第二章 一元函数微分学及其应用

第六节 函数性态的研究（2-3学时）

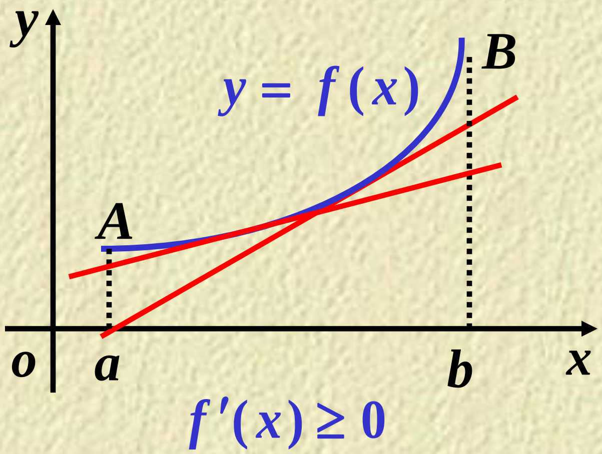
- 函数的单调性
- 函数的极值
- 函数的最大(小)值
- 函数的凹凸性 拐点

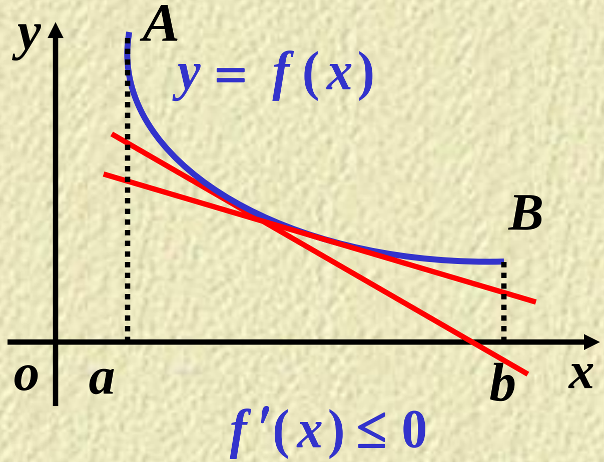
作业: P165.

3(2)(4), 4(2)(4),7(1)(3)(5), 9(1)(3) , 13(1)(3), 16, 19, 22(1)(3), 26(2)

第一部分 函数的单调性

一、单调性的判别法





定理6.1 设函数 $y=f(x)$在 I 上连续，在 I 内可导,则

(1) 函数 $y=f(x)$在 I 上单调增(减)的充要条件为：

在 I 内$f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$;

(2) 如果在 I 内 $f'>0(f'<0)$,

则函数 $y=f(x)$在 I 上严格单调增(减).

证：(1):充分性

设 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 且 $x_1 < x_2$, **应用Larange定理,得**

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

$\because x_2 - x_1 > 0,$

若在(a,b)内，$f'(x) \ge 0$, 则 $f'(\xi) \ge 0$,

$\therefore f(x_2) \ge f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调增

若在(a,b)内，$f'(x) \le 0$, 则 $f'(\xi) \le 0$,

$\therefore f(x_2) \le f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调减

在以上证明中,若 $f' > 0 (f' < 0)$, **则命题(2)成立.**

(1) $f(x)$在 I 上单调增(减)的充要条件为：

在 I 内$f'(x) \ge 0 (f'(x) \le 0)$;

(2) 如果在 I 内 $f' > 0 (f' < 0)$, 则$f(x)$在 I 上严格单调增(减).

(1):必要性

设 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增

在(a,b)内任取x, 取Δx使$x+\Delta x\in(a,b)$,

若 $\Delta x>0$ $(\Delta x<0)$ 则

$f(x+\Delta x)\geq f(x)$. $f(x+\Delta x)\leq f(x)$.

从而 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$. 即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$.

同理可得: 若$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\leq 0.$$

(1) $f(x)$在I上单调增(减)的充要条件为:

在I内$f'(x)\geq 0$($f'(x)\leq 0$);

定理6.1 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导则

① 函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增(减)的充要条件为:

在(a,b)内$f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$;

(2) 如果在(a,b)内 $f'>0(f'<0)$,

那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调增(减).

将上述自变量取值范围换为I仍成立

注意:命题(2)的逆命题不一定成立.

如$y=x^3$,此时应分子区间讨论

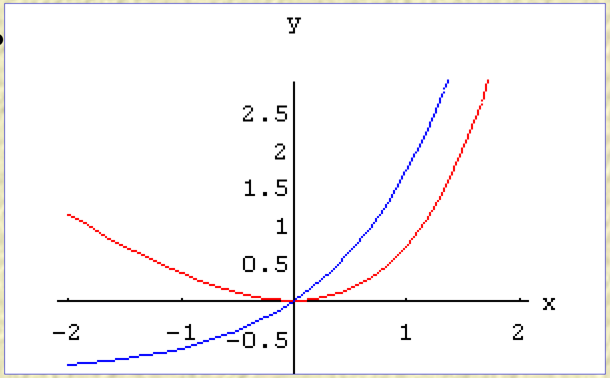
```
x=-2:0.01:2
y=x.^3
plot(x,y,'r*')
grid on
```

注意: 命题(2)的逆命题不一定成立.

如$y=x^3$,此时应分子区间讨论

例1 讨论函数$y=e^x-x-1$的单调性.

解 $\because y'=e^x-1$. 又$\because D:(-\infty,+\infty)$.



在$(-\infty,0)$内, $y'<0$,

$\therefore$函数在$(-\infty,0)$上严格单调减;

在$(0,+\infty)$内, $y'>0$, $\therefore$函数在$(0,\infty)$上严格单调增.

注意:函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

上页 下页 返回

二、单调区间求法

定义:若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

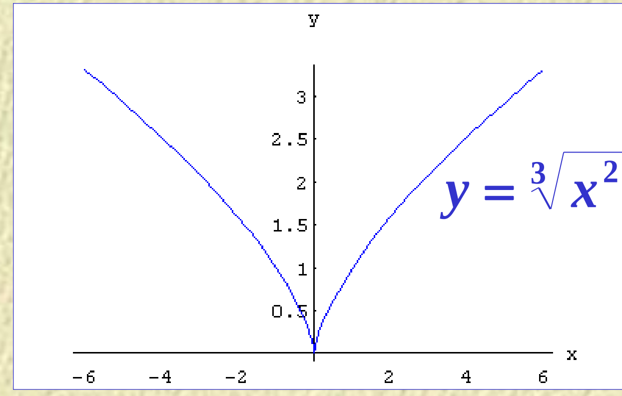
问题:如上例，函数在定义区间上不是单调的，但在各个部分区间上单调.

导数等于零的点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

方法:用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间,然后判断区间内导数的符号.

例2 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty).$



$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad (x\neq 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

当$x=0$时,导数不存在.

当$-\infty<x<0$时，$f'(x)<0$,$\therefore$ 在$(-\infty,0)$上严格单调减;

当$0<x<+\infty$时，$f'(x)>0$,$\therefore$ 在$(0,+\infty)$上严格单调增;

单调减区间为 $(-\infty,0)$,

单调增区间为 $(0,+\infty)$.

上页 下页 返回

例4 当$x>0$时，试证$x>\ln(1+x)$成立.

