

文章编号: 1005-3085(2003)05-0088-06

彩票方案的合理性优化

奚悦, 窦文, 高云强

指导老师: 张志强

(东南大学, 南京 210096)

编者按:本文从彩票方案对彩民的吸引力、中奖面、奖金分配几个层次对各方案的合理进行了评价。其主要特点就是在确定各级判断矩阵的权数时通过问卷调查给出,而不时凭主观愿望直接给出数据,这也是用数学模型解决实际问题的一种重要方面。

摘要:本文主要研究了彩票中各奖项的中奖概率、奖项和奖金的设置以及对彩民的吸引力等因素对彩票方案合理性的影响。在问题一给出的29种方案中,我们用模糊综合评判的方法量化各个方案的合理度,分别给影响合理度的因素加权从而求出合理度,发现方案26、27的合理度分别为0.5300和0.6414,是两套较优的方案,之后我们分析了模型的稳定性;在问题二中,我们基于问题一中的29套方案,对于每种方案的合理度采用线性规划模型,用Lingo软件求得相应的最优合理度和最优奖项设置,最后我们补充分析了模型中未考虑的一些因素,并向管理部门和彩民提出了一些建议。

关键词:中奖概率;奖项和奖金的设置;吸引力;方案的合理度;模糊综合评判

分类号: AMS(2000) 90C05

中图分类号: O221.1

文献标识码: A

1 问题与记号

近年来彩票流行,巨额诱惑使越来越多的人加入到“彩民”的行列,目前流行的彩票主要有“传统型”和“乐透型”两种类型。

我们的主要问题是对现有的29种彩票方案的合理性进行评价,并在此基础上设计出更好的方案,以吸引更多的彩民购买,为国家筹集资金。

在分析论述过程中,我们用到下列记号

单张奖券中第 i 项奖的中奖率 P_i ($i=1,2,\dots,7$),单张奖券的中奖率 P ,合理度 Q ,对彩民的吸引力 R ,彩票的销量 n ,销售额 S ,成本 C ,利润 B ,各级奖金的金额 X_i ($i=1,2,\dots,7$),返奖率 X_8 ,奖金分配效用值 X ,单注期望收益 E ,奖金分配效用的权值矩阵 F 。

2 模型的分析与建立

在问题(1)中我们假设每期奖金都可以分完,即不记奖池效应,并且暂不记税收的影响。我们希望建立一个模型,将合理性量化,以便于进行比较。我们采用模糊综合评判的方法来达到此目的。

首先,合理性可以从销售者和购买者两方面的满意程度来衡量,建立一级评判集 $A = [\text{对彩民吸引力}, \text{销售者利润}]$ 和权重集 $B' = [b_1, b_2]$ 其中 b_1 为对彩民吸引力的权重, b_2 为销售者利润的权重。

再者,销售者的利润和销售额与返奖率有关,而在销售额等同的情况下可以由返奖率表示。对彩民的吸引力可以由以下几个因素衡量:中奖的几率,奖金的分配对彩民的效用和单张彩票的期望收益。由此建立二级评判集 $C = \{\text{中奖的概率}, \text{奖金的分配对彩民的效用}, \text{单张彩票的期望收益}\}$ 和对应的权重集 $D = [d_1, d_2, d_3]$ 。

中奖的概率可以由式算出。单张彩票期望收益也可由销售额和返奖率算出。奖金分配对彩民的效用是由各个奖项的期望奖金有关,那么建立三级评判集 $E' = [\text{一等奖}, \text{二等奖}, \text{三等奖}, \text{四等奖}, \text{五等奖}, \text{六等奖}, \text{七等奖}]$ 和对应权重集 $F = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7]$ 。

