大学物理

张磊 （13072919527）
B824，Cyrus Tang Building

班级QQ群、思源学堂

物理研讨课今天报名

电话：13072919527

办公室：仲英楼 B824

E-mail：zhangleio@mail.xjtu.edu.cn

爱课程mooc网站：

http://www.icourses.cn/imooc/

热学、方爱平

大学物理——机械振动、波和波动光学、刘丹东

2023秋 大学物理

群号: 782170668

扫一扫二维码，加入群聊

QQ

本学期的任务和要求

内容较多 覆盖面宽

- 机械振动
- 机械波
- 波动光学

整体相关性

- 热力学与气体动理论

宏观与微观

- 量子物理基础
- 激光、固体能带理论

整体相关性

• 概念 • 方法 • 联系

- 作业： (待定)

  举一反三，一题多解，扎实练习

  以平时成绩(20%)记入期末成绩

  注意：按学校规定缺交作业1/3以上者，不能参加期末考试

- 期中考试：作为平时成绩(30%)记入期末成绩（8周周末）

- 期末考试： 占总成绩50%

  题型：选择题、填空题、计算及证明题等

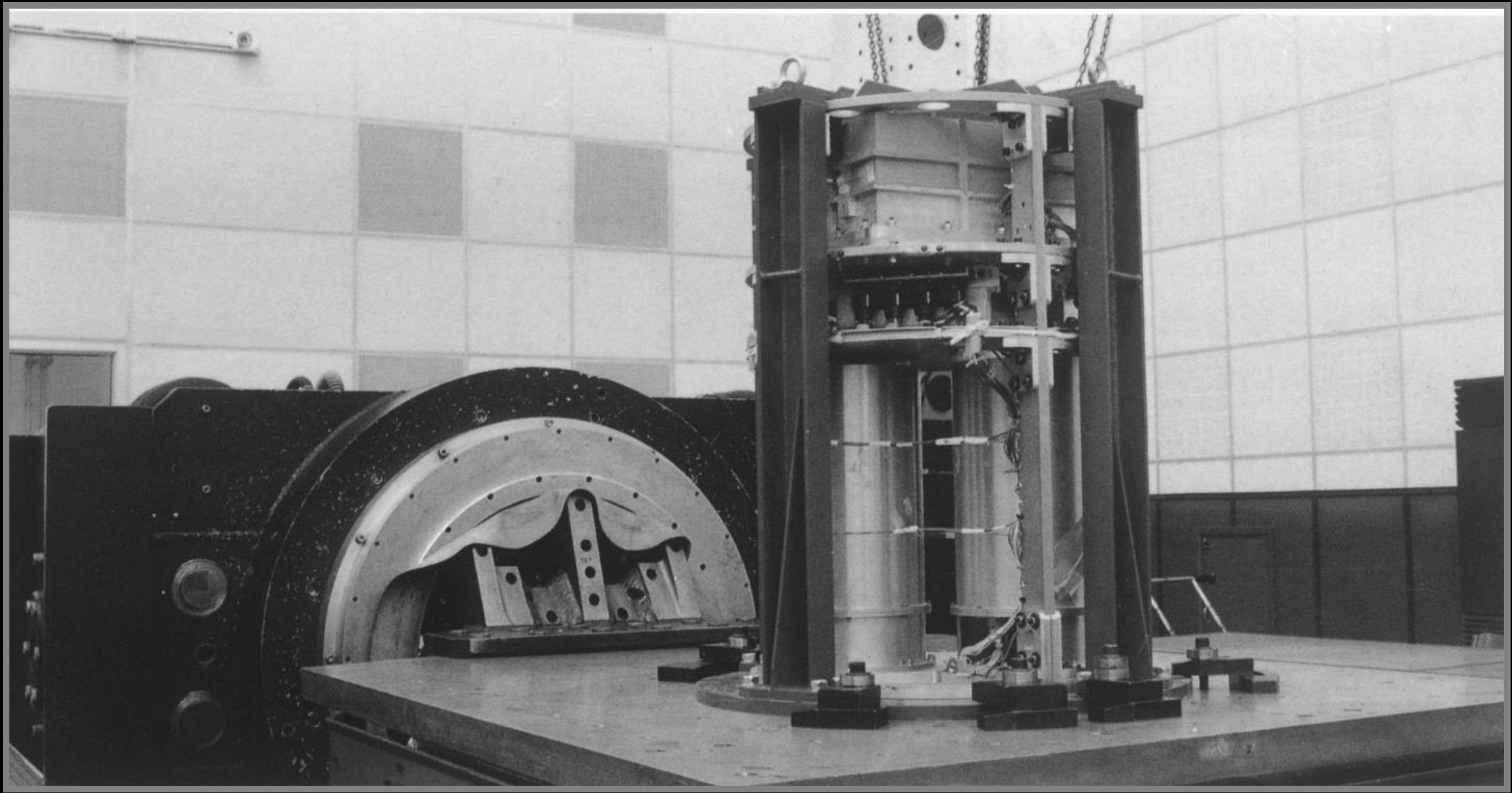
- 答疑时间安排：

  2-16周 周一，周三 晚 7:00 ~ 9:00 地点：主楼C-202

  另每两周安排单独答疑一次：地点、时间：待定

第三篇 振动 波动 光学

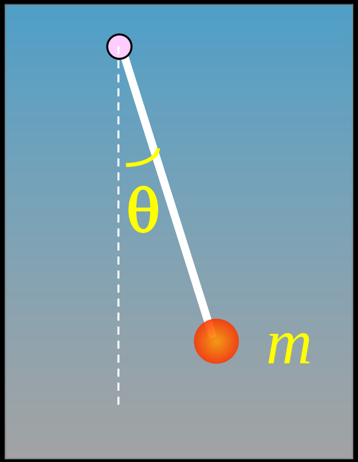
第7章 机械振动



§7.1 简谐振动

一. 简谐振动

定义： $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

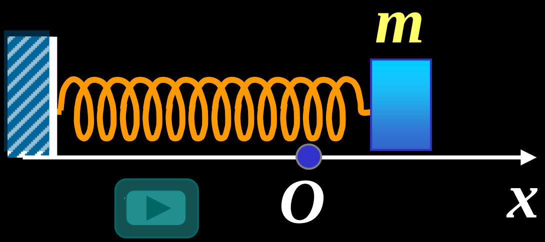


二. 描述简谐振动的特征量

1. 振幅 *A*—由初始条件决定

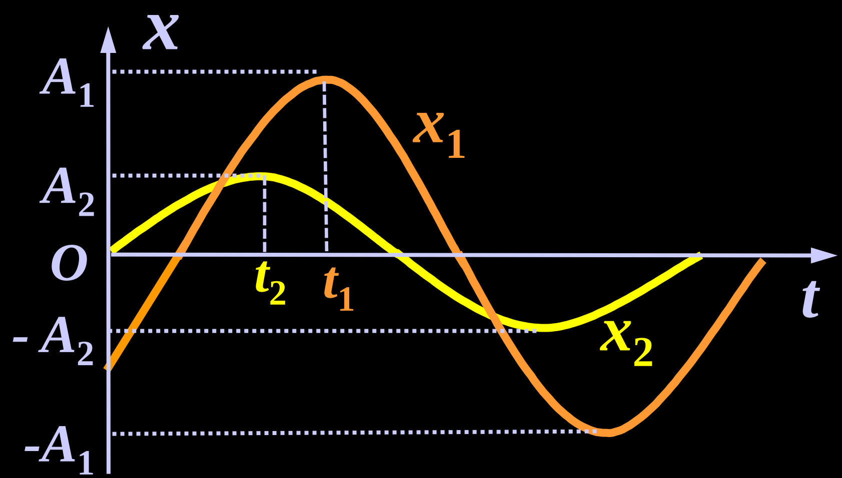
2. 周期 *T* 和频率 *ν*—固有　　$\nu = 1/T$ (Hz)

3. 相位—由初始条件决定



$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

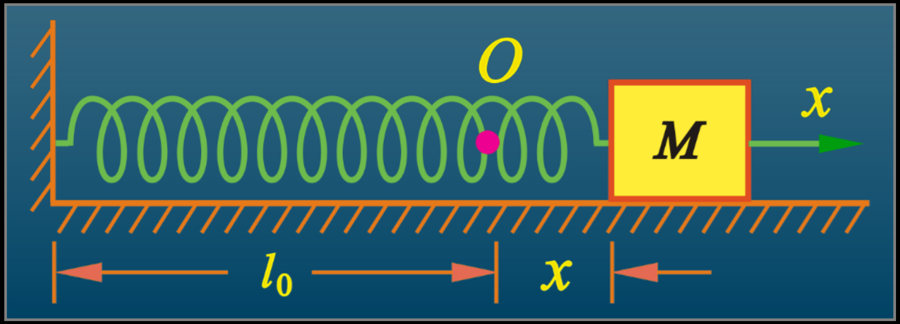
- **超前和落后**



若 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，则 x_2 比 x_1 **早** $\Delta\varphi$ 达到正最大，称 x_2 比 x_1 **超前** $\Delta\varphi$（或 x_1 比 x_2 落后 $\Delta\varphi$）。

