数学物理方程简史

张 丹 副教授/博导

能源与动力工程学院

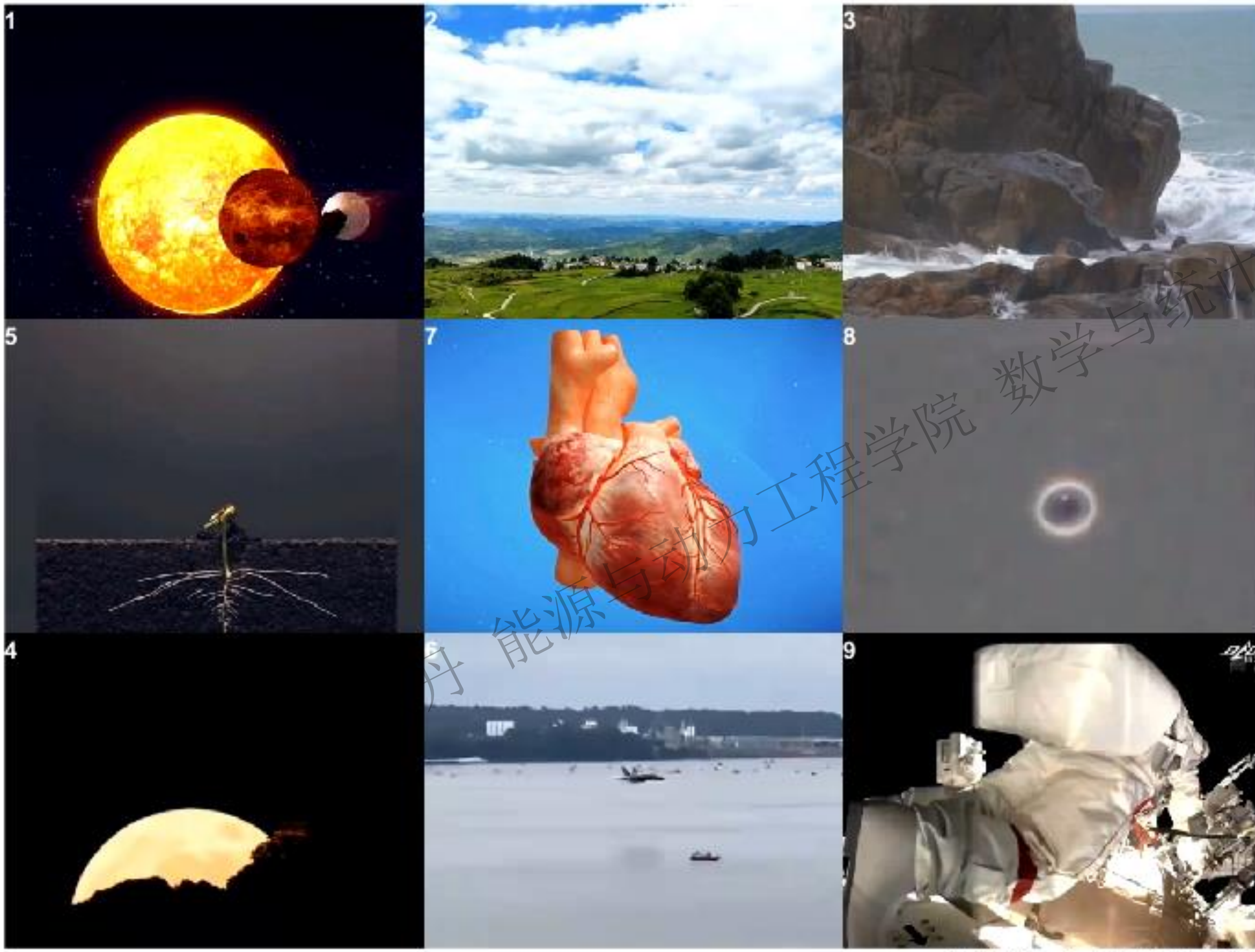
数学与统计学院（兼）

动力工程多相流国家重点实验室

如何探索世界

对世界的敬畏/好奇→探索/理解/改造世界是不同文明共性

1. 世界是什么?
2. 特征如何表达?
3. 规律如何探寻?



A14-VideoPatch-21-Oct-2022

A 1 世界是三维系统在时域内单向演化→现象均有时/空依赖性

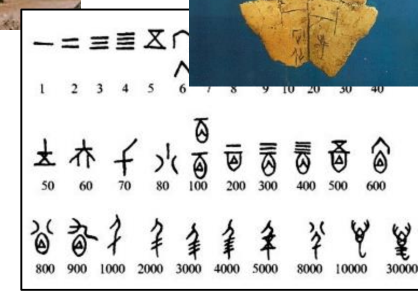
用数理解世界

1. 世界是什么?
2. 特征如何表达?
3. 规律如何探寻?

从事物量的共性中抽象出数的概念





A ② 自然/社会现象的特征可用**数**表达

除了数量→数还可表示长度/质量/速度/温度……等物质世界任一特征

表示事物特征的数同样具有时/空依赖性→变量

A ③ 探寻规律
→数学本质
→建立多元映射

	太阳辐照(时,空)	大气环流(时,空)	历史天气(时,空)	...
气温(时,空)				
风向/风速(时,空)				
降雨量(时,空)				
晴天/多云(时,空)				
……				

输入：影响天气的因素

输出：描述天气的变量

建立多元映射的方法是正交实验

核心：
变量A~变量B

常量数学

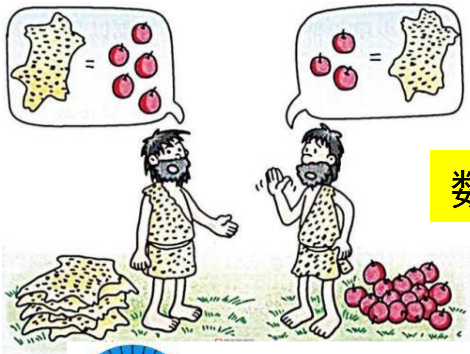
物理/社会现象

变量 A
~~A(空间,时间)~~

$\overset{?}{=}$

变量 B
~~B(空间,时间)~~

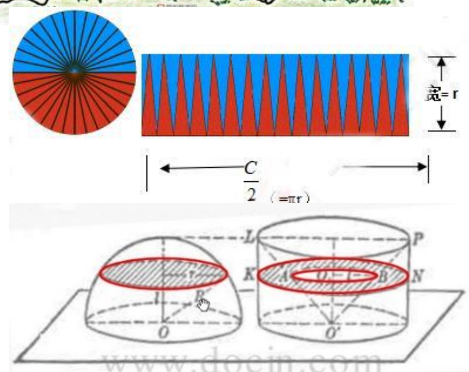
原始贸易



数量关系

$y = N \cdot x$

几何度量



空间关系

$$y = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3$$

平均速度

时空关系

$$u = \frac{L}{t}$$

郭守敬
1231-1316
元·天文/数学家

1276,授时历,月行迟疾

变速率
曲线运动

1. 瞬时速度
2. 速率极值
3. 轨迹切线

怎么算?