证 设$f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

$\because$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$(0,+\infty)$可导，$f'(x)>0$,

$\therefore$ 在$[0,+\infty)$上严格单调增 $\because$ $f(0)=0$,

$\therefore$ 当$x>0$时， $x-\ln(1+x)>0$, 即 $x>\ln(1+x)$.

例5 **证明** 当$0 < x < 1$时, $e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$.

证 令$f(x) = e^{2x}(1-x) - (1+x)$,

则 $f'(x) = (1-2x)e^{2x} - 1$, $f''(x) = -4xe^{2x}$,

所以, 当$x \in (0,1)$时, $f'(x)$严格单调减。而$f'(0)=0$,

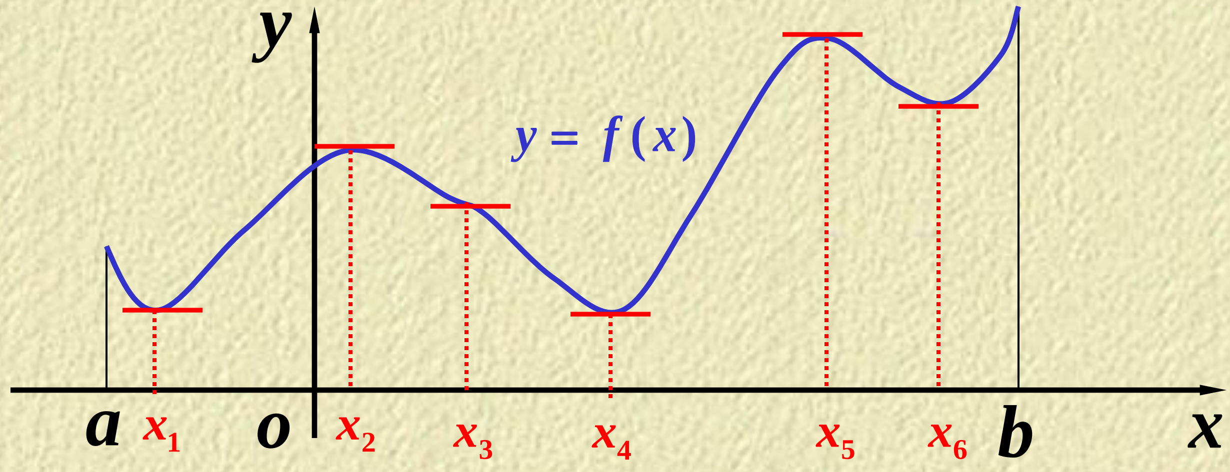
因此 当$x \in (0,1)$时, $f'(x) < f'(0) = 0$.

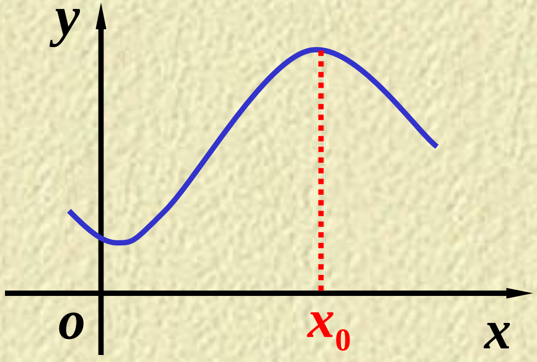
从而 当$x \in (0,1)$时, $f(x) < f(0) = 0$.

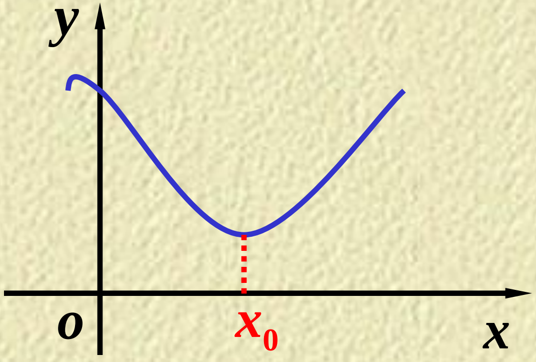
即: 当$x \in (0,1)$时, $e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$.

第二部分 函数的极值

一、函数极值的定义







上页 下页 返回

定义

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内的一个点，

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，$f(x) \le f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值；

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，$f(x) \ge f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值，使函数取得极值的点称为极值点.

二、函数极值的求法

定理1（必要条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点叫做函数 $f(x)$ 的**驻点**.

(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)

注意：可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

例如，$y=x^3$, $y'\big|_{x=0}=0$， 但$x=0$不是极值点.

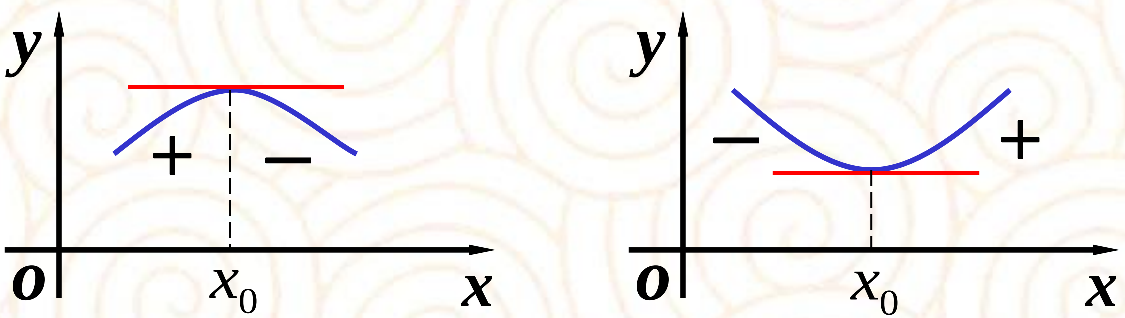
定理6.2(第一充分条件)

设$f(x)$在 x_0的某领域内可导, 且$f'(x_0)=0$

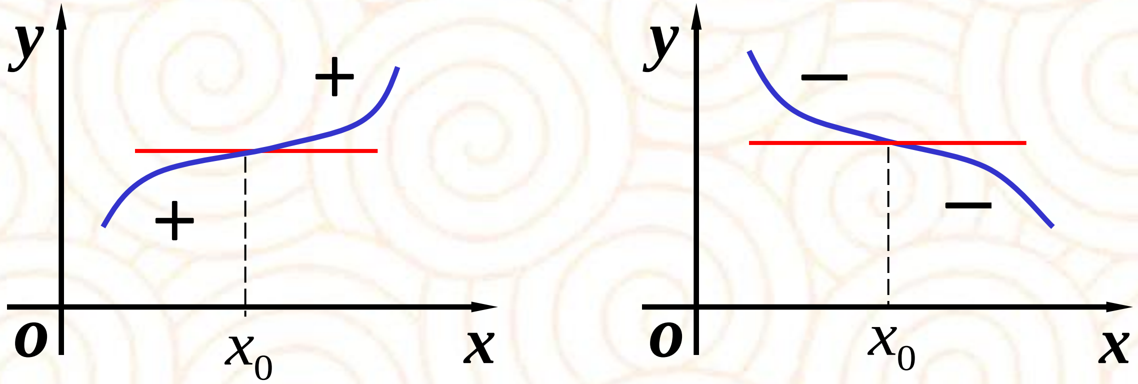
(1) 如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)\geq 0$而$x\in(x_0,x_0+\delta)$,
有 $f'(x)\leq 0$，则 $f(x)$在x_0处取得极大值.

