第六章 多元函数积分学及其应用

第二节 二重积分的计算 (4学时)

Computation of Double Integrals

- 二重积分的几何意义
- 直角坐标系下二重积分的计算法
- 极坐标系下二重积分的计算法
- 曲线坐标下二重积分的计算法

作业: 习题6.2

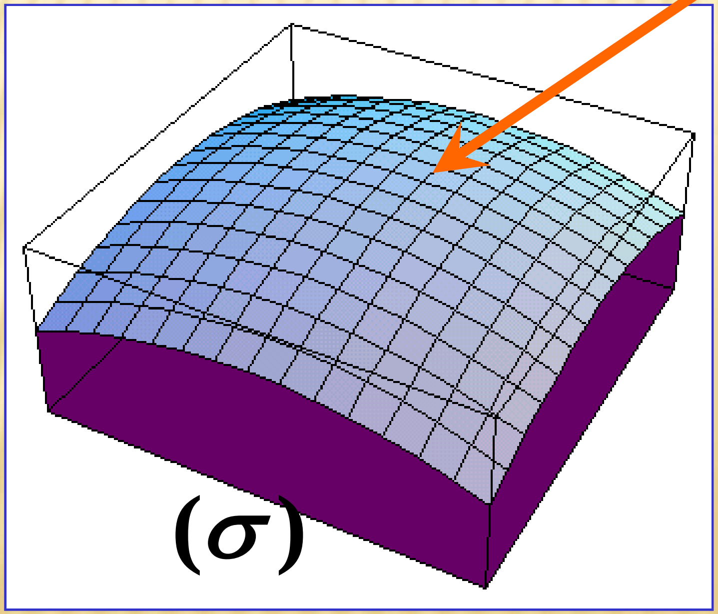
3 (5) (6)(7)(8)(9)(10), 5,

6(3)(4)(5)(6),7, 8, 9, 13 ,14 (1) (2)

第一部分　二重积分的几何意义

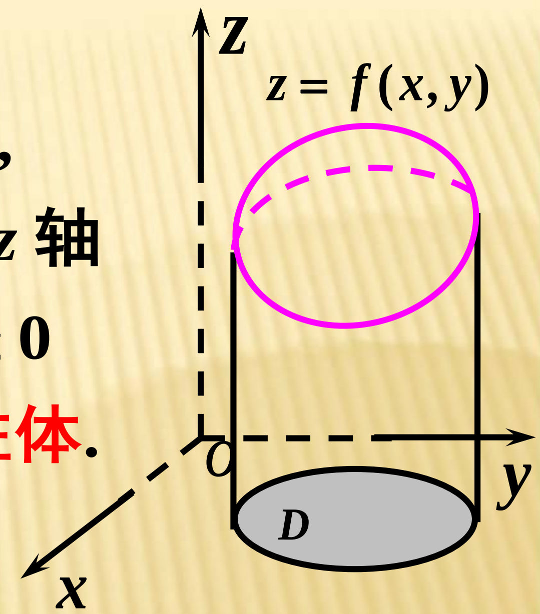
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$z = f(x,y)$



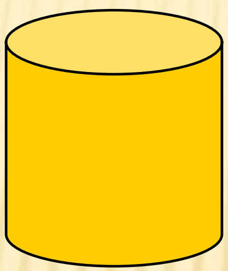
1．曲顶柱体的体积

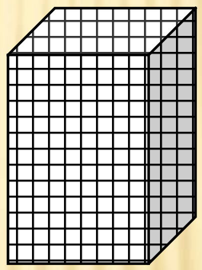
定义 设有一立体,底是 xoy 面上的闭区域 D,侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于z 轴的柱面,它的顶是曲面 $z=f(x,y)$,设 $f(x,y)\geq 0$ 且$f(x,y)$在 D 上连续.这样的立体叫做**曲顶柱体**.



平顶柱体的体积计算:

体积= 底面积×高





曲顶柱体的体积计算 ⟵ 以平面代曲面

曲边梯形面积的求法 ⟶ 以直线代曲线

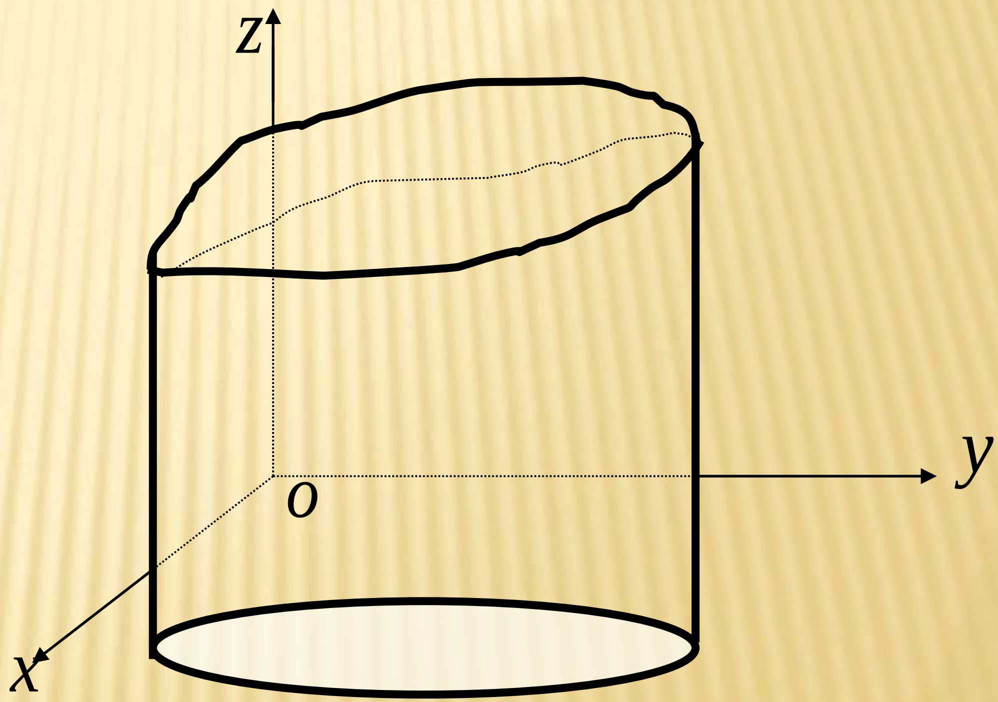
“分割、近似、求和、取极限”的思想方法

曲顶柱体的体积计算

具体步骤如下：

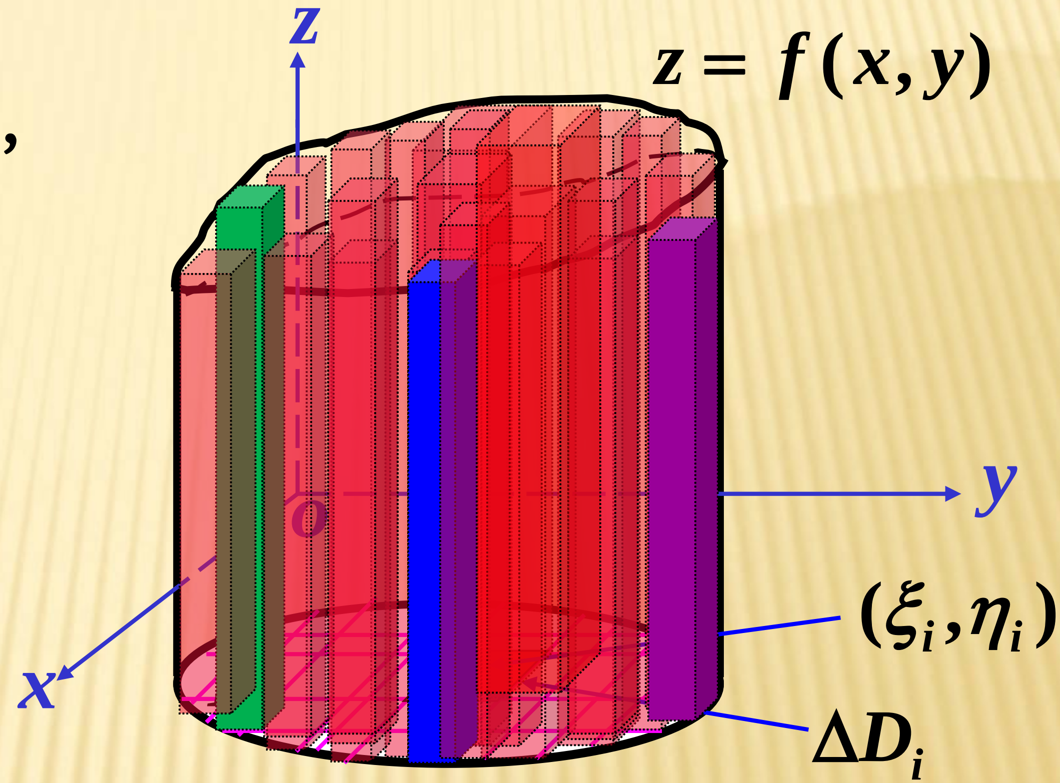
先用曲线网把 $\boldsymbol{D}$ 分成 $\boldsymbol{n}$ 个小闭区域

$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n.$



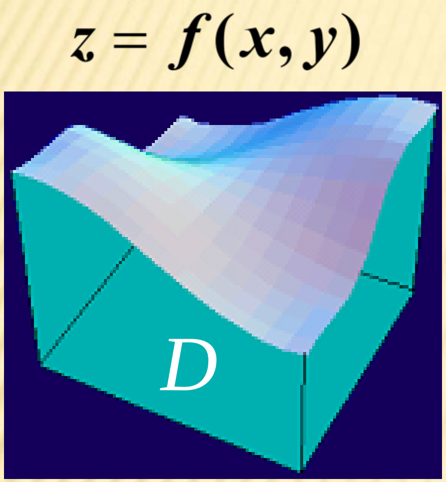
并取典型小区域,

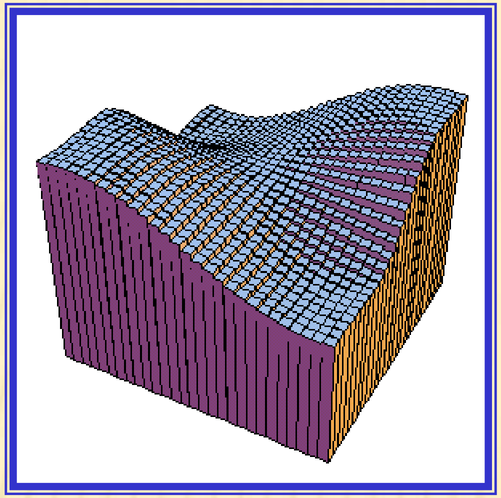
用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积 .