17世纪

直接建立变量A-变量B关系→不考虑变量时/空变化→常量数学(初等数学)

难以直接建立变量A-变量B关系

酝酿中的变量数学

1276,授时历,月行迟疾

❶ 求瞬时速度

郭守敬
1231-1316
元·天文/数学家

日行盈缩表 冬至起,1段=14.82天 招差法

段数	积日	积差	日平差	一差	二差
1	14.82	7058.0	476.2483	-38.4480	-1.38327
2	29.64	12976.4	437.8003	-39.8313	-1.37821
3	44.46	17693.7	397.9690	-41.2095	-1.37989
4	59.28	21148.7	356.7594	-42.5894	-1.38045
5	74.10	23280.0	314.1700	-43.9699	0
6	88.92	24026.2	270.2002	0	0

$$f(nt)=513.32+n(-37.07)+\frac{1}{2}n(n-1)(-1.38)$$

领先Newton插值412年

❷ 求极值

1637
增量, 逼近
P.D’Fermat
1601-1665
French Math.

B-1-02-Aug-2021. FermatPeakValue

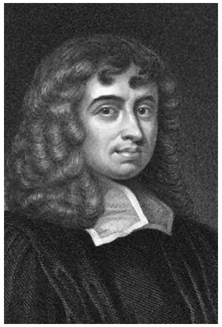
$$\left[\frac{f(a+e)-f(a)}{e}\right]_{e=0}=0$$

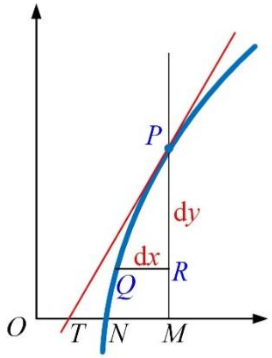
$$\left.\begin{aligned}&f(x)=x(b-x)\\&f(x+e)=(x+e)(b-x-e)\\&\left[\frac{f(x+e)-f(a)}{e}\right]_{e=0}=b-2x-e\end{aligned}\right\}\quad x=\frac{b}{2}$$

透过数的变化理解世界

❸ 求切线

1669
微分三角形
I.Barrow
1630-1677
British Math.





$$\left.\begin{aligned}&dx,dy\to 0\\&\Delta PQR\sim\Delta PMT\\&\frac{PM}{TM}=\frac{PR}{QR}=\frac{dy}{dx}\end{aligned}\right\}$$

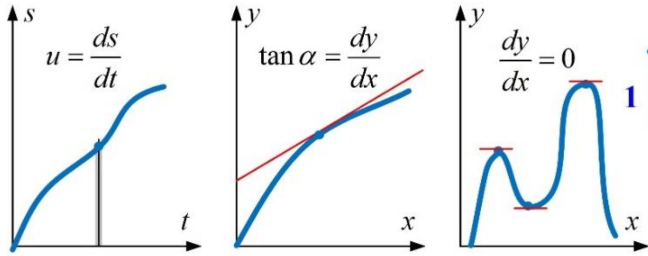
忽略高阶小量解出
斜率即可确定切线

$$f(x,y)=f(x-dx,y-dy)$$

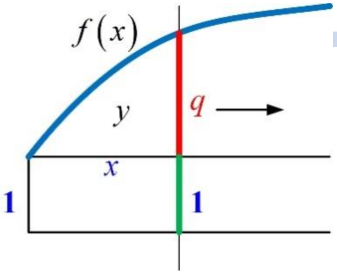
微积分的诞生

微积分的诞生为用变量理解世界提供了理论工具

I.Newton
1643-1727
British
Physical
Scientist



瞬时速度　求切线　求极值



$$\frac{dy}{dt}=q\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=1$$

微积分基本定理

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{dy}{dt}=q=f(x)$$

G.W.Leibniz
1646-1716
German Physical
Scientist

1661, 19岁, 剑桥, 三一学院

1665, 23岁, 疫情, 居家隔离, 创立微积分

1666, 流数简论, 时间是连续流动的, 从时间的流动性出发, 把所有其他量的增长速度称为流数($\frac{dy}{dt}$),瞬时内产生的部分称为瞬(小o)

1687, 44岁, 自然哲学的数学原理, 微积分运用下的力学神作

1736, 去世9年后, 流数法, 后人整理发表

1. 瞬时速度/切线/极值→统一为流数(微分)运算→建立统一计算法则
2. (流数)微分与(反流数)积分互为逆运算→微分方程求解指明方向

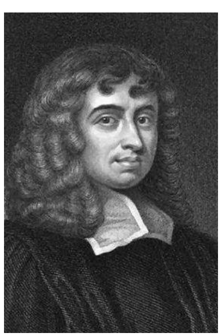
早年, **Leipzig**大学, 法律, 外交

1672, 26岁,巴黎, **Huygens**,数学

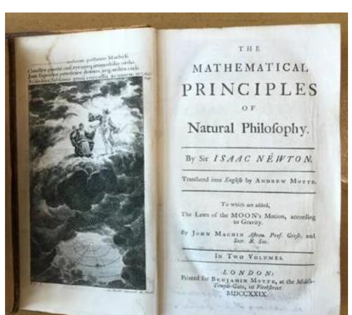
1673, 27岁,求切线/面积互为逆运算

1684, 38岁, 一种求极大/小值和求切线的新方法, 首部微分著作, dx, 和差积商复合求导

1686, 40岁, 深奥的几何与不可分量及无限的分析, 首部积分著作, 微积分基本定理, 积分号∫, 微分逆运算



I.Barrow
1630-1677
British
Math.



