

大学物理

张磊 (13072919527)

B824, Cyrus Tang Building



分子运动的基本观点

一切宏观物体都是由大量分子组成的，分子都在永不停息地作无序热运动，分子之间有相互作用的分子力。

气体分子运动的规律

1. 气体分子热运动可以看作是在惯性支配下的自由运动
2. 气体分子间的相互碰撞是非常频繁的
3. 气体分子热运动服从统计规律

统计的方法 – 统计平均值的计算

$$\overline{M} = \frac{N_A M_A + N_B M_B + \cdots}{N}$$

$$N = N_A + N_B + \cdots$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2}, p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$$

$k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$ — 玻尔兹曼常数

例 一容积为 $V=1.0\text{m}^3$ 的容器内装有 $N_1=1.0\times 10^{24}$ 个氧分子 $N_2=3.0\times 10^{24}$ 个氮分子的混合气体，混合气体的压强 $p=2.58\times 10^4\text{Pa}$ 。

求 (1) 分子的平均平动动能；
(2) 混合气体的温度

解 (1) 由压强公式，有

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} \frac{p}{n} = \frac{3}{2} \frac{p}{(N_1 + N_2)/V} = 9.68 \times 10^{-21} \text{ J}$$

(2) 由理想气体的状态方程得

$$T = \frac{p}{nk} = \frac{p}{\left(\frac{N_1 + N_2}{V}\right)k} = 467 \text{ K}$$

例 有一容积为 10cm^3 的电子管，当温度为 300K 时用真空泵抽成高真空，使管内压强为 $5 \times 10^{-6} \text{mmHg}$ 。

求 (1) 此时管内气体分子的数目； (2) 这些分子的总平动动能。

解 (1) 由理想气体状态方程，得

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{10 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6} \times 133.3}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 1.6 \times 10^{12}$$

(2) 每个分子平均平动动能

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$$

N 个分子总平动动能为

$$N\bar{\epsilon} = N \cdot \frac{3}{2}kT = 10^{-8} \text{J}$$

平衡态气体分子的统计性假设

$$\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0 \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

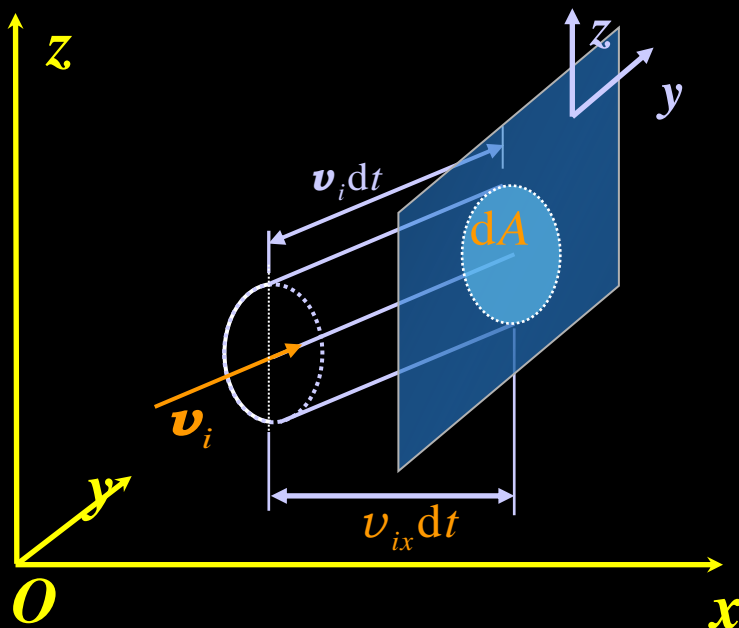
理想气体的微观模型

理想气体分子 → 一个个没有大小并且除碰撞瞬间外没有相互作用的弹性球(质点)。

理想气体 → 质点系

理想气体的压强公式

$$p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon}$$
$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2}$$



温度的微观本质

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon} \quad \xrightarrow{p = nkT} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$$

$$\Rightarrow \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} \quad \text{— 方均根速率}$$

§12.6 麦克斯韦速率分布定律

一. 分布的概念

- 问题的提出

气体系统是由大量分子组成，而各分子的速率通过碰撞不断地改变，不可能**逐个**加以描述，只能给出**分子数按速率的分布**。

- 分布的概念

例如 学生人数按年龄的分布

年龄	15 ~16	17 ~ 18	19 ~20	21~22
人数按年龄的分布	2000	3000	4000	1000
人数比率按年龄的分布	20%	30%	40%	10%

例如 气体分子按速率的分布

速率	$v_1 \sim v_2$	$v_2 \sim v_3$...	$v_i \sim v_i + \Delta v$...
分子数按速率的分布	ΔN_1	ΔN_2	...	ΔN_i	...
分子数比率按速率的分布	$\Delta N_1/N$	$\Delta N_2/N$...	$\Delta N_i/N$...

$\{\Delta N_i\}$ or $\{\Delta N_i/N\}$ 就是气体分子按速率的分布

二. 速率分布函数

设某系统处于平衡态下，总分子数为 N ，则在 $v \sim v + dv$ 区间内分子数的比率为

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv \qquad f(v) = \frac{dN}{N dv}$$