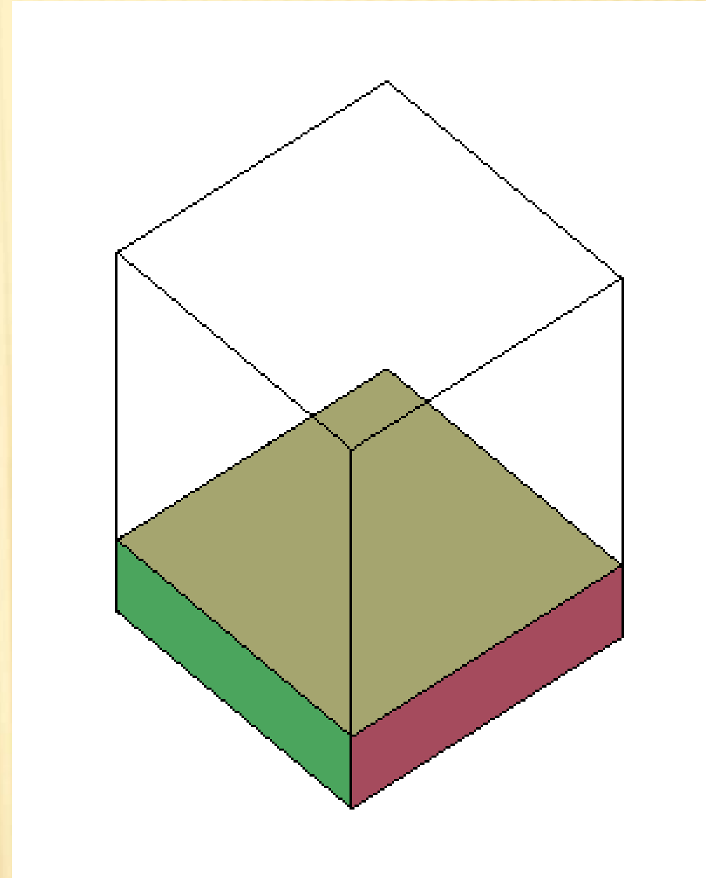


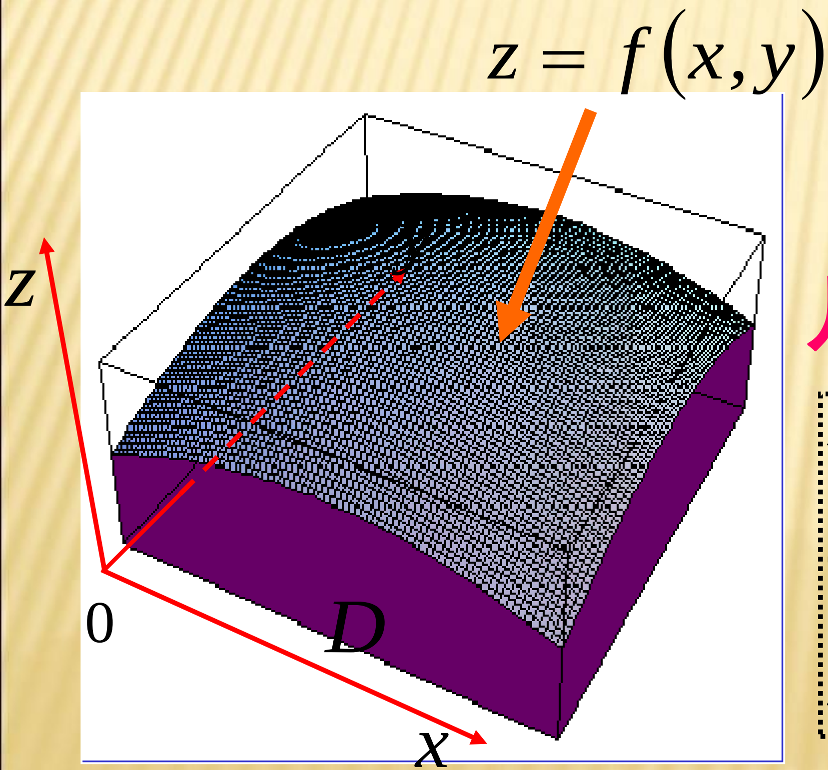
曲顶柱体的体积 $V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$

求曲顶柱体的体积采用 “分、匀、和、精” 的方法.









几何意义:

若在(σ)上 $f(x,y) \geq 0$,则:

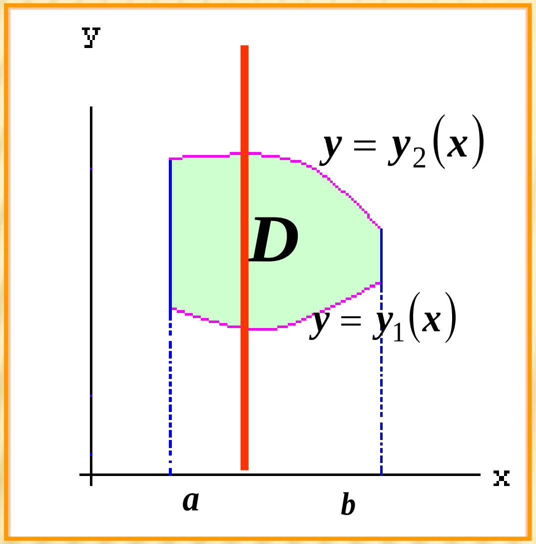
二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示以$D$为底,

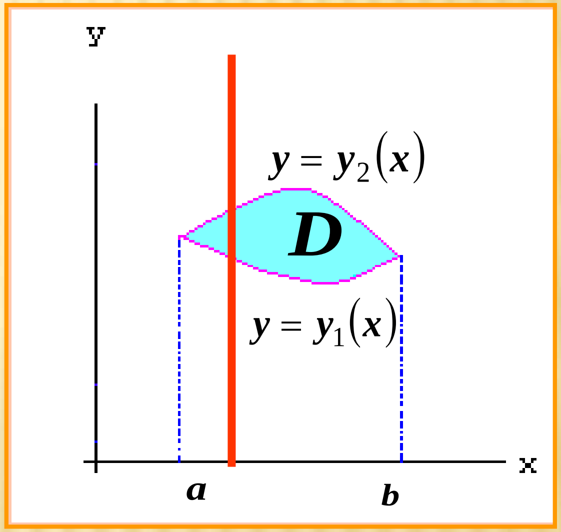
以$z = f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积.

第二部分 直角坐标系下二重积分的计算

如果积分区域为： $a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x).$

［X－型］





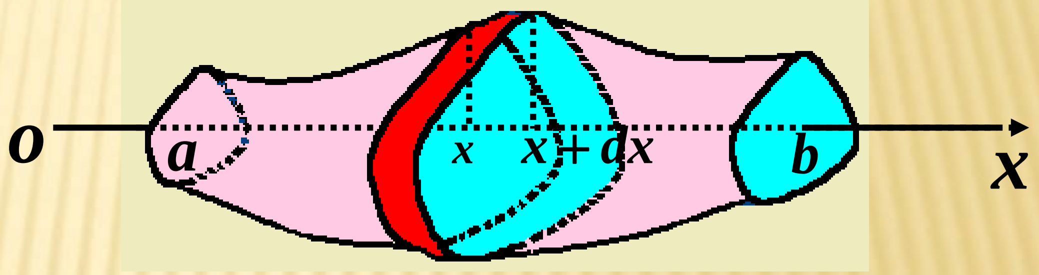
其中函数 $y_1(x)$ 、$y_2(x)$在区间 $[a,b]$上连续.

X=c与边界至多二个交点

已知平行截面面积的立体体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

$A(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积，

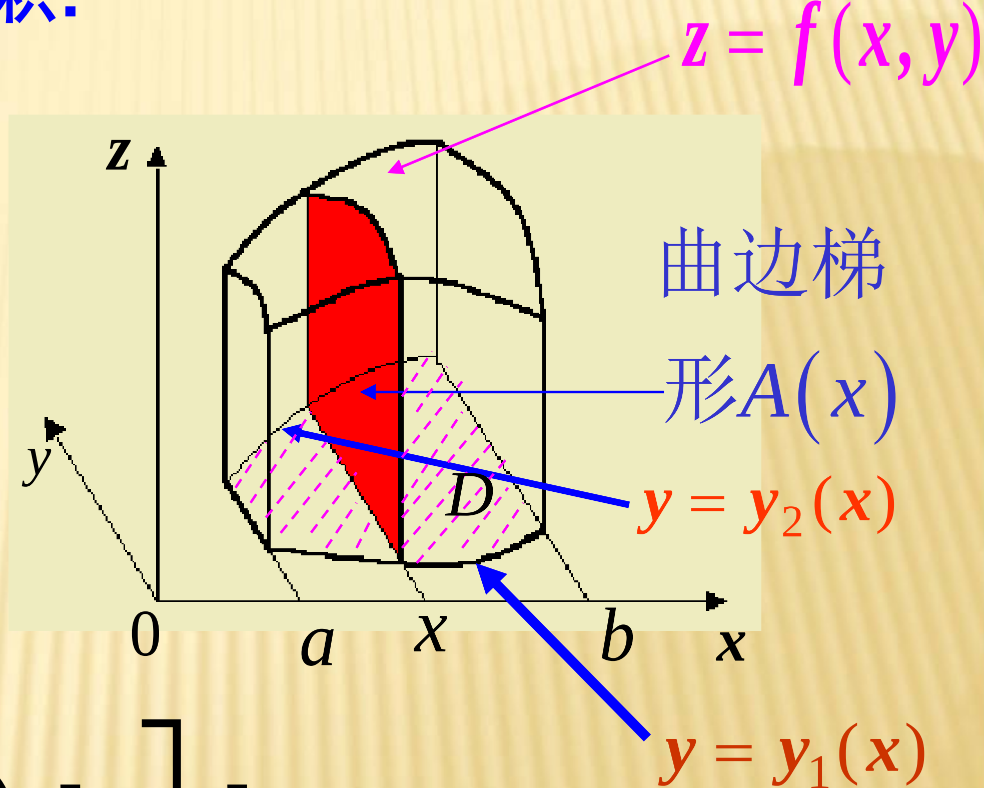


$A(x)$为x的已知连续函数

$dV = A(x)dx,$ 立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx.$

$\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的柱体体积.

应用计算“平行截面面积为已知的立体求体积”的方法，得：



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

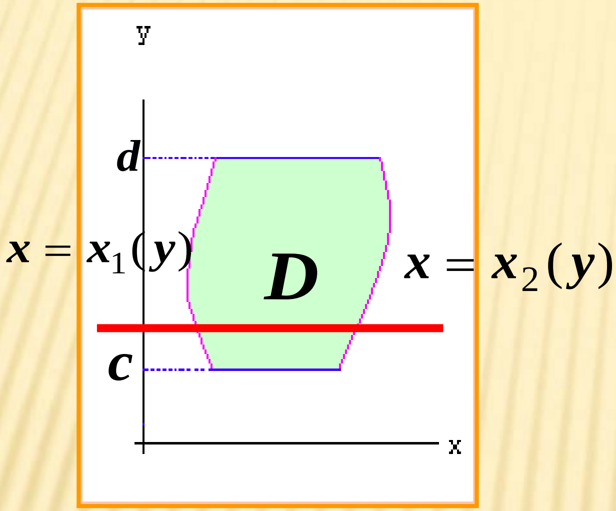
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

