第三节 三重积分的计算

主要内容

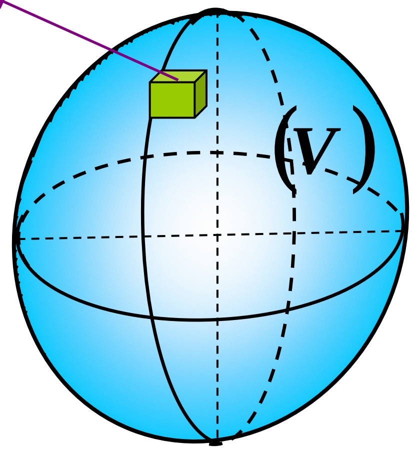
1. 直角坐标下化三重积分为先单后重/先重后单
2. 曲线坐标下三重积分的计算
3. 柱面坐标下三重积分的计算
4. 球面坐标下三重积分的计算
5. 小结

作业: P175 4 , 5, 6

体积微元

$$\int_{(\Omega)} f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \iiint_{(V)} f(x,y,z)\,\boxed{\mathrm{d}V}$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$



密度 →  → 质量

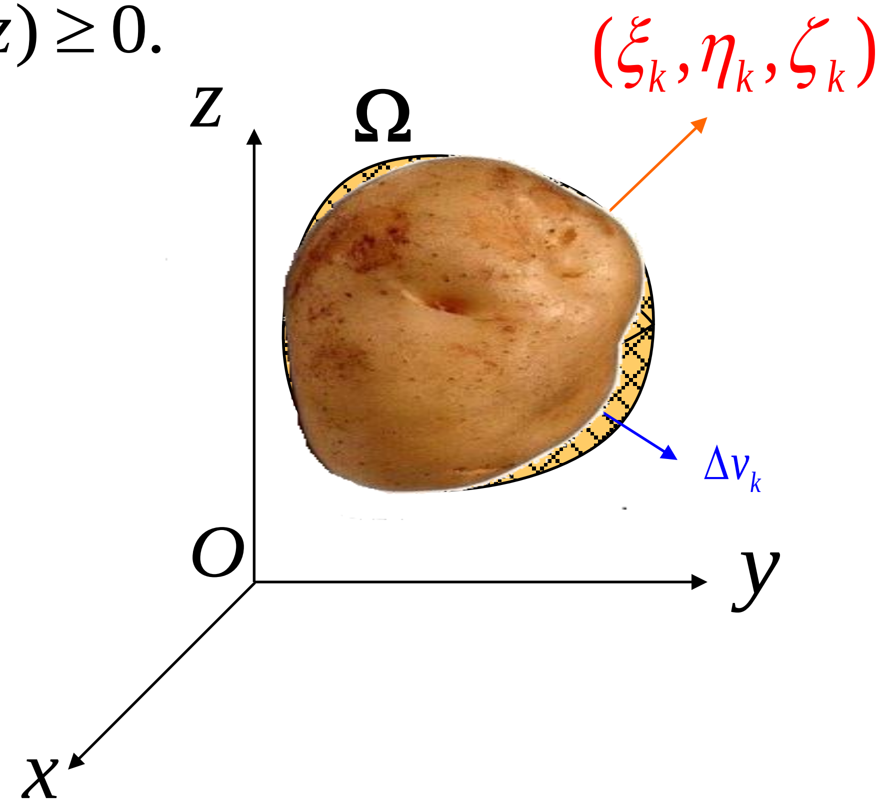
如图,假设土豆占据空间有界闭区域Ω, 密度函数

$f(x,y,z)\in C(\Omega)$, 其中 $f(x,y,z)\geq 0$.

“积分四步曲”

$$M \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\,\Delta v_k$$

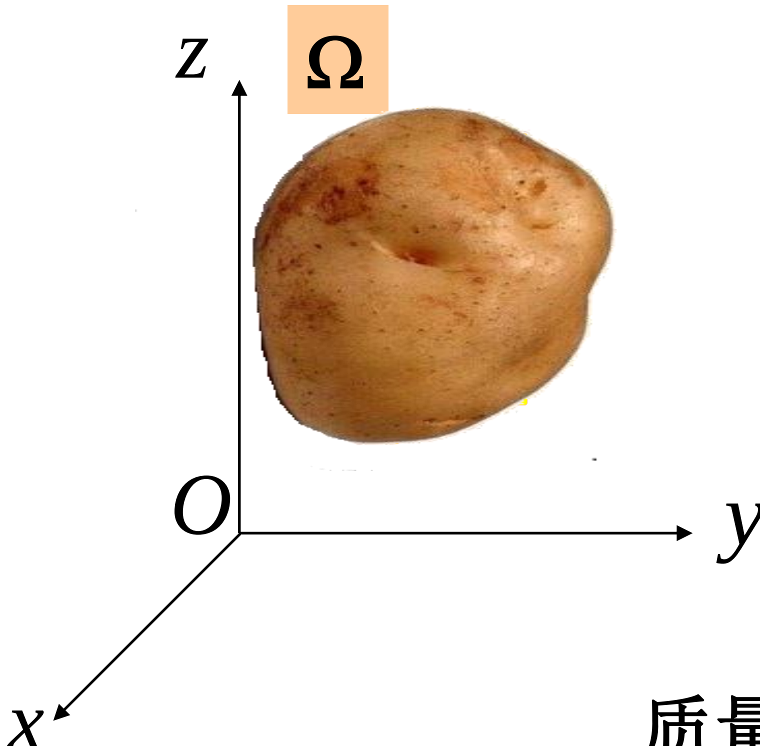
$$=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$



思路

土豆条的质量

土豆质量

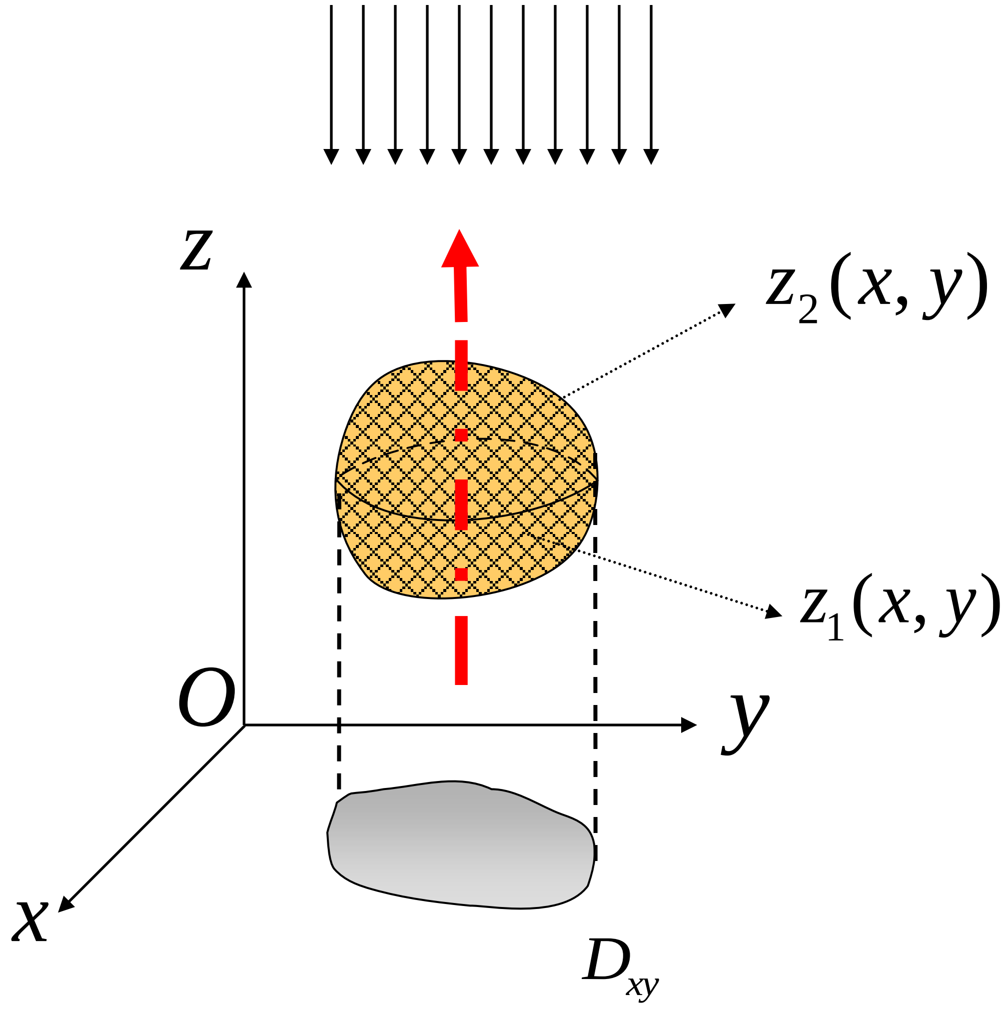


空间直角坐标系

体积微元 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

质量 $M = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

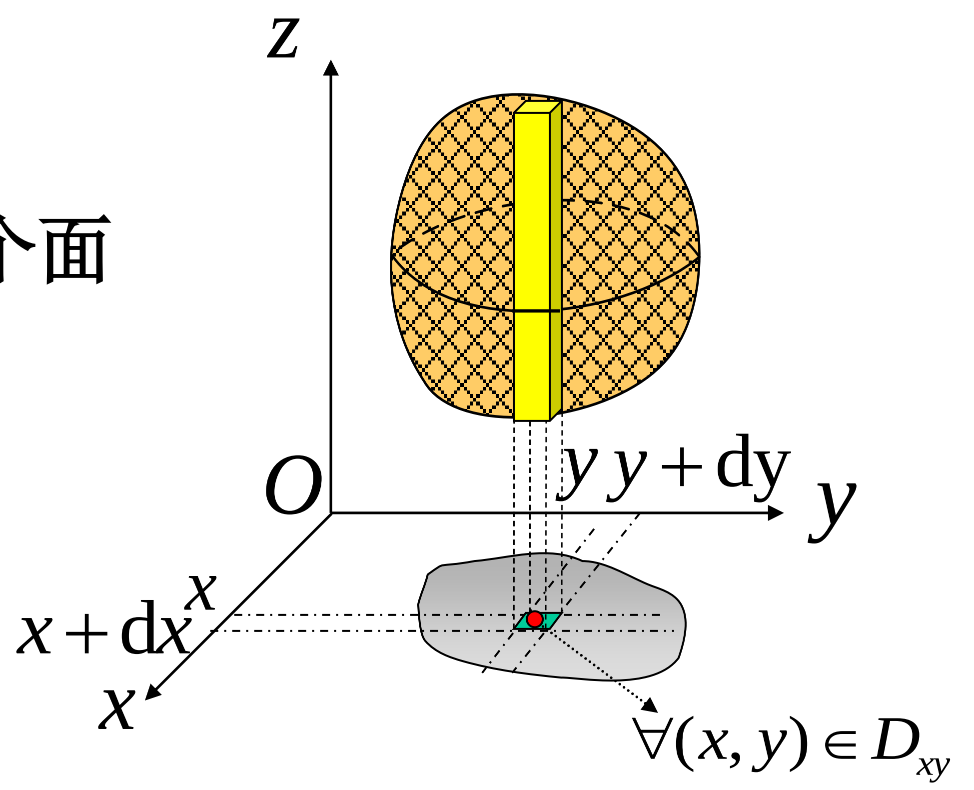
Ω 是 $Z-$ 型域



$\forall(x, y) \in D_{xy}$,

$x, x+\mathrm{d}x, y, y+\mathrm{d}y$ 四个面

确定一根“土豆条”.



$x, x+\mathrm{d}x, y, y+\mathrm{d}y, z, z+\mathrm{d}z$　六个面

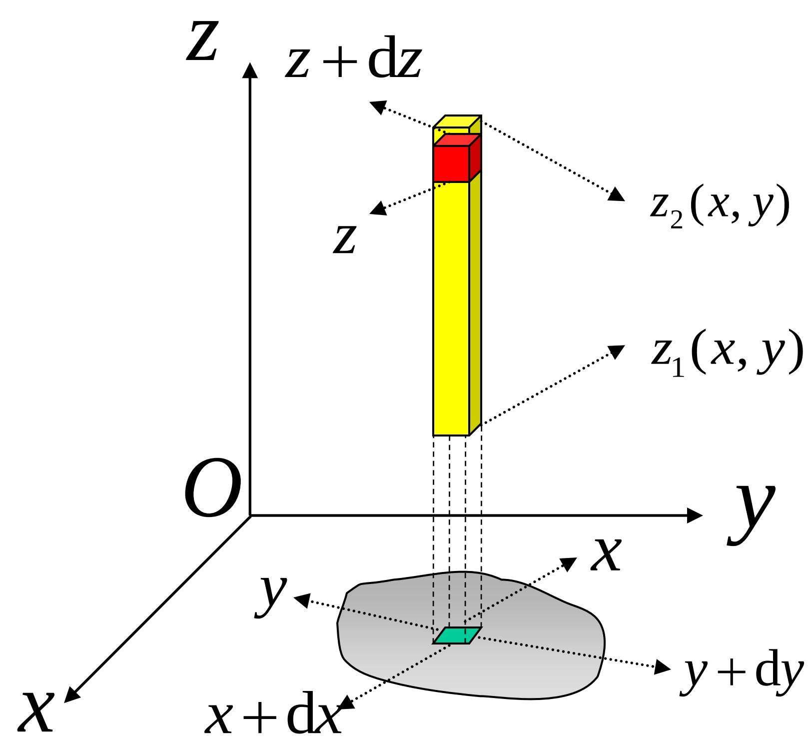
确定一个“土豆丁”，质量微元

$$\mathrm{d}m = f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$z \in \left(z_1(x,y), z_2(x,y)\right)$

“土豆条”的质量微元

$$\mathrm{d}s = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{d}m$$



$$\mathrm{d}s = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{d}m = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

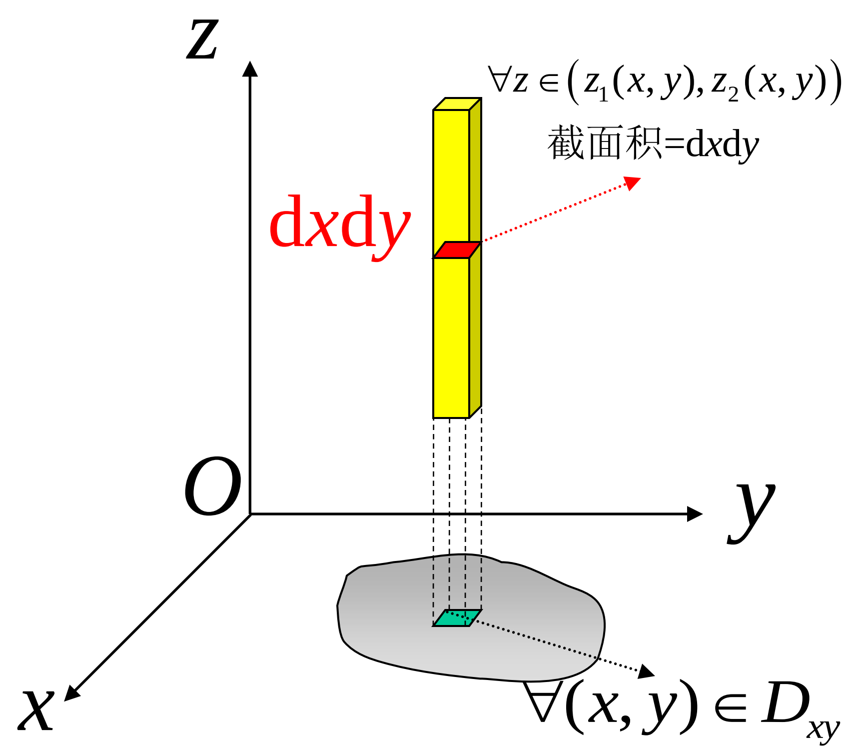
$$= \color{red}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$\Big\downarrow (x,y)\in D_{xy}$$