三. 谐振子

1. 受力特点:



线性回复力 $F = -kx$

2. 动力学方程

$$F = -kx = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Leftarrow$$

动力学方程

其中 ω 为 固有(圆)频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

3. 速度和加速度

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = A_v \cos(\omega t + \varphi_v) \qquad \boxed{\varphi_v = \varphi + \frac{\pi}{2}}$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$= A_a \cos(\omega t + \varphi_a) \qquad \boxed{\varphi_a = \varphi + \pi}$$

4. 由初始条件求振幅和初相位

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x_0 = A\cos\varphi$$

$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}} \qquad \boxed{\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}\right)}$$

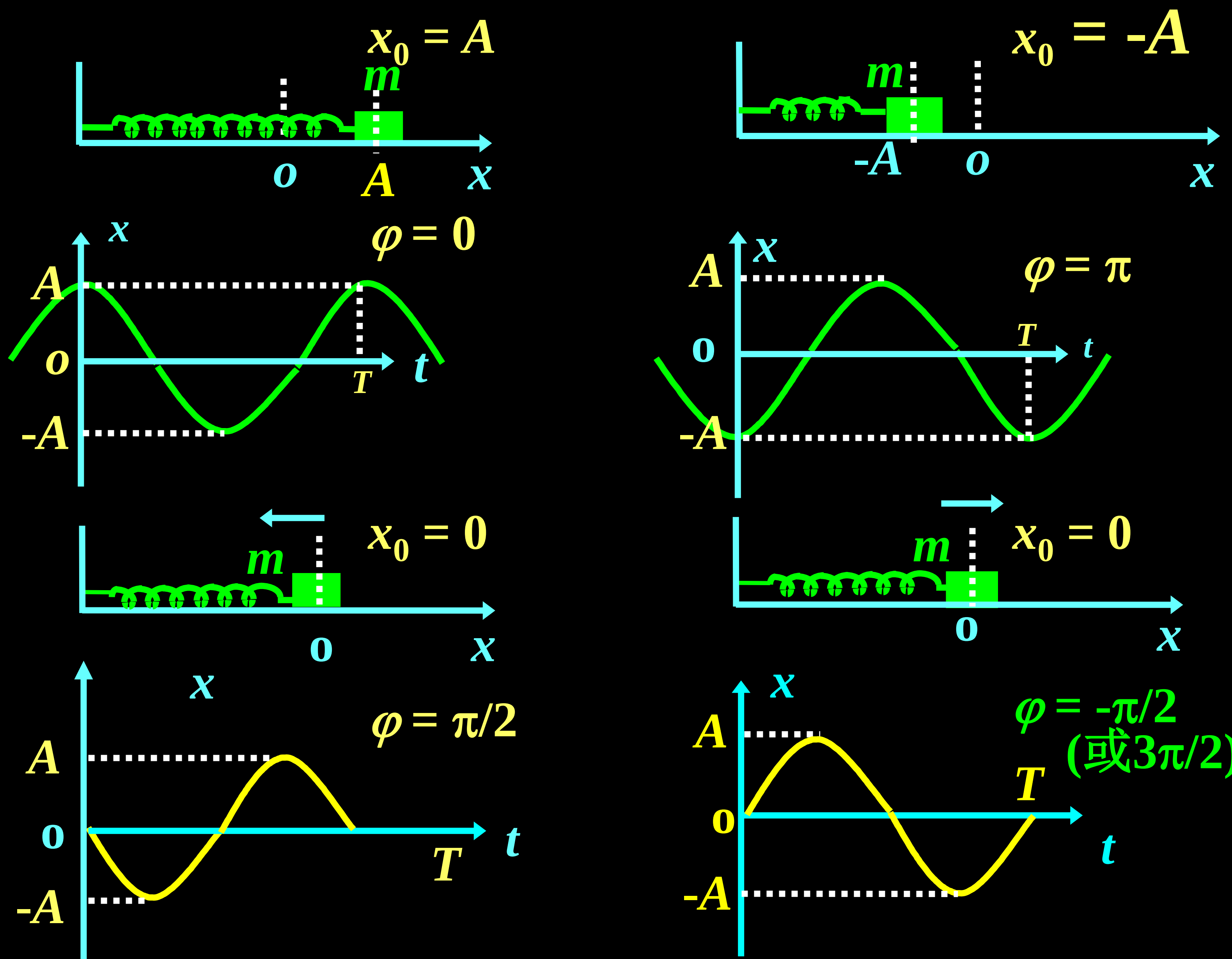
另： $$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k} = \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

振子的初始弹性势能　*振子的初始动能*

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

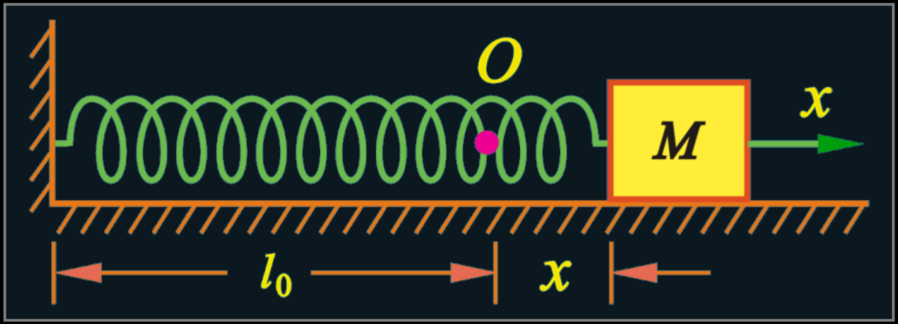
注意: 如何最后确定 φ ?

初相φ的数值决定于初始条件



例 一质点沿X轴作简谐振动，$A=0.20m, T=2s$, 当$t=0$时，质点对平衡位置的位移$x_0=0.10m$，向轴正向运动.

求 简谐振动表达式



解 $x=A\cos(\omega t+\varphi)=0.2\cos(\pi t+\varphi)$

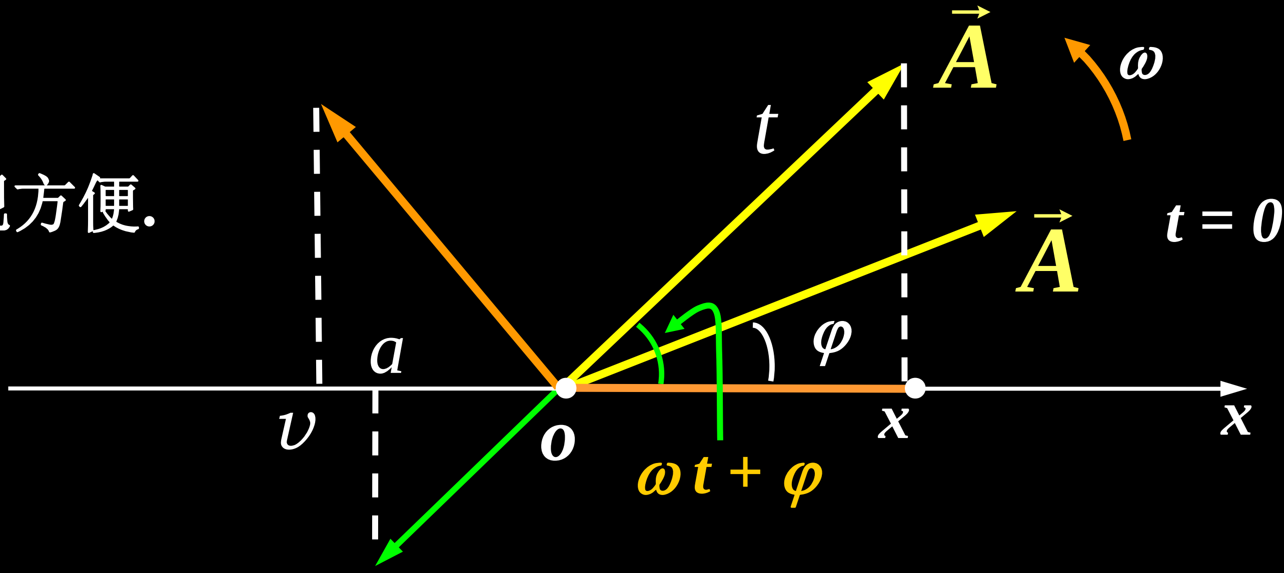
$$t=0\text{时}, \cos\varphi=\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

向x轴正向运动 $\upsilon_0>0 \Longrightarrow \varphi=-\frac{\pi}{3}$

$$x=0.20\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})$$

五. 旋转矢量法

特点:直观方便.



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$= A_\upsilon \cos(\omega t + \varphi_\upsilon)$$ 速度方向?