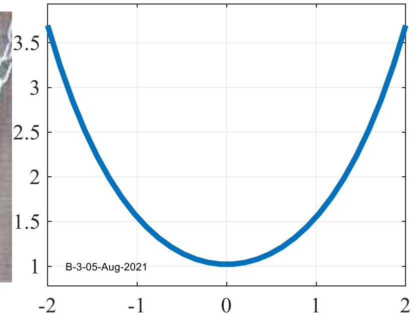
C.Huygens
1629-1695
Holland
Physical
Scientist

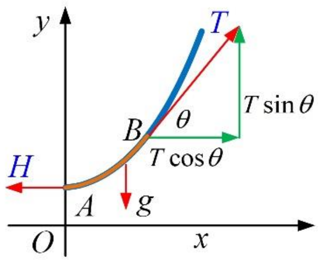
J.Bouvet
1656-1730
French
missionary

常微分方程–理解世界的新思维

悬链线

Jacob.Bernoulli
1654-1705
Swiss Math.





$$T\cos\theta = H$$

$$T\sin\theta = mg$$

$$= \sigma g\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

1690

悬链任意点满足

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{mg}{H} = \frac{\sigma g}{H}\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

John.Bernoulli
1667-1748
Swiss Math.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sigma g}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

变量代换

$$p = \frac{dy}{dx},\quad \frac{dp}{dx} = \frac{\sigma g}{H}\sqrt{1+p^2},\quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\sigma g}{H}dx$$

$$x = 0,\ p = \frac{dy}{dx} = 0$$ 边界条件

1691

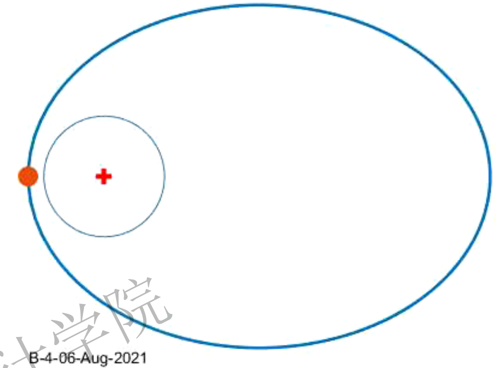
$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{\sigma g}{H}x\right)$$

$$y = \frac{H}{\sigma g}\cosh\left(\frac{\sigma g}{H}x\right) + C$$

描述了物质世界一维空间分布

两天体问题

I.Newton
1643-1727
British Physical Scientist



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\left(a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

径向

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

周向

$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F_\theta = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = h$$ Kepler第二定律

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{GM}{h^2}$$

轨道方程 **1697**

$$r = \frac{1}{A\cos\left(\theta-\theta_0\right) + \frac{GM}{h^2}}$$

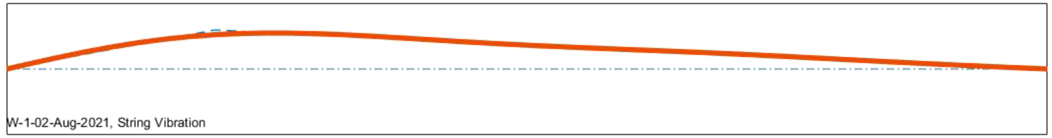
J.Kepler
1571-1630
German Astronomer

1846 J.Adams海王星 **1900** Hilbert三体问题

描述了物质世界随时间的演化

弦振动–推开了偏微分方程的大门

J.R.D'Alembert
1717-1783
French
Mathematician
Astronomer
Physical Scientist



1. 遗弃的私生子, 玻璃匠收养, 教会学校, 法国科学院天文学, 法兰西科学院院士
2. 1747,张紧的弦振动时形成的曲线的研究,首次采用偏微分,首次导出**弦振动方程**,也称**波动方程**, 并首次导出该方程的通解
3. 开启了数学新分支-偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+a\tau) + \varphi(x-a\tau)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-a\tau}^{x+a\tau} \psi(\xi)$$

建立了弦上任意点位移时间变化率与空间变化率的关系

D'Alembert发现通解是初始弦形在弦上的传播, 但未给出通用解法

Daniel Bernoulli
1700-1782
Swiss
Mathematician
Physical Scientist

解法改进

假设初始曲线可表示

成正弦级数,导出特解

$$u(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi a}{l} t$$

分离变量法的雏形

Fourier级数尚未提出

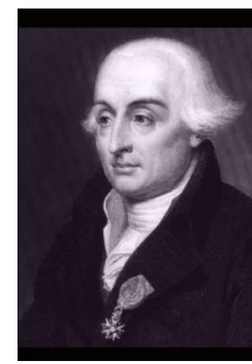
Leonhard Euler
1707-1783
Swiss
Mathematician
Physical Scientist

