彭·高数

高等数学上期末答案详解

（2022 版）

彭康书院学业辅导与发展中心

← 彭小帮2.0

← 397499749

2021 年期末试题解析

1 选择题

1.1 D.

令 $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}$, $g(x)=\sqrt{x^2+3}$, 则 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$, 且

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

1.2 C.

令 $f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{\mathrm{d}t}-\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{\sin x-1}{x}\leq 0$. 即 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\ln x\right]=+\infty,\ f(1)=0$$

故在 $(0,1)$ 上 $f(x)>0$.

1.3 A.

设 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 则

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$$

故 $h(x)$ 在 (a,b) 上单调递减, 有 $h(b)<h(x)<h(a)$, 即

$$\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{g(a)}$$

于是 $f(x)g(a)<f(a)g(x)$.

1.4 B.

因为

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

又 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

1.5 C.

因为

$$\int_0^x xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)\,|_0^x-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中红色部分代表矩形 $OBAC$ 的面积, 蓝色部分代表曲边梯形 $OBAD$ 的面积. 故原式代表曲边三角形 ACD 的面积.

2 填空题

2.1 e^{x+1}.

因为

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}\cdot(x+2)\cdot\frac{n}{n-2}} \\ &= \mathrm{e}^{x+2} \end{aligned}$$

于是 $f(x)=\mathrm{e}^{x+1}$.

2.2 $\dfrac{5}{2}$.

因为

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>2 \\ a+\dfrac{3}{2}, & x=2 \\ ax-1, & x<2 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{2}$.

2.3 3.

因为

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}f'(x) \\ &= f'(x)\sin x\mid_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\,\mathrm{d}\sin x \\ &= -\int_0^\pi f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -f(x)\cos x\mid_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}\cos x \\ &= f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= f(\pi)+f(0) \end{aligned}$$

故 $f(\pi)+f(0)=5$, $f(0)=3$.

2.4 $4x\left(\mathrm{e}^{-x^4}+6\right)$.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}f'(x+\alpha)+f'(x-\alpha)=2f'(x)=4x\left(\mathrm{e}^{-x^4}+6\right)$$

2.5 $\dfrac{1}{p+1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^p\\&=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

3 计算题

3.1 对原式泰勒展开, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x-x^2}{(\mathrm{e}^x-1)\sin^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x}\\&=\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x}\\&=\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

3.2 容易发现 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且在 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 可导, 故只需考虑分段点处的情况.

若使 f 在 $x=0$ 处可导, 则 f 在 $x=0$ 处连续, 有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$. 又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x+2a\mathrm{e}^x=2a \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}9\arctan x+2b(x-1)^3=-2b \tag{2}$$

由 (1), (2) 可得 $a=-b$.

因为 f 在 $x=0$ 处可导, 有 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x+2a\mathrm{e}^x-2a}{x}=2a+1 \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{9 \arctan x + 2b(x-1)^3 + 2b}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{9 \arctan x + 2b \cdot x \cdot \left[(x-1)^2 - (x-1) + 1\right]}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} 9 + 2b \cdot (x^2 - 3x + 3) = 9 + 6b
\end{aligned} \tag{4}
$$

即 $2a + 1 = 9 + 6b$, 解得 $a = 1, b = -1$.

3.3 因为 $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+x^2}$, 解得驻点为 $x = \pm 1$. 又 $f''(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$, 拐点为 $x = 0$.

故

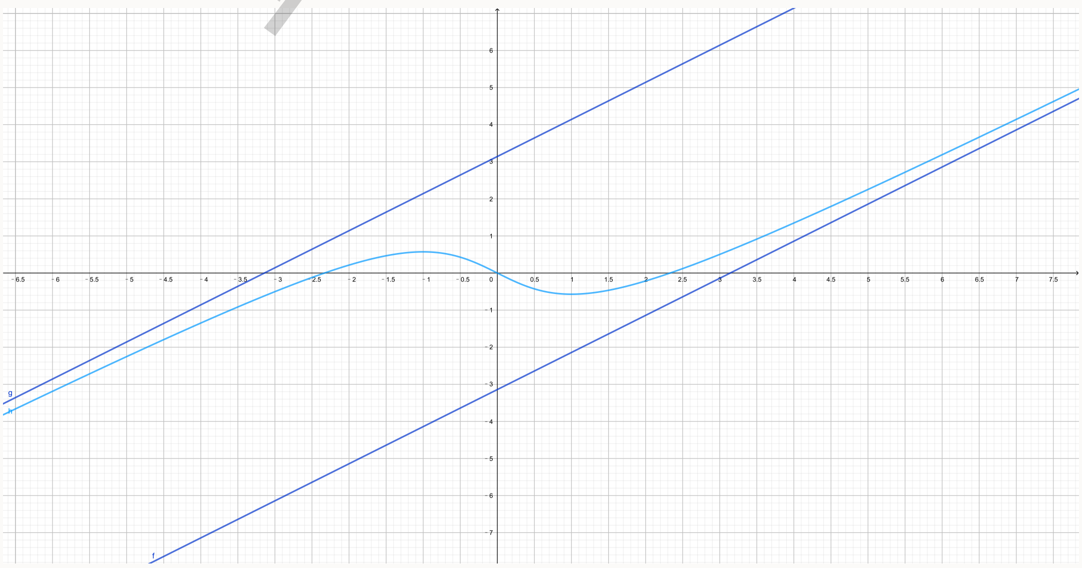
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\uparrow$ 下凹	极大	$\downarrow$ 下凹	拐点	$\downarrow$ 上凹	极小	$\uparrow$ 上凹

f 的单增区间为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, 单减区间为 $(-1, 1)$.

$$
f_{\max} = f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1, f_{\min} = f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}
$$

f 的图像在 $(-\infty, 0)$ 下凹, 在 $(0, +\infty)$ 上凹, $(0, 0)$ 是拐点.

渐近线: $x \to +\infty$ 方向为 $y = x - \pi$, $x \to -\infty$ 方向为 $y = x + \pi$.



3.4-1 令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, 则 $\frac{1}{1+x}=1-t^2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\\ &= \frac{1}{1-t^2}\bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{4\pi}{3} - I_1\end{aligned}$$

其中 $I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, 令 $t=\sin u$, 有

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}=\tan u\,|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$$

故答案为 $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$.

3.4-2

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}(1+x)\\ &= (1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\bigg|_0^3 - \int_0^3 (1+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4\pi}{3} - \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

3.5-1 令 $x=\tan t$, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\tan^3 t\sec^2 t}{\sec t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \tan^2 t\cdot\tan t\sec t\\ &= \int (\sec^2 t-1)\,\mathrm{d}\sec t\\ &= \frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

3.5-2

$$\begin{aligned}\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \int x^2\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2} = \int\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}\sqrt{1+x^2} - \int \mathrm{d}\sqrt{1+x^2}\\ &= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

3.5-3

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

3.6 设被积函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 有奇点 $x=0, x=2$. 设

$$I=\int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} I_1+I_2+I_3$$

又 $f(0-0)=-\infty, f(0+0)=+\infty, f(2-0)=-\infty, f(2+0)=+\infty$, 故

$$I_1=\arctan f(x)\,|_{-1}^{0}=\arctan(f(0-0))-\arctan(f(-1))=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$$

$$I_2=\arctan f(x)\,|_{0}^{2}=\arctan(f(2-0))-\arctan(f(0+0))=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

$$I_3=\arctan f(x)\,|_{2}^{3}=\arctan(f(3))-\arctan(f(2+0))=\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}$$

于是 $I=\arctan\dfrac{32}{27}-2\pi$.

3.7 由题意有

$$\mathrm{d}W=\pi\left(y-\frac{y}{4}\right)\mathrm{g}(H-y)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi\mathrm{g}(Hy-y^2)\,\mathrm{d}y$$

故

$$W=\frac{3}{4}\pi\mathrm{g}\int_0^H (Hy-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\pi\mathrm{g}H^3$$

4

令 $t=\ln(2x-1)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2x-1}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2x-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

代入原式, 化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\frac{\mathrm{e}^t}{2}-\frac{1}{4}$$

因此

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1=-2, \lambda_2=1.$$

齐次通解:

$$\tilde{y}=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2$$

$$\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\frac{\mathrm{e}^t}{2},$$

设特解为 $y_1^*=At\mathrm{e}^t$, 解得

$$y_1^*=\frac{t}{6}\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=-\frac{1}{4},$$

易见特解为

$$y_2^*=\frac{1}{8}$$

通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^t+\frac{t}{6}\mathrm{e}^t+\frac{1}{8}=\frac{c_1}{(2x-1)^2}+c_2(2x-1)+\frac{2x-1}{6}\ln(2x-1)+\frac{1}{8}$$

5

解法一: $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(3-\lambda) \quad \therefore \lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=3$

对 $\lambda_1=\lambda_2=2, (A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, 解 $(A-2I)^2x=0$, 得:

$$\vec{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1^{(1)}=(A-2I)\vec{r}_0^{(1)}=0, \quad \vec{r}_1^{(2)}=(A-2I)\vec{r}_0^{(2)}=(-1,0,0)^T$$

$$\vec{x}_1(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2(t)=\mathrm{e}^{2t}\left(\vec{r}_0^{(2)}+t\vec{r}_1^{(2)}\right)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-t\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3=3$, 解得特征向量为: $\vec{r}_3=(0,0,1)^T$. $\quad \vec{x}_3(t)=\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

齐次方程的基解矩阵为 $X_1(t)=(\vec{x}_1(t),-\vec{x}_2(t),\vec{x}_3(t))=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
X(t)=X_1(t)X_1^{-1}(0)&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
X(t-\tau)\vec{f}(\tau)=X(t-\tau)\begin{pmatrix}\tau\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2(t-\tau)} & (t-\tau)\mathrm{e}^{2(t-\tau)} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2(t-\tau)} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{3(t-\tau)}-\mathrm{e}^{2(t-\tau)} & \mathrm{e}^{3(t-\tau)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{2(t-\tau)}\\ \mathrm{e}^{2(t-\tau)}\\ \mathrm{e}^{3(t-\tau)}-\mathrm{e}^{2(t-\tau)}\end{pmatrix}
$$

$$
\int_0^t X(t-\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{t}{2}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}
$$

方程组通解为

$$
\begin{aligned}
\vec{x}=X(t)\vec{C}+\int_0^t X(t-\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{t}{2}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{2t}+\left(C_2+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{e}^{2t}-\frac{t}{2}\\ \left(C_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\\ \left(C_2+C_3+\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{3t}-\left(C_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\quad \text{其中}\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}\text{任意.}
\end{aligned}
$$

解法二:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1=2x_1+x_2 \quad +t & \cdots(1)\\
\dot{x}_2=\quad 2x_2 \quad +1 & \cdots(2)\\
\dot{x}_3=\quad x_2+3x_3 & \cdots(3)
\end{cases}
$$

其中 (2) 式的解为

$$x_2 = \mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}t}\left[\int \mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C_2\right]$$

代入 (1), 得:

$$\dot{x}_1 - 2x_1 = C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} + t, x_1 = \mathrm{e}^{2t}\left[\int\left(C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} + t\right)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t + C_1\right] = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2t\mathrm{e}^{2t} - \frac{t}{2}$$

代入 (3), 得:

$$\dot{x}_3 - 3x_3 = C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}, x_3 = \mathrm{e}^{3t}\left[\int\left(C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t + C_3\right] = -C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{6}$$