$f(v)$ 称为速率分布函数

→ 在速率 v 附近单位速率间隔内的分子数与总分子数的比率

三. 气体速率分布的实验测定

1. 实验装置

2. 测量原理

- (1) 能通过细槽到达检测器 D 的分子所满足的条件

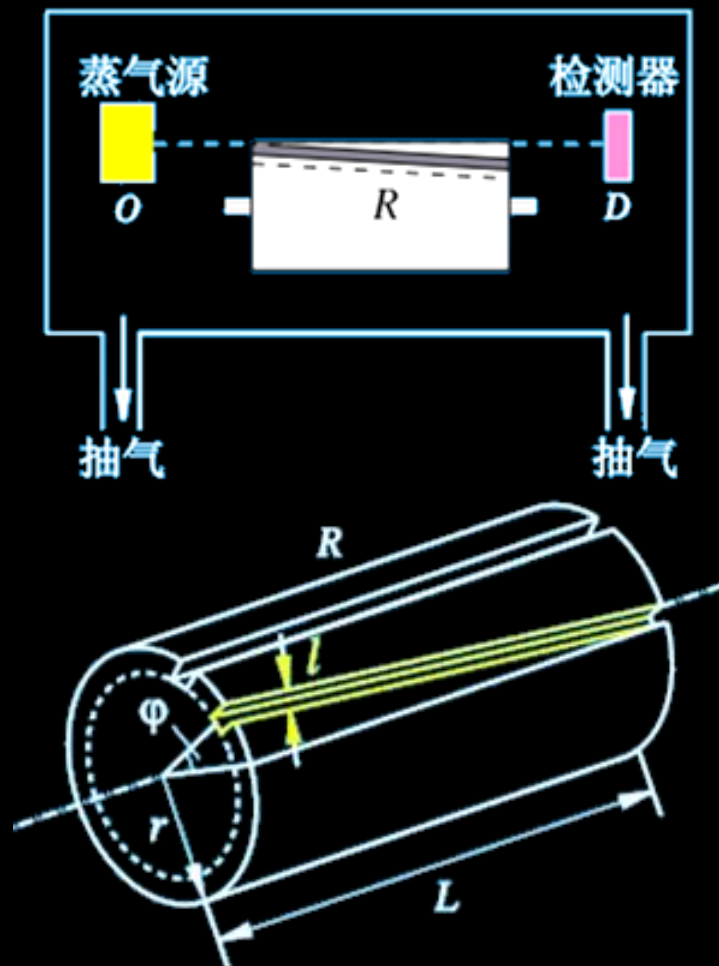
$$\frac{L}{v} = \frac{\varphi}{\omega} \quad \longrightarrow \quad v = \frac{\omega}{\varphi} L$$

通过改变角速度 ω 的大小，
选择速率 v

- (2) 通过细槽的宽度，选择不同的速率区间

$$|\Delta v| = \frac{\omega L}{\varphi^2} \Delta \varphi = \frac{v}{\varphi} \Delta \varphi$$

- (3) 检测器上沉积的金属层厚度必定正比相应速率下的分子数



麦克斯韦速率分布定律

1. 麦克斯韦速率分布定律

理想气体在平衡态下分子的速率分布函数

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\mu v^2 / 2kT} \quad (\text{麦克斯韦速率分布函数})$$

式中 μ - 分子质量, T - 气体热力学温度, k - 玻耳兹曼常量

理想气体在平衡态下, 气体中分子速率在 $v \sim v + dv$ 区间内的分子数与总分子数的比率为

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\mu v^2 / 2kT} dv$$

这一规律称为麦克斯韦速率分布定律

★说明

(1) “速率恰好等于某一值的分子数是多少？”

——从统计的概念来讲是**没有意义**！

(2) 处于平衡态下的**混合气体**

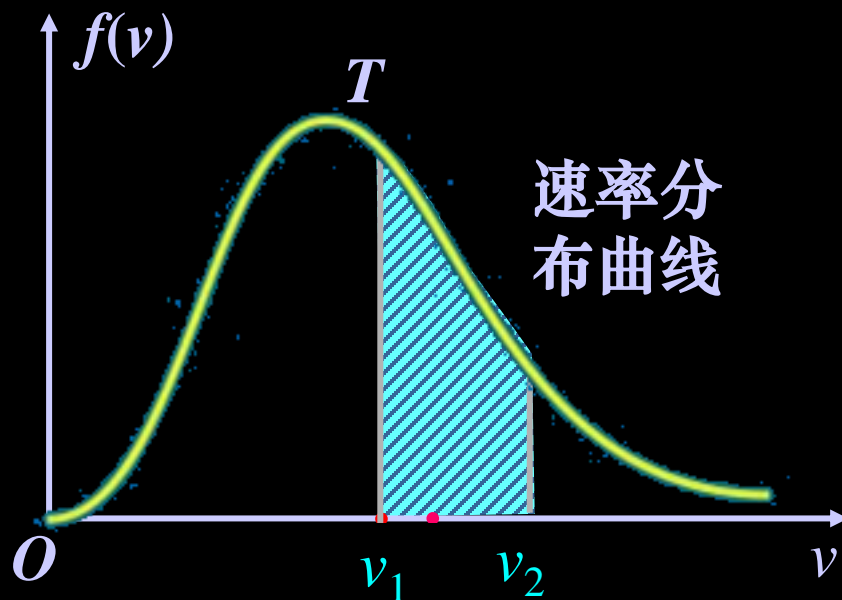
——麦克斯韦速率分布定律对**各组分分别适用**。

(3) 在通常情况下实际气体分子的速率分布和麦克斯韦速率分布能**很好的符合**。

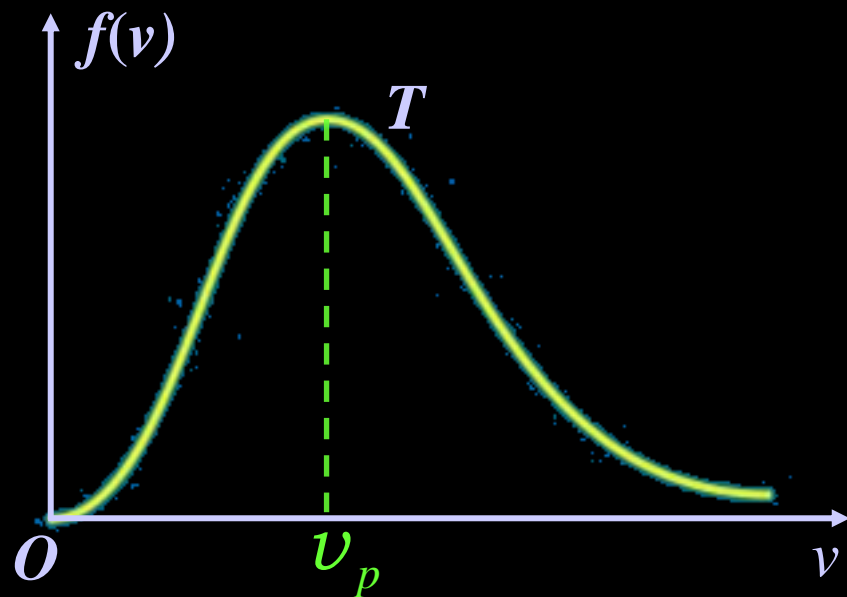
2. 麦克斯韦速率分布曲线

$$f(v)dv = \frac{dN}{N}$$

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{\Delta N}{N}$$



曲线下方的总面积，
等于分布在整个速率范围内所有各个速率间隔中的分子数与总分子数的比率的总和



$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (\text{归一化条件}) \quad (\text{速率分布曲线})$$