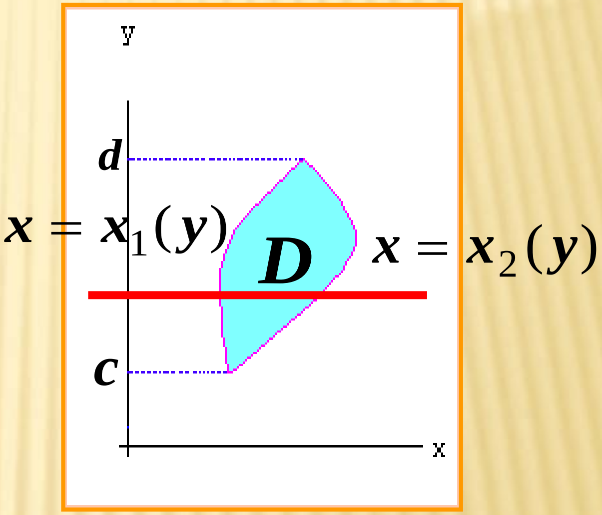
累次积分

二次积分

如果积分区域为： $c \le y \le d, \quad x_1(y) \le x \le x_2(y).$

［Y—型］



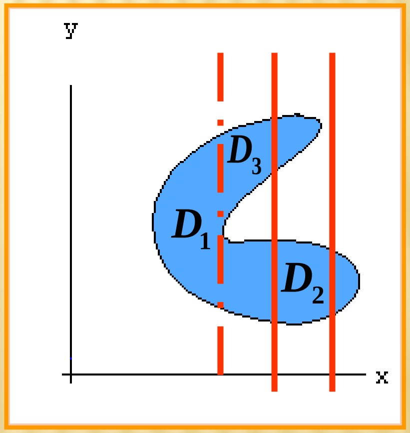


$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

X型区域的特点： 穿过区域且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

Y型区域的特点： 穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

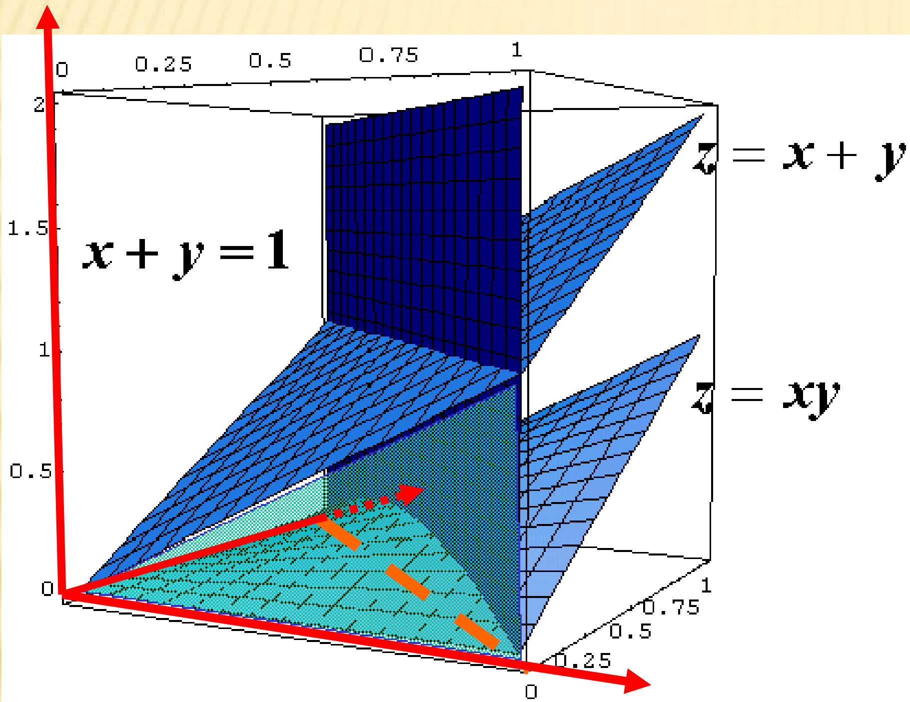
若区域如图，则必须分割.

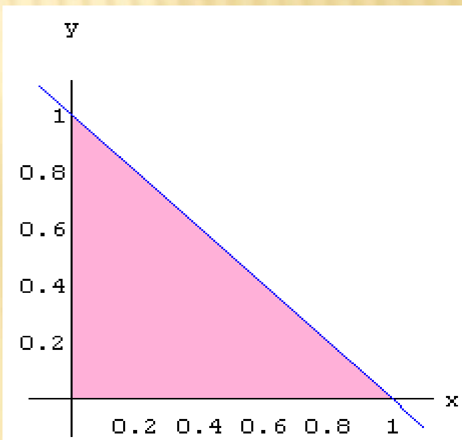


在分割后的三个区域上分别使用积分公式

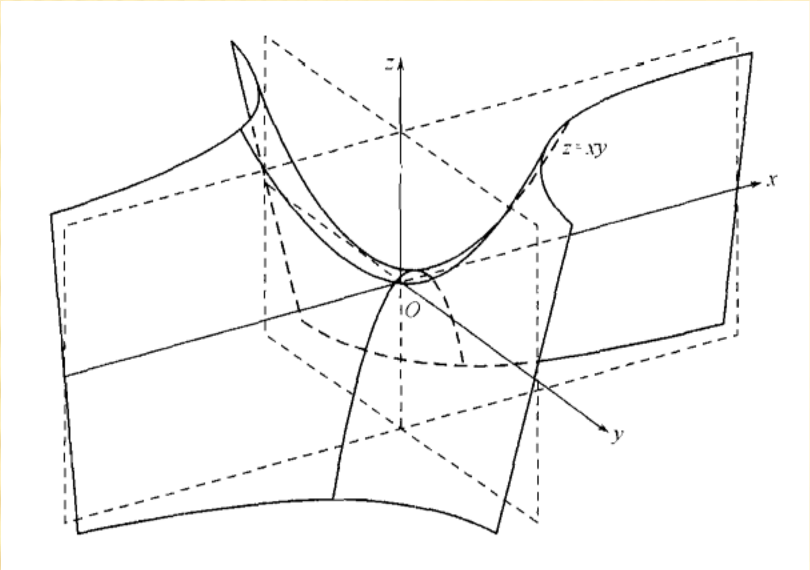
$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$

例1 求由下列曲面所围成的立体体积，$z = x + y$，$z = xy$，$x + y = 1$，$x = 0$，$y = 0$.

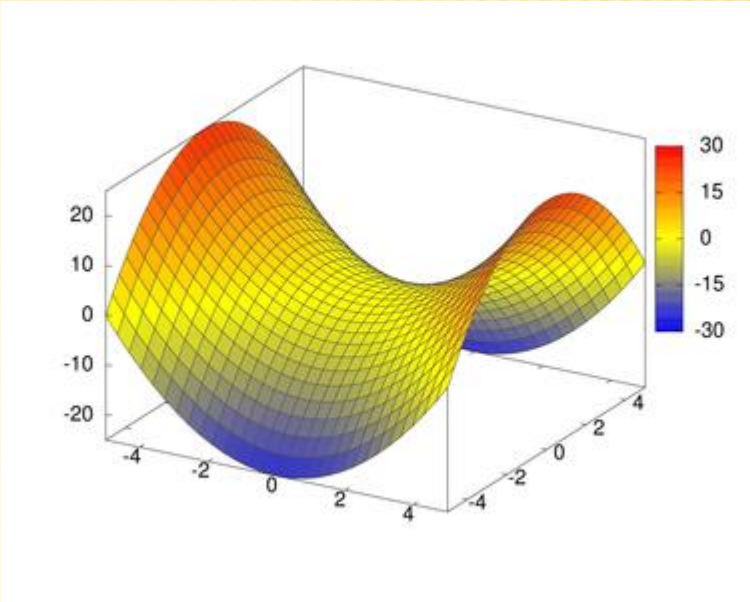




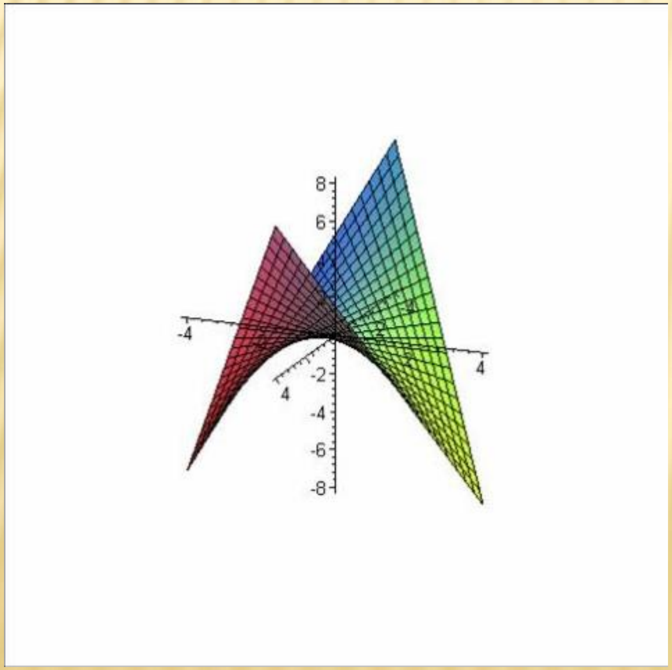
所求体积: $V = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma - \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$



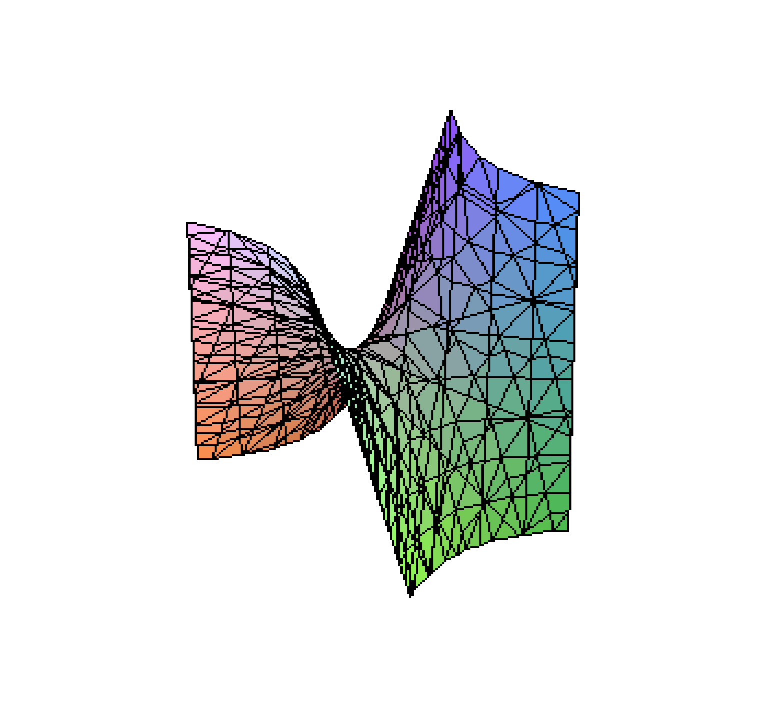
z
z = xy
x
O
y



30
15
0
-15
-30
20
10
0
-10
-20
-4
-2
0
2
4
-4
-2
0
2
4

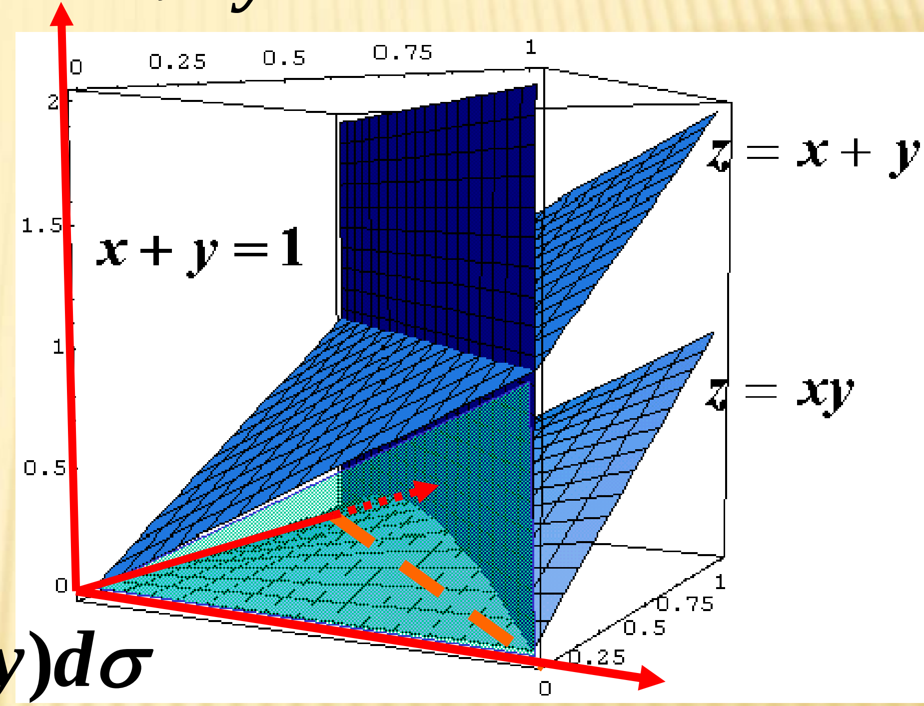


8
6
-2
-4
-6
-8
-4
4
4



例1 求由下列曲面所围成的立体体积，$z = x + y$，$z = xy$，$x + y = 1$，$x = 0$，$y = 0$.