土豆质量

$$\boldsymbol{M = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}s}$$

$$\boldsymbol{= \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z}$$



命题： 若 $f(x,y,z)\ge 0$ ，并且 Ω 是 $Z-$ 型区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\},$$

则 $$\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

若令 $$g(x,y)\triangleq\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad （1）$$

则 $$\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （2）$$

“先单后重”法　　“先一后二”法

问题：　如果被积函数**变号**呢？

由于 $f=\dfrac{f+|f|}{2}-\dfrac{|f|-f}{2},$

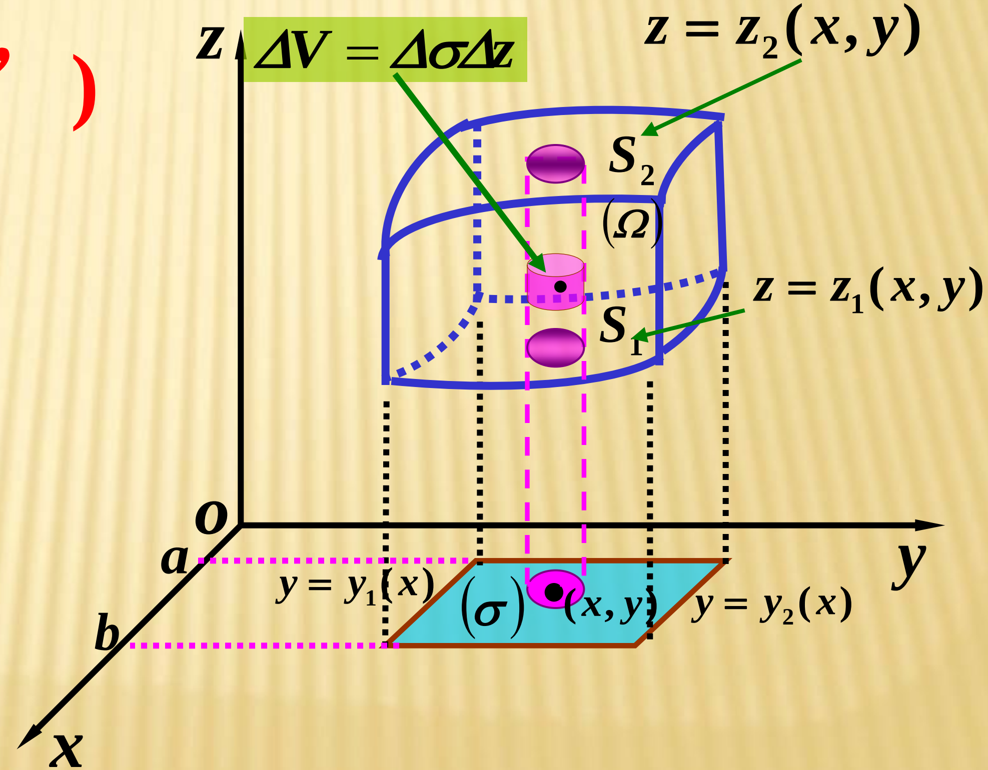
并且 $f_{正部}\triangleq\dfrac{f+|f|}{2}\geq 0,\ f_{负部}\triangleq\dfrac{|f|-f}{2}\geq 0.$

积分线性性质

命题照样成立！

$$\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\sigma$$

投影法 (“先一后二”)



旋转抛物面

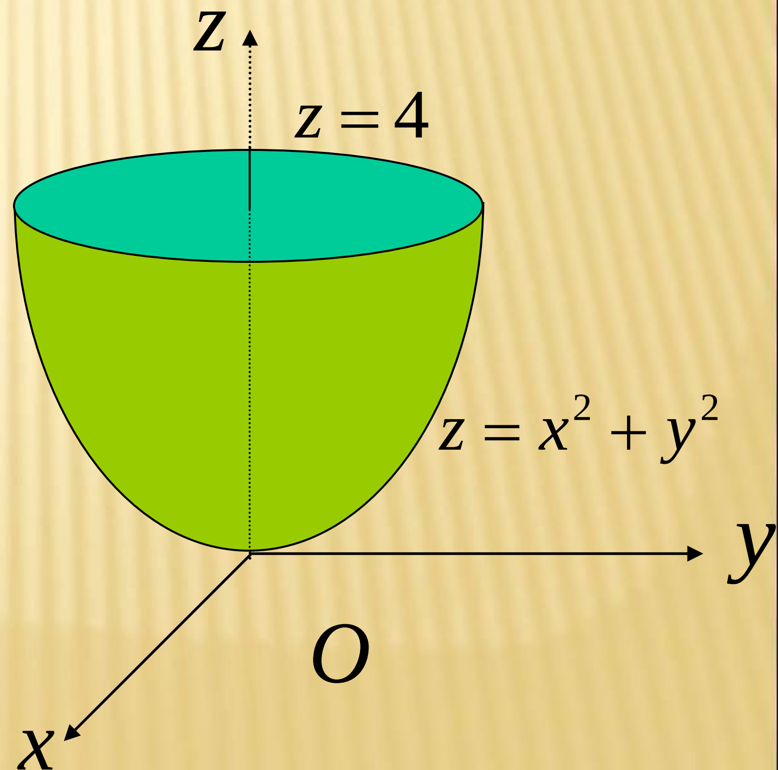
例1： 设某物体的边界由 $z=x^2+y^2$ 以及 $z=4$ 围成，已知其上任一点的密度与该点到 z 轴的距离的平方成正比，比例系数为 k，求物体的质量.

解： 依题意，密度函数

$$f(x,y,z)=k(x^2+y^2)$$

故所求物体的质量

$$M=\iiint_{\Omega}k(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



由于物体在 xOy 平面的投影为 $D_{xy}:\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=0 \end{cases}$

所以 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le 4,(x,y)\in D_{xy}\}$, 从而

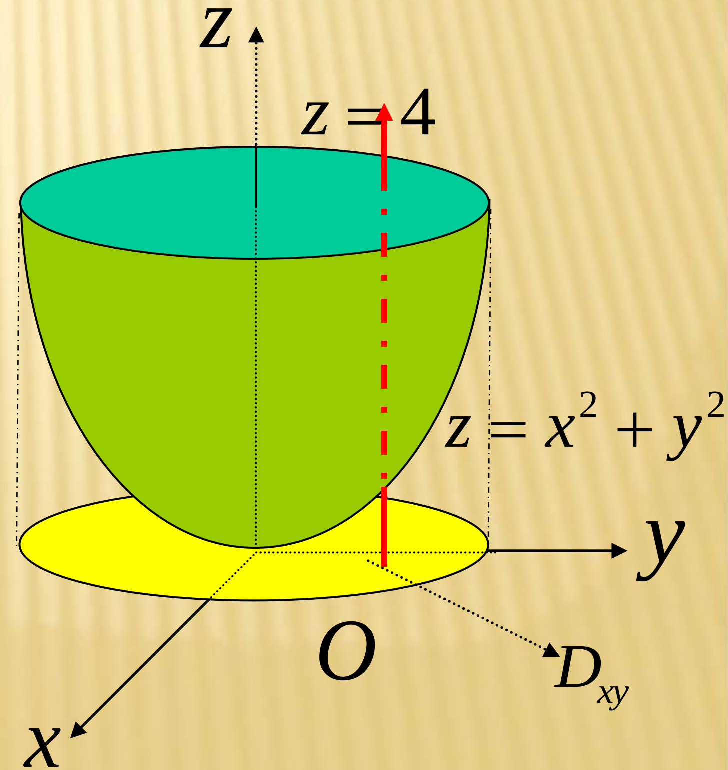
$$M=\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{4}k(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

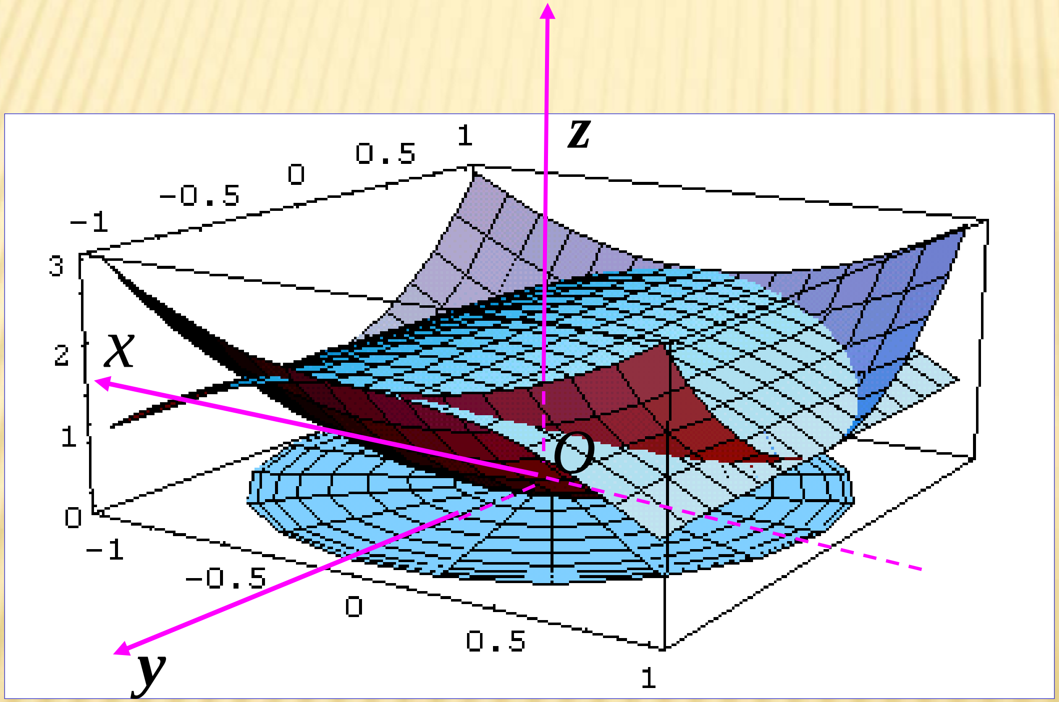
$$=\iint_{D_{xy}}k(x^2+y^2)[4-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2(4-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{32k\pi}{3}.$$



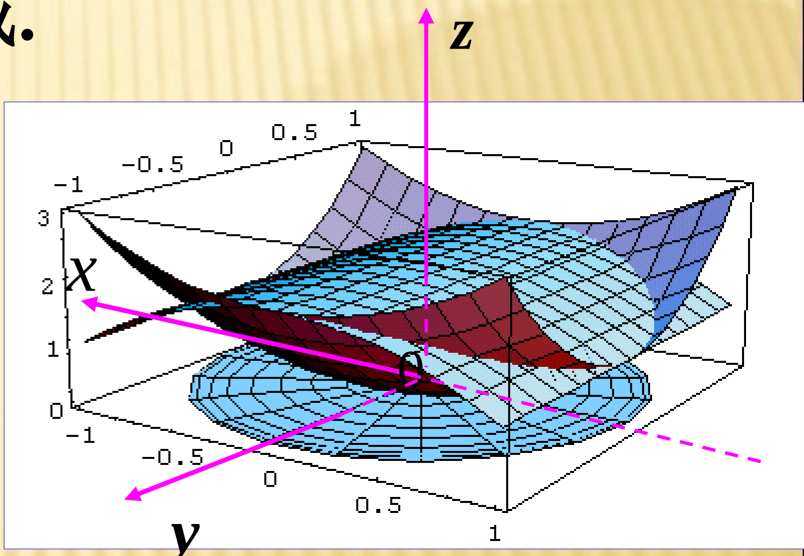
例2 化三重积分 $I=\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中,积分区域(Ω)为由曲面 $z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$所围成的闭区域.



椭圆抛物面和柱面

例2 化三重积分 $I=\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中,积分区域(Ω)为由曲面 $z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$所围成的闭区域.

解 由$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$,



得交线投影区域 $x^2+y^2\le 1$,

则 (Ω): $-1\le x\le 1$,

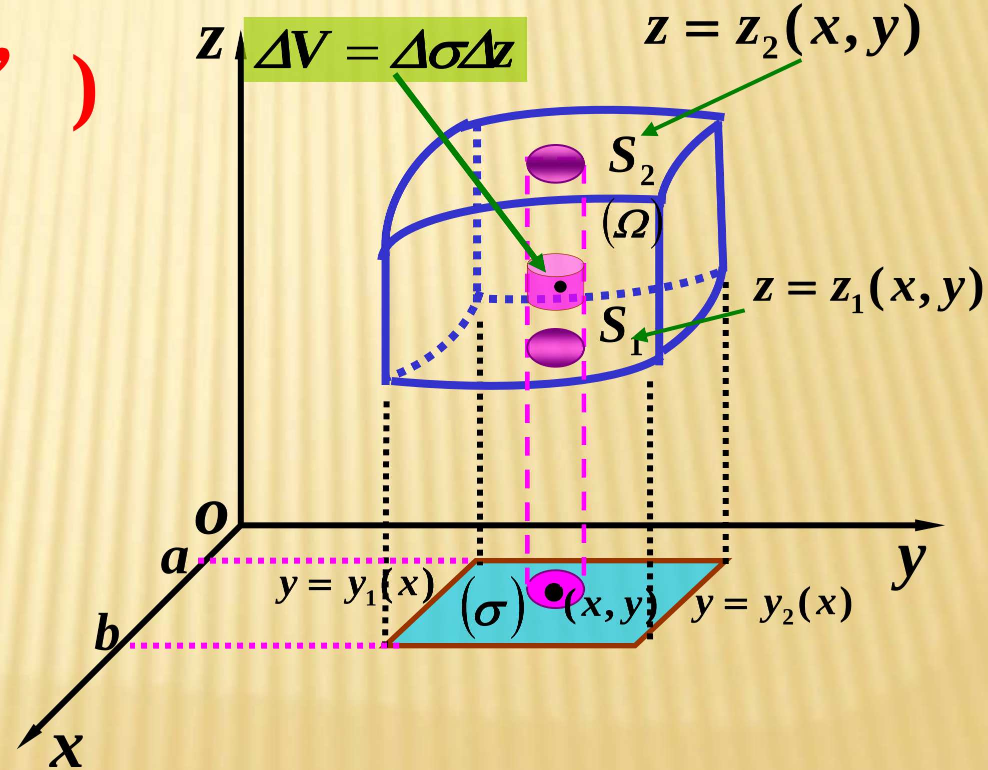
$-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$,

$x^2+2y^2\le z\le 2-x^2$.

$$\therefore I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz.$$

$$\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\sigma$$

投影法 (“先一后二”)