至此就建立了一个用数值反映合理度的模型,其结构可由图1给出

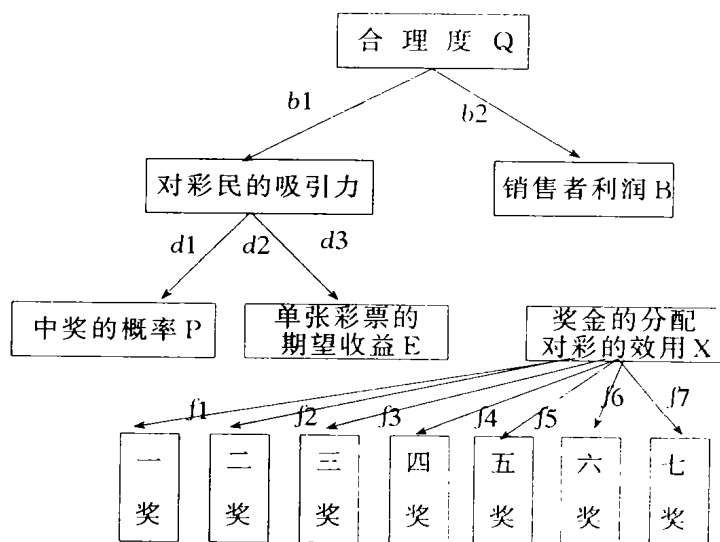


图1 合理度层次模型

3 模型的求解

A. 单张彩票获得单项奖金几率

根据古典概率公式计算

1. 传统 1 + 6/10 型

$$P_1 = 10^{-6} \times \frac{1}{5} = 0.0000002, \quad P_2 = 10^{-6} \times \frac{4}{5} = 0.0000008$$

$$P_3 = 9 \times 10^{-6} \times 2 = 0.000018, \quad P_4 = \frac{9 \times 10}{1000000} \times 2 + \frac{9 \times 9}{1000000} = 0.000261$$

$$P_5 = 2 \times \frac{9 \times 10 \times 10}{1000000} = 0.0034$$

$$P_6 = 2 \times \frac{9 \times (1000 - 1)}{1000000} + 3 \times \frac{9 \times 9 \times 10 \times 10}{1000000} - 3 \times \frac{9 \times 9}{1000000} = 0.042039$$

II. 乐透型

可以分为 3 种类型进行考虑

(1) n/m 型

$$P1 = \frac{1}{C_m^n}; P2 = \frac{C_{n-1}^1 C_1^1}{C_m^n}; P3 = \frac{C_{n-1}^1 C_{m-n-1}^1}{C_m^n}; P4 = \frac{C_{n-2}^2 C_{m-n-1}^1 C_1^1}{C_m^n}$$

$$P5 = \frac{C_{n-2}^2 C_{m-n-1}^2}{C_m^n}; P6 = \frac{C_{n-3}^3 C_{m-n-1}^1 C_1^1}{C_m^n}; P7 = \frac{C_{n-3}^3 C_{m-n-1}^3}{C_m^n}$$

(2) n/m 无特别号型

$$P1 = \frac{1}{C_m^n}; P2 = \frac{C_{n-1}^1 C_{m-n}^1}{C_m^n}; P3 = \frac{C_{n-2}^2 C_{m-n}^2}{C_m^n}; P4 = \frac{C_{n-3}^3 C_{m-n}^3}{C_m^n}; P5 = \frac{C_{n-4}^4 C_{m-n}^4}{C_m^n}$$

(3) $6+1/m$ 型

$$P1 = \frac{1}{C_m^7}; P2 = \frac{C_6^6 C_{m-7}^1}{C_m^7}; P3 = \frac{C_6^5 C_{m-7}^1 C_1^1}{C_m^7}; P4 = \frac{C_6^5 C_{m-7}^2}{C_m^7}$$

$$P5 = \frac{C_6^4 C_{m-7}^2 C_1^1}{C_m^7}; P6 = \frac{C_6^4 C_{m-7}^3}{C_m^7}; P7 = \frac{C_6^3 C_{m-7}^3 C_1^1}{C_m^7}$$

分别计算 29 种方案的总中奖率(表 1)和中各单项奖的概率(略)。

B. 单注的期望收益

由于销售方拿出销售额的 50% 作为总的奖金分配,若投注的单注金额为 2 元,那么理论上每注期望收益为 1 元。虽然受到一等奖保底和封顶以及“奖池”中累计奖金的影响,但由于一等奖的获奖概率很小,影响不大。而且,从长期来看,奖金是趋于 50% 的销售额的。所以可以近似将单注期望收益看为 1 元。

