彭·高数

高等数学上期末试题集

（2022版）

彭康书院学业辅导与发展中心

2021 年高等数学 I（上）期末试题

一、选择题（共 5 题，每题 3 分）

1. 若 $\forall\, x \in \mathbb{R}$，总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，则以下关于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 的论述正确的是 （　　）

   A. 存在且为 0　　B. 存在但不一定为 0　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

2. 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是 （　　）

   A. $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　C. $(0,1)$　　D. $(\pi,+\infty)$

3. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有(　　)

   A. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　B. $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

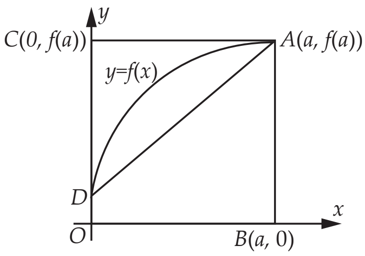
   C. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　D. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

4. 设函数 $f(x)\in C[-1,1]$，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x}{x}$ 的 （　　）

   A. 第一类跳跃间断点　　B. 第一类可去间断点

   C. 第二类无穷间断点　　D. 连续点

5. 如下图所示，曲线段的方程为 $y=f(x)$，且函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\displaystyle\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 表示的是 （　　）



   A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积　　B. 梯形 $ABOD$ 的面积

   C. 曲边三角形 ACD 的面积　　D. 三角形 ACD 的面积

二、填空题（共 5 题，每题 3 分）

1. 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^x$，则 $f(x)=$__________.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2e^{t(x-2)}+ax-1}{e^{t(x-2)}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则常数 $a=$__________.

3. $\displaystyle\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x\,\mathrm{d}x=5$，$f(\pi)=2$，则 $f(0)=$__________.

4. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}(e^{-t^2}+6)\,\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=$__________.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$__________. 其中常数 $p>0$.

三、计算题（共 7 题，每题 6 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+2ae^x, & x<0\\ 9\arctan x+2b(x-1)^3, & x\geq 0\end{cases}$，试确定常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)$ 在其定义域上可导.

3. 求函数 $f(x)=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值和其对应曲线的凹凸区间以及渐近线，并画出此函数的简单示意图.

4. 计算定积分 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

5. 计算不定积分 $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，计算 $I=\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

7. 假设由抛物线 $y=x^2$, $y=4x^2$ 以及直线 $y=H\ (H>0)$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转抛物面型容器内盛满水，若将水全部抽出，需要作多少功?

四、(8 分) 求微分方程 $(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'-8y=4x-3$ 的通解.

五、(8 分) 求微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$ 的通解.

六、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，在 $(0,2\pi)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(\pi)=3$，$f(2\pi)=2$. 试证明在

$(0, 2\pi)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) + f(\xi)\cos\xi = 0$.

七、(6 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是偶函数，$f(-x) + f(x) = A$（A 是常数）.

(1) 证明：$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \arctan e^x\,\mathrm{d}x$.

2020 年高数上期末试题

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数$y=\ln\frac{1-x}{1+x^3}$的麦克劳林展开式中x^{2021}的系数为______.

2. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin}{|x|}\right]=$_____.

3. 反常积分$\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x=$_______.

4. 设$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$，则$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$_____.

5. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(k+\frac{1}{n})^2\tan\frac{1}{n^3}=$____________.

二、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数$f(x)=\begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}, x\neq 0 \\ \frac{1}{2}, x=0 \end{cases}$，在$x=0$ 处 （　　）

（A）连续且取极大值　　（B）凑数选项

（C）可导且导数不为 0　　（D）可导且导数为 0

2. 函数$f(x)$在$x=0$ 的某领域内连续且$f(0)=0$，已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则$f(x)$在$x=0$ 处（　　）