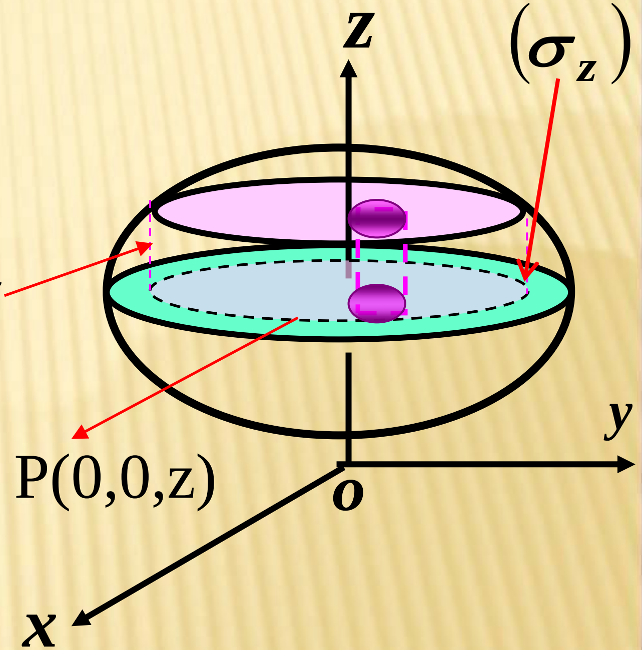


直角坐标系中将三重积分化为先二重后单积分

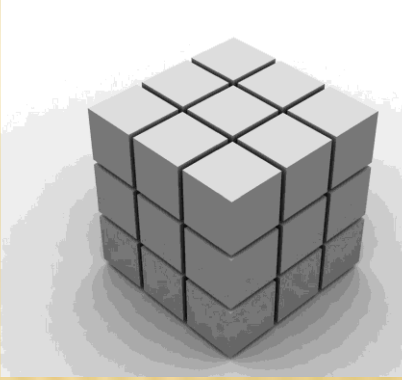
$$\iiint_{(\Omega)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \lim_{d\to 0}\sum_{(V)} f(x,y,z)\Delta\sigma\Delta z$$

$$= \lim_{\max\Delta z\to 0}\sum_{z}\left(\lim_{d\to 0}\sum_{(\sigma_z)} f(x,y,z)\Delta\sigma\right)\Delta z$$

$$= \int_a^b\left(\iint_{(\sigma_z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}z$$



累加时先固定z, Δz,在厚度为Δz 的薄层上无限累加，把公因式Δz提出;然后再在[a,b]上把各个薄层求得的和无限累加



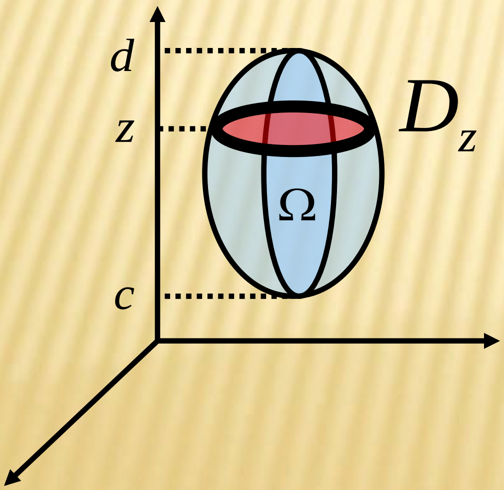
即将三重积分化为先二重积分,后单积分的累次积分

直角坐标系中将三重积分化为先重后单积分

设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid c \le z \le d, (x, y) \in D_z\}$

则

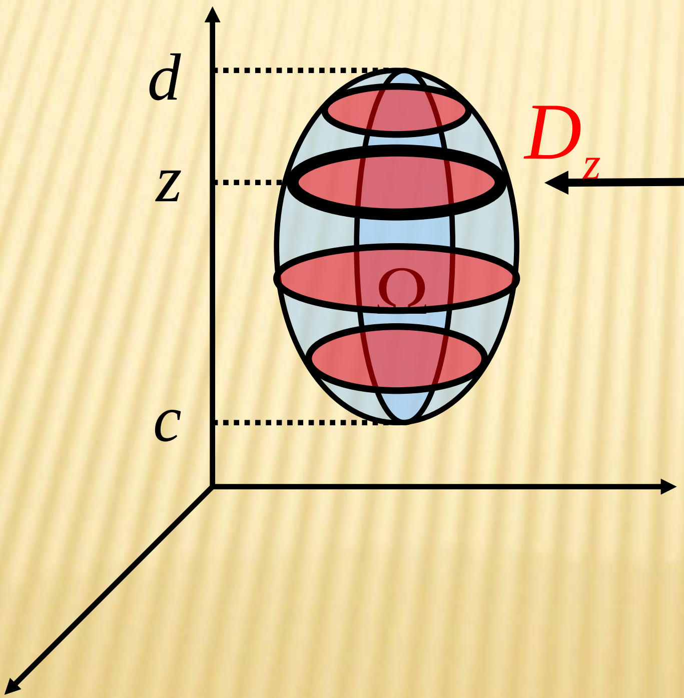
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_c^d \Big(\iint\limits_{D_z} f(x, y, z) dxdy \Big) dz$$



$$= \int_c^d dz \iint\limits_{D_z} f(x, y, z) dxdy$$

“先二后一”积分法的物理解释

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_c^d dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$



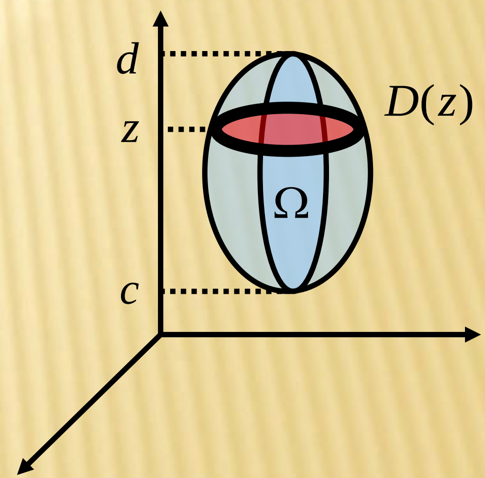
截面片的质量

“切片法”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

一种特殊情形:

如果被积函数仅为 z 的函数，则



$$\iiint_{\Omega} f(z)dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(z)dxdy$$

$$= \int_c^d f(z)dz \iint_{D_z} dxdy = \int_c^d f(z)\sigma(z)dz$$

D_z的面积

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

何时用截面法 (“先二后一”)、切片法？

通常选用此法时应满足：

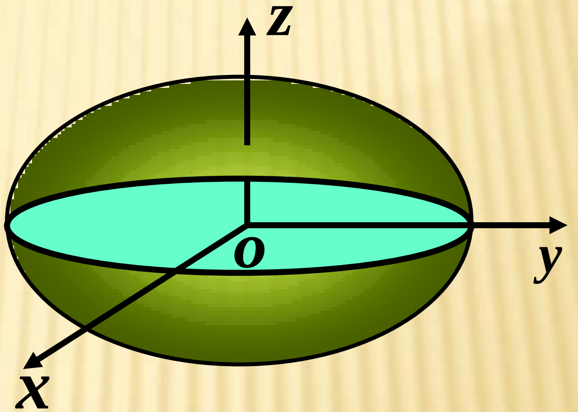
①D_z较简单：圆、椭圆、矩形、三角形等，容易算得其面积；

② $\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$易于计算

特别当$f(x,y,z)=\varphi(z)$时更好。

例6 计算三重积分 $\iiint\limits_{(\Omega)} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，其中 (Ω) 是由

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所成的空间闭区域.

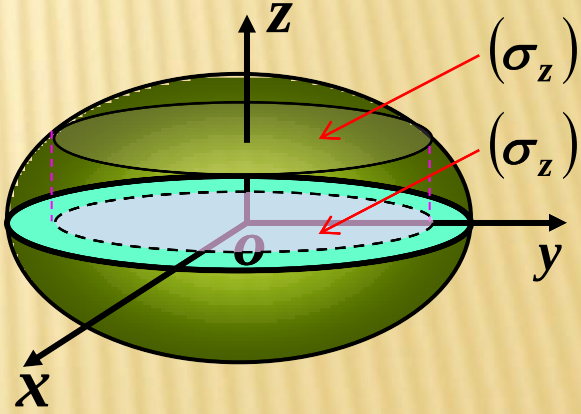


$$\pi\int_{-c}^{c} z^2 \sqrt{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\cdot\sqrt{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

例6 计算三重积分 $\iiint\limits_{(\Omega)} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，其中 (Ω) 是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所成的空间闭区域.

解 $(\Omega):\left\{(x,y,z)\middle| -c\le z\le c,(x,y)\in(\sigma_z)\right\}$

$$(\sigma_z):\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$



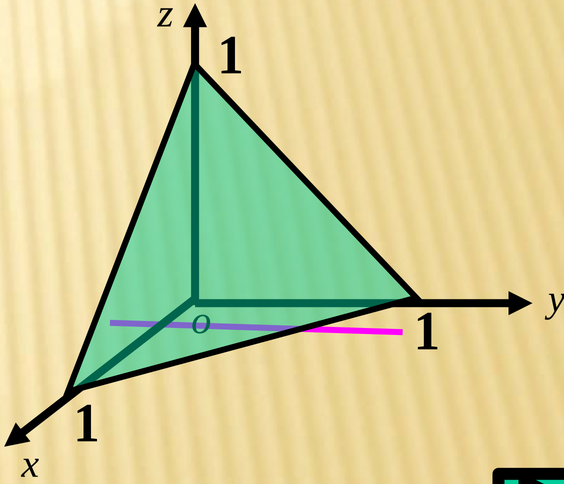
因此

$$\iiint\limits_{(\Omega)} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{(\sigma_z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_{-c}^{c} z^2\sqrt{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\cdot\sqrt{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

例　计算三重积分 $\iiint\limits_{(\Omega)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 (Ω) 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域.

解　闭区域在 xoy 平面上的投影为



$$(\sigma)=\{(x,y)\mid x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$$

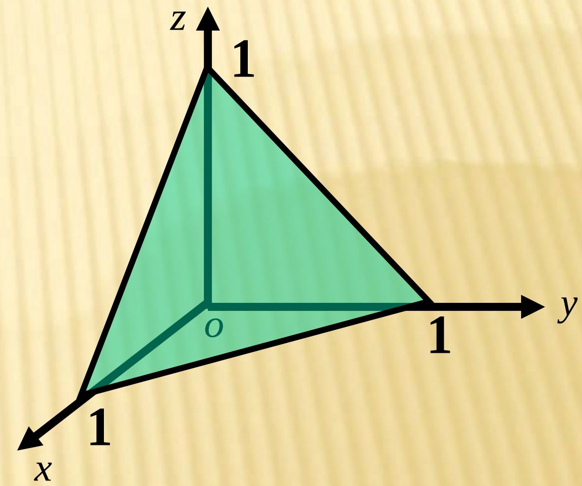
$$=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$$

从而 $\iiint\limits_{(\Omega)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(1-x-y)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{24}$$

先单后重

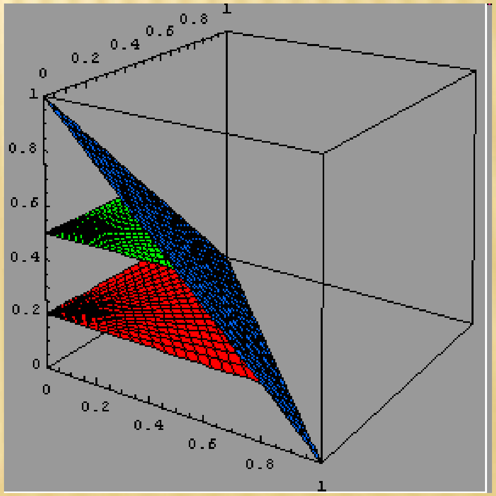
例 计算积分$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，$\Omega$：三个坐标平面及平面 $x+y+z=1$所围成的闭区域.



解 $$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z\,dz \iint\limits_{D_z} dx\,dy,$$

$$D_z = \{(x,y) \mid x+y \le 1-z\}$$

$$\iint\limits_{D_z} dx\,dy = \frac{1}{2}(1-z)(1-z),$$ 或:



$$\iint\limits_{D_z} dx\,dy = \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy = \frac{1}{2}(1-z)^2.$$

$$\text{原式} = \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2}(1-z)^2\,dz = \frac{1}{24}.$$

先重后单

第三节 三重积分的计算

主要内容

1. 直角坐标下化三重积分为先单后重/先重后单
2. 曲线坐标下三重积分的计算
3. 柱面坐标下三重积分的计算
4. 球面坐标下三重积分的计算

作业: 习题6.3　4，5，6

第二部分 曲线坐标下三重积分的计算

设$f(x,y,z)$在闭域V上连续,

正则变换: $T:\begin{cases} u=u(x,y,z) \\ v=v(x,y,z) \\ w=w(x,y,z) \end{cases}$ V,V'为R^3中的有界闭区域

$(x,y,z)\in V,(u,v,w)\in V'$

满足 (1) 函数u,v,w在V上一阶偏导数连续;

(2) 在V上 Jacobi行列式 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\neq 0$;

(3) 变换 $T:V\to V'$ 是一一对应的,

则

P_0的曲线坐标

$P_0(x_0,y_0,z_0)\longrightarrow P_0(u_0,v_0,w_0)$

$u(x_0,y_0,z_0)=u_0$
$v(x_0,y_0,z_0)=v_0$
$w(x_0,y_0,z_0)=w_0$

三重积分的换元公式:

正则变换T及其逆变换T^{-1}将有界区域
V的内部变为V’内部;
V的外部变为V’外部;
V的边界变为V’边界.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV$$

$$=\iiint\limits_{(V')} f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

体积微元间的关系为:

$$dV=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dV'$$

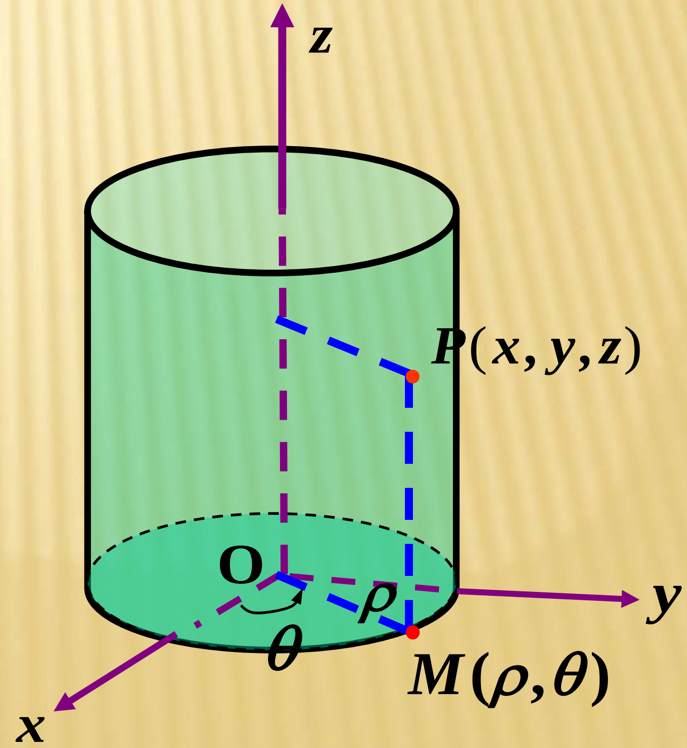
$$=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

第三部分 柱面坐标与球面坐标系下三重积分的计算法

一、利用柱面坐标计算三重积分

设 $P(x, y, z)$ 为空间内一点，并设点 P 在xoy 面上的投影 M 的极坐标为 $M(\rho, \theta)$，则这样的三个数 ρ, θ, z 就叫点 P 的柱面坐标.