C. 奖金的分配

假设销售额总额为 $2n$,那么我们希望算出各个高项奖所分配的奖金数。

首先应当求出各个高项奖期望中奖的彩票数。这可以由单张彩票单项中奖概率求出。根据中心极限定理,当彩票数趋于无穷时,每个高项奖彩票数概率应服从正态分布。这里我们用 n 次贝努里试验来近似这一结果。根据贝努里原理,若设中某高项奖的几率为 p ,则不中此奖的几率为 $q = 1 - p$ 。那么第 k 项奖的概率 $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ 。

可以得知,第 i 项奖的期望彩票数为 $n * P_i, i = 1, 2, \dots, 7$ 。

那么根据模型所给出公式

$$[(\text{当期销售总额} \times \text{总奖金比例}) - \text{低项奖总额}] \times \text{单项奖比例}$$

可算出各奖项每注分配到的期望奖金数 $R = [R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7]$,如表 1 所示。

D. 求解各方案的合理度

求解此模型,我们最主要的是确定各个权值矩阵。对于权值矩阵的确定,我们用调查统计和迭代的方法来求出各个权值。首先对与一级评判权值矩阵 $B = [b1, b2]$,由于返奖率固定为 50%,销售者利润是一固定值,对合理性的贡献是一定的,所以为了简化模型考虑,定 $B = [1, 0]$ 。其次,为了求出二级评判矩阵 $D = [d1, d2, d3]$,我们发放了 100 份的问卷调查,得到调查者所认为的 $\frac{w1}{w2}, \frac{w1}{w3}, \frac{w2}{w3}$ 的值,取算术平均后得到迭代初始值 $\frac{w1}{w2} = 0.32, \frac{w1}{w3} = 2.67, \frac{w2}{w3} = 6.77$;通过迭代求出稳定的权值 $D = [0.2, 0.692, 0.0720]$ 。为了求出三级评判

权值矩阵 $F = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7]$, 对 100 份问卷调查所得值经相似处理, 可以得到 F 的值大致为 $F = [0.4, 0.3, 0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02]$; 则奖金的总额与分配对彩民的效用分别为 $X = F * R'$, $Q = d_1 * P + d_2 * E + d_3 * X$ 先将各奖项的单注期望奖金归一化, 可以得到值 $X_1 \sim X_7$, 再根据模型求合理度, 列出合理度表, 如表 1 所示。

表 1 计算结果列表

序号	奖项方案	一等奖 金 额	二等奖 金 额	三等奖 金 额	四等奖 金 额	五等奖 金 额	六等奖 金 额	七等奖 金 额	总中奖率	合理度
1	6 + 1/10	2467400	246700	16400	50				0.00028	0.4658
2	6 + 1/10	1929300	160800	7100	300	20	5		0.0457	0.4126
3	6 + 1/10	2090100	120600	7100	300	20	5		0.0457	0.3887
4	6 + 1/10	2250900	120600	5400	300	20	5		0.0457	0.3918
5	7/29	755700	36000	1700	300	30	5		0.0079	0.1525
6	6 + 1/29	659300	12500	1200	200	20	5		0.0180	0.1327
7	7/30	761500	25100	1500	500	50	15	5	0.0332	0.2116
8	7/30	945300	19300	1800	200	50	10	5	0.0332	0.2057
9	7/30	1085600	20700	1400	200	30	10	5	0.0332	0.2059
10	7/31	795300	28400	2100	500	50	20	10	0.0292	0.2223
11	7/31	1703500	32400	2100	320	30	5		0.0056	0.2086
12	7/32	1772800	58400	3200	500	50	10		0.0048	0.2562
13	7/32	1909200	39000	3200	500	50	10		0.0048	0.2485
14	7/32	2045600	39000	2400	500	50	10		0.0048	0.2538
15	7/33	2461200	50200	4000	600	60	6		0.0042	0.3012
16	7/33	2390300	45500	2700	500	50	10	5	0.0230	0.3187
17	7/34	3141900	10360	5300	500	30	6		0.0035	0.2990
18	7/34	3039300	76600	4900	500	50	10	2	0.0204	0.3874
19	7/35	4287100	131200	4900	300	50	5		0.0030	0.4724
20	7/35	3376400	68900	5100	500	100	30	5	0.0182	0.4357
21	7/35	3220700	61300	3400	1000	100	50	5	0.0182	0.4417
22	7/35	4388000	78400	2900	200	50	20	5	0.0182	0.4615
23	7/35 无特	4281900	2000	20	4	2			0.1249	0.5038
24	6 + 1/36	4205400	19300	5700	500	100	10	5	0.0164	0.4350
25	6 + 1/36	4778100	20600	4100	500	100	10		0.0076	0.4448
26	7/36	4865800	99300	7100	500	50	10	5	0.0163	0.5300
27	7/37	5000000	167500	5800	1500	100	50		0.0023	0.6414
28	6/40	2992700	60800	1500	200	10	1		0.0051	0.2966
29	5/60	2922100	194800	3600	300	30			0.0027	0.4223

