

折叠式桁架机构展收运动动力学建模和分析

缪炳祺* 曲广吉** 杨雷** 刘银虎*

(* 浙江工业大学机电学院, 杭州 310014) (** 中国空间技术研究院, 北京 100086)

摘要 针对一类折叠式桁架结构系统, 导出了其展收运动动力学模型, 提供了求解相应的非线性微分——代数方程组的方法。桁架系统展收运动仿真算例表明, 由于所建立的动力学模型规模较小, 所提供的求解方法不需迭代, 因而数字仿真所需的计算时间很少, 并可避免采用通用的商用动力学仿真软件出现的求解困难。

关键词 多刚体系统 展开机构 动力学方程 仿真 航天器

1 引言

现代航天器所带的大型太阳能电池阵和抛物面天线常用折叠式机构进行展开和收拢。折叠式桁架是常用的一种折叠式机构。带有太阳能电池板的已展开的一类折叠式桁架如图1所示。它由多节串接构成, 每节由三角框架、立杆和拉杆组成, 如图2所示。原则上讲, 折叠式桁架的展收运动可利用现有的商用动力学仿真软件(如ADAMS)进行分析。但这类软件由于其通用性考虑, 使所建立的非线性动力学模型的规模往往十分庞大, 仿真所需的计算时间很长, 且常导致很大的计算困难。如文献[1]采用ADAMS软件分析了图1所示的折叠式桁架, 当桁架节数为11节时, 计算需3h, 桁架节数为15节时, 需8h, 甚至当桁架节数较多时, 仿真计算失败。

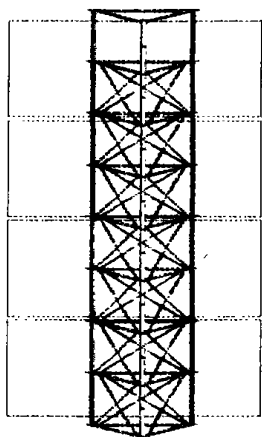


图1 带有太阳能电池板的折叠式桁架

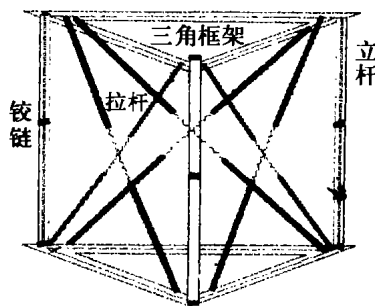


图2 折叠式桁架一节示意图

本文所讨论的折叠式桁架系统是一典型的多刚体系统, 可采用多刚体动力学的建模方法建立其动力学模型^[2]。对于图1所示的折叠式桁架, 尽管当节数较多时参与运动的部件很多, 但用于表示展收

运动的独立广义坐标数并不多, 因而可采用基于独立广义坐标的动力学建模方法, 如 Lagrange 方程方法、虚功原理等, 建立其专用的动力学模型, 从而使所建立的动力学模型的规模较小, 提高仿真计算效率, 避免采用通用的多刚体动力学模型可能存在的计算困难。

2 折叠式桁架展收运动方程

折叠式桁架机构展开(收拢)时为逐节展开(收拢), 每节展开(收拢)时也带动其余各节运动。图3表示某节展开时的桁架状态, 其中上部两节已展开(折叠的立杆已伸直), 其下的一节正在展开, 并带动其余各节运动。

为采用 Lagrange 方程导出折叠式桁架展收运动的动力学方程, 做以下假设: 1) 呈三角分布的三个丝杠为同步转动, 带动桁架系统中各三角框架沿丝杠轴向移动, 而不会发生侧倾运动; 2) 忽略各部件的变形, 将折叠式桁架作为多刚体系统处理; 3) 由于拉杆的质量远小于立杆, 可忽略拉杆的质量; 4) 忽略各处摩擦力, 且由于在航天器轨道上展收, 可忽略重力。

取坐标轴如图3中所示。取各三角框架沿丝杠轴向(y 方向)的位移 y_1, y_2, \dots, y_{n-j} 为广义坐标。下标表示从底部收藏箱开始计算的各节桁架的序号, n 为桁架总节数, j 为已展开的桁架节数。设上(下)立杆的长度为 l_s , 质量为 m_s , 每个三角框架的质量为 m_f , J_c 为下(上)立杆绕其质心的转动惯量。经推导, 用广义坐标表示正在展收的第 i 节桁架的动能为