解 曲面围成的立体如图.



所围立体在*xoy*面上的投影是第一象限的三角形。

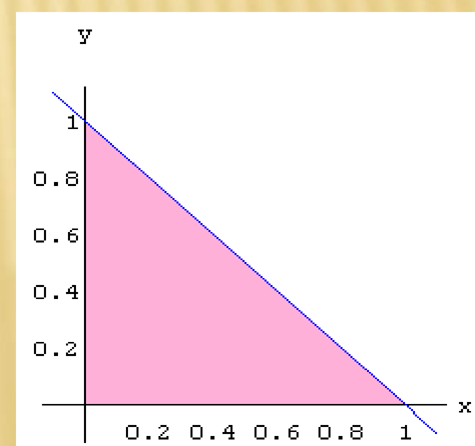
$\because \quad 0 \le x + y \le 1,$

$\therefore \quad x + y \ge xy,$

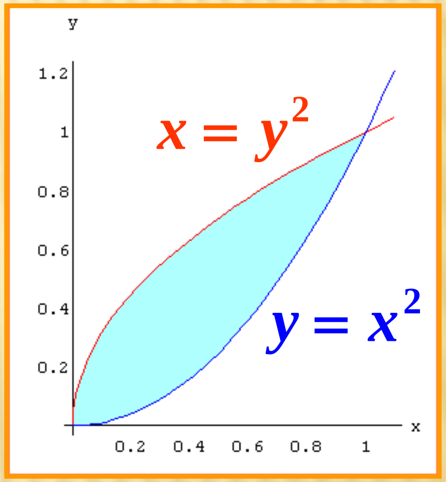
所求体积$V = \iint\limits_D (x + y - xy)d\sigma$

$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy)dy$

$= \int_0^1 [x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^3]dx \quad = \frac{7}{24}.$



例 2 求$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中$D$是由抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围平面闭区域.



解 两曲线的交点

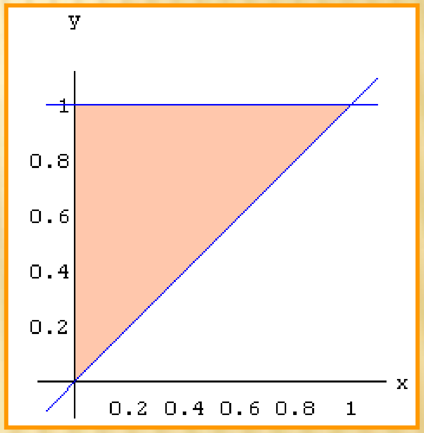
$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,(1,1),$$

$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy$$

$$=\int_0^1\left[x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)\right]dx=\frac{33}{140}.$$

例 3 求$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以(0,0),(1,1),(0,1)为顶点的三角形.

解 $\because \int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示



$\therefore$ 积分时必须考虑次序

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y x^2 e^{-y^2}dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

练习 改变积分

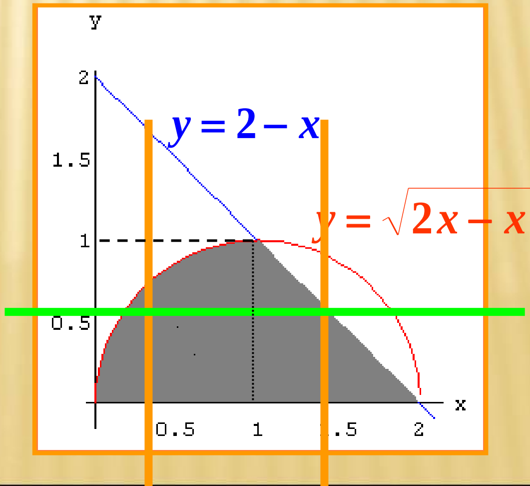
$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$的次序.

(A). $\int_0^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

$\boxed{\checkmark}$ (B). $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

(C). $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$

解: 积分区域如图



原式$=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx.$

例 4 计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$

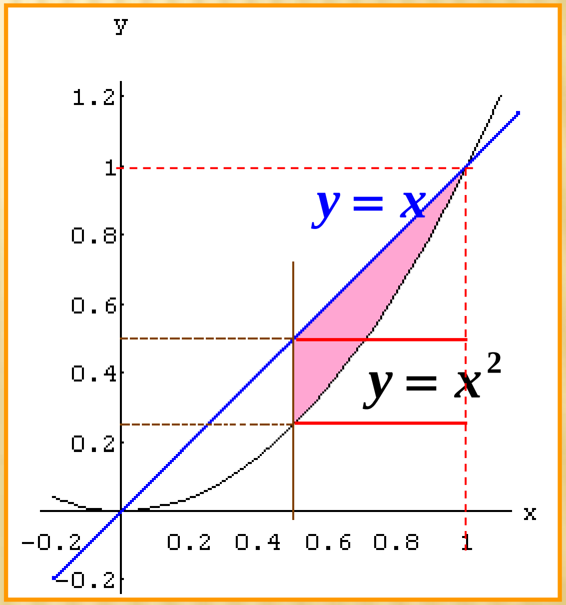
解 $\because \int e^{\frac{y}{x}}dx$ 不能用初等函数表示

$\therefore$ 考虑改变积分次序

原式 $=I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$

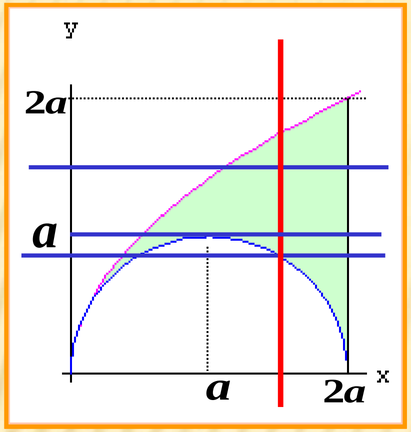
$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^{x})dx$

$=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$



例 5 改变积分$\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy \quad (a>0)$的次序.

解



$$y=\sqrt{2ax} \Longrightarrow x=\frac{y^2}{2a}$$

$$y=\sqrt{2ax-x^2} \Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

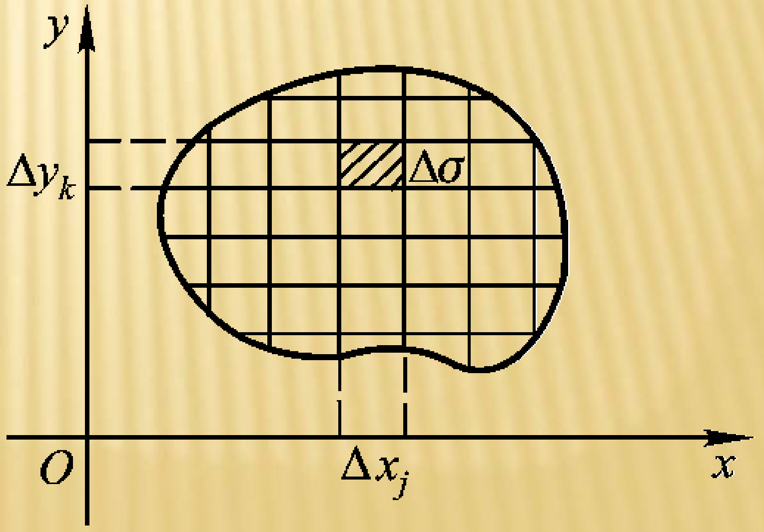
$$原式=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx$$

$$+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx.$$

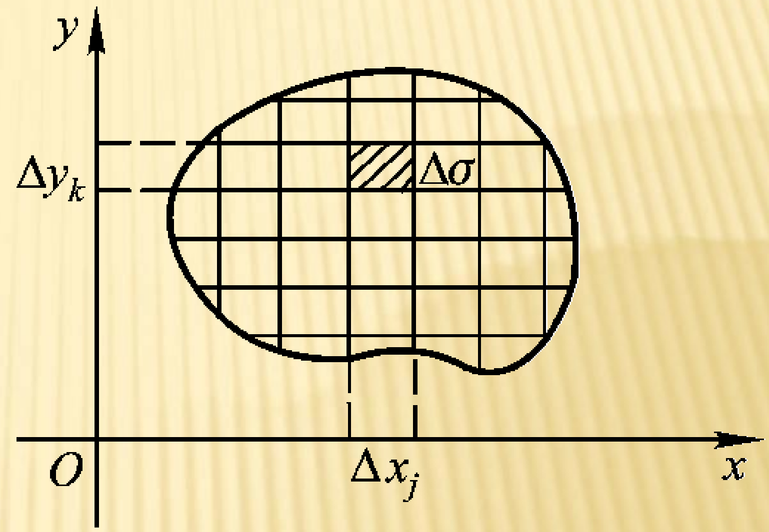
在直角坐标系中，用平行于 x 轴和平行于 y 轴的两族直线，即 x = 常数和 y = 常数， 把区域 D 分割成许多子域. 这些子域除了靠边界曲线的一些子域外，绝大多数都是矩形域(如图).

