第一章　函数、极限、连续

第一节 集合、 映射与函数

- 集合及其运算
- 实数集完备性、确界存在定理
- 映射与函数
- 线性函数
- 复合映射与复合函数
- 逆映射与反函数
- 初等函数与双曲函数

作业：

习题1.1　A　1(1),(3), 3, 4(2), 9, 12, 15

一、集合及其运算

1. 集合: 具有某种特定性质的事物的总体.

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

$a \in M$, $a \notin M$, $\cdots$

列举法: $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有限集

$B = \{x \mid 1 \le x^2 \le 4\}$ 无限集

示性法: $M = \{x \mid x$所具有的特征$\}$

若$x \in A$, 则必$x \in B$, 就说A是B的子集,

记作: $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$;

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则 $A \subsetneqq B$. $(A \subset B)$

上页 下页 返回

数集分类: **N={0,1,2,…}----自然数集**

N+(或N*）-----正整数集

Z----整数集 **Q----有理数集** **R----实数集**

数集间的关系: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$

不含任何元素的集合称为空集. (记作 $\varnothing$)

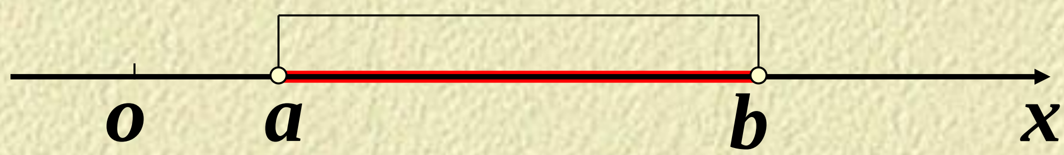
例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$

规定: 空集为任何集合的子集.

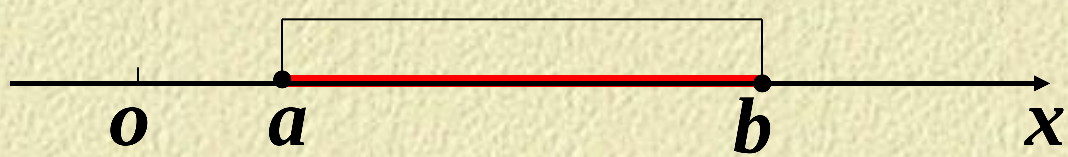
2. 区间: 是指介于某两个实数之间的全体实数构成的集合.这两个实数叫做区间的端点.

$\forall\, a,b \in R$, 且 $a < b$.

$\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a,b)



$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a,b]$



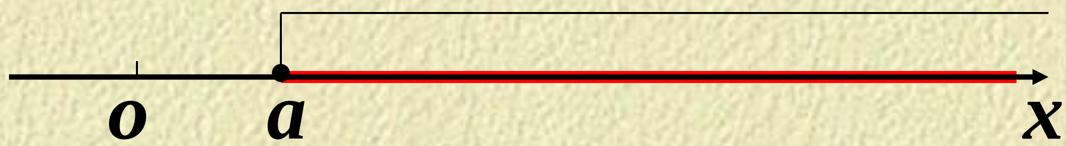
$\{x \mid a \le x < b\}$ 称为半开区间， 记作 $[a,b)$

$\{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间， 记作 $(a,b]$

有限区间

$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x\}$ $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$

无限区间



区间长度的定义:

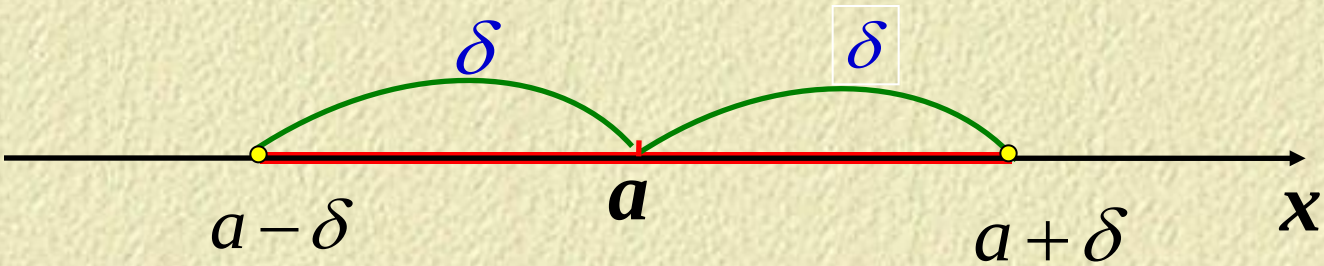
两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

3. 邻域： 设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x-a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径

$$U_\delta(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$



点a的去心的δ邻域，记作$\overset{o}{U}_\delta(a)$.

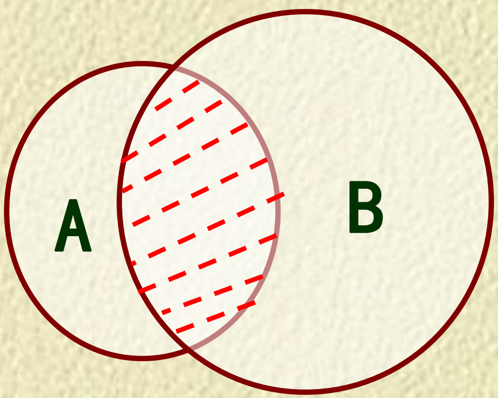
$$\overset{o}{U}_\delta(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

4. 集合的运算

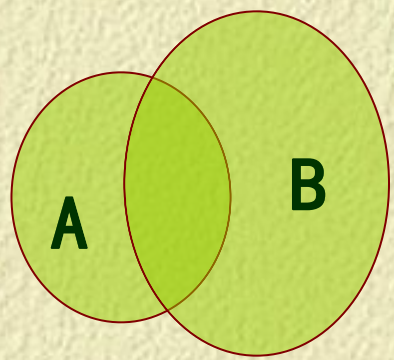
交: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{且} x \in \mathbf{B}\}$

并: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{或} x \in \mathbf{B}\}$

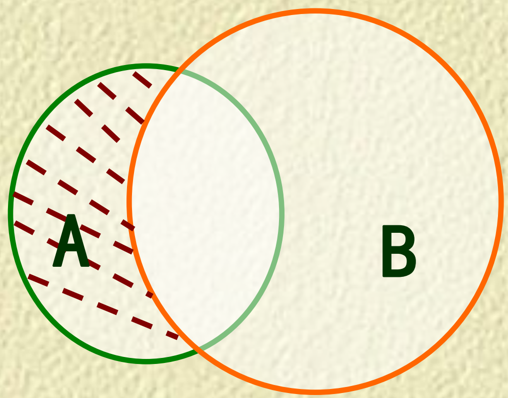
差: $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{但} x \notin \mathbf{B}\}$



$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$



$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$



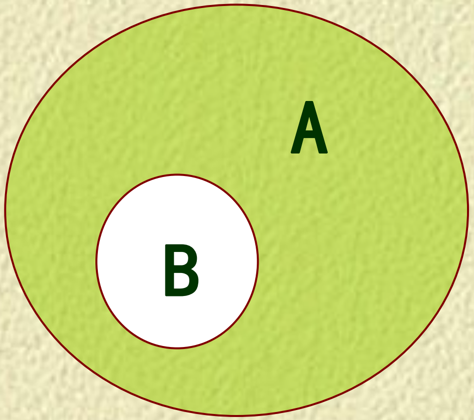
$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$

余(补)： 若$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$，则称差集A\B为B关于A的余集。

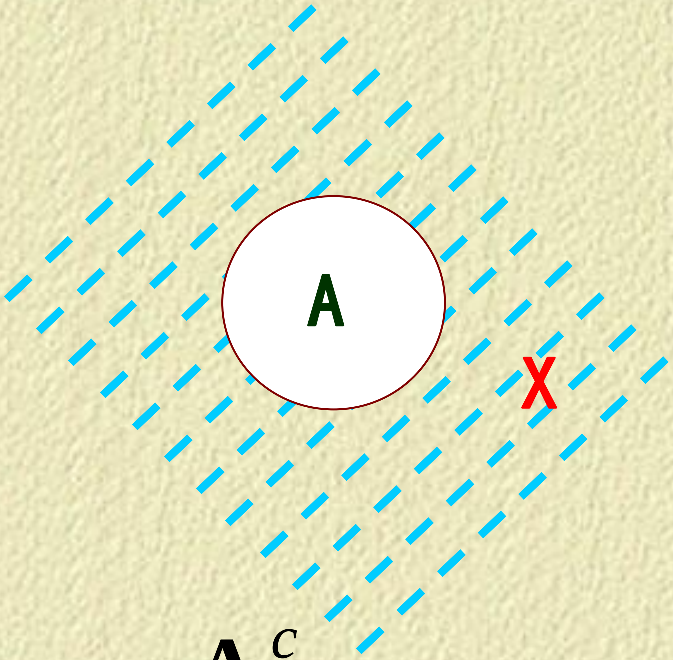
若X为全集，则X\A称为A的余集。记做：$\mathbf{A}^{c}$

complement

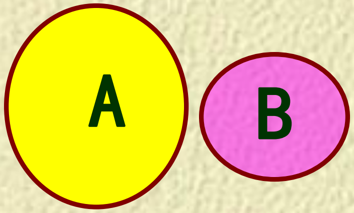
不相交： $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \Phi$