规定：

$$0 \le \rho < +\infty,$$
$$0 \le \theta \le 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty.$$

柱面坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

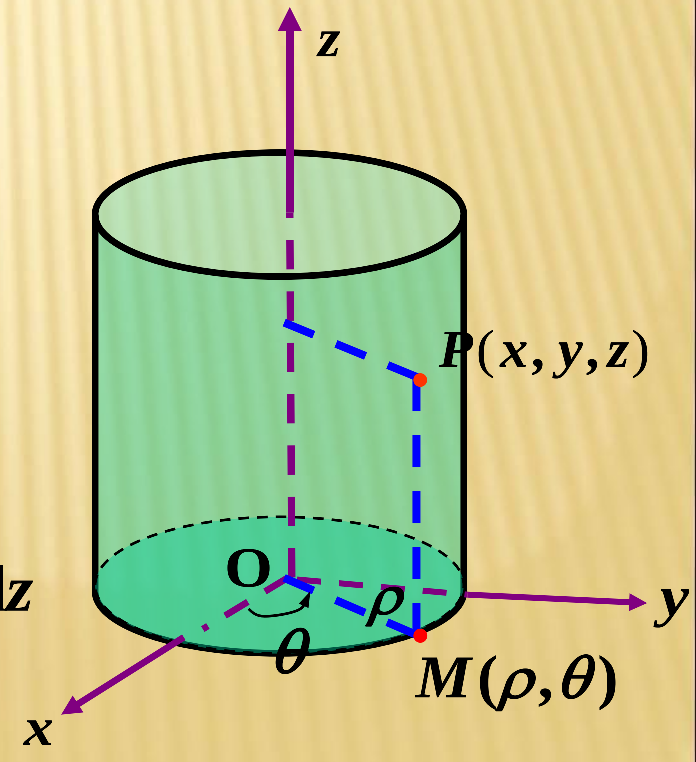
一、利用柱面坐标计算三重积分

规定：
$$0 \le \rho < +\infty,$$
$$0 \le \theta \le 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty.$$

柱面坐标与直角坐标的关系为 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



柱面坐标下的体积元素

元素区域由六个坐标面围成：

半平面 θ及$\theta+\mathrm{d}\theta$;

半径为 ρ及$\rho+\mathrm{d}\rho$的圆柱面；

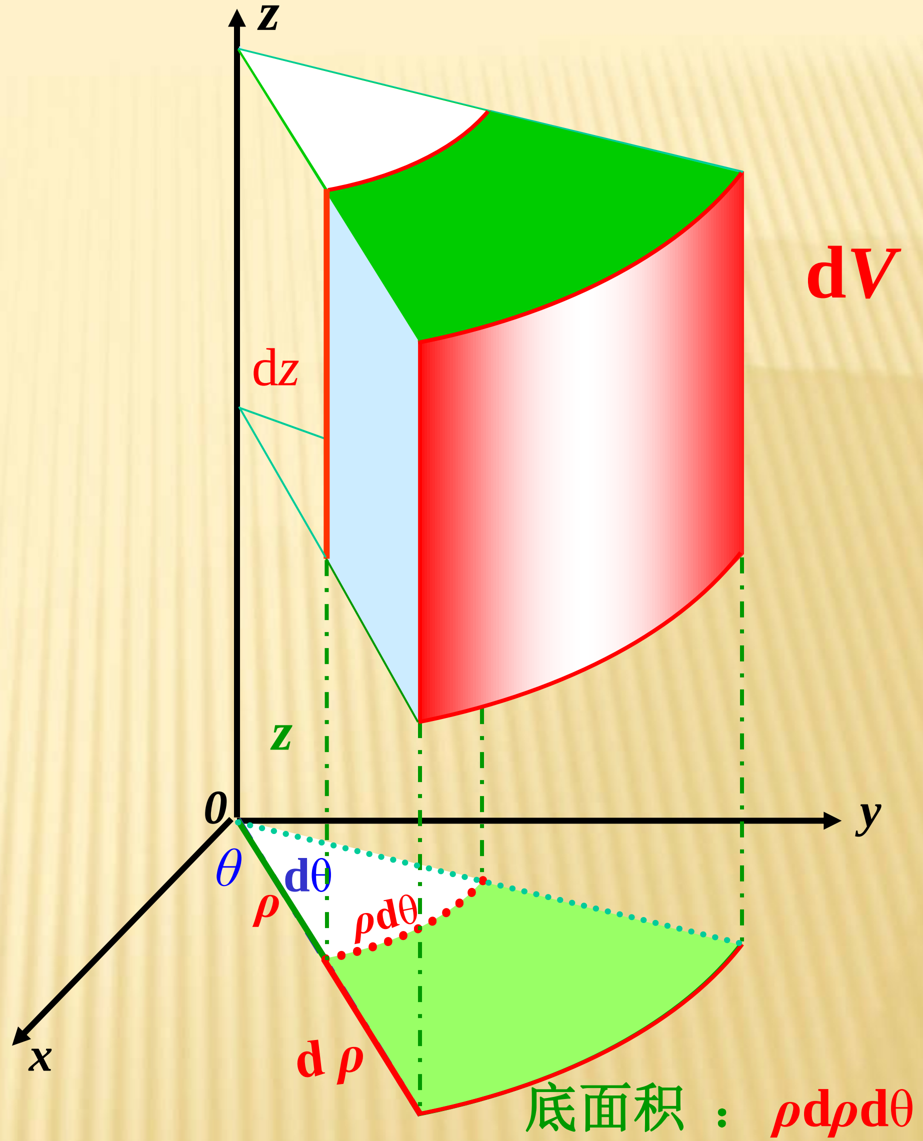
平面 z及 z+dz;

$$\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

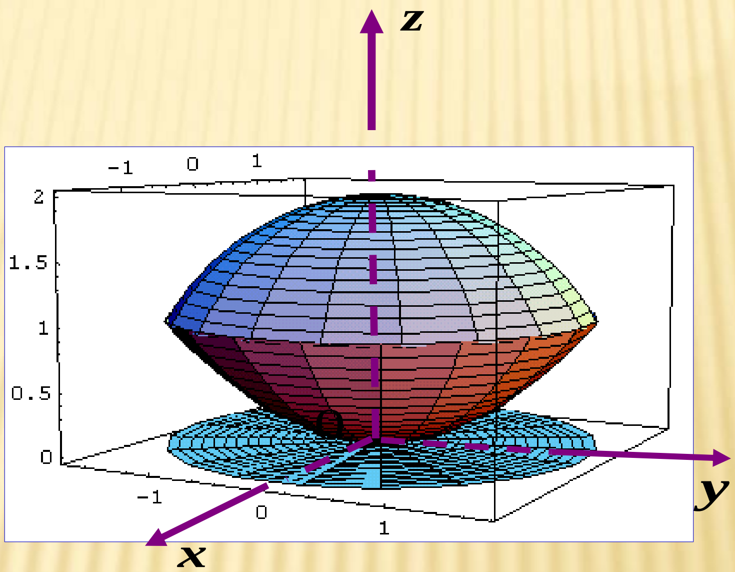
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\rho$$



例6 计算$I=\iiint\limits_{(\Omega)} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$(\Omega)$是球面

$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$

所围的立体.



例6 计算$I=\iiint\limits_{(\Omega)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$(\Omega)$是球面

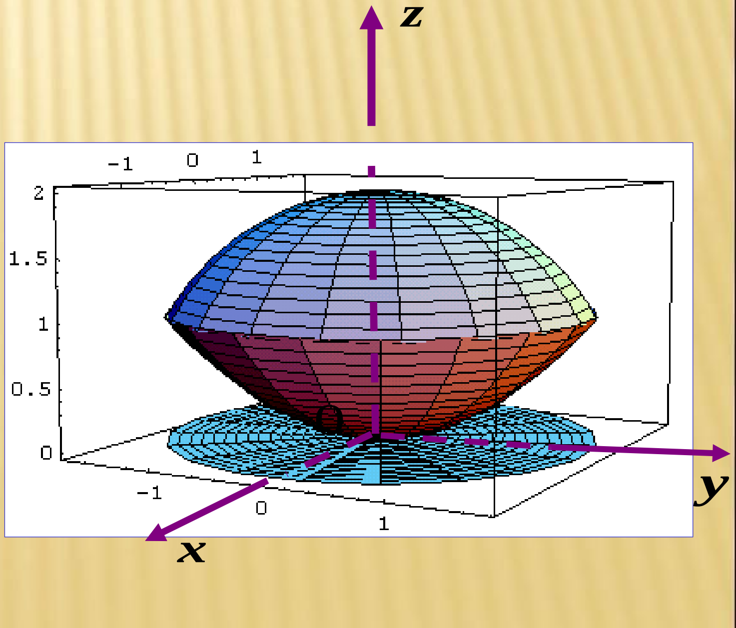
$$x^2+y^2+z^2=4 \text{与抛物面} x^2+y^2=3z$$

所围的立体.

解 由柱面坐标变换 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 得交线为 $\begin{cases} \rho^2+z^2=4 \\ \rho^2=3z \end{cases}$

即 $z=1,\quad \rho=\sqrt{3}.$

从而 (Ω): $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi, \\ 0\le\rho\le\sqrt{3}, \\ \dfrac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}. \end{cases}$



$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\cdot z\mathrm{d}z=\frac{13}{4}\pi.$$

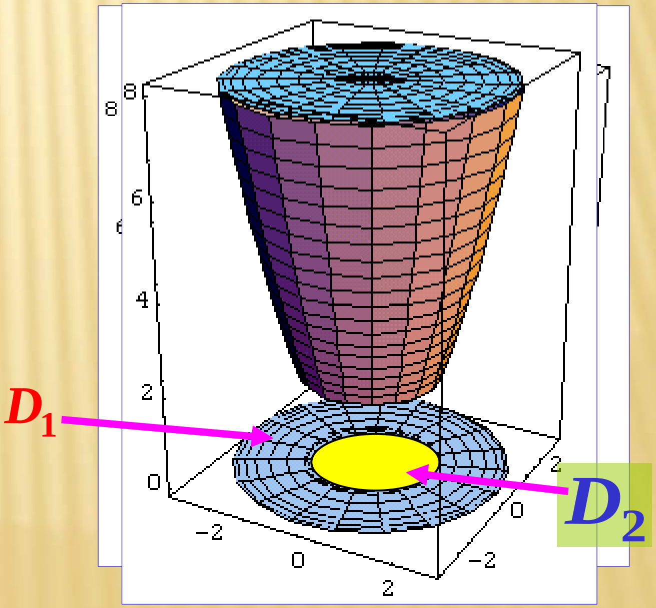
例7 计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$(\Omega)$是曲线 $y^2=2z$， $x=0$ 绕oz轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2, z=8$所围的立体.

解 由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转得,

旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2z$

所围成的立体如图所示 .

所围成立体的投影区域如图.

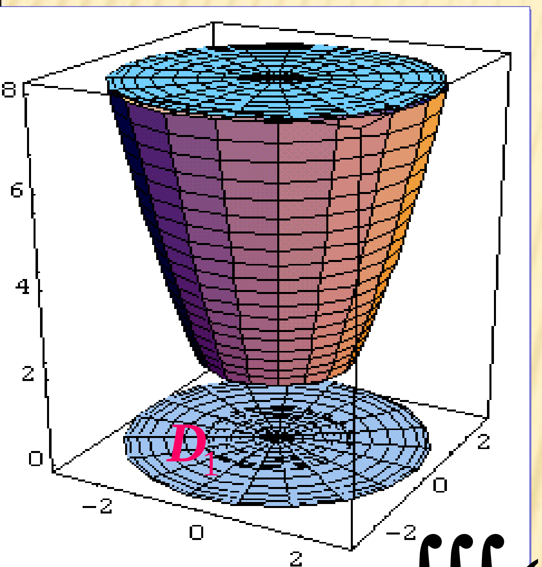


D_1： $x^2+y^2\le 16$

D_2： $x^2+y^2\le 4$,

例7 计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$(\Omega)$是曲线

$y^2=2z$， $x=0$ 绕oz轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2, z=8$所围的立体.



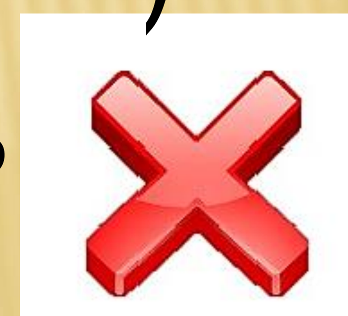
由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转得,

旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2z$

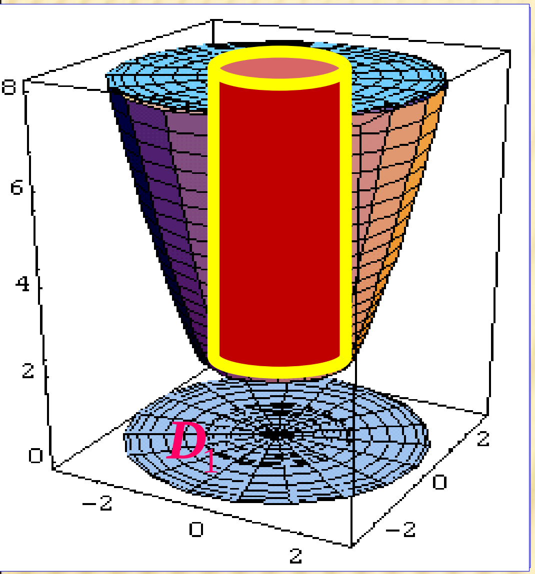
$\boxed{先单后重}$

$$\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\int_2^8(x^2+y^2)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\iint\limits_{D1或D2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=?$$



例7 计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$(\Omega)$是曲线 $y^2=2z$， $x=0$ 绕oz轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2, z=8$所围的立体.



由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转得,

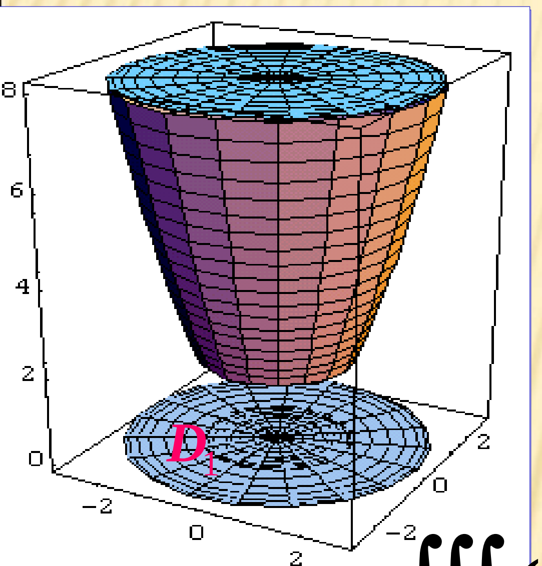
旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2z$

$$\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_2^8\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z$$

$$+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z$$

先单后重

例7 计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$(\Omega)$是曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕oz轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2,z=8$所围的立体.