(当分割更细时，这些不规则子域的面积之和趋向于 0. 所以不必考虑). 于是，图中阴影所示的小矩形 $\Delta\sigma_i$ 的面积为

$$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \cdot \Delta y_k .$$



(当分割更细时，这些不规则子域的面积之和趋向于 0．所以不必考虑)．于是，图中阴影所示的小矩形 $\Delta\sigma_i$ 的面积为



$$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \cdot \Delta y_k.$$

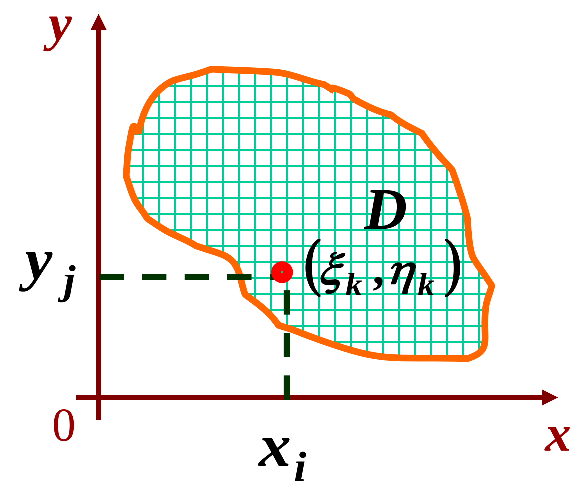
因此，在直角坐标系中的面积微元可记为

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

而二重积分可记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

二重积分化为累次积分的直观解释：



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mathrm{d}\sigma$$

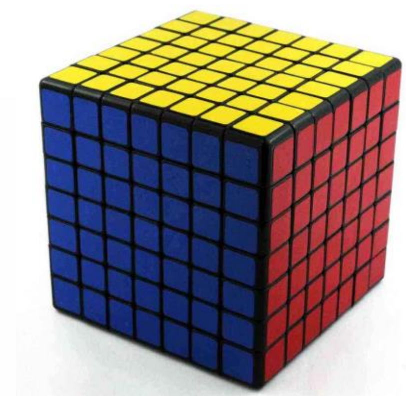
若 $\mathrm{d}\sigma = \Delta x \Delta y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

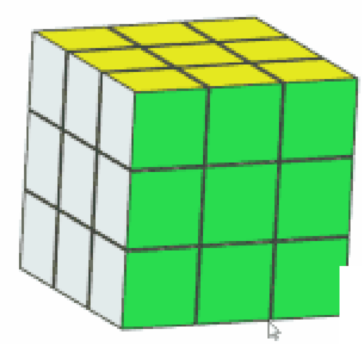
则 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

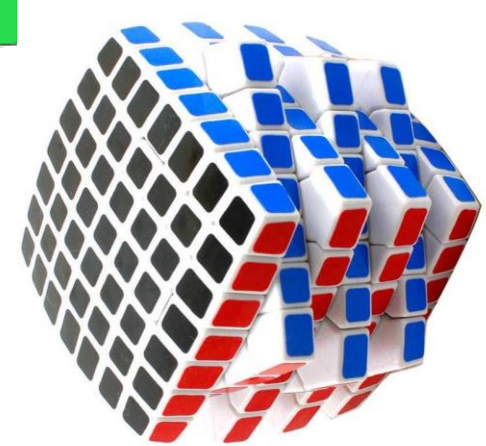
$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n_i} f(x_i, y_j)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{m}\left(\lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{n_i} f(x_i, y_j)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$



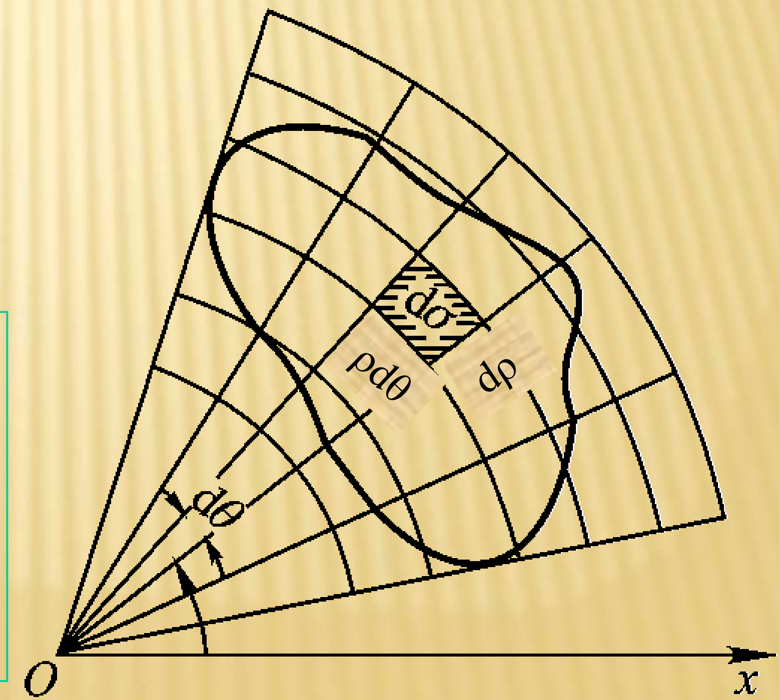




第三部分 极坐标系下二重积分的计算

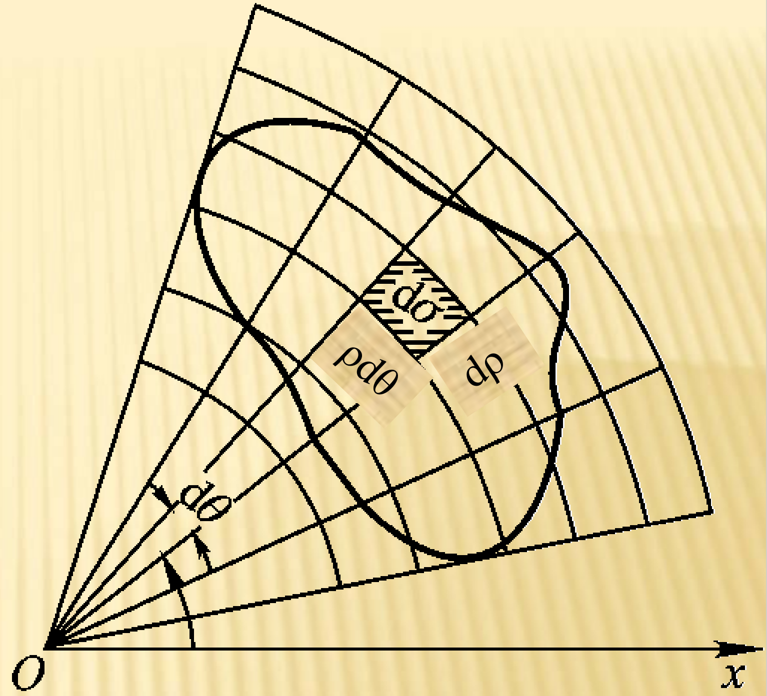
在极坐标系中，可用 θ= 常数和 ρ = 常数的两族曲线，即一族从极点发出的射线 和另一族圆心在极点的同心圆， 把 D 分割成许多子域, 这些子域除了靠边界曲线的一些子域外， 绝大多数都是扇形域(如图).

（当分割更细时，这些不规则子域的面积之和趋向于 0. 所以不必考虑）. 于是图中所示的子域的面积近似等于 以 ρdθ为长，dρ为宽的矩形面积，因此在极坐标系中的面积元素可记为



$$\mathrm{d}\sigma=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

图中所示的子域的面积近似等于:



以 ρdθ为长，dρ为宽的矩形面积，因此在极坐标系中的面积元素可记为 $\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$,

再通过变换 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

于是二重积分的极坐标形式为:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

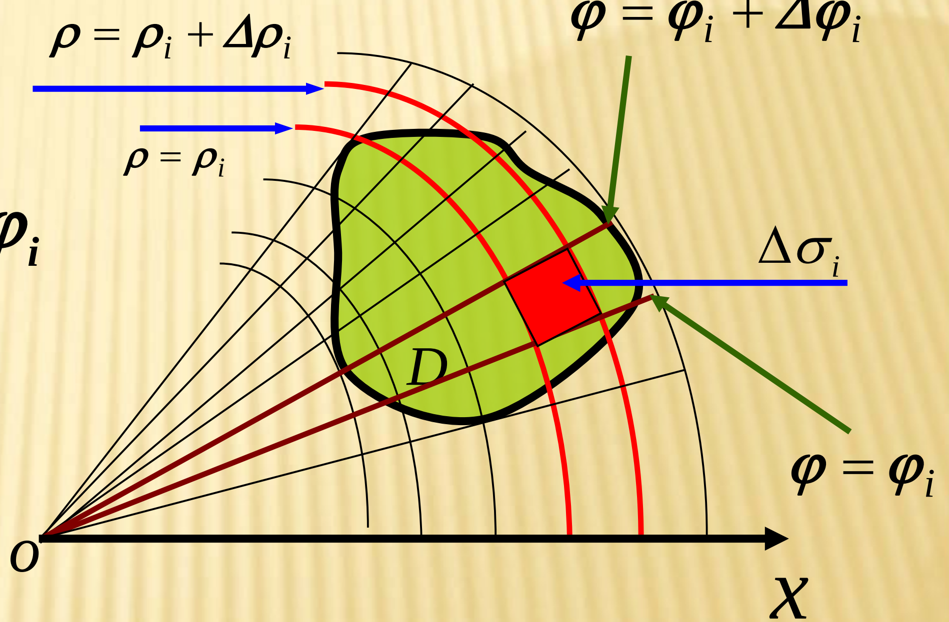
第三部分 极坐标系下二重积分的计算

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\varphi_i - \frac{1}{2}\rho_i{}^2 \cdot \Delta\varphi_i$$

$$= \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta\rho_i \cdot \Delta\varphi_i$$

$$= \rho_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\varphi_i + \frac{1}{2} \cdot (\Delta\rho_i)^2 \Delta\varphi_i$$

$$\approx \rho_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\varphi_i ,$$



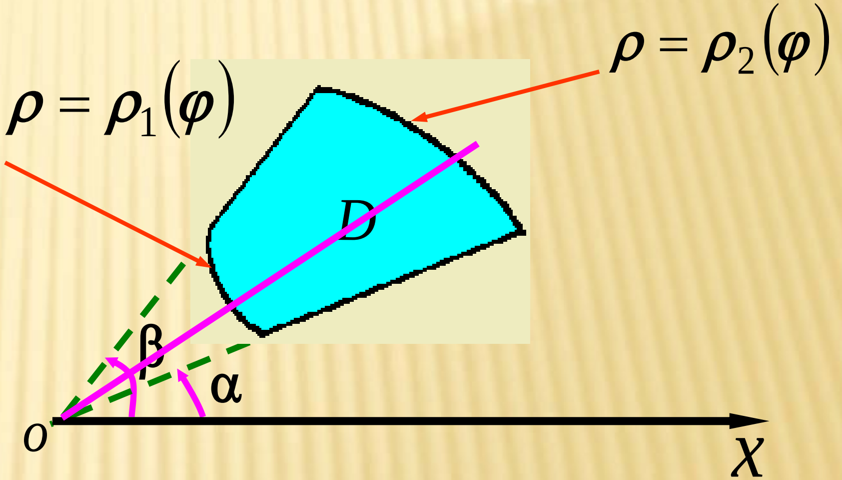
$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi.$$