A\B



$\mathbf{A}^{c}$



$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \Phi$

上页 下页 返回

法则1： 设A, B, C为任意三个集合，则

（1）交换律： $A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$

（2）结合律：

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

（3）分配律：

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$
$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$$

（4）幂等律： $A\cap A=A,\ A\cup A=A$

（5）吸收律： $A\cap\Phi=\Phi,\ A\cup\Phi=A$

若$A\subseteq B$, $A\cap B=A,\ A\cup B=B$

法则2：（对偶律）

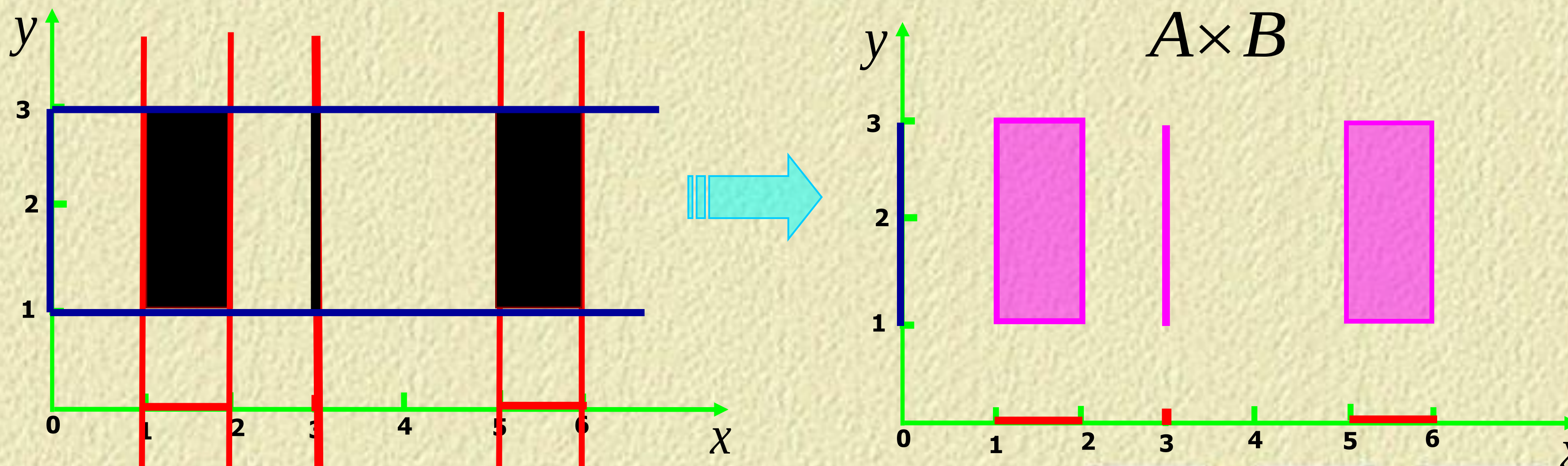
$$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c, (A\cup B)^c = A^c \cap B^c$$

积集： $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \{(x, y) | x\in\mathbf{A}, y\in\mathbf{B}\}$

例1： $A = \{x|1\le x\le 2\}\cup\{x|5\le x\le 6\}\cup\{3\}$

$B = \{y|1\le y\le 3\}$ **在直角坐标平面画出** $A\times B$

解：



上页 下页 返回

二、实数集完备性与确界存在定理

1. 有理数 rational number

一切形如 $\frac{q}{p}(p \in Z, q \in N_{+}, p\text{与}q\text{互质})$ 的数

2. 有理数集的性质 对有理运算的封闭性

有序性 $a < b, a > b. a = b.$ (化为十进制小数)

稠密性 任意两个有理数之间必存在另一个有理数？

(算术平均)

但在数轴上有空隙，不具备完备性 如$\sqrt{2}, \sqrt{2} \pm 1, \sqrt{2} \pm 2, \cdots$

3. 实数集

同时具备对有理运算的封闭性、有序性、稠密性、完备性

完备性：实数集与坐标轴上的点是一一对应的.

4. 集合的有界性

定义1.1（上有界、下有界）

上有界：$\exists L \in R$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \le L$;

下有界：$\exists l \in R$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \ge l$;

有界：既有上界又有下界：

$$\boxed{\text{有界} \Leftrightarrow \exists M > 0, s.t. \forall x \in A, \text{有} |x| \le M.}$$

定义1.2（确界）

1) 上确界： 设 $A \subseteq R, A \ne \phi$, 若存在 $s \in R$, 满足

1) $\forall x \in A, x \le s$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A$, 使 $x_0 > s - \varepsilon$.

记为 $\boxed{\operatorname{Sup} A = s.}$ supremum; least upper bound;

2) 下确界： $\boxed{\inf A}$ infimum; greatest lower bound;

上页 下页 返回

定义1.2（确界）

1）上确界：设 $A\subseteq R, A\neq\phi$，若存在 $s\in R$，满足

1) $\forall x\in A, x\leq s;$

2) $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in A$，使 $x_0>s-\varepsilon.$

记为 $\boxed{\mathrm{Sup}A=s.}$ supremum; least upper bound;

2）下确界：$\boxed{\inf\ A}$ infimum; greatest lower bound;

注：(1)上确界即为最小上界;下确界即为最大下界;

(2)如果数集有上(下)确界，则上(下)确界唯一;

(3)确界可属于数集，也可不属于数集。$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $\{\sin t\}$

$\mathrm{Sup}A$ 与 $\max A$ 有别， $\inf\ A$ 与 $\min A$ 有别。

(4)并非任何数集都有确界。如：

$A=Z$： $SupA=+\infty; \inf\ A=-\infty.$

上页 下页 返回

定理1.1（确界存在定理）任何有上(下)界的非空实数集必有上(下)确界，且其上(下)确界仍为实数。

注：1）确界存在定理在有理数集上不成立.