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi) = A_a \cos(\omega t + \varphi_a)$$

物理模型与数学模型比较：

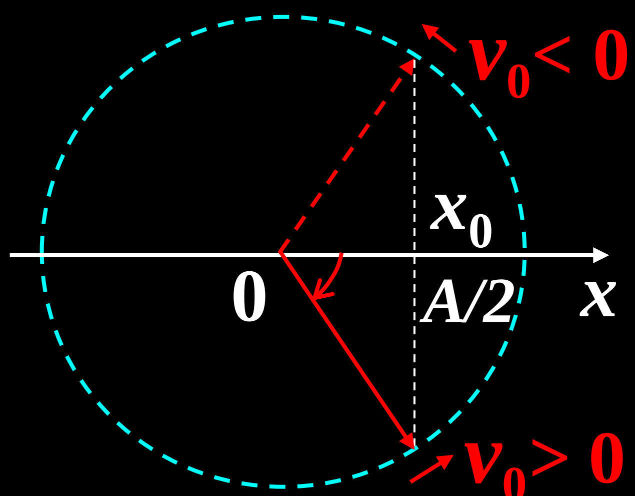
	谐振动	旋转矢量
A	振幅	半径
φ	初相	初始角坐标
$\omega t+\varphi$	相位	角坐标
ω	圆频率	角速度
T	谐振动周期	圆周运动周期

利用旋转矢量法确定简谐振动的初位相:

(1)由x的值得两根矢量

(2)根据速度的正负取其一

例：$\left.\begin{array}{l} x_0 = A/2 \\ v_0 > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \varphi = ?$



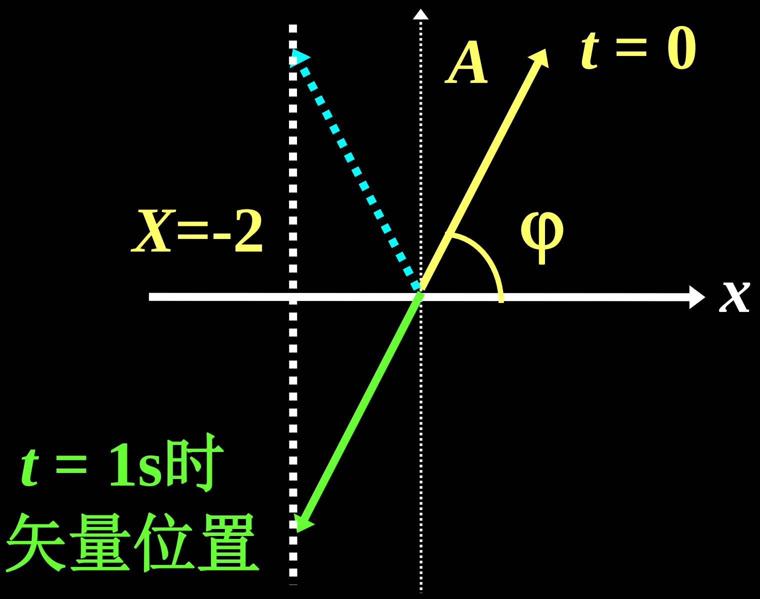
答：$\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

用旋转矢量法研究振动合成也很方便。

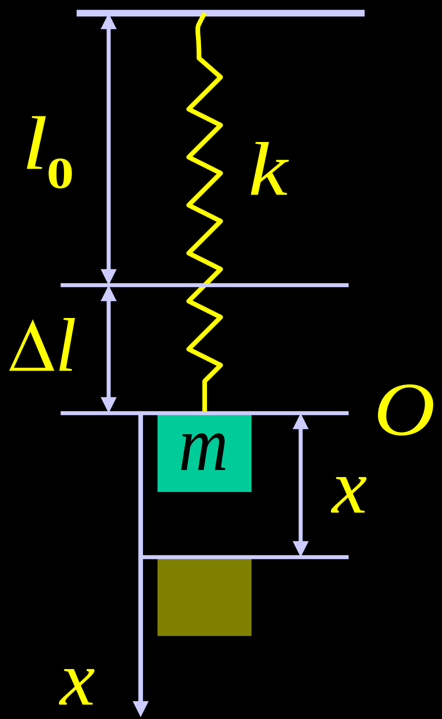
[例题]已知简谐振动，$A= 4$ cm，$\nu = 0.5$ Hz, t =1s时 x =-2cm且向x正向运动，写出振动表达式。

$$\varphi = \pi/3,$$

$$x = 4\cos(\pi t + \pi/3)\ \text{cm}$$



例 竖直方向的弹簧振子，求振动方程。



解 分析系统受力

线性回复力

$$\sum f_i = mg - k(\Delta l + x) = mg - k\Delta l - kx = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

- 该运动是谐振动
- 重力仅改变平衡位置

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$= 0.17\cos(\omega t - 0.939)\ \text{m}$$

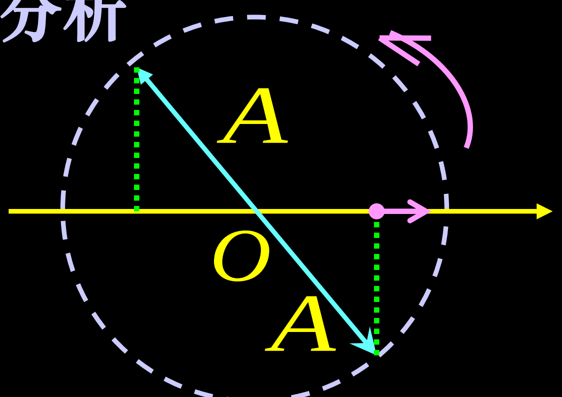
- 初始条件：

$$x_0 = 10\ \text{cm}$$
$$v_0 = 2.4\,\text{m/s}$$
$$m = 0.4\ \text{kg}$$
$$k = 0.125\,\text{N/cm}$$

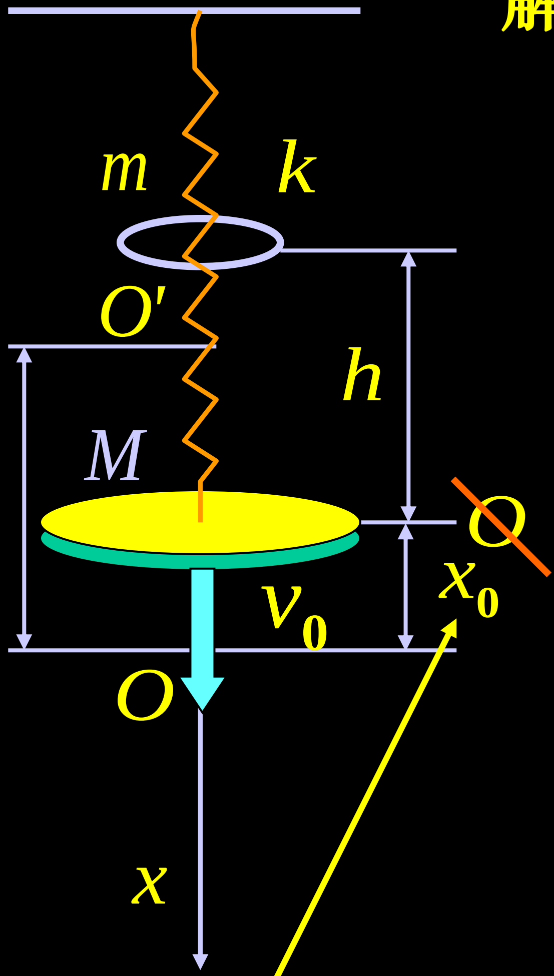
$$A = 0.17m$$

$$\varphi_0 = -53.8^0, \cancel{126.2^0}$$

- 旋转矢量法分析



例 一振动系统，如图示。求 振动方程？



解： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow A, \omega, \varphi_0 = ?$

- 频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$
- 小环作自由落体 $v = \sqrt{2gh}$
- 碰撞时，系统动量守恒

$$mv = (M+m)v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

$$x_0 = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{Mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi_0 = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

掌握初始条件的确定方法

简谐振动的能量(以水平弹簧振子为例)

1. 动能

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)\begin{cases}E_{k\max}=\frac{1}{2}kA^2\\E_{k\min}=0\end{cases}$$

$$\overline{E}_k=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}E_k\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

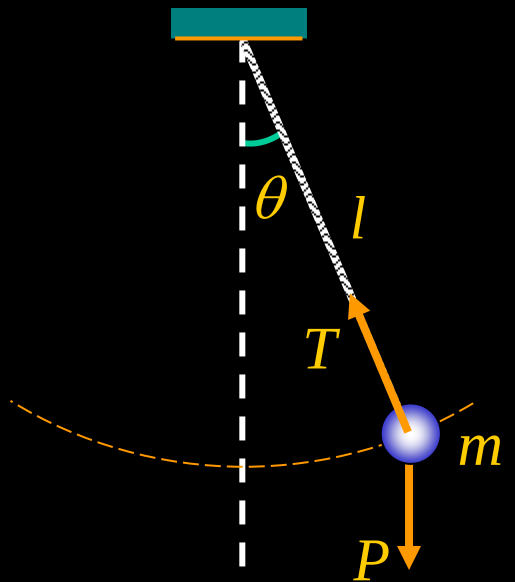
2. 势能

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\qquad \overline{E}_p=\frac{1}{4}kA^2$$

3. 机械能

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$$ (简谐振动系统机械能守恒)

单摆



以小球为研究对象，作受力分析.

