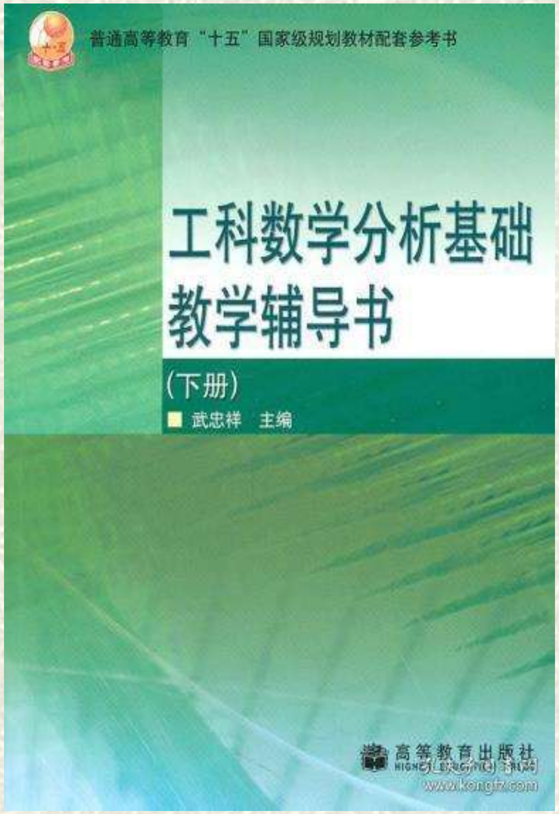
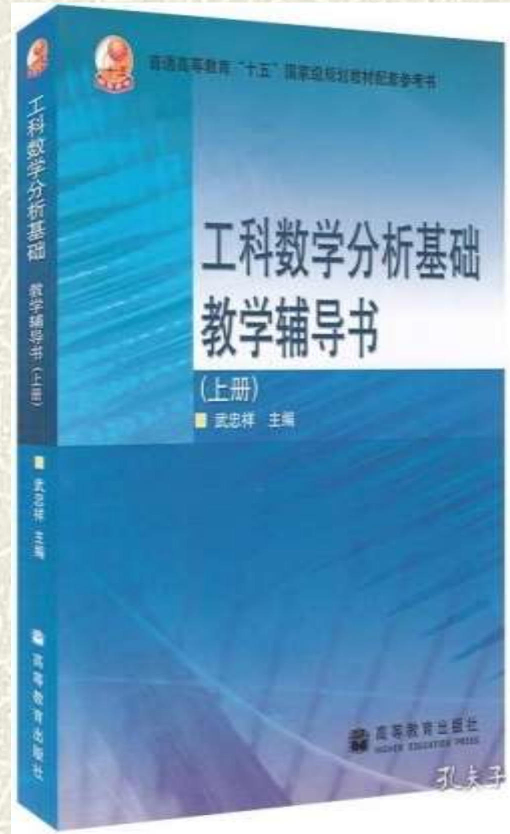

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书
工科数学分析基础
教学辅导书
(下册)
武忠祥 主编
高等教育出版社


普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书
工科数学分析基础
教学辅导书
(上册)
武忠祥 主编
高等教育出版社

解的存在唯一性定理

定理 假设$A(t)$是$n\times n$阶矩阵函数，$f(t)$是n维列向量．它们都在区间$a\le t\le b$上连续．则对$t_0\in[a,b]$及n维常向量$x_0=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})^T$，

初值问题
$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\qquad(3.4)$$

在区间$a\le t\le b$上存在唯一解$x=\varphi(t)$.

齐次线性微分方程组解的结构

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=A(t)x(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

简单性质：

1. $x(t)\equiv 0$ 是方程组(3. 3)的解，称为平凡解或零解；

2. 若方程组(3. 3)的解 $x(t)$满足初值条件 $x(t_0)=0$,则 $x(t)\equiv 0.$

在 $a\le t\le b$ 上恒等于零的向量值函数 也是(3. 3)的满足初始条件 $x(t_0)=0$的解.