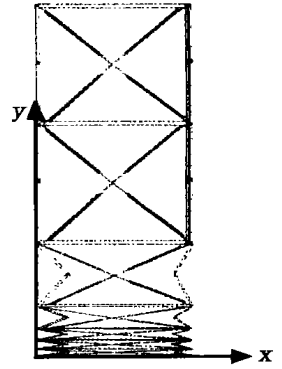


图3 展收中的系统示意图

$$T_i = \frac{3}{32} m_s \left[\frac{2}{4l_s^2 - (y_i - y_{i-1})^2} (y_i - y_{i-1})^2 (\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1})^2 + (\dot{y}_i + 3\dot{y}_{i-1})^2 + (3\dot{y}_i + \dot{y}_{i-1})^2 \right] + 3J_c \frac{(\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1})^2}{4l_s^2 - (y_i - y_{i-1})^2} + \frac{1}{2} m_f \dot{y}_i^2 \quad (1)$$

设 l_p 为每块板的长度, n_p 为板的块数, m_p 为每块板的质量。考虑到板的运动由第 $n-j$ 节框架的移动引起, 经推导, 可得第 k 节的动能为

$$T_{pk} = \frac{m_p}{n_p^2} \left\{ \frac{[y_{n-j} + 2(j+1)l_s]^2}{4l_p^2 n_p^2 - 4[y_{n-j} + 2(j+1)l_s]^2} + \frac{(8k-6)^2 + (8k-2)^2}{32} \right\} \dot{y}_{n-j}^2 + \frac{m_p l_p^2}{3[4l_p^2 n_p^2 - 4[y_{n-j} + 2(j+1)l_s]^2]} \dot{y}_{n-j}^2 \quad (2)$$

桁架系统的总动能为

$$T = \sum_{i=1}^{n-j} T_i + \sum_{k=1}^{n/2} T_{pk} + \frac{1}{2} [6(j+1)m_s + (j+1)m_f] \dot{y}_{n-j}^2 \quad (3)$$

系统的势能只考虑由拉杆弹簧引起的势能。设 b_f 为三角框的边长, l_0 为弹簧未变形时拉杆的长度, 系统势能为

$$U = 3K \left[\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2} - l_0 \right]^2, \quad l \geq l_0 \\ U = 0, \quad l \leq l_0 \quad (4)$$

式中 K 为拉杆弹簧的刚度; $l = \sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2}$

广义力可由计算作用于系统上的主动力做的虚功确定。桁架展收时, 作用于系统上的主动力为使丝杠转动的驱动力偶, 设力偶的矩为 M_d , 丝杠的螺距为 h , φ 为丝杠转角, 则此力偶在系统虚位移中做的虚功为

$$\delta W = M_d \delta \varphi = M_d \frac{2\pi}{h} \delta y_{n-j}$$

由此可知, 相应于各广义坐标的广义力为

$$Q_i = \frac{2\pi}{h} M_d, \quad i = n - j$$

$$Q_i = 0, \quad i \neq n - j$$

系统的 Lagrange 函数为 $L = T - U$, 将它代入 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = Q_i, \quad i = l, \dots, n - j \quad (5)$$

经推导, 得折叠式桁架系统的运动微分方程为

$$a_{i,i+1} \ddot{y}_{i+1} + a_{i,i} \ddot{y}_i + a_{i,i-1} \ddot{y}_{i-1} = Q_i, \quad i = l, \dots, n - j \quad (6)$$

式中

$$Q_i = c_{i1} + c_{i2} + f_{ic} + f_{id} + f_{ip} \quad (7)$$

$$a_{i,i+1} = - \frac{\frac{3}{8} m_s (y_{i+1} - y_i)^2 + 6J_c}{4l_s^2 - (y_{i+1} - y_i)^2} + \frac{9}{8} m_s, \quad i \neq n - j \quad (8)$$

$$a_{i,i+1} = 0, \quad i = n - j$$

$$a_{i,i} = \frac{\frac{3}{8} m_s (y_{i+1} - y_i)^2 + 6J_c}{4l_s^2 - (y_{i+1} - y_i)^2} + \frac{\frac{3}{8} m_s (y_i - y_{i-1})^2 + 6J_c}{4l_s^2 - (y_i - y_{i-1})^2} + \frac{30}{8} m_s + m_f, \quad i \neq n - j \quad (9)$$

式(9)中当 $i = 1$ 时, 取 $y_{i-1} = 0$.