P 重力, T 绳的拉力.

设 θ 角沿逆时针方向为正.

$$P+T=ma$$（牛顿第二定律）

沿切向方向的分量方程为

$$-P\sin\theta=m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Leftarrow \begin{cases} \upsilon=l\dot{\theta} \\ \sin\theta=\theta-\frac{1}{6}\theta^3+\cdots\approx\theta \end{cases}$$（小角度时）

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

令 $\omega^2=\frac{g}{l}$

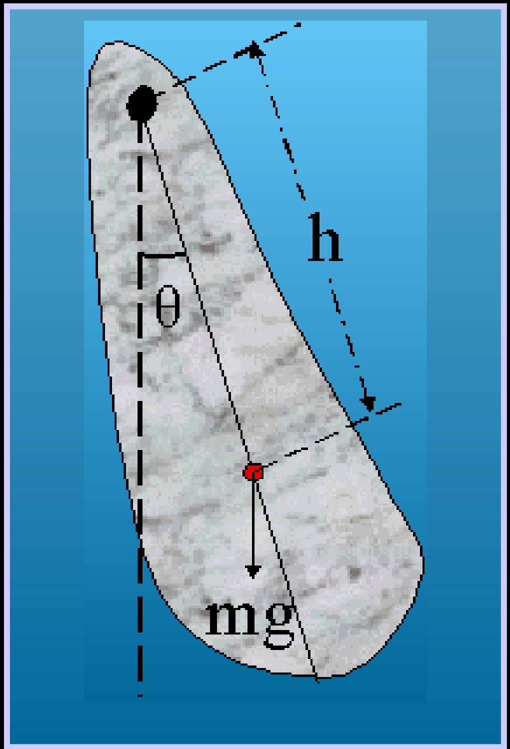
$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

- **结论:** 小角度摆动时，单摆的运动是谐振动.

周期和角频率为: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

例：复摆（物理摆）

如图所示, 设刚体对轴的转动惯量为J.
设 $t = 0$ 时摆角向右为最大，且角度为 θ_0.



求 振动周期和振动方程.

解 (刚体绕定轴转动定律)

$$M = -mgh\sin\theta = J\beta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J}\sin\theta = 0$$

$$\theta < 5^\circ \text{时}, \sin\theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgh}{J}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}}$$

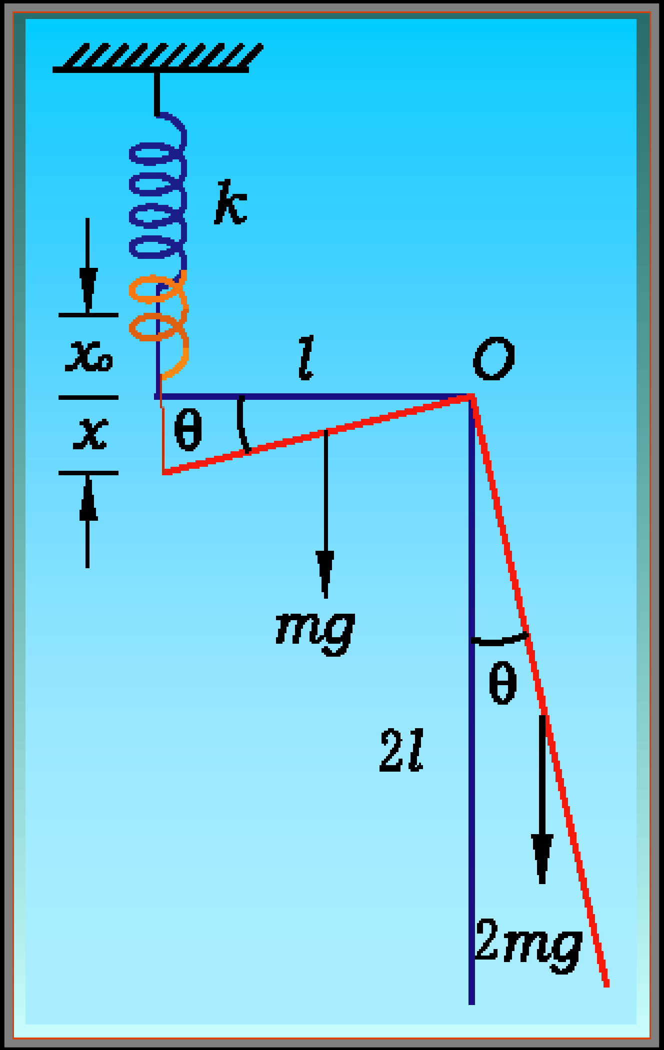
单摆

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

振动方程 $\theta = \theta_0 \cos\omega t$

例 如图所示，一直角均质细杆，水平部分杆长为 l，质量为 m，竖直部分杆长为 $2l$，质量为 $2m$，细杆可绕直角顶点处的固定轴 O 无摩擦地转动，水平杆的未端与劲度系数为 k 的弹簧相连，平衡时水平杆处于水平位置。

求 杆作微小摆动时的周期。



解

$$kx_0 l = mg\frac{l}{2}$$

$$\boxed{M = mg\frac{l}{2}\cos\theta - 2mgl\sin\theta - k(x_0 + x)l\cos\theta}$$

$$\cos\theta \approx 1; \sin\theta \approx \theta; x \approx l\theta$$

$$M = -(2mgl + kl^2)\theta$$

刚体绕定轴转动定律

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -(2mgl + kl^2)\theta \quad \leftarrow \quad J = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{3}(2m)(2l)^2 = 3ml^2$$

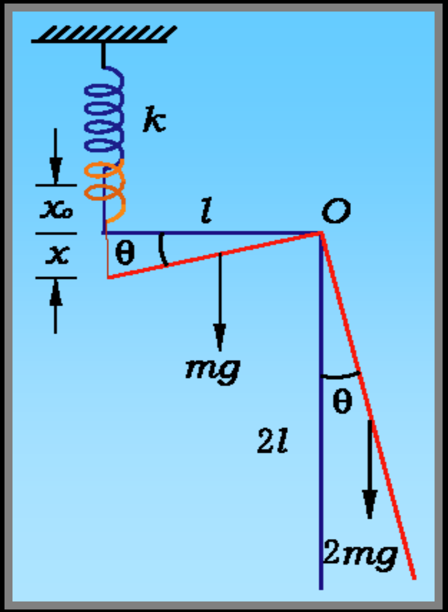
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2mg + kl}{3ml}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mg + kl}{3ml}}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3ml}{2mg + kl}}}$$

能量的方法(*t* 时刻系统的能量)

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2-mg(\frac{1}{2}l\sin\theta)$$
$$+2mgl(1-\cos\theta)=C$$



$$J=\frac{1}{3}ml^2+\frac{1}{3}(2m)(2l)^2=3ml^2$$

$$J\omega\ddot{\theta}\ +k(x_0+x)\dot{x}-[\frac{mgl}{2}\cos\theta-2mgl\sin\theta]\dot{\theta}=0$$

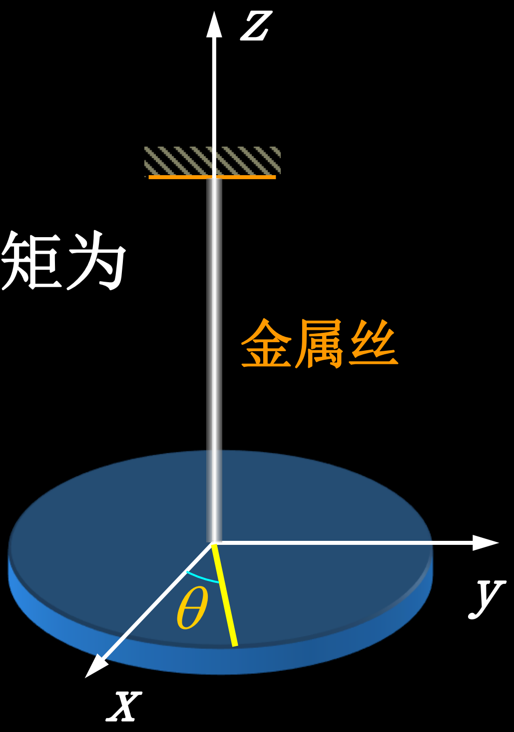
$$\cos\theta\approx1;\sin\theta\approx\theta;x\approx l\theta\quad kx_0l=mg\frac{l}{2}$$

$$J\ddot{\theta}\ +(2mgl+kl^2)\theta=0$$ （其它步骤同上）

扭摆

以圆盘为研究对象

在 θ（扭转角）不太大时，圆盘受到的力矩为



$$M_z = -D\theta$$ （D为金属丝的扭转系数）

$$J_z\ddot{\theta} = -D\theta$$ （刚体绕定轴转动定律）

$$\ddot{\theta} + \frac{D}{J_z}\theta = 0$$

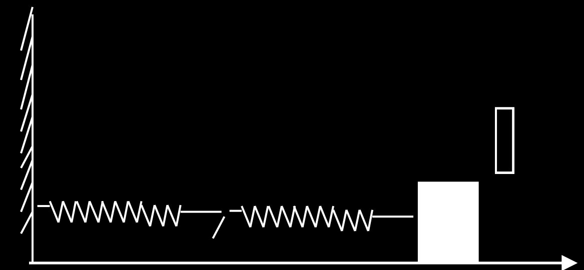
令 $\omega^2 = \dfrac{D}{J_z}$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

➢ 结论：在扭转角不太大时，扭摆的运动是谐振动.