(2) 如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)\leq 0$而$x\in(x_0,x_0+\delta)$
有 $f'(x)\geq 0$，则 $f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 如果当$x\in(x_0-\delta,x_0)$及$x\in(x_0,x_0+\delta)$时, $f'(x)$
符号相同, 则 $f(x)$在x_0处无极值.



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

不可导点也有可能是极值点,如绝对值函数在x=0处

求极值的步骤:

(1) 求$f'(x)$，及不可导的点

(2) 求驻点，即方程 $f'(x)=0$ 的根;

（3）检查不可导的点，和各驻点左右两侧的符号变化情况;

(4) 求极值.

注意:函数的**不可导点**,也可能是函数的**极值点**.

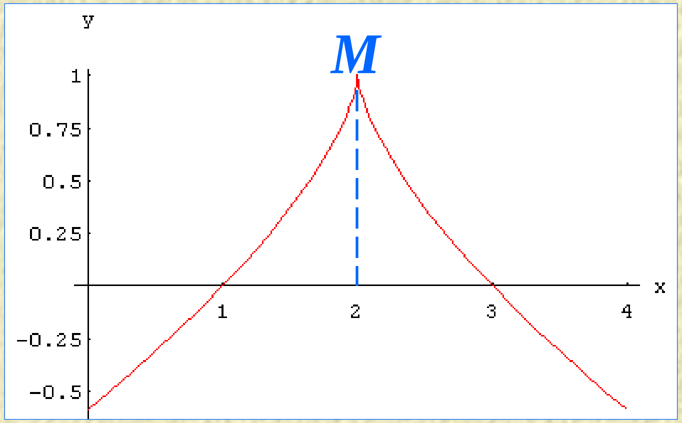
例3 求出函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 $$f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} \quad (x\neq 2)$$

当$x=2$时,$f'(x)$不存在. 但函数$f(x)$在该点连续.

当$x<2$时, $f'(x)>0$;

当$x>2$时, $f'(x)<0$.



$\therefore f(2)=1$为$f(x)$的极大值.

例4 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

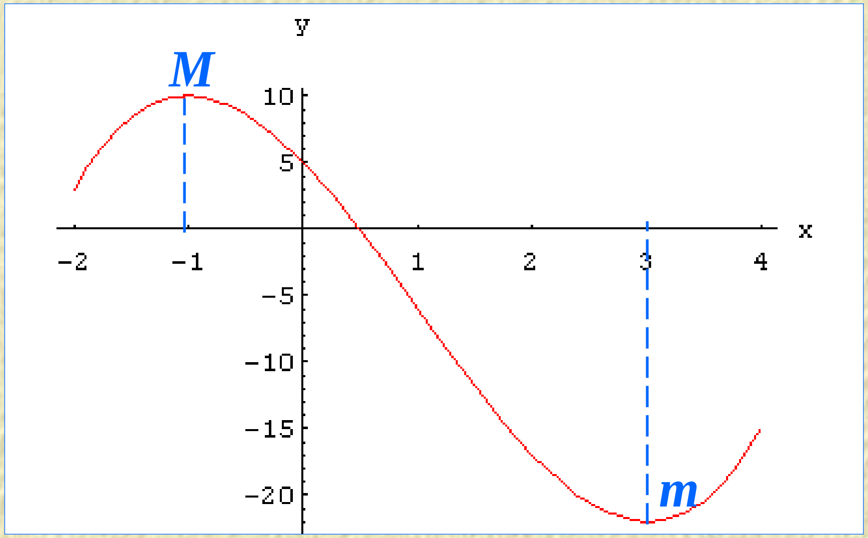
解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

极大值 $f(-1)=10$,

极小值 $f(3)=-22$.



定理6.3(第二充分条件) 设 $f(x)$在 x_0处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$，那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$时，函数 $f(x)$在 x_0处取得极大值

(2) 当 $f''(x_0)>0$时，函数 $f(x)$在 x_0处取得极小值.

证 (1) $\because\ f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0,$

故$\exists U(x_0,\delta)$,使$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx异号，

当$\Delta x<0$时，有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0,$

当$\Delta x>0$时，有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0,$

所以,函数$f(x)$在x_0处取得极大值

(2)同法可证

定理6.4(第三充分条件)

设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导$(n \ge 2)$,并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, 而\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(1) 当n为偶数时, x_0 必为极值点 $\begin{cases} 若f^{(n)}(x_0) > 0, 则x_0为极小值点 \\ 若f^{(n)}(x_0) < 0, 则x_0为极大值点 \end{cases}$

(2) 当n为奇数时, x_0不为极值点.

证: 利用$f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式, 可得

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

当x充分接近 x_0 时, 上式左端正负号由右端第一项确定 , 故结论正确 .

说明: 上述极值的判别法(定理6.2 ~ 定理6.4) 都是充分的.

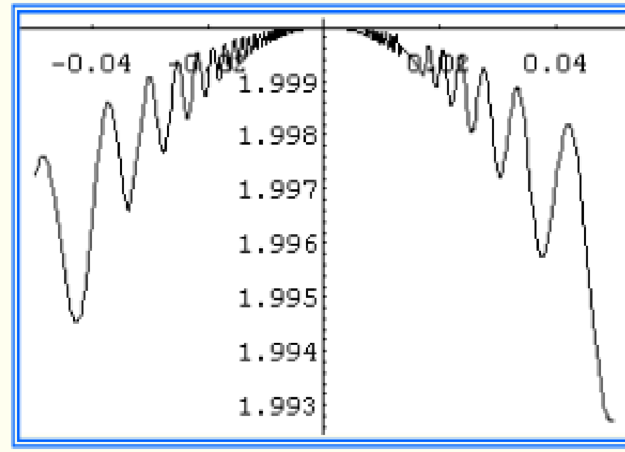
当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

说明：上述极值的判别法都是充分的.

当这些充分条件不满足时，不等于极值不存在.

例如：

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$



$f(0)=2$ 为极大值，但不满足上述定理的条件.

$$f'(0)=0$$

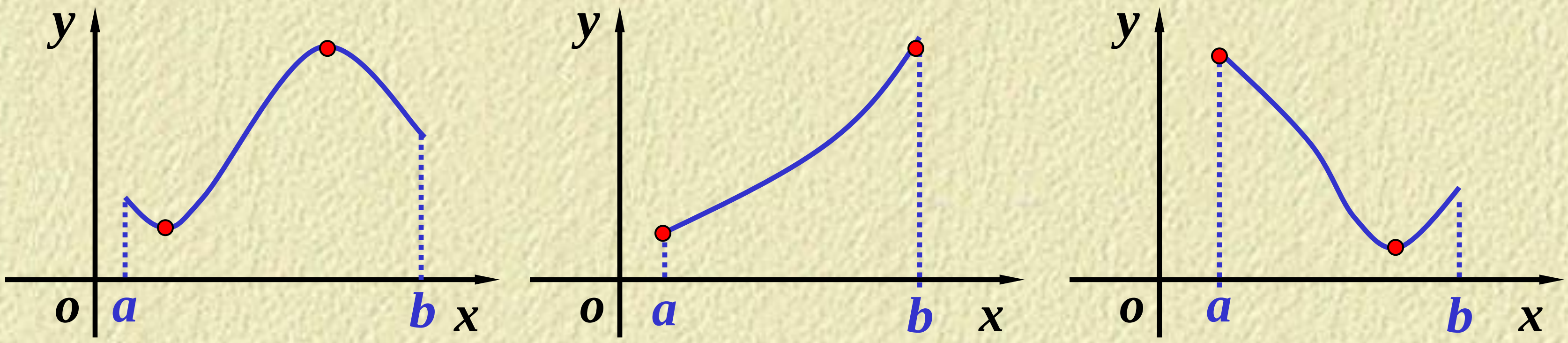
$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\text{不存在}$$

上页 下页 返回

第三部分　函数的最大(小)值

一、最优化问题中最值的求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.