$$a_{i,i} = \frac{\frac{3}{8} m_s (y_i - y_{i-1})^2 + 6J_c}{4l_s^2 - (y_i - y_{i-1})^2} + \frac{m_p \left\{ \frac{1}{2n_p} [y_i + 2(j+1)l_s]^2 + \frac{n_p l_p^2}{6} \right\}}{2 \{ l_p^2 n_p^2 - [y_i + 2(j+1)l_s]^2 \}} + \frac{m_p}{16n_p^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n_p/2} [(8k-6)^2 + (8k-2)^2] \right\} + \frac{15}{8} m_s + m_f + (j+1)(6m_s + m_f), \quad i = n - j \quad (10)$$

$$a_{i,i-1} = - \frac{\frac{3}{8} m_s (y_i - y_{i-1})^2 + 6J_c}{4l_s^2 - (y_i - y_{i-1})^2} + \frac{9}{8} m_s, \quad i \neq 1 \quad (11)$$

$$a_{i,i-1} = 0, \quad i = 1$$

$$c_{i1} = - \frac{2m_s l_s^2}{[4l_s^2 - (y_i - y_{i-1})^2]^2} (y_i - y_{i-1}) (\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1})^2 \quad (12)$$

式中 当 $i = 1$ 时, 取 $y_{i-1} = 0, \dot{y}_{i-1} = 0$

$$c_{i2} = \frac{2m_s l_s^2}{[4l_s^2 - (y_{i+1} - y_i)^2]^2} (y_{i+1} - y_i) (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i)^2, \quad i \neq n - j \quad (13)$$

$$c_{i2} = 0, \quad i = n - j$$

当 $\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2} - l_0 \geq 0$ 时有

$$\left. \begin{aligned} f_{ic} &= 6k(\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2} - l_0) \frac{y_{n-j} - y_{n-j-1}}{\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2}}, \quad i = n - j - l \\ f_{ic} &= -6k(\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2} - l_0) \frac{y_{n-j} - y_{n-j-1}}{\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2}}, \quad i = n - j \\ f_{ic} &= 0, \quad i \neq n - j \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当 $\sqrt{b_f^2 + (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2} - l_0 \leq 0$, $f_{ic} = 0$

$$\left. \begin{aligned} f_{id} &= \frac{2\pi}{h} M_d, \quad i = n - j \\ f_{id} &= 0, \quad i \neq n - j \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ip} &= -\frac{m_p[y_{n-j} + 2(j+1)l_s]n_p l_p^2}{3\{l_p^2 n_p^2 - [y_{n-j} + 2(j+1)l_s]^2\}^2} \ddot{y}_{n-j}, \quad i = n-j \\ f_{ip} &= 0, \quad i \neq n-j \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

为保证折叠式桁架展收, 当展收到一定程度时, 桁架上下立杆间的锁定销应沿具有某个倾斜角的导轨运动^[1]。锁定销进入导轨后, 应满足导轨相应的约束方程。设 (x_l, y_l) 为导轨下端点的坐标, β 为导轨的倾斜角, (x, y) 为锁定销的坐标, 则锁定销进入导轨时的约束方程为

$$f = y - y_l + \cot \beta \cdot (x - x_l) = 0 \quad (17)$$

式中 锁定销坐标 (x, y) 可由式(18)算得:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \sqrt{4l_s^2 - (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2} \\ y &= \frac{1}{2}(y_{n-j} + y_{n-j-1}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

可通过在 Lagrange 方程中引入乘子项来导出受约束时的系统运动微分方程。此时 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = Q_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n-j$$

式中 λ 称为 Lagrange 乘子。系统方程应由上面的约束方程和以下微分方程组成:

$$a_{i, i-1} \ddot{y}_{i-1} + a_{i, i} \ddot{y}_i + a_{i, i+1} \ddot{y}_{i+1} - \lambda c_{i3} = c_{i1} + c_{i2} + f_{ic} + f_{id} + f_{ip}, \quad i = 1, \dots, n-j \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad c_{i3} &= \frac{\partial f}{\partial y_{n-j}} = \frac{1}{2} + \frac{\cot \beta (y_{n-j} - y_{n-j-1})}{2 \sqrt{4l_s^2 - (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2}}, \quad i = n-j-1 \\ c_{i3} &= \frac{\partial f}{\partial y_{n-j-1}} = \frac{1}{2} - \frac{\cot \beta (y_{n-j} - y_{n-j-1})}{2 \sqrt{4l_s^2 - (y_{n-j} - y_{n-j-1})^2}}, \quad i = n-j \\ c_{i3} &= 0, \quad i \neq n-j-1, \quad i \neq n-j \end{aligned}$$