极坐标下二重积分化为二次积分的公式（1）

区域特征如图（原点在 **D** 外）

$$\alpha \le \varphi \le \beta,$$

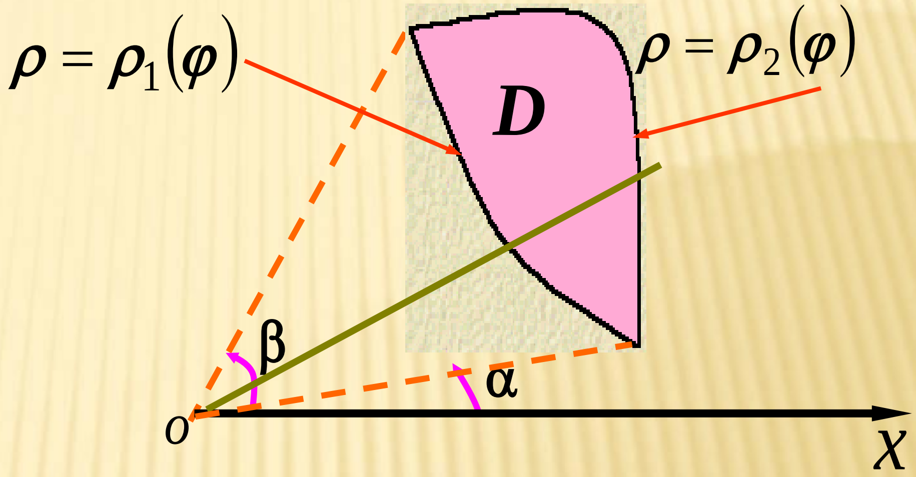
$$\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi).$$



$$\iint_D f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho.}$$

区域特征如图



$$\alpha \le \varphi \le \beta,$$

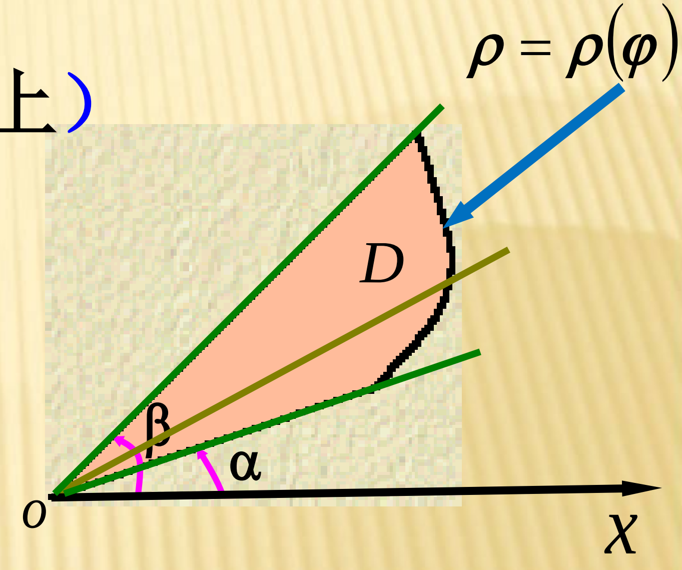
$$\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi).$$

$$\iint_D f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho.}$$

二重积分化为二次积分的公式（2）

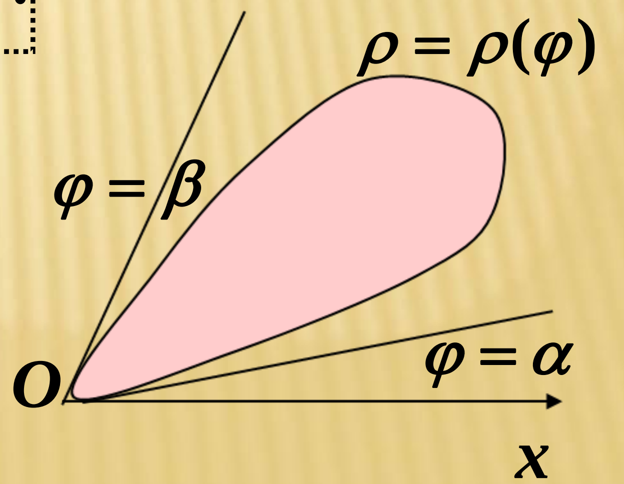
区域特征如图（原点在 D 的边界上）



$$\alpha \le \varphi \le \beta,$$
$$0 \le \rho \le \rho(\varphi).$$

$$\iint_D f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

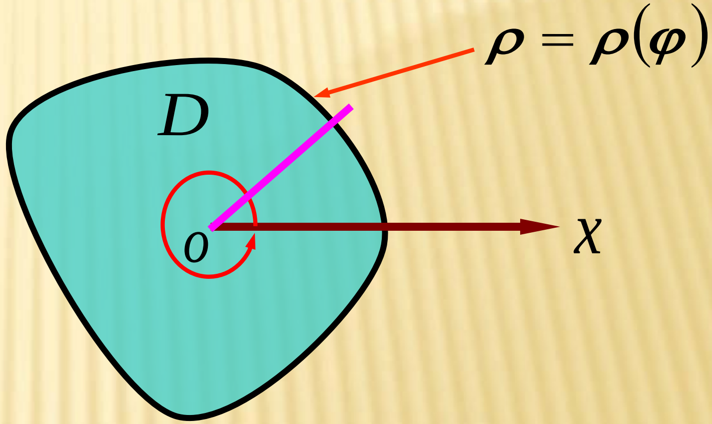
$$\boxed{= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\right)\rho \mathrm{d}\rho.}$$



二重积分化为二次积分的公式（3）

区域特征如图（原点在 D 内）

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \rho(\varphi).$$



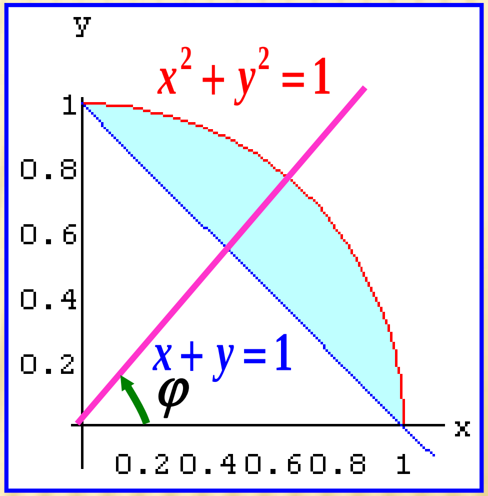
$$\iint\limits_D f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.}$$

若 $f \equiv 1$ 则可求得D 的面积

$$\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \boxed{= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi}$$

例　　写出积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式，其中积分区域$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$.

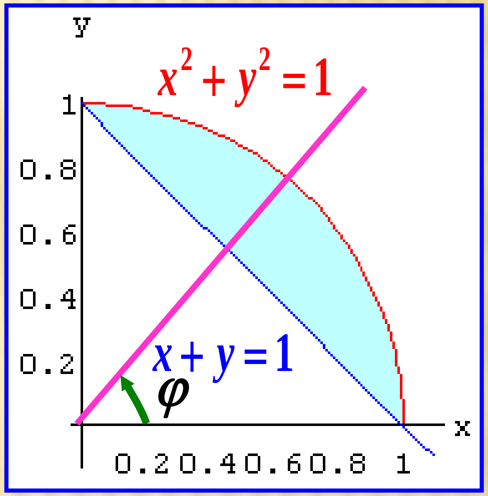


例　写出积分$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式，

其中积分区域$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$.

解　直角坐标与极坐标系的关系为

$$\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$



所以，在极坐标系下圆方程为 $\rho(\varphi)=1$

直线方程为 $\rho(\phi)=\dfrac{1}{\sin\phi+\cos\phi}$

从而 $$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

When 何时用极坐标计算二重积分 ？

当积分区域是圆域或圆域的一部分, 或者被积函数含有 x^2+y^2 时，采用极坐标变换往往能简化二重积分的计算.

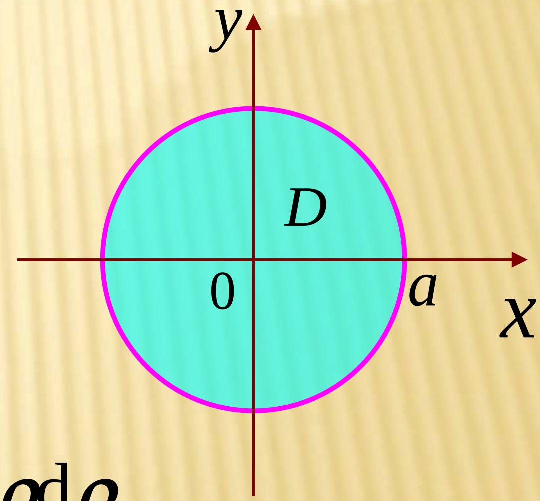
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases},$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

例　计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由中心在原点，半径为a的圆周所围成的闭区域.

解　在极坐标系下，区域D为：

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le a;$$

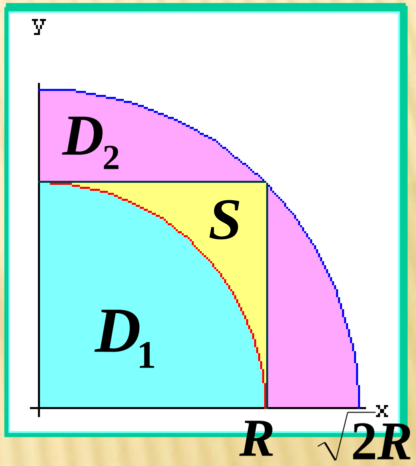


$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a e^{-\rho^2}\rho \mathrm{d}\rho$$

$$= \pi(1-e^{-a^2}).$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，故本题无法用直角 坐标计算.

例　求广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ d$.



解　$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$

$D_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 2R^2\}$

$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\}$

$\{x \ge 0, y \ge 0\}$　显然有 $D_1 \subset S \subset D_2$

$\because \quad e^{-x^2-y^2} > 0,$

$$\therefore \quad \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \iint_{S} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

$$I=\iint_S e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy=(\int_0^R e^{-x^2}dx)^2;$$

$$I_1=\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2});$$

同理可得 $I_2=\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2});$

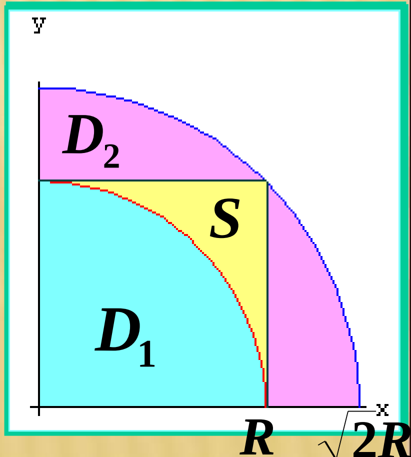
因为 $I_1<I<I_2$,

即 $$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)<\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2<\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right);$$

当$R\to\infty$时, $I_1\to\frac{\pi}{4}$, $I_2\to\frac{\pi}{4}$,

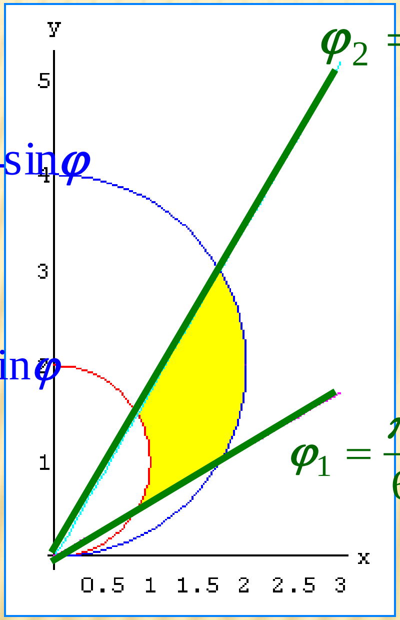
因此当$R\to\infty$时, $I\to\frac{\pi}{4}$, 即$(\int_0^\infty e^{-x^2}dx)^2=\frac{\pi}{4}$,

所求广义积分$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



例　计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$，$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解



$x-\sqrt{3}y=0 \Rightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{6}$

$y-\sqrt{3}x=0 \Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{3}$

$x^2+y^2=2y \Rightarrow \rho_1(\varphi)=2\sin\varphi$

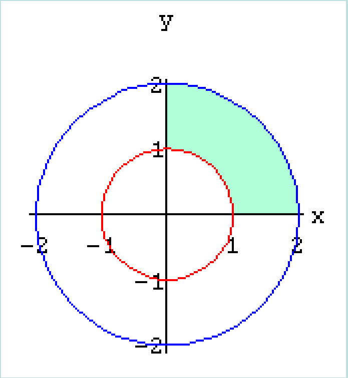
$x^2+y^2=4y \Rightarrow \rho_2(\varphi)=4\sin\varphi$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right).$$

