高等数学（一）MOOC课程期末考试已经发布，
截止时间为1月2日23:30，每人只有一次考试机会，
MOOC期末考试成绩占MOOC成绩的50%，

请各班学生在截止时间内完成MOOC课程考试。
另，请提醒学生一定要加入同步SPOC课程
https://www.icourse163.org/spoc/course/XJTU-1467550208?tid=1468694542，并按照要求设置昵称。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)x(t) + f(t), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)x(t), \qquad (3.3)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)x(t) + f(t), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)x(t), \qquad (3.3)$$

定理3.5

设 $\mathrm{X}(t)(t \in (a,b))$ 是齐次线性微分方程组(3. 3)的一个基解矩阵，则 $x^*(t) = \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in (a,b)$

是非齐次线性微分方程组(3. 2)满足条件 $x^*(t_0) = 0$ 的特解.

非齐次线性微分方程组(3. 2)的通解为:

$$x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

满足条件 $x(t_0) = x_0$ 的特解为:

$$x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_0)x_0 + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

例 求微分方程组 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \dfrac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \dfrac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ 的通解.

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{|X(t)|} X^*(t)$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

通解: $\mathbf{x}(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\mathrm{d}\tau.$

例 求微分方程组 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ 的通解.

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

通解: $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$

通解: $x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$

例 求微分方程组 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \dfrac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \dfrac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

满足 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ 的特解.

A法： 通解: $x(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$

将初值条件 $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 代入得, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\therefore \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

特解: $\begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^t-1)\cos t - \sin t \\ (e^t-1)\sin t + \cos t \end{pmatrix}$

B法: 满足 $x(t_0) = x_0$ 的特解 $\boxed{x^*(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau.}$

例 求微分方程组 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

满足 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ 的特解.

B法: $X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ $\quad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} d\tau}$$

$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad X^{-1}(t) = \frac{1}{|X(t)|} X^*(t)$ $\quad \boxed{= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}}$

满足 $x(t_0) = x_0$ 的特解 $\boxed{x^*(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.}$

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \left(e^t-1\right)\cos t - \sin t \\ \left(e^t-1\right)\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

满足 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的特解 $\boldsymbol{x}^*(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0 + \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t), \qquad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t-1\\ \frac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

例 求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ 的通解.

常系数线性微分方程组

第三节 常系数线性微分方程组的求解

P319 习题4.3

(A)2, 3, 5, 11, 12.

(B)5, 6

3.1　常系数线性齐次微分方程组的求解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \qquad (3.15)$$

其中$A = (a_{ij})_{n\times n}$

猜测(3.15)有形如 $x = re^{\lambda t}$ 的特解，代入（3.15）

$$\lambda re^{\lambda t} = Are^{\lambda t} \qquad \lambda r = Ar$$

$$(\lambda E - A)r = 0 \quad 或 \ (A - \lambda E)r = 0$$

结论： 当且仅当λ为A的特征值时，方程组（3.15）有形如 $x = re^{\lambda t}$的解；

r是A的特征值 λ 所对应的特征向量.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \qquad (3.15)$$ 其中$A=(a_{ij})_{n\times n}$

定理3. 6 设 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\cdots,\mathbf{r}_n$, 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则矩阵

$$\mathbf{X}(t)=(\mathbf{r}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\mathbf{r}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\mathbf{r}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t})$$

为常系数齐次线性微分方程组(3. 15)的一个基解矩阵.

$X(\mathrm{t})\mathrm{c}$为其通解, c为任意常列向量

---

1. $X(t)$的每一列的向量值函数是方程组的解;
2. $t=0$时, $X(t)$的列对应的常向量组线性无关,
   *Wronski*行列式不为0, 故$X(t)$的列函数组无关.

$\mathbf{X}(t)=(\mathbf{r}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\mathbf{r}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\mathbf{r}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t})$ 为(3. 15)的基解矩阵.

结论：齐次线性微分方程组的解在一点的线性相关性（无关性）和在区间上的线性相关性（无关性）等价.