方程推广

鼓膜振动, 声音传播

二维/三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$



J.L.Lagrange
1736-1813
French
Mathematician
Physical Scientist

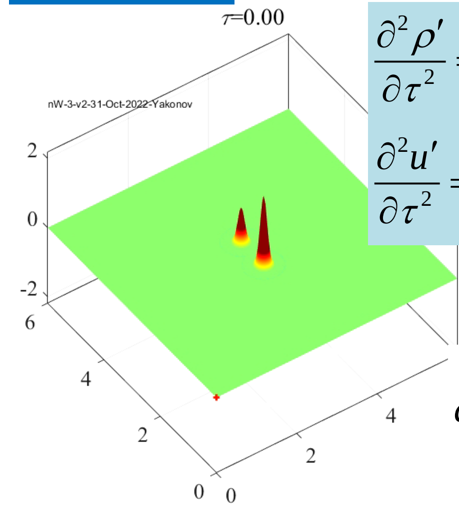
弦振动→高维推广→波动方程

波动方程的应用

$$\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}$$

流体力学

1887 弱扰动/可压缩介质/传播



$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}$$

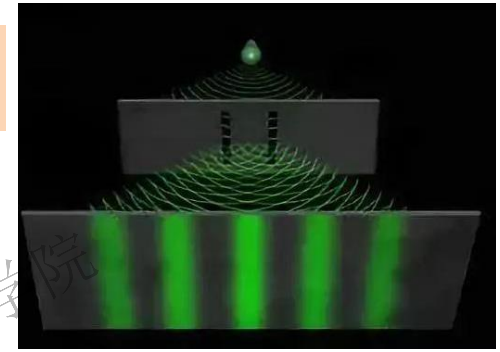
E.Mach
1838-1916
Austria
Aerodynamics

波动光学

1807 光路尺寸/波长/可比拟

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

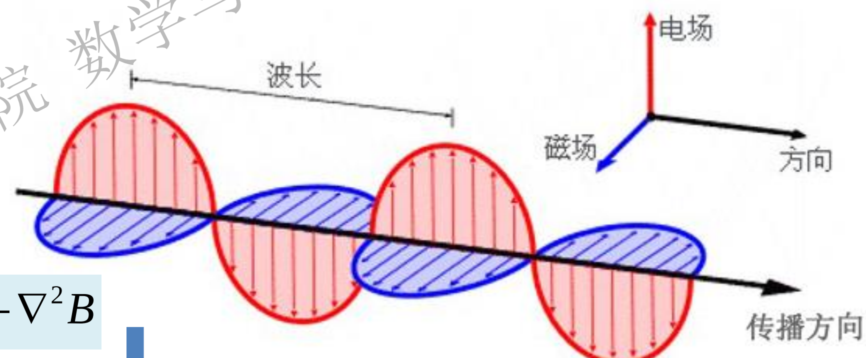
T.Young
1773-1829
British
Physics Scientist



电磁波

交变电/磁场时空演化遵守波动方程

→且能相互产生→预言电磁波



J.Maxwell
1831-1879
British Math.
Physics Scientist

1864
电磁场方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B$$

$$\nabla \cdot B = 0,\ \nabla \cdot E = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\Delta E = \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\Delta B = \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

1879 实验
证实电磁
波的存在

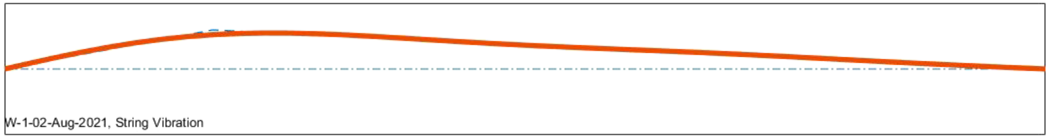
H.Hertz
1857-1894
German
Physics Scientist

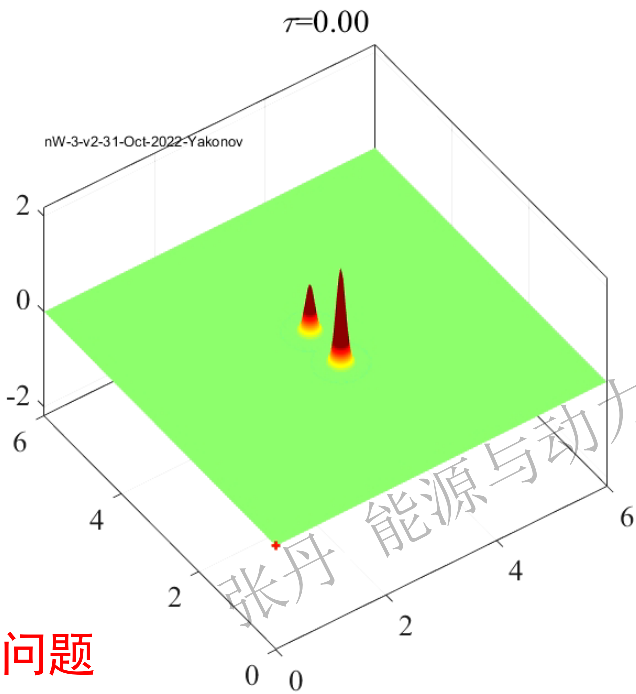
先预言后证明的成功典范→展现了PDE的威力

$$\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}$$

两种物理视角/两类数学问题

❶关注全场物理量时空演化

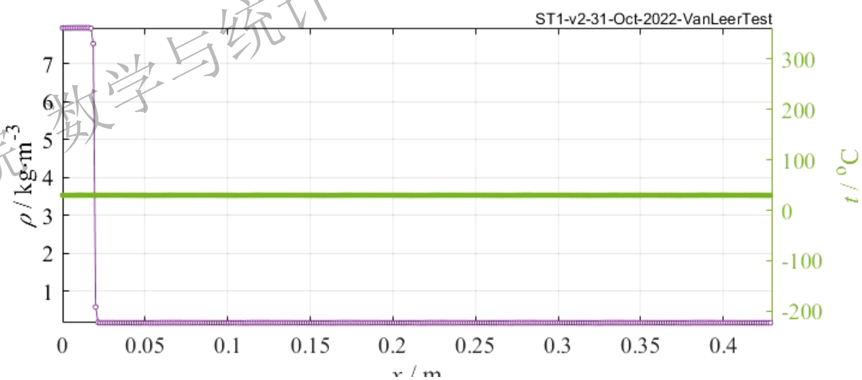




混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \\ \text{初始条件} \\ \text{边界条件} \end{cases}$$

❷关注局部特征的迁移



无界区域上的初值问题

Cauchy问题

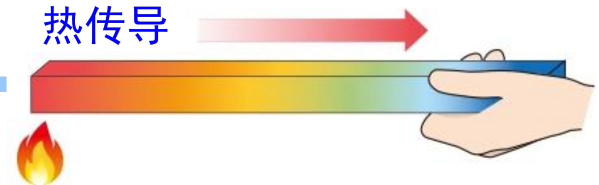
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \\ \text{初始条件} \\ \text{无界区域} \end{cases}$$

A.L.Cauchy
1789-1857
French Math.
Physical Scientist

导热方程–物理/数学双贡献

J.Fourier
1768-1830
French Math.
Physical Scientist

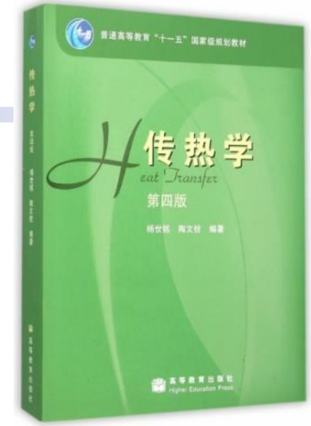
1. 孤儿, 主教收养, 军校, 巴黎科学院
2. 1822, 热的解析理论, 三维导热方程
3. 偏微分方程→通解不如初始/边界条件给定的特解有用→分离变量法→导热方程定解问题