3. 若 $x_i(t)(i=1,\cdots,n,t\in(a,b))$ 都是(3. 3)的解，则

$\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)(t\in(a,b))$ 也是(3. 3)的解. （叠加原理）

方程组（3.3）的所有解构成一个线性空间，那么这个空间的维数是多少？于是有类似的概念：向量值函数组线性相关（无关）性，以及向量值函数组的伏朗斯基行列式。

线性相关 / 线性无关 /

定义在区间(a,b)上的m个n维向量值函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$

若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，**使等式**

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)\equiv\vec{0},\quad t\in(a,b)\text{恒成立；}$$

则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$ **在**(a,b)**内线性相关，**

否则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$**在**$(a,b)$**内线性无关，**

或线性独立.

例1 证明

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ 1\\ t\end{pmatrix},\ x_2(t)=\begin{pmatrix}-\sin^2 t+1\\ 1\\ t\end{pmatrix}$$

在任何区间I上都是线性相关的.

证明: 取 $c_1=1, c_2=-1$ 则

$$c_1\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ 1\\ t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\sin^2 t+1\\ 1\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad t\in I$$

故 $x_1(t), x_2(t)$ 在I上是线性相关的.

例2 证明: $x_1(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ $x_2(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_3(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

证明: 要使 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+c_3x_3(t)$

$$=c_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}\equiv 0 \quad t\in R$$

成立,显然只需下面方程成立:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\infty<t<+\infty$$

成立,显然只需下面方程成立

$$\begin{pmatrix} e^{t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -\infty < t < +\infty$$

因为 $\begin{vmatrix} e^{t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2e^{4t} < 0$

所以 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

所以有 x_1, x_2, x_3 线性无关.

定理3.1 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t), t \in (a,b)$是$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)x(t)$的$m$个解.

则这m个解在(a,b)线性相关$\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\exists t_0 \in (a,b),\text{使常向量组}\\ x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_m(t_0)\text{线性相关}\end{array}}$.

$\Rightarrow$ 必要性(易).

$\Leftarrow$ 充分性. $\exists t_0 \in (a,b)$,使常向量组 $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_m(t_0)$线性相关.

即$\exists C_i$不全为零，使$C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \cdots + C_m x_m(t_0) = 0.$

令 $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_m x_m(t),\ t \in (a,b),$

则 $x(t)$也是$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)x(t)$的解, 它满足初值条件 $x(t_0)=0$,

若方程组(3. 3)的解 $x(t)$满足初值条件$x(t_0) = 0$,则 $x(t) \equiv 0.$

$\therefore x(t)=0$, 即$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$在$(a,b)$线性相关.

问题？：由定义可知，向量值函数的线性相关与否是对区间内的所有点来说的，会不会在 t_1 处所对应的常向量组线性相关，而在 t_2 处所对应的常向量组线性无关？

但 $t=1$ or -1时，向量$\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$线性相关！

$\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$在$(-\infty,+\infty)\setminus\{\pm 1\}$内线性无关

若$\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t), t\in(a,b)$是$\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$的任意$m$个解.

则这m个解在(a,b)线性相关$\Leftrightarrow \exists t_0\in(a,b)$,使常向量组

$\mathbf{x}_1(t_0),\mathbf{x}_2(t_0),\cdots,\mathbf{x}_m(t_0)$线性相关.