定理3.2

齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)x(t)$ 必存在n个线性无关的解,

且其通解是这n个解的线性组合. 即任一解$x(t)$均可表示为:

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t),\ t\in(a,b).$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \qquad (3.15)$$

其中$A=(a_{ij})_{n\times n}$

定理3.6 设n阶矩阵A有 n 个线性无关的特征向量 $\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2,\cdots,\mathrm{r}_\mathrm{n}$, 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则矩阵 $\mathrm{X}(t)=(\mathrm{r}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\mathrm{r}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\mathrm{r}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t})$为常系数齐次线性微分方程组(3.15)的一个基解矩阵. $X(\mathrm{t})\mathrm{c}$为其通解,c为任意常列向量

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (3.15)$$ 其中$A = (a_{ij})_{n\times n}$

定理3.6 设 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$, 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则矩阵

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t})$$

为常系数齐次线性微分方程组(3.15)的一个基解矩阵.

$X(t)c$为其通解,c为任意常列向量

(1) A 有n 个线性无关的特征向量:

a) A 的 n 个特征值都是单根,即有n个不同的特征根

b) A有重特征值的情形 (几何重数=代数重数)

例3.3　求下列常系数线性齐次微分方程组的通解.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}5 & -28 & -18\\ -1 & 5 & 3\\ 3 & -16 & -10\end{pmatrix}x$$

解　特征方程为 $\det(A-\lambda E)=3\lambda(1-\lambda^2)=0,$

特征值为 $\lambda=0,\quad 1,\quad -1$

特征向量分别取为 $\mathbf{r}_1=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{r}_2=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{r}_3=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

基解矩阵为:

$$\mathbf{X}(t)=(\mathbf{r}_1\mathrm{e}^{0t},\mathbf{r}_2\mathrm{e}^{t},\mathbf{r}_3\mathrm{e}^{-t})=\begin{pmatrix}-2 & 2\mathrm{e}^{t} & 3\mathrm{e}^{-t}\\ -1 & -\mathrm{e}^{t} & 0\\ 1 & 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix},$$

例3.3　求下列常系数线性齐次微分方程组的通解.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}5 & -28 & -18\\ -1 & 5 & 3\\ 3 & -16 & -10\end{pmatrix}x$$

基解矩阵为:

$$\mathbf{X}(t)=(\mathbf{r}_1\,\mathrm{e}^{0t},\mathbf{r}_2\,\mathrm{e}^{t},\mathbf{r}_3\,\mathrm{e}^{-t})=\begin{pmatrix}-2 & 2\mathrm{e}^{t} & 3\mathrm{e}^{-t}\\ -1 & -\mathrm{e}^{t} & 0\\ 1 & 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix},$$

通解为:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}-2 & 2\mathrm{e}^{t} & 3\mathrm{e}^{-t}\\ -1 & -\mathrm{e}^{t} & 0\\ 1 & 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+C_3\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t},$$

例3.2 求常系数线性齐次微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}x$ 的通解.

解 $\det(A-\lambda E)=(\lambda+2)^2(4-\lambda)=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=-2 \quad \lambda_3=4$

$$\lambda=-2:\quad A+2E=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\quad r_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, r_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=4:\quad A-4E=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\quad r_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

$$X(t)=(r_1e^{-2t}\ r_2e^{-2t}\ r_3e^{4t})=\begin{pmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t}\\ e^{-2t} & 0 & e^{4t}\\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t}\end{pmatrix}.$$

通解为 $x=X(t)C$

(2) A 没有n 个线性无关的特征向量：

定理3.7设 λ_i是矩阵A的n_i重特征值, 则方程组(3.15)必存在n_i个形如

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_i t}\left(\mathbf{r}_0+\frac{t}{1!}\mathbf{r}_1+\frac{t^2}{2!}\mathbf{r}_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\mathbf{r}_{n_i-1}\right)$$

的线性无关的特解, 其中 r_0 是齐次线性方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})^{n_i}\mathbf{r}=0, \qquad (3.19)$$

的非零解, 而方程组(3.19)必有n_i个线性无关的解. 对于每一个解 $\mathbf{r}_0$, 相应的 $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_{n_i-1}$ 可由下列关系式逐次确定：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_0,\\
\mathbf{r}_2 &= (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{r}_{n_i-1} &= (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_{n_i-2}.
\end{aligned}$$