1, 1.4, 1.41, 1.414, …, 上确界为sqrt(2), 不是有理数

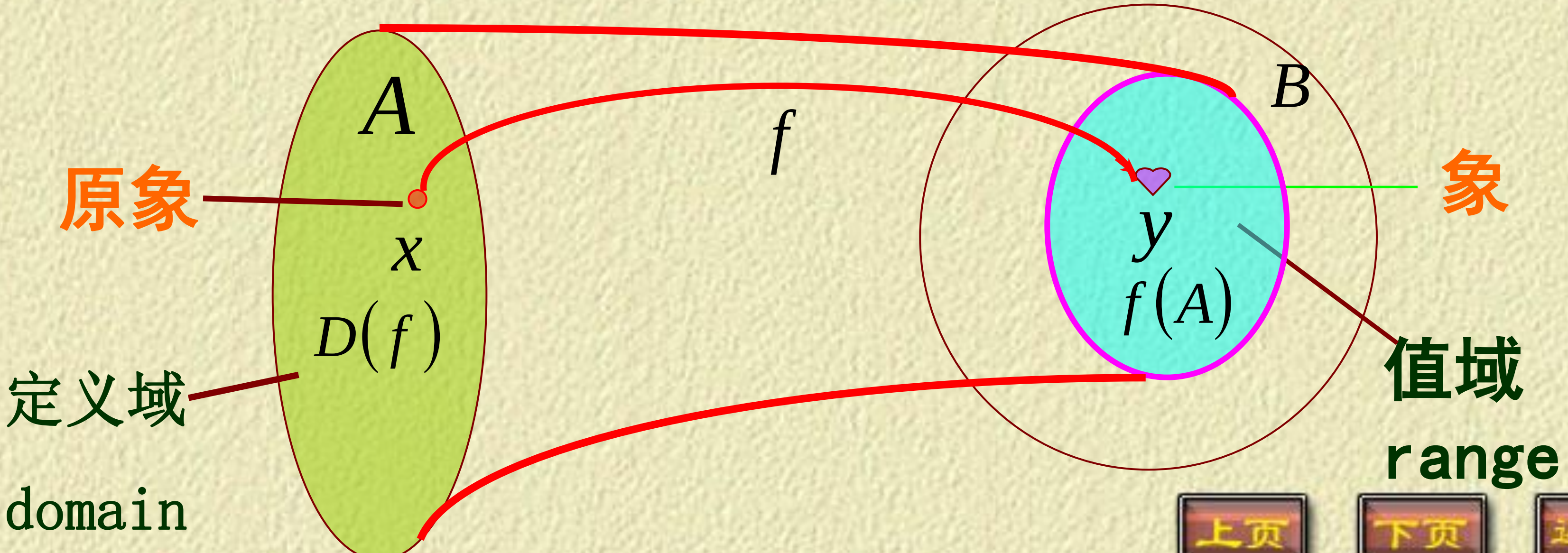
2）是刻画实数完备性的一个基本定理。

三、映射与函数的概念

定义1.1(映射) 设集合A和B非空，若对于每个$x \in A$，按照某种确定的对应法则 f ，有唯一确定的$y \in B$与它对应，则称 f 为从A到B的一个映射。

记为： $f : A \to B$ 或 $f : x \mapsto y = f(x), x \in A$

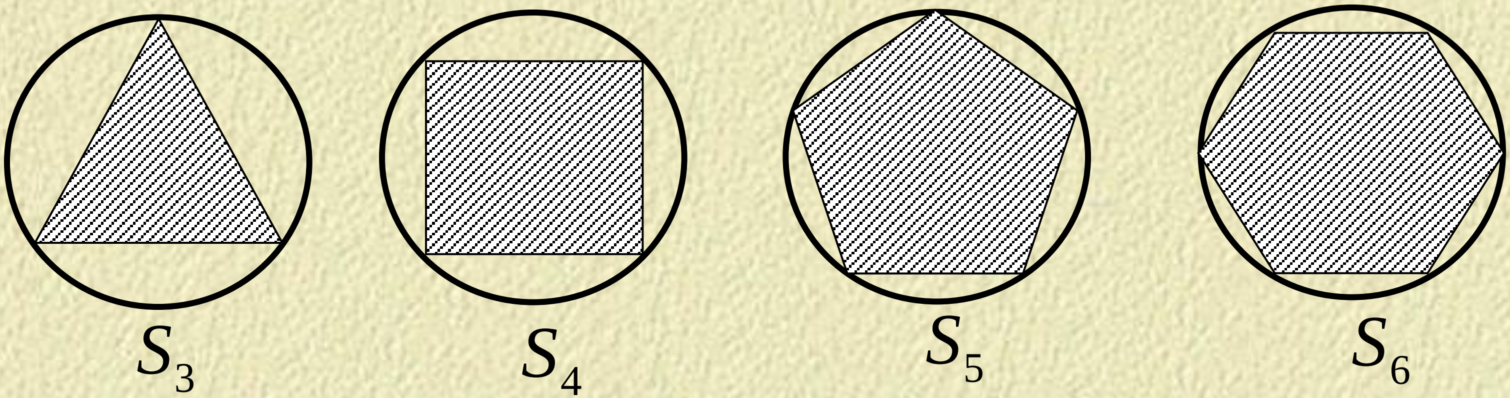
映射也称为算子，若B为数集，则称映射 $f : A \to B$ 为泛函。

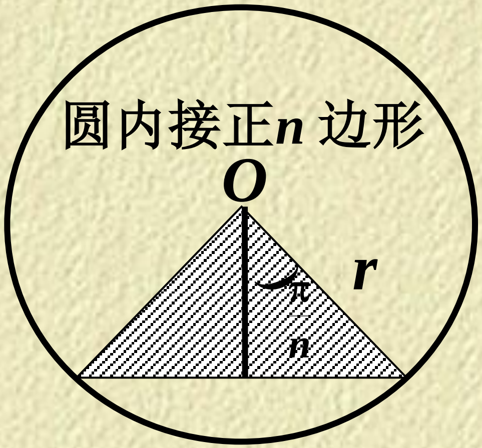


上页 下页 返回

映射的两要素：定义域与对应法则.

例2. 单位圆内接正n边形的面积。





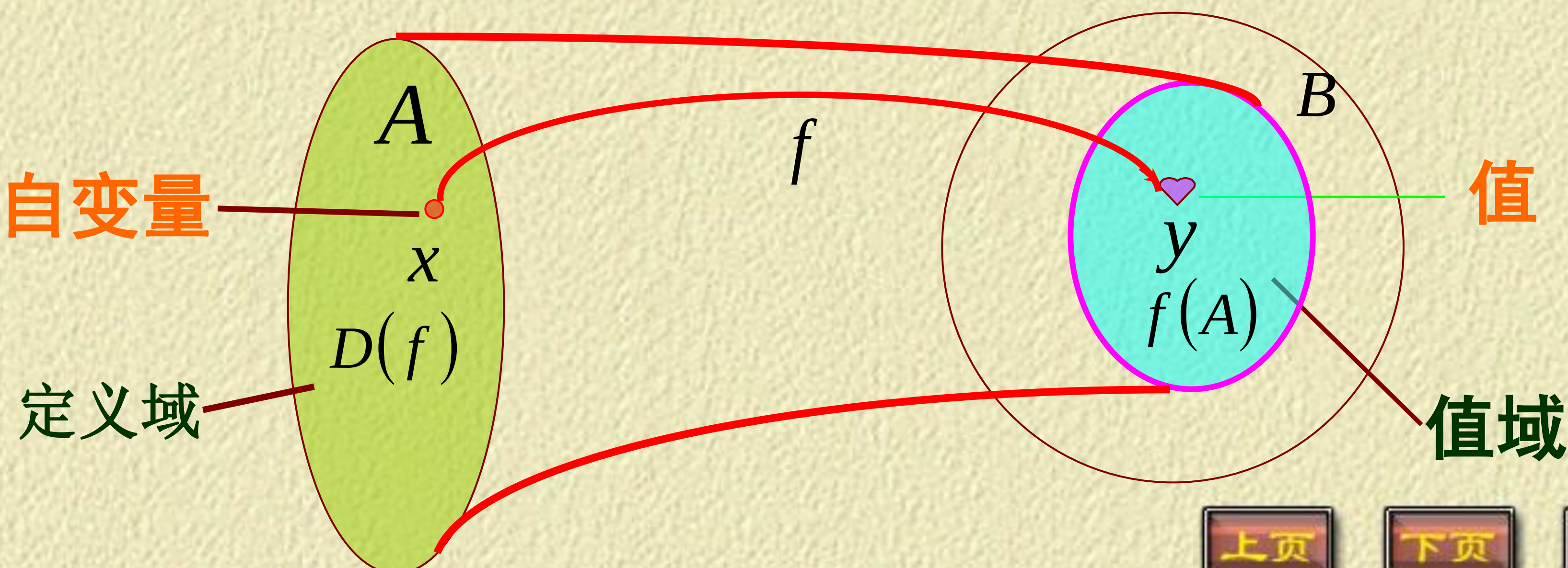
$$S_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$n = 3,4,5,\cdots$$

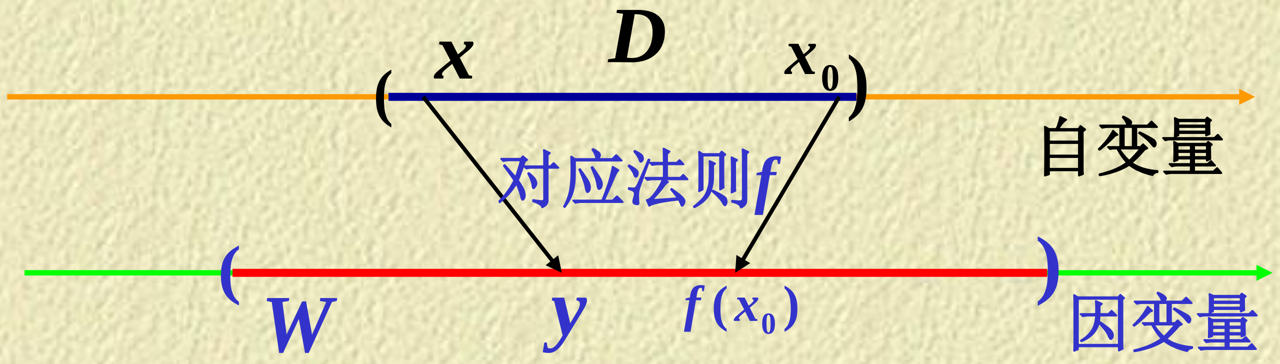
定义1.2(函数) 设数集A和B非空，则称映射：$f: A \to B$ 为一元函数，简称函数。

记为：$\boxed{y = f(x)}$

因变量 自变量



函数的两要素：定义域与对应法则.



