实验3
MATLAB符号运算

变量命名原则

- 以字母开头
- 后面可以跟字母、数字和下划线
- 字符间不可留空格，不能有标点符号和运算符号.

变量名中的英文字母大小写是有区别的，例如Ab,AB,ab表示不同的变量.

实验目的和内容

实验目的

了解MATLAB中符号变量和符号表达式的创建,能够利用符号运算解决一般的微积分和方程求解的问题.

实验内容

(1)符号变量和符号表达式的创建，符号与数值之间的转换.

(2)符号表达式求极限,求导,求积分,泰勒展开,级数求和,方程求根,微分方程求解等.

(3) 符号表达式化简以及符号表达式替换.

一、符号变量和符号表达式

1、建立符号表达式

方式1、首先要用syms命令声明符号变量，再建立符号函数表达式。格式如下：

```
syms  x  y  n
z=x^2+sin(x*y^n);     %建立符号函数
```

方式2、用str2sym函数将字符串转化为符号表达式 .格式如下：

```
syms  x  y  n
f=str2sym ('x^2+cos(x*y^n)')
```

2、符号函数求值

符号函数建立之后，即确立了相应的函数符号表达式，它和数值函数不同，不能直接计算函数值。如：

```
>> f=str2sym('1/2+1/3-x*y^2')
f =
    5/6 - x*y^2
```

若想计算当x=2, y=3时f的函数值,就需要使用MATLAB 的符号函数与数值函数的转换命令eval来计算。格式如下：

```
>> x=2;y=3;
>> a=eval(f)
a =
   -17.1667
```

例1 设$x=(\frac{3}{2},\sin\frac{\pi}{4},\sqrt{2},0.5)$,

建立其数值类型变量并将它转换为符号类型。

3、符号表达式求极限

函数	功能
limit(f,x,*a*)或limit(f,*a*)	求$x \to a$时f的极限
limit(f)	求$x \to 0$时f的极限
limit(f,x,*a*,'right')	求$x \to a^+$时f的极限
limit(f,x,*a*,'left')	求$x \to a^-$时f的极限
limit(f,x,inf,'left')	求$x \to +\infty$时f的极限
limit(f,x,inf,' right')	求$x \to -\infty$时f的极限

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{-1}{x}}}$.

```
syms x
fx= 1/(1+exp(-1/x))
limit(fx,x,0, 'right')
```

```
ans =
      1
```

或

```
syms x
limit(1/(1+exp(-1/x)),x,0,'right'))
```

例3 求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

```
clear
syms h x
fx=(sin(x+h)-sin(x))/h;
jixian=limit(fx,h,0)
```

运行得

jixian =cos(x)

例4 求累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

```
clear
syms x y
fxy= x^2*y/(x^2+y^2);
jixian=limit(limit(fxy,x,0),y,0)
```

运行得

jixian =

0

3、符号表达式求导数

函数	功能
diff (fx)	求符号表达式fx对变量x（默认）的一阶导数
diff (fx,n)	求符号表达式fx对变量x（默认）的n阶导数
diff (fx,v,n)	求多变量符号表达式fx对变量v的n阶导数

例5 设$y = \ln\tan\frac{x}{2}$，求y'

```
clear                    %清除内存变量
syms  x                  %声明符号变量
fx=log(tan(x/2));        %建立符号表达式
f1x=diff(fx)             %对变量x求一阶导数
```

运行得 f1x =(tan(x/2)^2/2 + 1/2)/tan(x/2)

例6 设$y=(2x+3a)e^{x}$,其中a为常数, 求y'''.

```
clear
syms  x  a
fx=(2*x+3*a)*exp(x);
f1x=diff(fx,x,3)     %对变量x求三阶导数
```

运行得： f1x = 6*exp(x) + exp(x)*(3*a + 2*x)

例7 设$f(x,y)=x^{n}y+\sin y$, 求$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}},\frac{\partial^{2} f}{\partial x\partial y}$.

```
clear
syms  x  y  n
fx=x^n*y+sin(y);
f1x=diff(fx)              %对变量x求一阶导数
f1y= diff(fx, y)          %对变量y求一阶导数
f2y=diff(fx, y, 2)        %对变量y求二阶导数
fxy=diff(diff(fx,x), y)   %先对x求导再对y求导
```