若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.

[a,b]=（a,b）+ {a} + {b}

最值点可能是：极值点（驻点或不可导点），区间端点

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.

[a,b]=（a,b）+ {a} + {b}

最值点可能是：极值点（驻点或不可导点），区间端点

求最值点步骤:

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点、不可导点的函数值,
比较它们的大小,确定最大值和最小值;

注意: 如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.
(最大值或最小值)

上页 下页 返回

二、应用举例

例5 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 在$[-3, 4]$上的最大值与最小值.

解 $\because f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

解方程 $f'(x) = 0$,得 $x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

计算 $f(-3) = 23;$ $f(-2) = 34;$

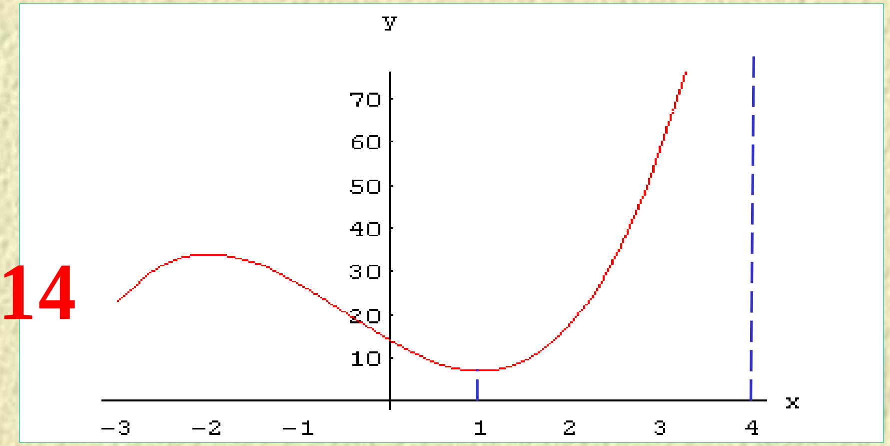
$f(1) = 7;$ $f(4) = 142;$

比较得:

最大值 $f(4) = 142,$

最小值 $f(1) = 7.$

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$



实际问题求最值应注意:

(1)建立目标函数;

(2)求最值;

若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值通常即为所求的最(或最小)值.

例6 某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月180元时，公寓会全部租出去．当租金每月增加10元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费20元的整修维护费．试问房租定为多少可获得最大收入？

例6 某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月180元时，公寓会全部租出去．当租金每月增加10元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费20元的整修维护费．试问房租定为多少可获得最大收入？

解 设房租为每月x元，租出去的房子有 $50-\left(\frac{x-180}{10}\right)$ 套，

每月总收入为 $R(x)=(x-20)\left(50-\frac{x-180}{10}\right)$

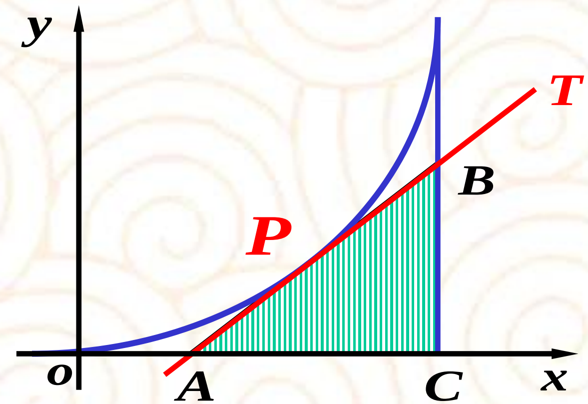
$$R'(x)=\left(68-\frac{x}{10}\right)+(x-20)\left(-\frac{1}{10}\right)=70-\frac{x}{5}$$

$R'(x)=0 \Rightarrow \quad x=350$ （唯一驻点）

故每月每套租金为350元时收入最高。

最大收入为 $R(x)=(350-20)\left(68-\frac{350}{10}\right)=10890\,(\text{元})$

例7 由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$所围成的三角形面积最大.



解 如图，设所求切点为 $P(x_0, y_0)$，

则切线PT为 $y-y_0=2x_0(x-x_0)$，

$\because y_0=x_0^2$，$\therefore A(\frac{1}{2}x_0, \ 0)$，$C(8, \ 0)$，$B(8, \ 16x_0-x_0^2)$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x_0)(16x_0-x_0^2) \quad (0\le x_0\le 8)$$

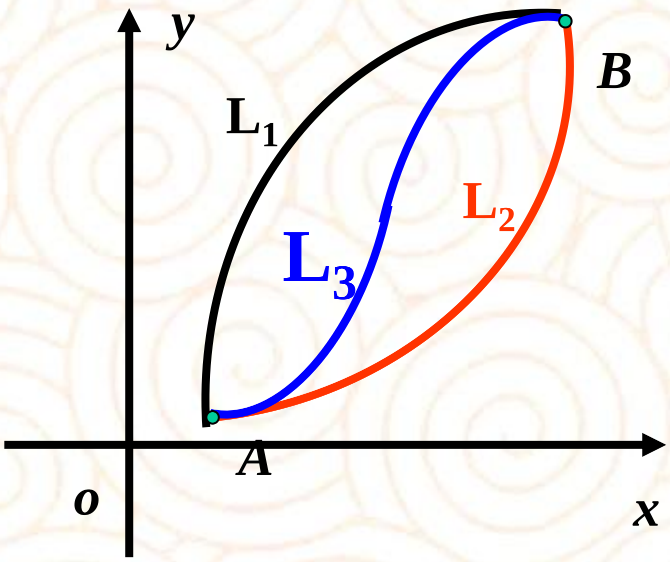
令 $S'=\frac{1}{4}(3x_0^2-64x_0+16\times16)=0$，解得 $x_0=\frac{16}{3}$，$x_0=16$ (舍去).

$\because s''(\frac{16}{3})=-8<0$. $\therefore s(\frac{16}{3})=\frac{4096}{217}$ 为极大值.

故 $s(\frac{16}{3})=\frac{4096}{27}$ 为所有三角形中面积最大的.

