第二章 一元函数微分学及其应用

第四节 L’ Hospital(洛必达)法则

- $\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型未定式解法:洛必达法则
- $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型未定式解法

作业 习题2.4

(A)16, 18, 19;

(B)1,2

一、$\dfrac{0}{0}$型及$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式解法:洛必达法则

定义　如果当$x \to a$(或$x \to \infty$)时,两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于零或都趋于无穷大,那么极限$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$称为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式(未定式).

例如, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}, \left(\dfrac{0}{0}\right)$　　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}, \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

定理1: $\left(\dfrac{0}{0}\text{型不定式}\right)$

设$\delta>0$,函数f,g在区间$(a,a+\delta)$内满足:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$;

(2) f,g在$(a,a+\delta)$可导且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$为实数或无穷大);

那么 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定不定式的值的方法称为洛必达法则.(罗彼塔法则)

当$\begin{cases} x\to a \\ x\to a^+ \\ x\to a^- \end{cases}$时,该法则仍然成立.

证 定义辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},\quad g_1(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},$$

在$\overset{o}{U}(a,\delta)$内任取一点x,在以a与x为端点的区间上, $[a,x]$ (a,x)

$f_1(x),g_1(x)$满足柯西中值定理的条件,则$x\neq a$时有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f_1(a)}{g(x)-g_1(a)}=\frac{f_1(x)-f_1(a)}{g_1(x)-g_1(a)}=\frac{f_1'(\xi)}{g_1'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad (a<\xi<x)$$

当$x\to a^+$时,$\xi\to a^+$, $\because \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, $\therefore \lim\limits_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A$,

$$\therefore \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A.$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理2:

$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型不定式}\right)$

设 $\delta>0$,函数 f,g 在区间 $(a,a+\delta)$ 内满足:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$;

(2) f,g 在 $(a,a+\delta)$ 可导且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$为实数或无穷大);

那么 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$x\to\infty(\pm\infty)$时,可令$x=\dfrac{1}{t}$,化为$t\to 0$,得到类似结论.

当$\begin{cases} x\to\infty \\ x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases}$,以及$\begin{cases} x\to a \\ x\to a^+ \\ x\to a^- \end{cases}$时,该法则均成立.

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $(\dfrac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=1.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$. $(\dfrac{\infty}{\infty})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos bx}{\cos ax}=1.$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\alpha}}.\ (a>1,\alpha>0)$

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{\beta x}}.\ (a>1,\alpha,\beta>0)$

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x\ln a}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\dfrac{1}{\alpha\ln a}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta x}\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\beta^2 a^{\beta x}(\ln a)^2}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{\beta^n a^{\beta x}(\ln a)^n}\qquad n=[\alpha]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{\beta^{n+1}a^{\beta x}(\ln a)^{n+1}x^{n+1-\alpha}}=0$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\alpha}}.\ (a>1,\alpha>0)$

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{\beta x}}.\ (a>1,\alpha,\beta>0)$

说明: 当$x\to+\infty$时,$\log_a x, x^{\alpha}, a^{\beta x}$都是无穷大量

但它们趋向于无穷大的"速度"不同。

其中指数函数$a^{\beta x}$增大得"最快",

幂函数x^{α}次之，对数函数$\log_a x$增大得"最慢".

注意：洛必达法则是求不定式的一种有效方法，但如能与其它求极限方法结合使用，效果更好.

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{6}\quad}$

分析：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

二、$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$型未定式解法

关键:将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0})$, $(\frac{\infty}{\infty})$

1. $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$

再求导

$$=\cdots\cdots=0.$$

或: $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}$$

$$=0$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤: $\left.\begin{array}{c} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} e^{0\cdot\ln 0} \\ e^{\infty\cdot\ln 1} \\ e^{0\cdot\ln\infty} \end{array}\right.$ 转化为 $0\cdot\infty$ 型.