例　计算二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,

其中积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解　由对称性，可只考虑第一象限部分，



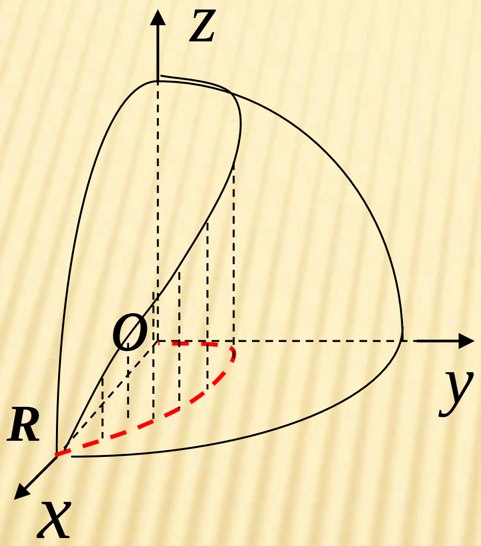
$D=4D_1$

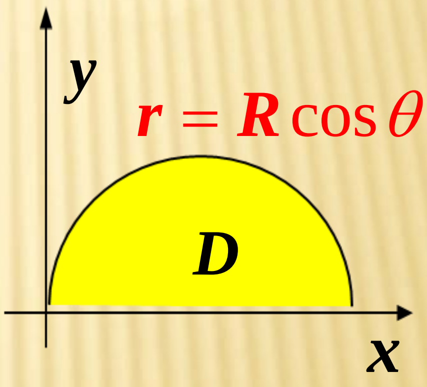
注意：被积函数也要有对称性.

$$\iint\limits_{D} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 4\iint\limits_{D_1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \frac{\sin \pi\rho}{\rho}\rho d\rho = -4.$$

例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.





例 求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

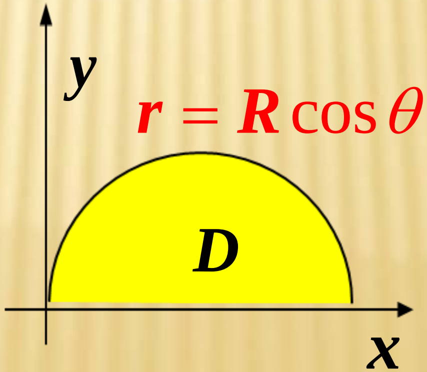
解 由对称性可知

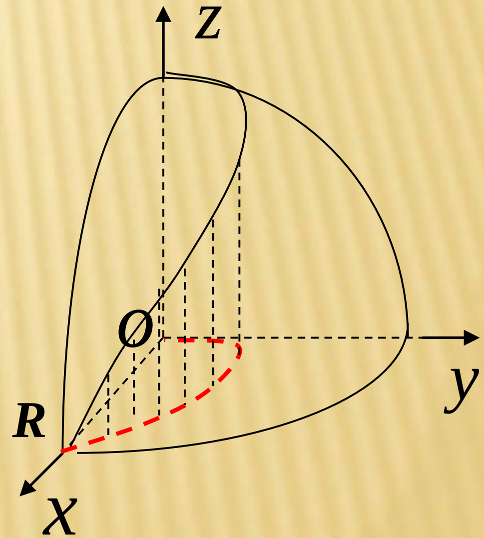
$$V=4\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=4\iint_D\sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

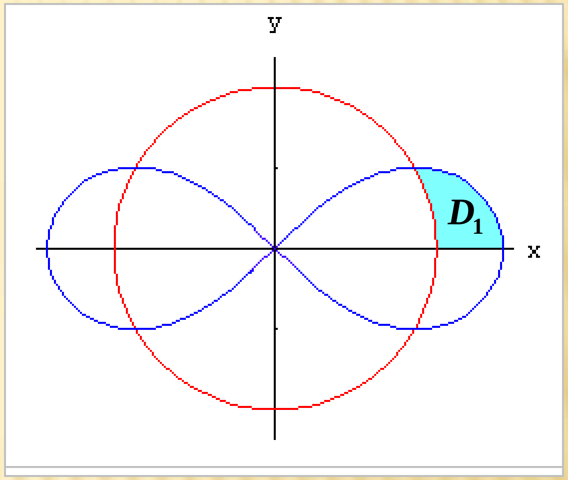
$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$





例13 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 与 $x^2+y^2\ge a^2$ 所围成的图形的面积.



根据对称性有 $D=4D_1$

在极坐标系下

$$x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \rho_1(\varphi)=a$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

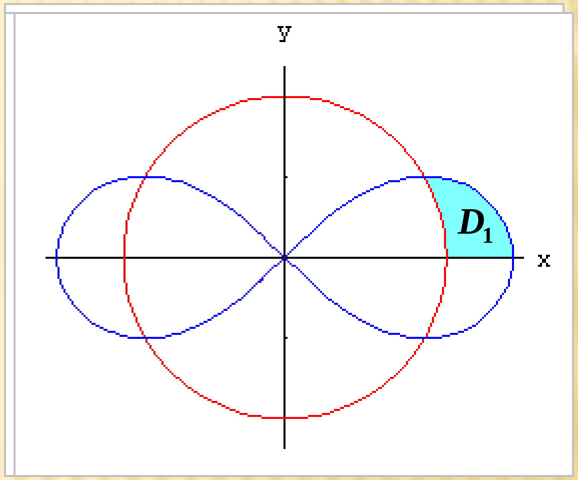
$$\Longrightarrow \rho_2(\varphi)=a\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

$$\begin{cases}\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}\\ \rho=a\end{cases} \Longrightarrow \text{交点} A=(a,\frac{\pi}{6}),$$

例 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 与 $x^2+y^2\ge a^2$ 所围成的图形的面积.

解 根据对称性有 $D=4D_1$

在极坐标系下



$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \rho_1(\varphi)=a$$

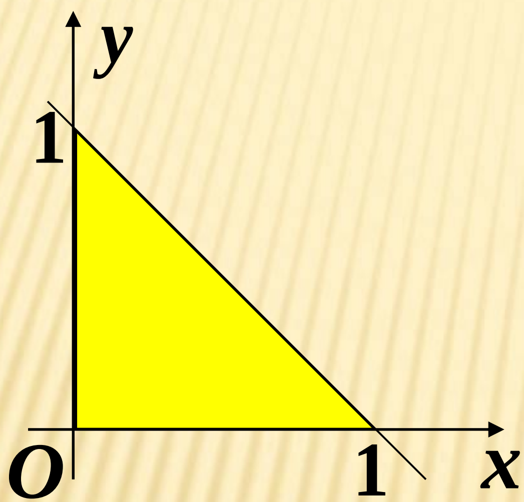
$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

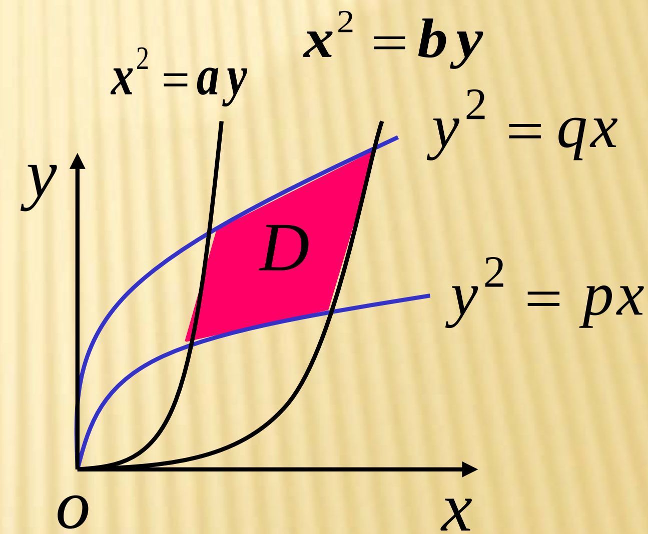
$$\Rightarrow \rho_2(\varphi)=a\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

$$\begin{cases}\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}\\ \rho=a\end{cases} \Rightarrow \text{交点} A=(a,\frac{\pi}{6}), \quad \text{所以}$$

$$\sigma=\iint_D dxdy=4\iint_{D_1} dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho d\rho=a^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}).$$

问题1 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ 其中D 是 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围区域.





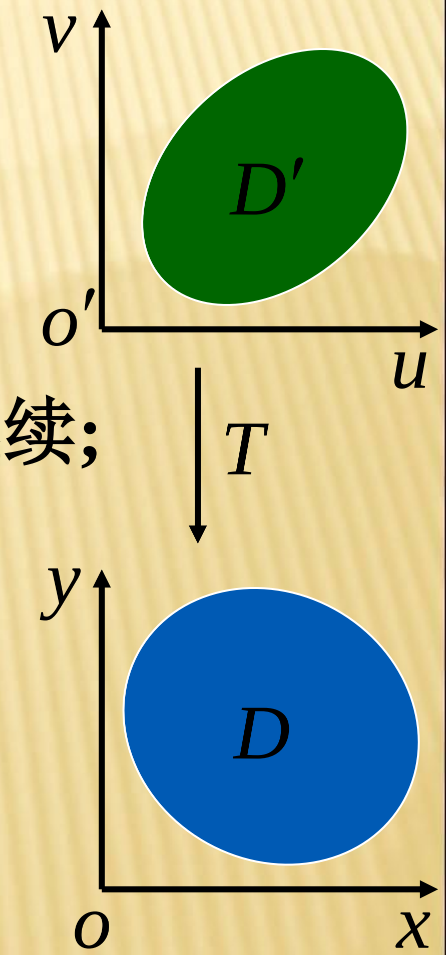
问题2. 计算由$y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$ $(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S .

第四部分 曲线坐标下二重积分的计算

1.二重积分的一般换元法

设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续,

正则变换: $T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ $(u,v)\in D' \to D$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导数连续;

(2) 在 D' 上 Jacobi行列式 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \neq 0$;

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的,

则 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

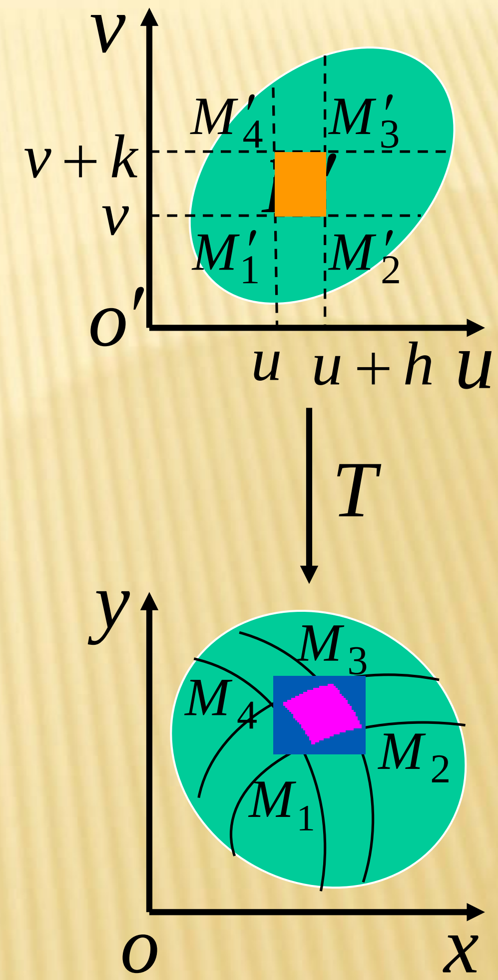
$$= \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

正则变换将有界区域的内部变为内部,外部变为外部,边界变为边界.