故方程组通解为

$$\vec{x} = C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t/2\\-1/2\\1/6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t/2\\-1/2\\1/6\end{pmatrix}$$

6

(1) 构造函数 $F(x) = e^{\sin(x)}\mathscr{F}(x)$

$$F'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}\mathscr{F}(x) + e^{\sin(x)}\mathscr{F}'(x) = (\cos(x)\mathscr{F}(x) + \mathscr{F}'(x))e^{\sin(x)}$$

$\mathscr{F}(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, $e^{\sin(x)}$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, 故 $F(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, $\mathscr{F}(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续, $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续

(2) $F(0)=1$, $F(\pi)=3$, $F(2\pi)=2$, 又由于 $F(x)$ 连续, 因此必有 a,b 满足 $0<a<\pi<b<2\pi$ 使得

$$F(a) = F(b)$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 故由罗尔定理知, $\exists\,\xi \in (a,b)$ 使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$e^{\sin(\xi)}(\mathscr{F}'(\xi) + \mathscr{F}(\xi)\cos(\xi)) = 0$$

而 $e^{\sin(\xi)} \neq 0$ 故在 $(0,2\pi)$ 上至少有一点 ξ,$\mathscr{F}'(\xi) + \mathscr{F}(\xi)\cos(\xi) = 0$

7

(1) 由题干条件 $f(-x)+f(x)=A$, 考虑代换 $t=-x$, 有

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx &\overset{t=-x}{=} -\int_{a}^{-a} f(-t)g(-t)dt \\ &= \int_{-a}^{a} f(-t)g(t)dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{则} \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{2}\left[\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx + \int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]g(x)dx \\ &= \frac{A}{2}\int_{-a}^{a} g(x)dx \overset{(\text{偶})}{=} A\int_{0}^{a} g(x)dx.\end{aligned}$$

(2) 考虑到反正切函数特殊性，记 $h(x)=\arctan(e^x)$ 猜想 $h(x)+h(-x)=C$. 下面进行证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[h(x)+h(-x)] = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0$$

即

$$h(x)+h(-x)=C=2h(0)=\frac{\pi}{2}$$

由 (1) 中结论有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\cdot\arctan(e^x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{32}$$

注: 华里士公式 (Wallis) 公式（书 $P_{2.11}$例3.21）

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

2020 年高等数学期末答案

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $-\dfrac{1}{2021}$

解析：原式 Taylor 展开，有 $\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}=\ln(1-x)-\ln(1+x^3)=-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k}-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}x^{3k}}{k}$

$=-\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right)-\left(x^3-\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{x^9}{3}-\dfrac{x^{12}}{4}+\ldots\ldots\right)$

其中 $-\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right)$ 中，x^{2021} 的系数为 $-\dfrac{1}{2021}$。由于 2021 不是 3 的倍数，故 $\left(x^3-\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{x^9}{3}-\dfrac{x^{12}}{4}+\ldots\ldots\right)$ 中不含 x^{2021} 的项。所以 x^{2021} 的系数为 $-\dfrac{1}{2021}$

2. 1

解析：本题需要分 $x\to0^-$ 和 $x\to0^+$ 两个情况讨论：因为 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{1}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{3}{x}}}+1=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{3}{x}}+1=0+1=1$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=1$

3. $1+\ln\pi$

解析：$\displaystyle\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(\ln\pi-\ln|2-x|\right)dx=\ln\pi-\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\,dx$

根据对称性，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\,dx=\int_2^3\ln(x-2)dx=\int_0^1\ln xdx=(x\ln x-x)\Big|_0^1$，

而 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，所以 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\,dx=-1$，所以 $\displaystyle\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx=1+\ln\pi$

4. $\dfrac{2e^2-3e}{4}$

解析：$\dfrac{dx}{dt}=6t+2$，y 看作关于 t 函数，隐函数求导有

$\dfrac{dy}{dt}e^y\sin t+e^y\cos t-\dfrac{dy}{dt}=0$，所以有 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=\dfrac{e^y\cos t}{2-y}$。所以

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$取对数有 $\ln\dfrac{dy}{dx}=y+\ln\cos t-\ln(6t+2)-\ln(2-y)$，

两边对 t 求导有 $\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{dy}{dt}-\tan t-\dfrac{6}{6t+2}+\dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{2-y}$，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dt}-\tan t-\frac{6}{6t+2}+\frac{dy}{dt}\frac{1}{2-y}\right)$$

所以$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dt}-\tan t-\frac{6}{6t+2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{2-y}\right)$

当$t=0$时由$e^y\sin t-y+1=0$得到$y(0)=1$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=(6t+2)|_{t=0}=2$

$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{e^y\cos t}{2-y}\right|_{t=0}=e$，则$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)\right|_{t=0}=\frac{e}{2}$，将这些数值代入可得:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot(e-0-3+e)=\frac{2e^2-3e}{4}$$

5. $\dfrac{1}{3}$

解析：利用$x\to0$时$\tan x\sim x$等价无穷小，此外$n\to\infty$时$\left(k+\dfrac{1}{n}\right)\sim k$，即$\dfrac{1}{n}$忽略不计。结合积分有$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(k+\dfrac{1}{n})^2\tan\dfrac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\cdot\dfrac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{n})^2=\int_0^1x^2dx=\dfrac{1}{3}$.

二、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1.C

解析：首先$x\neq0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}=f(0)$，故$f(x)$在0处连续。

再利用导数定义，可得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2x^2}=\dfrac{1}{4}$

所以$f(x)$在$x=0$处可导，且导数值为$\dfrac{1}{4}$不为0，故选 C

2. D

解析：因为$x\to0$时$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，所以由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$有$f\left(x\right)\sim x^2+o(x^2)$。$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0$，因此$f(x)$在$x=0$处可导，导数为 0。从而$x\to0$，$f'(x)\sim2x+o(x), f''(x)\sim2+o(1)$，即$f''(0)=2>0$。所以$f(x)$在$x=0$处取得极小值，故选 D

3. B

解析：该微分方程的特征多项式是$\lambda^2-\lambda=0$。对e^x+1中e^x讨论，$e^{\alpha x}$中$\alpha=1$，其前面多项式是 0 次，又由于 1 是特征多项式$\lambda^2-\lambda=0$的单重根，所以待定ae^x前面要乘一个x，故应该设axe^x；再对e^x+1中1讨论，相当于一个 0 次多项式。由于在$y''+p(x)y'+q(x)y$中$q\left(x\right)\neq0$，故待定系数也要设成一个 0 次多项式，即一个常数，因此设b。从而该微分方程的特解可以设成axe^x+b的形式，故选 B

4. D

解析：$y(x)$中$x=-1$，$x=0$，$x=1$，$x=2$处都没有定义，所以都是$y(x)$的间断点，因此有 4 个间断点，故选 D

5. A

解析：取$x=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$则$y=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当$x\to0$时$n\to+\infty$，此时$y\to+\infty$，因此 y 无界。而又因为$\exists x=\dfrac{1}{2n\pi+\pi}<\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$（对于相同的 n），而$x=\dfrac{1}{2n\pi+\pi}, y=0$，因此始终存在$\dfrac{1}{2n\pi+\pi}<\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$满足$y(\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}})\to+\infty$，但是$y(\dfrac{1}{2n\pi+\pi})\equiv0$，即函数呈现“震荡”式且越来越剧烈，因此不是无穷大量。故选 A.

三、计算题

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\cdot \ln t)\mathrm{d}t}{\cos x\int_0^x \ln^2(1+t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\cdot \ln t)\mathrm{d}t}{\int_0^x \ln^2(1+t)\mathrm{d}t}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\tan^3 x\cdot \ln x}{\ln^2(1+x)}$$
$$=1$$

2. $f(x)$是偶函数，且$f(0)=-2$，因此只需考虑f 在$(0,+\infty)$上的零点.

当$x>1$ 时，$f(x)>2-2\cos x \geq 0$，因此 f 在 $(1,+\infty)$ 上没有零点；

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，因此 f 在 $(0,1)$ 上严格单调增，从而在该区间内至多有一个零点．而由介值定理，$f(1)=2-2\cos 1>0$，因此 f 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个零点.

因此 f 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点，从而在 R 内有且只有 2 个零点.

3. 记$p=y'$，则$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$．方程化为

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=(1+2y+\ln y)p,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{p}{y+1}=\frac{1+2y+\ln y}{y+1}$$
$$p=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y+C_1)$$

由$y(0)=1, y'(0)=\dfrac{1}{2}$，得到$C_1=0$，即$y'=\dfrac{1}{y+1}(y^2+y\ln y)$，

进而$\ln(y+\ln y)=x+C_2$，代入初值条件得$\ln(y+\ln y)=x$.

4. 注意到$\sin x$为奇函数，因此

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+0=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

令$\sin x=t$(或者分母有理化也行)

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t(1-\cos t)}{1-\cos^2 t}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-\cos^2 t)\mathrm{d}t=4-\pi.$$

5. 圆周方程为$(x-2)^2+y^2=1$.

$V=\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=4\pi^2$.

6. 易见 f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 内均连续可微，只要讨论 f 在 $x=0$ 处的性质.

由题，$f(x)$ 连续可微，所以 f 本身连续.

当 $k\le 0$ 时，$f(0^+)$ 不存在，所以 $k>0$.

而当 $k>0$ 时，我们有 $f(0^-)=c,f(0)=0,f(0^+)=0$，因此 $c=0$.

又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$，

因此，当 $k\le1$ 时，$f'_+(0)$ 不存在，从而有 $k>1$. 当 $k>1$ 时，$f'_+(0)=0$. 另一方面，

$f'_-(0)=b$，从而 $b=0$.

进一步，当 $k>1,b=0,c=0$ 时可得

$$f'(x)=\begin{cases}2a\sin x\cos x,x<0\\0,x=0\\kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$$

当 $k\le2$ 时，$f'(0^+)$ 不存在，所以 $k>2$.

即 $k>2,b=0,c=0$ 是 f 在 R 上连续可微的必要条件.

7. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}te^{-t^2}\mathrm{d}t$，

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$，故 $f(x)$ 的驻点为 $x=0,\pm1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

单调增区间：$(-1,0),(1,+\infty)$；单调减区间：$(-\infty,-1),(0,1)$；

极小值为 $f(\pm1)=0$，极大值为 $f(0)=\int_0^1te^{-t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{e})$.

8. $\det(A-\lambda E)=(\lambda+2)^2(4-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$，

$$\lambda=-2:A+2E=\begin{bmatrix}3&-3&3\\3&-3&3\\6&-6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},r_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix};$$

$$\lambda=4: A-4E=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to r_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix};$$

$$X(t)=r_1e^{-2t},r_2e^{-2t},r_3e^{4t}=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t}\\ e^{-2t} & 0 & e^{4t}\\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t}\end{bmatrix}.$$

对应的齐次微分方程组通解为：$x=X(t)C$.

$X(0)\neq E$，计算知 $X^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

通解为 $x(t)=X(t)X^{-1}(0)C+\int_0^t X(t-\tau)X^{-1}(0)f(\tau)\mathrm{d}\tau$.