周期和角频率为： $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_z}{D}}$　　$\omega = \sqrt{\dfrac{D}{J_z}}$

弹簧的串并联问题



串联：$F = F_1 = F_2$

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

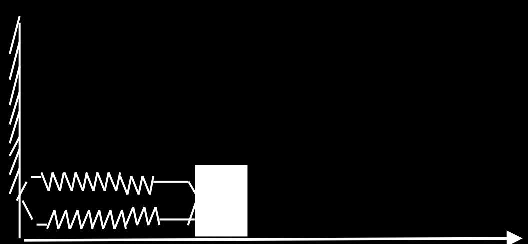
思考1：等分n段，每段k_0=?

$k_0=nk$

思考2：n段串联，等效k_0=?

$k_0=k/n$

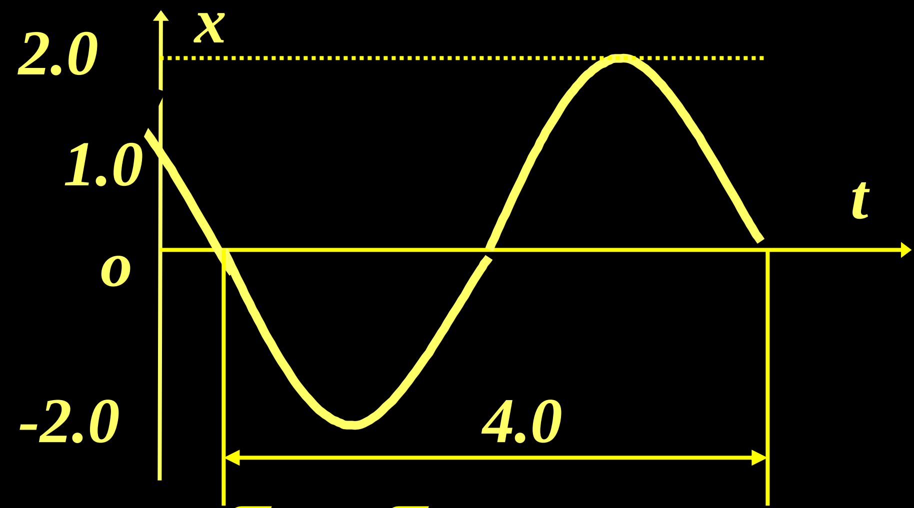
并联：$x = x_1 = x_2$



$$F = F_1 + F_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

$$k = k_1 + k_2$$

例 有一振动曲线，如图示。试求物体振动方程和第一次通过零值的时间。



解: 解（1）求振动方程

$$\boxed{x = 2.0\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi\right)}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 1.0$$

$$1.0 = 2.0\cos\varphi \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = -\omega A\sin\varphi < 0$$

$$\boxed{x = 2.0\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)(SI)}$$ —— 运动学方程

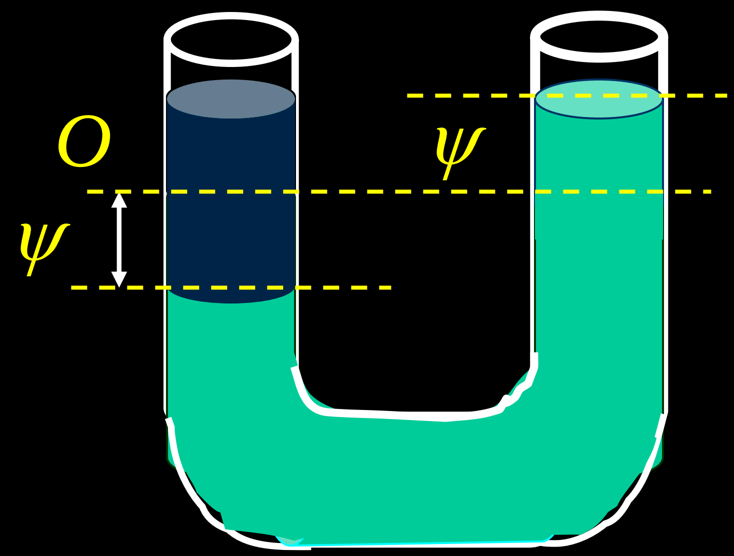
解（2）

$$\boxed{x = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0} \Rightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{3}(SI)}$$

例　连通管中液体柱的运动，如图示。　已知液体的总质量为 $m = \rho LS$，忽略粘滞阻力。求振动周期。

解：液体柱内各部分具有相同速率。



t 时刻，系统动能为

$$E_K = \frac{1}{2}\rho LS\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

t 时刻，系统势能为

$$E_p = \rho\psi Sg\psi = \rho Sg\psi^2$$

t 时刻，系统机械能 $E = E_K + E_P = C$ —— 机械能守恒

• 时间求导：$\rho LS\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right) + 2\rho Sg\psi\frac{d\psi}{dt} = 0$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \quad \boxed{\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{2g}{L}\psi = 0}$$

简 谐 振 动 总 结

分析振动系统 → 求动力学方程 → 求运动学方程

- 动力学特征

  $F = -kx$

- 运动学特征

  $a = -\omega^2 x$

- 能量特征

  $E = C$

- 求解圆频率

  ω

- 求解振动周期

  $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

- 求解振幅 A
- 求解初相 φ_0

- 初始条件
- 曲线法
- 旋转矢量法

§7.2 简谐振动的合成

一. 同方向同频率的简谐振动的合成

1. 分振动：

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

2. 合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= (\underbrace{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}_{A\cos\varphi})\cos\omega t - (\underbrace{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}_{A\sin\varphi})\sin\omega t$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$\boxed{x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

结论： 合振动 x 仍是简谐振动

讨论: $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

(1)若两分振动**同相**，即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$

则 $A=A_1+A_2$，**两分振动相互加强**；当 $A_1=A_2$ 时， $A=2A_1$

(2)若两分振动**反相**，即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$

则 $A=|A_1-A_2|$，**两分振动相互减弱**；当 $A_1=A_2$ 时， $A=0$

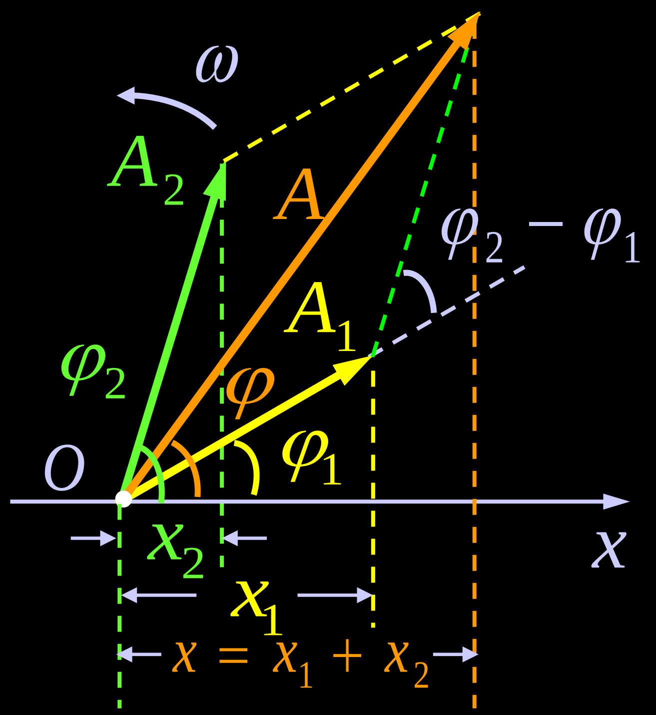
- **旋转矢量法处理谐振动的合成**

$$x=x_1+x_2$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

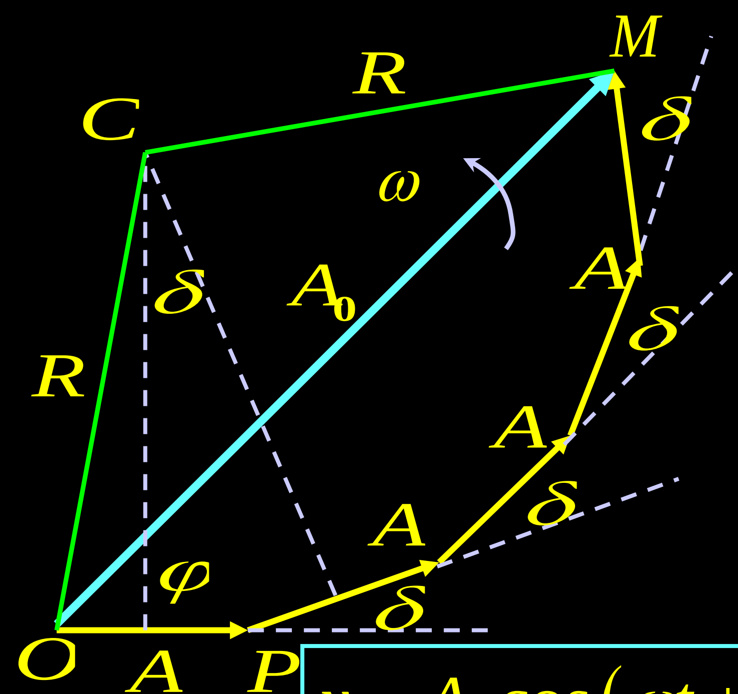
$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$