约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

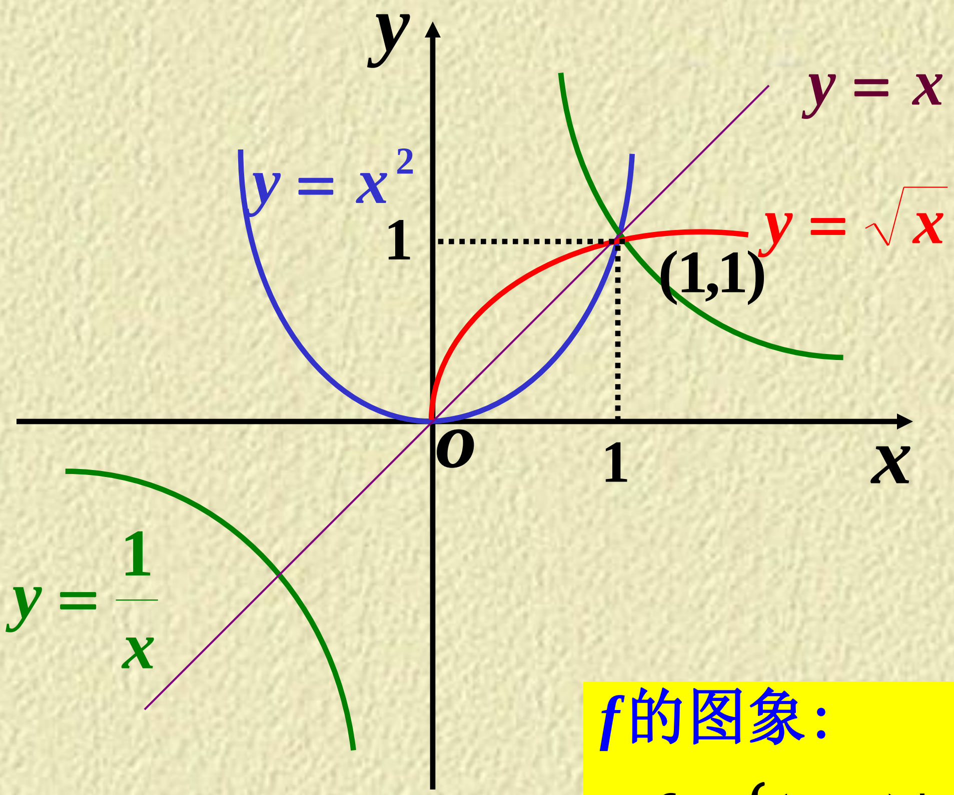
例如，$y=\sqrt{1-x^2}$　　$D:[-1,1]$

例如，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$D:(-1,1)$

基本初等函数

1.常值函数 $y = a$

2.幂函数 $y = x^{\mu}$ (μ是常数)

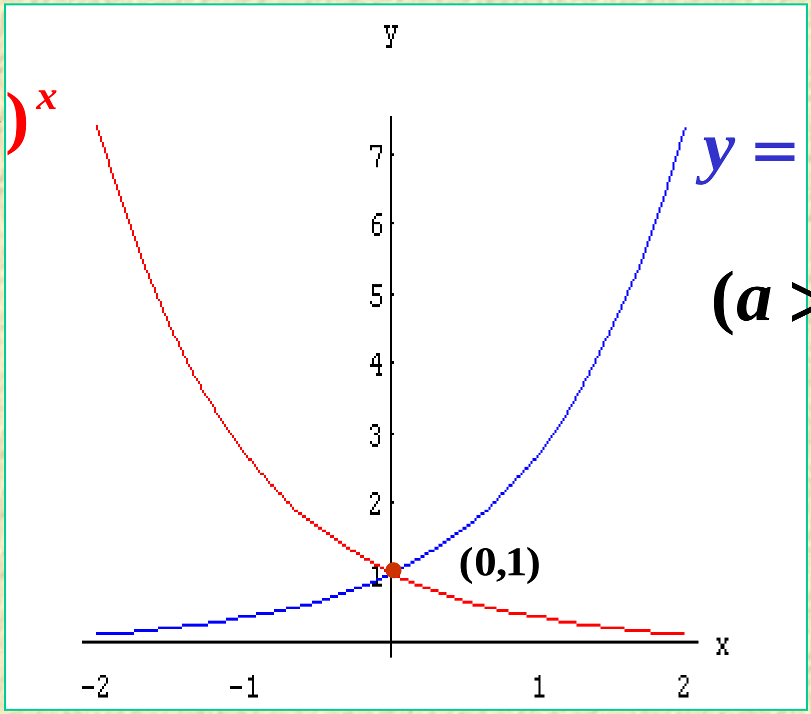


*f*的图象:

$Grf = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$

3.指数函数　$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$　　$y = e^x$

$y = (\frac{1}{a})^x$

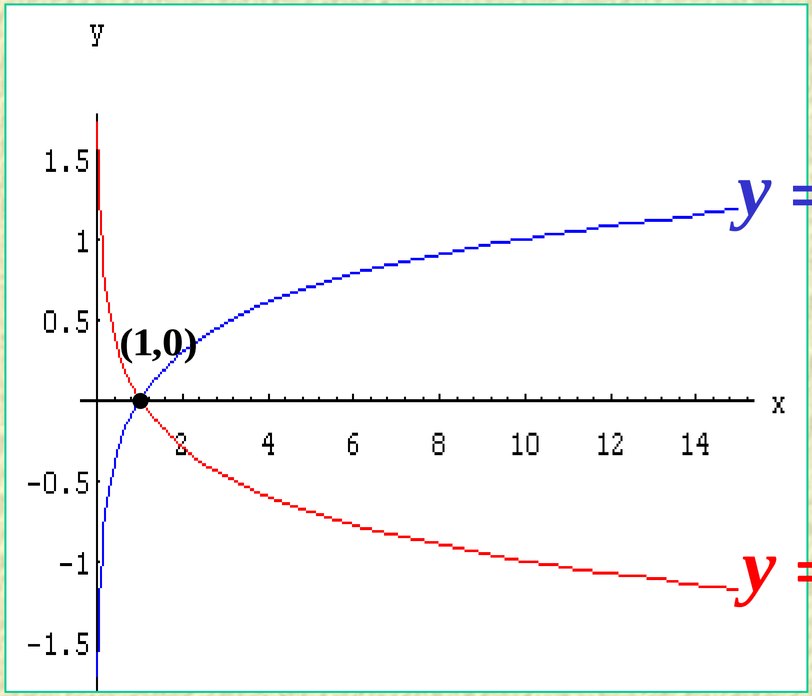


$y = a^x$

$(a > 1)$

上页　下页　返回

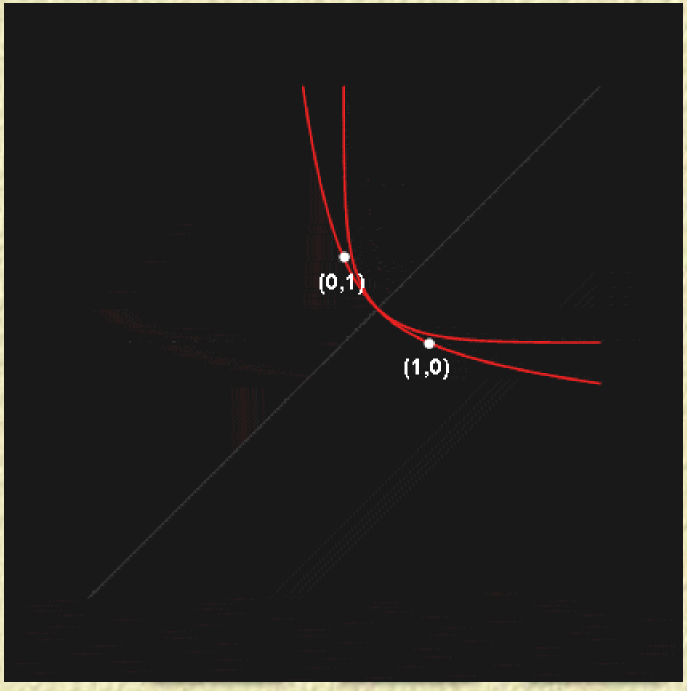
4.对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1) \quad y=\ln x$