证 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在 $uo'v$ 坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域 D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为

$$M_1'(u,v),\qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k),\quad M_4'(u,v+k).$$



通过变换 T, 在 xoy 面上得到一个四边形, 其对应顶点为 $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u, v+k) - x(u,v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当$\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}$ 充分小时,曲边四边形 $\boldsymbol{M_1M_2M_3M_4}$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \right| = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} \right|$$

$$\approx \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} h & \frac{\partial y}{\partial u} k \\ \frac{\partial x}{\partial v} h & \frac{\partial y}{\partial v} k \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| hk = \left| J(u,v) \right| hk$$

$$= \left| \boldsymbol{J(u,v)} \right| \boldsymbol{\Delta u \Delta v}$$

二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

面积微元间的关系为:

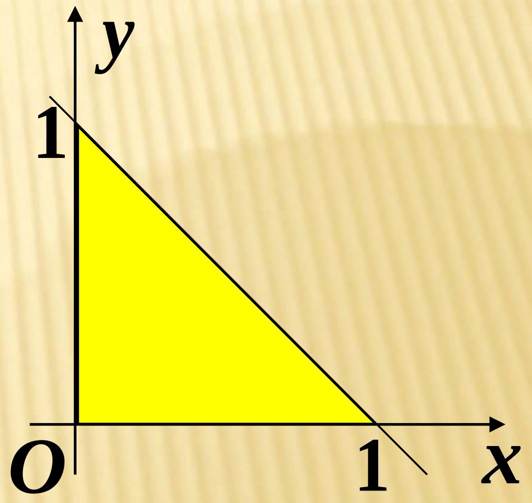
$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

如何确定区域D’的边界?

正则变换将有界区域的内部变为内部，外部变为外部，边界变为边界.

例1 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ 其中 D 是 $x=0,\ \ y=0,$

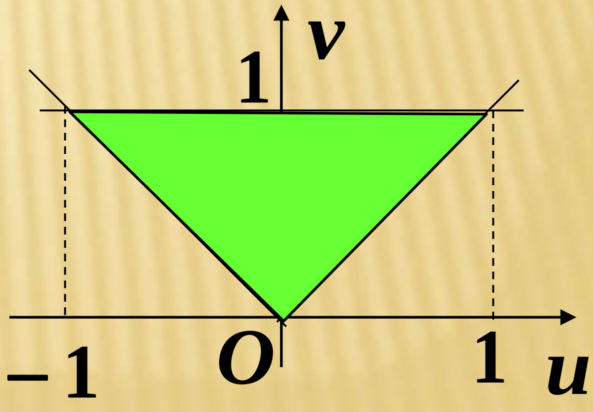
$x+y=1$ 所围区域.



解: 令 $u=x-y,\ v=x+y,$ 则

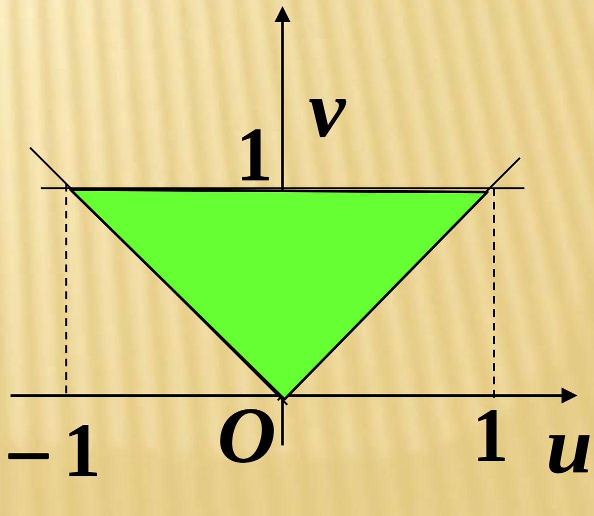
$$x=\frac{1}{2}(u+v),\ y=\frac{1}{2}(v-u),$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$



$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u$$

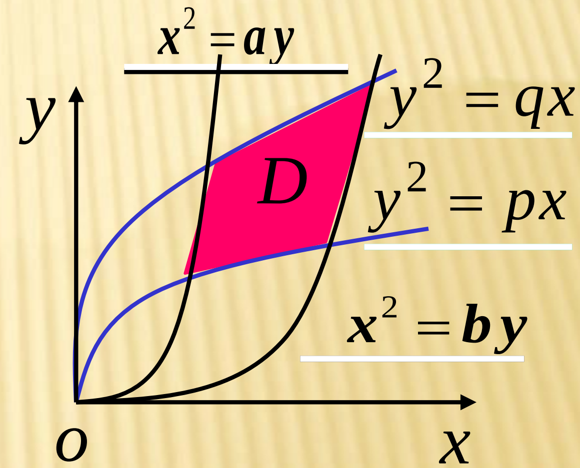
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v e^{\frac{u}{v}}\right)\Big|_{-v}^{v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 v(e - e^{-1})\,\mathrm{d}v = \frac{e - e^{-1}}{4}$$



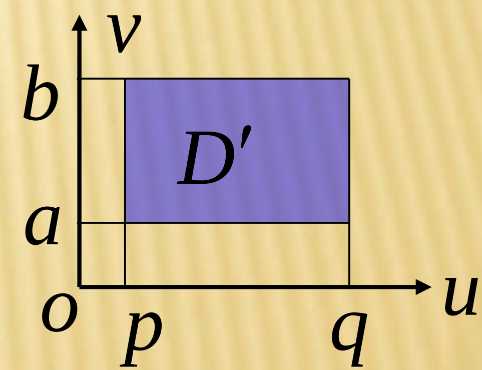
例2. 计算由 $y^2 = px, y^2 = qx, \quad x^2 = ay, x^2 = by$

$(0 < p < q, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S .

解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x}, v = \dfrac{x^2}{y}$, 则



$$D': \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$

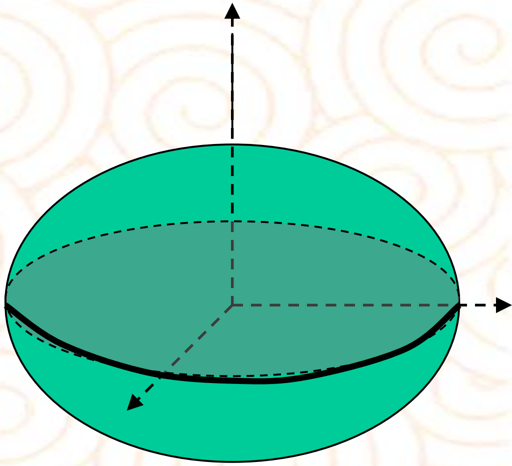
$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} |J| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u \int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例3 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



令 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, 则

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

$$\therefore\quad V=2c\iint_D\sqrt{1-r^2}\,abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc$$

广义极坐标变换

用极坐标计算二重积分

当积分区域是圆域或圆域的一部分, 或者被积函数含有 x^2+y^2 时，采用极坐标变换往往能简化二重积分的计算. 此时,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

第三部分 小结

二重积分在直角坐标下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \quad [\text{X—型}]$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \quad [\text{Y—型}]$$

（在积分中要正确选择积分次序）

二重积分在极坐标下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

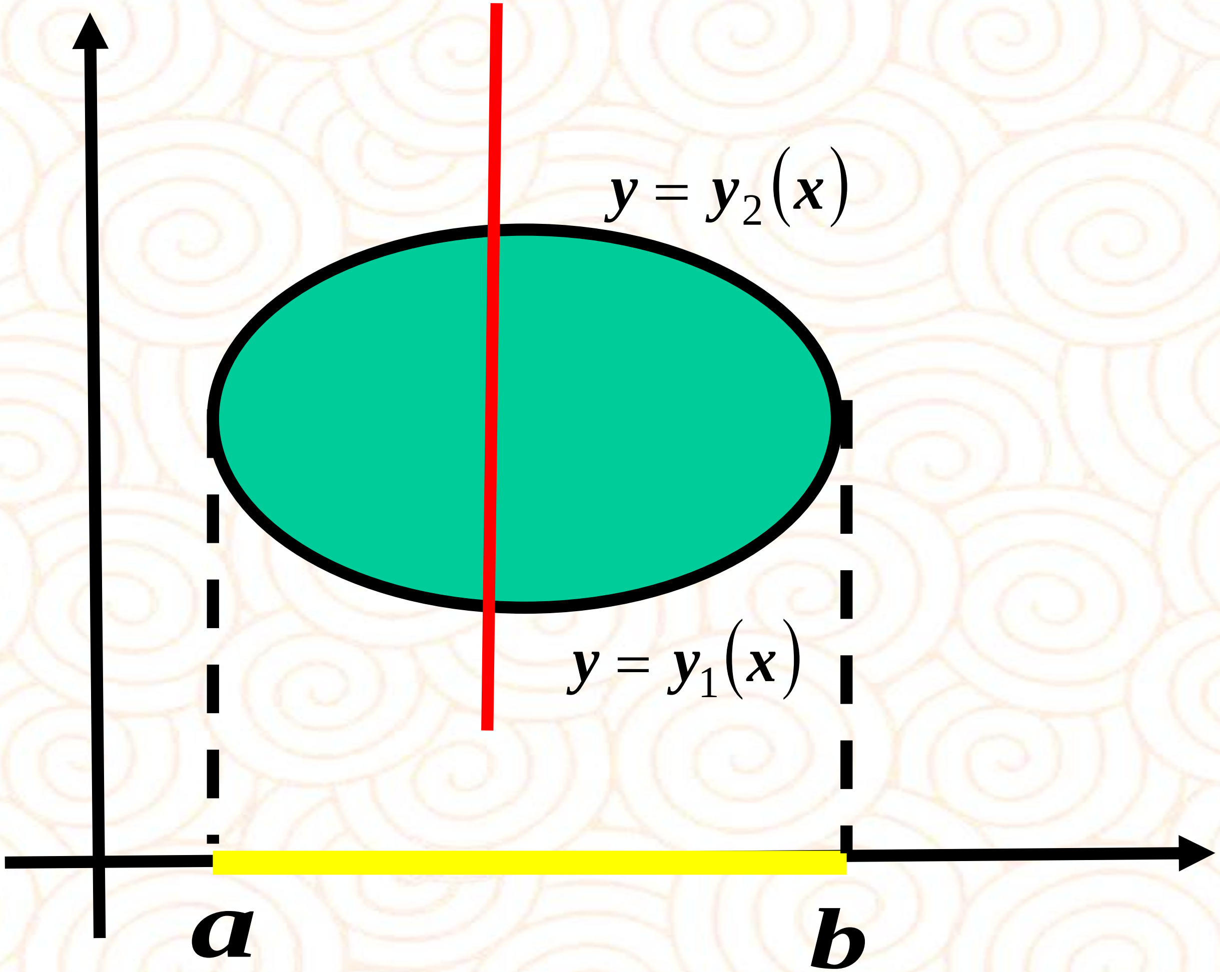
二重积分的一般换元法

1画域

2投影

3发射

4定限



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

思考题1 交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\,\mathrm{d}\rho \quad (a\ge 0).$$

思考题2

计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$ 是下右图中 $y=4-x^2$, $y=-3x$, $x=1$ 所围成的区域.