（A）不可导　　（B）可导且导数不为 0

（C）取得极大值　　（D）取得极小值

3. 微分方程$y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解可设为（a,b 为常数） （　　）

（A）$a\mathrm{e}^x+b$　　（B）$ax\mathrm{e}^x+b$

（C）$a\mathrm{e}^x+bx$　　（D）$ax\mathrm{e}^x+bx$

4. 函数$y=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$的间断点个数是 （　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

5. 当$x\to 0$ 时，函数$y=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$是 （　　）

（A）有界的但不是无穷大量　　（B）无穷大量

（C）有界的但不是无穷小量　　（D）无穷小量

三、计算题

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(t\sin t+\tan^3 t\cdot\ln t)\mathrm{d}t}{\cos x\int_0^x\ln^2(1+t)\mathrm{d}t}$的值.

2. 讨论函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{20}}+|x|^{\frac{1}{21}}-2\cos x$ 的零点个数.

3. 求微分方程 $(y+1)y''+(y')^2=(1+2y+\ln y)y'$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 的解.

4. 计算积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

5. 将圆周 $x^2+y^2=4x-3$ 绕 y 轴旋转一周，求所得旋转体体积.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin^2 x+b\sin x+c & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ x^k\sin\dfrac{1}{k} & ,x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，讨论常数 a, b, c 以及 k 的取值.

7. 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

8. 求线性微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的通解.

四、证明题

1.已知等式两端的两个积分都收敛，且 $a,b>0$，求证：$\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t$.

2.设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,...)$.求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

3.设函数 $f(x)$ 在[0, 1]上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$.求证：

(1) $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；

(2) $\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

2019 年高数上期末试题

一、填空题

1. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}\sin x+\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)$的值为____________________________.

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ __________________.

3. 设函数 $f(x)=(x^2+x+2)\sin x$，则 $f^{10}(0)=$______________________.

4. 若当 $x\to 0$ 时，两个函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt$ 与 $g(x)=x^k(e^x-1)$ 是同阶的无穷小量，则常数 k 的值为_______.

5. 曲线 $y=x+\dfrac{1}{e^x-1}$ 的渐近线有______条.

二、计算题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$，计算定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx$.

3. 设曲线 L 的参数方程为$\begin{cases}x=t^2-t\\ te^y+y+1=0\end{cases}$，求该曲线在 $t=0$ 处的切线方程.

4. 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x(x-2)e^x + 2x$，求：

（1） $f(x)$ 的表达式.　　（2） $f(x)$ 的单调区间与极值.

5. 计算反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

6. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x} + x$ 的通解.

7. 求初值问题 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y(0)=1\,,\, y'(0)=3 \end{cases}$ 的解.

8. 求线性微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}x$ 的通解.

三、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内大于 0，并满足 $xf'(x)=f(x)-3x^2$，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$， $y=0$ 所围图形 D 的面积为 2，求：

（1）函数 $f(x)$.　　（2）D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 已知 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$.

（1）证明： $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.

（2）求函数 $f(x)$ 的值域.

（3）求由 $y=f(x)$， $x=0$， $x=\pi$， $y=0$ 所围图形的面积.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(1)=0$.

试证：存在 $\xi\in[0,2]$，使得 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$.

4.（1）设 n 是正整数，计算 $\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|dx$.

（2）证明对任意正实数 p，函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t\left|\sin t\right|^p dt$ 存在.

2018 年高数上期末试题

一、选择题

1. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=1$（其中$a,b$为常数），则（　　）

A. $a=0,b\in\mathrm{R}$　　B. $a=0,b=1$

C. $a\in\mathrm{R},b=1$　　D. $a\in\mathrm{R},b\in R$

2. 若函数$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上皆可导，且$f(x)<g(x)$，则必有（　　）

A. $f(-x)>g(-x)$　　B. $f'(x)<g'(x)$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　D. $\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

3. 若函数$f(x)$的一个原函数是$(x-2)e^x$，则$f'(x+1)=$（　　）

A. xe^x　　B. xe^{x+1}

C. $(x+1)e^{x+1}$　　D. $(x+1)e^x$

4. 下列广义积分中，发散的是（　　）

A. $\int_0^1\ln xdx$　　B. $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$

C. $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$　　D. $\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x\cos x}$