$y=\log_a x$

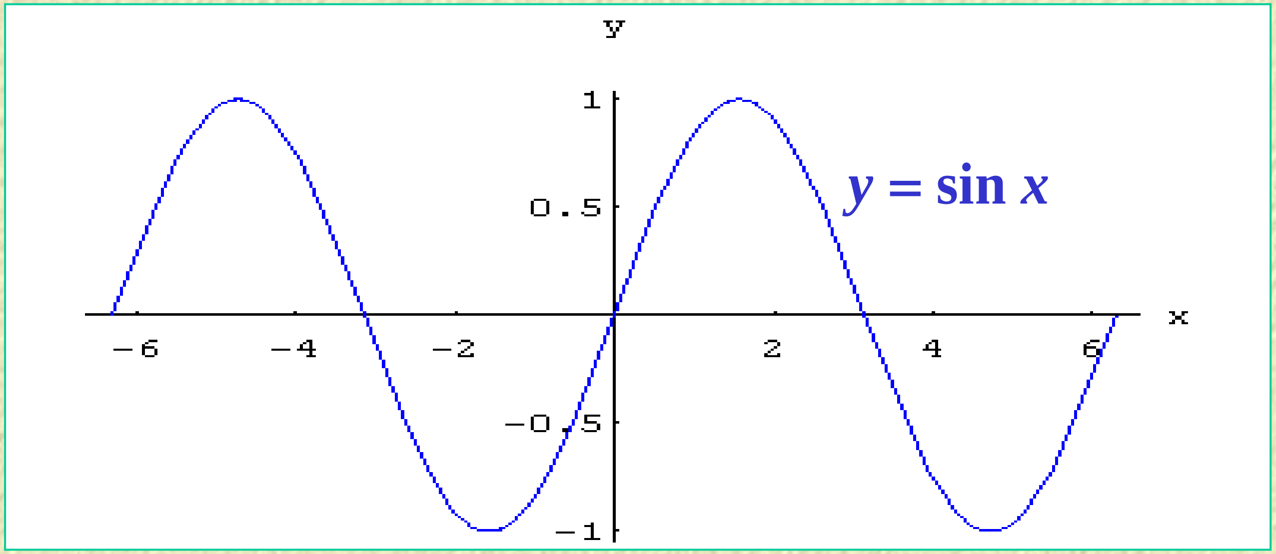
$(a>1)$

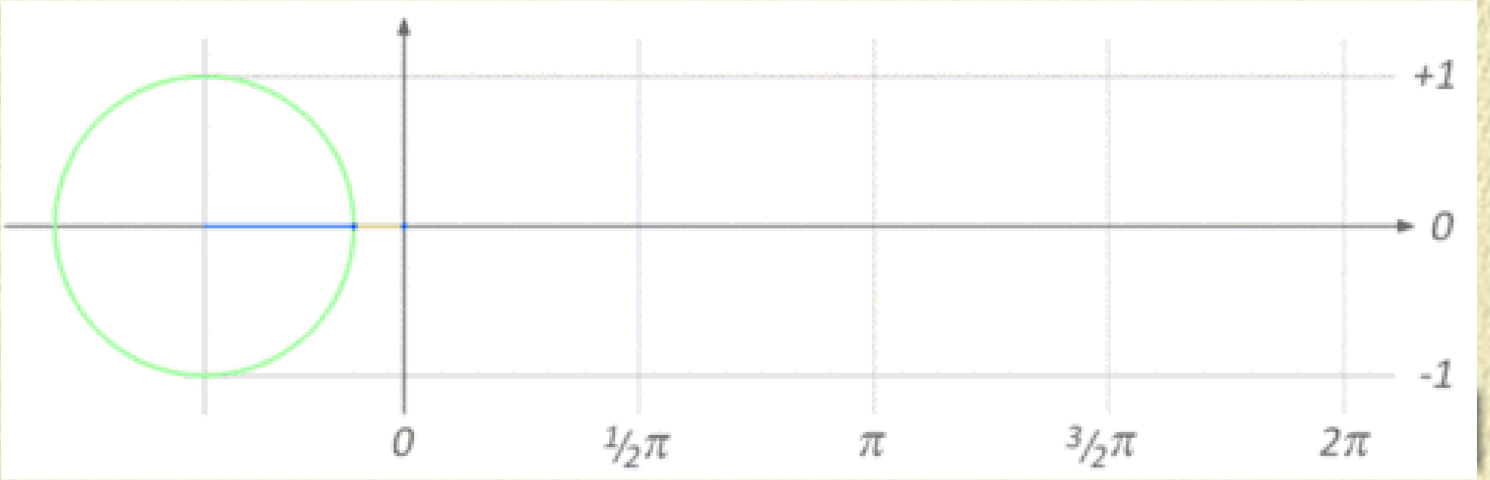
$y=\log_{\frac{1}{a}} x$



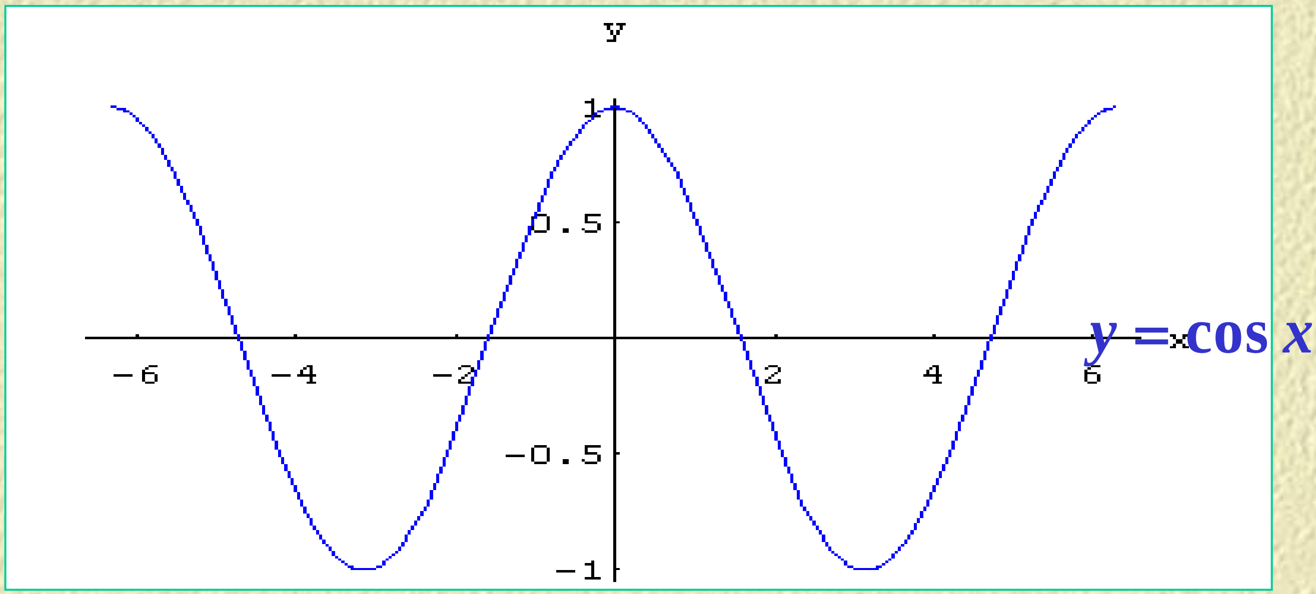
5.三角函数

正弦函数 $y = \sin x$



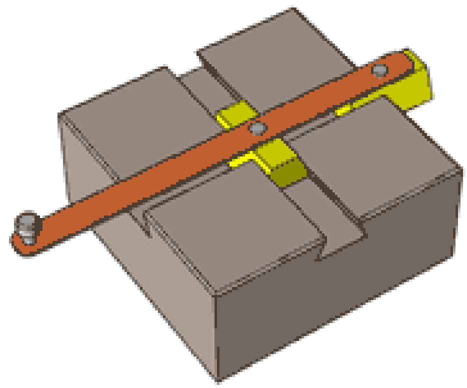


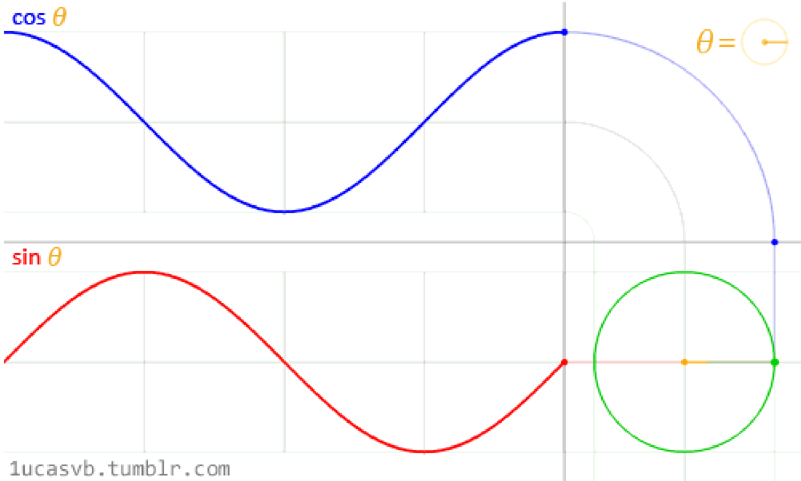