运行得

f1x = n*x^(n - 1)*y

f1y = cos(y) + x^n

f2y = -sin(y)

fxy = n*x^(n - 1)

3、符号表达式求积分

函数	功能
int (fx,a,b)	符号表达式fx关于默认变量x在区间[a,b]上的定积分
int (fx,v,a,b)	符号表达式fx关于变量v在区间[a,b]上的定积分
int (fx)	符号表达式fx关于默认变量x的不定积分（结果中没加任意常数）
int (fx,v)	符号表达式fx关于变量v的不定积分（结果中没加任意常数）

例8 求 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\mathrm{d}x$

```
syms x
f=1/(x^2-8*x+25);
nf1=int(f)
```

nf1 =
atan(x/3 - 4/3)/3

例9 求 $\int_0^{\pi/2} \cos^6 2x\mathrm{d}x$

```
syms x
f=cos(2*x)^6;
nf2=int(f,x,0,pi/2)
```

nf2 =
(5*pi)/32

例10 求$\int_0^t \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}y.$

```
clear
syms  x  y  t
f1=x*y/(1+x^2) ;
s1=int(f1,x,0, t )        %对f1关于变量x在[0,t]上求定积分
s2=int(f1,y,0, t )
```

即$\int_0^t \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}y\ln(1+t^2)$

运行得: s1= (y*log(t^2 + 1))/2

s2 =(t^2*x)/(2*(x^2 + 1))

例11 求$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}y.$

```
clear
syms  x  y
fx=x*y/(1+x^2) ;
s3=int(int(fx,y,0, sqrt(x)),x,0,1 )   %对fx先求对y的积分再求对x的积分
```

运行得: s3 =1/2 - pi/8

即$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} (x+y+z)\mathrm{d}z = \frac{1}{8}.$

3、符号函数运算--级数求和

函数	功能
symsum(s,a,b)	对数列s关于自变量从a至b求和
symsum(s,v,a,b)	对数列s关于自变量v从a至b求和

例12 求$A=\sum_{k=1}^{100}k^2$

```
syms k
A=symsum(k^2,1,100)
```

A =

338350

例13 求$B=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$

```
syms k
B=symsum(1/(k*(k+1)),1,inf)
```

B =

1

例14 求和 $\sum_{k=0}^{n}(a^k+bk)$.

```
syms  n  k  a  b
s4=symsum(a^k+b*k,k,0,n)
```

运行得

```
s4 =
piecewise(a == 1, n + (b*n)/2 + (b*n^2)/2 + 1,
a ~= 1, -(b*n + b*n^2 - 2*a*a^n - a*b*n -
a*b*n^2 + 2)/(2*(a - 1)))
```

结果表明:

当a=1时，级数和为n + (b*n)/2 + (b*n^2)/2 + 1;

当a≠1时，级数和为-(b*n + b*n^2 - 2*a*a^n - a*b*n - a*b*n^2 + 2)/(2*(a - 1))。

3、符号表达式泰勒展开

函数$f(x)$在$x=a$处泰勒展开式前n项为

$$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}$$

函数	功能
taylor (f)	f关于默认自变量x在x=0处泰勒展开式前6项
taylor (f, 'order',n)	f关于默认自变量x在x=0处泰勒展开式前n项
taylor (f,v)	f关于自变量v在v=0处的泰勒展开式前6项
taylor (f,v, 'order',n)	f关于自变量v在v=0处泰勒展开式前n项,n为正整数
taylor (f,v,a)	f关于自变量v在v=a处泰勒展开式前6项，a是实数
taylor (f,v,a, 'order',n)	f关于自变量v在v=a处泰勒展开式前n项,n为正整数,a是实数

例15 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$，求f在$x=0$处泰勒展开前6项，在$x=1$处泰勒展开前5项.

```
syms  x
fx=1/(1+x+x^2)
f1=taylor(fx)        %求fx对自变量x(默认)在x=0点(默认)前6项)
f2=taylor(fx,x,1,'order',5)   %求fx对自变量x在x=1点展开式前5项。
```

运行结果

```
f1 =
    - x^4 + x^3 - x + 1
f2 =
(2*(x - 1)^2)/9 - x/3 - (x - 1)^3/9 + (x - 1)^4/27 + 2/3
```