2阶方阵$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$的特征值均为$\lambda_1=\lambda_2=4$，但不相似，这两个矩阵不能分到同一类，只能$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$单独成一类，而$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$为另一类，

对任意可逆阵 M，$M^{-1}\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}M=M^{-1}4IM=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$与任何其它2阶矩阵都不相似阵，所以要将其单独算一类；

另一类里包括所有特征值为4,4的矩阵，在这些矩阵中，$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$是最接近对角化形 式，但又不完全是对角化形式，该形式称为若尔当标准型（Jordan form)，

在这一类里所有矩阵 都是相似的，矩阵都可以用$M^{-1}\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}M$来表示，这就为先前那些无法进行对角化的矩阵提 供了一种对角化方法，但这种对角化不是标准的对角化，而只是一种近似的，因为$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$不是严 格的对角阵.

可相似对角化的矩阵通过相似变换可以变成以特征值斜排列的对角矩阵，不可相似对角化的矩阵能通过相似变换变成以特征值斜排列的上三角或者下三角阵.

每个复矩阵都与一个若当形矩阵（Jordan）相似,这个若当形矩阵除去其中若当块的排列次序外是被唯一确定的,但是将一个已知矩阵化为若当形矩阵的变换矩阵却不是唯一的.

用初等变换法求矩阵的若当标准形.pdf

令λ_1为复矩阵A的 k 重特征根。证明:$(\lambda_1 E-A)^k$的秩为 n-k

定理3.7 设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征值，则方程组(3.15)必存在 n_i 个形如

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_i t}\left(\mathbf{r}_0+\frac{t}{1!}\mathbf{r}_1+\frac{t^2}{2!}\mathbf{r}_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\mathbf{r}_{n_i-1}\right)$$

的线性无关的特解，其中 r_0 是齐次线性方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})^{n_i}\mathbf{r}=0, \qquad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1&=(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_0,\\ \mathbf{r}_2&=(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{r}_{n_i-1}&=(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_{n_i-2}.\end{aligned}$$

定理3.8 设 n 阶矩阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$ 其相应的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots n_s,\quad (n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$ 则由定理3.6 与定理3.7所求出的方程组(3.15)的诸线性无关特解的全体，必构成方程组(3.15)的 n 个线性无关的特解，因而构成了方程组(3.15)的一个基本解组.

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})^{n_i}\mathbf{r}=0, \qquad (3.19)$$

例3. 5 求解微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}x$ $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

解 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0.\quad \lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=-1.$

$\lambda_1=2$, 由于$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$的秩为2，只有一个无关的特征向量

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^2=\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ -4 & 4 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$\mathbf{r}_1=(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_0,$

$\mathbf{r}_2=(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_1,$

…………

$\mathbf{r}_{n_i-1}=(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{r}_{n_i-2}.$

$$\mathbf{r}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_1^{(1)} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{r}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_1^{(2)} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{r}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}(\mathbf{r}_0^{(1)} + t\mathbf{r}_1^{(1)}) = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix},$$

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}(\mathbf{r}_0^{(2)} + t\mathbf{r}_1^{(2)}) = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\left(\mathbf{r}_0 + \frac{t}{1!}\mathbf{r}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\mathbf{r}_{n_i-1} \right)$$

例3.5 求解微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}x$ $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

解 $\det(A-\lambda E)=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0.\quad \lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=-1.$

$$\lambda_3=-1,\quad A+E=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{r}=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix},\quad x_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{r}=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}.$$

通解 $x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+C_3x_3(t)$

$$=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1+t\\-t\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\t\\1-t\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix},$$

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和相应的特征向量.