$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

温度的时空演化

热量由高温→低温扩散



分离变量法解一维恒温边界导热

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(0,\tau)=0,\ u(l,\tau)=0,\ \tau>0\\ u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le l\end{cases}$$

1811, Fourier级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx,\quad (n=0,1,2,3\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx,\quad (n=1,2,3\cdots)$$

为满足初始条件→函数需能按正弦展开

$$u(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}\tau\right),$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

函数在[-π,π]上: 1829, Dirichlet条件

1.分段单调;

2.除有限个第一类间断点外都连续,

则该函数的Fourier级数在[-π,π]上收敛

J.Dirichlet
1805-1859
German
Mathematician
Physical Scientist

导热方程的应用

扩散现象

1855, 不可压缩/低浓度,
Fick扩散定律

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = D_{im}\nabla^2 C_i$$

A.Fick
1829-1901
German
Physical
Scientist

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

种群密度

自身分布 环境承载 被食几率

$$\begin{cases} \text{被食者} & \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = D\nabla^2 u + au\left(1-\dfrac{u}{b}\right) - \gamma\dfrac{uv}{u+H} \\ \text{捕食者} & \dfrac{\partial v}{\partial \tau} = D\nabla^2 v + k\gamma\dfrac{uv}{u+H} - \mu v \end{cases}$$

食物供给 自身消亡

密度变化率
→密度梯度+
食物链竞争

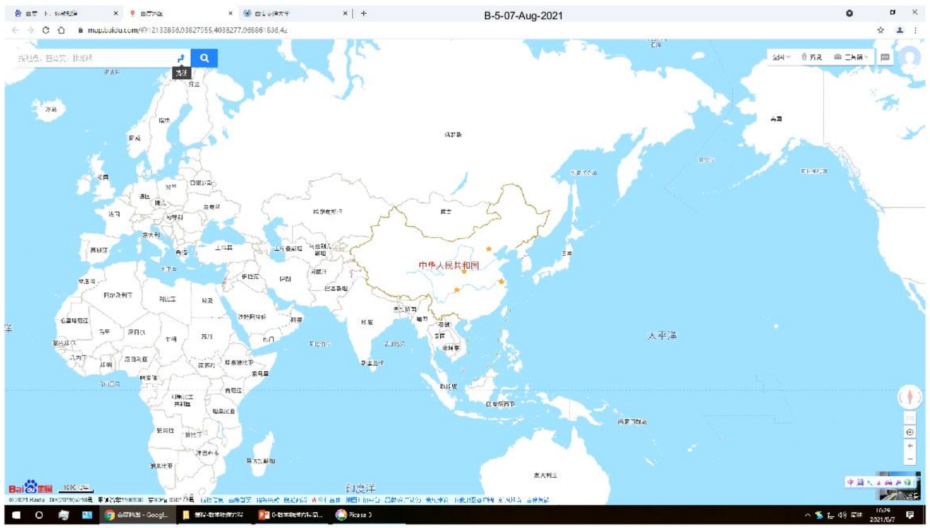
图像处理

正导热→噪声抹平→图像圆滑但模糊

负导热→图像锐化→提取边界

放缩标注

字号随放缩的变化→取决于标注密度



Poisson方程/Laplace方程

变量：空间分布→时域演化的影响

描述稳态时，变量各空间维度上变化率的关系

S.Poisson
1781-1840
French Math.
Physical Scientist

波动方程 $a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$

导热方程 $a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial \tau}$

变量稳定→时间变化率0→空间分布如何？

Poisson方程

$$f(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$f(x,y,z)=0$

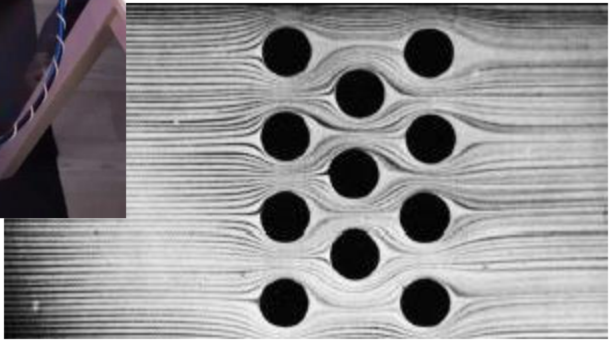
Laplace方程(调和方程)

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

P.Laplace
1749-1827
French Math.
Physical Scientist

海上钢琴师

皂膜实验



空气外掠横管

一阶线性偏微分方程

变量：空间分布→时域演化的影响

波动 $$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

导热 $$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

一阶线性PDE

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,\tau)$$

超音速飞行

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial \tau}=-\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial \tau}=-\dfrac{\partial\left(\rho u^2+p\right)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial \tau}\left[\rho\left(e+\dfrac{u^2}{2}\right)\right]=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e+\dfrac{u^2}{2}\right)+pu\right]\end{cases}$$

交通拥堵

车辆密度

$$u_t(x,t)+v(x,t)u_x(x,t)=0$$

Burgers方程 $$\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\begin{cases}u_t+u\cdot u_x=0,\ 0<t,\ \ 0<x<2\pi\\ u(x,0)=\dfrac{1}{2}+\sin x,\ 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$

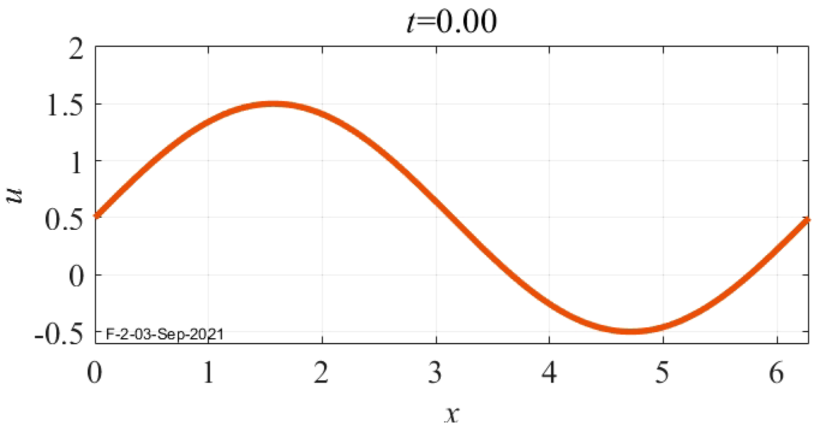
爆炸

激波

局部解

人口发展

$$\begin{cases}u_t+u_r+\mu u=0,\ 0<t,\ 0<r<A\\ u(t,0)=\int_0^A \beta(r)u(t,r)dr,\ t\ge 0\\ u(0,r)=u_0(r),\ 0\le r<A\end{cases}$$



