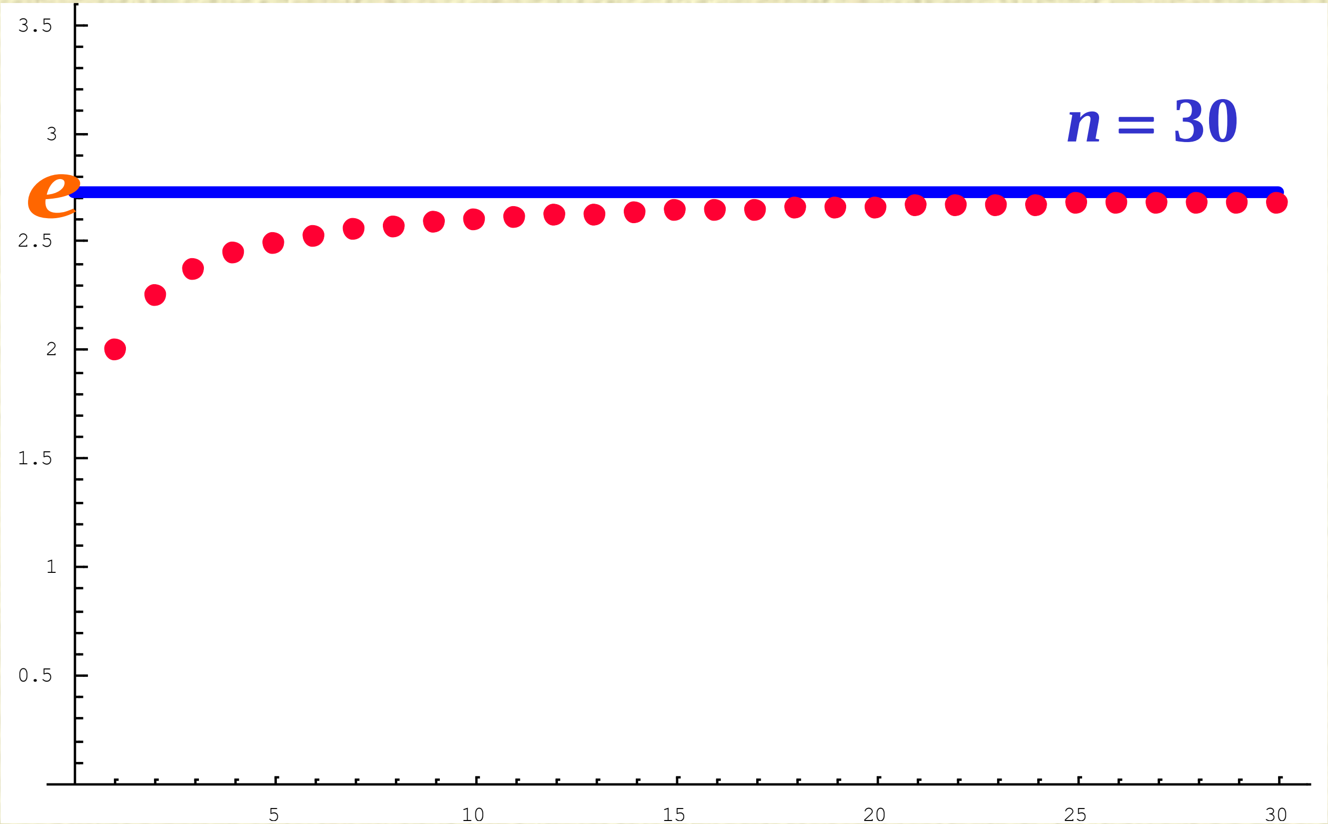
所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{存在}}{\underset{\text{记作}}{=\!=}} e$

$$e = 2.71828128459\cdots$$



® (1) 这是有理数列的极限是无理数的重要例子，它说明了有理数集对于极限运算是不封闭的，极限理论必须在实数范围内研究。（实数完备性）

(2) 可以解决一大批类似极限问题。

例10　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

子数列与数列极限的归并原理

子数列（子列）**subsequence**

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项

在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序,这样得到的一个数

列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列 (或子列).

如，$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_n, \cdots$ 记做：

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots \qquad \{a_{n_k}\}: a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

注意： 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第k项，而 x_{n_k}

在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项, 显然, $n_k \geq k$.若$j \geq k$，则$n_j \geq n_k$.