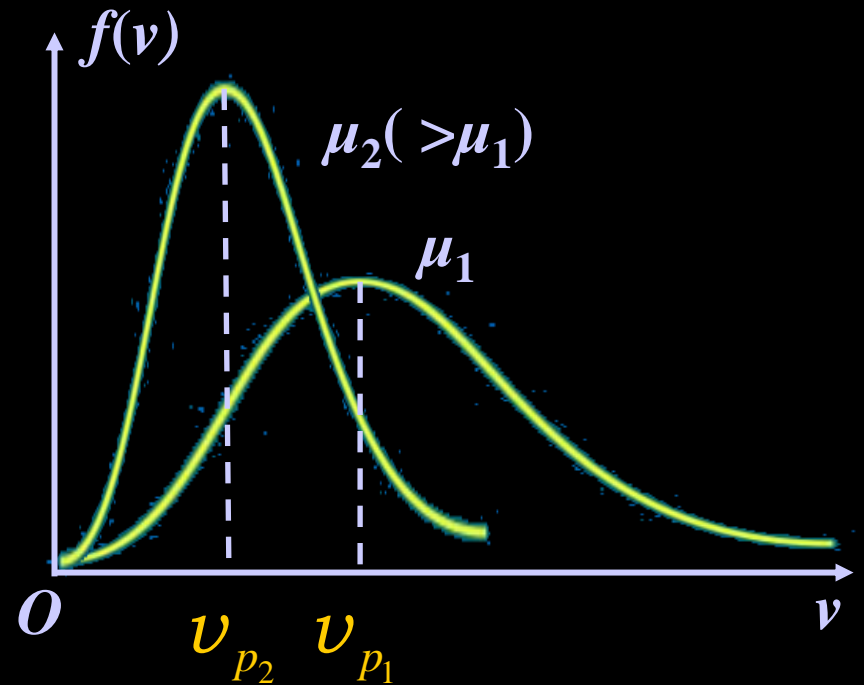
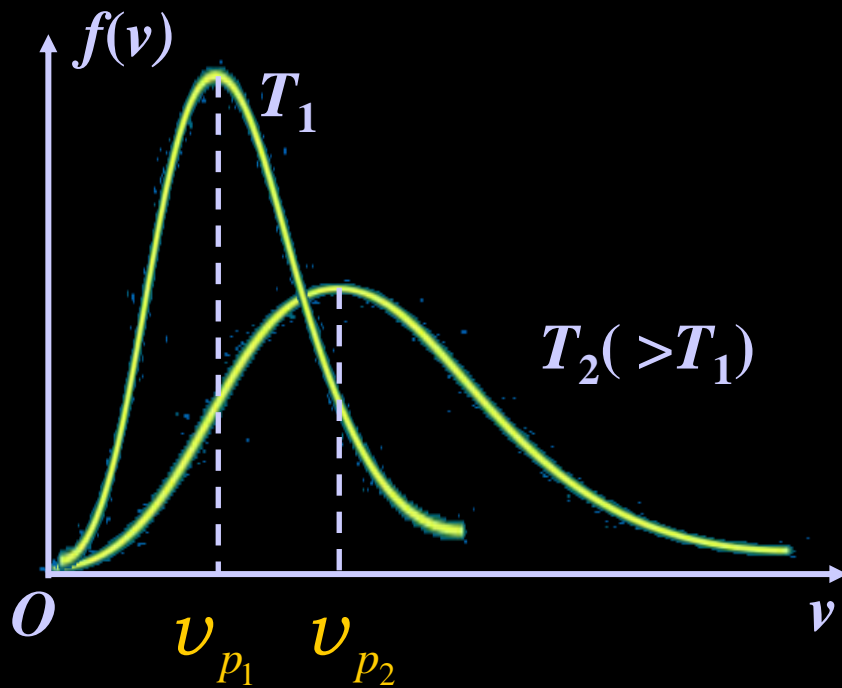
- **最概然速率** v_p

$f(v)$ 出现极大值时，所对应的速率称为**最概然速率**

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

- 不同气体，不同温度下的速率分布曲线的关系 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$
 - ① μ 一定， T 越大， v_p 越大 \rightarrow 曲线向右移动
 - ② T 一定， μ 越大， v_p 越小 \rightarrow 曲线向左移动

归一化条件 \rightarrow 分布曲线下的面积不变



分子速率的三种统计平均值

1. 平均速率

$$\bar{v} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_i}{N} = \sum_i \frac{\Delta N_i}{N} v_i$$

$$\bar{v} = \int v \frac{dN}{N} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \mu}} = 1.59 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

式中 M 为气体的摩尔质量， R 为摩尔气体常量

思考： $\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv$?

2. 方均根速率

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{\mu}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

3. 最概然速率

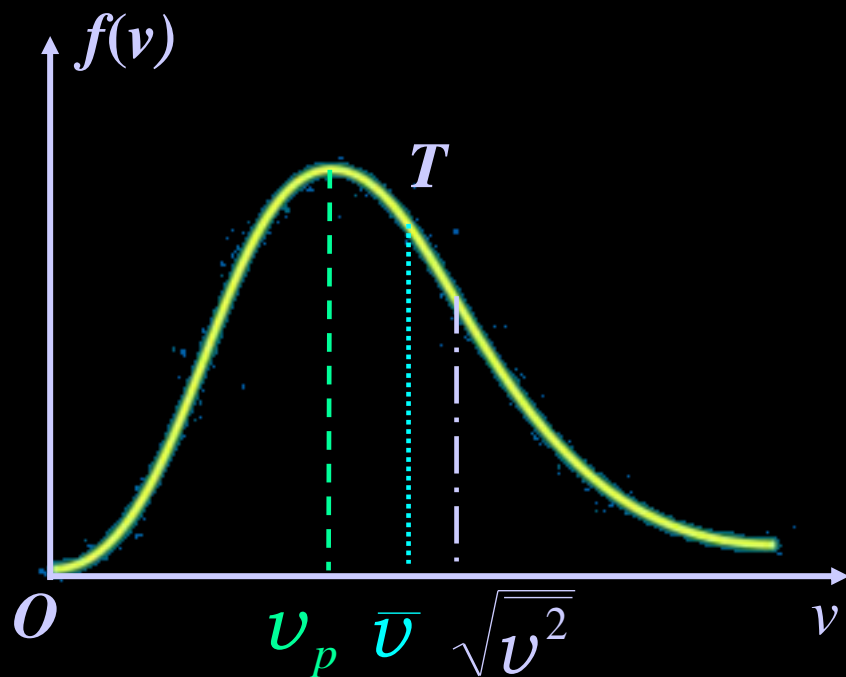
$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