代入公式，得到

$$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t}\\ e^{-2t} & 0 & e^{4t}\\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix},$$

$$+\int_0^1\begin{bmatrix}e^{-2(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} & e^{4(t-\tau)}\\ e^{-2(t-\tau)} & 0 & e^{4(t-\tau)}\\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 2e^{4(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t}\\ e^{-2t} & 0 & e^{4t}\\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{4t}\\ \frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{4t}\\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{4t}\end{bmatrix}.$$

四、证明题

1. 令 $x=\dfrac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab})$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$.

$$I=\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}(\int_{-\infty}^{0}\ \ +\int_0^{+\infty}\ \ )f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t,$$

令$t=-u$，则

$$I=\frac{1}{2a}(\int_0^{+\infty}f(\sqrt{u^2+4ab})\frac{\sqrt{u^2+4ab}-u}{\sqrt{u^2+4ab}}\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t.$$

2. 由数学归纳法容易证明$0<x_n<3$. 又，

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+(3-x_n)}{2}=\frac{3}{2}(n=1,2,...)$$

所以$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ge\sqrt{x_n(3-\frac{3}{2})}=\sqrt{\frac{3}{2}x_n}\ge\sqrt{x_n\cdot x_n}=x_n(n\ge 2)$

故数列$\{x_n\}$单调增且有上界，故收敛. 对$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边取极限可知极限为$\frac{3}{2}$.

3. (1) 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，知$f(0)=0$；

且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

故$\exists a>0,f(a)>f(0)=0$.

同理，$f(1)=0,f'(1)=2,\exists b<1,f(b)<f(1)=0$，且$b\neq a$.

于是$f(a)f(b)<0$，由零点定理知，

$\exists\xi\in(a,b)\subset(0,1)$，使$f(\xi)=0$.

(2) 构造$F(x)=e^{-x}f(x)$，可知$F(0)=F(\xi)=0$.

由罗尔定理知，$\exists\xi_1\in(0,\xi),F'(\xi_1)=0;\exists\xi_2\in(\xi,1),F'(\xi_2)=0$.

而$F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$，故ξ_1,ξ_2分别是$f'(x)-f(x)=0$的两个根.

构造$G(x)=e^{x}[f'(x)-f(x)]$，则$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$且满足罗尔定理.

故$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1),F'(\eta)=0$.

整理得$f''(\eta)-f(\eta)=0$.

2019 年高数上期末答案

一、填空题

1．5　　考察极限的基本运算

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3\sin x}{x}+\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}=5$

2．$\frac{\pi}{6}$　　考察定积分的定义

解析：由 $\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{i^2}{n^2}}}$ 可知，原和式为将区间 $[0,1]$ n 等分后，各小区间上高为 $\frac{1}{\sqrt{4-\frac{i^2}{n^2}}}$ 的矩形面积之和，由定积分定义，$\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}$

3．0　　考察高阶导数公式，莱布尼兹公式的应用

解析：记 $u=x^2+x+2$，$v=\sin x$　　则 $x^{(n)}=\begin{cases}2x & n=1\\ 2 & n=2\\ 0 & n\ge 3\end{cases}$　$v^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$f^{(10)}(x)=(uv)^{(10)}=C_{10}^0u^{(10)}v+C_{10}^1u^{(9)}v^{(1)}+\cdots C_{10}^{10}uv^{(10)}=uv^{(10)}+10u^{(1)}v^{(9)}+45u^{(2)}v^{(8)}$ 代入 $x=0$ 得 $f^{(10)}(0)=0$

4．2　　考察微积分基本定理与极限的相关知识

解析：由题意 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt}{x^k(e^x-1)}=a\ (a\ne 0)$　　$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt}{x^{k+1}}=a$

由洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin(\sin^2 x)}{(k+1)x^k}=a$　　由等价无穷小可知 $k=2$

5．3　　考察渐近线的相关知识

解析：$y'=1-\frac{1}{e^x+e^{-x}-2}$　　$x\to 0, y'\to+\infty$ 故存在竖直渐近线 $x=0$

$x\to+\infty, y'\to 1$　设对应渐近线 $y=x+a$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-a\right)=0\Rightarrow a=0\Rightarrow$ 渐近线 $y=x$

$x\to-\infty, y'\to 1$　设对应渐近线 $y=x+b$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-b\right)=0\Rightarrow b=-1\Rightarrow$ 渐近线 $y=x-1$

二、计算题

1. 考察极限的基本运算

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos x}{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}}=1$$

2. 考察积分的基本运算

原式 $=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}e^{-2x}dx+\int_0^1(1+x^2)dx=\frac{e}{2}+\frac{5}{6}$

3. 考察参数方程的求导与隐函数求导

$x=t^2-t\Rightarrow\dot{x}=2t-1\Rightarrow\dot{x}\big|_{t=0}=-1, x\big|_{t=0}=0, y\big|_{t=0}=-1$　　$te^y+y+1=0\Rightarrow e^y+t\dot{y}e^y+\dot{y}=0\Rightarrow\dot{y}\big|_{t=0}=e^{-1}$

$\therefore k=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-e^{-1}$　　又切线过 $(0,-1)$　　故切线方程：$y=-\frac{1}{e}x-1$

4. 考察变上限积分与函数性质

（1）由 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=x(x-2)e^x+2x$ 得 $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=x(x-2)e^x+2x$

求导得 $\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = (x^2-2)e^x + 2 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt = (x^2-2)e^x + 2$ 求导得 $f(x) = (x^2+2x-2)e^x$

（2） $f'(x) = (x^2+4x)e^x$ 令 $f'(x) > 0$ 得单调增区间 $(-\infty, -4)$，$(0, +\infty)$

令 $f'(x) < 0$ 得单调减区间 $(-4, 0)$ 故极大值 $f(-4) = 6e^{-4}$ 极小值 $f(0) = -2$

5. 考察反常积分的求解

原式$= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx \xrightarrow{t=e^x} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+1)^2} dt = -\int_1^{+\infty} \ln t d\frac{1}{t+1} = -\frac{\ln t}{1+t}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} d\ln t$

$= -\frac{\ln t}{1+t}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)} dt = -\frac{\ln t}{1+t}\Big|_1^{+\infty} + \left[\ln t - \ln(1+t)\right]\Big|_1^{+\infty} = \ln\left.\frac{t}{1+t}\right|_1^{+\infty} - \frac{\ln t}{1+t}\Big|_1^{+\infty} = \ln 2$

6. 考察高阶微分方程的求解

解 $y'' + 2y' + y = 0$ 可得通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ 对于 x 项，不难得出特解中需含有 $x-2$

对于 e^{-x} 项，可设 $y^* = Cx^2 e^{-x}$ 代入 $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ 中可得 $C = \frac{1}{2}$

即 $y^* = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + x - 2$ 通解为 $y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} + x - 2$

7. 考察一阶微分方程的求解

$(1+x^2)y'' = 2xy' \Rightarrow \ln y' = \ln(x^2+1) + C_1 \Rightarrow y' = C_1(x^2+1)$ $y'(0) = 3 \Rightarrow C_1 = 3$

$\therefore y' = 3x^2 + 3$ $y = x^3 + 3x + C_2$ $y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$ $\therefore y = x^3 + 3x + 1$

8. 考察常系数一阶微分方程求解

设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0$ $r(A+3E) = 2$

故需求 $(A+3E)^2 r = 0$ 的基础解系 $(A+3E)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

从而 $(A+3E)^2 r = 0$ 两个线性无关的解向量 $r_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$r_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$r_1^{(1)} = (A+3E)r_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$r_2^{(2)} = (A+3E)r_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

故对应 $\lambda_1 = \lambda_3 = -3$ 的两个线性无关特解 $x_1(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} -1-t \\ 1+2t \\ -t \end{bmatrix}$，$x_2(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} -1-2t \\ 4t \\ -2t \end{bmatrix}$

对于 $\lambda_3 = 0$，其特征向量 $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，对应特解 $x_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 原方程组解系：$x = C_1 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1-t \\ 1+2t \\ -t \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1-2t \\ 4t \\ -2t \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

三、解答题

1.（1） $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -3x$ 对应齐次方程 $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C_1 x$

设原方程解为 $f(x)=x\cdot h(x)$ 代入得 $xh'(x)+h(x)-h(x)=-3x\Rightarrow h'(x)=-3\quad h(x)=-3x+C_2$

$\therefore f(x)=-3x^2+Cx$ 由题意 $\int_0^1 f(x)dx=2\Rightarrow C=6$ 从而 $f(x)=-3x^2+6x$

（2）由 $f(x)=0\Rightarrow x_1=0,x_2=2$ 区间 $[0,2]$ 上取微元 dx

则 $dV=\pi f^2(x)dx\Rightarrow V=\int_0^2\pi f^2(x)dx=\dfrac{48\pi}{5}$

2. （1）$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|dt\xrightarrow{s=t+\pi}\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(s-\pi)|ds=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin s|ds\xrightarrow{x=s}f(x)$ 即 $f(x)$ 以 π 为周期

（2）由（1）可知 $f(x)$ 以 π 为周期，故只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的值域

$x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，$t\in[0,\pi)$，$\sin t>0$ $\therefore f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\sin tdt=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}]$ $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$t\in[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$

从而 $f(x)=\int_x^{\pi}|\sin t|dt+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=f(x)=\int_x^{\pi}\sin tdt-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin tdt=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})+2\in[2-\sqrt{2},1]$

（3）由（2）可知：$S=\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})+2\right]dx=\pi$

3. 设 $f(x)$ 原函数为 $F(x)$，将 $F(x)$ 在 $x=1$ 处泰勒展开，可知 $\xi\in[1,x]$

$F(x)=F(1)+(x-1)f(1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2f'(1)+\dfrac{1}{6}(x-1)^3f''(\xi)$ 从而 $F(0)=F(1)+\dfrac{1}{2}f'(1)-\dfrac{1}{6}f''(\xi_1)$

$F(2)=F(1)+\dfrac{1}{2}f'(1)+\dfrac{1}{6}f''(\xi_2)$ $\therefore F(2)-F(0)=\dfrac{1}{6}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$ 由 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 连续

故 $\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ $f''(\xi)=\dfrac{1}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$ $\therefore$ 存在 $\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\in[0,2]$ 使 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$

4.（1）$\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=\int_0^{\pi}x\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx+\cdots+(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin xdx$

$\because(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin xdx=(-1)^{n-1}\left(-n\pi\cos(n\pi)+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi\right)=(2n-1)\pi$

$\therefore$ 原式 $=\pi+3\pi+\cdots+(2n-1)\pi=n^2\pi$

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^P dt$ 当 $P>0$ 时

$f'(x)=\dfrac{1}{x^4}(x^3|\sin x|^P-2x\int_0^x t|\sin t|^P dt)=\dfrac{1}{x^4}\left[x^3|\sin x|^P-x\left(|\sin t|^P t^2\Big|_0^x-\int_0^x t^2d|\sin t|^P\right)\right]=\dfrac{1}{x^3}\int_0^x t^2d|\sin t|^P>0$

而 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^P dt<\dfrac{1}{x^2}\int_0^x tdt=\dfrac{1}{2}$ 故由单调有界准则，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

2018 年高数上期末答案

一、选择题

1. B

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3ax^2+2bx}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3ax+2b}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}(3a\dfrac{x}{2}+b)=1$ $\therefore a=0$ $b=1$

2. C

解析：不妨设 $f(x)=1$ $g(x)=2$ 则 $f(x)<g(x)$

$f(-x)=1,g(-x)=2\Rightarrow f(-x)<g(-x)$ 故 A 错误

$f'(x)=g'(x)=0$ 故 B 错误

当 $x=-1$ 时 $\int_0^x f(t)dt=-1$，$\int_0^x g(t)dt=-2$ $\int_0^x f(t)dt>\int_0^x g(t)dt$ 故 D 错误