收敛数列的任一子数列收敛，且极限值与原数列相同.

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon.$

取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, $n_k > n_K = n_N \geq N.$

$\therefore |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$ $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$ 证毕.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0,$ 使 $k > K$ 时,恒有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$

定理2.7（归并原理）aggregation principle

设$\{a_{n_k}\}$为任一子列，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$$

主要利用它的逆否命题判断数列的发散性。

说明　1. 有一个子数列发散$\Rightarrow$ 数列发散

2. 若有两个子列收敛于两个不同的极限值，则数列发散.如$\{(-1)^n\}$

$$1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$$

3. 发散数列也可能有收敛的子列.

说明　1. 有一个子数列发散$\Rightarrow$ 数列发散

2. 若有两个子列收敛于两个不同的极限值，则数列发散.如$\{(-1)^n\}$

$$1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$$

3. 发散数列也可能有收敛的子列.

4.对数列增删有限项,不影响数列极限的存在性,

也不影响极限值. (删后得到一子列，增时可将N调大)

5. 若奇数项和偶数项组成的二个子列收敛于同一极限，则原数列收敛。

定理2.8（闭区间套定理） Nested intervals theorem

$a_n, b_n \in R,\ n=1,2,\cdots$ 设闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$满足如下条件：

1. $[a_n,\ b_n] \supset [a_{n+1},\ b_{n+1}]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则称$\{[a_n, b_n]\}$为闭区间套, 简称区间套.

(区间套定理) 若$\{[a_n, b_n]\}$是一个区间套,

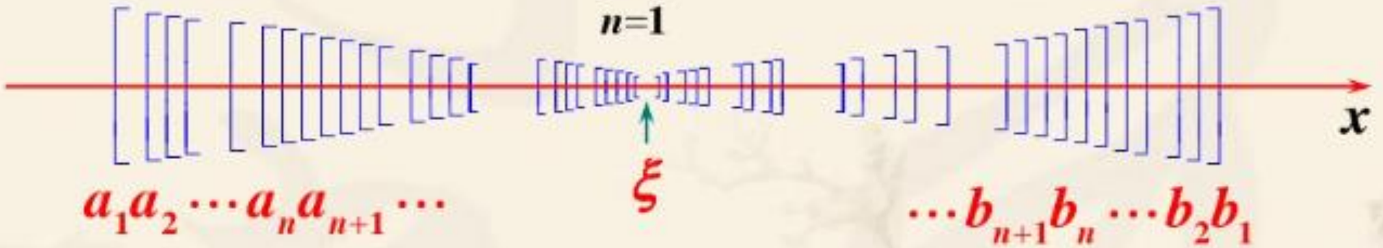
则存在唯一的实数ξ, 使

$$\xi \in [a_n, b_n],\ n=1, 2, \cdots,$$

或者

$$\{\xi\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$$

闭区间套必有唯一的公共点



证　数列$\{a_n\}$递增，有上界b_1，故收敛.

设 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，可得

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = \xi.$$

因为 $\{a_n\}$ 递增，$\{b_n\}$ 递减，所以

$$a_n \le \xi \le b_n,$$

这样就证明了ξ 的存在性.

下面来证明唯一性. 设 ξ_1 也满足

$$a_n \le \xi_1 \le b_n,$$

那么$|\xi - \xi_1| \le b_n - a_n \to 0$. 即 $\xi = \xi_1$，惟一性得证.

闭区间套定理

若$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，则在实数域中存在唯一的点ξ,使$\xi \in [a_n,b_n], n=1,2,\cdots$

闭区间套定理在有理数域内不成立。

反例：取单调递增有理数列$\{a_n\}$,使$a_n \to \sqrt{2}$,

取单调递减有理数列$\{b_n\}$,使$b_n \to \sqrt{2}$,

则 有理数域内构成闭区间套 $[a_n,b_n]_Q$,

其在实数域内唯一的公共点为$\sqrt{2} \notin Q$.