5. 设$f(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则$F(x)$在$x=0$处（　　）

A. 不连续　　B. 连续但不可导

C. 可导且$F'(0)\neq 0$　　D. 可导且$F'(0)=0$

6. 微分方程$y''+3y'+2y=(ax+b)e^{-x}$的特解形式为(　　)

A. $y=Axe^{-x}$　　B. $y=(Ax+B)e^{-x}$

C. $y=(Ax+B)xe^{-x}$　　D. $y=Ax^2e^{-x}$

二、填空题

1. 已知函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{t}{1+t^2}\\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{cases}$所确定，则曲线$y=f(x)$在$t=2$处的切线方程为

________________________________.

2. 设$[x]$表示不超过x的最大整数，则定积分$\int_0^{2018}(x-[x])dx$的值是____________.

3. 已知$y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解是$y=$______________________.

4. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+3\sin\frac{3}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n})=$________________.

5. 设$f(x)=(x-1)\ln(2-x)\ \ (x<2),$，则$f(x)$的最大值点是$x=$______.

三、计算积分

1. 计算积分$\int\frac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}dx$.

2. 计算积分$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中$f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

3. $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

四、解答题

1. 求微分方程$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}(x-3)y^4=0$的通解.

2. 已知$y_1=x$，$y_2=x+e^x$，$y_3=1+x+e^x$是$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x)$的解，试求此方程的通解.

3. 求曲线$y=3(1-x^2)$与x轴围成的封闭图形绕直线$y=3$旋转一周所得的旋转体的体积.

4. 对t取不同的值，讨论函数$f(x)=\frac{1+2x}{2+x^2}$在区间$[t,+\infty)$上是否有最大值或者最小值？若存在最大值或者最小值，则求出相应的最大值和最大值点，或者最小值和最小值点.

5. 求微分方程 $x''+2x'+2x=te^{-t}\cos t$ 的通解.

6. 设 $f'(x)$ 是连续函数，$F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$，证明：$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$.

7. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：

（1）$\forall t\in\mathbf{R},\int_0^1 xf(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$.

（2）$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$，等号当且仅当 $f(x)=A(x^3-x)$ 时成立， A 为常数.

2017 年高数上期末试题

一、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{|x|(x^2-1)}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 2^x, & x\geq 0 \end{cases}$, 求导函数 $f'(x)$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定，求 $\mathrm{d}y$.

5. 求不定积分 $\int\sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t dt$, 试求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值和最小值.

7. 求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

8. 求微分方程 $y'''-y''+2y'-2y=0$ 的通解.

9. 求微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=1+(\frac{dy}{dx})^2$ 的通解.

二、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)dt+x^2$，求 $f(x)$ 的表示式.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 在某邻域 $U(a)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l\quad(l>0, k\text{为正整数})$，

试讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处是否取得极值.

3. 求微分方程 $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

4.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）求解微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\vec{x}$.

（2）设曲线积分 $\int\limits_{(C)}[f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1]ydx+2f'(x)dy$ 与路径无关，求 $f(x)$.

5. 已知曲线L的方程为$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \ge 0)$.

（1）讨论曲线L的凹凸性.

（2）过点$(-1,0)$引曲线L的切线，求切点坐标(x_0, y_0)，并求切线的方程.

（3）求此切线与曲线L（对应于$x \le x_0$的部分）及x轴所围成的平面图形的面积S.

6. 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上满足：$|f''(x)| \le M$, 且在$(0,1)$内$f(x)$取得最大值，试证：

$|f'(0)| + |f'(1)| \le M$.

2016 年高数上期末试题

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^3 dt & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $f'(x)=$______________.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极____值.

4. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+x^4}+\cos^3 x)dx=$___________.

5. 微分方程 $x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0$ 的通解为______________________.