函数的单调性和极值，对于了解函数的性态很有帮助，但仅知道单调性还不能比较全面地反映出曲线的性状，还须考虑弯曲方向。

如右图所示, L_1，L_2，L_3 虽然都是从A点单调上升到B点，但它们的弯曲方向却不一样。

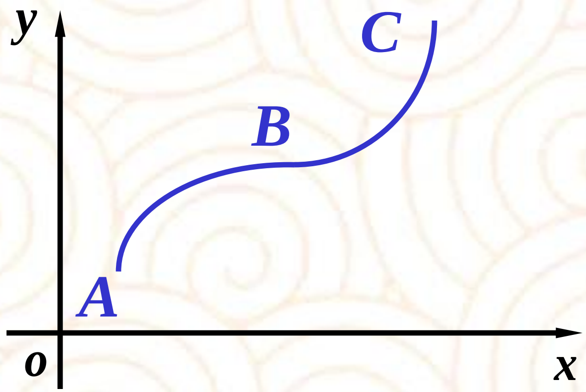


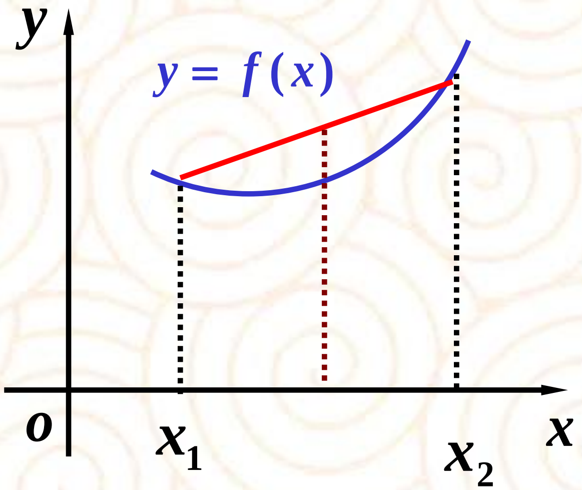
L_1 是“凸”弧，L_2是“凹”弧，L_3 既有凸弧，也有凹弧

第四部分 函数图象的凹凸性与拐点

一、曲线凹凸的定义

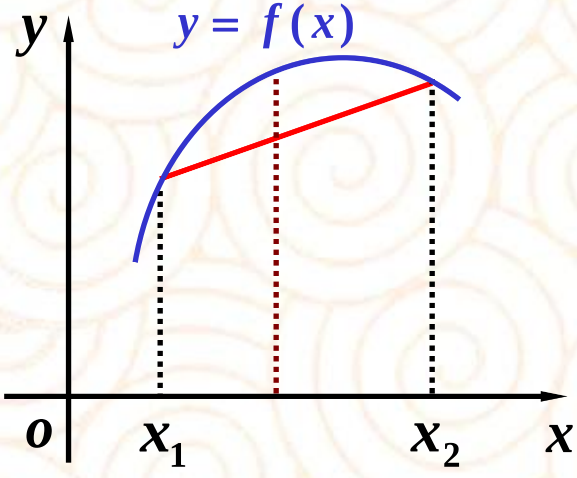
问题:如何研究曲线的弯曲方向?





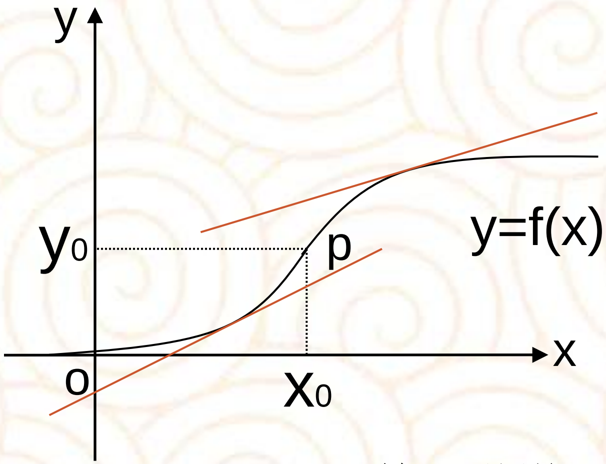
图形上任意弧段位

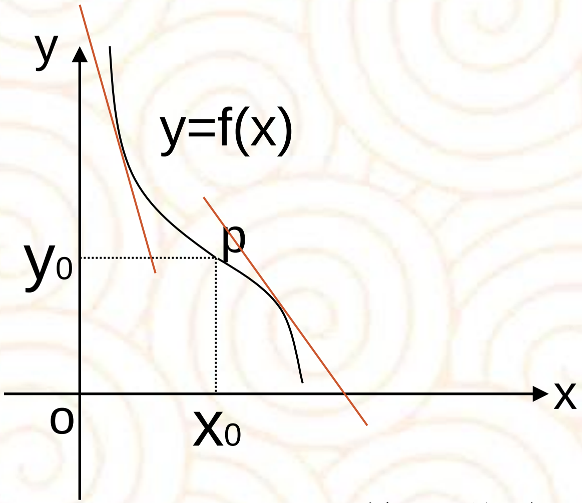
于所张弦的下方



图形上任意弧段位

于所张弦的上方





$K_{切}=f'(x)>0$　y单调递增

$K_{切}=f'(x)<0$　y单调递减

几何特征:

凡呈凹型的弧段其切线总位于曲线的下方.

凡呈凸型的弧段其切线总位于曲线的上方.

连续曲线的凹弧段与凸弧段有分界点.

$$x \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow 0 < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} < 1$$

令$\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$则 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

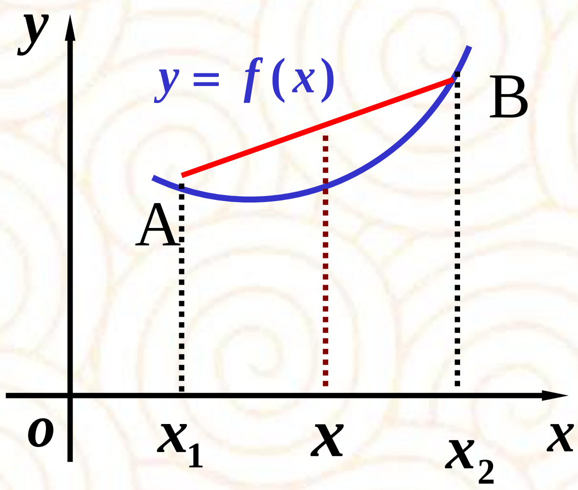
过$A(x_1, f(x_1))$与$B(x_2, f(x_2))$的弦的方程是：

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

$y = f(x)$与弦的方程(函数)在$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

处的值分别是:

$\boxed{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}$ $\boxed{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}$



曲线上任意弧段位于所张弦的下方时，有：

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

定义6.1：函数图象的 凹性：

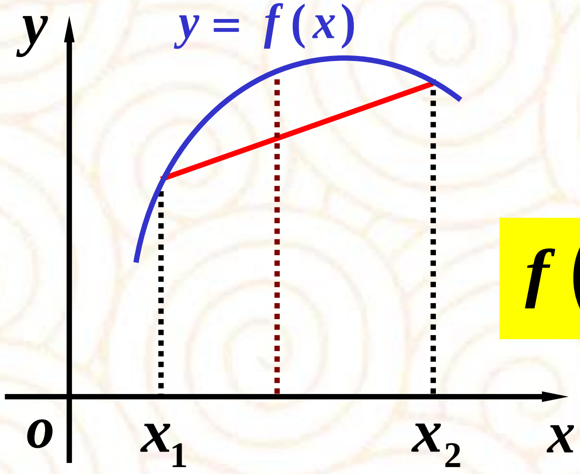
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

设 $f:[a,b]\to \mathbb{R}$.若 $\forall\ x_1, x_2\in[a,b], \forall\lambda\in[0,1]$,

若不等式 $f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图象是凹的.

也称曲线 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.



