第 19 卷　建模专辑　　　　　　工　程　数　学　学　报　　　　　　Vol. 19 Supp.
2002 年 02 月　　　　JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　　　Feb. 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0075-06

公交车调度

吕　鹏,　张文夫,　雷　鹏
指导教师:　曹天林
(空军工程大学导弹学院,陕西三原 713800)

编者按:本文依据题意和数据进行分析与抽象,建立了车辆的满载率,乘客的等待抱怨程度和拥挤抱怨程度三个目标函数的多目标规划数学模型。基于多目标规划加权分析法,进行数值计算,结果合理。但加权分析时所取权系数只有一组,最好多取几组权系数进行比较。虽然,文中最后提及灵敏度检验,但并没有实质性进行分析,缺乏理论指导。

摘　要:本文利用多目标优化方法建立了公交车调度的数学模型。首先通过数据分析,并考虑到方案的可操作性,将一天划分为早高峰前,早高峰,早高峰和晚高峰之间,晚高峰及晚高峰后 5 个时段;引入车辆的平均满载率,乘客的等待抱怨程度及拥挤抱怨程度作为三个目标函数,建立了三目标优化模型;通过加权,将三个目标函数合并为一个目标函数。运用 MATLAB 数学软件计算出了上行、下行各个时段发车的时间间隔:上行各时段时间间隔分别为 5、2、4、3、15,下行各时段时间间隔分别为 10、2、5、3、8(单位:分钟);所需总车辆数为 52 辆,共发车 534 次,公交公司的平均满载率为 82.094 %,抱怨顾客的百分比为 0.91 %.通过模型检验得出所求模型较为稳定。最后,通过对原始数据的分析和处理,得出在进入和离开乘客高峰时期,局部缩短采集数据时间间隔是改善调度方案的有效方法.

关键词: 公交车调度;数学模型;多目标非线性规划
分类号: AMS(2000) 90C08　　　**中图分类号**: TB114.1　　　**文献标识码**: A

1　模型假设

1) 假设表上所给数据能反映该段线路上的日常客流量;
2) 车辆上行或下行到达终点站时,所有的乘客必须全部下车;
3) 乘客无论是上行还是下行,无论经过几个站,车票价为定值;
4) 各公交车为同一个型号,公交车会按调度表准时到站和出站;
5) 在同一个时间段内,相邻两辆车发车时间间隔相等;
6) 车上标准载客人数为 100 人,超过此数将会造成乘客抱怨;
7) 早高峰时乘客等待时间不超过 5 分钟,正常时不超过 10 分钟,否则乘客将会抱怨;
8) 早上 5:00 上下行起点站必须同时发车;
9) 不计乘客上下车所花费的时间,公交车在行驶过程中速度保持不变;
10) 假设每辆车经过各个车站时不会留有乘客。

2　问题分析

题中要求照顾到乘客和公交公司的双方利益,经过分析为使公交公司赚钱尽可能多,乘客尽早上车和乘车的舒服程度尽可能提高,可用公交车载客的平均满载率来衡量公交公司的利

益,以乘客的等待时间和拥挤程度作为衡量乘客的利益。从而可以建立三目标优化模型,进行求解。但由于三目标优化模型的求解较为困难,所以简化起见,可以引入加权因子,将此三目标优化模型转化为单目标优化模型,从而求得车辆的平均满载率、顾客的平均抱怨程度和每一个时间段内相邻两辆车的发车的时间间隔。据此,可排出公交车调度表,得出所需的最小车辆数。

3 变量及符号说明

n_j:第 j 时段内发车次数(规定 $n_0 = 0$);T_j:第 j 时段的起始时间;

t_i^j:第 j 时段内第 i 辆车的发车时间;Δt_j:第 j 时段内相邻两车的发车时间间隔;

t_{ik}^j:第 j 时段内第 i 辆车从首站到达第 k 站点所用的时间;Z:汽车的平均满载率;

p_{ik}^j:第 j 时段内第 i 辆车经过第 k 站点后车上的人数;

p_j:第 j 时段内所有车载客的总和;$\rho_{下jk}$:第 j 时段单位时间内下车的人数;

q_k:车辆从发车点到达第 k 站点所花费的时间;$P_{总}$:所有在车上的人数之和;

$\rho_{上jk}$:第 j 时段单位时间内第 k 站点新增加等待上车的人数;

ρ_{jk}:第 j 时段内第 k 站点单位时间内车上增加的人数;

W_{ik}^j:第 j 时段内第 i 辆车到第 k 站点时,在第 k 站等候时间超过忍耐时间的人数;

W:由于等待时间过长而不满意的人数在总人数中的比例;