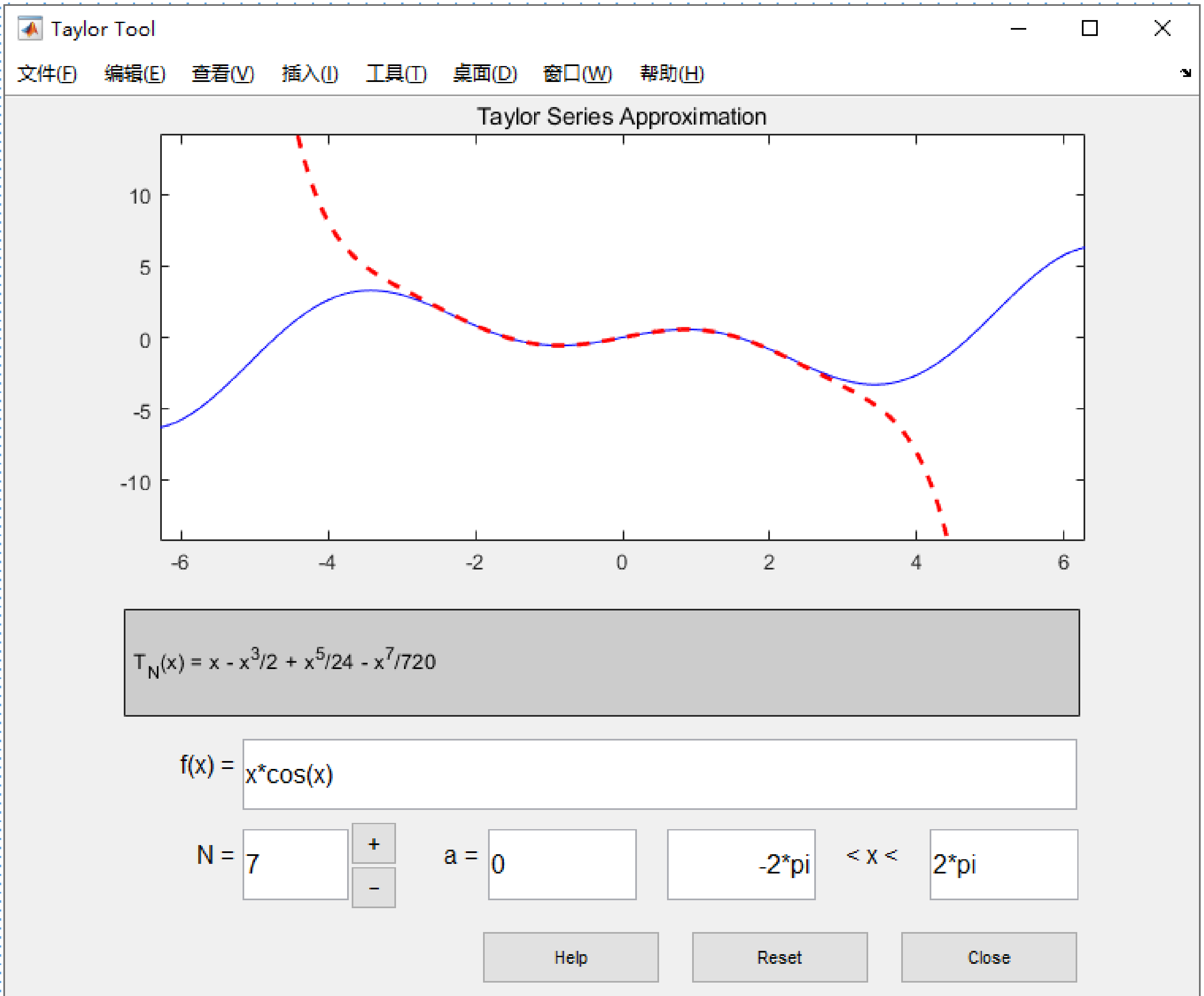
例16 设$f(x)=\dfrac{a}{1+2x}$，求f关于x在x=2处的泰勒展开式前5项

```
syms  x  a
f=a/(1+2*x)
ff=taylor(f,x,2,'order',5)
```

