第4.1.5 节

可降阶的高阶微分方程

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

例1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x \right) dx + C_1' = \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1' \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$）

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

令 $z = y^{(n-1)}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$, 因此

$$z = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

即

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 ***n*** 次积分, 可得含 ***n*** 个任意常数的通解 .

例　求方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

解　设 $y^{(4)}=P(x)$,　$y^{(5)}=P'(x)$

代入原方程　$xP'-P=0$,（$P\neq 0$）

$$x\frac{dP}{dx}=P,\quad \frac{dP}{P}=\frac{dx}{x},$$

解线性方程, 得 $P=C_1x$　　即 $y^{(4)}=C_1x$,

两端积分,得 $y'''=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$, $\cdots$ $\cdots$,

$$y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5,$$

原方程通解为 $y=d_1x^5+d_2x^3+d_3x^2+d_4x+d_5$

扩展: $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n-1)})$ 型

特点: $\boxed{\text{不显含未知函数}y\text{及}\, y', \cdots, y^{(k-1)}.}$

解法: 令 $y^{(k)} = P(x)$

则 $y^{(k+1)} = P', \ y^{(n)} = P^{(n-k)}.$

代入原方程, 得

$P(x)$的$(n\text{-}k)$阶方程

$P^{(n-k)} = f(x, P(x), \cdots, P^{(n-k-1)}(x)).$ 求得 $P(x)$,

将 $y^{(k)} = P(x)$ 连续积分k次, 可得通解.

二、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

特点： 右端不显含因变量 y.

设 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p) \text{ 即 } \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

设其通解为 $p = F(x, C_1)$ 则得 $y' = F(x, C_1)$

再积分一次，得原方程的通解为：

$$y = \int F(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

例2. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y'' = 2xy' \\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 3\end{cases}$

解：设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p' = 2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0} = 3$, 得 $C_1 = 3$, 于是有 $y' = 3(1+x^2)$

两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$

利用 $y\big|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

特点————————不显含自变量 x

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \xrightarrow{\text{视作}} y' = p[y(x)]$$ 以y为自变量

令 $y' = p(y)$ 以p为未知函数，y为自变量，有：

则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

设其通解为$p = F(y, C_1)$，得 $y' = F(y, C_1)$

分离变量后积分，可得原方程的通解为：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{F(y, C_1)} = x + C_2$

例3. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为:

$y = C_2 e^{C_1 x}$, ($P = 0$时, $y = C$已包含在内)

例 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

解 将方程写成 $\dfrac{d}{dx}(yy') = 0,$

故有 $yy' = C_1,$ 即 $ydy = C_1 dx,$

积分后得通解 $y^2 = C_1 x + C_2.$

注意: 关键是配导数.

例4. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件,得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^{y}$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

内容小结　　可降阶微分方程的解法——降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

例 (1) 如果 $ae \neq bd$, 试证可适当选取常数 h与k,

使变换$x = u + h, y = v + k$能把方程 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$

化为齐次微分方程, 其中$f(u)$为连续函数.

(2) 如果 $ae = bd$, 可用适当变换将上述方程化为可分离变量型

证 (1)

如果$ae \neq bd$, 则方程组$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$有唯一解$\begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$

令$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right) \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = f\left(\dfrac{au + bv}{du + ev}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{d + e\frac{v}{u}}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right)$$

（齐次微分方程）

例 (1) 如果 $ae \neq bd$, 试证可适当选取常数 h与k,

使变换$x = u + h, y = v + k$能把方程 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$

化为齐次微分方程, 其中$f(u)$为连续函数.

(2) 如果 $ae = bd$,可用适当变换将上述方程化为可分离变量型

证 (2) 如果$ae = bd$,则$\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = k$,即$a = kd, b = ke$,

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right) = f\left[\frac{k(dx + ey) + c}{(dx + ey) + f}\right] = g(dx + ey)$$

令$u = dx + ey$ 得 $\dfrac{du}{dx} = d + e\boxed{\dfrac{dy}{dx}} = d + eg(u)$

$$\boxed{\text{则原方程化为:}\ \frac{du}{d + eg(u)} = dx}$$

(可分离变量的微分方程)

例　求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$$

例. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$,其中 $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.