C_{ik}^j:第 j 时段第 i 辆车离开第 k 站点时车上的超载人数;

C:由于超载而不满意的人数在总人数中的比例;

$j(t)$:t 时刻所处的上行时段数(规定当 $t \le 0$ 时,$j(t) = 1$);

$\Delta G_A(t)$:t 时刻不在 A 车场(上行起始站)的车辆总数;

$G_B(t)$:t 时刻 B 车场(下行起始站)上的等待发车的车辆数。

4 模型的建立

考虑一般问题时(不妨只考虑上行段),对题目所给数据进行分析,将乘客一天候车的时段按高峰期、正常期、低谷期分为几个阶段来处理。据此可以建立非线性规划模型。

首先将全天的行车时间分为 m 段,假设每一段内发车时间间隔相同,每一段的发车次数分别为:$n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \cdots n_m$。假设某路段站点数为 b,则:

$$\Delta t_j = \frac{T_{j+1} - T_j}{n_j} \qquad \rho_{jk} = \rho_{上jk} - \rho_{下jk}$$

第 j 时段第 i 辆车的发车时间 $t_i^j = T_j + \Delta t_j \cdot i$,对于第 j 时段第 i 辆车经过第 k 站点所花费的时间 $t_{ik}^j = t_i^j + q_k$。此时该车上的总人数为:若 $t_{ik}^j \le T_{j+1}$,$p_{ik}^j = p_{i(k-1)}^j + \Delta t_j \cdot \rho_{jk}$;若 $t_{ik}^j > T_{j+1}$,$p_{ik}^j = p_{i(k-1)}^j + \Delta t_j \cdot \rho_{(j+1)k}$。汽车在该时段离开第 k 站点时车上的超载人数为:$C_{ik}^j = \max\{p_{ik}^j - 100, 0\}$

$$p_{总} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{b} p_{ik}^j \qquad C = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{b} C_{ik}^j}{p_{总}} \tag{1}$$

假设乘客在 ΔT_i 时间内到站人数服从均匀分布,则在第 i 辆车到第 k 站点前,在第 k 站等

候时间超过忍耐时间的人数为(忍耐时间在早高峰期为5分钟,其余为10分钟):若第 j 时段不处在早高峰期, $W^j_{ik} = \max\{\rho_{上jk} \cdot (\Delta t_{ik} - 10), 0\}$;若第 j 时段处在早高峰期, $W^j_{ik} = \max\{\rho_{上jk} \cdot (\Delta t_{ik} - 5), 0\}$ 同样可以计算出:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{b} W^j_{ik}}{P_{总}} \tag{2}$$

$$Z = \frac{P_{总}}{100\sum_{j=1}^{m} n_j} \tag{3}$$

通过以上分析,建立如下三目标优化模型:

$$\max\ Z = \frac{P_{总}}{100\sum_{j=1}^{m} n_j};\quad \min\ W = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{b} W^j_{ik}}{P_{总}};\quad \min\ C = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{b} C^j_{ik}}{P_{总}}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} n_j > 0 \\ p^j_{ik} \le 120 \end{cases},\quad j = 1, \cdots, m;\ i = 1, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, b$$

引入三个非负加权因子 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,将此三目标优化模型转化为单目标优化模型:

$$\max\ \lambda_1 Z - \lambda_2 C - \lambda_3 W$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} n_j > 0 \\ p^j_{ik} \le 120 \end{cases},\quad j = 1, \cdots, m;\ i = 1, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, b \tag{*}$$

据此进行求解与分析,可以求出每个时段的发车数量 n_j,进而可求出其余各量。

下面来求按最优方案所需最小车辆数(注:加上标“ ′”的量为下行段各对应量):

$$\Delta G_A(t) = \begin{cases} G_B(t_0) + \sum_{s=0}^{j(t)-1} n_s + \frac{t - T_{j(t)}}{T_{j(t)+1} - T_{j(t)}} n_j(t) \\ - \sum_{s=0}^{j'(t-\alpha)-1} n'_s - \frac{t - T'_{j'(t-\alpha)}}{T'_{j'(t-\alpha)+1} - T'_{j'(t-\alpha)}} n'_{j'(t-\alpha)}, & 若\ t \ge t_0 + \alpha \\ G_B(t_0) + \sum_{s=0}^{j(t)-1} n_s + \frac{t - T_{j(t)}}{T_{j(t)+1} - T_{j(t)}} n_{j(t)} + 1, & 若\ t_0 \le t \le t_0 + \alpha \end{cases}$$

$$G_B(t) = \begin{cases} G_B(t_0) + \sum_{s=0}^{j(t-\beta)-1} n_s + \frac{t - T_{j(t-\beta)}}{T_{j(t-\beta)+1} - T_{j(t-\beta)}} n_{j(t-\beta)} \\ - \sum_{s=0}^{j'(t)-1} n'_s - \frac{t - T'_{j'(t)}}{T'_{j'(t)+1} - T'_{j'(t)}}, & 若\ t \ge t_0 + \beta \\ G_B(t_0) - \frac{t - T'_{j'(t)}}{\Delta t'_{j'(t)}} n'_{j'(t)} - \sum_{s=0}^{j'(t)-1} n'_s - 1, & 若\ t_0 \le t < t_0 + \beta \end{cases}$$