推广：n 个同频率简谐振动的合成

设 n 个简谐振动，A 相同，初相依次相差一个恒量。

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t \\ x_2 = A\cos(\omega t+\delta) \\ x_3 = A\cos(\omega t+2\delta) \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n = A\cos(\omega t+(n-1)\delta) \end{cases}$$



$$x = A_0\cos(\omega t+\phi)$$

求解合振动方程

$$\angle OCM = n\delta \longrightarrow \left|A_0\right| = 2R\sin\frac{n\delta}{2}$$

$$A = 2R\sin\frac{\delta}{2}$$

合振动的振幅

$$\left|A_0\right| = A\sin\frac{n\delta}{2}\Big/\sin\frac{\delta}{2}$$

合振动的初相

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{n-1}{2}\delta$$

例　有三个同方向、同频率的简谐振动，振动方程分别为:

$$x_1 = 0.05\cos(\pi t) \qquad x_2 = 0.05\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$x_3 = 0.05\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3})$$

试求合振动的振动方程

解　合振动振幅为:

$$A = \sqrt{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 + A_3\cos\varphi_3)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 + A_3\sin\varphi_3)^2}$$

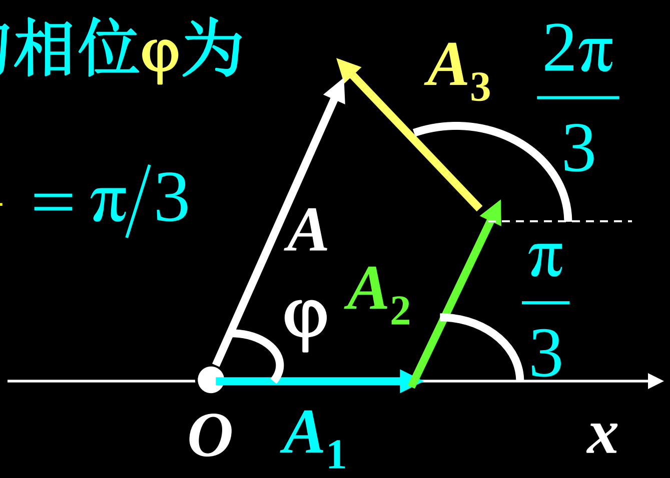
$$= A_0\sqrt{(1+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3})^2 + (\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3})^2}$$

$$= 0.05\sqrt{1+3} = 0.10(\mathrm{m})$$

合振动初相位φ为

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 + A_3\sin\varphi_3}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 + A_3\cos\varphi_3} = \pi/3$$

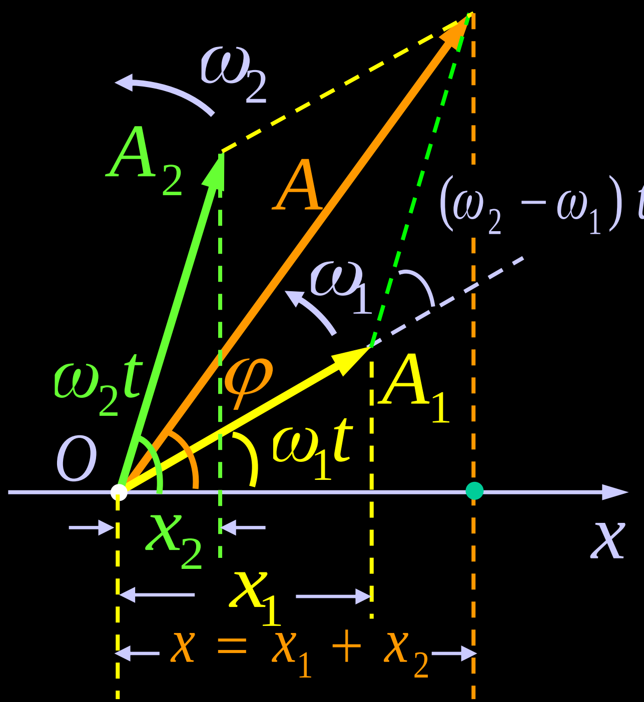
合振动方程　$x = 0.10\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$



二. 同方向不同频率的简谐振动的合成

1. 分振动：
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos\omega_1 t \\ x_2 = A_2 \cos\omega_2 t \end{cases}$$

2. 合振动：$x = x_1 + x_2$



当 $(\omega_2 - \omega_1)t = 2k\pi$ 时，

A 有最大值 $A = A_1 + A_2$

当 $(\omega_2 - \omega_1)t = (2k+1)\pi$ 时，

A 有最小值 $A = \left|A_1 - A_2\right|$

合振动振幅变化的频率为：$\nu = \left|\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$

结论：合振动 x 不再是简谐振动

两个频率相近的音叉相互接近，将会听到合成的声音

时强时弱地周期变化---拍

振幅相同不同频率的简谐振动的合成

1. 分振动：
$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$$

2. 合振动：
$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$
$$= 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t\cdot\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2})t$$

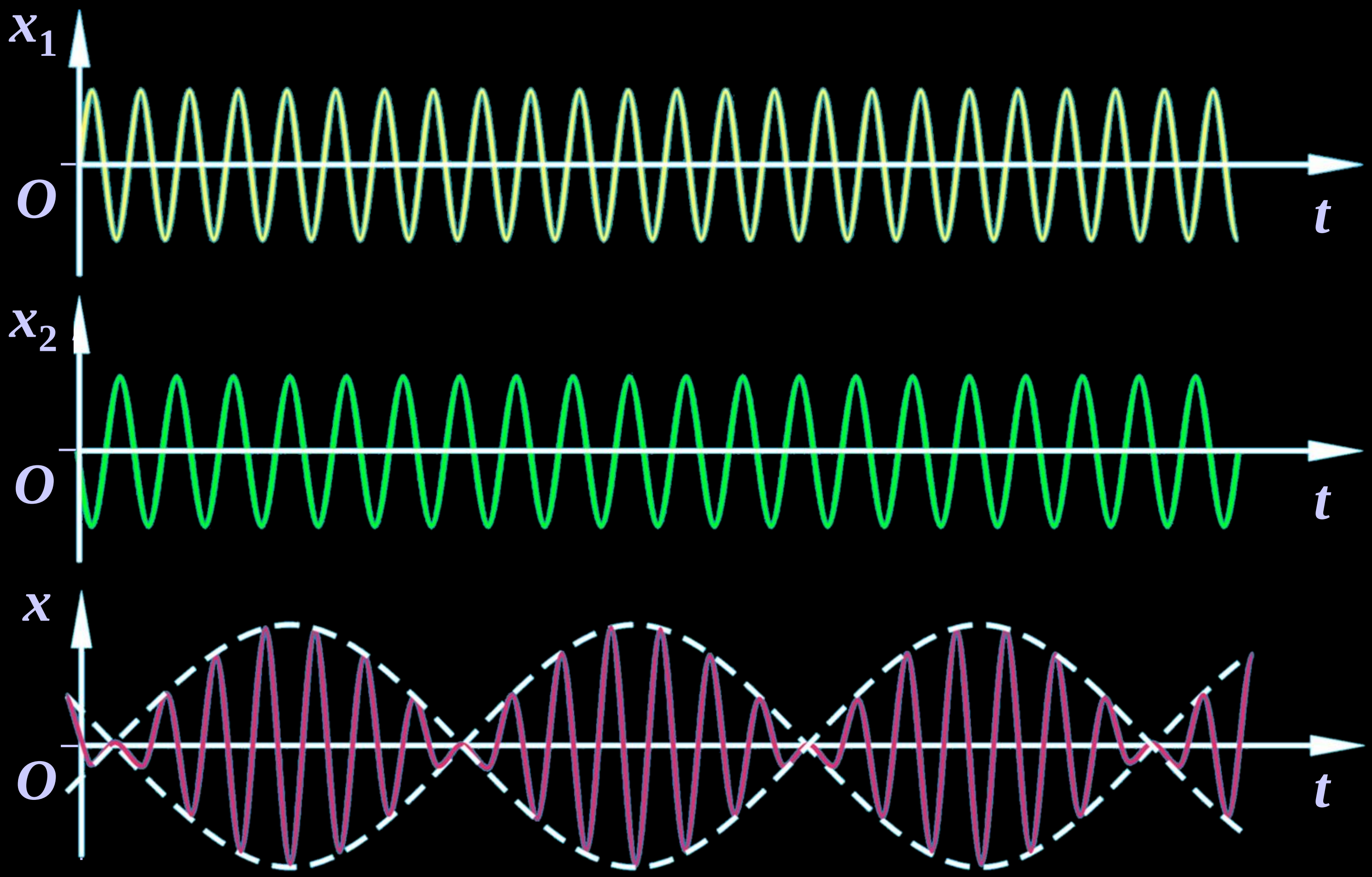
当 $\omega_2 \cong \omega_1$ 时， $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$，令 $x = A(t)\cos\overline{\omega}\,t$