★ 说明

(1) 三种速率用途各不相同

- 讨论速率分布一般用 v_p
- 讨论分子的碰撞次数用 \bar{v}
- 讨论分子的平均平动动能用 $\sqrt{v^2}$



(2) 同一种气体分子的三种速率的大小关系: $\sqrt{v^2} > \bar{v} > v_p$

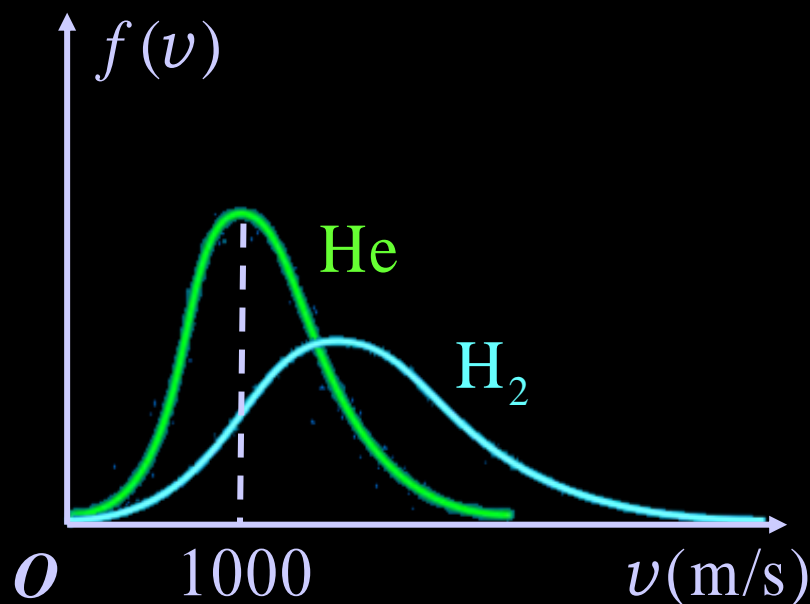
例 氦气的速率分布曲线如图所示.

求 (1) 试在图上画出同温度下氢气的速率分布曲线的大致情况,
(2) 氢气在该温度时的最概然速率和方均根速率

解 (2) $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{RT}{2 \times 10^{-3}}} = 1000 \text{ m/s}$

$$\begin{aligned} (v_p)_{\text{H}_2} &= \sqrt{\frac{RT}{10^{-3}}} \\ &= 1.41 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{v^2})_{\text{H}_2} &= \sqrt{\frac{3RT}{M}} \\ &= 1.73 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$



例 根据麦克斯韦速率分布律，试求速率倒数的平均值 $\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}$ 。

解 根据平均值的定义，速率倒数的平均值为

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v) dv = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} v dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{-kT}{\mu}\right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} d\left(\frac{-\mu}{2kT}v^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu}{\pi kT}} = \sqrt{\frac{\pi \mu}{8kT}} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi \bar{v}}$$

解题思路

利用麦克斯韦速率分布律处理实际问题，正确理解和掌握速率分布函数与麦克斯韦分布规律的物理意义是关键.

例如

$f(v)dv = \frac{dN}{N}$ 表示平衡态下，处在速率间隔 $v \sim v+dv$ 内的分子数占总分子数的比率

$Nf(v)dv = dN$ 表示平衡态下，处在速率间隔 $v \sim v+dv$ 内的分子数

$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$ 表示平衡态下，处在速率间隔 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数.

典型的问题有以下几类：

1. 根据麦克斯韦分布律求在某速率区间内的分子数.速率区间很小时，可用

$$\Delta N = N 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} \Delta v$$

2. 已知速率分布函数，求与速率有关的任意物理量的统计平均值

① 整个速率范围（全体分子）的平均值

$$\overline{X(v)} = \int_0^{\infty} X(v) f(v) dv$$

② $v_1 \sim v_2$ 速率范围（部分分子）的平均值

$$\overline{X(v)} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} X(v) f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}$$

例 在温度为**300K**时，空气中速率在 (1) v_p 附近；(2) **$10v_p$** 附近，速率区间 **$\Delta v=1\text{m/s}$** 内的分子数占分子总数的比率是多少？

解 速率区间较小，可用 $\frac{\Delta N}{N} = f(v)\Delta v$

麦克斯韦速率分布为

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\mu v^2 / 2kT} \Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-v^2/v_p^2} \Delta v$$

式中 v_p 为最概然速率 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$

当 **$T=300\text{K}$** 时，空气分子的最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\text{mol}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 300}{29 \times 10^{-3}}} \text{m/s} = 415 \text{m/s}$$

(1)在 $v=v_p$ 附近, $\Delta v=1\text{m/s}$ 内单位速率区间的分子数占分子总数的比率为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-v^2/v_p^2} \Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{415} e^{-1} \times 1 \\ &= 0.002 = 0.2\%\end{aligned}$$

(2)在 $v=10v_p$ 附近, $\Delta v=1\text{m/s}$ 的速率区间内的分子数占分子总数的比率为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{(10v_p)^2}{v_p^3} e^{(-10v_p)^2/v_p^2} \Delta v \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \frac{100}{415} e^{-100} \times 1 = 2.0 \times 10^{-44} \\ &= 2.0 \times 10^{-42}\%\end{aligned}$$

➤ 讨论

- ◆ 10^5mol 空气中的总分子数 $N = 6.02 \times 10^{23} \times 10^5$ ，在 v_p 附近， $\Delta v = 1 \text{ m/s}$ 区间内的分子数为

$$N \times 0.2\% = 6.02 \times 10^{23} \times 10^5 \times 0.2\% = 1.2 \times 10^{26}$$

