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}[1-\cos t]^3\mathrm{d}t} = \frac{5a}{6}.$$

所求形心坐标为 $(\pi a, \frac{5}{6}a)$.

思考：P152 例2.8

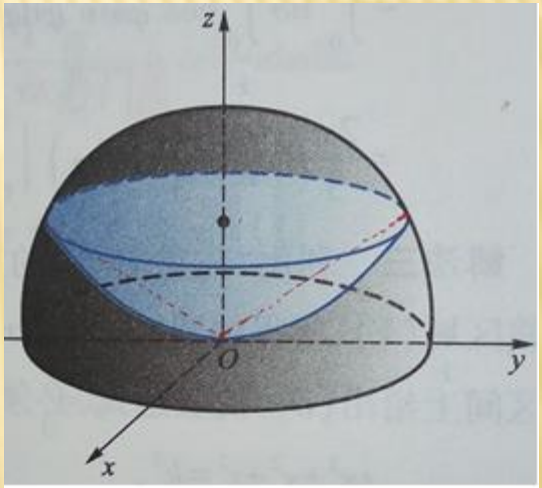
如何用上半部分体积的2倍来计算?

例 求边界为$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}, x^2+y^2=2az(a>0)$的均匀物体的质心.

解 由对称性知, 质心坐标 $\bar{x}=0, \bar{y}=0,\ \bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{(\Omega)} z\mu \mathrm{d}v}{\iiint\limits_{(\Omega)} \mu \mathrm{d}v}.$

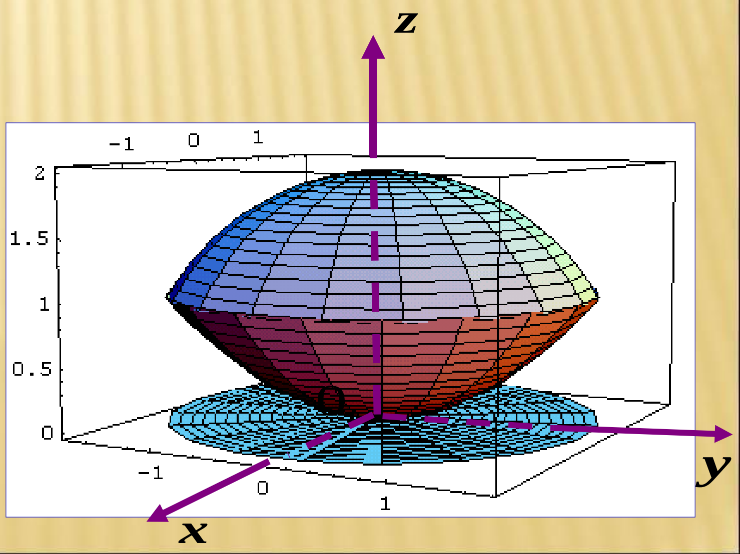
采用柱面坐标变换

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z;$$



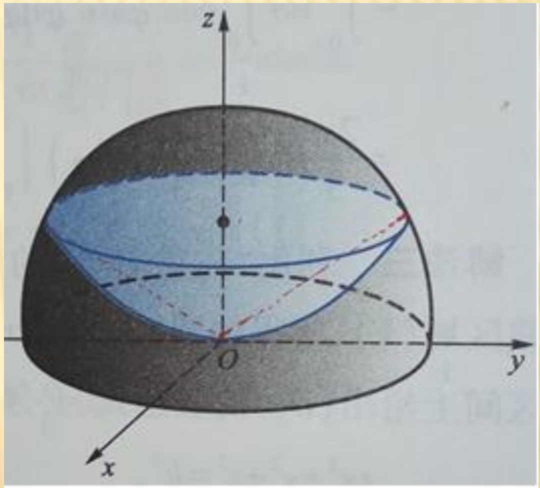
边界曲面$\begin{cases} z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$ 化为$\begin{cases} z=\sqrt{3a^2-\rho^2} \\ \rho^2=2az \end{cases}$

交线为$\rho^2=2a^2, \rho^2=-6a^2$(舍去)



积分区域(V): $\begin{cases} \dfrac{\rho^2}{2a}\le z\le\sqrt{3a^2-\rho^2}, \\ 0\le\rho\le\sqrt{2}a, \quad 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

例 求边界为$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}, x^2+y^2=2az(a>0)$的均匀物体的质心.