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$

说明：1）在满足定理条件的某些情况下洛必达法则并不能解决计算问题．

例如，$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\text{用洛必达法则}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{\text{用洛必达法则}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

事实上 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

2）若 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$，不能用洛必达法则！

即 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

例如，$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$

3) 有时用洛必达法则并不简单 .

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$

4) 用洛必达法则时，要注意技巧，往往要结合无穷小代换.

5) 注意洛必达法则成立的条件是否满足.

P143 15题(3) 设f在x_0处二阶可导，则下面的解法有无错误？

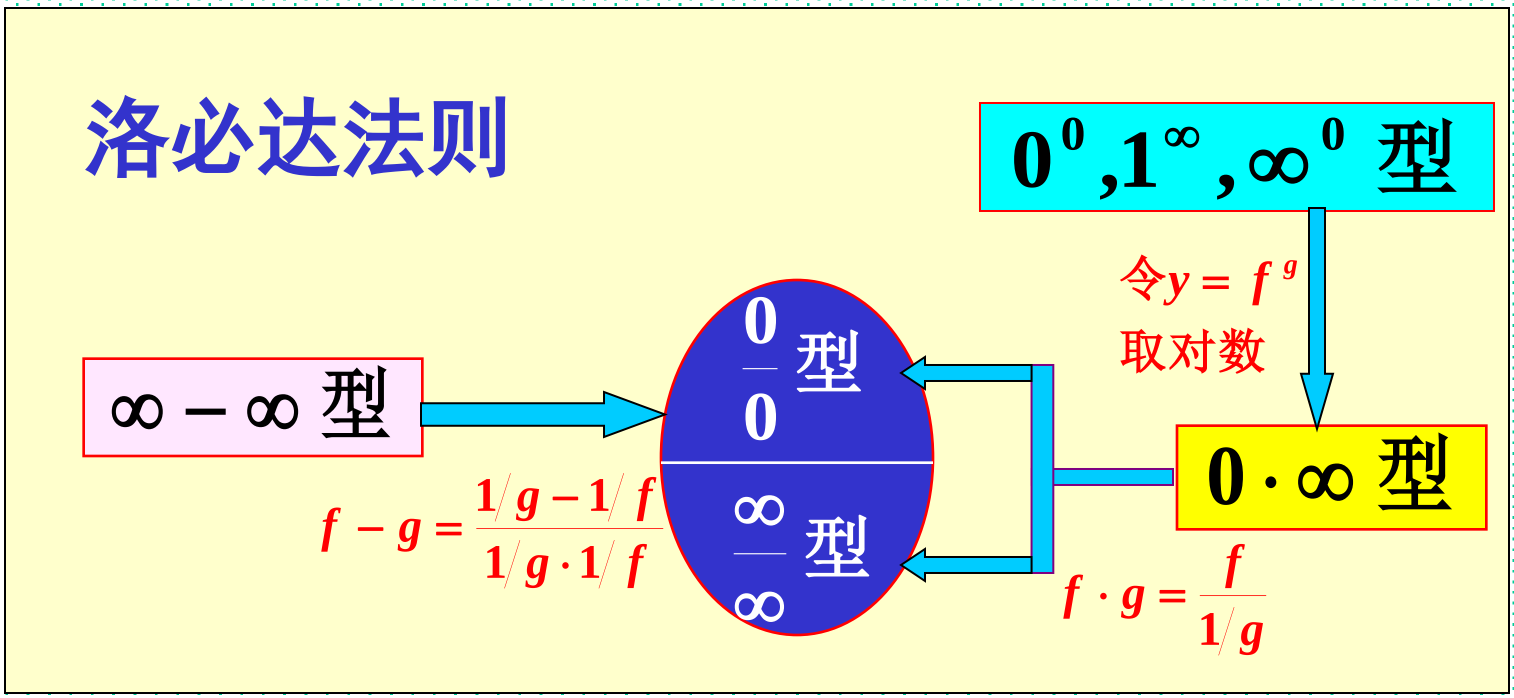
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}$$

$$=f''(x_0)$$

三、小结


洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$\infty - \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$0 \cdot \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$