如何解释上述特例的矛盾？

$\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$在$(-\infty,+\infty)$内不可能是某$\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{A}(t)x(t)$的解！

若是，则有：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$

$a_{11}(t)t + a_{12}(t) = 1$

$a_{21}(t)t + a_{22}(t) = 0$

$a_{11}(t) + a_{12}(t)t = 0$

$a_{21}(t) + a_{22}(t)t = 1$

$-a_{12}(t)t^2 + a_{12}(t) = 1$

$a_{21}(t) - a_{21}(t)t^2 = 1$

$a_{12}(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$

$a_{21}(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$

$\therefore a_{11}(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$

$\therefore a_{22}(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$

$A(t)$在$t=1,-1$处不连续

线性微分方程组的**一般形式：**

$$\frac{\mathrm{d}\,x_i(t)}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + f_i(t), \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

其中 $a_{ij}(t)$ 与 $f_i(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 在 (a,b) 内连续.

结论： 齐次线性微分方程组的解在一点的线性相关性（无关性）和在区间上的线性相关性（无关性）等价.

定理3.2

齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=A(t)x(t)$ 必存在n个线性无关的解，且其通解是这n个解的线性组合. 即任一解$x(t)$均可表示为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t),\ \ t\in(a,b).$$

证: 取 $x_1(t_0)=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, x_2(t_0)=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,x_n(t_0)=e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$

由解的存在唯一性定理知，满足此条件的n个解$x_i(t)$必存在,且在t_0线性无关，故它们在(a,b)线性无关.

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3)$$

证明　设 $x_1(t), x_2(t)\cdots x_n(t)$是方程组（**3.3**）的 ***n***个线性无关解，则方程组（**3.3**）的任一解 $x(t)$ 均可表示为 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 的线性组合.

设 $x(t)$ 是方程组（**3.3**）任一解，并满足 $x(t_0)=x_0$

因 $x_1(t), x_2(t)\cdots x_n(t)$ 是***n***个线性无关解，

故 $x_1(t_0), x_2(t_0),\cdots, x_n(t_0)$ 线性无关，即它们构成***n***维线性空间的基，故对向量 $x(t_0)$ 必有:

$$x(t_0)=c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)$$

即存在唯一确定的一组常数 $c_1, c_2, \cdots c_n$ 满足

$$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0)$$

考虑 $\bar{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$

由解的叠加原理知它为方程组(3.3)的解，并满足

$\bar{x}(t_0) = x_0$,因此由解的唯一性，有 $\bar{x}(t) = x(t)$

即 $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$

初值问题 $$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

在区间 $a \le t \le b$ 上存在唯一解 $x = \varphi(t)$.

朗斯基(Wronski)判别准则： 设有n个n维向量值函数

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \cdots x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

称 $W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix},$

为这些向量值函数组的**朗斯基行列式**.

波兰数学家Wronskian
约瑟夫·侯恩·朗斯基

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \qquad (3.3)$$

定理3.3 方程组(3.3)的解组 $x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)$ 在 (a,b)

线性无关的充要条件是:

$\exists t_0 \in [a,b]$, 使这n个解的 **Wronski** 行列式在t_0处的值$W(t_0) \neq 0$.

利用性质 齐次线性微分方程组的解在一点的线性相关性(无关性)和在区间上的线性相关性(无关性)等价.

n 阶行列式不等于0 $\Leftarrow==\Rightarrow$ 其列向量组线性无关

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=\mathbf{A}(t)x(t), \qquad (3.3)$$

定理3.3 齐次线性方程组（3.3）的n个解在(a,b)线性无关

$$\Leftrightarrow \exists t_0 \in (a,b), \text{使得} \det W(t_0) \neq 0$$

定理3.3。 方程组(3.3)的解组 $x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)$ 在 (a,b)

线性相关，当且仅当它们的朗斯基行列式

$$W(t) \equiv 0, t \in (a,b)$$

推论 方程组（3.3）的任一解组 $x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t)$

的 $W(t)$ 在 $[a,b]$ 上或恒不为零，或恒为零.

基解矩阵及其判别法

1)基本解组:

齐次线性微分方程组的任意 n 个线性无关的特解:

$x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 称为一个基本解组.