曲线上任意弧段位于所张弦的上方时，有：

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)>\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$$

定义6.1：函数图象的 凸性：

设$f:[a,b]\to \mathrm{R}$.若$\forall\, x_1, x_2\in[a,b], \forall\lambda\in[0,1]$,

若不等式 $f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)>\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$

恒成立, 则称函数 $f(x)$ **在** $[a,b]$**上的图象是凸的.**

也称曲线 $f(x)$ **在** $[a,b]$**上是凸的.**

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$$

注：1.由定义知，若f是(a,b)内的凸(凹)函数，

则$-f$是(a,b)内的凹(凸)函数，

2. 若当$x\in(a,b)$时，曲线 $y=f(x)$上每一点的切线位于曲线的下(上)方,则称曲线在区间(a,b)内是凹的(凸的).

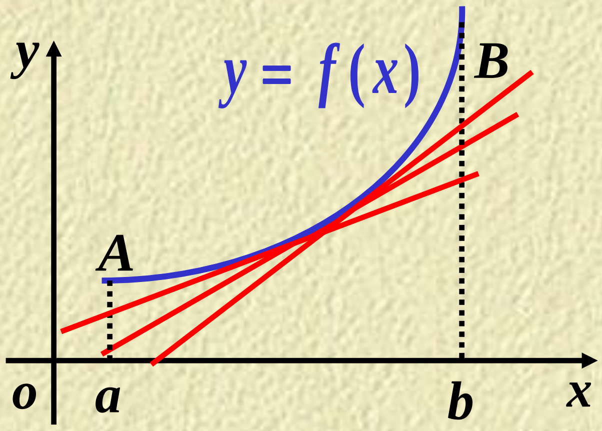
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

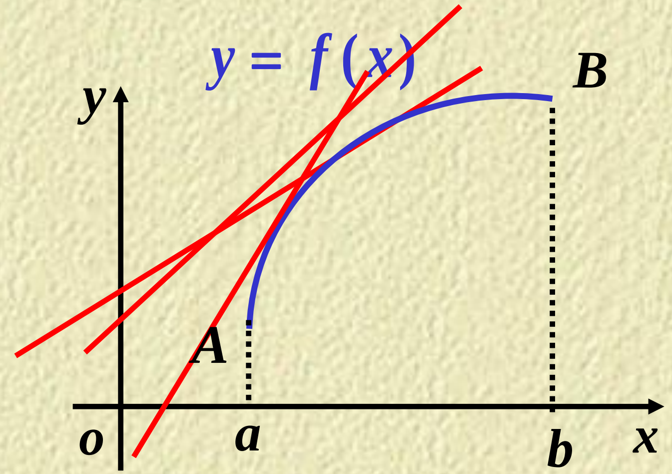
令$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$,则 $\lambda=\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}$

等价于：$\forall x\in(x_1,x_2)$，有

$$f(x)\le\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

二、曲线凹凸的判定





$f'(x)$ 递增　$y''>0$　　　　$f'(x)$ 递减　$y''<0$

定理6.5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，若

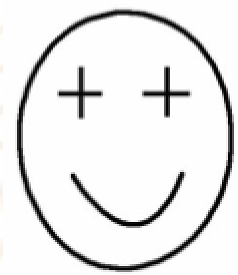
$\forall x\in(a,b)$

(1) $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 是凹的；

(2) $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 上是凸的.

将上述自变量取值范围换为 I 仍成立

二、曲线凹凸的判定



凹图像

凸图像

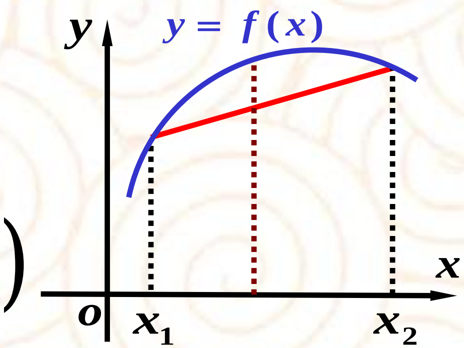
定理6.5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，若

$\forall x \in (a,b)$

(1) $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 是凹的；

(2) $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 上是凸的.

定义6.1: 函数图象的 凸性:



设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. 若 $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$, $\forall \lambda \in [0,1]$,

若不等式 $f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

恒成立，则称函数 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上的图象是凸的.**

也称曲线 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上是凸的.**

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

(2) $f''(x)<0$,则 $f(x)$的图象在$[a,b]$上是凸的.

证明 (2)$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$

记 $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $h = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_0]$, $[x_0,x_2]$ 上

分别应用Lagrange定理，得

$$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi_1)h \quad (x_1<\xi_1<x_0)$$

$$f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)h \quad (x_0<\xi_2<x_2)$$

两式相减，得

$$2f(x_0)-[f(x_1)+f(x_2)]=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]h$$

两式相减，得

$$2f(x_0)-[f(x_1)+f(x_2)]=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]h$$

由假设 $f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$内单调减

由$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)-f'(\xi_2)>0$

$$\boxed{\Rightarrow\quad 2f(x_0)-[f(x_1)+f(x_2)]>0}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

即 $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

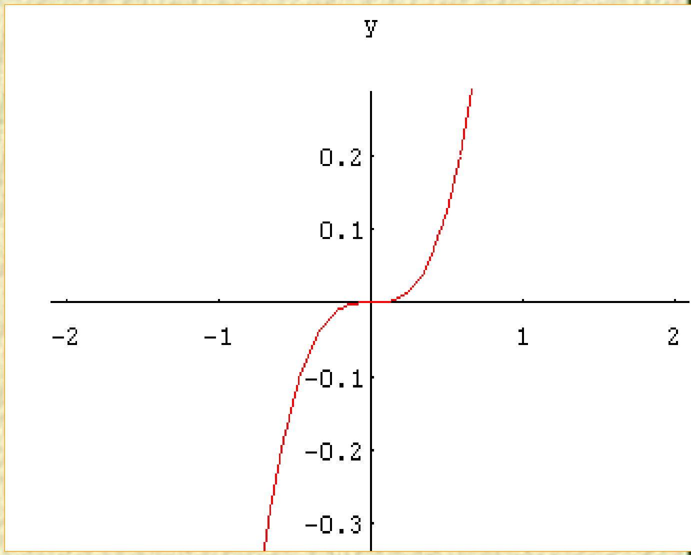
这就证明了 $f(x)$的图象在(a,b)内是凸的

同理可证（1）

凸图像

注 定理的结论可推广到任意区间 I上

例8 判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.



解 $\because\ y' = 3x^2,\quad y'' = 6x,$

当$x < 0$时，$y'' < 0,$

$\therefore$ 曲线在区间$(-\infty, 0)$为凸的;

当$x > 0$时，$y'' > 0, \therefore$ 曲线在区间$(0, +\infty)$为凹的;

注意到，**点$(0, 0)$是曲线由凹变凸的分界点.**

上页 下页 返回

三、曲线的拐点及其求法

1. 定义 连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点**.

2. 拐点的求法

定理 如果 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在二阶导数, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的**必要条件**是 $f''(x_0)=0$.

证 $\because f(x)$ 二阶可导, $\therefore f'(x)$ 存在且连续,

又 $\because (x_0, f(x_0))$ 是拐点,

则 $f''(x)=[f'(x)]'$ 在 x_0 两边变号,

$\therefore f'(x)$ 在 x_0 取得极值, 由可导函数取得极值的条件,

$\therefore f''(x)=0.$

注1: $f''(x_0)=0$ 时, x_0 不一定是 $f(x)$ 的拐点

$y=x^4$, $\quad y'\big|_{x=0}=0, y''\big|_{x=0}=0$, 但 $(0,0)$ 不是拐点.