余弦函数 $y = \cos x$

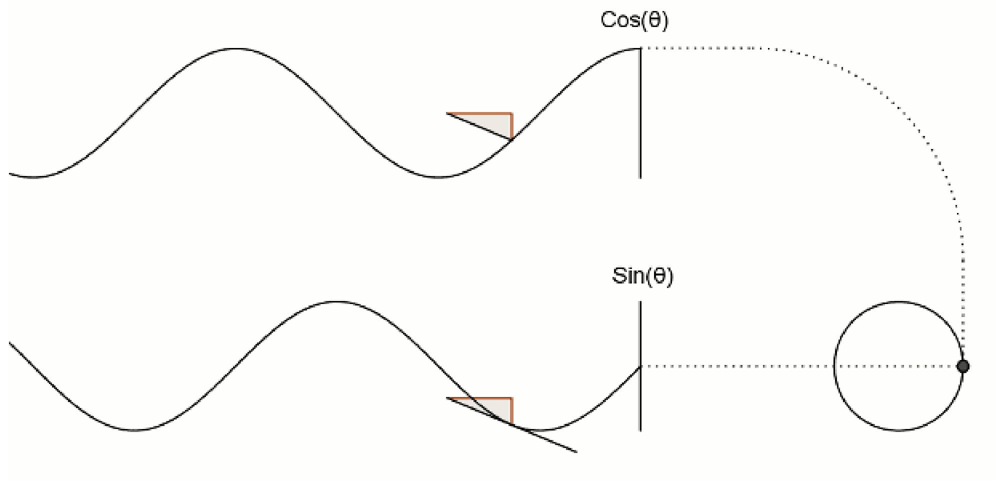


正弦函数、余弦函数和圆之间的基本关系

注意曲轴是如何在一个圆中移动的，而上下左右移动形似波浪的支杆则对应正弦函数和余弦函数。

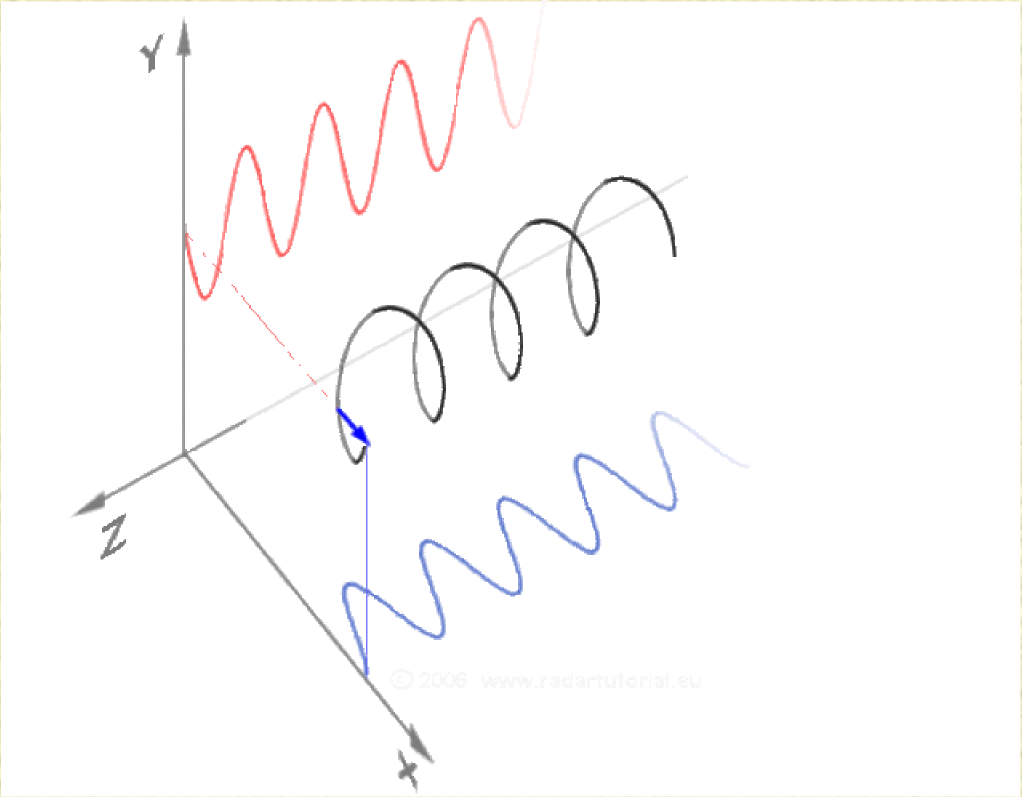






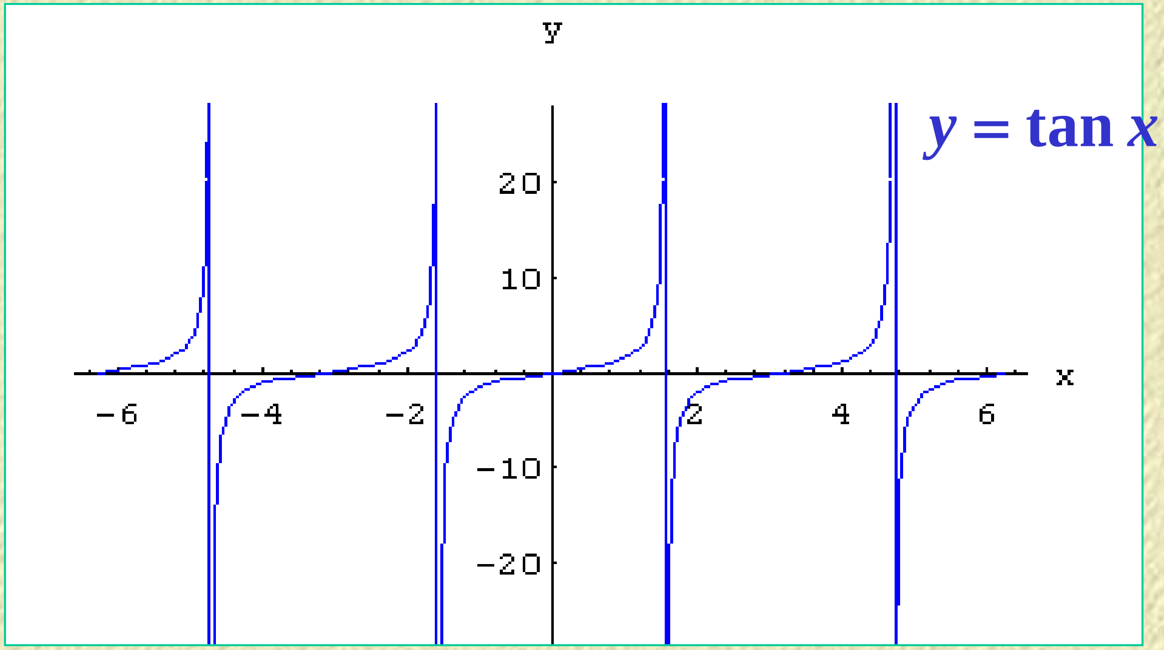
三角函数、圆与三角形的关系

图中的黑线为圆，正弦函数和余弦函数分别依附圆周形成各自的路径。Y值（红线部分）为正弦函数值，X值（蓝线部分）为余弦函数值。