由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转得,

旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2z$

$$\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^8\mathrm{d}z\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

先重后单

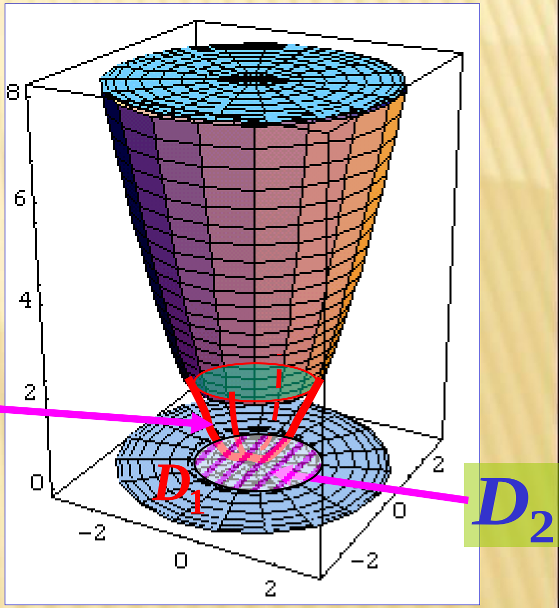
$$=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\,\mathrm{d}r=336\pi$$

考虑如下区域:

D_1: $x^2+y^2\le 16$

D_2: $x^2+y^2\le 4$,

$$(\Omega_1):\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\0\le\rho\le 4\\\dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 8\end{cases},\qquad(\Omega_2):\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\0\le\rho\le 2\\\dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 2\end{cases}.$$



则 $(\Omega)=(\Omega_1)-(\Omega_2)$

因此

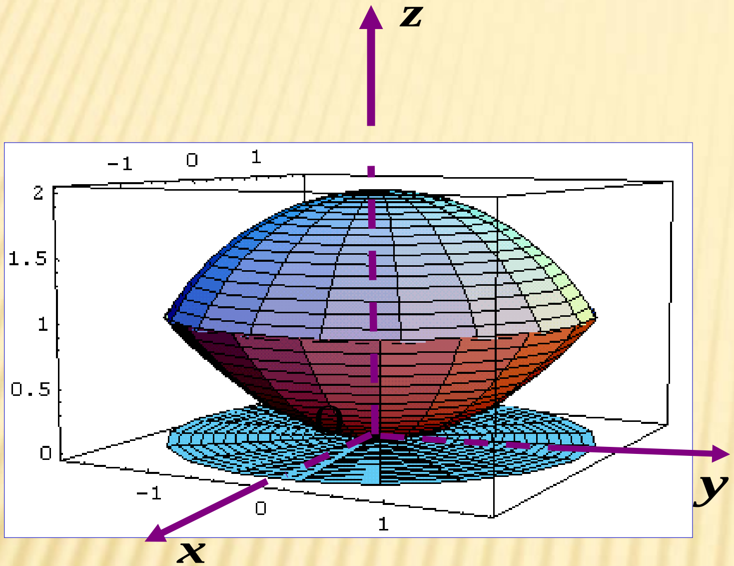
$$I=\iiint\limits_{(\Omega_1)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{(\Omega_2)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I_1-I_2\boxed{=336\pi}$$

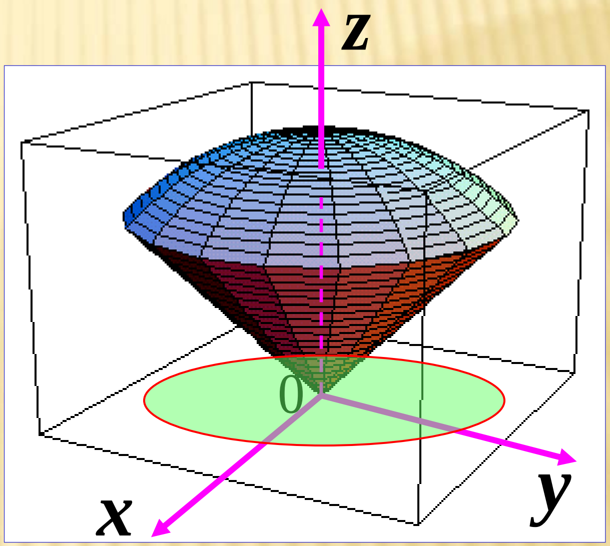
$$I_1=\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}f(\cdots)\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z=\frac{4^5}{3}\pi,$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}f(\cdots)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z=\frac{2^5}{6}\pi,$$

计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dV$，

其中(V)由$x^2+y^2+z^2\le a^2$及$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$围成.





$$I=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dV$$

$$=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dz$$

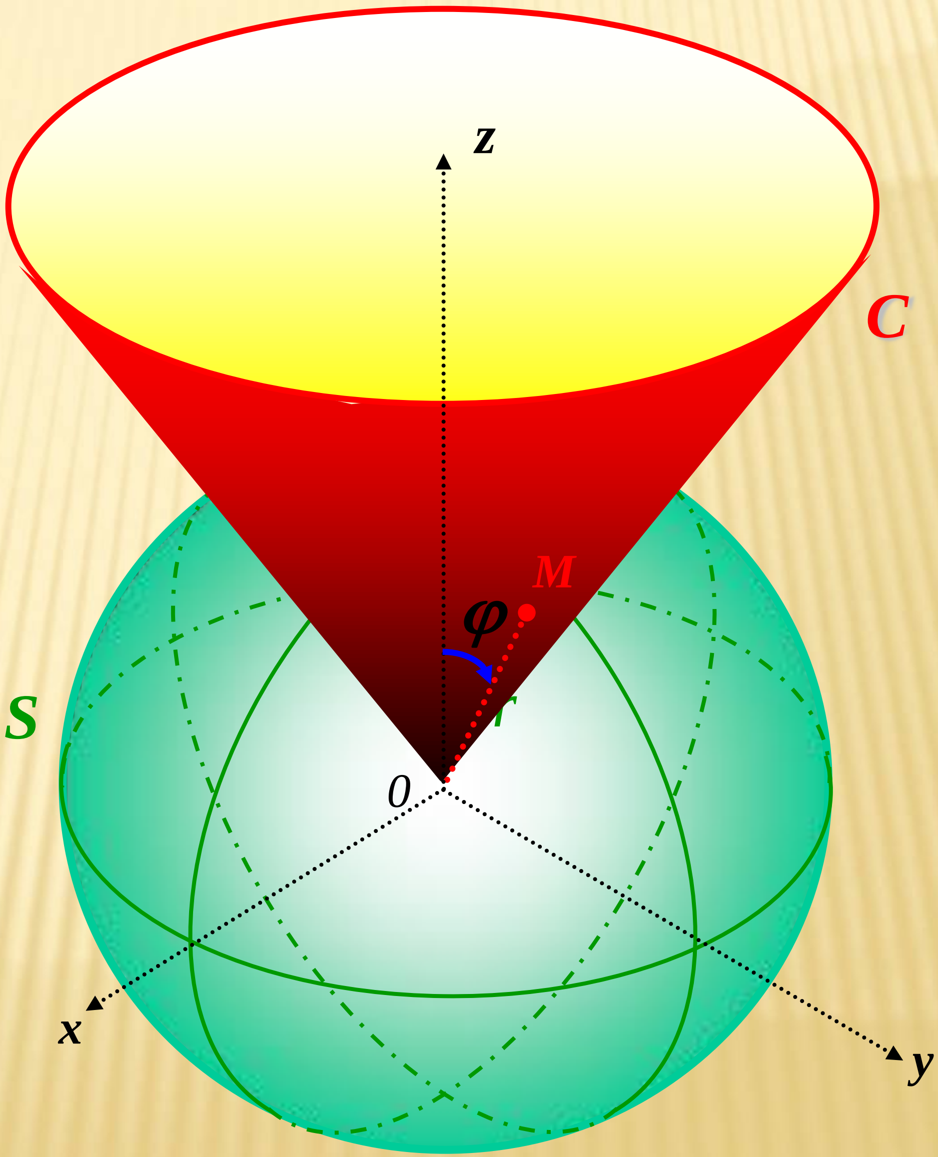
后续计算麻烦……

二、利用球面坐标计算三重积分

点$M(x,y,z)$

r =常数: 球面S

φ =常数: 锥面C



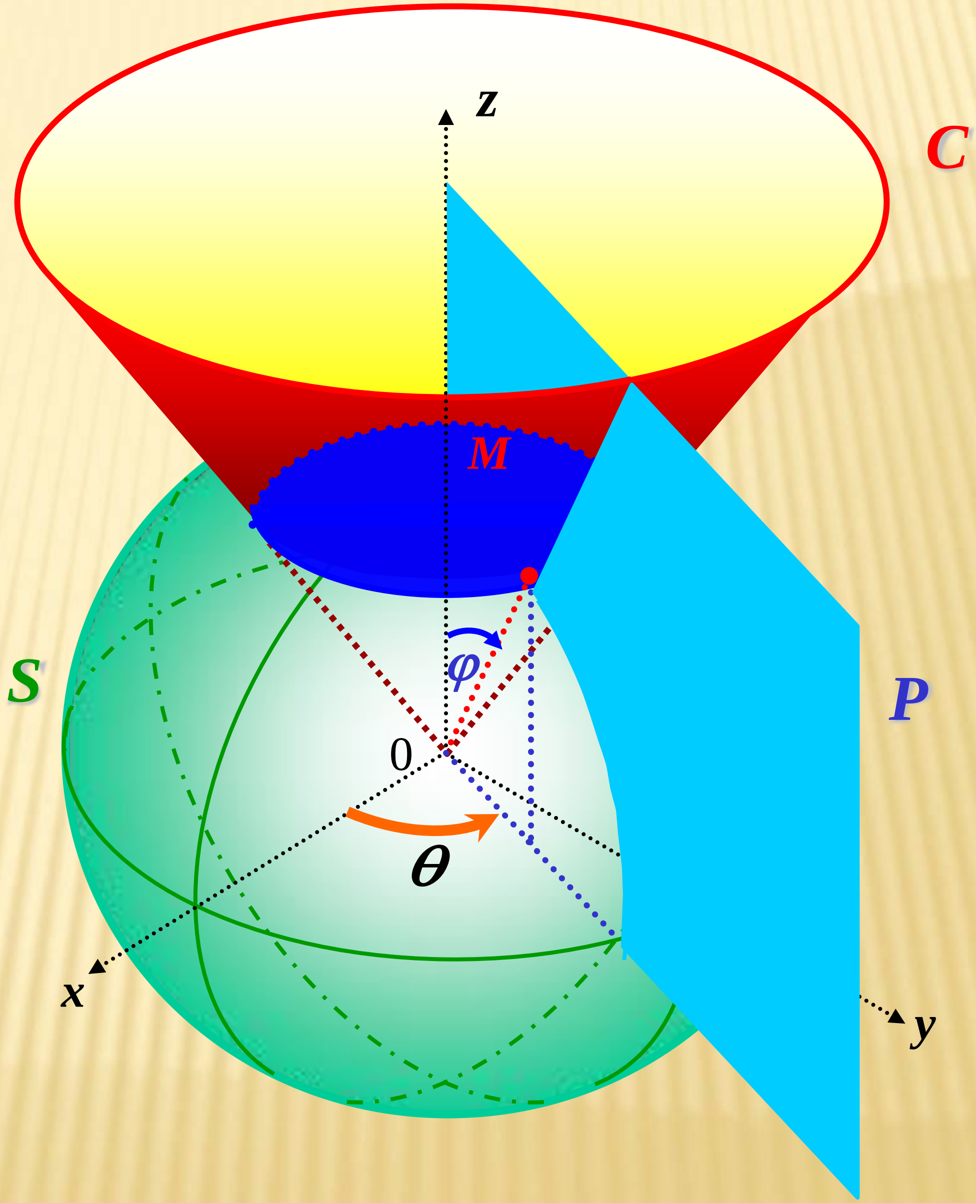
1、什么是球面坐标?

动点$M(x,y,z)$

r =常数: 球面S

φ =常数: 锥面C

θ =常数: 半平面P



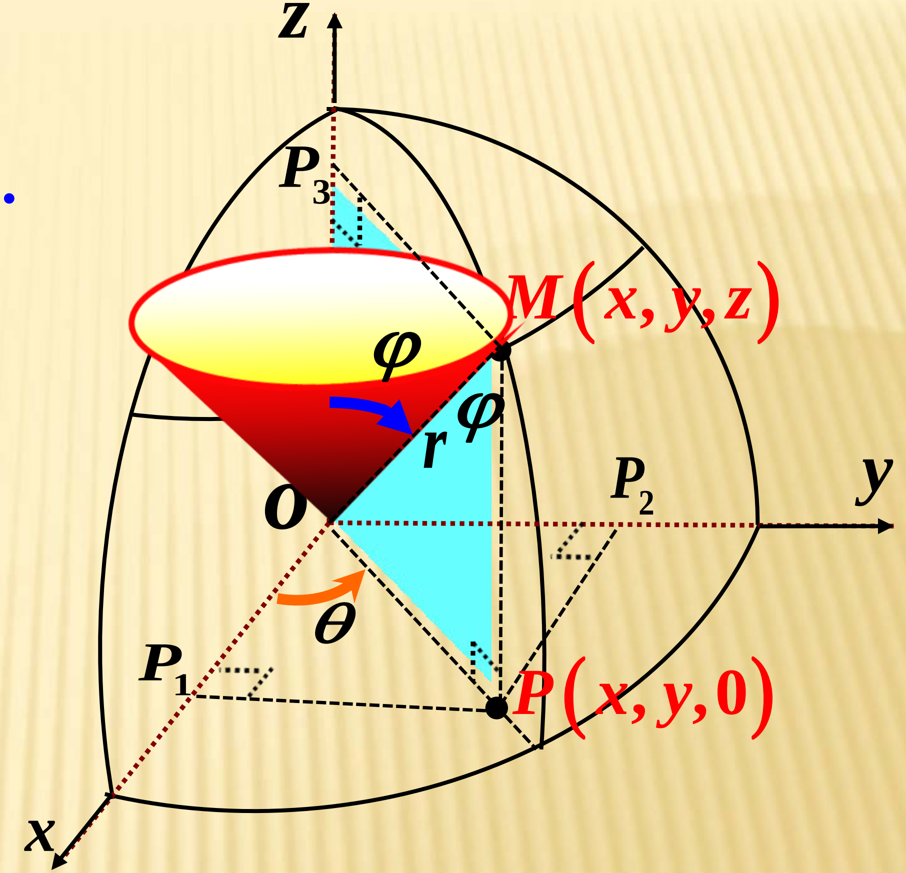
数组 (r,φ,θ) 称为点M的球面坐标.

$$\iiint_{(\Omega)} f(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}V} = \iiint_{(\Omega)} f(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

球面坐标下: (r,φ,θ) ?

2、 球面坐标与直角坐标的关系

(r,φ,θ) 称为点M的球面坐标.