数学物理方程

描述物质世界时空演化的核心工具，没有之一

数学物理方程

有明确物理背景的(偏)微分方程定解问题

- 常微分方程 $y=f(x)$
  - 非线性
  - 线性
    - 一阶
      - 齐次
      - 非齐次
    - 二阶
      - 常系数
        - 齐次
        - 非齐次
      - 变系数
    - 高阶→可降阶
- 偏微分方程 $y=f(x_1,x_2,\cdots)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,\tau)$$

课程内容

- 列方程
  - 变量的时空依赖性
  - 波动/导热/Poisson/一阶PDE
  - 定解条件
- 解方程
  - 正交分解法
    - 分离变量法（1822 J.Fourier）
      未知函数分解为自变量量乘积
      - 一维
        - 特征值问题 $A=-\frac{d^2}{dx^2}$ 算子特征方程+齐次边界
        - ODE定解问题
      - 二维
        - 特征值问题 $A=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=-\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_\theta\right)$
        - ODE定解问题
      - 高维
    - 积分变换法 PDE→ Fourier变换 / Laplace变换 →ODE →求解→反变换→得解

      积分变换的本质是无限维向量的正交分解
  - 特征线法　自变量沿特征线整合→消元降维（1747 J.R.D’Alembert）
  - Green函数法　Poisson方程→根据解的物理意义实现边界条件→得解（1828 G.Green）

常微分方程(ODE)的解法

$$x^{<n>}+P_1x^{<n-1>}+P_2x^{<n-2>}+\cdots+P_{n-1}x^{<1>}+P_nx^{<0>}=F$$

- 线性 ODE
  - 一阶
    - 齐次 $x'+P(t)x=0$ 分离变量法 **1691** **G.Leibniz**
    - 非齐次 $x'+P(t)x=f(t)$ 常数变易法 **1774** **J.Lagrange**
  - 二阶(高阶)
    - 常系数
      - 齐次
        - 特征方程法 $\lambda^2+p\lambda+q=0$
          - 互异实根 $\{e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t}\}$
          - 相同实根 $\{te^{\lambda t},e^{\lambda t}\}$
          - 共轭复根 $\{e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t\}$
          - **1743** **L.Euler**
        - 摄动法
        - Liouville公式 $x_2(t)=x_1(t)\int\frac{1}{x_1^2(t)}e^{-\int p_1(t)dt}dt$ **1832** **J.Liouville**
      - 非齐次
        - 非齐通解=通+特 **1743** **L.Euler**
        - 求非齐特解
          - 待定函数法
            - $x''(t)+a_1x'(t)+a_0x(t)=\varphi(t)e^{\mu t}$, $\bar{x}(t)=t^k\Phi(t)e^{\mu t}$
            - $x''(t)+a_1x'(t)+a_0x(t)=\varphi(t)e^{\mu t}\sin\nu t$, $\bar{x}(t)=t^ke^{\mu t}\left[\Phi_1(t)\cos\nu t+\Phi_2(t)\sin\nu t\right]$
          - 观察法 $\ddot{x}+x=\sin 2t,\ \bar{x}=C\sin 2t$
    - 变系数
      - Euler方程 $t^n\frac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{dx}{dt}+a_nx=F(t)$, $t=e^s$ **1739** **L.Euler**
      - Bernoulli方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^{\alpha}$, $(\alpha\neq 0,1)$, $u=y^{1-\alpha}$ **1696** **G.Leibniz**
  - 高阶(可降阶)
    - $y^{(n)}=f(x)$ 无其他导数项直接积分
    - $y''=f(x,y')$ 二阶不含 y，令 $p=y',y''=\frac{dp}{dx}=f(x,p)$ **1691** **John.Bernoulli**
    - $y''=f(y,y')$ 二阶不含 x，令 $p=y',y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

PDE带来的变系数ODE

PDE转化得到的特殊ODE成为了新的热点/工具

Bernoulli方程

Jacob.Bernoulli
1654-1705
Swiss Math.

1695 变量代换的经典，获得精确解的非线性方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^{\alpha},\quad (\alpha\neq 0,1),\quad u=y^{1-\alpha}$$

Euler方程

L.Euler
1707-1783
Swiss Math.
Physical Scientist

1739

$$t^n\frac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{dx}{dt}+a_nx=F(t),\quad t=e^s$$

Legendre方程

A.Legendre
1752-1833
French Math.

1784 行星外形的研究，球域Laplace算子特征值问题

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

Bessel方程

F.W.Bessel
1784-1846
German Math.
Astronomer

1817 三体问题，圆域Laplace算子特征值问题

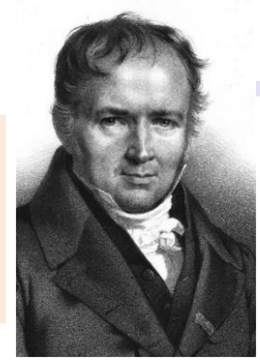
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-r^2)y=0$$

