第二章 一元函数微分学及其应用

第二节 求导的基本法则

作业：P119 习题2.2

（A）1，2，3，6，7，
9.(1)(3),11,14

2.1 函数和、差、积、商的求导法则

Th1 设 $u(x), v(x)$ 在点 x 处均可导，则其和、差、积、商（分母为零点除外）在 x 处也可导，且：

$$1^\circ \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2^\circ \quad (uv)' = u'v + uv' \qquad (Cv)' = Cv'$$

$$3^\circ \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

证: $1^\circ \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$

设 $f(x) = u(x) \pm v(x)$ ，则

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[u(x+h) \pm v(x+h)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[u(x+h) - u(x)\right]}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{\left[v(x+h) - v(x)\right]}{h}$$

$= u'(x) \pm v'(x)$ 故结论成立.

此法则可推广到任意有限项的情形.

如:$(u + v - w)' = u' + v' - w'$

证

$$2^\circ \quad (uv)' = u'v + uv' \qquad f(x) = u(x)v(x)$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)$$

$$= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) \cancel{- u(x)v(x+\Delta x)}$$

$$\cancel{+u(x)v(x+\Delta x)} - u(x)v(x)$$

$$= \Delta u(x)v(x+\Delta x) + u(x)\Delta v(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v + u\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$(uv)' \neq u'v' \;!$$

$1^\circ \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$

$2^\circ \quad (uv)' = u'v + uv' \qquad (Cv)' = Cv'$

推广：有限个函数的线性组合求导：

$$\boxed{(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'}$$

$$\boxed{(ku \pm lv)' = ku' \pm lv'}$$

$$3^\circ \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

证 $$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)v(x) - \cancel{u(x)v(x)}] - [u(x)v(x+\Delta x) - \cancel{u(x)v(x)}]}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \frac{\Delta u(x)v(x) - \Delta v(x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$\therefore \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\left[\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}\right]v(x) - u(x)\left[\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right]}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$\therefore \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\right]v(x)-u(x)\left[\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right]}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$3^\circ \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

例1 求$y=\tan x$的导数.

解 $$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x$$

2.2 反函数的求导法则

Th2 如果函数 $x=\varphi(y)$ 可导，且导数 $\varphi'(y)\neq 0$,

那么它的反函数 $y=f(x)$ 也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

证 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}\qquad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

例2 设$y=e^x$ 求y'

解 $x=\ln y$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=y=e^x$$

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$$

例3 $y=\arcsin x,\ (-1<x<1)$ 求y'

解 $x=\sin y,\ (-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2})$

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$$

$$=\sqrt{1-x^2}$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (-1<x<1)$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (-1<x<1)$$

$$\boldsymbol{(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}}\qquad \boldsymbol{(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}}$$

2.3 复合函数的求导法则 链导法则Chain rule

Th3 设 $y=f(u)$ 在u处可导

$u=\varphi(x)$ 在x处可导 $u_0=\varphi(x_0)$

则：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在x_0可导, 且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0) \quad 或 \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{x=x_0}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

证明 $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)$, $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0), \qquad \Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u_0)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=f'(u_0)\varphi'(x_0)$$

2.3　复合函数的求导法则　链导法则Chain rule

Th3　设 $u=\varphi(x)$ 在x 处可导

$y=f(u)$ 在与x对应的u处可导

则：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在x处可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

例4 $y = x^{\alpha}$，α 为任意实数，$x > 0$

解 $y' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)'$

$$= x^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1} \qquad (x > 0)}$$

例5 $y = x^{x}, x > 0$，求 y'.