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$0 \le r \le +\infty, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$$

球面坐标下的体积 微元

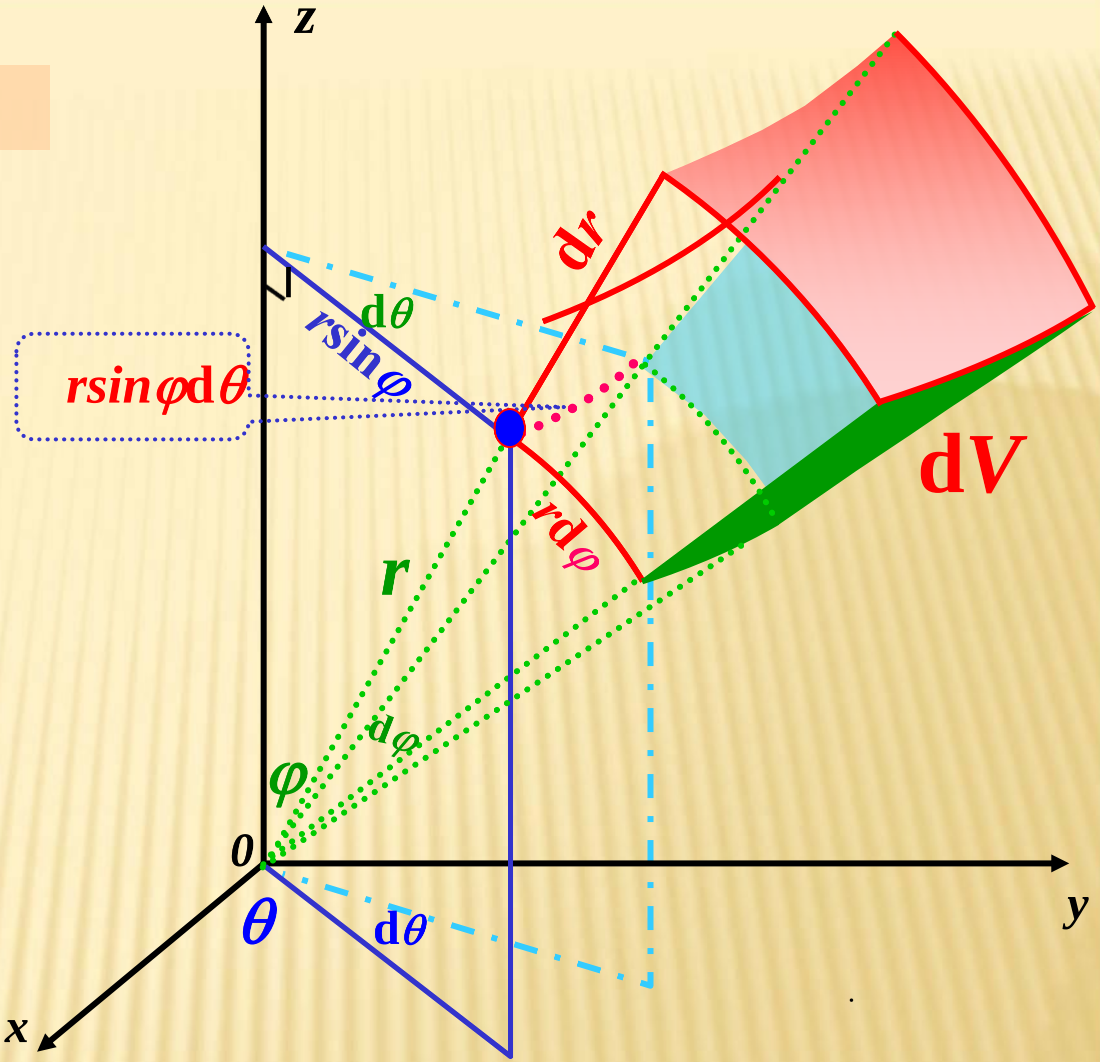
体积微元由六个坐标面围成：

半平面 θ 及 $\theta+\mathrm{d}\theta$；

圆锥面 φ 及 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$；

半径为 r 及 $r+\mathrm{d}r$ 的球面.

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2 \sin\varphi$$

例 计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dV$,

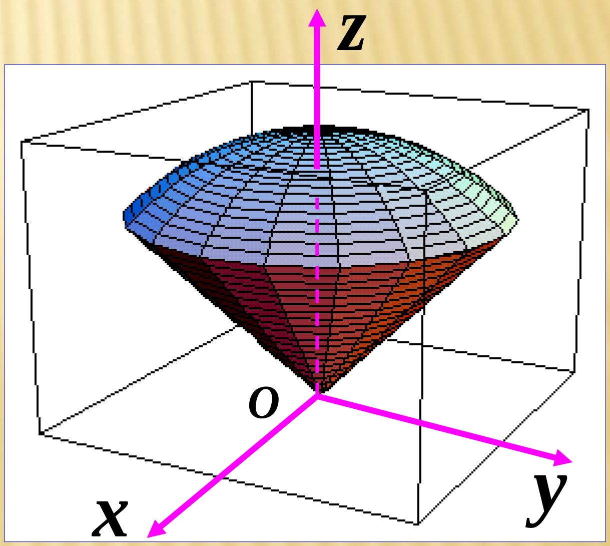
其中(V)由$x^2+y^2+z^2\le a^2$及$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$围成.

解 **(V)由锥面和球面围成，采用球面坐标变换**

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\ \sin\theta,\ z=r\cos\varphi;$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=a\\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$(V):\begin{cases}0\le r\le a\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



$$V=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r=\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})\pi a^5.$$

例 计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)} z^2 dV$,其中$(V)$由$x^2+y^2+z^2\le R^2$及$x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$围成.

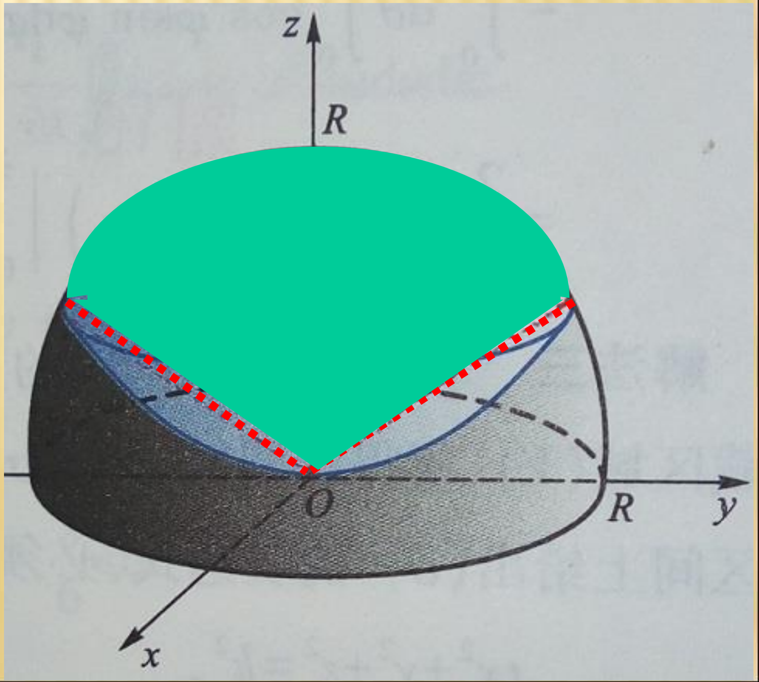
解1 (V)由二个球面围成，采用**球面坐标**变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi;$$

边界曲面$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2+(z-R)^2=R^2\end{cases}$ 化为$\begin{cases}r=R\\r=2R\cos\varphi\end{cases}$ 交线为$\begin{cases}r=R\\\varphi=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

积分区域(V)可分成二部分:

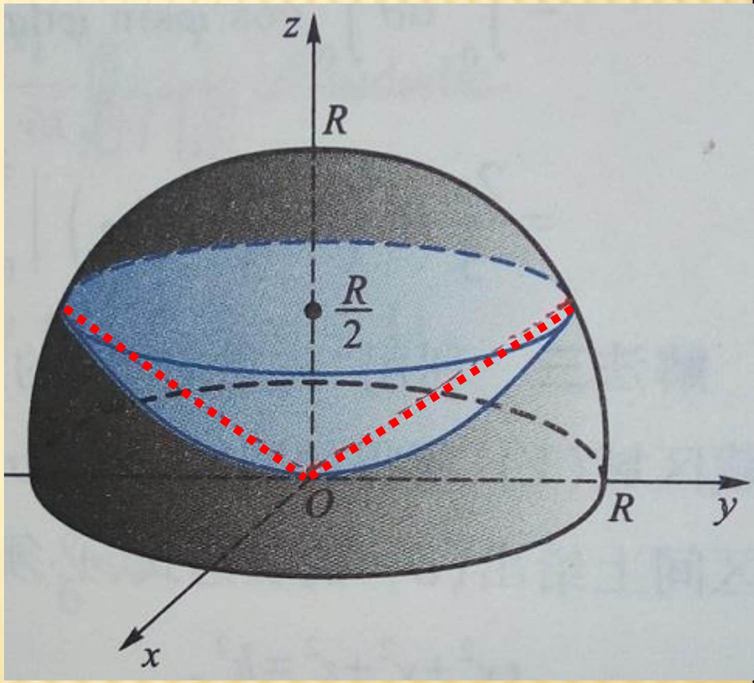
$$\begin{cases}0\le r\le R, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}, 0\le\theta\le 2\pi\\[2ex]0\le r\le 2R\cos\varphi, \dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



例 计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)} z^2 dV$,其中$(V)$由$x^2+y^2+z^2\le R^2$

及$x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$围成.

$$\begin{cases} 0\le r\le R, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}, 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 2R\cos\varphi, \dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$



$$I=\iiint\limits_{(V)} z^2 dV = \iiint\limits_{(V)} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^4 dr$$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4 dr$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

例 计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)} z^2 dV$,其中$(V)$由$x^2+y^2+z^2\le R^2$及$x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$围成.

解2 (V)由二个球面围成，采用**柱面坐标**变换 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z;$

边界曲面$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \end{cases}$

化为$\begin{cases} z=\sqrt{R^2-\rho^2} \\ z=R-\sqrt{R^2-\rho^2} \end{cases}$ 其交线在xoy面上的投影方程为$\begin{cases} \rho=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R \\ z=0 \end{cases}$

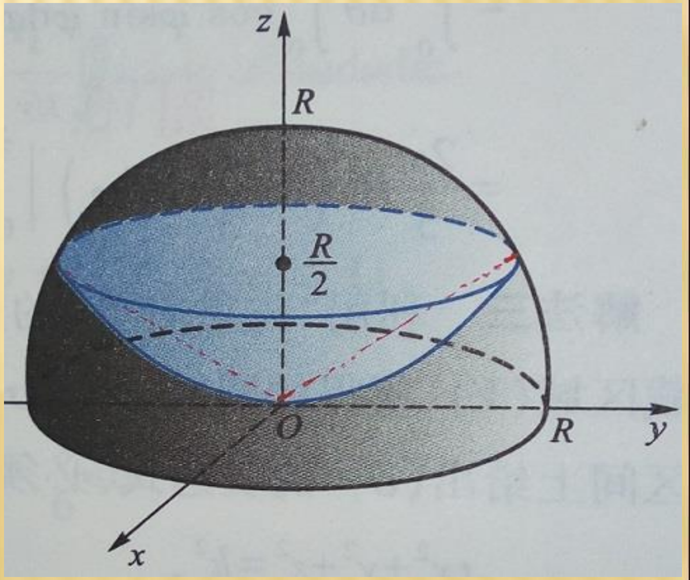
积分区域(V):

$R-\sqrt{R^2-\rho^2}\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2},0\le\rho\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}R,0\le\theta\le2\pi$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\rho\mathrm{d}\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z^2\mathrm{d}z$$

$$=\cdots=\frac{59}{480}\pi R^5$$

先单后重



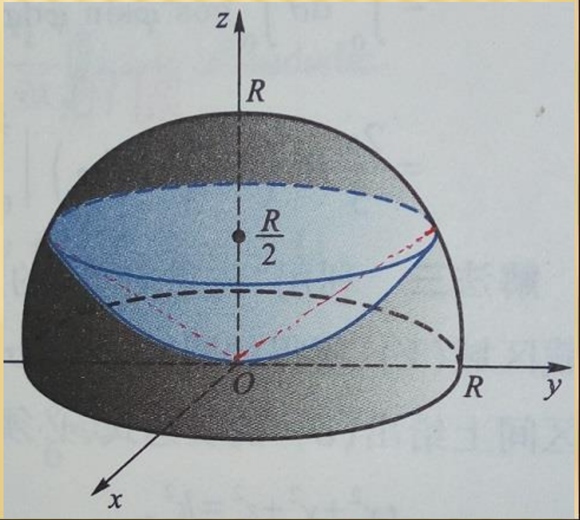
例 计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)} z^2 dV$,其中$(V)$由$x^2+y^2+z^2\le R^2$

及$x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$围成.

解 3 利用“先重后单”的方法. 用平行于 xOy 的平面 $z=c$去横截区域 (V), 所得的圆域记为 (σ_z), 由图可见, 为了在 z 的变 化区间上给出 (σ_z) 的表达式, 须求得两球面交线处 z 的值.

为此求解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \end{cases}$ 可得 $z=\dfrac{R}{2}$. 于是

$$(\sigma_z)=\begin{cases} \{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-(z-R)^2\}, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{R}{2}, \\ \{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\}, & \dfrac{R}{2}\leqslant z\leqslant R. \end{cases}$$



$$I=\int_0^{\frac{R}{2}} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma+\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

在平面 $z=z$ 上直接运用截圆面积公式可得

例 计算三重积分$I=\iiint\limits_{(V)} z^2 dV$,其中$(V)$由$x^2+y^2+z^2\le R^2$及$x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$围成.

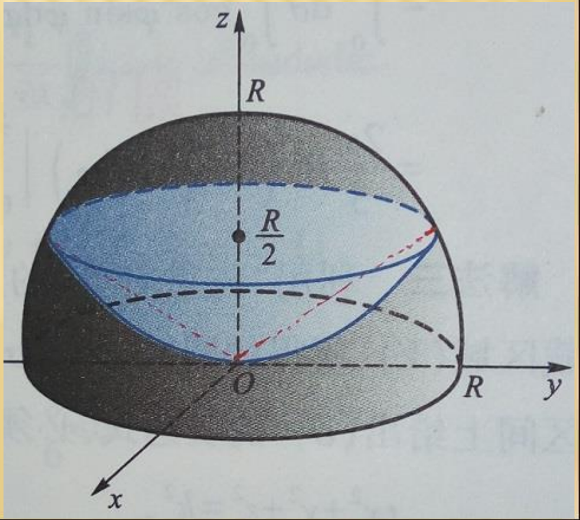
解 3 利用“先重后单”的方法.

$$I=\int_0^{\frac{R}{2}} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma+\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

$$=\int_0^{\frac{R}{2}} z^2\pi[R^2-(z-R)^2]\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

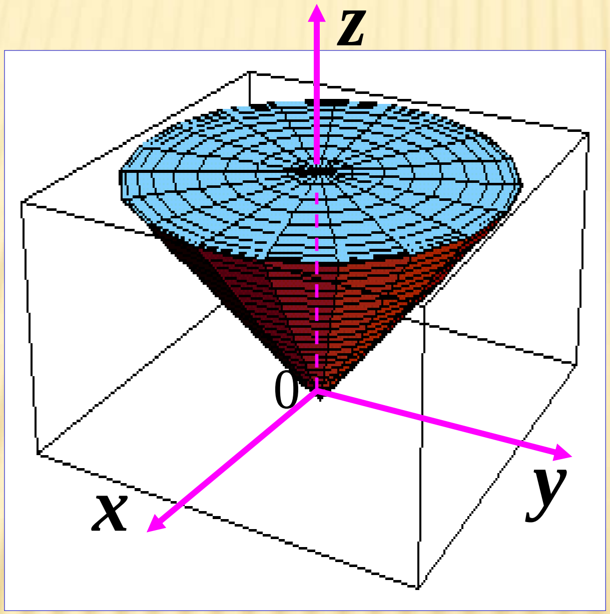
$$=\pi\left[\left(\frac{2R}{4}z^4-\frac{1}{5}z^5\right)\Bigg|_0^{\frac{R}{2}}+\left(\frac{R^2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}\right]$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5.$$



例 计算 $I = \iiint\limits_{(\Omega)} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$(\Omega)$是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$， 与平面$z = a \quad (a > 0)$所围的立体.