既数学又物理的Green函数

G.Green
1793-1841
British Math.
Physical Scientist

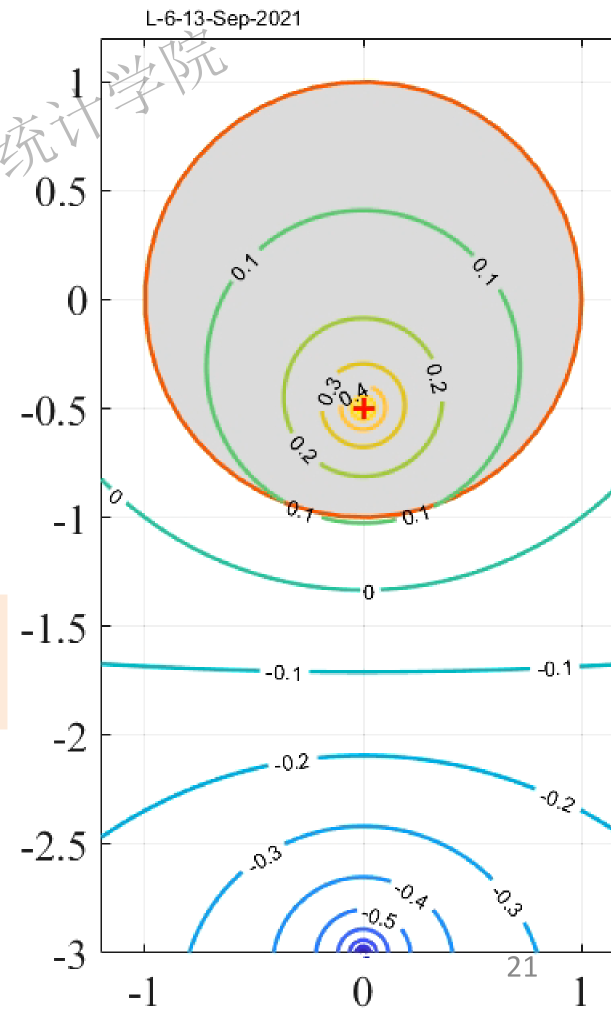
Poisson方程定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f\left(x,y,z\right), & \left(x,y,z\right)\in\Omega \\ u\left(x,y,z\right)=\varphi\left(x,y,z\right) & \left(x,y,z\right)\in\partial\Omega \end{cases}$$



S.Poisson
1781-1840
French Math.
Physical
Scientist

1. 乡村磨房家庭, 8岁读书1年, 自学数学
2. **1828**, **论应用数学分析电磁学**, 针对Poisson方程定解问题→Green函数法
3. **1833**, 40岁, 剑桥大学高龄本科生, 留校



数学
- 不考虑变量随时间变化+边界条件→定解问题
- 求解边界条件所确定的变量在区域内的分布

物理 点电荷空间电势满足Laplace方程→多点电荷电势叠加亦满足→通过区域内外点电荷布置实现边界条件→定解问题得解

$$\Gamma\left(x,y,z\right)=\frac{1}{4\pi r_{P_0P}}$$

借助物理意义实现了PDE的求解→数学物理方程本色

物理现象的理解/数理方程的发展 相辅相成

1300 B.C.,数的概念形成

1276, 郭守敬, 天体的非匀速运动, 求瞬时速度的招差法

1637, P.Fermat, 增量逼近法求极值

1669, I.Barrow, 微分三角形求切线

1684, G.Leibniz, 一种求极大/小值和求切线的新方法,首部微分著作

1686, G.Leibniz, 深奥的几何与不可分量及无限的分析,首部积分著作

1687, I.Newton, 自然哲学的数学原理,微积分运用下的力学神作

1688, J.Bouvet 将微积分传入中国

1690, Jacob.Bernoulli,首个常微分方程-悬链线方程-提出,

1697, I.Newton, 两天体运动方程

1739, L.Euler, 提出Euler方程的解法

1747, J.D’Alembert, 首个偏微分方程-弦振动方程-提出

1784, P.Laplace, 提出Laplace方程

1817, F.Bessel, 提出Bessel方程并利用幂级数法求解

1822, J.Fourier, 建立热传导方程,首次提出分离变量法,发现Fourier级数

1828, G.Green, 提出求解边值问题的Green函数法

……

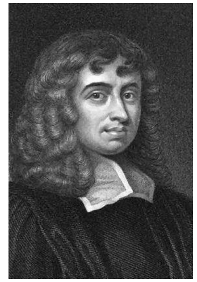
CONTRIBUTORS


郭守敬
1231-1316
元·天文/数学家


J.Kepler
1571-1630
German Astronomer


P.D’Fermat
1601-1665
French Math.


C.Huygens
1629-1695
Holland Phys.


I.Barrow
1630-1677
British Math.


I.Newton
1643-1727
British Phys.

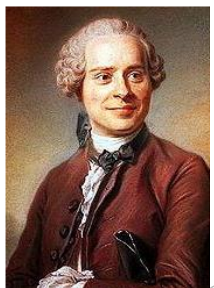

G.W.Leibniz
1646-1716
German Math. Phys.

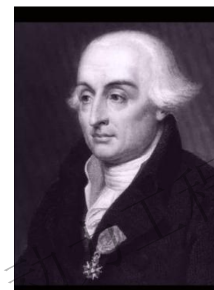

Jacob.Bernoulli
1654-1705
Swiss Math.


John.Bernoulli
1667-1748
Swiss Math.


Daniel Bernoulli
1700-1782
Swiss Math.


L.Euler
1707-1783
Swiss Math. Phys.

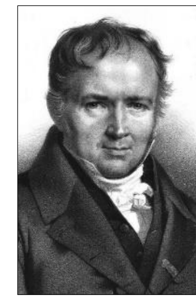

J.R.D’Alembert
1717-1783
French Math.


J.Lagrange
1736-1813
French Math. Phys.


P.Laplace
1749-1827
French Math. Phys.


A.Legendre
1752-1833
French Math.


J.Fourier
1768-1830
French Math. Phys.


S.Poisson
1781-1840
French Math. Phys.


F.W.Bessel
1784-1846
German Math. Astronomer


G.Green
1793-1841
British Math. Phys.