注1: $f''(x_0)=0$时, x_0不一定是 $f(x)$的拐点

$y=x^4$, $y'|_{x=0}=0, y''|_{x=0}=0$, 但$(0,0)$不是拐点.

注2: 设$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geq 1\\ -\ln x, & 0<x<1\end{cases}$,

则 $x\geq 1$时, $f'(x)=\dfrac{1}{x}, f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0$, 凸

$0<x<1$时, $f'(x)=\dfrac{-1}{x}, f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$, 凹

$\therefore (1,0)$是拐点,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\ln[1+(x-1)]=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}(x-1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-\ln x-\ln 1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x-1}\ln[1+(x-1)]=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x-1}(x-1)=-1$$

但 $f(x)$在$x=1$处不可导, 更不满足$f''(x)=0$.

一阶导数不存在的点，有可能是极值点，
同样，二阶导数不存在的点，有可能是拐点， 只要该点两侧二阶导数变号，即使该点处二阶导数不存在，也可能是拐点。

注3: 若 $f''(x_0)$ 不存在，点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$处.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, \quad (x \neq 0)$$

$x = 0$是不可导点，y', y''均不存在.

但在$(-\infty, 0)$内，$x < 0$, $f''(x) > 0$ 凹

在$(0, +\infty)$内， $x > 0$, $f''(x) < 0$ 凸

$\therefore$ 点$(0,0)$是曲线 $y = \sqrt[3]{x}$的拐点，但二阶导数不存在.

找拐点方法1：

设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导，且$f''(x_0) = 0$，

(1) 在x_0两侧$f''(x)$变号，点$(x_0, f(x_0))$即为拐点；

(2) 在x_0两侧$f''(x)$不变号，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

例14

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间

例9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间

解 $\because D:(-\infty,+\infty)$

$$y' = 12x^3 - 12x^2, \quad y'' = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

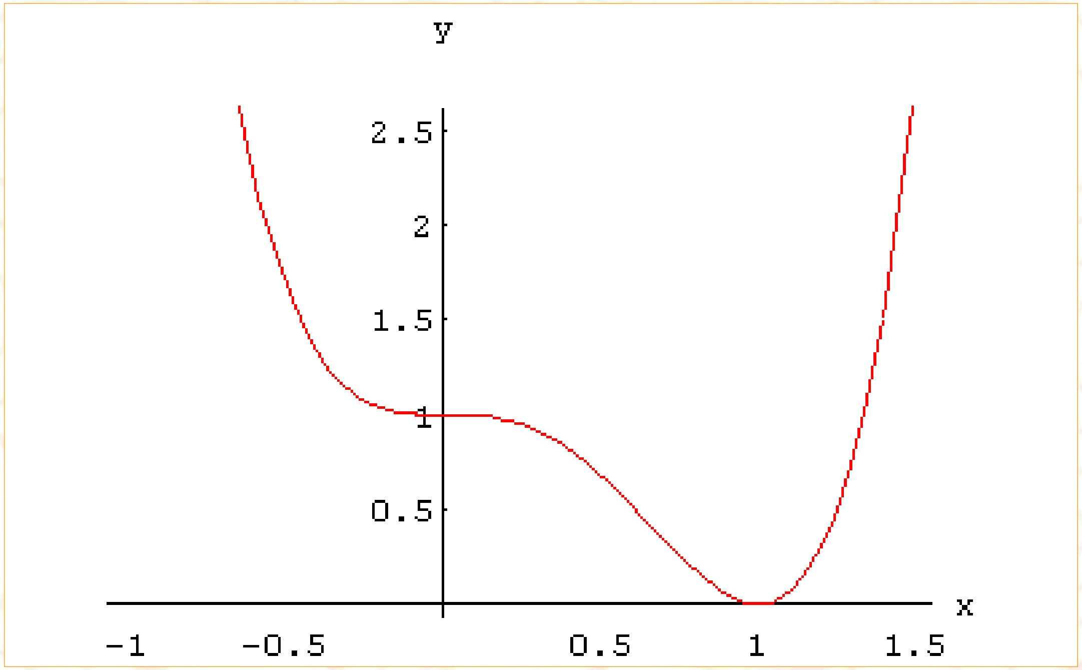
令$y'' = 0$, 得 $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹	拐点 $(0,1)$	凸	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	凹

凹区间为 $(-\infty,0),(\frac{2}{3},+\infty)$. 凸区间为 $(0,\frac{2}{3})$.

例9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间



x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹	拐点 $(0,1)$	凸	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	凹

方法2: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

方法2: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例15 求曲线 $y=\sin x+\cos x$ 在$(0,2\pi)$内的拐点.

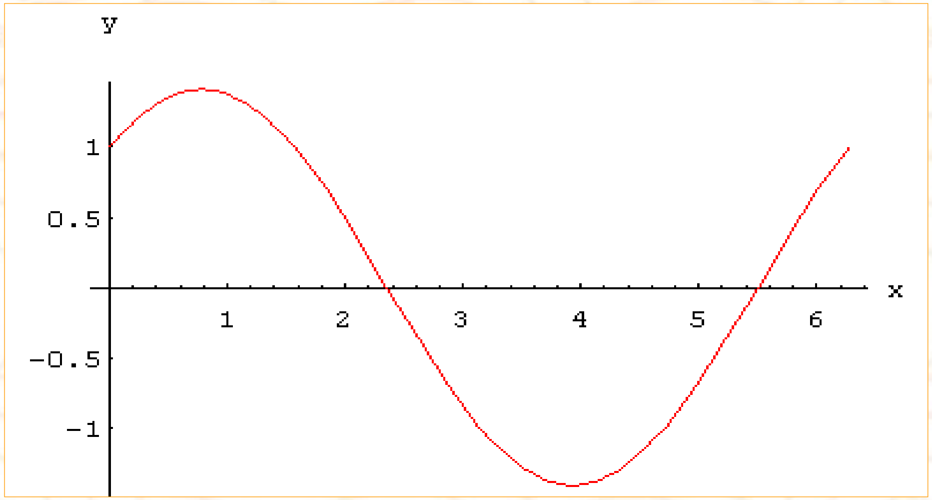
解 $y'=\cos x-\sin x$, $\quad y''=-\sin x-\cos x$,

$y'''=-\cos x+\sin x$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=\dfrac{3\pi}{4}$, $\quad x_2=\dfrac{7\pi}{4}$.

$$f'''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\neq 0,\quad f'''\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\neq 0,$$

$\therefore$ 在$[0,2\pi]$内曲线有拐点为:

$$\left(\frac{3\pi}{4},0\right),\quad \left(\frac{7\pi}{4},0\right).$$



方法2: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

曲线$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是（　　）

A.(1,0)　　B.(2,0)　　C.(3,0)　　D.(4,0)