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ $f(x_0)=g(x_0)$ 故 C 正确

3. C

解析：$f(x)=(x-1)e^{x}$ $\quad f(x+1)=xe^{x+1}$ $\quad f'(x+1)=\dfrac{df(x+1)}{dx}=(x+1)e^{x+1}$

4. D

解析：对 A：$\int_0^1 \ln xdx=x(\ln x-1)|_0^1=-1-\lim\limits_{x\to 0}x(\ln x-1)=-1$

对 B：$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=-\dfrac{1}{\ln x}|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 2}$

对 C：$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}|_0^{+\infty}=1$

对 D：$\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x\cos x}=\int_{0^+}^{1}\dfrac{dx}{x\cos x}+\int_{-1}^{0^-}\dfrac{dx}{x\cos x}$ $\quad \because \dfrac{1}{|x|}<\dfrac{1}{|x\cos x|}$ 又 $\int_{0^+}^{1}\dfrac{1}{x}dx$ 发散 $\quad \therefore \int_{0^+}^{1}\dfrac{dx}{x\cos x}$ 发散

故 $\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x\cos x}$ 也发散

5. B

解析：$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}f(\varepsilon)x$ $\quad \varepsilon\in(0,x)$ $\quad \because f(\varepsilon)=\sin\dfrac{1}{\varepsilon}$ 有界 $\quad \therefore \lim\limits_{x\to 0}f(\varepsilon)x=0$

即 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$ $\quad F(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\varepsilon)x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{\varepsilon}$ 不存在 $\quad \therefore F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

6. C

解析：$\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ $\quad \mu$ 为特征方程的单根 $\quad \therefore y=x(Ax+B)e^{-x}$

二、填空题

1. $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$

解析：$t=2$ 时 $x=\dfrac{2}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$ $\quad y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2t(1+t^2)-2t^3}{(1+t^2)^2}\div\dfrac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

$\therefore y'|_{t=2}=-\dfrac{4}{3}$ $\quad$ 故 $y=-\dfrac{4}{3}(x-\dfrac{2}{5})+\dfrac{4}{5}=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$

2. 1009

解析：原式 $=\int_0^1(x-0)dx+\int_1^2(x-1)dx+\int_2^3(x-2)dx+\cdots+\int_{2017}^{2018}(x-2017)dx$

$=\int_0^{2018}xdx-(1+2+\cdots+2017)=1009$

3. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

4. $\sin 1-\cos 1$

解析：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}\sin\dfrac{n}{n}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n}\sin\dfrac{i}{n}=\int_0^1 x\sin xdx=\sin 1-\cos 1$

5. 1

解析：$f'(x)=\ln(2-x)-\dfrac{x-1}{2-x}=0\Rightarrow x=1$

$\because$ 当 $x<1$ 时 $f'(x)>0$；当 $1<x<2$ 时 $f'(x)<0$ $\quad \therefore x=1$ 为最大值点

三、计算积分

1. 原式 $=\int\dfrac{1}{\tan^2 x+9}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{1}{\left(\dfrac{\tan x}{3}\right)^2+1}d\dfrac{\tan x}{3}=\dfrac{1}{3}\arctan\left(\dfrac{\tan x}{3}\right)+C$

2. $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 f(x)d\sqrt{x}=2\left[f(x)\sqrt{x}|_0^1-\int_0^1\sqrt{x}df(x)\right]=2\left[f(1)-\int_0^1 f'(x)\sqrt{x}dx\right]$

$\because f(1)=0 \qquad f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$\therefore$ 原式 $=-2\int_0^1\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx=-4\int_0^1\ln(x+1)d\sqrt{x}=-4\left[\sqrt{x}\ln(x+1)|_0^1-\int_0^1\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}dx\right]$

令 $y=\sqrt{x}$，则原式 $=-4\left(\ln 2-\int_0^1\dfrac{2y^2}{y^2+1}dy\right)=-4\ln x+4\int_0^1\left(2-\dfrac{2}{y^2+1}\right)dy=8-2\pi-4\ln 2$

3. 令 $t=e^x$，则原式 $=\int_1^0\dfrac{\ln t}{(1+t)^2}dt=\int_0^1\ln td\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{\ln t}{t+1}|_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{(1+t)t}dt=\dfrac{\ln t}{t+1}|_0^1-\int_0^1\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}\right)dt$

$=\left[\dfrac{\ln t}{t+1}-\ln t+\ln(t+1)\right]|_0^1=\dfrac{-t}{t+1}\ln t|_0^1+\ln 2 \qquad \because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-t}{t+1}\ln t=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{\ln t}{\dfrac{t+1}{t}}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1/t}{[t-(t+1)]/t^2}=\lim\limits_{x\to 0}t=0$

$\therefore$ 原式 $=\ln 2$

四、解答题

1. $y'+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}(x-3)y^4=0 \qquad y^{-4}y'+\dfrac{1}{3}y^{-3}+\dfrac{1}{3}(x-3)=0 \qquad$ 令 $u=y^{-3}$，则 $u'=-3y^{-4}y'=0$

故 $-\dfrac{1}{3}u'+\dfrac{1}{3}u+\dfrac{1}{3}(x-3)=0 \qquad u'-u=x-3 \qquad$ 先求 $\dfrac{du}{dx}=u\Rightarrow u=C_0e^x \qquad$ 令 $C_0=h(x)$

则 $u=h(x)e^x$ 代入 $\dfrac{du}{dx}-u=x-3$ 得 $h(x)=(2-x)e^{-x}+C$

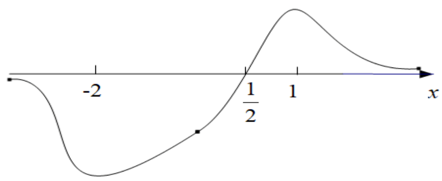
$\therefore u=2-x+Ce^x$ 即 $\dfrac{1}{y^3}=2-x+Ce^x$

2. $y=C_1e^x+C_2+x$

3. $V=\int_{-1}^1 9\pi-\pi(3-y)^2dx=18\pi-2\pi\int_0^1\left[3-3(1-x^2)\right]^2dx=18\pi-18\pi\int_0^1x^4dx=\dfrac{72\pi}{5}$

4. $f'(x)=\dfrac{4-2x-2x^2}{(2+x^2)^2}=0\Rightarrow x_1=1,x_2=-2 \qquad$ 减区间：$(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$ 增区间：$(-2,1)$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0 \qquad \because f(x)$ 草图为：



当 $t\le 2$ 时，最大值在 $x=1$ 处取到，$f(1)=1$

最小值在 $x=-2$ 处取到，$f(-2)=-\dfrac{1}{2}$

当 $-2<t<-1$ 时，最大值在 $x=1$ 处取到，$f(1)=1$；最小值在 $x=t$ 处取到，$f(t)=\dfrac{1+2t}{2+t^2}$.

当 $-\dfrac{1}{2}<t<1$ 时，最大值为 $f(1)=1$，无最小值.

当 $1\le t$ 时，最大值在 $x=t$ 处取到，$f(t)=\dfrac{1+2t}{2+t^2}$，无最小值.

5. $\lambda^2+2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=-1\pm i \qquad \therefore$ 通解为 $x=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$

设特解 $x^*=\left[(A_0+A_1t)\cos t+(B_0+B_1t)\sin t\right]e^{-t}t \qquad$ 代入求得 $x^*=\left(\dfrac{1}{4}\cos t+\dfrac{t}{4}\sin t\right)e^{-t}t$

故原方程通解为 $x=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+\left(\dfrac{1}{4}\cos t+\dfrac{t}{4}\sin t\right)e^{-t}t$

6. 证明：令 $u=2a-t$，则 $\int_a^{2a}f(t)f'(2a-t)dt=\int_0^a f(2a-u)f'(u)du=f(2a-u)f(u)\big|_0^a-\int_0^a f(u)df(2a-u)$

$=f^2(a)-f(2a)f(0)+\int_0^a f(u)f'(2a-u)du$

$\therefore F(2a)-2F(a)=\int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)dt-2\int_0^{a} f(t)f'(2a-t)dt$

$=\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)dt-\int_0^{a} f(t)f'(2a-t)dt=f^2(a)-f(0)f(2a)$

7.（1） $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2f(x)|_0^1-\int_0^1 x^2df(x)\right]=\frac{1}{2}\left[f(1)-\int_0^1 x^2f'(x)dx\right]=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx$

$\because \int_0^1 tf'(x)dx=t\int_0^1 df(x)=t\left[f(1)-f(0)\right]=0$ $\qquad \therefore -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-t)f'(x)dx$

（2）取 $t=\frac{1}{3}$ 则由（1）知 $\left[\int_0^1 xf(x)dx\right]^2=\frac{1}{4}\left[\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})f'(x)dx\right]^2$

由柯西不等式得：$\frac{1}{4}\left[\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})f'(x)dx\right]^2\le\frac{1}{4}\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})^2dx\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$

$\because \int_0^1 xf(x^2-\frac{1}{3})^2dx=\frac{4}{45}$ $\qquad \therefore \left[\int_0^1 xf(x)dx\right]^2\le\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$

当且仅当 $x^2-\frac{1}{3}=f'(x)$ 时取等号，即 $f(x)=\frac{1}{3}(x^3-x)+C$

又 $f(0)=0$ $\qquad \therefore C=0$ $\qquad$ 故 $f(x)=\frac{1}{3}(x^3-x)$ 即 $A=\frac{1}{3}$

2017 年高数上期末答案

一、计算题

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1/\cos^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x+\sin x\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-\sin x)}{2x(\cos x+\sin x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\sin x}{2(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x(x+1)}{-x(x^2-1)}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x+1)}{x(x^2-1)}=-1$ $\qquad \therefore x=0$ 为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\infty$ $\qquad \therefore x=1$ 为无穷大间断点

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore x=-1$ 为可去间断点

3. 当 $x<0$ 时 $f'(x)=1$；当 $x>0$ 时 $f'(x)=2^x\ln 2$

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x-1}{x}=\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^x-1}{x}=\infty$

$\therefore$ 在 $x=0$ 处不可导 $\qquad f'(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2^x\ln 2 & x>0\end{cases}$

4. 两边同时求导：$\frac{\frac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{2x+2yy'}{2(x^2+y^2)}\Rightarrow y'=\frac{y-x}{x+y}$ $\qquad \therefore dy=\frac{y-x}{x+y}dx$

5. 令 $t=\sqrt{e^x+1}$，则 $x=\ln(t^2-1)$

原式 $=\int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int 2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt=2t+\ln(t-1)-\ln(t+1)+C=2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

6. $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos tdt=-\int_0^x\cos tde^{-t}=-e^{-t}\cos t|_0^x+\int_0^x e^{-t}d\cos t=-e^{-t}\cos t|_0^x+\int_0^x\sin tde^{-t}$

$=-e^{-t}\cos t|_0^x+e^{-t}\sin t|_0^x-\int_0^x e^{-t}d\sin t=e^{-t}(\sin t-\cos t)|_0^x-\int_0^x e^{-t}\cos tdt=e^{-t}(\sin t-\cos t)|_0^x-f(x)$

$f(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}$ $\quad f(0)=0$ $\quad f(\pi)=\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}$

$f'(x)=e^{-x}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ $\quad f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$最大值为$\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$，最小值为0

7. $\int_{-4}^{4}\pi\left[\left(\sqrt{16-x^2}+5\right)^2-\left(-\sqrt{16-x^2}+5\right)^2\right]dx=2\pi\int_0^4 10\cdot 2\sqrt{16-x^2}dx=40\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx$