解 积分区域(V):

$$\begin{cases}\dfrac{\rho^2}{2a}\le z\le\sqrt{3a^2-\rho^2},\\ 0\le\rho\le\sqrt{2}a,\quad 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{(\Omega)} z\mu \mathrm{d}v}{\iiint\limits_{(\Omega)}\mu \mathrm{d}v}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\rho \mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}}\mu z\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\rho \mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}}\mu \mathrm{d}z}=\frac{\frac{5}{3}\pi\rho a^4}{2\pi\rho(\sqrt{3}-\frac{5}{6})a^3}$$

$$=\frac{5a}{6\sqrt{3}-5}.$$

$\therefore$ 质心坐标$(0,0,\dfrac{5a}{6\sqrt{3}-5})$

例 求边界为$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}, x^2+y^2=2az(a>0)$的均匀物体的质心.

解 由对称性知, 质心坐标 $\bar{x}=0, \bar{y}=0,\quad \bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{(\Omega)} z\mu \mathrm{d}v}{\iiint\limits_{(\Omega)} \mu \mathrm{d}v}$.

采用球面坐标变换

$$\sqrt{3}a=\frac{2a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

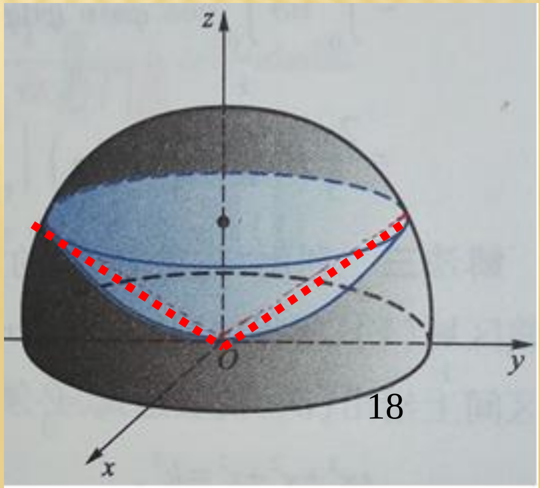
$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi;$$

边界曲面$\begin{cases} z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$ 化为$\begin{cases} r=\sqrt{3}a \\ r=\dfrac{2a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \end{cases}$ 交线为$\begin{cases} r=\sqrt{3}a \\ \varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

积分区域(V):

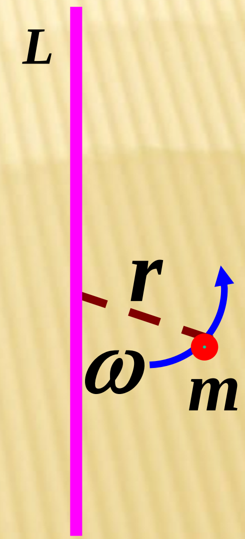
积分较麻烦!

$$\begin{cases} 0\le r\le\sqrt{3}a, 0\le\varphi\le\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le\dfrac{2a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$



参考课本173页例题3.9解法二

2. 转动惯量



质量为m的质点在垂直于直线L的平面内做角速度为ω匀速圆周(半径为r)运动.

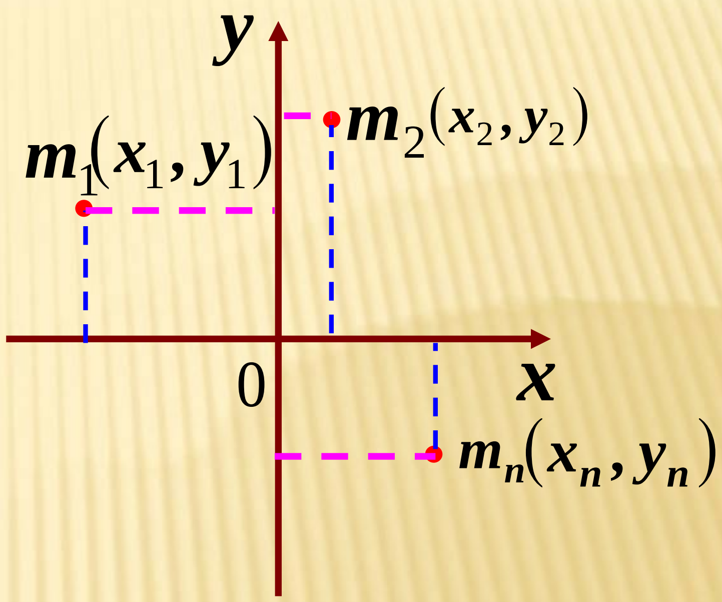
则每时刻质点的动能为

$$\frac{1}{2}m(\omega r)^2=\frac{1}{2}\left(mr^2\right)\cdot\omega^2$$

其中mr^2表示质点转动时惯性大小的度量.

称为质点对轴L的转动惯量.

设 xoy 平面上有 n 个质点，它们分别位于 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots,(x_n,y_n)$ 处，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$.