- ◆ 在 $10v_p$ 附近， $\Delta v = 1 \text{ m/s}$ 区间内的分子数为

$$\begin{aligned} N \times 2 \times 10^{-42} &= 6.02 \times 10^{23} \times 10^5 \times 2 \times 10^{-42} \% \\ &= 1.2 \times 10^{-15} \approx 0 \end{aligned}$$

分子出现在 v_p 附近的概率最大

气体分子按平动动能的分布规律

麦克斯韦速率分布定律

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\mu v^2 / 2kT} \Delta v$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu v^2 \xrightarrow{\text{两边微分}} \Delta \varepsilon = \mu v \Delta v$$

代回
上式

$$\frac{\Delta N}{N} = f(\varepsilon) \Delta \varepsilon = \frac{4\sqrt{2} \pi}{(2\pi kT)^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} \Delta \varepsilon$$

意义： 上式表明理想气体在平衡态下，分子动能在 $\varepsilon \sim \varepsilon + \Delta \varepsilon$ 区间内的分子数与总分子数的比率。

思考 最概然平动动能 VS 最概然速率所对应的平动动能？

★ 思考 最概然平动动能是否等于最概然速率所对应的平动动能?

例 试求：平动动能的最概然值 ε_p

解 对 $f(\varepsilon)$ 求极值即可 $\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ $\varepsilon_p = \varepsilon = \frac{1}{2}kT$

而最概然速率所对应的平动动能为 $\varepsilon(v_p) = \frac{1}{2}\mu(v_p)^2 = kT$

§12.7 能量按自由度均分原理

一. 气体分子自由度

分子结构	单原子	双原子	多原子
分子模型	质点	由刚性杆连接的两质点	刚体
自由度数目	3	5	6

刚体和自由度

1. 刚体

质点 —— 有质量而无形状和大小的几何点

刚体 —— 在外力作用下形状和大小保持不变的物体

※ 说明

- 1) 理想化的力学模型
- 2) 刚体中任何两点之间的距离保持不变
- 3) 刚体 —— 特殊的质点系

刚体运动的基本形式

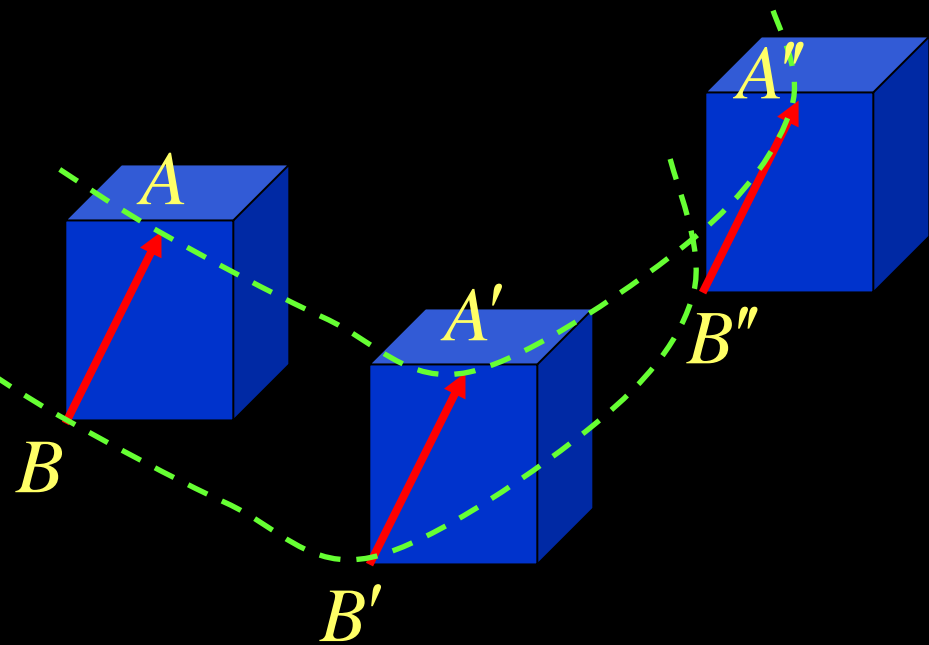
刚体的基本运动可以分为**平动**和**转动**；
刚体的各种复杂运动都可以看成是这两种运动的合成。