$\because y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$含有$(x-3)^3$，故

$y''(3)=0$，$y'''(3)\neq 0$，应选（C）

关于渐近线

曲线 $y=f(x)$ 上一点M沿曲线无限远离原点或无限接近间断点时，如果M到一条直线L的距离趋近零，则这条直线L称为该曲线的渐近线。可分为垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线。

$$\lim_{x\to\infty(\pm\infty)} f\left(x\right)=y_0 \qquad y=y_0 \text{ 是水平渐近线}$$

$$\lim_{x\to c} f\left(x\right)=\infty(\pm\infty) \qquad x=c \text{ 是垂直渐近线}$$

斜渐近线方程为: $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

求曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}$$

斜渐近线方程为: $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$

斜渐近线方程为: $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

思考题1 如果x_0为$f(x)$的极小值点，那么必存在x_0的某邻域，在此邻域内，$f(x)$在x_0的左侧下降，而在x_0的右侧上升？

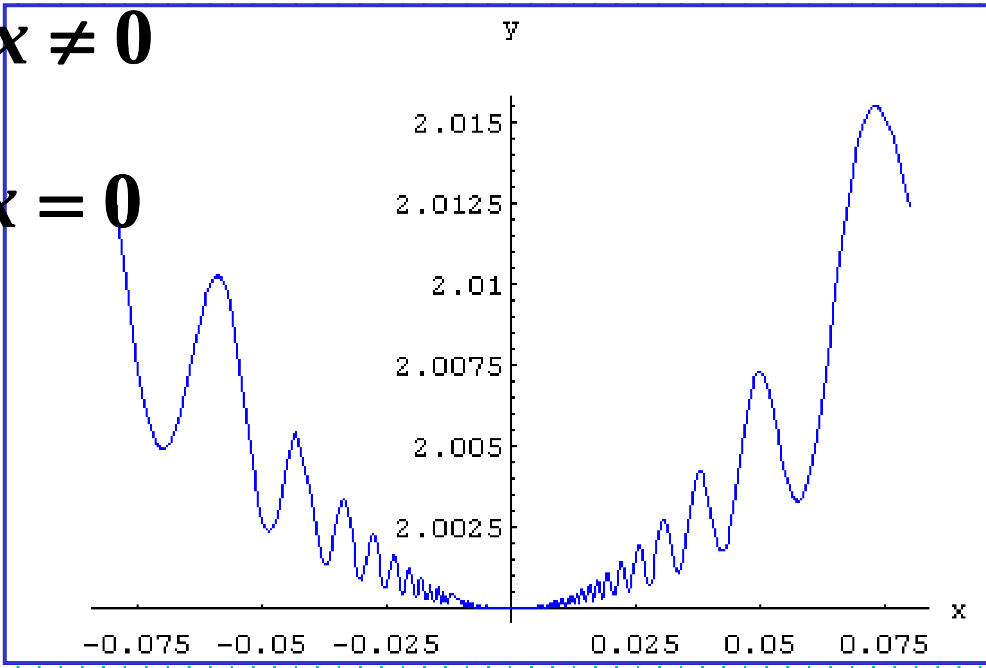
不正确.

例 $$f(x)=\begin{cases} 2+x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

当$x\neq 0$时，$f(x)-f(0)=x^2(2+\sin\frac{1}{x})>0$

于是$x=0$为$f(x)$的极小值点

$$f(x)=\begin{cases}2+x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$



当$x\neq 0$时,

$$f'(x)=2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}$$

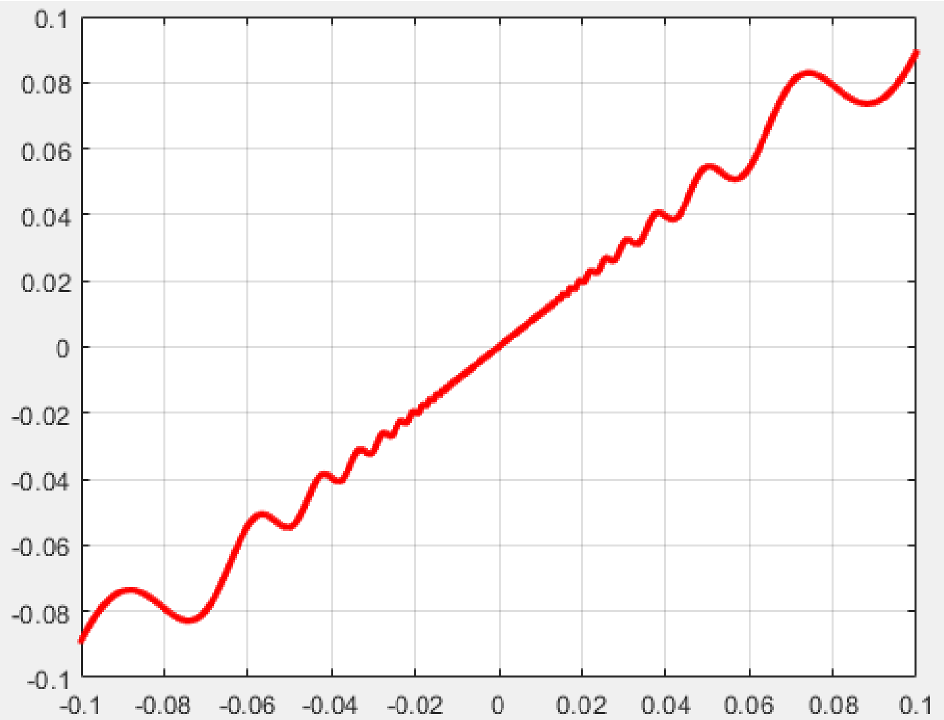
当$x\to 0$时,

$2x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)\to 0,\quad \cos\dfrac{1}{x}$ 在-1和1之间振荡

因而$f(x)$在$x=0$的两侧都不单调.

故命题不成立.

思考题2 $f'(x_0)>0$,是否可断定$f(x)$在x_0的某邻域内单调增?



$$(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

$f'(0)=1>0$

```
x=-0.1:0.00001:0.1;
y=x+2.*x.^2.*sin(1./x);
plot(x,y,'r.')
grid on
```

但在$x=0$的任何邻域内$f'(x)$都可正可负,

故在$x=0$的任何邻域内$f(x)$都非单调增.

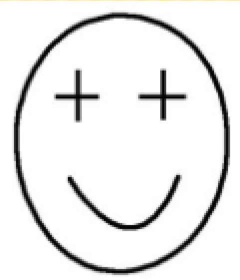
- 如果函数二阶可导，则相邻的两个极值点之间一定至少有一个拐点。

定理6.5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导, 若

$\forall x\in(a,b)$

(1) $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 是凹的;

(2) $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 上是凸的.



凹图像

凸图像

实际上，设极值点为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$ ，则

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0$$

如二阶导数在 $[x_1, x_2]$ 内不变号，则一阶导数单调, 无论单调增或单调减，$f'\left(x_2\right)=0$ 都是不可能的，

这与 x_2 是极值点，$f'(x_2)=0$ 矛盾。

例10 讨论函数

$f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的各种性态，并画出它的草图.

解 **定义域为:** $x\neq 1, x\in R$. **因为** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$

所以 $y=0$ (x轴)为水平渐近线.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty.$

所以 $x=1$为铅直渐近线.

且 当$x<\dfrac{1}{2}$时, $y<0$; 当$x>\dfrac{1}{2}$时, $y>0$.

上页 下页 返回

例10 讨论 $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的各种性态,并画图.

又 $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}$, 得驻点为: $x=0$ 且为极小值点.

又 $f''(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$, 得拐点为: $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{8}{9}\right)$. 列表如下

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
$f(x)$	↘	拐点	↘	极小值	↗	间断	↘

上页 下页 返回

例10 讨论函数

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$的各种性态,并画出它的草图.