其它各项的计算公式同前。

因此, 存在约束时折叠式桁架展收运动动力学方程为一组非线性微分——代数方程, 解此方程组就可模拟折叠式桁架展收运动。

折叠式桁架展收时, 收拢或展开速度是给定的, 即顶框速度是某个指定的常量 v_{dep} , 于是取

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n-j} &= v_{dep} \\ \ddot{y}_{n-j} &= 0 \\ y_{n-j}(t) &= y_{n-j}(0) + v_{dep} t \end{aligned}$$

并取系统自由度数为 $n-j-1$, 相应的广义坐标为 $y_1, y_2, \dots, y_{n-j-1}$, 即只需保留方程组(6)或式(19)中前 $n-j-1$ 个方程。

3 动力学方程求解

方程(6)为一组非线性微分方程, 可采用 Runge-Kutta 方法数值求解。由于方程(6)并没给出关于计算广义坐标二阶导数 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 的显式, 因而通常需要迭代求解。但考虑到其是广义坐标二阶导数 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 的线性表达式, 可把它看成是关于 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 的线性代数方程, 解此代数方程得到 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 的显式, 然后由 Runge-Kutta 积分得到展收运动解, 从而可避免迭代求解。

存在约束时折叠式桁架展收运动动力学方程为一组非线性微分——代数方程, 其求解有多种方

法^[3,4,5]，但都比较复杂。考虑到动力学方程为广义坐标二阶导数 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 的显式。为此，对约束方程二次求导，得

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{y_{n-j}-y_{n-j-1}}{4x}\right)\ddot{y}_{n-j}+\left(\frac{1}{2}+\frac{y_{n-j}-y_{n-j-1}}{4x}\right)\ddot{y}_{n-j-1}-\cot \beta\left[\frac{1}{16 x^3}\left(y_{n-j}-y_{n-j-1}\right)^2+\frac{1}{4 x}\right]\left(\dot{y}_{n-j}-\dot{y}_{n-j-1}\right)^2=0$$

或写成

$$a_{n-j+1, n-j-1} \ddot{y}_{n-j-1}+a_{n-j+1, n-j} \ddot{y}_{n-j}=F_{q, n-j+1} \tag{20}$$

式中

$$\begin{aligned} a_{n-j+1, n-j-1} &= \frac{1}{2}+\frac{y_{n-j}-y_{n-j-1}}{4 x} \\ a_{n-j+1, n-j} &= \frac{1}{2}-\frac{y_{n-j}-y_{n-j-1}}{4 x} \\ F_{q, n-j+1} &= \cot \beta\left[\frac{1}{16 x^3}\left(y_{n-j}-y_{n-j-1}\right)^2+\frac{1}{4 x}\right]\left(\dot{y}_{n-j}-\dot{y}_{n-j-1}\right)^2 \end{aligned}$$

方程(19)和(20)一起构成关于广义坐标二阶导数 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 和 Lagrange 乘子 λ 的 $n-j+1$ 个线性代数方程。解此代数方程组，就可得到广义坐标二阶导数 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{n-j}$ 和 Lagrange 乘子 λ 的显式，从而可进一步通过 Runge-Kutta 积分得到展收运动解。由于 $\lambda \frac{\partial f}{\partial y_i}$ 为广义约束力，由其可得到导轨对于锁定销的约束力为

$$R_n=\left[\frac{1}{2}+\frac{\cot \beta\left(y_{n-j}-y_{n-j-1}\right)}{2 \sqrt{4 l_s^2-\left(y_{n-j}-y_{n-j-1}\right)^2}}\right] \frac{\lambda}{\left(y_{n-j}-y_{n-j-1}\right) \cos [\beta /(4 x)]+0.5 \sin \beta}$$