6. 微分方程 $xdy+(y-\sin x)dx=0$ 满足 $y\big|_{x=\pi}=1$ 的特解 $y=$_______________.

二、选择题

1. 下列结果中不成立的是（　　）

   A. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

   C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）

   A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$

   C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

3. 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是（　　）

   A. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　B. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

   C. $\int_0^x f(t^2)dt$　　D. $\int_0^x f^2(t)dt$

三、计算题

1. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1-t^{2}\\y=t-t^{3}\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^{y}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

4. 计算反常积分 $I=\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 的间断点，并说明间断点类型.

四、解答题

1. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt=-\dfrac{x^2}{2}+e^{-x}-1$，求曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

2.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）求解微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ 的通解，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

（2）求方程 $y''+2y'+y=2xe^{-x}$ 的通解.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $xf'(x)=f(x)+3x^2$，求 $f(x)$，使由曲线 $y=f(x)$ 与 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x)$，$f(0)=0$，证明：对于满足不等式 $0<a<b<a+b<c$ 的 a,b，有 $f(a)+f(b)\ge f(a+b)$.

2015 年高数上期末试题

一、填空题

1. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{2-x}{2+x}+\cos^2 x\right)dx=$______________.

2. 设函数 $y=x2^x$ 在 $x=x_0$ 点处取得极小值，则 $x_0=$__________________.

3. 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]=$__________________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xydx=x^2+y$，则 $y(x)=$_______________.

5. 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，$\varphi(0)=b$，$a>0$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值 $\varphi(a)=0$，则积分 $\int_0^a x\varphi''(x)dx=$_____________.

二、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则（　　）

   A. 当 $f(x)$ 为奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

   B. 当 $f(x)$ 为偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

   C. 当 $f(x)$ 为周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

   D. 当 $f(x)$ 为单调递增函数时，$F(x)$ 必为单调递增函数

2. 曲线 $y=(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是（　　）

   A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，且 $f(0)=0$，令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，则必有（　　）

   A. $M\le\int_0^1|f(x)|dx\le 3M$　　B. $\frac{M}{2}\le\int_0^1|f(x)|dx\le M$

   C. $\int_0^1|f(x)|dx\le\frac{M}{2}$　　D. $\int_0^1|f(x)|dx\ge 3M$

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，下列函数中以 T 为周期的函数是（　　）

A. $\int_0^x f(t)dt$　　B. $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$

C. $\int_{-x}^0 f(t)dt$　　D. $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

5. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数为（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 1　　D. 4

三、解答题

1. 求曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)$ 的渐近线.

2. 设函数 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt$，试求：

（1）$F(x)$ 的极值.　　（2）曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标.　　（3）计算 $\int_{-2}^3 x^2F'(x)dx$.

3. 求解初值问题$\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$.

4. 求一个以四个函数 $y_1 = e^x, y_2 = 2xe^x, y_3 = \cos 2x, y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的齐次线性微分方程，并求方程的通解.

5. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{2x}$ 的通解.

6. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geq 0)$ 上点 A 作切线，使该切线与曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 及 x 轴所围平面图形 D 的面积 $S=\dfrac{3}{4}$.

（1）求点 A 的坐标.

（2）求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7. 设 a，b 均为常数且 $a>-2$，$a\neq 0$，问 a，b 为何值时，有：

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_0^1\ln(1-x^2)dx$$

2014 年高数上期末试题

一、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

2. 已知$\int_1^{\cos x} f(t)dt=\cos 2x$，其中 $f(t)$ 连续，求 $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1)$，求 dy.

4. 求不定积分$\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

5. 求定积分$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

6. 求微分方程$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$的通解.

7. 求微分方程$x''+3x'+2x=e^{-2t}$的通解.

8.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）验证微分方程组$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t-1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$通解

$\vec{x}=C_1\begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t\in R$.

（2）验证$y_1=e^x, y_2=e^x\ln|x|$是微分方程$xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0$的解，并求其通解.

9. 计算反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$.