刚体的平动

刚体的平动是指刚体在运动过程中其中**任意两点的连线**始终保持彼此**平行**。

特点：其中各点在任意相同的时间内具有相同的位移和运动轨迹，也具有相同的速度和加速度。**刚体上任一点的运动都可代表整个刚体的运动。**

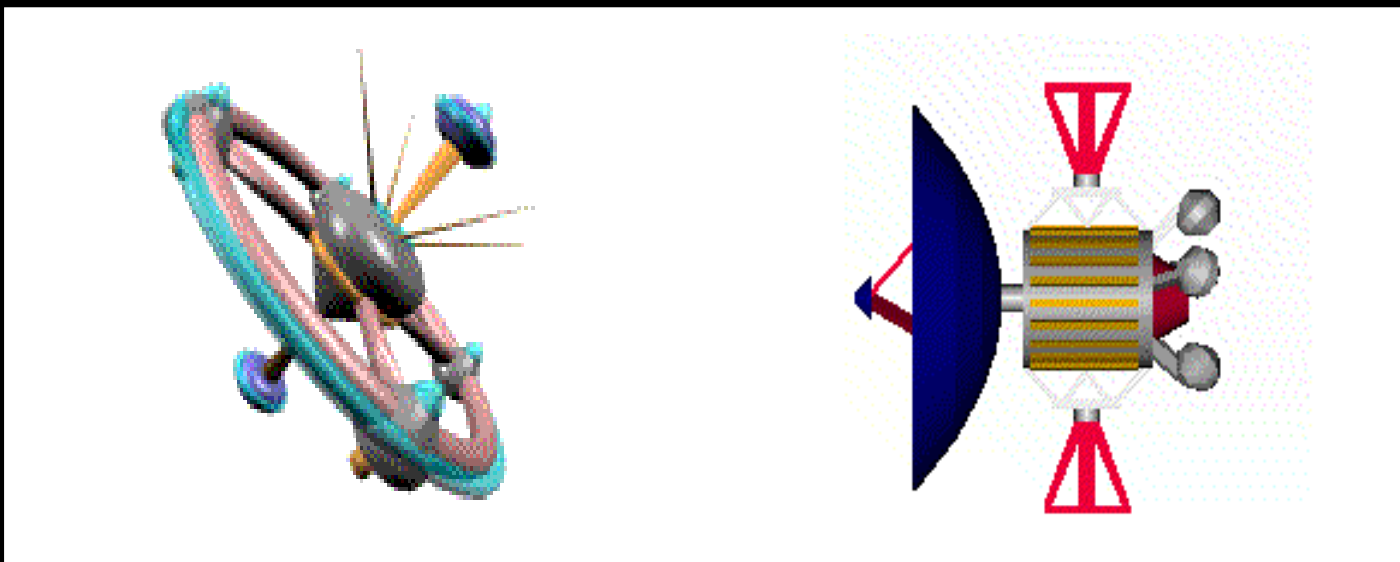
刚体平动 \longleftrightarrow 质点运动



平动：具有**3**个自由度

刚体的转动

当刚体内所有点都绕同一直线作圆周运动，则称刚体作转动，该直线称**转轴**。



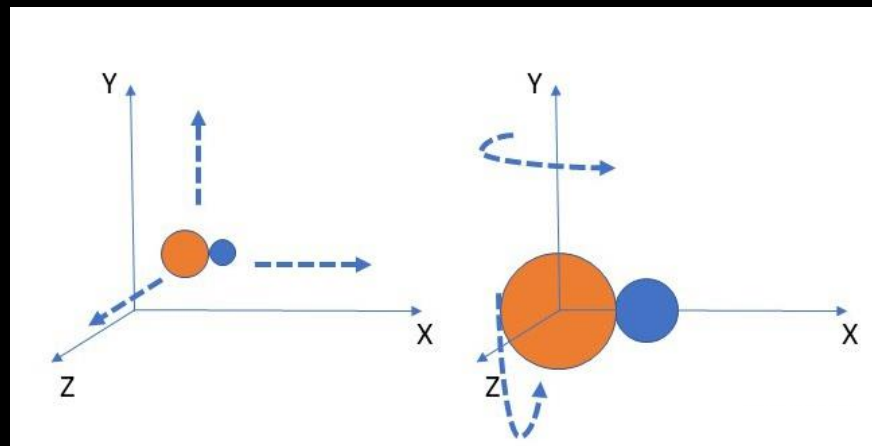
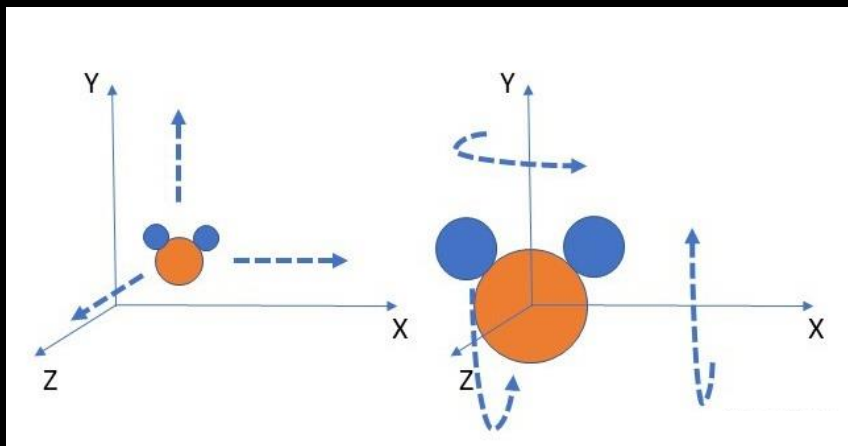
- 瞬时转轴** → 转轴的位置或方向随时间变化
↳ 一般转动 具有 $2 + 1 = 3$ 个自由度
- 固定转轴** → 转轴的位置或方向不随时间变化
↳ 定轴转动 具有 1 个自由度

一般情况下，三维空间内的物体有六个自由度

平动3个：x、y、z平移

转动3个：x、y、z转动

其他都可以看做这6种运动的合成



刚性分子自由度的计算方法：

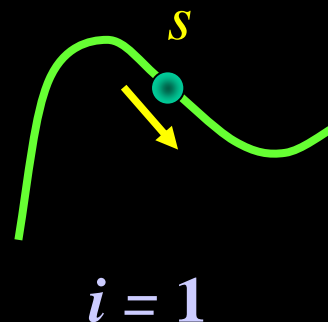
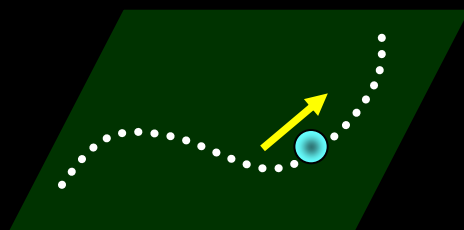
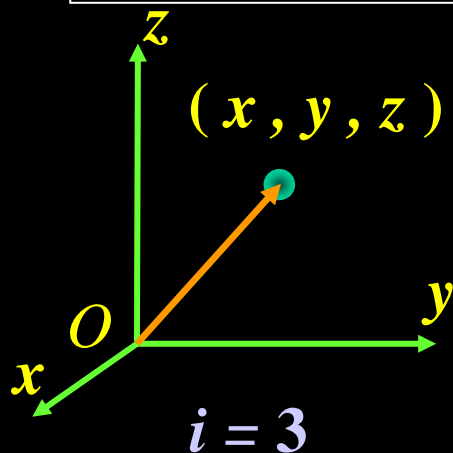
自由度 = 6 - 线性对称轴数