解：矩阵 A 的特征多项式为 $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4$

因此 $|\boldsymbol{\lambda E-A}|=\mathbf{0}$ 没有实数解，在实数域上无特征值，

但在复数域上，可得 A 的全部特征值为 $\lambda_1=-2i, \lambda_2=2i$

对于 $\lambda_1=-2i$，解齐次线性方程组 $(-2iI-A)X=0$

即求解 $\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_1=(1,-i)^T$

于是 A 的属于 $\lambda_1=-2i$ 的全部特征向量为：

$c_1\alpha_1=c_1(1,-i)^T$，这里 $c_1\neq 0$ 为任意常数。

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值和相应的特征向量.

对于$\lambda_2=2i$，解齐次线性方程组$(2iE-A)X=0$，

即求解 $\begin{pmatrix}2i & -2\\ 2 & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

得到一个基础解系 $\alpha_2=(1,i)^T$，

故 A 的属于$\lambda_2=2i$ 的全部特征向量为 $c_2\alpha_2=c_2(1,i)^T$，

这里 $c_2\neq 0$为任意常数。

实矩阵的特征值可能不是实数,这时特征向量可能也是复向量。

特征值与讨论的数域有关，如果限制在实数域上，矩阵的特征值可能不存在或者不够多。

(3) A有复特征值的情形

把线性无关的复向量值函数解变为线性无关的实向量值函数解.

若 $x_1(t)=\mathrm{u}(t)+i\mathrm{v}(t)$, 是常系数齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}x$ 的解，则

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t) \quad \text{即} \quad \dot{\mathrm{u}}(t)+\mathrm{i}\,\dot{\mathrm{v}}(t)\equiv \mathrm{A}(\mathrm{u}(t)+i\mathrm{v}(t)).$$

两端取共轭, A 为实矩阵, 得: $\dot{\mathrm{u}}(t)-\mathrm{i}\,\dot{\mathrm{v}}(t)\equiv \mathrm{A}(\mathrm{u}(t)-i\mathrm{v}(t)).$

故 $x_2(t)=\overline{x_1(t)}=\mathrm{u}(t)-i\mathrm{v}(t)$ 是方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}x$ 的解.

由于$x_1(t)$与$x_2(t)$线性无关，则

$$\mathrm{u}(t)=\frac{1}{2}(x_1(t)+x_2(t)),$$

$$\mathrm{v}(t)=\frac{1}{2i}(x_1(t)-x_2(t))$$ 也线性无关.

P319 A. 第7题

若 $x_1(t)=\mathbf{u}(t)+i\mathbf{v}(t)$ 是常系数齐次方程组 $\dfrac{\mathbf{d}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{d}\,\boldsymbol{t}}=\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 的解,

则 $\dot{x}_1(t)=Ax_1(t)$

即 $\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{i}\,\dot{\mathbf{v}}(t)\equiv\mathbf{A}(\mathbf{u}(t)+i\mathbf{v}(t))$.

$\therefore\ \dot{\mathbf{u}}(t)\equiv\mathbf{A}\mathbf{u}(t),\quad \dot{\mathbf{v}}(t)\equiv\mathbf{A}\mathbf{v}(t)$

故 $x_1(t)$的实部和虚部 都是齐次微分方程组的解.

(3) A有复特征值的情形

常系数线性齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$

$$x_1(t) = \mathrm{u}(t) + i\mathrm{v}(t), \quad x_2(t) = \mathrm{u}(t) - i\mathrm{v}(t),$$

若 $\left[x_1(t)\ x_2(t)\ \ x_3(t)\cdots x_n(t)\right]$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ 的基解矩阵，

$$\mathrm{u}(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)), \ \mathrm{v}(t) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t))$$

则 $\left[\mathrm{u}(t)\ \mathrm{v}(t)\ \ x_3(t)\cdots x_n(t)\right] = \left[x_1(t)\ x_2(t)\ \ x_3(t)\cdots x_n(t)\right]B$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & O \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & E_{n-2} \end{array}\right) \qquad |B| = -\frac{1}{2i} \neq 0, B\text{可逆}$$

则 $\left[\mathrm{u}(t)\ \mathrm{v}(t)\ \ x_3(t)\cdots x_n(t)\right]$ 也是基解矩阵.