二、解答题

1. 当 $x\in\left[-1,1\right]$ 时，确定函数 $f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点及其类型.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(\sin\dfrac{1}{x})\int_0^x \sin t^2 dt & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

3.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）求线性微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ 的通解，其中 $A=\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 4 & -7 & 4\\ -1 & 4 & 8\end{pmatrix}$.

（2）已知函数 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解，试确定 a,b,c，并求该方程的通解.

4. 设曲线l_1的方程为$y=a\ln x$（其中常数$a>0$），曲线l_1的一条切线l_2过原点.

（1）求曲线l_1，切线l_2以及x轴围成的平面图形的面积.

（2）求此平面图形绕y轴旋转所成的旋转体的体积.

5. 设函数$f(x)$在$\left[-l,l\right]$上连续，在$x=0$处可导，且$f'(0)\neq 0$.

（1）证明:对$\forall x\in(0,l)$，$\exists\theta\in(0,1)$，使$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt = x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$.

（2）求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

2013 年高数上期末试题

一、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

2. 设 $x\geq 0$，$\int_0^{x^2+x}f(t)dt=x^2$ 其中 $f(x)$ 连续，求 $f(2)$.

3. 设 $y=\sin^2 3x+\cos\dfrac{x^2}{5}+\tan\sqrt{x}$，求 y'.

4. 求不定积分 $\int x^3\ln xdx$.

5. 求定积分 $\int_{-3}^{3}\left(|x|+x\right)e^{-|x|}dx$.

6. 求微分方程 $xy'-y=x^3\cos x$ 的通解.

7. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

8. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

二、解答题

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x<0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x>0\end{cases}$ 的间断点及其类型.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$， $g'(0)=-1$ 试求：

（1） $f'(x)$.　　　（2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处的连续性.

3.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1） 求线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=A\vec{x}$ 的通解,其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

（2）设函数 u 的全微分 $du=[3f(x)+e^{x}]ydx+[2f'(x)+f(x)]dy$，其中 $f(x)\in C^{(2)}$，且 $f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{5}$，求 $f(x)$.

4. 以椭圆 $x=a\cos t$，$y=b\sin t(0\le t\le 2\pi,0<b<a)$ 的长轴为底，作一个与上半椭圆内接的等腰梯形，试求它的面积的最大值.

5. 设函数 $f\in C^{(1)}[a,b]$，且 $f'(x)\le M$ （M为常数)，且 $f(a)=0$，证明：

（1）$\int_a^b f(x)dx\le\dfrac{1}{2}M(b-a)^2$.　　（2）$\int_a^b f^2(x)dx\le\dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx$.

2012 年高数上期末试题

一、填空题

1. 函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ \ (x>0)$ 的单调递减区间为__________.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则 $f(0)=$______， $f'(0)=$_______.

3. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & x\geq 0\\ \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} & x<0\end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$，则 $a=$_______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{ax} & x\leq 0\\ b(1-x^2) & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，则 $a=$_______， $b=$_______.

5. 设 $x\to 0$ 时， $f(x)=\ln(1+ax^2)$ 与 $g(x)=\sin^2 3x$ 是等价无穷小，则 $a=$________.

二、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}+\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+x)^2dx$ 的单调性和极值.

3. 求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$.

4. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$的通解.

5. 求微分方程$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$的通解.

6. 设由曲线$y=\cos x$（其中$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$）及$x$轴，$y$轴所围成平面图形的面积被曲线$y=a\sin x\ (a>0)$二等分.

（1）确定a的值.

（2）求曲线$y=\cos x, y=a\sin x$及$x=0$所围平面图形绕x轴旋转一周所成的立体的体积.

7. 设函数$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，问：

（1）a为何值时，$F(x)$在$x=0$处连续.

（2）讨论$F'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性.

8.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）求线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=A\vec{x}$ 的通解,其中 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

（2）求微分方程 $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=4e^t$ 的通解.

9. 设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可导 $(a>0,b>0)$，且满足方程 $2\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda(x^2-b^2)} f(x)dx=(b-a)f(b)$.
证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $2\lambda\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$.

