XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章
一元函数积分学及其应用

3.2 微积分基本公式与基本定理

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 微积分基本公式

2 微积分基本定理

3 不定积分

主要内容

1 微积分基本公式

2 微积分基本定理

3 不定积分

1 微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

两个基本问题

1. 定积分的存在性

1）必要条件 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

2）充分条件 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点

2. 定积分的计算

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

1 微积分基本公式

定义1（原函数） 如果在区间 I 上，$F'(x)=f(x)$，则

$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

定理1（Newton-Leibniz公式） 设 $f\in R[a,b]$, $F(x)$ 为

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b}$$

微积分基本公式

例1 计算下列积分

1） $\int_0^{\pi} \sin x dx$ 2） $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$

解 1） $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$

2） $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1$

主要内容

1 微积分基本公式

2 微积分基本定理

3 不定积分

2 微积分基本定理

定理 2（微积分学第一基本定理） 设 $f \in C[a,b]$，则

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)}$$

推论1 设 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$上必有原函数.

例2 1）设 $\Phi(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ ，求 $\Phi'(x)$

2）设 $F(x) = \int_{e^{3x}}^0 \sin t^2 dt$，求 $F'(x)$.

解 1） $\Phi(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$

$g(u)=\int_0^{u} e^{-t^2}dt$ 与 $u=\varphi(x)=x^2$ 的复合

$$\Phi'(x)= g'(u)\varphi'(x)=e^{-u^2}(2x)=2xe^{-x^4}$$

2） $F(x)=\int_{e^{3x}}^{0}\sin t^2dt=-\int_0^{e^{3x}}\sin t^2dt$

$$F'(x)=-\sin e^{6x}(3e^{3x})=-3e^{3x}\sin e^{6x}$$

$$\left(\int_{e^x}^{x^2}\sin t^2dt\right)'=\left(\int_0^{x^2}\sin t^2dt+\int_{e^x}^{0}\sin t^2dt\right)'$$

$$=2x\sin x^4-e^x\sin e^{2x}$$

一般的：若 $\varphi(x),\psi(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，则

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

若 $F'(x) = f(x)$ 　　则 $\left[F(x)+C\right]' = f(x)$

若 $G'(x) = f(x)$ 　　则 $\left[G(x)-F(x)\right]' = 0$

$$G(x)-F(x) = C \qquad \boxed{G(x) = F(x)+C}$$

定理3（微积分第二基本定理）设 $F(x)$是 $f(x)$在 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$在 I 上的所有原函数.

例4 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ e^x & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)dx$

解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 e^x dx=\frac{1}{3}+e^2-e$

主要内容

1 微积分基本公式

2 微积分基本定理

3 不定积分

3 不定积分

定义 2（不定积分） $f(x)$ 在区间 I 上所有原函数的

一般表达式 $\boxed{\int f(x)dx =} F(x)+C$

性质1 $(\int f(x)dx)' = f(x)$ $\qquad d\int f(x)dx = f(x)dx$

$\int f'(x)dx = f(x)+C$ $\qquad \int df(x) = f(x)+C$

性质2 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

基本积分表

$$1.\int k\,dx = kx + C \qquad 2.\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$3.\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad 4.\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$5.\int e^{x}dx = e^{x} + C \qquad 6.\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$7.\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad 8.\int \sec^{2}x\,dx = \tan x + C$$

$$9.\int \csc^{2}x\,dx = -\cot x + C \qquad 10.\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$11.\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C \qquad 12.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$$

$$13.\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \arctan x + C$$

例5 求下列不定积分

$$1)\int \frac{1+x^2}{x\sqrt{x}}dx \qquad 2)\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

$$3)\int \tan^2 x dx$$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

谢谢！