P319 A. 第8题

例3.5 求解初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}x,\quad x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

解 $\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)=0.\ \lambda=1,\lambda=1\pm i.$

解齐次线性方程组：$(\lambda E-A)X=0$ $\qquad x_1(t)=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$

$$x_2(t)=\mathrm{e}^{(1+i)t}\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{t}(\cos t+\mathrm{i}\sin t)\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin t+i\cos t\\ \cos t+i\sin t\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix},$$

$$x_1(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad x_2(t)==\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+\mathrm{i}\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix},$$

$$\text{通解}:x(t)=C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}C_1\\-C_2\sin t+C_3\cos t\\C_2\cos t+C_3\sin t\end{pmatrix}.$$

由 $x(0)=(1,1,1)$ 知，$C_1=C_2=C_3=1.$

$$\text{特解为}:x(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\-\sin t+\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

3.2　常系数非齐次线性微分方程组的求解

回顾： $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t), \qquad (2.1)$$

非齐次通解： $$\boxed{x(t)=X(t)C+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.}$$

满足条件 $x(t_0)=x_0$ 的特解为：

$$\boxed{x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+f(t), \qquad f\in C((a,b))$$

$$X(0)=E$$

改造 非齐次通解： $$x(t)=X(t)C+\int_{t_0}^{t}X(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$x(t_0)=x_0$ $$x^{*}(t)=X(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}x + f(t), \quad f \in C((a,b))$$

定理3.9　设 $\mathrm{X}(t)$为对应的齐次方程组满足条件 $\mathrm{X}(0)=\mathrm{E}$ 的基解矩阵. 则常系数非齐次线性微分方程组的通解为:

$$x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

满足初值条件 $x(t_0) = x_0$的特解为

$$x(t) = \mathrm{X}(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad x_0 \neq 0$$

设$\mathrm{X}(t)$为对应的齐次方程组满足条件 $\mathrm{X}(0)=\mathrm{E}$ 的基解矩阵.

先证满足 $\mathrm{X}(0)=\mathrm{E}$ 的基解矩阵有如下两个性质:

$$X(t+\tau) = X(t)X(\tau); \qquad \mathrm{X}^{-1}(\tau) = X(-\tau).$$

设基解矩阵 X(*t*)满足 X(0)=E, $\forall \tau$,由基解阵性质知$\left|X(\tau)\right| \neq 0$

故$X(t)X(\tau)$也是基解矩阵，从而 $x_1 = X(t)X(\tau)x_0$

也是齐次方程组的解，且满足 $x_1(0) = X(\tau)x_0$

又，$X(t)x_0$ 是齐次方程组的解，$\dfrac{dX(t)x_0}{dt} = AX(t)x_0$

$$\frac{dX(t+\tau)x_0}{d(t+\tau)} = AX(t+\tau)x_0 \Rightarrow \frac{dX(t+\tau)x_0}{dt} = AX(t+\tau)x_0$$

故 $x_2 = X(t+\tau)x_0$ 是齐次方程组的解, 且 $x_2(0) = X(\tau)x_0$

$$x_1 \equiv x_2 \quad \Rightarrow X(t)X(\tau) = X(t+\tau)$$

$$t = -\tau \Rightarrow X(-\tau)X(\tau) = X(0) = E \Rightarrow X^{-1}(\tau) = X(-\tau)$$

$$X(t+\tau)=X(t)X(\tau); \qquad X^{-1}(\tau)=X(-\tau).$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x+f(t), \qquad (2.1)$$

非齐次通解：$x(t)=\mathrm{X}(t)\mathrm{C}+\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$

改写为 $$\boxed{x(t)=\mathrm{X}(t)\mathrm{C}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,}$$

其中$\mathrm{X}(t)$是满足 $\mathrm{X}(0)=\mathrm{E}$ 的基解矩阵.

满足条件 $\mathrm{x}(t_0)=\mathrm{x}_0$ 的特解：

$$x(t)=\mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_0)x_0+\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

改写为 $$\boxed{x^*(t)=\mathrm{X}(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,}$$

$\mathrm{X}(t)$是满足 $\mathrm{X}(0)=\mathrm{E}$ 的基解矩阵.

例3.6 求微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}$ 的通解.