10. 设微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

（1）证明：若 $1+P(x)+Q(x)=0$, 则方程有一特解 $y=e^x$；若 $P(x)+xQ(x)=0$ 则方程有一特解 $y=x$.

（2）根据（1）的结论，求 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解和满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=1$ 的特解.

（3）求 $(x-1)y''-xy'+y=1$ 满足初始条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[y(x)-1]}{x}=-1$ 的特解.

2011 年高数上期末试题

一、填空题

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 3x^2-2x+k & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $k=$_______.

2. $\int_{-2}^{2}(1+x)\sqrt{4-x^2}dx=$____________________________________.

3. 微分方程 $y^{(3)}+y=0$ 的通解是__________________________________.

4. $\dfrac{d}{dx}\int_{0}^{x^2}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=$____________________________________.

二、单选题

1. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，其周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 (5，$f(5)$) 处的切线的斜率为（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

2. 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应有形式(a,b 为常数)(　　)

A. ae^x+b　　B. axe^x+bx　　C. ae^x+bx　　D. axe^x+b

3. $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$ 的可去间断点的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$,则（　　）

A. $I_1>I_2>1$　　B. $1>I_1>I_2$　　C. $I_2>I_1>1$　　D. $1>I_2>I_1$

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$.

2. 计算积分$\int \frac{x\sin x}{\cos^5 x}dx$.

3. 求定积分$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

4. 设$\begin{cases} x=\int_1^{t^2} udu \\ y=\int_{t^2}^1 u^2 \ln u du \end{cases}$ $t>1$ ，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. 求微分方程的通解: $xy'-3y=x^4e^x$.

6.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）求微分方程组$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$的通解，其中$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

（2）求$y''-4y'+4y=3e^{2x}$的通解.

7. 在抛物线 $y=x^2(0\le x\le 8)$ 上求一点，使得过此点所做切线与直线 $x=8$ 及 x 轴所围图形面积最大.

8.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）设广义积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，证明广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

（2）计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$.

9. 设 $f''(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$，求 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 的某个领域内的导数，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

2010 年高数上期末试题

一、填空题

1. 在抛物线 $y=x^2$ 上与直线 $x+2y=0$ 垂直的切线方程是____________________.

2. 若 $y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解（其中 $p(x),q(x),f(x)$ 都是已知的连续函数），则此方程的通解为____________________.

3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，已知 $f(1)=1, f'(x^2)=x^3$ 则 $f(4)=$____________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极值且满足 $f''(x)+2f'(x)=\int_a^{x+1} e^{f(t)}dt$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处(　　)

A. 必取极大值　　B. 必取极小值

C. 不可能取极值　　D. 是否取极值不能确定

2. 设 $f(x)=2x\ln(1-x)$, $g(x)=\sin^2 x$，则当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

A. 同阶但非等价无穷小　　B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

三、解答题

1. 设 $y=\arctan(\sqrt{x^2-1})-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$，求 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du \\ y=e^{-t^2}(1+t^2) \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

3. 求不定积分$\int e^x \ln(e^x+1)dx$.

4. 求微分方程$2xy' = y + 2x^2$的通解.

5.（学习高数I者做（1），学习高数II者做（2））

（1）求微分方程组$\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = A\bar{x}$的通解.其中$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

（2） 求微分方程$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$的通解.

6. 计算反常积分$I = \int_0^{+\infty} \dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

7. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0)$ ，$(1,2)$ 两点，且 $a<0$，确定 a,b,c 的值与 x 轴所围图形 D 的面积最小值，并求此图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明在 (a,b) 内存在点ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$.

本试题集由彭康学导团制作，试题改编自往年真题，部分题目已调整或删改，适合学习高数 1 的机类、化工等专业使用，其它专业请选择性参考。如有打印店以此盈利，请勿购买。

彭康学导团 QQ 学习群彭小帮 2.0：397499749

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描右侧二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。