令$x=4\sin\theta$，则原式$40\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot 4\cos\theta d\theta=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta=160\pi^2$

8. $\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda^2+2)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=\sqrt{2}i,\lambda_2=-\sqrt{2}i,\lambda_3=1$

$\therefore y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+C_3e^x$

9. $y''=1+y'^2$ $\quad$ 令$t=y'$，则$t'=1+t^2\Rightarrow\frac{dt}{1+t^2}=dx\Rightarrow\arctan t=x+C_1$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\tan(x+C_1)$ $\quad dy=\tan(x+C_1)dx\Rightarrow y=-\ln\left[\cos(x+C_1)\right]+C_2$

二、解答题

1. $f(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt+x^2$

$f'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)+2x=2x\left[f(x)-f(0)\right]+2x$

将$x=0$代入得$f(0)=0$ $\quad\therefore f'(x)=2xf(x)+2x$

即$\frac{dy}{dx}=2x(y+1)\Rightarrow\frac{dy}{y+1}=2xdx\Rightarrow\ln(y+1)=x^2+C\Rightarrow y=e^{x^2+C}-1$

又$f(0)=0$ $\quad\therefore C=0$ $\quad f(x)=e^{x^2}-1$

2. 当$k=1$时$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=l$ 无极值

当$k>1$时$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=0$

若k为偶数，$\because l>0$ $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}<0$ $\quad\therefore\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_-'(a)<0$

$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}>0$ $\quad\therefore\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_+'(a)>0$ $\quad\therefore x=a$处取得极小值

若k为奇数，$\because l>0$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}>0$ $\quad\therefore\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f_-'(a)>0,f_+'(a)>0$

$\therefore x=a$处无极值

综上，k为偶数则取极小值，k为奇数则无极值.

[注：此题只告诉$f(x)$在某邻域内有定义，是否可导以及导函数是否连续都未知，故不能认为$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$，更不能使用洛必达法则直接求导]

3. $\lambda^2-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1\pm i$ $\quad\therefore$通解为$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

设特解$y^*=\left(A\cos x+B\sin x\right)e^x x$ $\quad$ 代入求得$y^*=\frac{x}{2}e^x\sin x$ 故$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{x}{2}e^x\sin x$

又$y(0)=1$ $\quad y'(0)=1$ $\quad$ 故$y=e^x\cos x+\frac{x}{2}e^x\sin x$

4.（1）见《工科数学分析基础》第三版上册 P307 例 3.5

（2） $f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1=2f''(x)\Rightarrow f''(x)-9f(x)=2x^2-5x+1$

$\lambda^2-9=0\Rightarrow\lambda=\pm3$　　∴通解为 $f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$

设特解 $f^*(x)=Ax^2+Bx+C$　　代入求得 $f^*(x)=-\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{9}x-\frac{13}{81}$

故 $f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{9}x-\frac{13}{81}$

5.（1）定义域：$\{x\,|\,x\ge1\}$　$y''=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\frac{2t\cdot(-2)-2\cdot(4-2t)}{(2t)^3}=-\frac{1}{t^3}$

$\because t\ge0$　　$\therefore y''<0$　　故 L 在 $[1.+\infty)$ 上是凸的

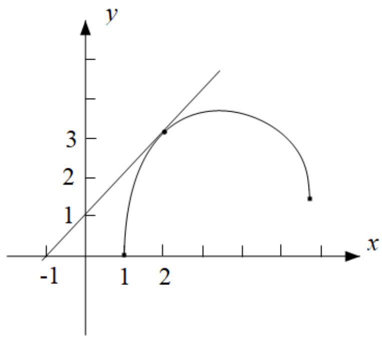
（2） $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$　　∴切线：$y-y_0=(\frac{t}{2}-1)(x-x_0)$

即 $y-4t+t^2=(\frac{2}{t}-1)(x-t^2-1)$

将 $(-1,0)$ 代入得 $t^2+t-2=0\Rightarrow t=-2$ 或 1　　又 $t\ge0$

$\therefore t=1$　　∴切点 $(2,3)$　　切线方程为 $y=x+1$

（3） $L: y=4\sqrt{x-1}-x+1\quad(x\ge1)$　　草图：



$S=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_1^2\left[(x+1)-(4\sqrt{x-1}-x+1)\right]dx=2+\frac{5}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx=\frac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)d(t^2+1)$

$=\frac{9}{2}-\int_0^1 2t^2(4-t)dt=\frac{7}{3}$

6. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取最大值，$x_0\in(0,1)$，则 $x=x_0$ 必为极值点，即 $f'(x_0)=0$

$|f'(0)|+|f'(1)|=|f'(x_0)-f'(0)|+|f'(1)-f'(x_0)|=\left|\int_0^{x_0}f''(x)dx\right|+\left|\int_{x_0}^1 f''(x)dx\right|$

$\le\left|\int_0^{x_0}f''(x)dx+\int_{x_0}^1 f''(x)dx\right|=\left|\int_0^1 f''(x)dx\right|\le\int_0^1|f''(x)|dx\le\int_0^1 Mdx\le M$

2016 年高数上期末答案

一、填空题

1. 0

解析：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\sin t^3dt=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{3x^2}=0=f(0)$　　$\therefore a=0$

2. $\frac{1}{x}$

解析：$f(x)=\ln x+1$　　$f'(x)=\frac{1}{x}$

3. 小

解析：特值法，取 $f(x)=2(x-x_0)^4+f(x_0)$ 满足题意，则易知 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值

[具体证明参考 2017 年解答题第 2 题]

4. $\frac{4}{3}$

解析：$\because\frac{\sin x}{1+x^4}$ 为奇函数　　$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^4}dx=0$　　原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2x)d\sin x=\frac{4}{3}$

5. $y^2=C(x^2+1)-1$

解析：$x(1+y^2)dx=y(1+x^2)dy\Rightarrow\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{ydy}{1+y^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+C_1$

6. $\dfrac{-\cos\pi+\pi-1}{x}$

解析： $xdy+ydx=\sin dx \Rightarrow \int dxy=\sin dx \Rightarrow xy=-\cos x+C$　　又 $y(\pi)=1$　　$\therefore C=\pi-1$

二、选择题

1. A

解析：A：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{1}=-1$　　B：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

C：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$　　D：$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2. A

解析：$dy=f'(x)dx$　　$\because \Delta x>0$　　$\therefore dx>0$，$dy>0$

由泰勒展开：$\Delta y=f'(x)\Delta x+\dfrac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2+o\left[(\Delta x)^2\right]>f'(x)\Delta x>f'(x)dx>dy$

3. B

解析：$\int_0^{-x}t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$ 令 $a=-t$，则原式为 $\int_0^{x}-a\left[f(-a)+f(a)\right]\cdot(-1)da=\int_0^{x}a\left[f(a)+f(-a)\right]da$

也可由偶函数的导数为奇函数，将各式求导后判断其是否为奇函数

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}$　　$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$　　$\because$ 原式$=e$

2. $\dot{x}=-2t$　　$\ddot{x}=-2$　　$\dot{y}=1-3t^2$　　$\ddot{y}=-6t$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{-2t\cdot(-6t)-(-2)\cdot(1-3t^2)}{(-2t)^3}=-\dfrac{3t^2+1}{4t^3}$

3. $y'=-e^y-xe^y \Rightarrow y'=\dfrac{-e^y}{1+xe^y}=-e$　　$\therefore$ 切线为 $y-1=-e(x-0)$ 即 $y=-ex+1$

4. 令 $t=\sqrt{x-1}$ 则 $x=t^2+1$　　$I=\int_1^{\infty}\dfrac{1}{(t^2+1)t}\cdot 2tdt=\int_1^{\infty}\dfrac{2}{t^2+1}dt=2\arctan t\big|_1^{\infty}=\dfrac{\pi}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x+1}{-1}=-1$　　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x+1}{1}=1$

$\therefore x=1$ 为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|x|}{\frac{1-x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}-x=0$　　$\therefore x=0$ 为可去间断点

四、解答题

1. 令 $a=t-x$ 则 $\int_{-x}^{0}f(a)da=-\dfrac{x^2}{2}+e^{-x}-1$

两边同时求导：$-f(-x)\cdot(-1)=-x-e^{-x}\Rightarrow f(-x)=-e^{-x}-x\Rightarrow f(x)=x-e^x$

设渐近线为 $y=kx+b$ 则 $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-e^x}{x}=1$　　$\therefore k=1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-e^x-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-e^x=0$　　$\therefore y=x$

2. （1）$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=-1$

$A-2E=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　$r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$A+E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　$r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$　　$r_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{-t}+C_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-t}$

（2）$\lambda^2+2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-1$　　$\therefore$通解为$y=e^{-x}(C_1+C_2x)$

设特解$y^*=x^2(Ax+B)e^{-x}$　　代入求得$y^*=\frac{1}{3}x^3e^{-x}$　　故$y=e^{-x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{3}x^3e^{-x}$

3. $xy'=y+3x^2\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=3x$　　先求$y'-\frac{1}{x}y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=\ln x+C_1\Rightarrow y=C_2x$

令$y=h(x)x$代入得：$h'(x)x+h(x)-h(x)=3x\Rightarrow h'(x)=3\Rightarrow h(x)=3x+C_3$　　$\therefore y=(3x+C)x$

$V=\int_0^1\pi\left[(3x+C)x\right]^2dx=\pi\int_0^1\left(3x^2+Cx\right)^2dx=\pi(\frac{9}{5}x^5+\frac{6C}{4}x^4+\frac{C^2}{3}x^3)|_0^1=\pi(\frac{9}{5}+\frac{6}{4}C+\frac{C^2}{3})$

当$C=-\frac{9}{4}$时V最小　　$\therefore f(x)=3x^2-\frac{9}{4}x$

4. 证明：由中值定理：$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi_1)$　　$\xi_1\in(0,a)$

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}=f'(\xi_2)$　　$\xi_2\in(b,a+b)$　　$\therefore -f(a)+f(0)+f(a+b)-f(b)=-af'(\xi_1)+af'(\xi_2)$

即$f(a+b)-f(a)-f(b)=a\left[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right]$　　$\because\xi_2>\xi_1$　　$\therefore f'(\xi_2)\le f'(\xi_1)$

[注：单调减不等同于严格单调减，可能出现$f'(x_1)=f'(x_2)$]

$f(a+b)-f(a)-f(b)\le 0$　　$f(a)+f(b)\ge f(a+b)$

2015年高数上期末答案

一、填空题

1. $\frac{\pi}{2}$

解析：$\because\ln\frac{2-x}{2+x}$为奇函数　　$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{2-x}{2+x}dx=0$　　原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=\frac{\pi}{2}$

2. $-\frac{1}{\ln 2}$

解析：$y'=2^x+x2^x\ln 2=2^x(1+x\ln 2)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{\ln 2}$

当$x>-\frac{1}{\ln 2}$时$y'>0$；当$x<-\frac{1}{\ln 2}$时$y'<0$　　$x_0=-\frac{1}{\ln 2}$为极小值点

3. $\frac{2}{3}$

解析：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}<\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}<\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

右边$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$

左边$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$　　$\therefore$ 原式$=\frac{2}{3}$