解 $y' = (e^{x \ln x})'$

$$= e^{x \ln x}(x \ln x)'$$

$$= x^{x}(1 + \ln x)$$

例6 $f(x)=\left(\dfrac{x\sin x}{1+x^2}\right)^x-e^{\mathrm{sh}\pi}$ 求$f'(x)$

解 $$f'(x)=\left[\left(\frac{x\sin x}{1+x^2}\right)^x\right]'-\left[e^{\mathrm{sh}\pi}\right]'$$

$$=\left[e^{x(\ln x+\ln\sin x-\ln(1+x^2))}\right]'$$

$$=\left[\left(\frac{x\sin x}{1+x^2}\right)^x\right]\left[\ln\frac{x\sin x}{1+x^2}+1+x\cot x-\frac{2x^2}{1+x^2}\right]$$

$$u^v=\exp(v\ln u)\qquad (u^v)'=u^v(v\ln u)'$$

例7 $y = 2^{\tan^2 \frac{1}{x}}$，求 y'.

解 $y = 2^u,\ u = v^2,\ v = \tan w,\ w = \dfrac{1}{x}$

$$y' = 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot (\tan^2 \frac{1}{x})'$$

$$= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot 2(\tan \frac{1}{x}) \cdot (\tan \frac{1}{x})'$$

$$= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot 2(\tan \frac{1}{x}) \cdot \sec^2 \frac{1}{x} \cdot (\frac{1}{x})'$$

$$= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot 2(\tan \frac{1}{x}) \cdot \sec^2 \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

例8 $y = x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'.

解 $y' = x'\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)']$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}]$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

例9 求 $y=\arctan\frac{1+2x}{1-2x}$ 的导数。

解 $$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)'$$

$$=\frac{(1-2x)^2}{(1-2x)^2+(1+2x)^2}\cdot\frac{(1+2x)'(1-2x)-(1+2x)(1-2x)'}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{4}{2+8x^2}=\frac{2}{1+4x^2}$$

练习 已知 $y=f\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right), f'(x)=\ln(1-x)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

【解】 令 $u=\frac{\sin x-1}{\sin x+1}$, 则 $y=f(u)$, 由复合函数求导法则,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\frac{\cos x(\sin x+1)-(\sin x-1)\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$=\ln\left(1-\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$=\ln\left(\frac{2}{\sin x+1}\right)\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2\ln 2.$$

1、和差积商的求导法则；

2、复合函数的链导法则；

3、反函数的求导法则；

2.4初等函数的求导问题

初等函数：由6类基本初等函数经有限次的四则运算

及有限次复合运算

并且能用一个解析式表示的函数。

结论：一切初等函数的求导问题都已解决，

且其导数仍为初等函数。

问题：能否说一切初等函数均可导？

初等函数在定义域内是否一定可导?

- 可导函数一定连续,但连续函数却不一定可导.
- 例: $y=\sqrt{x^2}=|x|$

$y=|x|$是初等函数,并且$y=|x|$在定义域内连续,但$y=|x|$在$x=0$处却不可导

因此初等函数在其定义域内不一定可导

初等函数: 由6类基本初等函数经有限次的四则运算

及有限次复合运算

并且能用一个解析式表示的函数。

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$$ 是初等函数吗?

$$\because f(x)=\frac{(\sqrt{x^2}+x)x}{2}+\cos(x-\sqrt{x^2})$$

例10　求下列双曲函数的导数

$$(1)y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad(2)y=\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$(3)y=\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$$

解

$$(1)(\mathrm{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$$

$$(2)(\mathrm{ch}x)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$$

$$(3)(\mathrm{th}x)'=\left[\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right]'=\frac{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$$

例11 求$y = \text{ar sh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$的导数

解 $x = \text{sh}y$ 是它的反函数,

$\because \quad x'_y = (\text{sh}y)' = \text{ch}y > 0$ $\qquad \mathbf{ch^2 x - sh^2 x = 1}$

$$\therefore \quad y'_x = \frac{1}{\text{ch}y} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

同理可得

$$\boxed{(\text{ar ch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (1 < x < +\infty)}$$

$$\boxed{(\text{ar th}x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1)}$$