解1 采取球面坐标变换:

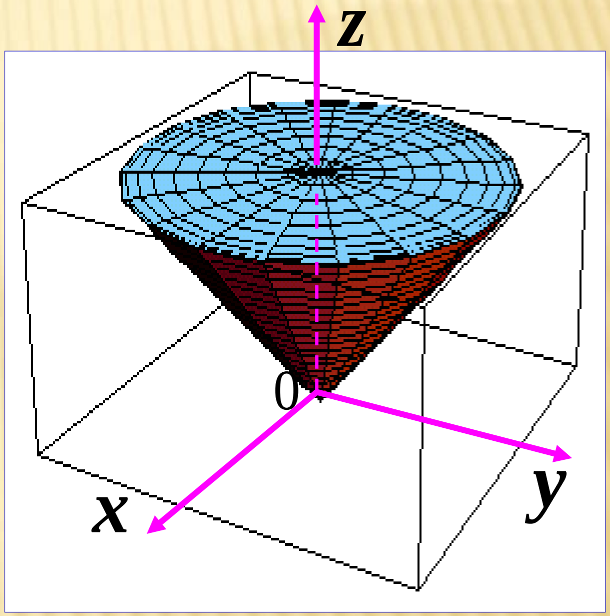


例 计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$(\Omega)$是锥面 $x^2+y^2=z^2$，与平面$z=a\quad(a>0)$所围的立体.

解1 采取球面坐标变换: $x=r\sin\varphi\cos\theta$

$y=r\sin\varphi\sin\theta$

$z=r\cos\varphi$



则 $z=a \Rightarrow r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$

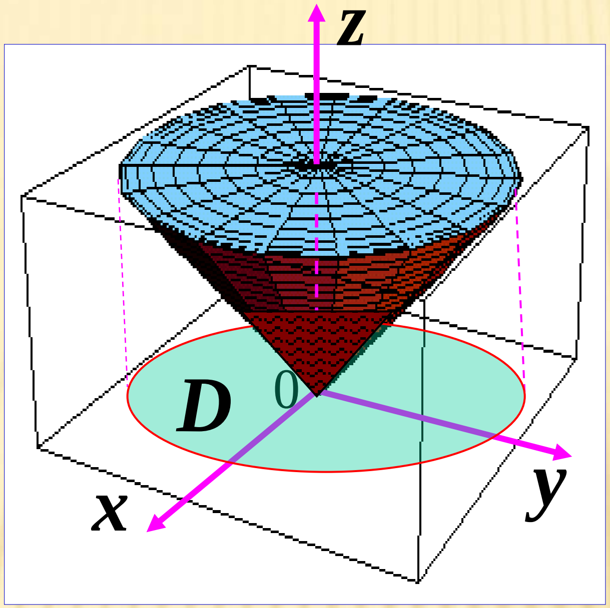
$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow (\Omega): 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le r\le\dfrac{a}{\cos\varphi}$. 从而

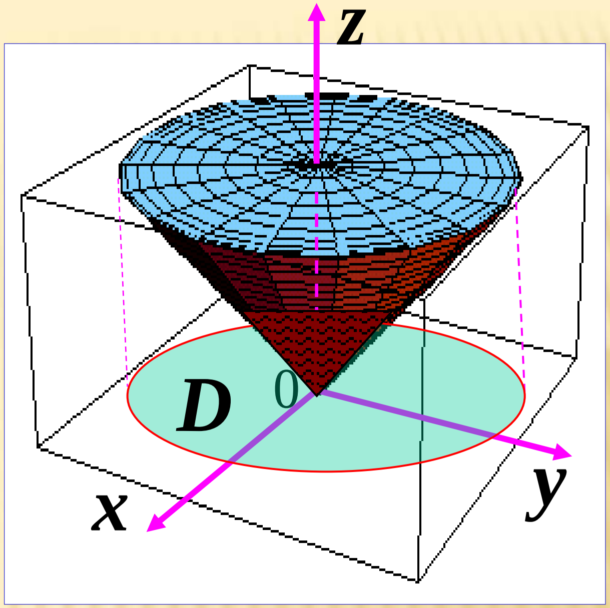
$$I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi}-0\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{10}a^5.$$

解2 采取柱面坐标变换:



解2 采取柱面坐标变换:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z; \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z = \rho,$$

几何体在xoy平面上的投影区域为:

$$D:\ x^2 + y^2 \le a^2,$$

$$\Rightarrow (\Omega): 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le a,\ \rho \le z \le a.$$

$$I = \iiint\limits_{(\Omega)} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \mathrm{d}\rho \int_\rho^a \rho^3 \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_0^a \rho^3 (a - \rho)\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[a \cdot \frac{a^4}{4} - \frac{a^5}{5}\right] = \frac{\pi}{10} a^5.$$

一般地,

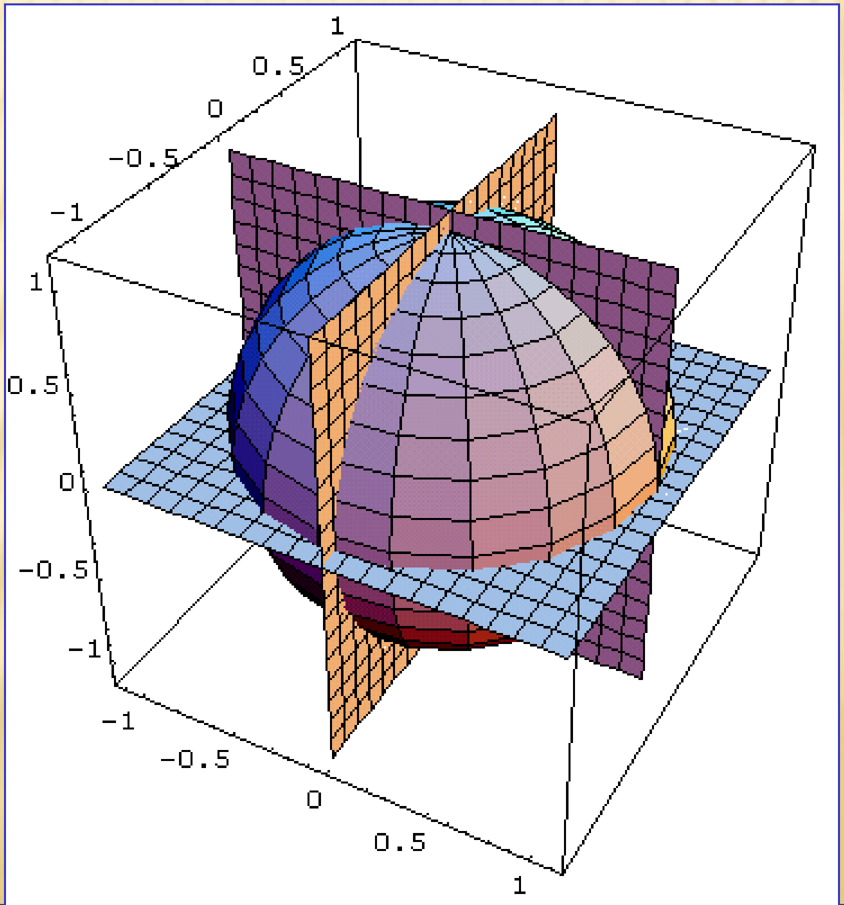
- 如果积分区域是球体、球体的一部分或被积函数中含有$x^2+y^2+z^2$时，用球面坐标系；

- 如果积分区域是圆柱体、圆柱体的一部分或被积函数中含有 x^2+y^2 或 y^2+z^2 或 z^2+x^2时，用柱面坐标系；

- 如果积分区域是正方体、长方体或它们的一部分时，用直角坐标系.

例 计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

其中积分区域$(\Omega)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$.



补充：利用对称性化简三重积分计算

使用对称性时应注意：

1、积分区域关于坐标面的对称性；

2、被积函数在积分区域上关于三个自变量的奇偶性.

一般地，当积分区域(Ω)关于xoy平面对称时，则:
若被积函数$f(x,y,z)$是关于z的奇函数，则三重积分为零；
若被积函数$f(x,y,z)$是关于z的偶函数，则三重积分为(Ω)在xoy平面上方的半个闭区域的三重积分的 2 倍.

查看更多

(1) 若空间闭区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 关于 xoy 面对称, 即 $\forall(x,y,z)\in\Omega, \exists(x,y,-z)\in\Omega$, 则:

当 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$, 即被积函数在 Ω 上关于 z 为奇函数时,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=0,$$

当 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$, 即被积函 数在 Ω 上关于 z 为偶函数时,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv,$$

其中Ω_1 是 xoy 面上侧的部分.

积分区域关于其它两个坐标平面 yoz, xoz 对称, 被积函数是 x, y 的奇、偶函数时也有上述的相应结论.

(2) 若空间闭区域是关于 z 轴对称,

即 $\forall(x,y,z)\in\Omega, \exists(-x,-y,z)\in\Omega$, 则:

当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 x, y 的奇函数时, $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=0$;

当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 x, y 的偶函数时,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv,$$

其中Ω_1 是 Ω 位于过 z 轴的平面一侧的部分.

(2) 若空间闭区域是关于 z 轴对称,

即 $\forall(x,y,z)\in\Omega,\exists(-x,-y,z)\in\Omega$, 则:

当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 x,y 的奇函数时, $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=0$;

当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 x,y 的偶函数时,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv,$$

其中Ω_1 是 Ω 位于过 z 轴的平面一侧的部分.

(3) 若空间闭区域 Ω 关于原点 O对称,

即$\forall(x,y,z)\in\Omega,\exists(-x,-y,-z)\in\Omega$, 则:

当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 x,y,z 的奇函数时, $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=0$;

当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 x,y,z 的偶函数时,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv$$

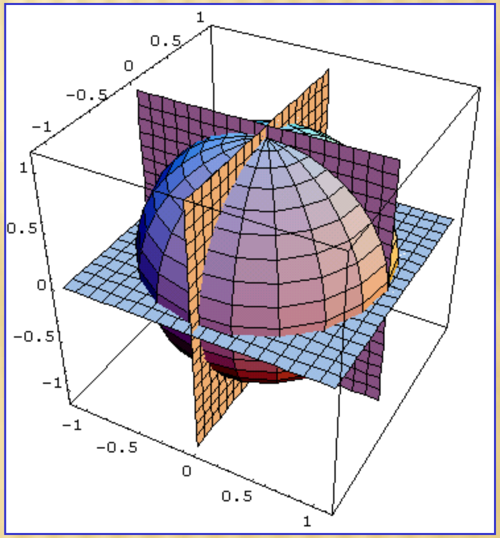
其中Ω_1 是Ω 位于过原点 O 的平面一侧的部分.

例　利用对称性简化计算 $I=\iiint\limits_{(\Omega)}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

其中积分区域$(\Omega)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解　积分域关于xoy坐标面对称，

被积函数是 z 的奇函数,

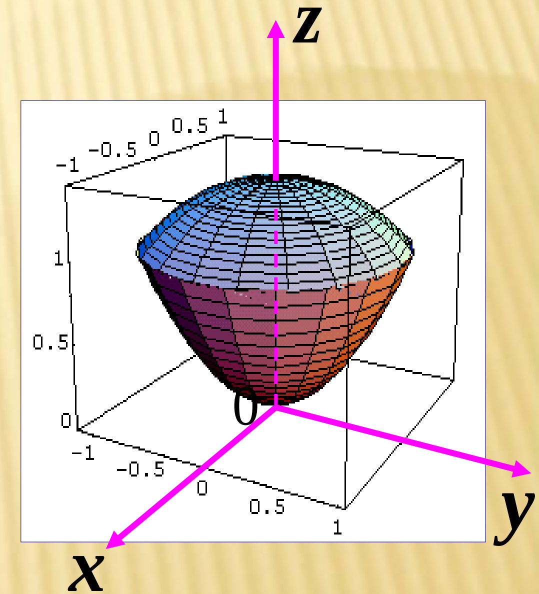


所以

$$\iiint\limits_{(\Omega)}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz=0.$$

例 计算 $\iiint\limits_{(\Omega)}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(\Omega)$是由抛物面

$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=2$所围成的空间闭区域.



解 $\because\ (x+y+z)^2$

$=x^2+y^2+z^2+2(\underline{xy+yz}+zx)$

其中$xy+yz$是关于y的奇函数,

且(Ω)关于zox面对称. $\therefore\ \iiint\limits_{(\Omega)}(xy+yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

同理 $\because$ zx是关于x 的奇函数, 且(Ω)关于yoz面对称,

$\therefore\ \iiint\limits_{(\Omega)}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$

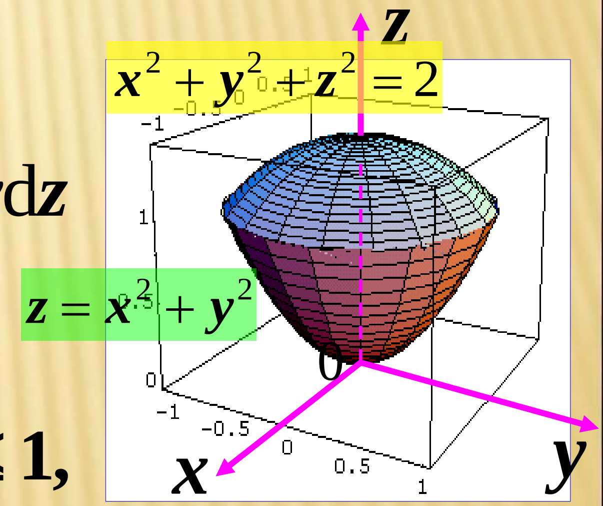
$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

积分区域关于平面$y=x$对称, (x,y,z)关于$y=x$的对称点是(y,x,z)

$$令\begin{cases}x=y\\ y=x\\ z=z\end{cases},则\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(y,x,z)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1,\ \text{则}:\iiint\limits_{(\Omega)}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{(\Omega)}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

则:

$$I=\iiint\limits_{(\Omega)}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{(\Omega)}(2x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



采用柱面坐标变换,则

区域在xoy平面上的投影区域为$(\sigma_{xy}):x^2+y^2\le 1,$

$$0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ \rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2}.$$

$$\therefore I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho(2\rho^2\cos^2\theta+z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{60}(90\sqrt{2}-89).$$

例. 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

其中 (Ω) 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ z=1,\ z=4$ 围成.