则该质点对于 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}m_i y_i^{\ 2}$$

该质点对于 y 轴的转动惯量为

$$I_y=\sum_{i=1}^{n}m_i x_i^{\ 2}$$

一般地

设有一平面薄片，占有 xoy 面上的闭区域 (σ)，在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$，假定 $\mu(x, y)$ 在 (σ) 上连续，平面薄片对于 x 轴和 y 轴的转动惯量为

薄片对于 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2 \mu(x, y) \mathrm{d}\sigma,$$

薄片对于 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2 \mu(x, y) \mathrm{d}\sigma.$$

推广：设物体占有空间闭区域(Ω)，在点(x,y,z)处的密度为$\mu(x,y,z)$，假定$\mu(x,y,z)$在(Ω)上连续，则该物体对坐标轴及原点的转动惯量为

$$I_x=\iiint_{(\Omega)}\left(y^2+z^2\right)\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

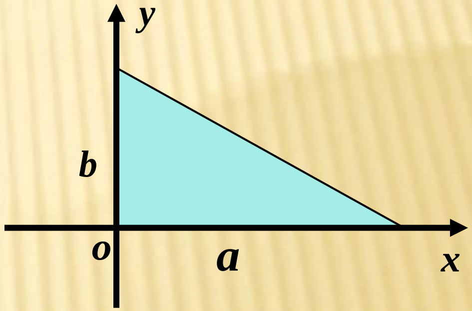
$$I_y=\iiint_{(\Omega)}(z^2+x^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_o=\iiint_{(\Omega)}(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

例2 设一均匀的直角三角形薄板，两直角边长分别 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，求这三角形对其中任一直角边的转动惯量.

解 设三角形的两直角边分别在 x轴和y轴上，如图



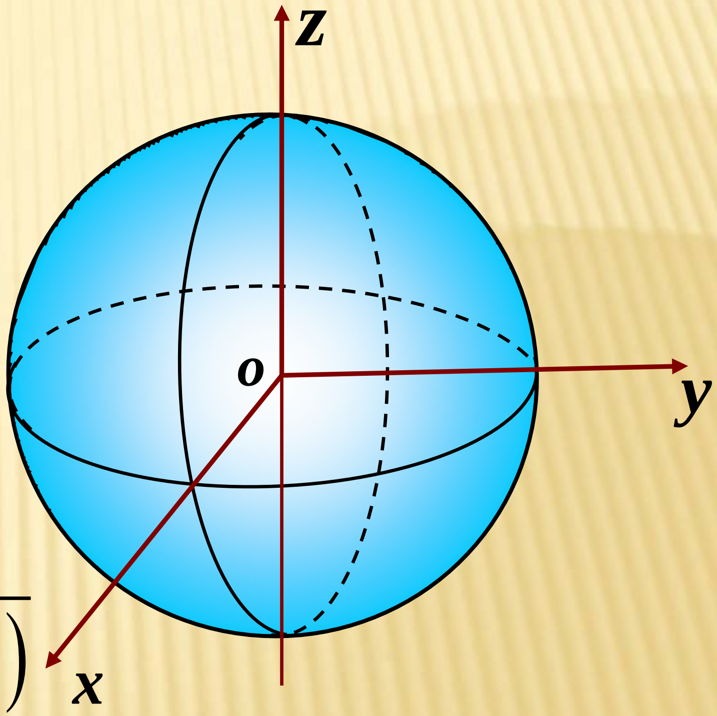
对y轴的转动惯量为 $I_y = \mu \iint\limits_{(\sigma)} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$= \mu \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^{a(1-\frac{y}{b})} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12} a^3 b \mu.$$

同理：对x轴的转动惯量为

$$I_x = \mu \iint\limits_{(\sigma)} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{12} a b^3 \mu.$$

例 求质量均匀分布的球体$(V):x^2+y^2+z^2=R^2$对z轴的转动惯量.



解 球体$(V):x^2+y^2+z^2\le R^2$

$$I_z=\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

$$=2\iiint\limits_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

(V_1)为上半球域: $0\le z\le\sqrt{R^2-\left(x^2+y^2\right)}$

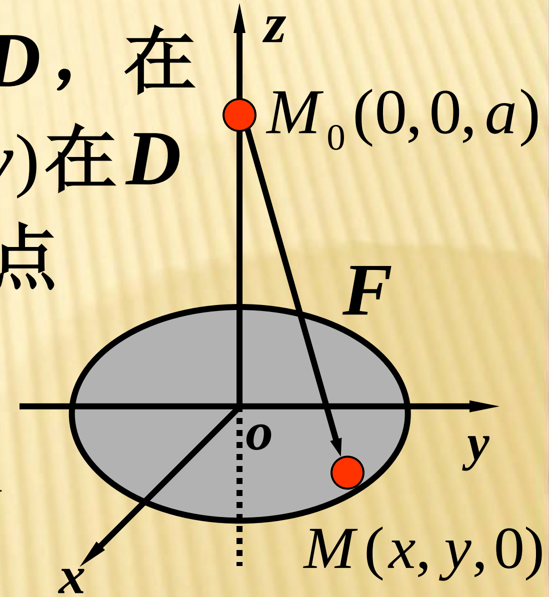
则 $I_z=2\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2 sin^2\varphi\cdot r^2 sin\varphi\mathrm{d}r$

$$=4\pi\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r=\frac{8}{15}\pi\mu R^5=\frac{2}{5}mR^2.$$