基本初等函数的导数公式

$C' = 0$（C为常数）；

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$（$\mu$为实数）；

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$；

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$；

$(a^x)' = a^x \ln a$；

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$；

$(\sin x)' = \cos x$；

$(\cos x)' = -\sin x$；

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$；

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$；

$(\sec x)' = \sec x \tan x$；

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$；

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；

常用公式

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

$$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$$

$$(\mathrm{ar\ sh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\mathrm{ar\ ch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

求导法则

1、和差积商的求导法则；

2、复合函数的链导法则；

3、反函数的求导法则；

命题1. $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，$f'(x)$ 仍以 T 为周期.

证: $f(x+T)-f(x)=0$ 对 $\forall x$ 成立,

两端同时求导得:(T 是常数)

$f'(x+T)-f'(x)=0$. 证毕.

命题2. 奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数.

证: 设 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$ 对 $\forall x$ 成立,

等式两端同时关于 x 求导得:

$$f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x)$$

$$\Rightarrow\ f'(-x)=f'(x)\ \Rightarrow\ f'(x)\text{为偶函数.}$$

同理可证后半段.

2.5 高阶导数 Higher-order Derivatives

$$y = f(x) \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

二阶导数与高阶导数

零阶导数 $f(x)$

$C^{(n)}$类函数

$C^{(\infty)}$类函数

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x+\Delta x) - f''(x)}{\Delta x}$$

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

例12　求下列高阶导数

$$(1)\ y=\sin x \qquad (2)\ y=\cos x \qquad (3)\ y=e^x$$

解(1) $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=-\sin x=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$$

$$y'''=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

$$y^{(4)}=\sin x=\sin(x+\frac{4\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2}),(n=1,2,\cdots)$$

（2） $y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$$(n=1,2,\cdots)$$

（3） $y^{(n)}=e^x,(n=1,2,\cdots)$

例13　求下列高阶导数

$$(1)\, y = x^{\alpha}$$

$$(2)\, y = \ln x$$

解（1） $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}}$$

（2） $y' = \dfrac{1}{x}$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

例14 求$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$的n阶导数.$(n=0,1,2,\cdots)$

解 $y=\dfrac{4}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}$

$$\therefore\ y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}$$

$$=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right),\quad (n=0,1,\cdots)$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}}}$$

例15 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$ 间接法

解: $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

高阶导数运算公式

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)} v^{(0)} + n u^{(n-1)} v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v^{(2)} + \cdots + u^{(0)} v^{(n)}$$

莱布尼兹(Leibniz) 公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

例16 求 $y=x^2e^x$ 的n阶导数。

解 $$\boxed{(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}}$$

$$(e^x)^{(n)}=e^x,$$

$$(x^2)'=2x, \quad (x^2)''=2, \quad (x^2)^{(3)}=0$$

$$(x^2e^x)^{(n)}=(e^x x^2)^{(n)}$$

$$=(e^x)^{(n)}(x^2)^{(0)}+n(e^x)^{(n-1)}(x^2)^{(1)}+C_n^2(e^x)^{(n-2)}(x^2)^{(2)}$$

$$=(x^2+2nx+n(n-1))e^x$$

常用高阶导数公式:

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

(4) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$$\boldsymbol{(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

$$(\frac{1}{a+x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$$

$$(\frac{1}{a-x})^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

(5) $\boldsymbol{(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}}$

$$y = \ln(1+x), y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

例17 设 $y=\frac{1}{x^2-1}$, 求$y^{(5)}$.

解 $\because y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})$

$$\therefore y^{(5)}=\frac{1}{2}[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}]$$

$$=60[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}]$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}}}$$

练习

1. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$,求 y'.

2. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$, 求 y'.

3. $y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$, 求 y'.

4. 设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$, 求 y'.

练习key

1. $1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

2. $a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

3. $2x\cos x^2 e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}e^{\sin x^2}$

4. $\dfrac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$