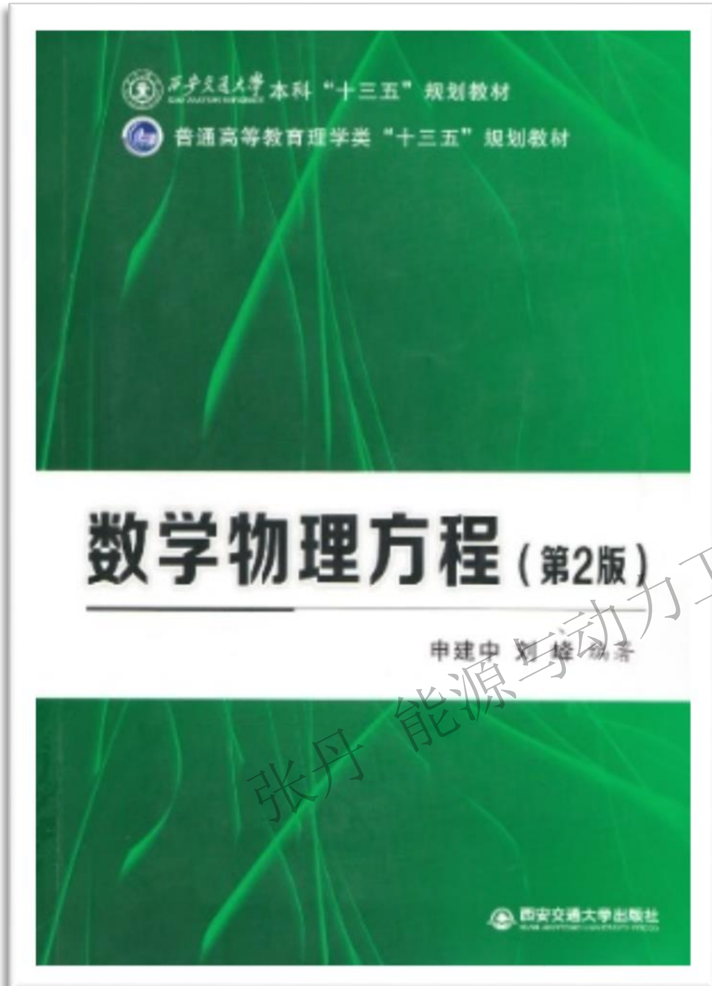

J.Sturm
1803-1855
French Math.

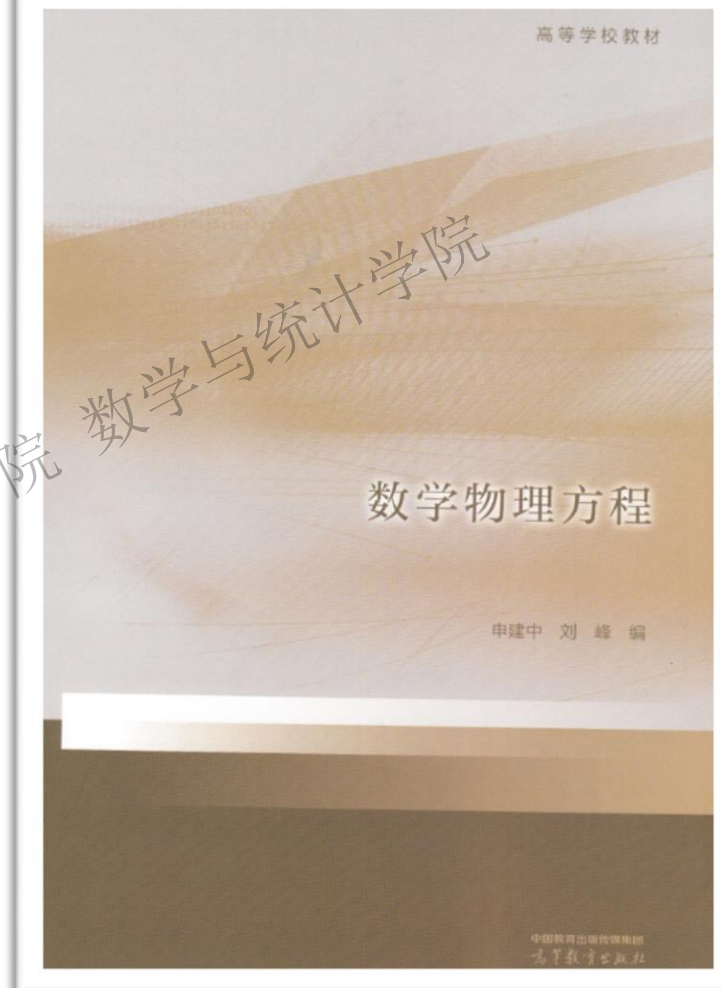

J.Dirichlet
1805-1859
German Math. Phys.

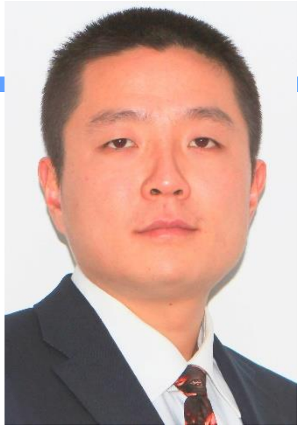

J.Liouville
1809-1882
French Math.


E.Mach
1838-1916
Austria Aerodynamics

NO End...


西安交通大学本科“十三五”规划教材
普通高等教育理学类“十三五”规划教材
数学物理方程（第2版）
申建中 刘峰 编著
西安交通大学出版社


高等学校教材
数学物理方程
申建中 刘 峰 编
中国教育出版传媒集团
高等教育出版社



张丹

西安交通大学 · 副教授 / 博导
能源与动力工程学院 · 数学与统计学院(兼)

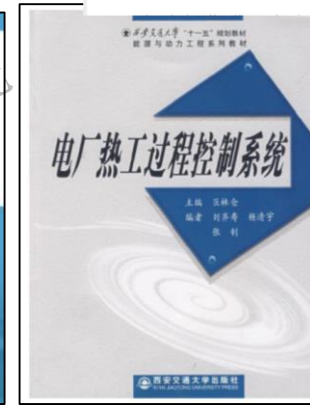
能源动力与控制工程系/动力工程多相流国家重点实验室

创新港-敏行楼 1-5238, zhangdan@mail.xjtu.edu.cn

- 2013 西安交通大学 动力工程及工程热物理 博士
- 2015.08-2016.02, University of Maryland, USA, 机械工程系, 访问学者
- 2016.04-2016.08, Massachusetts Institute of Technology, USA, 应用数学系, 访问学者
- 2018 西安交通大学 副教授/博导

承担国家重点研发2项，自然科学基金2项．企业横向30余项

主讲课程



研究方向

3

- 气液/颗粒多相流
  - 机理：脱盐/掺混
  - 测试：量子点测量
- 热辐射
  - 太阳能光热利用
  - 红外目标辐射特性
- 可压缩流动
  - 天然气/氢能 开采/储运
  - 高超声速流动计算/仿真

5

闪蒸脱盐/量子点/射流预冷/出入水/空间热控/尾流场/循环热管/金属纤维/.....