从上表中可以看出, 方案 26、27 是相对于其他方案较为合理的。

4 模型验证

从 26、27 两方案分析可知, 方案 26 的中奖率高, 高额奖奖金较高。而方案 27 的虽中奖

率不高,但高额奖金和低额奖金均很高。可以看到,高中奖率和高额奖金额反映了模型的合理性。我们通过改变权值,可以调整各个部分对最后合理度的影响程度。比如在冒险投资者看来,一等奖要比其它因素重要的多,而在保守投资者看来,中奖率则比其它因素更重要些。通过改变权值,就可以使模型反映不同的情况。我们计算了两个较为极端的情况 $D = [0.1, 0.8, 0.1]$, $F = [0.85, 0.1, 0.05, 0, 0, 0, 0]$ (模拟冒险型) 和 $D = [0.5, 0.4, 0.1]$, $F = [0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.08, 0.07, 0.05]$ (模拟保守型) 的合理性,并列如表 2,可以看出合理性在不同条件(权值)下的变化。

由表 2 综合表 1 可看出冒险型比保守型对高额奖奖金更敏感。比如传统型彩票方案中,1、2 两种方案由于较低的高额奖奖金保守型合理度相对冒险型合理度有所提高,而 3、4 种方案则由于相对较高的高额奖奖金而有所降低。这说明奖金的设置对不同类别的人群有着不同的效用。所以在发行彩票前应对象人群进行调查,以确定最为适合的权重,以此进行最合理的奖金分配。

表 2 不同权值对合理度的影响

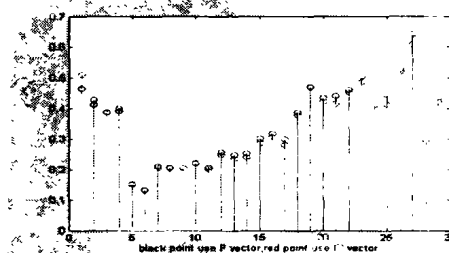
序号	奖项方案	冒险型 合理度	保守型 合理度	序号	奖项方案	冒险型 合理度	保守型 合理度
1	6 + 1/10	0.4208	0.4374	16	7/33	0.3610	0.3161
2	6 + 1/10	0.3769	0.3849	17	7/34	0.4271	0.2906
3	6 + 1/10	0.3873	0.3698	18	7/34	0.4582	0.3688
4	6 + 1/10	0.4055	0.3632	19	7/35	0.6148	0.4104
5	7/29	0.1105	0.1574	20	7/35	0.4986	0.4361
6	6 + 1/29	0.1059	0.1413	21	7/35	0.4718	0.4525
7	7/30	0.1484	0.2378	22	7/35	0.6337	0.4200
8	7/30	0.1723	0.2271	23	7/35 无特	0.7629	0.4464
9	7/30	0.1908	0.2201	24	6 + 1/36	0.5953	0.4306
10	7/31	0.1487	0.2620	25	6 + 1/36	0.6558	0.4137
11	7/31	0.2350	0.2013	26	7/36	0.7102	0.4914
12	7/32	0.2528	0.2516	27	7/37	0.7225	0.5983
13	7/32	0.2658	0.2472	28	6/40	0.4157	0.2527
14	7/32	0.2826	0.2469	29	5/60	0.4446	0.3537
15	7/33	0.3445	0.2920				