运行得

```
ff =
a/5 - (2*a*(x - 2))/25 + (4*a*(x - 2)^2)/125
      – (8*a*(x - 2)^3)/625 + (16*a*(x - 2)^4)/31256
```

taylortool


Taylor Tool
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
Taylor Series Approximation
10
5
0
-5
-10
-6
-4
-2
0
2
4
6
T_N(x) = x - x^3/2 + x^5/24 - x^7/720
f(x) =
x*cos(x)
N =
7
+
-
a =
0
-2*pi
< x <
2*pi
Help
Reset
Close

3、符号表达式方程求根

函数	功能
S = solve(eqn)	求方程eqn 关于默认变量的符号解
S = solve(eqn,var)	求方程eqn 关于变量var的符号解
Y = solve(eqns,vars)	求两个方程的方程组eqns关于变量vars的符号解
[y1, y2] = solve(eqns,vars)	解方程组，并将方程组的两个解变量赋值给变量y1,y2

例17 求方程$ax^2+bx+c=0$的符号解.

```
syms a b c x
f=a*x^2+b*x+c
x=solve(f)
```

```
x =
  -(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
  -(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

例18 求方程 $\sin x = 1$ 的符号解.

方法1 利用syms 建立符号变量和符号表达式求解

```
clear
syms x
fx= sin(x)-1
x=solve(fx)
```

x =

pi/2

方法2 利用str2sym建立符号表达式求解

```
clear
fx=str2sym('sin(x)-1');
x=solve(fx)
```

x =

pi/2

方法3 利用eqn = sin(x) == 1建立方程

```
syms x
eqn = sin(x) == 1;
solx = solve(eqn,x)
```

x =

pi/2

对于周期函数方程求解时，虽然它本身可能有无穷多个解，但MATLAB只能给出零附近的有限几个解。

例19 求方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ 的符号解.

```
syms x1  x2
eqns = [2*x1-x2==2, 3*x1+2*x2==5];
vars = [x1 x2];
[x1, x2] = solve(eqns, vars)
```

x1= 9/7
x2= 4/7

例20 求方程组 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的符号解.

```
syms x y
eqns = [2*x^2 + y^2 == 0, x - y == 1];
vars = [x y];
[x, y] = solve(eqns, vars)
```

```
x =
 1/3 - (2^(1/2)*1i)/3
(2^(1/2)*1i)/3 + 1/3
y =
- (2^(1/2)*1i)/3 - 2/3
 (2^(1/2)*1i)/3 - 2/3
```

故两组解为:

[x,y]=[1/3 - (2^(1/2)*1i)/3, - (2^(1/2)*1i)/3 - 2/3]

[x,y]=[(2^(1/2)*1i)/3 + 1/3] , (2^(1/2)*1i)/3 - 2/3]

在代数学中，并不是每一个方程都能得到解的一般表达式（符号解），因此MATLAB提供的**solve**函数也不是对任何代数方程（组）都能求得其符号解。

例如方程$e^x = \sin x$, 就不存在符号解.如果利用solve函数求解,就会得到一个警告,同时给出了一个数值解.

```
fx=str2sym('exp(x)-sin(x)');
x=solve(fx)
```

运行结果:

```
警告: Unable to solve symbolically. Returning a numeric solution using vpasolve.
> In solve (line 304)
x =
-226.19467105846511316931032359612
```

3、符号表达式求解微分方程（组)

dsolve(eqn)	求微分方程eqn的解
dsolve(eqn,cond)	求微分方程eqn在条件cond下的解
dsolve(eqns)	求微分方程组eqns的解

例21 求微分方程 $y'=5$ 的解

```
clear                        %清除内存变量
clc                          % 清除命令窗口
syms  y(x)                   %声明y(x)是x的符号函数
eqn1 = diff(y,x) == 5;       % 定义微分方程
y=dsolve(eqn1)               % 求方程eqn1的通解
```

运行得

*y1 =C4 + 5*x*

例22 求解微分方程初值问题：

$$y'' = 1 + y', y(0) = 1, y'(0) = 0$$

```
clear
clc
syms  y(x)
Dy= diff(y,x);
eqn= diff(y,x,2)==1+Dy;
cond = [y(0)==1, Dy(0)==0];
y(x) = dsolve(eqn,cond)
```

运行得

$$y(x) = exp(x) - x$$

4、符号表达式的化简

collect (F)　将表达式F中同幂次的项合并;

expand (F)　将表达式F展开

factor (F)　将表达式F因式分解

simplify (F) 利用代数上的函数规则对F进行简化

例23：分解因式 f=a^3-1