解:

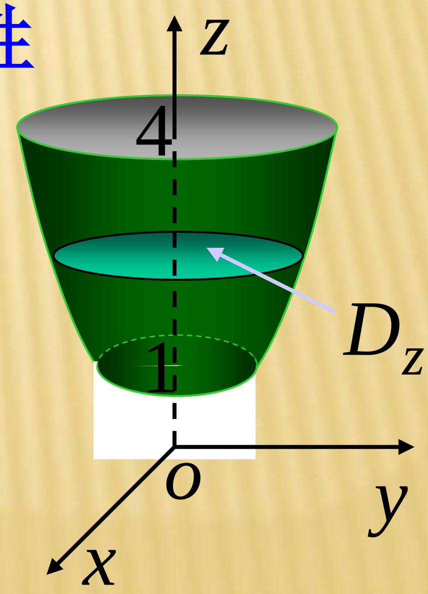
$$I=\iiint_{(\Omega)}\boxed{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+5\iiint_{(\Omega)}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

利用积分区域关于平面y=x的对称性

$$=\frac{1}{2}\iiint_{(\Omega)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ +0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\,\mathrm{d}r=21\pi$$



小结

三重积分的定义和计算

（计算时将三重积分化为三次积分）

在直角坐标系下的体积微元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

三重积分换元法 $\begin{cases}\text{柱面坐标}\\ \text{球面坐标}\\ \text{曲线坐标}\end{cases}$

（1） 柱面坐标的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$

（2） 球面坐标的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

（3） 曲线坐标下的体积微元 Jacobi 行列式的绝对值 伸缩比

（4） 对称性、奇偶性简化运算

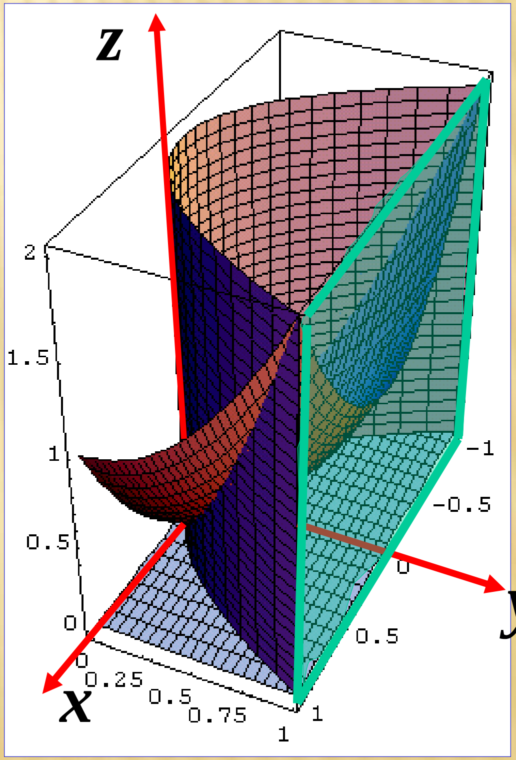
例．化三重积分 $I=\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中 积分区域 (Ω) 为由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2, y=1, z=0$ 所围成的空间闭区域.

解 如图，(Ω):

$$-1\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1,$$

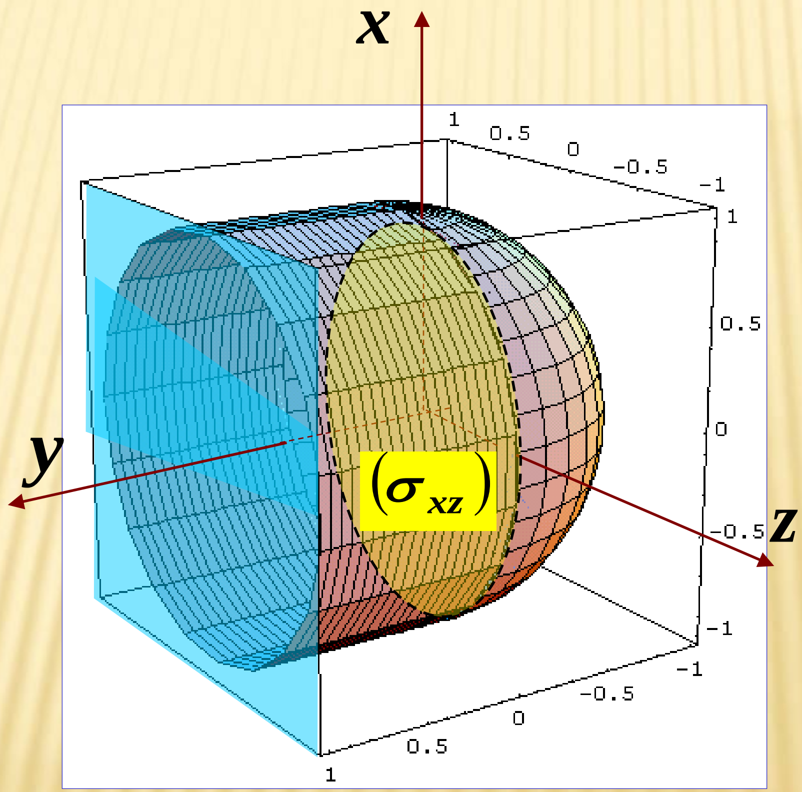
$$0\le z\le x^2+y^2.$$ （先单后重）

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$



例. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(\Omega)} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$(\Omega)$由曲面

$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$所围成.

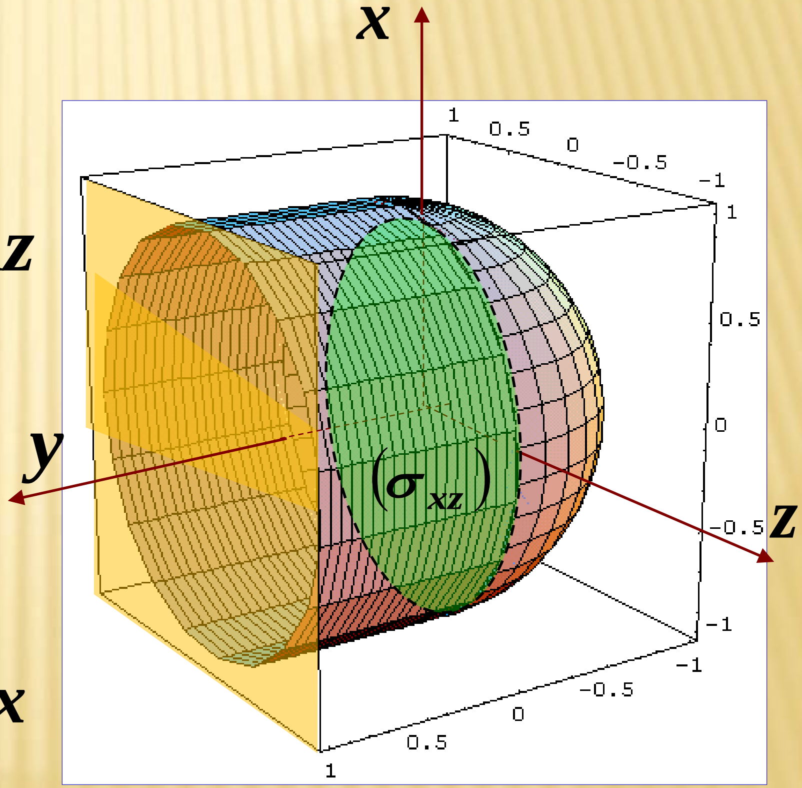


例. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(\Omega)} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 (Ω) 由曲面

$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成.

解 如图，所围几何体在 xoz 平面上的投影为:

$$(\sigma_{xz}):\ \ x^2+z^2\le 1, y=0$$



$$I=\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

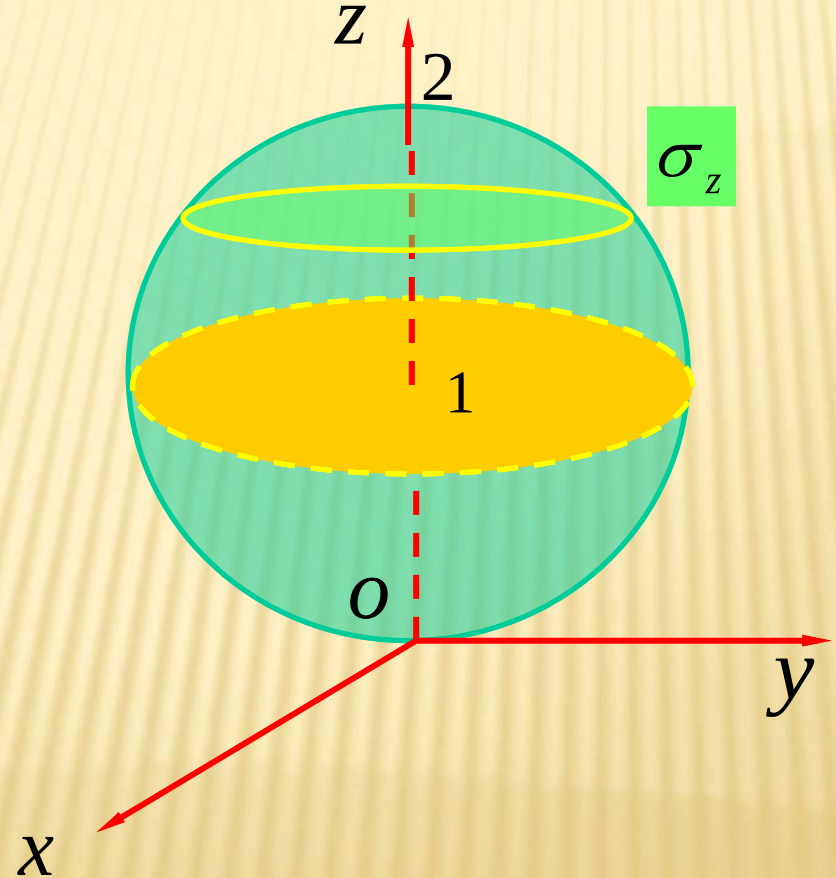
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,\frac{x^2+z^2}{2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(x^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)dx=\frac{28}{45}.$$

练习1 试用三种坐标系分别计算三重积分

$$I=\iiint_{(V)} z dv, \text{其中}(V): x^2+y^2+z^2 \le 2z.$$



练习1 试用三种坐标系分别计算三重积分

$$I=\iiint_{(V)} z dv, \text{其中}(V): x^2+y^2+z^2\le 2z.$$

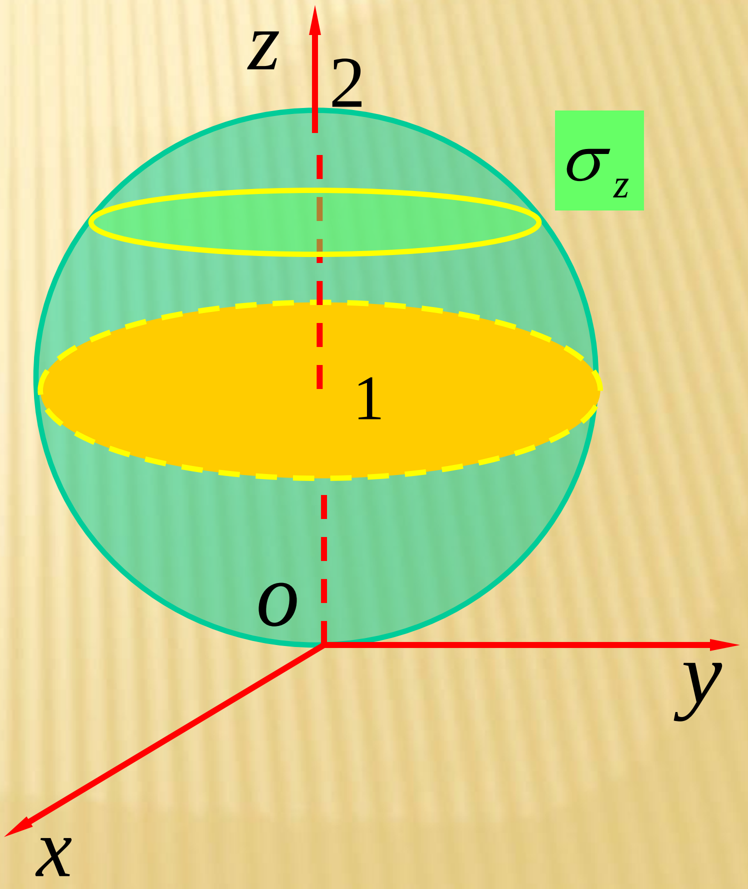
解法1 直角坐标系(切片法)

$(\sigma_z): x^2+y^2\le 2z-z^2;$ $0\le z\le 2.$

$$\therefore I=\int_0^2\left[\iint_{(\sigma_z)} z d\sigma\right]dz$$

$$=\int_0^2 z\sigma_z dz$$

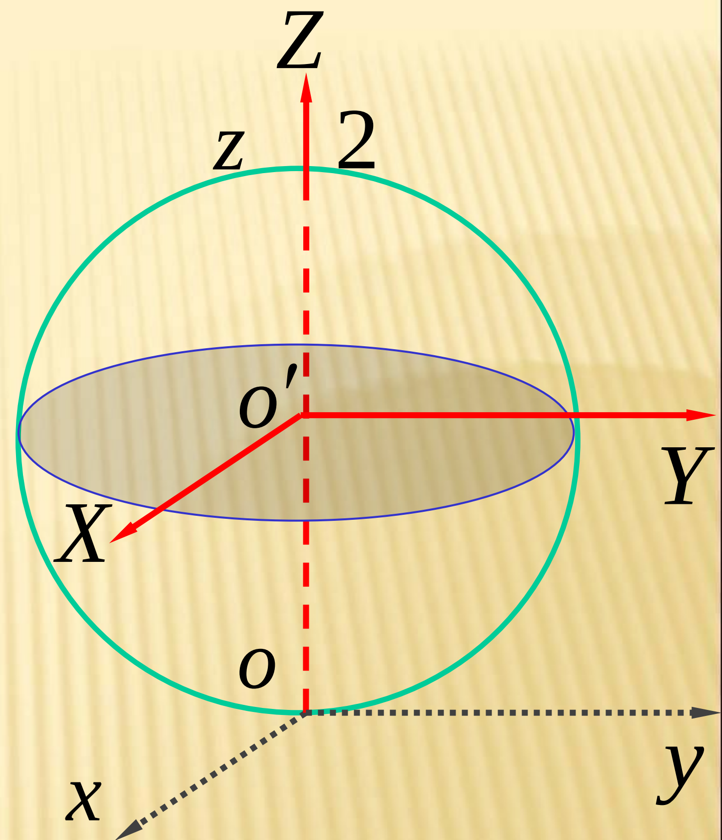
$$=\int_0^2 z\pi(2z-z^2)dz=\frac{4\pi}{3}.$$



解法4 曲线坐标系

$$(V): x^2+y^2+z^2 \le 2z$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$



$$令:\begin{cases} x=X \\ y=Y \\ z-1=Z \end{cases}$$

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$I=\iiint_{(V)} z\,dv=\iiint_{(V')}(Z+1)\cdot 1\,dv'=0+\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4\pi}{3}.$$

Z的奇函数在关于$XO'Y$面对称的球域上对Z积分为0