其中,$m=\frac{4}{3}\pi R^3\mu$为球体质量. $\mu=\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

3. 引力

设有一平面薄片，占有 xoy 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，计算该平面薄片对位于 z 轴上的点 $M_0(0,0,a)$ 处的单位质点的引力．$(a>0)$



薄片对 z 轴上单位质点的引力 $F=\{F_x,F_y,F_z\}$

$$F_x=k\iint_D \frac{\mu(x,y)x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{M_0M}=(x,y,-a)$$

$$F_y=k\iint_D \frac{\mu(x,y)y}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=k\frac{1\cdot\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{|\boldsymbol{r}|^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$F_z=-ak\iint_D \frac{\mu(x,y)}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma.$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=k\frac{1\cdot\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

k 为引力常数

例4 求面密度 μ 为常量、半径为 R 的均匀圆形薄片：$x^2+y^2\le R^2$，$z=0$ 对位于 z 轴上的点 $M_0(0,0,a)$ 处的单位质点的引力. $(a>0)$

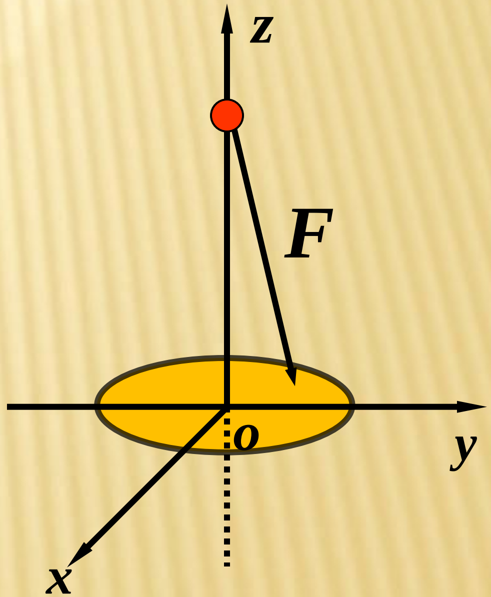
解 由积分区域的对称性知 $F_x=F_y=0$,

$$F_z=-ak\iint_D\frac{\mu(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=-ak\mu\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=-ak\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{1}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi ka\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right).$$



所求引力为 $\left\{0,\ 0,\ 2\pi ka\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)\right\}.$

小结

基本思想：微元法

物理应用：质心、转动惯量、对质点的引力

（注意审题，熟悉相关物理知识）

练习： 位于两圆 $\rho = a\cos\phi, \rho = b\cos\phi \quad (0 < a < b)$

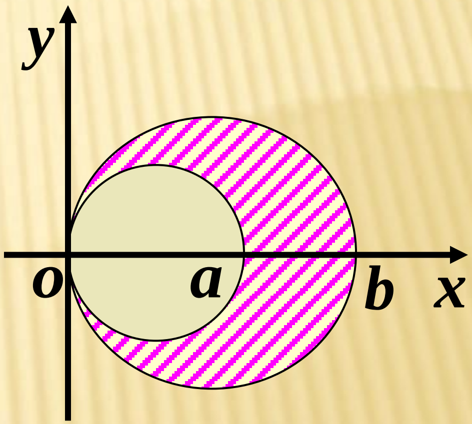
之间的均匀薄片的质心是（　　）：

$A.\left(\dfrac{b^2+ba+a^2}{2(b+a)},0\right)$ $B.\left(\dfrac{b^2+2ba+a^2}{2(b+a)},0\right)$ $C.\left(0,\dfrac{b^2+ba+a^2}{2(b+a)}\right)$

$D.\left(0,\dfrac{b^2+2ba+a^2}{2(b+a)}\right)$

练习题 求位于两圆$\rho = a\cos\varphi, \rho = b\cos\varphi \quad (0 < a < b)$之间的均匀薄片的质心.

解



薄片关于x轴对称

则 $\bar{y} = 0,$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\mu \mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mu \mathrm{d}\sigma} = \frac{2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} \rho\cos\varphi \cdot \rho d\rho}{\mu \cdot D}$$

$$= \frac{\frac{\pi\mu}{8}\left(b^3 - a^3\right)}{\frac{\pi\mu}{4}\left(b^2 - a^2\right)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{2(b+a)}.$$