举例说明闭区间套定理中将闭区间换成开区间结论不成立。

如 $\{(0,\frac{1}{n})\}$是前一个包含后一个，且$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-0)=0$,

但不存在属于所有开区间的公共点。

定理2.9（weierstrass定理）有界实数列必有收敛子列

证 因$\{x_n\}$为有界实数列，故存在$M>0$,

使$x_n\subset[-M,M]$,令$[a_1,b_1]=[-M,M]$

等分$[a_1,b_1]$为两个子区间．两个子区间中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多个点，记此子区间为$[a_2,b_2]$

则$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$且$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=M$

再将$[a_2,b_2]$等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间含有x_n中无穷多个点，取出这样的一个子区间，记为$[a_3,b_3]$

则$[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]$，且$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M}{2}$

无限地进行下去，得到一个区间列，它满足$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$

$$b_n-a_n=\frac{M}{2^{n-1}}\to 0(n\to\infty)$$

因此得一闭区间套. 由闭区间套定理知，

$$\exists\text{唯一}\xi\in\mathbf{R},\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]=\{\xi\}$$

可在每个区间$[a_k,b_k]$上任取$\{x_n\}$的一项x_{n_k}，

使$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，且$a_k\le x_{n_k}\le b_k$

由夹逼定理知，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

极限点 -------数列的任一收敛子列的极限

该定理虽然没有给出判断数列收敛的方法，但下面的 **Cauchy**定理告诉我们，若这个数列是**Cauchy数列**，则子列的极限点就是数列的极限

Cauchy数列

$\{a_n\}$为一实数列，$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$，

使得$\forall m, n > N$，恒有$|a_m - a_n| < \varepsilon$.

称$\{a_n\}$为*Cauchy*数列

Cauchy数列必有界，故有收敛的子列

Cauchy数列必有界，Why?

Cauchy收敛原理

定理2.10 （1) **Cauchy's convergence principle**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得} \forall m, n > N,$$

$$\text{恒有} |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

证明 $\Rightarrow$ 由极限定义可证.

$\Leftarrow$ $\because$ *cauchy*数列有界 $\therefore$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$

$$\therefore \quad \forall \varepsilon > 0, \exists K \in N+, \text{使 } k > K \text{ 时, 恒有 } |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\exists N_1 \in N+, \text{使 } \forall m, n > N_1 \text{ 时, 恒有 } |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N = \max\{K, N_1\}$, 则当$\forall n > N$ 时,

$$|a_n - a| < |a_n - a_{n_{N+1}}| + |a_{n_{N+1}} - a| < \varepsilon. \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Cauchy收敛原理

定理2.10 （1) **Cauchy's convergence principle**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall m, n > N, \text{恒有} |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(2) *Cauchy* 收敛原理的等价形式:

$$\boxed{\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \text{使得} \forall n > N, \text{及} \forall p \in N_+, \\ \text{恒有：} |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \iff \{a_n\}\text{收敛。}\end{gathered}}$$

(3) 还可以证明数列极限不存在。

$\{a_n\}$不收敛 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in N_+, \exists m, n > N, \text{使} \left|a_m - a_n\right| \geq \varepsilon_0}$$

或

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in N_+, \exists n > N,$

及 $\exists p \in N_+$, 使 $\left|a_{n+p} - a_n\right| \geq \varepsilon_0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得 $\forall m, n > N$, 恒有 $\left|a_m - a_n\right| < \varepsilon$.

例 证明：$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ 收敛。

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = ?\ ,$ 使得只要 $n > N$,

$$\forall p \in N_+, \ \left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n+p}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!}$$

$$< \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)}$$

证明：$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ 收敛。

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$\forall \varepsilon>0, \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，使得$\forall n>N$，及$\forall p\in N_{+}$，

恒有：$\left|a_{n+p}-a_{n}\right|<\varepsilon$，$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$收敛。

根据 **Cauchy** 收敛原理，知

数列 $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 收敛。

柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 .他是经典分析的奠人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.

例 证明：数列 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 发散。

$\exists\varepsilon_0>0, \forall N\in N_+, \exists\, n>N,$

及 $\exists p\in N_+$, 使 $\left|a_{n+p}-a_n\right|\ge\varepsilon_0$

分析:

$\left|a_{n+p}-a_n\right| = \left|a_{2n}-a_n\right|$

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ge\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+$, 使得 $\forall n>N$, 及 $\forall p\in N_+$,

恒有：$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$收敛。

证 $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}, \quad \forall N \in N_+, \exists n > N,$

$$\exists \ p = n \in N_+,$$

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|a_{2n} - a_n\right|$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

故$\{a_n\}$发散。

例12 证明：数列 $a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

$$\because \left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right], \forall p \in \mathbf{N}_+, \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon,$$

由Cauchy原理知,$\{a_n\}$收敛.