4. $2-2e^{\frac{1}{2}x^2}$

解析：原式可等价为$\int_0^x ty(t)dt=x^2+y\Rightarrow xy=2x+y'\Rightarrow y'-xy=-2x$

$y'-xy=0\Rightarrow y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$　　令 $y=g(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ 代入得 $y=2e^{-\frac{1}{2}x^2}+C_1$　　$\therefore y=C_1e^{-\frac{1}{2}x^2}+2$

又 $x=0$ 时 $y=0$　　$\therefore y=2-2e^{-\frac{1}{2}x^2}$

5. b

解析：$\int_0^a x\varphi''(x)dx=\int_0^a xd\varphi'(x)=x\varphi'(x)\big|_0^a-\int_0^a\varphi'(x)dx=a\varphi'(a)-0-[\varphi(a)-\varphi(0)]$

又 $\varphi'(a)=0$　　$\varphi(a)=0$　　$\therefore$ 原式$=b$

二、选择题

1. A

解析：$F(x)=\int f(x)dx+C$

对 A：$f(x)=-f(-x)$　　$F(-x)=\int f(-x)d(-x)+C=\int f(x)dx+C=F(x)$ 为偶函数

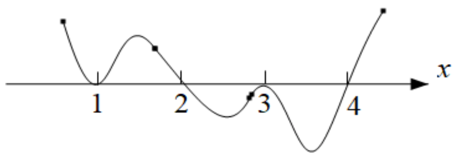
对 B：$f(x)=f(-x)$　　$F(-x)=\int f(-x)d(-x)+C=-\int f(x)d(x)+C\neq -F(x)$

对 C：取 $f(x)=\sin x+1$ 则 $F(x)=-\cos x+x+C$ 为非周期函数

对 D：取 $f(x)=-e^{-x}$ 则 $F(x)=e^{-x}+C$ 为单调递减函数

2. B

解析：$y''=0\Rightarrow x_1=1,x_2=2$　　草图：



拐点为凹凸区间分界点，由草图知 $x=1$ 不是分界点，$x=2$ 可能是分界点，故选 B。

[注：也可直接求出 y'' 后判断 $x=1$ 和 $x=2$ 左右两侧是否异号，只是求导过程相对复杂]

3. C

解析：由中值定理：$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\le M$　　$\xi\in(0,x)$　　$\therefore f(x)\le Mx$

$\int_0^1|f(x)|dx\le\int_0^1|Mx|dx=M\int_0^1 xdx=\frac{M}{2}$

4. B

解析：采用特值法，取 $f(x)=\sin x+1$

对 A：原式$=-\cos x+x+1$ 不是周期函数　　对 B；原式 $2-2\cos x$ 是周期函数

对 C：原式 $\cos x+x-1$ 不是周期函数　　对 D：原式 $2x$ 不是周期函数

证明：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$　　$f(t+T)=f(t)$

$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)dt$，令 $t=u+T$，$\int_0^{x+T}f(t)dt=\int_{-T}^x f(u+t)du=\int_{-T}^x f(u)du=\int_{-T}^x f(t)dt$ 故 A 和 C 错误

令 $g(x)=\int_{-x}^0 f(t)dt$，$g(x+T)=\int_{-x-T}^0 f(t)dt$，令 $t=u-T$，$\int_{-x-T}^0 f(t)dt=\int_{-x}^T f(u-T)du=\int_{-x}^T f(t)dt$

故$\int_0^{x+T} f(t)dt-\int_{-x-T}^{0} f(t)dt=\int_{-T}^{x} f(t)dt-\int_{-x}^{T} f(t)dt=\int_{-T}^{0} f(t)dt+\int_0^{x} f(t)dt-\int_{-x}^{0} f(t)dt-\int_0^{T} f(t)dt$

$=\int_0^{x} f(t)dt-\int_{-x}^{0} f(t)dt=F(x+T)-g(x+T)$　　故 B 正确

5. C

解析：$f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0\Rightarrow x=0$

三、解答题

1.[注意求渐近线与斜渐近线的区别]

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]=0\Rightarrow$渐近线：$y=0$

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]=\infty\Rightarrow$渐近线：$x=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]=\infty\Rightarrow$设渐近线为$y=kx+b$

则$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}=-1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y-kx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)+x\right]\xrightarrow{t=e^{-x}+1}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln t-\ln(t-1)\right]=0$

$\therefore y=-x$　　　故共有 3 条渐近线：$y=-x$；$x=0$；$y=0$

2. （1）$F'(x)=2xe^{-x^4}=0\Rightarrow x=0$

当$x<0$时$F'(x)<0$；$x>0$时$F'(x)>0$　　　$\therefore F(0)=0$为极小值

（2）$F''(x)=2e^{-x^4}+(-4x^3)\cdot 2xe^{-x^4}=0\Rightarrow 2-8x^4=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F''(x)$在$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$左右异号　　　故拐点横坐标为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3）$\int_{-2}^{3} x^2F'(x)dx=\int_{-2}^{3} 2x^3e^{-x^4}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^4}\Big|_{-2}^{3}=\frac{e^{-16}-e^{-81}}{2}$

3. 令$y'=u$则$y''=u'$，$y''=u\frac{du}{dy}$

$y''=e^{2y}\Rightarrow u\frac{du}{dy}=e^{2y}\Rightarrow udu=e^{2y}dy\Rightarrow\frac{u^2}{2}=\frac{1}{2}e^{2y}+C_1$

又$x=0$时$u=1$，$y=0$　　$\therefore C_1=0$　　　$u^2=e^{2y}\Rightarrow u=e^y$

$\frac{dy}{dx}=e^y\Rightarrow\frac{dy}{e^y}=dx\Rightarrow -e^{-y}=x+C_2$

$x=0$时$y=0$　　　$\therefore C_2=-1$　　　故$e^{-y}=1-x$即$y=-\ln(1-x)$

4. 通解$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2i,\lambda_4=-2i$

$\therefore(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=0\Rightarrow\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$　　　故$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''-8y'+4y=0$

5. $\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$　　　$\therefore$通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设特解$y^*=x(Ax+B)e^{2x}$　　　代入得$y^*=-x(x+2)e^{2x}$　　　故$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(x+2)e^{2x}$

6.（1）$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$　　　切线：$y-\sqrt[3]{x_0}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)$

$S=\int_{-2x_0}^{0}\left[\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)+x_0^{\frac{1}{3}}\right]dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)+x_0^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right]dx$

$$=\left(\frac{1}{6}x_0^{-\frac{2}{3}}x^2+\frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}}x\right)\Big|_{-2x_0}^{x_0}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^{x_0}=\frac{3}{4}x_0^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\Rightarrow x_0=1 \qquad \therefore A(1,1)$$

（2）切线：$y-1=\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Rightarrow$ 切线过 $(-2,0)$ $\qquad V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 3-\int_0^1\pi\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\frac{2}{5}\pi$

7. $\int_0^1\ln(1-x^2)dx=x\ln(1-x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1-x^2}\cdot(-2x)dx=x\ln(1-x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{x^2-1}dx$

$$=x\ln(1-x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x\ln(1-x^2)-2x-\ln|x-1|+\right]\ln|x+1|\Big|_0^1$$

$$=\lim_{x\to1}\left[(x-1)\ln|x-1|+(x+1)\ln(x+1)-2x\right]=2\ln2-2$$

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{2+a-b}{2x+b}\right)dx$$

$$=\left[\ln x-\frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{(2x+a)^{1+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}}$ 存在 $\qquad \therefore 1+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=1\Rightarrow a=b$

上式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+a}=-\ln2 \qquad \therefore -\ln2+\ln(2+a)=2\ln2-2\Rightarrow a=\frac{8}{e^2}-2$

2014 年高数上期末答案

一、计算题

1. 原式$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin x+x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{4}{2\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{4}{3}$$

2. 两边对 x 求导：$-\sin xf(\cos x)=-2\sin2x\Rightarrow f(\cos x)=4\cos x\Rightarrow f(x)=4x \qquad \therefore f(\frac{\sqrt2}{2})=2\sqrt2$

3. $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{-1}{1-x}\right)-\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2}=-\frac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\ \therefore dy=-\frac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}dx$

4. 令 $t=\sqrt{e^x+1}$ 则 $x=\ln(t^2-1)$ $\qquad$ 原式$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

5. 令 $x=\cos\theta$，则原式$=\int_{\arccos\frac{1}{\sqrt3}}^0\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt3}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\tan^2\theta d\theta=\left(\tan\theta-\theta\right)\Big|_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt3}}$

$$=\sqrt2-\arctan\sqrt2$$

6. 令 $u=x(1+y)$ 则 $du=(1+y)dx+xdy$ $\qquad$ 原方程变为 $du+(y^2+y^3)dy=0\Rightarrow u=-\frac{y^4}{4}-\frac{y^3}{3}+C$

故 $x(1+y)=-\frac{y^4}{4}-\frac{y^3}{3}+C$

7. $\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ $\qquad \therefore$ 通解为 $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

设特解 $x^*=Ate^{-2t}$ $\qquad$ 代入得 $x^*=-te^{-2t}$ $\qquad$ 故 $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}-te^{-2t}$

8. （1）见《工科数学分析基础》第三版 P299 例 3.1

（2）将 $y_1=e^x$，$y_2=e^x\ln|x|$ 代入方程成立

e^x 与 $e^x\ln|x|$ 线性无关，故其线性组合即为齐次方程的通解 $y=C_1e^x+C_2e^x\ln|x|$

9. 原式$=\int_1^{+\infty}(-\frac{1}{2}\ln x)d\frac{1}{x^2}=-\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}d(-\frac{1}{2}\ln x)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{4}$

二、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\pi x}{x(x^2-1)}=-\pi$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\pi x}{-x(x^2-1)}=\pi$ $\quad\therefore x=0$ 为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\sin\pi x}{(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\pi\cos\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=1$ 为可断间断点

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-\sin\pi x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\pi\cos\pi x}{2x}=-\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=-1$ 为可断间断点

$\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}\frac{\tan\pi x}{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-1)}=\infty$ $\quad\therefore x=\pm\frac{1}{2}$ 为无穷间断点

2. 当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}(\int_0^x\sin t^2dt+\sin\frac{1}{x})\sin x^2$；当 x=0 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt+(\sin\frac{1}{x})\sin x^2}{1}=\lim\limits_{x\to0}-\frac{\cos\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}$

$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0$，且 $\cos\frac{1}{x}$ 有界

$\therefore f'(0)=0$ $\quad$ 又 $\because\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$ $\quad\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

3.（1）$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}8-\lambda&4&-1\\4&-7-\lambda&4\\-1&4&8-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+9)(\lambda-9)^2=0\Rightarrow\lambda_1=-9,\lambda_2=9$

$A+9E=\begin{bmatrix}17&4&-1\\4&2&4\\-1&4&17\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}$

$A-9E=\begin{bmatrix}-1&4&-1\\4&16&4\\-1&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\quad r_3=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}e^{-9t}+C_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{9t}+C_3\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}e^{9t}$

（2）将特解代入：$4e^{2t}+(x+3)e^x+a\left[2e^{2x}+(x+2)e^x\right]+b\left[e^{2x}+(x+1)e^x\right]=Ce^x$

$\therefore\begin{cases}4+2a+b=0\\3+2a+b=c\\1+a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\\c=-1\end{cases}\quad y''-3y'+2y=-e^x\quad\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$

$\therefore$ 通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ $\quad$ 由题知特解 $y^*=xe^x$ $\quad$ 故 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

4.（1）切线：$y-a\ln x_0=\frac{9}{x_0}(x-x_0)$ 过原点 $\Rightarrow x_0=e$ $\quad$ 切点 (e,a)