或

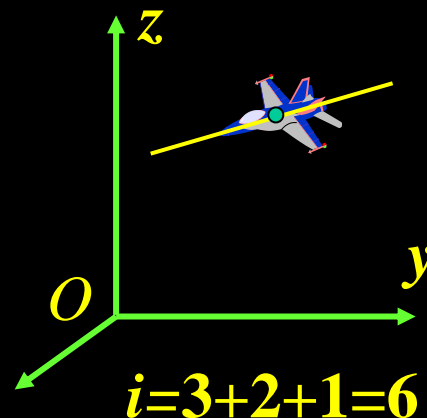
旋转自由度 = 3 - 线性对称轴数

2. 自由度

确定系统的位置和运动状态所需要的**独立坐标数**
—— 物体的**自由度数**



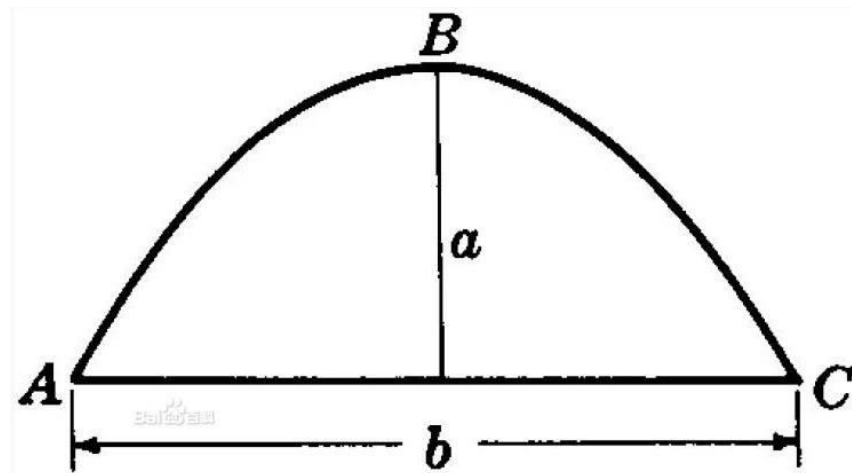
质点系：一般的， N 个相互**独立**的质点组成的质点系，其自由度数为 **$3N$** 。若对系统增加约束(或限制)其自由度数会减少。



特殊质点系：**自由刚体**→一般具有**6**个自由度

新闻一：和平与战争

俄议员建议恢复军训：诗歌不能卫国，现在孩子都不会扔手榴弹



初阶战士：质点运动



高阶战士：刚体运动

§12.7 能量按自由度均分原理

一. 气体分子自由度

分子结构	单原子	双原子	多原子
分子模型	质点	由刚性杆连接的两质点	刚体
自由度数目	3	5	6



说明

- (1) 分子的自由度不仅取决于其**内部结构**，还取决于**温度**。
- (2) 实际上，双原子、多原子分子并不**完全是刚性的**，还有**振动自由度**。但在常温下将其分子作为刚性处理，能给出与实验大致相符的结果，因此可以不考虑分子内部的振动，认为分子都是刚性的。

二. 能量按自由度均分定理

理想气体分子的平均平动动能

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \overline{\mu v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\frac{1}{2} \overline{\mu v^2} = \frac{1}{2} \overline{\mu v_x^2} + \frac{1}{2} \overline{\mu v_y^2} + \frac{1}{2} \overline{\mu v_z^2}$$

$$\frac{1}{2} \overline{\mu v_x^2} = \frac{1}{2} \overline{\mu v_y^2} = \frac{1}{2} \overline{\mu v_z^2} = \frac{1}{2} kT$$

由于气体分子运动的无规则性，各自由度没有哪一个是特殊的，因此，可以认为气体分子的平均平动动能是平均分配在每一个平动自由度上的。

在温度为 T 的平衡状态下，分子每个自由度的平均动能均

为 $\frac{1}{2}kT$ —— 这种能量分配原则称为**能量按自由度均分原理**

★ 说明

- (1) 能量按自由度均分是大量分子**统计平均**的结果，是分子间的**频繁碰撞**所致。
- (2) 若某种气体分子具有 t 个平动自由度和 r 个转动自由度， s 个振动自由度， 则每个气体分子的平均总动能为

$$\frac{1}{2}(t + r + s)kT$$

每个气体分子的平均振动势能为 $\frac{s}{2}kT$

因此，每个气体分子的平均总能量为

$$\frac{1}{2}(t + r + 2s)kT = \frac{i}{2}kT$$

对于刚性分子 $s = 0$

气体分子的平均总动能等于气体分子的平均总能量。即为

$$\frac{1}{2}(t + r)kT$$

三. 理想气体的内能

- **内能** 系统中与热现象有关的那部分能量
- **理想气体的内能** 气体中所有分子各种形式动能和分子内原子间振动势能的总和

每个气体分子的平均总能量为 $\frac{i}{2}kT$

1mol 理想气体的内能为 $E = N_0 \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}RT$

ν mol 理想气体的内能为 $E = \frac{m}{M} \frac{i}{2}RT = \nu \frac{i}{2}RT$

★ 说明

一定质量的理想气体内能完全取决于分子运动的自由度数
和气体的温度，而与气体的体积和压强无关。对于给定气
体， i 是确定的，所以其内能就只与温度有关，这与宏观
的实验观测结果是一致的。