其中 $\boxed{A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)}$ ， $\boxed{\cos\overline{\omega}\,t = \cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t)}$

随 t 缓变　　　　随 t 快变

结论：合振动 x 可看作是振幅缓变的简谐振动。

3. 拍的现象



拍频：单位时间内合振动振幅强弱变化的次数，即

$$\nu = \left|(\omega_2 - \omega_1)/2\pi\right| = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$$

拍频：可用于测定频率

三. 垂直方向同频率简谐振动的合成

1. 分振动 $\begin{cases} x = A_1\cos(\omega\, t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega\, t + \varphi_2) \end{cases}$

2. 合运动 $$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

讨论

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ (k为整数)时:

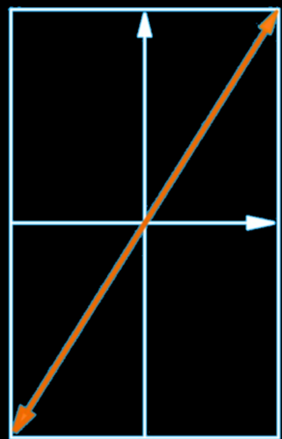
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$$

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi/2$ (k为整数)时:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

合成 ⟷ 分解

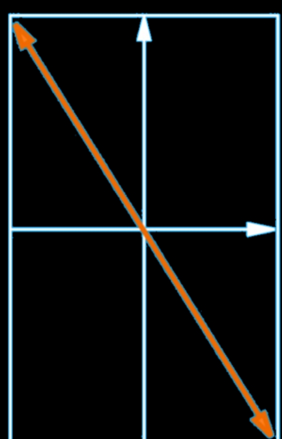
$\Delta\varphi = 0$ (第一象限) $\Delta\varphi = \pi/2$ (第二象限)



$$\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$$

$$\begin{cases} x = A_1 \cos\omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



$\Delta\varphi = \pi$ (第三象限) $\Delta\varphi = 3\pi/2$ (第四象限)

四. 垂直方向不同频率简谐振动的合成

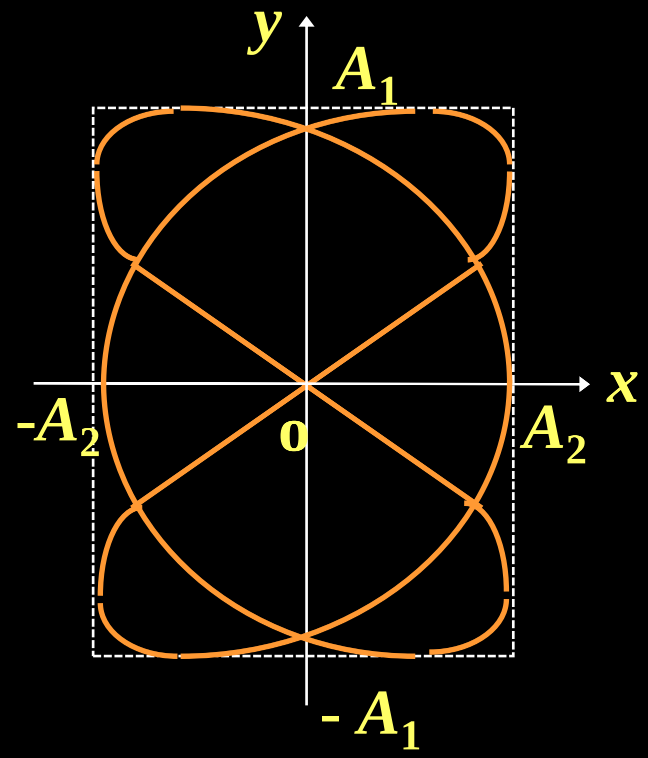
- 两分振动频率相差很小　$\Delta\varphi = (\omega_2-\omega_1)\,t + (\varphi_2-\varphi_1)$

　—— 可看作两频率相等而 $\varphi_2 - \varphi_1$ 随 t 缓慢变化合运动轨迹将按上页图依次缓慢变化

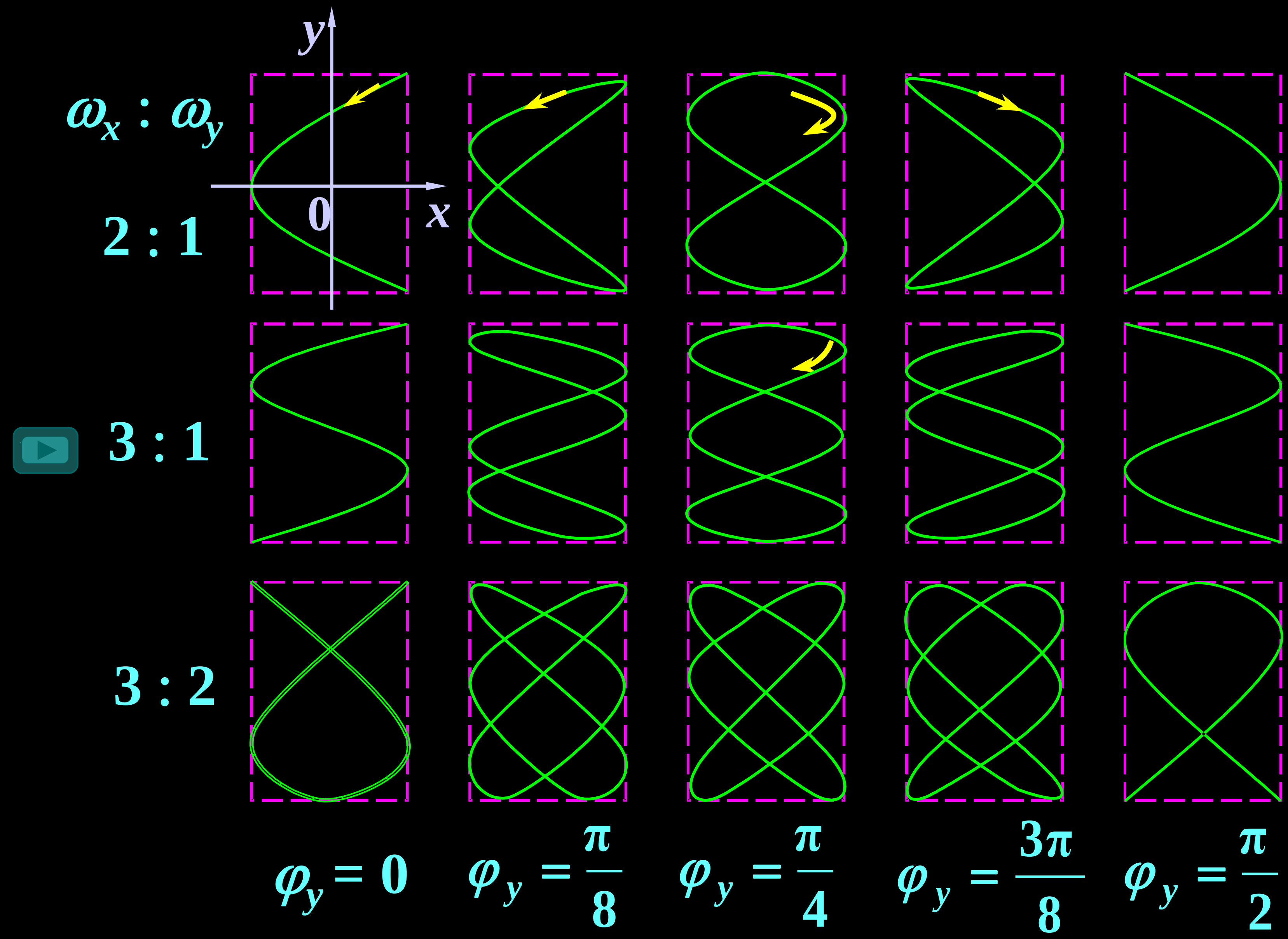
- 两振动的频率成整数比 —— 稳定轨迹 —— 李萨如图

如：$\omega_x : \omega_y = 3 : 2$

$\varphi_2 = 0,\ \varphi_1 = \pi / 4$



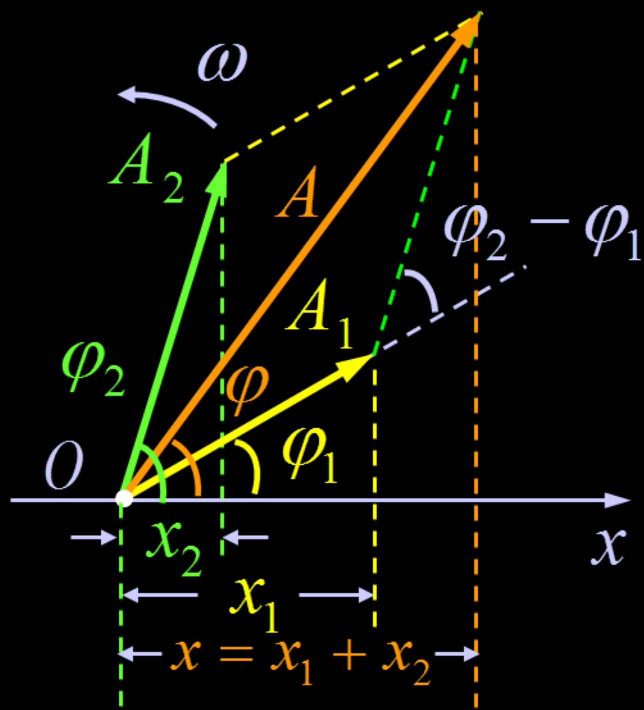
- 李萨如图 —— 周期性振动
- 两个频率比不成整数比、相互垂直振动的合成运动轨迹为永不闭合的曲线 —— 合成运动为非周期运动。