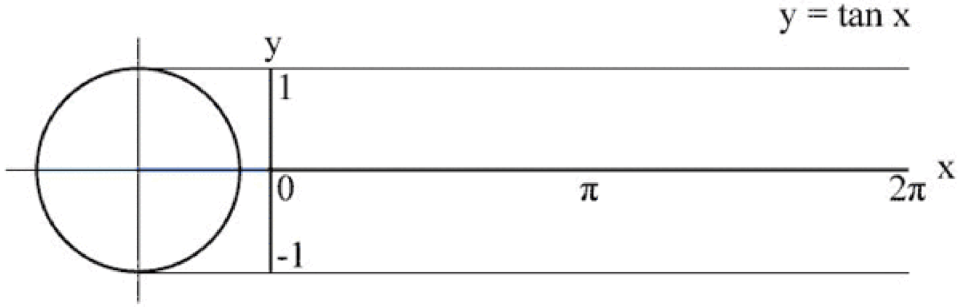
上页 下页 返回

正切函数 $y = \tan x$

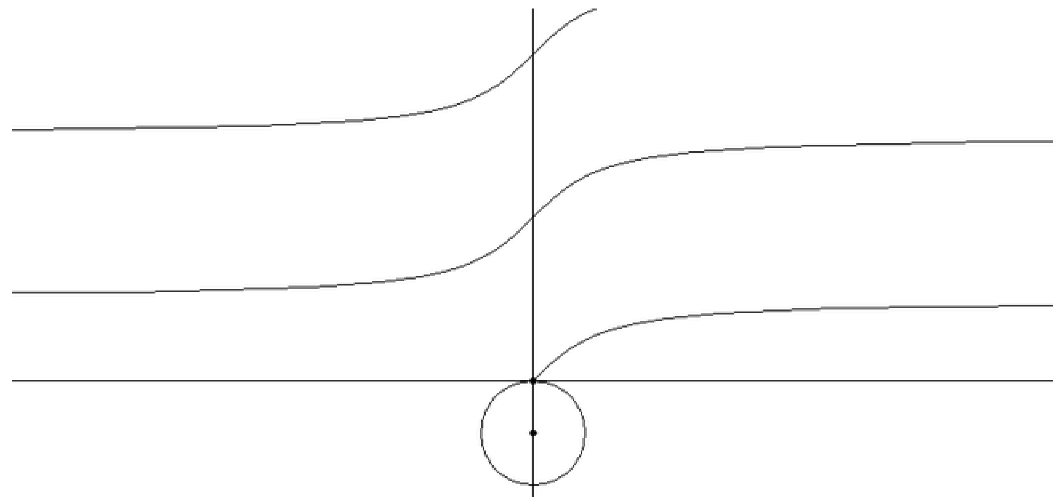


上页 下页 返回

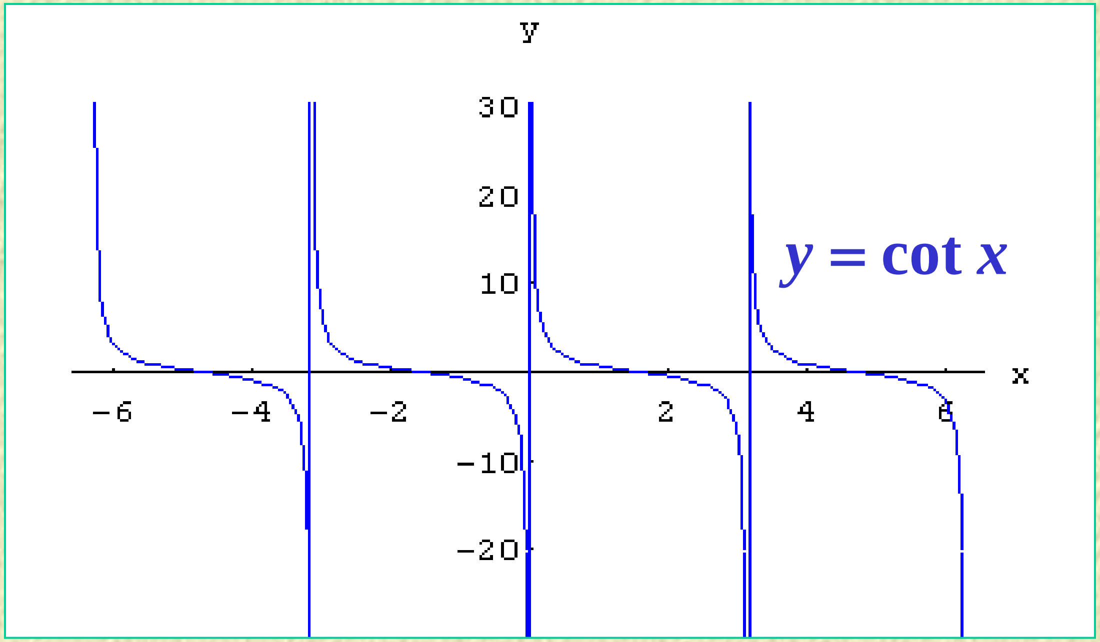
直角三角形的斜边和靠近圆右侧的垂直边的交叉点定义了正切函数。



在没有三角形的情况下，还可以用另一种方式观察正切函数



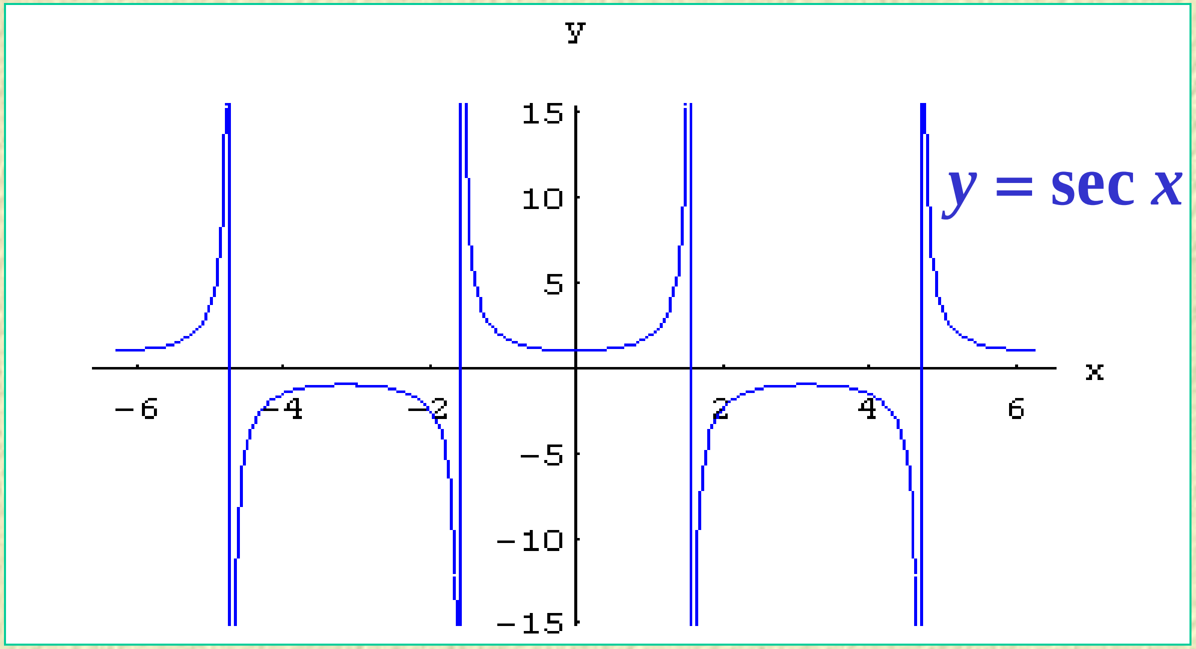