四. 理想气体的摩尔热容

理想气体的定体摩尔热容为

$$C_V = \frac{dE}{dT} = \frac{i}{2} R$$

理想气体的定压摩尔热容为

$$C_p = C_V + R = \frac{(i+2)}{2} R$$

比热容比为 $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$

单原子分子气体 $C_V = \frac{3}{2} R, \quad \gamma = 5/3$

双原子分子气体 $C_V = \frac{5}{2} R, \quad \gamma = 7/5$

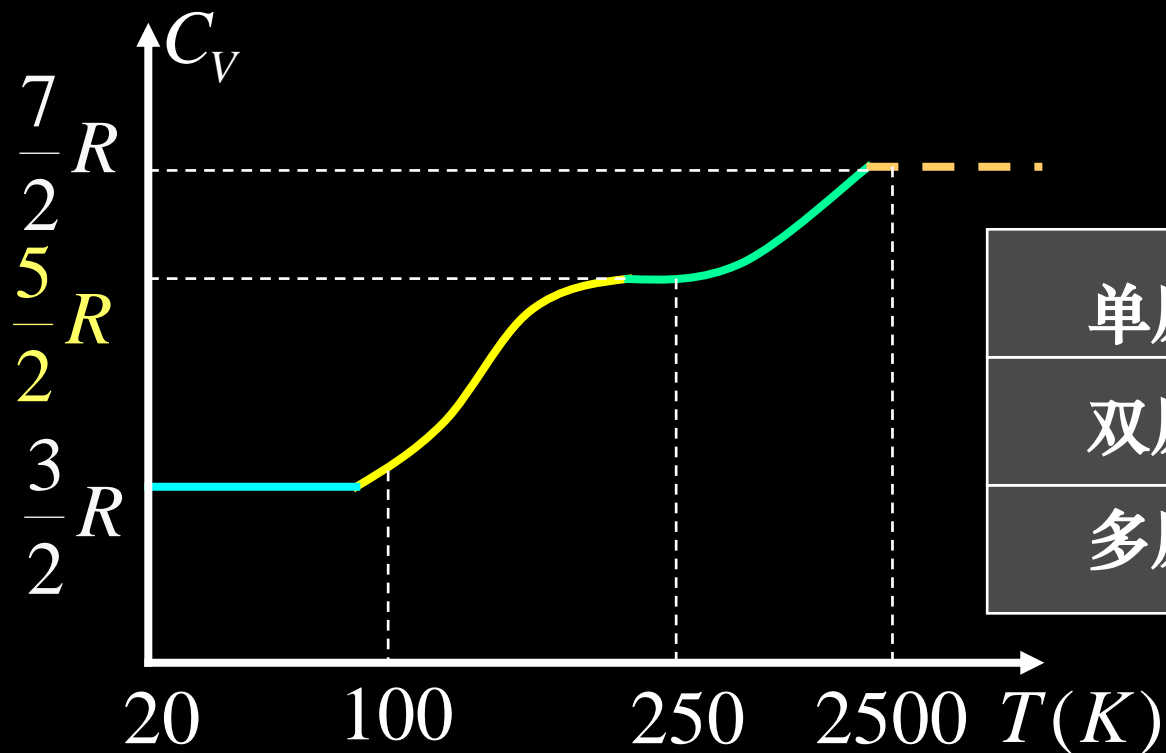
多原子分子气体 $C_V = 3R, \quad \gamma = 4/3$

1mol 理想气体的内能变化为 $\Delta E = \frac{i}{2} R \Delta T = C_V \Delta T$

ν mol 理想气体的内能变化为 $\Delta E = \nu C_V \Delta T$

□说明

所涉及的温度范围内，气体的 $C_V C_P \gamma$ 都近似为常量（数）



单原子	$i = 3$
双原子	$i = 5$
多原子	$i = 6$

氢的 $C_V \sim T$ 曲线

自由度 “冻结”

例 若盛有某种理想气体的容器漏气。使气体的压强和分子数密度各减为原来的一半。

问 气体的内能及气体分子的平均动能是否改变？

解 $p = nkT \quad \therefore T = \frac{p}{nk} \longrightarrow T \text{ 不变}$

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT \quad m \downarrow \longrightarrow E \downarrow$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT \longrightarrow \bar{\varepsilon} \text{ 不变}$$

例 一容器内某理想气体的温度为 273K ，密度为 $\rho = 1.25 \text{ g/m}^3$ ，
压强为 $p = 1.0 \times 10^{-3} \text{ atm}$

- 求**
- (1) 气体的摩尔质量，是何种气体？
 - (2) 气体分子的平均平动动能和平均转动能量？
 - (3) 单位体积内气体分子的总平动动能？
 - (4) 设该气体有 0.3 mol ，气体的内能？

解 (1) 由 $pV = \frac{m}{M}RT$ ，有

$$M = \frac{\rho RT}{p} = \frac{1.25 \times 10^{-3} \times 8.31 \times 273}{10^{-3} \times 1.013 \times 10^5} = 0.028 \text{ kg/mol}$$

由结果可知，这是 N_2 或 CO 气体。

(2) 平均平动动能和平均转动动能

$$\bar{\epsilon}_t = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273 = 5.56 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\bar{\epsilon}_r = kT = 1.38 \times 10^{-23} \times 273 = 3.77 \times 10^{-21} \text{ J}$$

(3) 单位体积内气体分子的总平动动能

$$\begin{aligned} E_t &= \bar{\epsilon}_t \cdot n = \bar{\epsilon}_t \cdot \frac{p}{kT} = 5.56 \times 10^{-21} \times \frac{1.013 \times 10^2}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} \\ &= 1.52 \times 10^2 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

(4) 由气体的内能公式，有

$$E = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} RT = 0.3 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 273 = 1.70 \times 10^3 \text{ J}$$

例 有 N 个粒子，其速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} av/v_0 & 0 \leq v \leq v_0 \\ a & v_0 \leq v \leq 2v_0 \\ 0 & v > 2v_0 \end{cases}$$

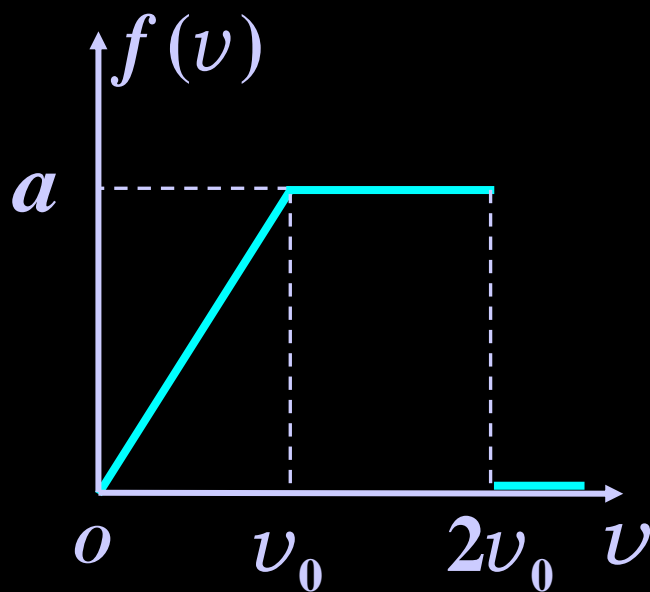
求 (1) 作速率分布曲线并求常数 a

(2) 速率大于 v_0 和速率小于 v_0 的粒子数

解 (1) 由归一化条件

$$\int_0^{v_0} \frac{av}{v_0} dv + \int_{v_0}^{2v_0} a dv = 1$$

$$\frac{1}{2}v_0 a + v_0 a = 1 \quad \longrightarrow \quad a = \frac{2}{3v_0}$$



(2) 速率分布曲线下的面积代表一定速率区间内的分子数与总分子数的比率

$v > v_0$ 的分子数与总分子数的比率为

$$\frac{\Delta N}{N} = v_0 a = v_0 \cdot \frac{2}{3v_0} = \frac{2}{3}$$

$$\longrightarrow \Delta N = \frac{2}{3} N$$

因此, $v > v_0$ 的分子数为 $(2N/3)$

同理 $v < v_0$ 的分子数为 $(N/3)$