4 算例

考虑一个由 30 节桁架组成的折叠式桁架结构系统以常速 $v_{dq}=0.1 \mathrm{m} / \mathrm{s}$ 展收的情况，其有关参数见表 1。采用前面的动力学模型进行的仿真计算表明，由于所建立的动力学模型较为紧凑，所提供的求解方法不需迭代，因而对这个具有 240 个部件的复杂系统，数字仿真所需的计算时间却很少，不存在采用通用的商用仿真软件出现的求解困难。展开和收拢过程可用正在展开节的立杆铰链点的轨迹表示。图 4 所示为桁架系统第 30 节展开时该节立杆铰链点的轨迹。由图 4 可见，展开开始时，上下立杆折叠在一起，所在铰链点的 x 坐标接近立杆长度 l_s ，而 y 坐标接近零。展开过程中 x 坐标逐渐减小，而 y 坐标逐渐增大，至 x 近为零时表明这一节的展开过程结束。图中轨迹的直线部分表明铰链点沿导轨运动。

表 1 折叠式桁架结构参数

l_s	b_f	l_0	x_l	y_l	β	m_s	m_f	k
0.18m	0.36m	0.45m	0.08m	0.15m	20.85°	0.1kg	0.5kg	20N/m

图 5 所示为桁架系统展开过程顶框所受的驱动力和锁定销进入导轨后所受的导轨约束反力。由图可见，由于桁架系统以常速展开，驱动力很小。而当锁定销进入导轨后，导轨约束的存在使所需的驱动力增大。

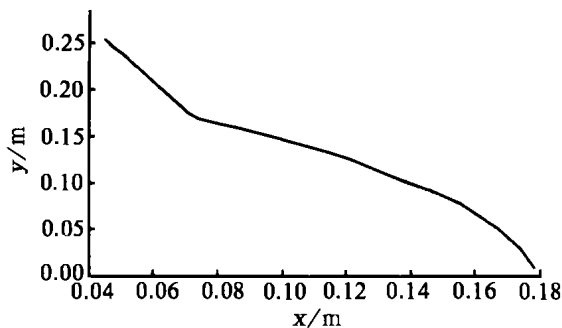


图4 正在展开一节的立杆铰链点轨迹图

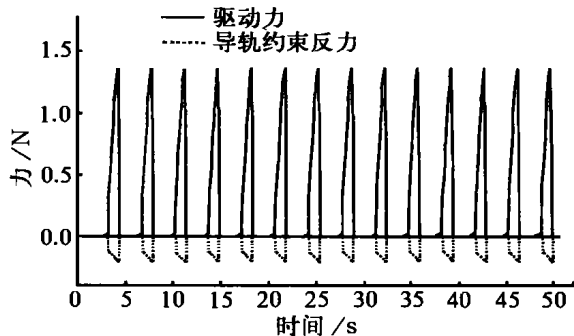


图5 桁架系统展开过程所受的驱动力和导轨约束反力

参 考 文 献

- 1 肖余之. 空间桁架展开机构运动学仿真分析. 美国 MDI 公司 2001 年中国用户年会论文集, 2001: 59~ 73
- 2 Wittenburg J. 多刚体系统动力学. 谢传峰 译. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1985.
- 3 Kamman J W, Huston R L. Dynamics of Constrained Multibody Systems. J. Applied Mechanics, 1984, 51 (4): 899 ~ 903
- 4 Sign R P, Likins P W. Singular Value Decomposition for Constrained Dynamical Systems. J. Applied Mechanics, 1985, 52 (4): 943~ 948
- 5 许宏伟, 马兴瑞等. 双臂约束系统动力学问题探讨. 振动工程学报, 1994, 7 (1): 1~ 8

作者简介

缪炳祺 1940 年生, 1963 年毕业于北京航空学院飞行力学与控制专业, 1982 年获德国 Darmstadt 大学博士学位。教授。研究方向为航天器动力学、结构动力学、随机振动。

曲广吉 1935 年生, 1962 年毕业于哈尔滨工业大学飞行力学与控制专业。研究员, 博士生导师。研究方向为航天器动力学与控制。

Dynamic Modeling and Analysis of Deployable Truss System

Miao Bingqi* Qu Guangji** Yang Lei** Liu Yinhu*

(* College of Mechanical and Electrical Engineering,
Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014)

(** Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100086)

Abstract A dynamic model for a kind of deployable truss systems is derived. The method for solving the derived nonlinear differential-algebraic equation system is provided. An example is given to simulate the deployment of a typical truss system. It is shown that the derived model and the provided method for solving the dynamic equations are efficient for the truss system deployment simulation. The difficulty encountered in applying the commercial dynamic software can be avoided.

Subject Term Multirigid system Deployable mechanism Kinetic equation Emulation Spacecraft