```
syms a
f=a^3-1;
factor(f)
```

结果：ans=

[a - 1, a^2 + a + 1]

例24 将符号表达式 $F=(x^2y+xy^2+2xy-3x-8)(x-2y)$ 分别按照变量x和变量y合并同类项

```
clear
syms x y
F=(x^2*y+x*y^2+2*x*y-3*x-8)*(x-2*y);
Fx= collect(F,x)
Fy= collect(F,y)
```

运行得

```
Fx = y*x^3 + (- y^2 + 2*y - 3)*x^2
     + (- 2*y*(y^2 + 2*y - 3) - 8)*x + 16*y
Fy = - 2*x*y^3 + (- x^2 - 4*x)*y^2
     + (6*x + x*(x^2 + 2*x) + 16)*y - x*(3*x + 8)
```

例25 求下列函数的展开式。

$$(1)\sin(x+y)+\cos(x+y),\quad (2)e^{2x+3y}$$

```
clear
syms x y
Z1=expand(sin(x+y)+cos(x+y))
Z2=expand(exp(2*x+3*y))
```

运行得

```
z1 =
cos(x)*cos(y) + cos(x)*sin(y) + cos(y)*sin(x) - sin(x)*sin(y)
z2 =
  exp(2*x)*exp(3*y)
```

5、符号表达式替换

调用格式：subs(S,old,new)

功能是将符号表达式S中的符号变量old替换为新值new

例26 将符号表达式a+b中的a换为6.

```
syms a b
subs(a + b, a, 6)
```

运行得 ans =b + 6

例27将符号表达式$x\cos y + y\sin x$中的x换成符号a, y换成2.

```
syms x y a
subs(x*cos(y) + y*sin(x), [x, y], [a, 2])
```

运行得 ans = 2*sin(a) + a*cos(2)

例28 求 $f(x)=x^2e^x+3x\sin x+1$ 的泰勒展开式(前10项) $P(x)$,并分别求$f(x)$和$P(x)$在$x=0,1,2,3$处的函数值.

程序如下:

```
x0=[0,1,2,3];
syms x
f=x^2*exp(x)+3*x*sin(x)+1;  %定义符号表达式f
y1= subs(f,x,x0)            %将符号表达式f中的符号x换成x0
p=taylor(f,x,'Order',10);   %对函数f关于变量x进行泰勒展开至第10项
y2=subs(p,x,x0)             %泰勒展开式p中的x用x0代替，得到p在x0处的值
y3=eval(y1)                 % 将符号值y1转换成数值
y4=eval(y2)                 % 将符号值y2转换成数值
```

西安交通大學 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

例28 求 $f(x)=x^2e^x+3x\sin x+1$ 的泰勒展开式(前10项)$P(x)$,并分别求$f(x)$和$P(x)$在$x=0,1,2,3$处的函数值.

```
x0=[0,1,2,3];
syms x
f=x^2*exp(x)+3*x*sin(x)+1;
y1= subs(f,x,x0)
 %将符号表达式f中的符号x换成x0
p=taylor(f,x,'Order',10); %对函
y2=subs(p,x,x0)
 %泰勒展开式p中的x用x0代替，得到p在
y3=eval(y1)
% 将符号值y1转换成数值
y4=eval(y2)
 % 将符号值y2转换成数值
```

运行得

```
y1 =
   [ 1, exp(1) + 3*sin(1) + 1, 4*exp(2) + 6*sin(2) + 1,  9*exp(3) + 9*sin(3) + 1]
y2 =
   [ 1, 31463/5040, 1259/35, 2887/16]
y3 =
   1.0000    6.2427   36.0120  183.0399
y4 =
   1.0000    6.2427   35.9714  180.4375
```

上机练习四　第4题

```
syms x
x0=-2*pi:0.05:2*pi;
y0=sin(x0);
y=sin(x);
i=1;
for n=3:3:9
   p=taylor(y,x,'order',n);
   y1=subs(p,x,x0);
   subplot(2,2,i)
   plot(x0,y0,'k*',x0,y1,'bo')
   M=max(y1);m=min(y1);
   info=['n=',sprintf('%2d',n)];
   text(-2,m+0.7*(M-m),info);
   grid on;
```