$\omega_x : \omega_y$
2 : 1
3 : 1
3 : 2
y
x
0
$\varphi_y = 0$
$\varphi_y = \frac{\pi}{8}$
$\varphi_y = \frac{\pi}{4}$
$\varphi_y = \frac{3\pi}{8}$
$\varphi_y = \frac{\pi}{2}$

同方向同频率的简谐振动的合成

1. 分振动：$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$



2. 合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

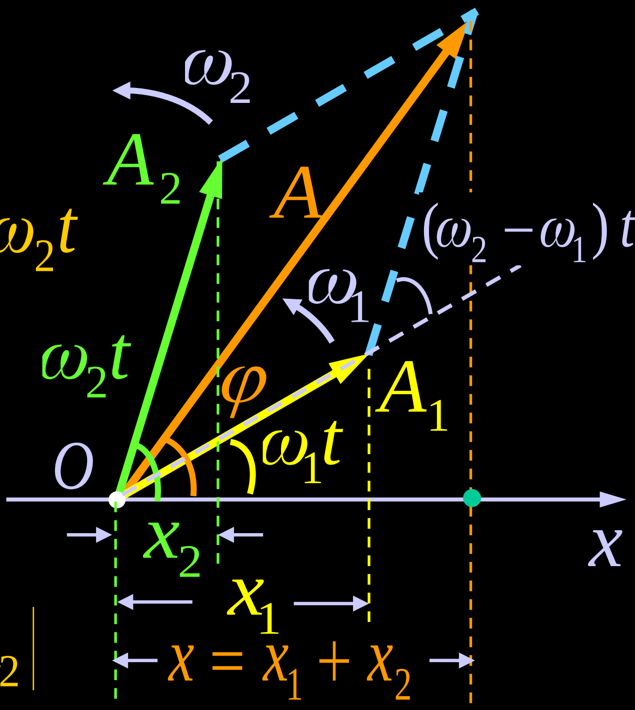
合振动 x 仍是简谐振动

当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$ 时，$A = A_1 + A_2$ —— 振动加强

当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$ 时，$A = |A_1 - A_2|$ —— 振动减弱

同方向不同频率的简谐振动的合成

1. 分振动： $x_1 = A_1\cos\omega_1 t \quad x_2 = A_2\cos\omega_2 t$



2. 合振动： $x = x_1 + x_2$

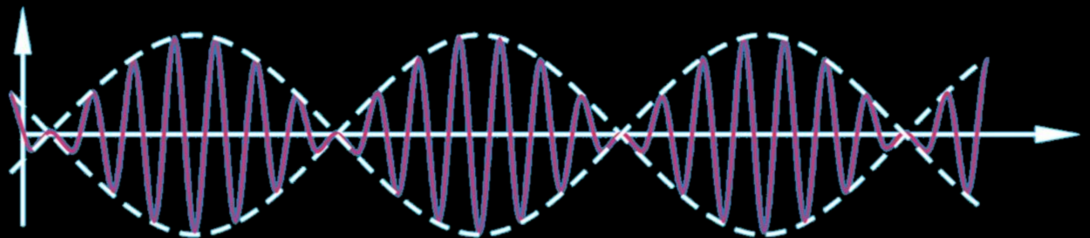
当 $(\omega_2-\omega_1)t = 2k\pi$ 时， $A = A_1 + A_2$

当 $(\omega_2-\omega_1)t = (2k+1)\pi$ 时， $A = \left|A_1 - A_2\right|$

合振动 x 不再是简谐振动

$$A_1 = A_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t\cdot\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2})t$$

合振动 x 可看作是振幅缓变的简谐振动。



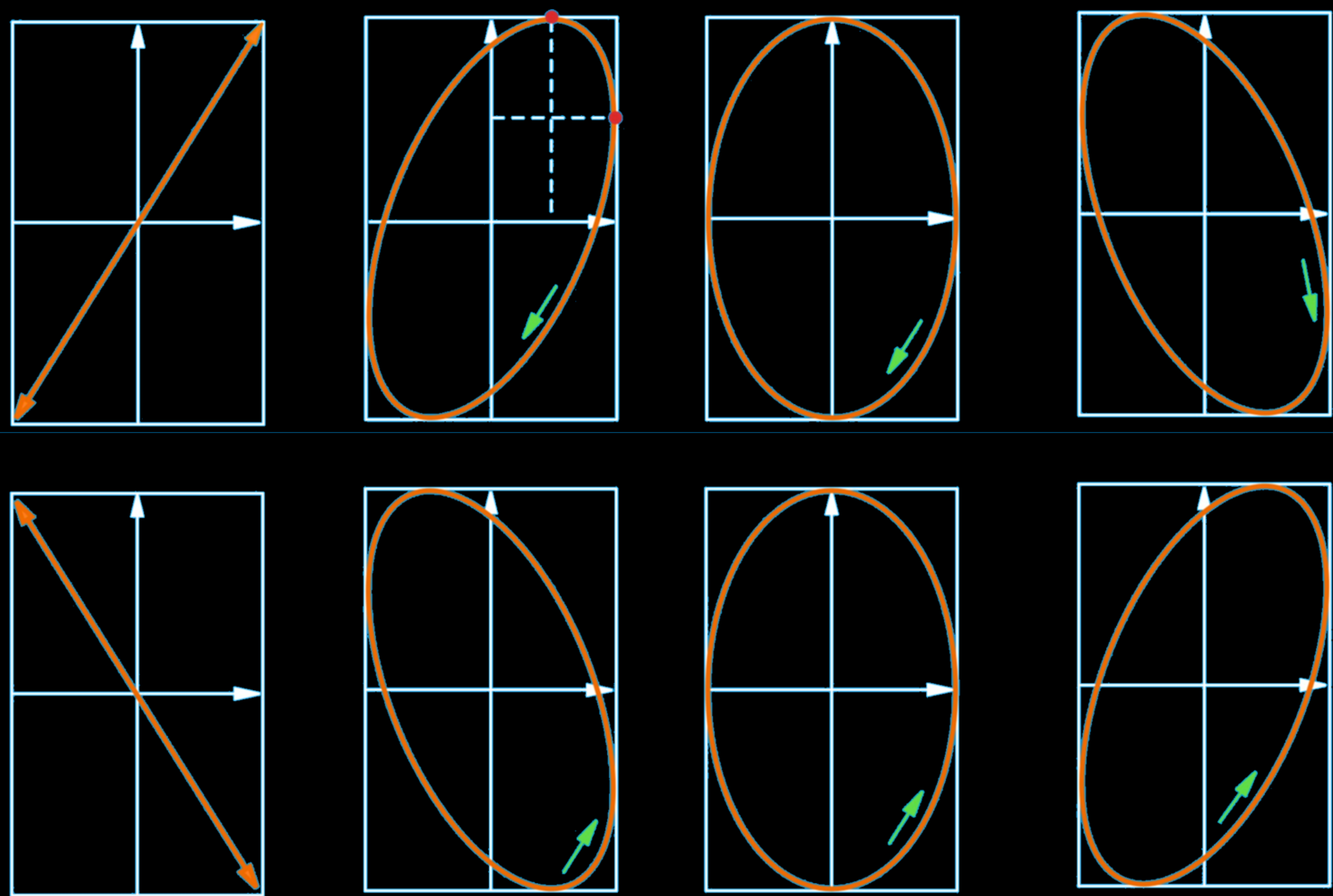
拍现象

$$\nu = \left|(\omega_2-\omega_1)/2\pi\right|$$
$$= \left|\nu_2 - \nu_1\right|$$

垂直方向同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases}$$

$\Delta\varphi = 0$　(第一象限)　$\Delta\varphi = \pi/2$　(第二象限)



$\Delta\varphi = \pi$　(第三象限)　$\Delta\varphi = 3\pi/2$　(第四象限)

合成 ↕ 分解