其中,α为下行线车辆运行时间,β为上行线车辆运行时间,$t_0 = 5.00$。

令 $G_B(t) \ge 0$,可求出 $\min G_C(t_0)$ 即为 B 车场初始车辆数,同时所求最小车辆数为 $\max \Delta G_A(t)$。

5 模型的求解

通过对本题所给数据的分析,取 $m = 5$,即将全天的行车时间分为5段,划分表如下:

1	5:00～6:00
2	6:00～9:00
3	9:00～16:00
4	16:00～18:00
5	18:00～23:00

1	5:00～7:00
2	7:00～10:00
3	10:00～16:00
4	16:00～19:00
5	19:00～23:00

对于上行段,公式(1)、(2)、(3)分别化为:

$$Z=\frac{P_{总}}{100\sum_{j=1}^{5}n_j}\qquad C=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{14}C_{ik}^{j}}{P_{总}}\qquad W=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{14}W_{ik}^{j}}{P_{总}}$$

令多目标的权重系数分别为:$\lambda_1=0.2$,$\lambda_2=0.3$,$\lambda_3=0.5$,则模型(*)变为:

$$\max\ 0.2Z-0.3C-0.5W$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}n_j>0\\ p_{ik}^{j}\le 120\end{cases},\quad j=1,\cdots,5;\ i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,14$$

对下行段可采取与上行段同样的方法处理。公式(1)、(2)、(3)分别化为:

$$Z=\frac{P_{总}}{100\sum_{j=1}^{5}n_j}\qquad C=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{13}C_{ik}'}{P_{总}}\qquad W=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{13}W_{ik}^{j}}{P_{总}}$$

此时模型(*)中取 $b=13$。

通过对上行段以及下行段的模型进行求解可得全天:

所需总车辆数为:56辆　　平均满载率为:$Z=85.468\%$

乘客平均抱怨率为:1.153%　　共发车次数为:511辆

简单时刻表如下:

5:00～6:00	5.123分钟/次
6:00～9:00	2.226分钟/次
9:00～16:00	4.438分钟/次
16:00～18:00	3.214分钟/次
18:00～23:00	15.256分钟/次

5:00～7:00	12.33分钟/次
7:00～10:00	2.874分钟/次
10:00～16:00	5.253分钟/次
16:00～19:00	3.272分钟/次
19:00～23:00	7.926分钟/次

事实上,早高峰时期路上所有车辆数加起来总数不超过51辆,通过合理调整完全可使一天内所有车辆数也不超过51辆。造成这种情况的原因主要是前半天上行段公交车数普遍比下行段多,致使上行段公交车数量得不到及时补充,而同时下行段公交车在这一时间段内又普遍过剩。为此,考虑通过加大下行段的公交车数来弥补上行段的公交车数量的不足。事实上,只需通过少量合理调整即可解决矛盾,同时通过调整也可使一天内上行车和下行车总数保持平衡。调整结果如下:

所需总车辆数为:52辆　　公交车的平均满载率为:82.094%

乘客的平均抱怨度为:0.91%　　全天发车次数为:534辆

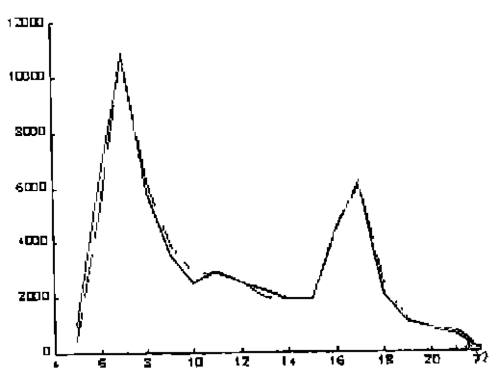
上下行发车简单时刻表为:(详细时刻表略)

5 :00 ～ 6 :00	5 分钟/ 次
6 :00 ～ 9 :00	2 分钟/ 次
9 :00 ～ 16 :00	4 分钟/ 次
16 :00 ～ 18 :00	3 分钟/ 次
18 :00 ～ 23 :00	15 分钟/ 次