稳定性分析 我们对权值 F 作一微小改动,使 $F' = [0.37, 0.35, 0.13, 0.03, 0.05, 0.04, 0.03]$ 并计算合理度,和使用 F 的合理度进行比较。

图 2 给出了改动权值矩阵 F 前后合理度的值的图解。图中 x 轴坐标表示第 i 套方案。从图中可以看出权值的微小改变并不十分影响结果,特别是各个奖项的排位。

在此基础上我们可以建立一个线性的模型,得到更优的新方案(略)。从而解决了问题(2)。

注 合理度只适用于同栏数据比较

图 2 合理度在 F 微小扰动时的变化情况

5 给管理部门和彩民的建议

下面是一些管理上的建议:

从以上问题二的模型假设和求解中,我们将衡量彩票规划的合理性量化,量化后的值由

对它直接有影响的利润和对彩民的吸引力加权求得。合理性的大小直接影响了彩票方案的可行性。彩票管理部门为了获得更高的利润,就必须提高彩票的销售量,提高销售量需做到以下几点:

- 1) 提高彩票对彩民的吸引力,彩票管理部门要有一个合理的奖金分配方案。
- 2) 头等奖要封顶,奖池中的基金数要充足。
- 3) 确保摇奖的公正,延长兑奖的时间。提高彩票的观赏和收藏价值。
- 4) 考虑彩票发行的负面效应。如彩票发行过多,会造成银行储蓄和消费额的急剧下降。给金融和经济秩序造成混乱。

下面是给彩民的一点意见:

首先,彩民购买彩票应注意心态问题,一些彩民把买彩票当做投资,当做事业,甚至把未来全部寄托在彩票上。这种过高的期望值必然造成极大的心理落差。在彩民这个庞大的群体中,需要的是冷静和平和,不需要急躁和狂热。抱着献爱心的心态买彩票,往往就不会再过于计较得失。总之,摸彩抱着一颗平常心,才不会把娱乐变成一种压力。再者,买彩票中奖还要考虑纳税问题,我国的税法要求对彩票收取个人所得税。购买社会彩票一次中奖收入不超过 10000 元的暂免征收个人所得税,对一次中奖收入超过 10000 元的,应按税法规定金额征税(20%)。最后,不要迷信有投资彩票的诀窍。预测软件和操作技巧没有任何意义。另外,买彩票的出发点应该是支持国家相关部门的建设与发展,应把中奖看成是对你的善举给予回报。

6 模型的讨论

本题中权值是由我们在一个小范围调查得出的,不够准确。另外本题的模型是理想化的,而现实中,还需考虑彩票的其他附加费用,如销售成本、预留奖金、税收等。

1). 公司发行彩票时肯定是需要成本,成本是一个不定值,但现在彩票大都采用电脑销售,成本随着彩票销售量的改变变化不大,可看成是一个定值。我们在做题时为简化模型而忽略了成本的影响。

2). 中奖金额高于一万元应交纳 20% 的个人所得税,因此实际的奖金额需要折算成税后金额,这直接影响了彩民的彩票效用期望。

3). 现实彩票销售中,滚存是经常发生的,本期剩余的奖金滚入下一期。滚存存在的可能性为 $P = (1 - \frac{1}{n})$ (其中 n 为销售量),为一张彩票中一等奖的概率,所以愈大, n 愈大,滚存的可能性愈小。结合江苏省各期彩票的销售量情况,大都在 100 万至 150 万之间,也就是说当为 1:1000000 时滚存可能性在 22.3% - 33.7% 之间。这时滚存将会大大提高彩票对彩民的吸引力。

参考文献:

- [1] 胡运权,郭耀煌. 运筹学教程[M]. 北京:清华大学出版社,1998
- [2] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材[M]. 长沙:湖南教育出版社,1993
- [3] 姜启源. 数学模型[M]. 北京:高等教育出版社,1993
- [4] Hanselman D, Littlefield B. 精通 Matlab 6[M]. 北京:清华大学出版社,2002

(下转 73 页)