小结

“$\varepsilon - N$” 定义 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,$

使 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$

收敛数列的性质：

(1)唯一性　(2)有界性　(3)保号性

(4)保序性　(5)有理运算法则

确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界准则 $\Rightarrow$ Weierstrass定理

$\Downarrow$

Cauchy收敛原理

闭区间套定理

练 习 题

一、利用数列极限的定义证明:

1、$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

2、$\lim_{n\to\infty}0.999\ldots9=1$

二、设数列 x_n 有界，又 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，

证明：$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n} = a.$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a. \forall \varepsilon > 0, \exists N_1, n > N_1$时, $| x_n - a | < \varepsilon.$

记 $y_n = \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n}$

记 $Q = | x_1 - a | + | x_2 - a | + \cdots + | x_{N_1} - a |, N = \max\left\{ N_1, \left[\dfrac{Q}{\varepsilon}\right] \right\},$

则当 $n > N$时, $| y_n - a | < \dfrac{Q}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

分析 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, n > N_1$时,$|x_n - a| < \varepsilon$.

记 $y_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$,要证$\exists N, n > N$时,$|y_n - a| < \varepsilon$(或$k\varepsilon_2, k > 0$).

故先分析$|x_n - a|$与$|y_n - a|$的关系.

$$|y_n - a| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(x_1 - a) + \cdots + (x_n - a)}{n}\right|$$

$$< \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{|x_{N_1+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}$$

$$< \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \left(\frac{n - N_1}{n}\right)\varepsilon < \frac{Q}{n} + \varepsilon$$

($Q = |x_1 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|$为定数)

故只要再使$\dfrac{Q}{n} < \varepsilon$,就有$|y_n - a| < 2\varepsilon$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a.$

证： $\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N_1$ 当 $n > N_1$ 时 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$

$\left|\frac{1}{n}(a_1 + a_2 +\right.$ [redacted]

$$\le \frac{1}{n}(|a_1 - a| + \cdots |a_{N_1} - a| + |a_{N_1+1} - a| \cdots + |a_n - a|)$$

$$= \frac{|a_1 - a| + \cdots |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} - a| \cdots + |a_n - a|}{n}$$

$$< \frac{|a_1 - a| + \cdots |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{(n - N_1)\varepsilon}{2n}$$

$$< \frac{|a_1 - a| + \cdots |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Cauchy
第一定理

$$又\because \lim_{n\to\infty}\frac{|a_1-a|+\cdots|a_{N_1}-a|}{n}=0,$$

$$\therefore 对上述\varepsilon>0\ \exists N_2,当n>N_2时,\frac{|a_1-a|+\cdots|a_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时

$$\left|\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Stolz定理的特殊形式

定理($\dfrac{\infty}{\infty}$型$Stolz$公式)

设$\{x_n\}$严格递增(即$\forall n\in\mathrm{N}$有$x_n<x_{n+1}$),且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$(其中$a$为有限数,$+\infty$或$-\infty$)

注意：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,

在$Stolz$定理中设$x_n=n, y_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

因$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

故$Stolz$定理是它的推广形式.

例13 证明: $\forall a \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

证 若 $a = 0$, 显然结论成立。

若 $a < 0$, 由于 $-\dfrac{|a^n|}{n!} \le \dfrac{a^n}{n!} \le \dfrac{|a^n|}{n!}$,

则用夹逼定理有可能得证, 故只需看 $a > 0$.

当 $a > 0$, 记 $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, 则 $u_{n+1} = \dfrac{a}{n+1} u_n$,

于是对充分大的 n，应有 $\frac{a}{n+1} < 1$,

$\therefore u_{n+1} \le u_n$,

即$\{u_n\}$是单调减的，又 $u_n > 0\ (\forall n)$,

$\therefore \{u_n\}$是单调减有下界的，故$\{u_n\}$收敛

设$\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = r$，在$u_{n+1} = \frac{a}{n+1} u_n$式中,

令$n \to \infty$，得 $r = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

例 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

例 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $x_1>0$，$a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

例 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}$

例 设 $a_1=1, a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}+1}, (n=2,3,\cdots)$

判定其敛散性，若收敛，求极限.