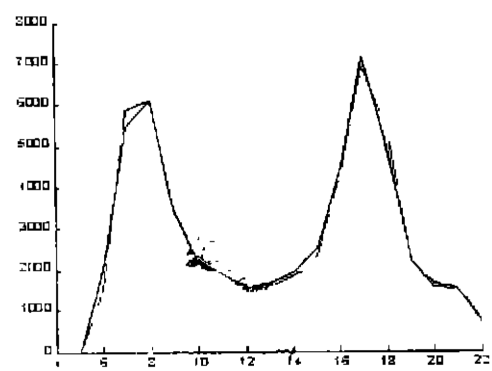
5 :00 ～ 7 :00	10 分钟/ 次
7 :00 ～ 10 :00	2 分钟/ 次
10 :00 ～ 16 :00	5 分钟/ 次
16 :00 ～ 19 :00	3 分钟/ 次
19 :00 ～ 23 :00	8 分钟/ 次

6 模型的检验与结果分析

在假设每辆车过后都将沿途车站上所有乘客载完,并用 $p_{ik}^{j} \le 120$ 作为约束条件的基础上,作灵敏度检验。分别将 $p_{ik}^{j} \le 120$ 改为 $p_{ik}^{j} \le 125$ 和 $p_{ik}^{j} \le 115$,得出所需的总车数和调度方案基本保持不变,从而表明所建模型稳定。



上行段的客流量图



下行段的客流量图

从一日的客流量图(实线表示上车人数,虚线表示下车人数) 可以看出,上行段在 5 :00 ～ 6 :00、6 :00 ～ 7 :00、9 :00 ～ 10 :00,下午 11 :00 ～ 12 :00、13 :00 ～ 14 :00 等处一小时内上车人数和下车人数相差很大,而在计算过程中上下人数大致相等是必要的,下行段也存在同样的问题。解决办法是在统计采样时将上下车人数差异很大的时段细分,使全过程中上下车人数大致相同。

7 模型的评价及改进方向

本模型从题中数据的特点出发联系实际,将全天的行车时间分为 5 个时间段,进一步认为每一个时间段内的发车时间间隔相等,从而使问题得到简化。在一定程度上解决了单趟车在全过程中上下车的总人数不相等的矛盾,同时降低调度方案的复杂度,使调度表的可操作性得到有效增强。在解出最优解的基础上联系实际问题将数据进行了调整,虽然牺牲了部分平均满载率,但可以使所需总公交车数明显降低,同时照顾了一天上下行总车辆的平衡。

由于在模型的建立过程中,始终认为一辆车经过各个车站时不会留有乘客,这样会在一定程度上增加了发车数。同时,将一天划分为几个不同时段也可能使局部产生等待过久的现象,不过从长期考虑结果还是理想的。当然,如果考虑公交车在各个站的留乘人数,无论是从长远还是从短期角度来看结果都会更为合理,可以使精度进一步得到提高。

参考文献:

[1] 杨 冰. 实用最优化方法及计算机程序[M]. 哈尔滨船舶工程学院出版社,1994

[2] 秦寿康. 最优化理论和方法[M]. 电子工业出版社,1986

[3] 王正民,易东云. 测量数据建模与参数估计[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1997

[4] 胡永孚. 数学模型[M]. 西安:西北工业大学出版社,1996

Buses Dispatching

LU Peng, ZHANG Wen-fu, LEI Peng

Faculty Adviser: CAO Tian-lin

(Missile Institute of Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800)

Abstract: In this paper, a mathematical model on buses dispatching is presented with the method of perfecting on multi-objects. Firstly, with the data analyses and consideration on feasibility, a typical workday can be divided into five spans: before morning rush hour, morning rush hour, the span between morning rush hour and evening rush hour, evening rush hour and its beyond. Three objective functions are introduced: the average capacity rate, the degree of the passengers' waiting, and the degree of passengers' complain on waiting and crowded, to set up a model of perfecting on three objectives. Weighted average method is used to combine the three functions as one. MATLAB mathematical software is employed to work out the interval of sending buses. Up-going buses are sent at respectively 5,2,4,3,15(minutes) and down-going buses are 10,2,5,3,8(minutes). Altogether, 52 buses are needed and 534 buses one a workday. The percent of average capacity is 82.094%, and the percent of the passengers' complain is 0.91%. The model is proved to be steady through the test. Lastly shortening the statistical time on partial area is concluded to be an effective way to improve the dispatching plan through the analyses on original data.

Key words: buses dispatching; mathematical model; multi-objects