$\therefore l_2: y=\dfrac{9}{e}x \qquad S=\int_0^e \dfrac{a}{e}xdx-\int_1^e a\ln xdx=\dfrac{ea}{2}-1$

（2）$V=\int_0^a \pi\left[e^{\frac{2y}{a}}-(\dfrac{ey}{a})^2\right]dy=(\dfrac{ae^2}{2}-\dfrac{a}{2})\pi$

5. （1）令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt$ 　　由中值定理：$\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(\theta x) \quad (0<\theta<1)$

即 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$

（2）对（1）中等式两边求导：$f(x)-f(-x)=f(\theta x)-f(-\theta x)+x\left[\theta f'(\theta x)+\theta f'(-\theta x)\right]\Rightarrow$

$\dfrac{f(x)-f(-x)-f(\theta x)+f(-\theta x)}{x}=\theta\left[f'(\theta x)+f'(-\theta x)\right]$ 　即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta\left[f'(\theta x)+f'(-\theta x)\right]=2f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)-f(\theta x)+f(-\theta x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f'(x)+f'(-x)-\theta f'(\theta x)-\theta f'(-\theta x)\right]=2f'(0)-2f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$

$\therefore 2f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=2f'(0)-2f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$

2013 年高数上期末答案

一、计算题

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+\cos x)e^x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos xe^x-2}{\cos x}=0$

2. 两边求导 $(2x+1)f(x^2+x)=2x\Rightarrow f(x^2+x)=\dfrac{2x}{2x+1}$ 　　令 $x=1$，则 $f(2)=\dfrac{2}{3}$

3. $y'=6\sin 3x\cos 3x-\dfrac{2}{5}x\sin\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}=3\sin 6x-\dfrac{2}{5}x\sin\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4. 原式 $=\dfrac{1}{4}\int\ln xdx^4=\dfrac{1}{4}\left[x^4\ln x-\int x^4\cdot\dfrac{1}{x}dx\right]=\dfrac{1}{4}\left(x^4\ln x-\dfrac{x^4}{4}\right)+c$

5. 原式 $\int_{-3}^3|x|e^{-|x|}dx=2\int_0^3 xe^{-x}dx=-2\int_0^3 xde^{-x}=-2\left[xe^{-x}\Big|_0^3-\int_0^3 e^{-x}dx\right]=-2(3e^{-3}+e^{-3}-1)=-8e^{-3}+2$

6. 先求 $xy'-y=0\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx}=y\Rightarrow\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow y=C_1x$ 　　设 $y=h(x)x$ 带入原方程

$x\left[xh'(x)+h(x)\right]-xh(x)=x^3\cos x\Rightarrow x^2h'(x)=x^3\cos x\Rightarrow h(x)=x\sin x+\cos x+C_2$

7. $\lambda^2-2\lambda+5=0\Rightarrow\lambda=1\pm 2i$ 　　$\therefore y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

8. 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，原式 $=\int_0^{+\infty}2te^{-t}dt=-2\int_0^{+\infty}tde^{-t}=-2\left[te^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\right]=-2\left[te^{-t}+e^{-t}\right]\Big|_0^{+\infty}=-2$

二、解答题

1. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}=-\dfrac{2}{\pi}$ 　　$\therefore x=-1$ 为可断间断点

$t=-3,-5,-7\cdots,-(2k+1)$，$\lim\limits_{x\to t}f(x)=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\infty$ 　$\therefore x=-3,-5,-7\cdots,-(2k+1),k\in N^+$ 为无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 　　$f(x)$ 在 $[1,-1]$ 内振荡 　　$\therefore x=2$ 为振荡间断点

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\pi}{x^2-4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=0$ 　　$\therefore x=0$ 为跳跃间断点

2.（1）当 $x \neq 0$ 时， $f'(x)=\dfrac{x\left[g(x)+e^{-x}\right]-g(x)+e^{-x}}{x^2}$

当 x=0 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2} & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{g''(0)-1}{2} & x=0\end{cases}$$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+xg''(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}-g'(x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(0)-1}{2}=f''(0)$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续　　又当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)$ 显然连续　　故 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

3.（1） $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -2\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ -2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(3-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$

$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　$r_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

$A-3E=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & -5 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　$r_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$

$A+3E=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　$r_3=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}e^{3t}+C_3\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}e^{-3t}$

（2） $3f(x)+e^x=2f''(x)+f'(x)\Rightarrow 2f''(x)+f'(x)-3f(x)=e^x$　　$2\lambda^2+\lambda-3=0\Rightarrow\lambda_1=-\dfrac{3}{2},\lambda_2=1$

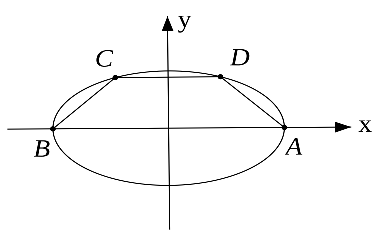
$\therefore$ 通解为 $f(x)=C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2e^x$　　设特解为 $f^*(x)=Axe^x$

代入得： $f^*(x)=\dfrac{x}{5}e^x$　　$\therefore f(x)=C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2e^x+\dfrac{x}{5}e^x$

又 $f(0)=1$　　$f'(0)=\dfrac{1}{5}$　　故 $f(x)=\dfrac{2}{5}e^{-\frac{2}{3}x}+\dfrac{3}{5}e^x+\dfrac{x}{5}e^x$

4.　设 $D(a\cos t,a\sin t),t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $S=\dfrac{(2a\cos t+2a)b\sin t}{2}=ab\sin t\cos t+ab\sin t$

$\dfrac{ds}{dt}=ab(2\cos^2 t+\cos t-1),\cos t\in(0,1)$， $\dfrac{ds}{dt}=0\Rightarrow\cos t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$



故当 $0<t<\dfrac{\pi}{3}$ 时， $\dfrac{ds}{dt}>0$；当 $\dfrac{\pi}{3}<t<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $\dfrac{ds}{dt}<0$

$\therefore t=\dfrac{\pi}{3}$ 时取最大值， $S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

5.（1）由中值定理：$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)\le M$

其中 $\xi\in(a,x), f(a)=0 \quad \therefore f(x)\le M(x-a) \qquad \int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M(x-a)dx\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\dfrac{M}{2}(b-a)^2$

（2）由柯西不等式：$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2\le\int_a^x\left[f'(t)\right]^2dt\cdot\int_a^x dt=(x-a)\int_a^x\left[f'(t)\right]^2dt\le(x-a)\int_a^b\left[f'(t)\right]^2dt$

$\therefore\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b\left[(x-a)\int_a^b\left[f'(t)\right]^2dt\right]dx=\int_a^b\left[f'(t)\right]^2dt\cdot\int_a^b(x-a)dx=\dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b\left[f'(x)\right]^2dx$

2012 年高数上期末答案

一、填空题

1. $(0,\dfrac{1}{4})$

解析：$F'(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0\Rightarrow 0<x<\dfrac{1}{4}$

2. $f(0)=0$；$f'(0)=2$

解析：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$

3. $a=1$

解析：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=1$

4. $a=0,b=1$

解析：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{ax}=1 \qquad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}b(1-x^2)=b \qquad \therefore b=1$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续：$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x} \qquad \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{b(1-x^2)-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=0\Rightarrow a=0$

5. $a=9$

解析：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2}{3x}=\dfrac{a}{9}=1\Rightarrow a=9$

二、计算题

1. 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(x-1)-1}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi^2}$

2. $f'(x)=\dfrac{2x(x-3)-(x^2-5)}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0\Rightarrow(x-5)(x-1)=0\Rightarrow x=1$ 或 5 　　定义域：$x\ne3$ 且 $x\in R$

$\therefore$ 增区间 $(-\infty,1)$，$(5,+\infty)$ 　　　　减区间 $(1,3)$，$(3,5)$

$x=1$ 时取极大值 $f(1)=2+\int_{-1}^{1}(1+2x\sqrt{1-x^2})dx=2+\int_{-1}^{1}dx=4$；$x=5$ 时取极小值 $f(5)=12$

3. 原式$=\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\xrightarrow{令t=\frac{1}{x}}=\int_t^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}(-\dfrac{1}{t^2})dt=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$，令 $t=\tan\theta$，则原式$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\xrightarrow{令u=\sin\theta}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{(1-u)(1+u)}du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

4. $y'+xy=x^3y^2\Rightarrow y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3$，令 $u=y^{-2}$，则 $u'=-2y^{-3}y'$　$\therefore -\frac{1}{2}u'+xu=x^3\Rightarrow u'-2xu=-2x^3$

先求 $\frac{du}{dx}-2xu=0\Rightarrow\frac{du}{u}=2xdx\Rightarrow u=c_1e^{x^2}$　　设 $u=h(x)e^{x^2}$，则 $\left[h'(x)+2xh(x)\right]e^{x^2}-2xh(x)e^{x^2}=-2x^3$

$h'(x)=-2x^3e^{-x^2}\Rightarrow h(x)=(x^2+1)e^{-x^2}+c_2$　　$\therefore u=x^2+1+ce^{x^2}$

5. $\lambda^2+4\lambda+5=0\Rightarrow\lambda=-2\pm i$　　$\therefore x=e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$

6.（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$　　$\begin{cases}y=\cos x\\ y=a\sin x\end{cases}\Rightarrow x=\arctan\frac{1}{a}$

$\therefore\int_0^{\arctan\frac{1}{a}}(\cos x-a\sin x)dx=\sqrt{a^2+1}-a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

（2）$V=\int_0^{\arctan\frac{4}{3}}\pi(\frac{3}{4}\sin x)^2dx+\int_{\arctan\frac{4}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2xdx=\frac{\pi^2}{4}-\frac{7}{32}\pi\arctan\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\pi$

7.（1）$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{2x}=\frac{f(0)}{2}=0$

（2）　$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(x)dt}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{f'(0)}{3}$

当 $x\neq0$ 时，$F'(x)=\frac{x^3f(x)-2x\int_0^x tf(t)dt}{x^4}$　　$\lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-2xf(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{f'(0)}{3}=F'(0)$　　$\therefore F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

8. （1）$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&4-\lambda&-2\\-3&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(6-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=6$

$A-2E=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　　$r_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$　　$r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$A-6E=\begin{bmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$　　$r_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{2t}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{2t}+C_3\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}e^{6t}$

（2）$\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$　　$\therefore$ 通解为 $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$

设特解为 $x^*=Ate^t$　　代入得：$x^*=-4te^t$　　故 $x=C_1e^t+C_2e^{2t}-4te^t$

9. 由积分中值定理：$2\cdot e^{\lambda(\eta-b^2)}f(\eta)\cdot(\frac{a+b}{2}-a)=(b-a)f(b)\Rightarrow f(\eta)e^{\lambda(\eta-b^2)}=f(b)$　　$\eta\in(a,\frac{a+b}{2})$

令 $g(x)=f(x)e^{\lambda(\eta^2-b^2)}$，则 $g(\eta)=g(b)$　　又 $g(x)[a,b]\exists\xi\in(\eta,b),g'(\xi)=0$

即 $\left[f'(\xi)+2\lambda\xi f(\xi)\right]e^{\lambda(x^2-b^2)}=0\Rightarrow f'(\xi)+2\lambda\xi f(\xi)=0$