2)基解矩阵

任意 n 个线性无关的解的分量为列得到的矩阵

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{2,1}(t) & \cdots & x_{n,1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,n}(t) & x_{2,n}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}=(\mathbf{x}_1(t)\cdots\mathbf{x}_n(t))$$

齐次微分方程的通解:

$x(t)=\mathbf{X}(t)c,\qquad t\in(a,b)$, c是任意常数组成的列向量

2. 基解矩阵的性质

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = A(t)x(t), \qquad (3.3)$$

1) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{X}}{\mathrm{d}\,t} = A(t)\mathbf{X};$ 即基解矩阵满足方程（3.3），

$\mathbf{X}$的每一列均为解(向量值函数),代入即知

2) 若 $\mathbf{X}(t)$是基解矩阵，$\mathbf{B}$是任一 n阶非奇异矩阵，则

$\mathbf{X}(t)B$ 也是一个基解矩阵；

证明$\mathbf{X}(t)B$是解且无关即可

3) 若 $\mathbf{X}(t)$ 与 $\mathbf{X}^*(t)$ 是两个基解矩阵，则存在一 n 阶非奇异矩阵 $\mathbf{B}$, 使 $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t)\mathbf{B}, \quad t \in (a,b)$

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t) \cdots x_n(t)) \qquad x_i(t) = \mathbf{X}^*(t)b_i$$

$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t)(b_1, \cdots, b_n) = \mathbf{X}^*(t)B$ 两边取行列式即知B可逆

1. 若$x(t)$是齐次线性微分方程组$\dot{x}=A(t)x, x\in \mathrm{R}^n$ 的任一基解矩阵,

B是任一n阶非奇异常数矩阵,

证明: $x(t)B$ 也是此方程组的一个基解矩阵.

证: 令$\varphi(t)=\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{B}$, 则$\varphi'(t)=\boldsymbol{x}'(t)\boldsymbol{B}$,

因为$\boldsymbol{x}(t)$为一基解矩阵, $\therefore \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}'(t)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{B}=A(t)\varphi(t),$$ 故$\varphi(t)$为一解.

又$\det(\varphi(t))=\det(\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{B}$为非奇异矩阵, $\boldsymbol{x}(t)$为基解矩阵.

所以$\det(\boldsymbol{\varphi}(t))=\det \boldsymbol{x}(t)\cdot\det \boldsymbol{B}\neq 0$,

从而$\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组的一个基解矩阵.

练习 验证 $\phi(t)=\begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$ 是方程组 $x'=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}x$ 的基解矩阵, 并写出其通解.

解: 首先验证 $\phi(t)$是基解矩阵, 令 $\varphi_1(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的第一列,

因为 $\varphi_1'(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

故 $\varphi_1'(t)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\varphi_1(t).$

因此, $\varphi_1(t)$ 是方程的一个解. 令 $\varphi_2(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的第二列,

同理,可知 $\varphi_2(t)$ 也是方程 的解, 而 $\mathbf{det}\,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})=2\boldsymbol{e}^{4t}\neq 0,$

因此 $\phi(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$是方程组的基解矩阵

练习 验证 $\phi(t)=\begin{pmatrix} e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ 是方程组 $x'=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}x$ 的基解矩阵, 并写出其通解.

因此 $\phi(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$是方程组的基解矩阵

所以其通解为:

$$x=\phi(t)c=\begin{pmatrix} e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^{t}+c_2e^{3t} \\ -c_1e^{t}+c_2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

非齐次线性微分方程组解的结构

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \qquad (3.3)$$

解的一些简单性质:

性质1 如果 $\varphi(t)$是 **(3.2)** 的解, $\psi(t)$是对应的齐次线性方程组 **(3.3)** 的解, 则 $\varphi(t)+\psi(t)$是 **(3.2)** 的解.

性质2 如果 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是 **(3.2)** 的两个解, 则 $\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$是 **(3.3)** 的解.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{F}(t), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \qquad (3.3)$$

性质3 设 $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_m(t)$, 且 $x_j(t)$ 是方程组 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{F}_j(t)$ 的解, 则 $x = \sum_{j=1}^{m} x_j(t)$ 是 (3.2) 的解.

非齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)x(t) + f(t), \qquad (3.2)$

定理3.4（非齐次线性微分方程组解的结构）

非齐次线性微分方程组的通解是：

$$\boxed{x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + x^{*}(t), \qquad t \in (a,b),}$$

$X(t)$是齐次方程组(3.3)的基解矩阵, $x^{*}(t)$是(3.2)的特解.

分析：（1）先证明 $x(t)$是非齐次的解.

即证 $\dfrac{\mathrm{d}(X(t)C + x^{*}(t))}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)(X(t)C + x^{*}(t)) + f(t)$

（2）再证 $\boxed{\mathrm{X}(t)\mathrm{C} + x^{*}(t)}$ 能表示非齐次的全部的解.

即证对于任意的非齐次微分方程 的解 $x(t)$

可以找到某个常向量 C,使得 $x(t) = X(t)C + x^{*}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)x(t) + f(t), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)x(t), \qquad (3.3)$$

证明: 易知, $x(t) - x^*(t)$ 是方程组(3.3) 的解,

故 $x(t) - x^*(t) = X(t)c.$

由此得 $x(t) = X(t)c + x^*(t).$

因此,求(3.2)的通解,只需求出对应的齐次线性微分方程组(3.3)的基本解组和(3.2)的任一特解即可.

下面用常数变易法求解方程组(3.2)的一个特解.

定理3.5 设$X(t)(t\in(a,b))$是齐次线性微分方程组(3.3)的一个基解矩阵，则 $x^*(t)=X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in(a,b)$

是非齐次线性微分方程组满足条件 $x^*(t_0)=0$的特解.

非齐次线性微分方程组(3.2)的通解为:

$$x(t)=X(t)C+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

满足条件 $x(t_0)=x_0$ 的特解为:

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

证明: 设特解为$x^*(t)=X(t)C(t)$代入 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t)$

$$\dot{X}(t)C(t)+X(t)\dot{C}(t)=A(t)X(t)C(t)+f(t),$$

$$\because \dot{X}(t)=A(t)X(t)$$

代入可得: $X(t)\dot{C}(t)=f(t)$ $\qquad$ $\dot{C}(t)=X^{-1}(t)f(t)$

$$\dot{C}(t) = X^{-1}(t)f(t)$$

$$C(t) = \int X^{-1}(t)f(t)dt = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + C_1$$

$$x^*(t) = X(t)C(t) = X(t)\left[\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + C_1\right]$$

$x^*(t_0) = 0$ $\quad 0 = X(t_0)C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

非齐次微分方程组(3.2)通解: $\boxed{x(t) = X(t)C + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.}$

若$x(t_0) = x_0$, 代入上述通解, $x_0 = X(t_0)C \Rightarrow C = X^{-1}(t_0)x_0$

故非齐次微分方程组满足条件 $x(t_0) = x_0$的特解为:

$$\boxed{x^*(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.}$$

例 验证微分方程组 $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

的通解为 $$x = C_1\begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

1.是解;
2.无关。 t=0时，wronski行列式不为0

例 求微分方程组 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

满足 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ 的特解.

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

特解: $x^*(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_0)x_0 + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau.$

特解: $x^*(t)=\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)x_0+\mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$

$$\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-\tau}\\0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\0\end{pmatrix}$$

$$X(t)=\begin{pmatrix}e^t\cos t & -\sin t\\ e^t\sin t & \cos t\end{pmatrix}\qquad X^{-1}(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

$$x^*(t)=\begin{pmatrix}e^t\cos t & -\sin t\\ e^t\sin t & \cos t\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}\left(e^t-1\right)\cos t-\sin t\\ \left(e^t-1\right)\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

通解 $x(t)=\mathbf{X}(t)\mathbf{C}+\mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$