【知识点】各种类型函数的求导运算.

【题型变化】

(1)求分段函数的导数.
(2)求初等函数的导数.
(3)求隐函数的一阶、二阶导数.
(4) 求参数方程所确定的函数的导数.
(5)求幂指函数与连乘积形式函数的导数.
(6) 求简单函数的高阶导数.
(7) 求积分上限函数的导数.

1. 设函数$f(x)$在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x(x^2-1)$，且 $f(x+1)=af(x)$，试确定常数 a 的值,使$f(x)$在点$x=0$处可导,并求出此导数.

2. 已知 $y=f\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right), f'(x)=\ln(1-x)$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

3. 设函数 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{t}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xt}\ (t\neq 0)$.

(I) 求 $f^{(n)}(t)$;

(II) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(t)}{nf(t)}$

4.设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}, g(x)=\begin{cases} x^2\arctan\frac{1}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0, \\ \ln(1+x^2), & x>0 \end{cases}$ 求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))]\right|_{x=0}$.

5. 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^y$ 所确定，设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}, \left.\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

6.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 所确定 .

(I) 求曲线 $y=y(x)$ 在点 (1,0) 处的切线方程;

(II)求曲线 $y=y(x)$ 在点 (1,0) 处的曲率（曲率相关内容已移到下册）

【知识点】与微分中值定理相关的问题.

【题型变化】(1)与微分中值定值相关的极限计算问题.
(2) 利用罗尔定理证明 $f'(\xi)=0$ 或 $f''(\xi)=0$.
(3)利用拉格朗日中值定理、柯西中值定理以及泰勒中值定理证明与 ξ 相关的等式或不等式.
(4) 关于两个中值 ξ,η 相关的证明问题.

7. 设 ξ 是函数 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值, 其中 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$, 求极限 $\lim_{x\to 0}\theta^2$.

8. 求极限 $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{\mathrm{e}}{n}-\arctan\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=f(1)$, 且当 $x\in(0,1)$ 时, $|f''(x)|\leqslant M$ (M 为大于零的常数). 证明: 对任意 $x\in(0,1), |f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}M$.

10. 设函数 $f(x)$ 的一阶泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2(0<\theta<1)$$

如果 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 且 $f'''(a)\neq 0$. 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$.

11. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$ 确定, 求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

12. 顶角为 $\frac{\pi}{2}$ 的正圆雉形容(如图所示)内盛有 $b\ \mathrm{cm}^3$ 水, 从开始 $(t=0)$ 到 t 秒时灌人容器中的水为 $at^2\ \mathrm{cm}^3(a,b$ 均为正常数), 问何时水平面上升 速率最快?