10.（1）将 $y=e^x$ 代入得：$e^x+P(x)e^x+Q(x)e^x=0\Rightarrow 1+P(x)+Q(x)=0$

将 $y=x$ 代入得：$P(x)+Q(x)x=0$

（2）$\because (x-1)y''-xy'+y=0$ 满足 $1+P(x)+Q(x)=0$，$P(x)+Q(x)x=0$

由（1）知 $y=e^x$，$y=x$ 为方程的特解　故通解为 $y=C_1e^x+C_2x$

又 $y(0)=2$，$y'(0)=1$　　$y=2e^x-x$

（3）由（2）知通解为 $y=C_1e^x+C_2x$　　观察得特解可取 $y^*=1$

$\therefore y=C_1e^x+C_2x+1$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[y(x)-1\right]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y'(x)}{y(x)-1}=-1\Rightarrow\begin{cases}y(0)=2\\ y'(0)=-1\end{cases}$　　$\therefore y=e^x-2x+1$

2011 年高数上期末答案

一、填空题

1. $k=2$

解析：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{x}=2$　　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x^2-2x+k)=k$　　$\therefore k=2$

2. 2π

解析：令 $x=2\sin\theta$

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\theta)2\cos\theta 2\cos\theta d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+2\sin\theta\cos^2\theta)d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2\pi$

3. $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

解析：$\lambda^3+1=0\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

4. $\dfrac{2x\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}$

二、单选题

1. B

解析：$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=-2$　$\therefore f'(5)=f'(5-4)=-2$

2. D

解析：$\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm1$

3. D

解析：$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(\ln x)\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\sin 1$　　$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\left[\ln(-x)\right]\sin\frac{1}{x}}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\ln|x|\right)\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}-x(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}$　　$\because\lim\limits_{x\to 0}x\ln|x|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

且 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界故上式极限为 0　　$\therefore$ 可断间断点为 ±1，0

4. B

解析：设 $f(x)=\tan x-x$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{4}),f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x-1}>0$　　$\therefore f(x)$ 单调增

$f(x)>f(0)=0$　　$\therefore\tan x-x>0\Rightarrow\tan x>x\Rightarrow\tan^2 x>x^2\Rightarrow\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\tan x},x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$

设 $g(x)=\dfrac{\tan x}{x}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，则 $g'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

令 $h(x)=x-\sin x\cos x$，则 $h'(x)=1-\cos 2x>0$ $\quad\therefore h(x)$ 单调增，$h(x)>h(0)=0$

$\therefore g'(x)>0$，$g'(x)$ 单调增 $\quad\therefore g(x)<g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{4}{\pi}$ $\quad$ 即 $\dfrac{\tan x}{x}<\dfrac{4}{\pi}$

故 $\dfrac{4}{\pi}>\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\tan x}$ $\quad\therefore 1>I_1>I_2$

三、计算题

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{6x^2\left(1+x^2\right)}=-\dfrac{1}{6}$

2. 原 式 $=-\int\dfrac{x}{\cos^5 x}d\cos x=\dfrac{1}{4}\int x d\cos^{-4}x=\dfrac{x\cos^{-4}x}{4}-\dfrac{1}{4}\int\cos^{-4}xdx=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{4}\left[\int\tan^2 xd\tan x+\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx\right]$

$=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{12}\tan^3 x-\dfrac{1}{4}\tan x+C$

3. 令 $\sqrt{x}=t$，则原式 $=\int_1^2\dfrac{\ln t^2}{t}\cdot 2tdt=4\int_1^2\ln tdt=4(t\ln t-t)\Big|_1^2=4(2\ln 2-1)$

4. $\dot{x}=t^2\cdot 2t=2t^3,\ddot{x}=bt^2,\dot{y}=-2t\cdot t^4\ln t^2=-4t^5\ln t$，$\ddot{y}=--4t^4(5\ln t+1)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=$

$\dfrac{2t^3\left[-4t^4(5\ln t+1)-6t^2(-4t^5\ln t)\right]}{(2t^3)^3}=-\dfrac{2\ln t+1}{t^2}$

5. 先求 $xy'-3y=0\Rightarrow\dfrac{dy}{y}=\dfrac{3dx}{x}\Rightarrow y=c_1x^3$ $\quad$ 令 $y=h(x)x^3$

则 $x\left[h'(x)x^3+3x^2h(x)\right]-3h(x)x^3=x^4e^x\Rightarrow h'(x)=e^x$ $\quad$ 故 $h(x)=e^x+c_2$ $\quad\therefore y=(e^x+c)x^3$

6. （1）$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(9-\lambda)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=9,\lambda_3=-1$

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$A+E=\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\quad r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$A-9E=\begin{bmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\quad r_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{-t}+C_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}e^{9t}$

（2）$\lambda^2-4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$ $\quad\therefore$ 通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

设特解为 $y^*=Ax^2e^{2x}$ $\quad$ 代入得：$y^*=\dfrac{3}{2}x^2e^{2x}$ $\quad$ 故 $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\dfrac{3}{2}x^2e^{2x}$

7. $y'=2x$ 切线：$y-x_0^{\ 2}=2x_0(x-x_0)$ 切点：$(x_0,x_0^{\ 2})$

$S=\int_{\frac{x_0}{2}}^{8}(2x_0x-x_0^{\ 2})dx=\frac{x_0^{\ 3}}{4}-8x_0^{\ 2}+64x_0$ $S'=\frac{3x_0^{\ 2}}{4}-16x_0+64=0\Rightarrow x_0=\frac{16}{x}$

当 $0<x_0<\frac{16}{3}$ 时，$S'>0$；当 $\frac{16}{3}<x_0<8$ 时 ,$S'<0$ $\therefore x_0=\frac{16}{3}$ 时 S 最大，对应点为 $\left(\frac{16}{3},\frac{256}{9}\right)$

8.（1）由柯西不等式：$\left|f(x)\cdot\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]$ $\because\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 均收敛

$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]dx$ 收敛 $\therefore\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx$ 收敛 故 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛

（2）原式 $=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x dx^{-2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\arctan x}{x^2}\Bigg|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}d\arctan x\right]=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{x}-\arctan x)\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow f(1)=0$ $\therefore\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$

当 $x\ne1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^1 f'\left[1+(x-1)t\right]=\frac{f\left[1+(x-1)t\right]}{x-1}\Bigg|_0^1=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}$

当 $x=1$ 时，$\varphi(1)=\int_0^1 f'(1)dt=0$ 在 $x=1$ 的邻域内：$\varphi'(x)=\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}$

$\varphi'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f''(1)}{2}$

$\because\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)+(x-1)f''(x-1)-f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(1)}{2}=\varphi'(1)$

$\therefore\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处连续

2010 年高数上期末答案

一、填空题

1. $y-1=2(x-1)$

解析：设切点 $(x_0,x_0^{\ 2})$，则 $2x_0\cdot(-\frac{1}{2})=-1\Rightarrow x_0=1$ $\therefore$ 切线：$y-1=2(x-1)\Rightarrow y=2x-1$

2. $y=C_1e^x+C_2x^2+3$

3. $\frac{19}{4}$

解析：令 $t=x^2$，$f'(x^2)=\frac{df(x^2)}{dx}=\frac{df(x^2)}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{dx}\Rightarrow x^3=f'(t)\cdot2x\Rightarrow f'(t)=\frac{t}{2}\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+3}{4}$ $\therefore f(4)=\frac{19}{4}$

二、计算题

1. B

解析：$f'(a)=0$ 令 $x=a$，则 $f''(a)+2f'(a)=\int_a^{a+1}e^{f(t)}dt>0\Rightarrow f''(a)>0$ $\therefore x=a$ 处取极小值

2. A

解析：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\ln(1-x)}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot(-x)}{x^2}=-2$

三、解答题

1. $y'=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}=\dfrac{x\ln x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln x+1}{3x\sqrt{x^2-1}}=+\infty$

2. $\dot{x}=e^{-t^2}\qquad \ddot{x}=-2te^{-t^2}\qquad \dot{y}=\left[2t-2t(1+t^2)\right]e^{-t^2}=-2t^3e^{-t^2}\qquad \ddot{y}=(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{e^{-t^2}\cdot(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}-(-2te^{-t^2})(-2t^3e^{-t^2})}{e^{-3t^2}}=\dfrac{-6t^2}{e^{-t^2}}$ $\qquad\therefore \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-6e$

3. 原式 $=\int\ln(e^x+1)de^x=(e^x+1)\left[\ln(e^x+1)-1\right]+C$

4. 先求 $2xy'=y\Rightarrow\dfrac{2dy}{y}=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow y=C_1\sqrt{x}$ 设 $y=h(x)\sqrt{x}$，则 $2x\left[h'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}h(x)\right]=h(x)\sqrt{x}+2x^2\Rightarrow$

$h'(x)=\sqrt{x}\Rightarrow h(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2\qquad \therefore y=(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)\sqrt{x}=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\sqrt{x}$

5. （1）$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad r_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$A-E=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$A-4E=\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad r_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}e^t+C_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}e^{4t}$

（2）$\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1\qquad\therefore$ 通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$

设特解为 $y^*=Axe^x$ 代入得：$y^*=\dfrac{1}{3}xe^x$ 故 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\dfrac{1}{3}xe^x$

6. $I=\int_0^{+\infty}xd\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\left.\dfrac{x}{1+e^{-x}}\right|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}dx=\left.\dfrac{x}{1+e^{-x}}\right|_0^{+\infty}-\ln(e^x+1)\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{1+e^{-x}}-\ln(e^x+1)\right]+\ln2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x-(e^x+1)\ln(e^x+1)}{e^x}+\ln2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)e^x-\left[e^x+e^x\ln(e^x+1)\right]}{e^x}+\ln2=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln(e^x+1)+\ln2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}+\ln2=\ln2$

7. $\begin{cases}0=c\\2=a+b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\c=0\end{cases}\qquad y=ax^2+bx=x(ax+b)\Rightarrow x_1=-\dfrac{b}{a},x_2=0$

$\because a<0,b=2-a>0\qquad\therefore x_1>0$

$$S=\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\Big|_0^{-\frac{b}{a}}=-\frac{b^3}{3a^2}+\frac{b^3}{2a^2}=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{(2-a)^3}{6a^2}$$

$$\frac{ds}{da}=\frac{-3(2-a)^2a^2-2a(2-a)^3}{6a^4}=\frac{-(2-a)^2(a+4)a}{6a^4}=0\Rightarrow a=-4$$

$\therefore a=-4;b=-6;c=0$ $\quad y=x(-4x+6)$ $\quad \dot{V}=\int_0^{\frac{9}{4}}\pi\frac{6\sqrt{36-4\cdot(-4)\cdot(-y)}}{(-4)^2}dy=\frac{3\pi}{4}\int_0^{\frac{9}{4}}\sqrt{9-4y}dy=\frac{27\pi}{8}$

8. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$存在$\Rightarrow f(a)=0$ $\quad \because f'(x)>0$ $\quad \therefore f(x)\geq f(a)=0$ $\quad$ 设$g(x)=x^2$

$h(x)\int_a^x f(t)dt$ $\quad$ 由柯西中值定理：$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$ $\xi\in(a,b)$

即$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\frac{2\xi}{f(\xi)}\Rightarrow\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$

本试题集答案由彭康学导团制作，如有错误，请在学习群里反馈给我们。试题集适合学习高数 1 的机类、化工等专业使用，其它专业请选择性参考。如有打印店以此盈利，请勿购买。

彭康学导团 QQ 学习群彭小帮 2.0：397499749

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描右侧二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。