余切函数 $y = \cot x$



上页 下页 返回

secant

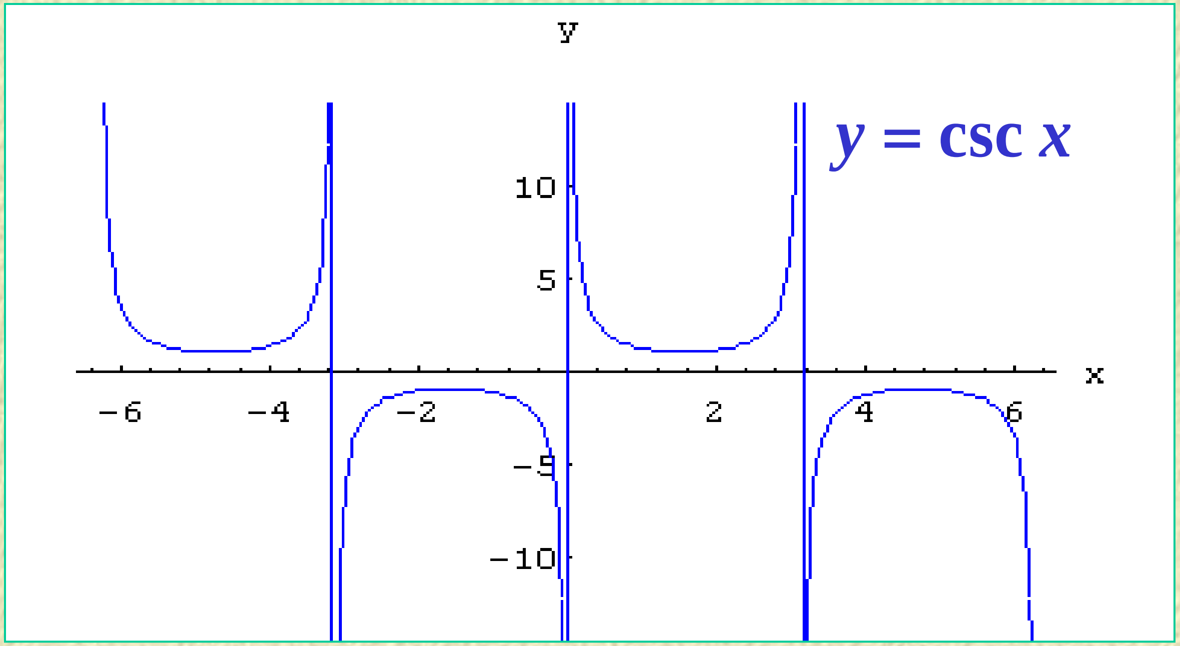
正割函数 $y = \sec x$



上页 下页 返回

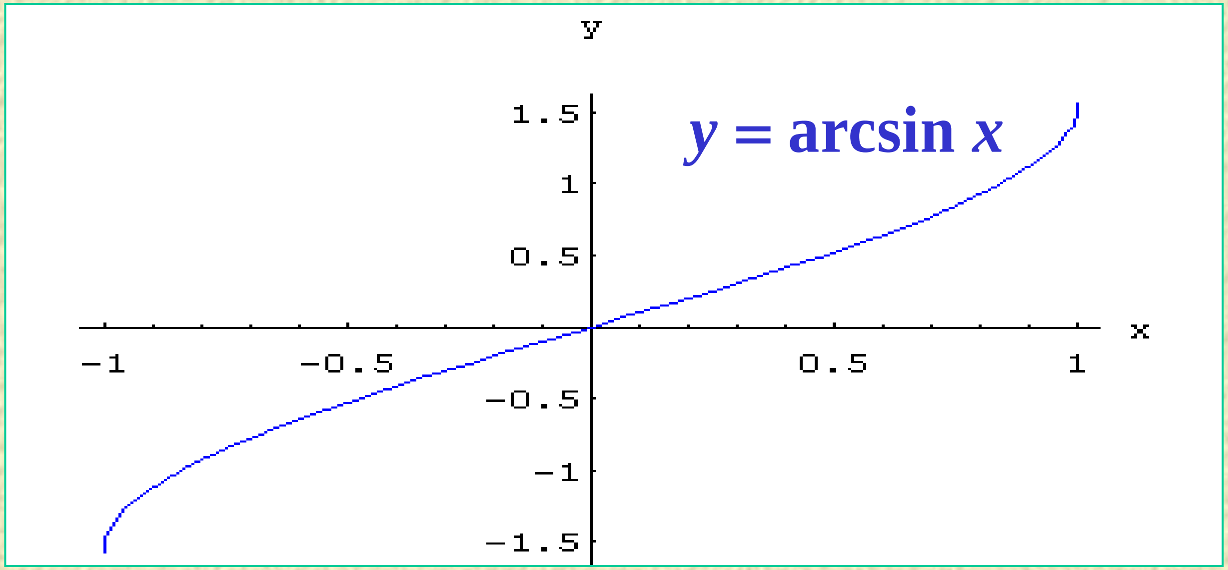
cosecant

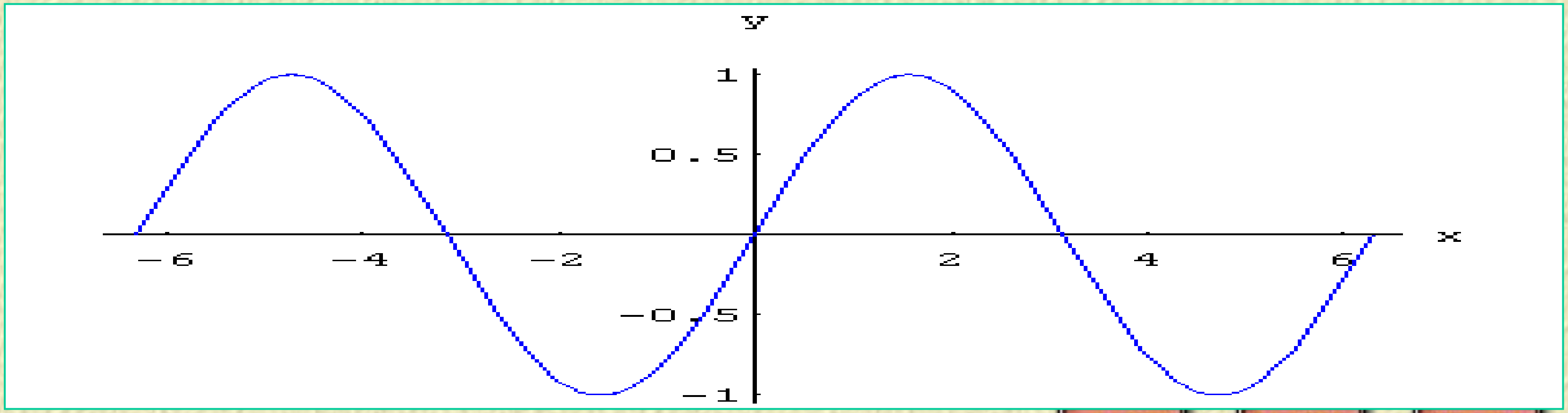
余割函数 $y = \csc x$



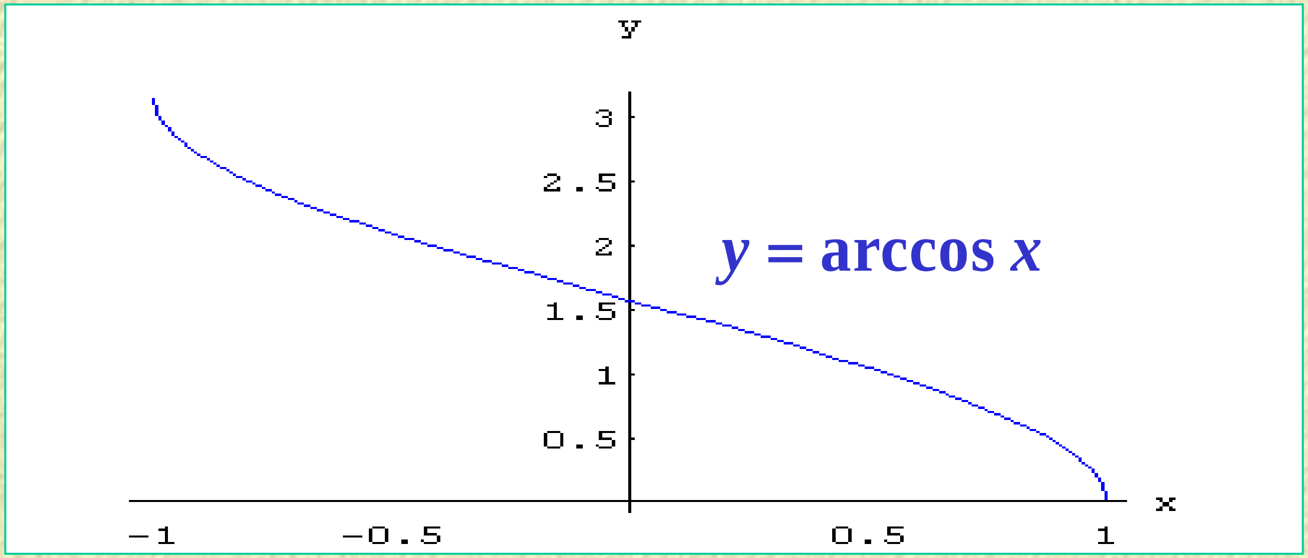
上页 下页 返回

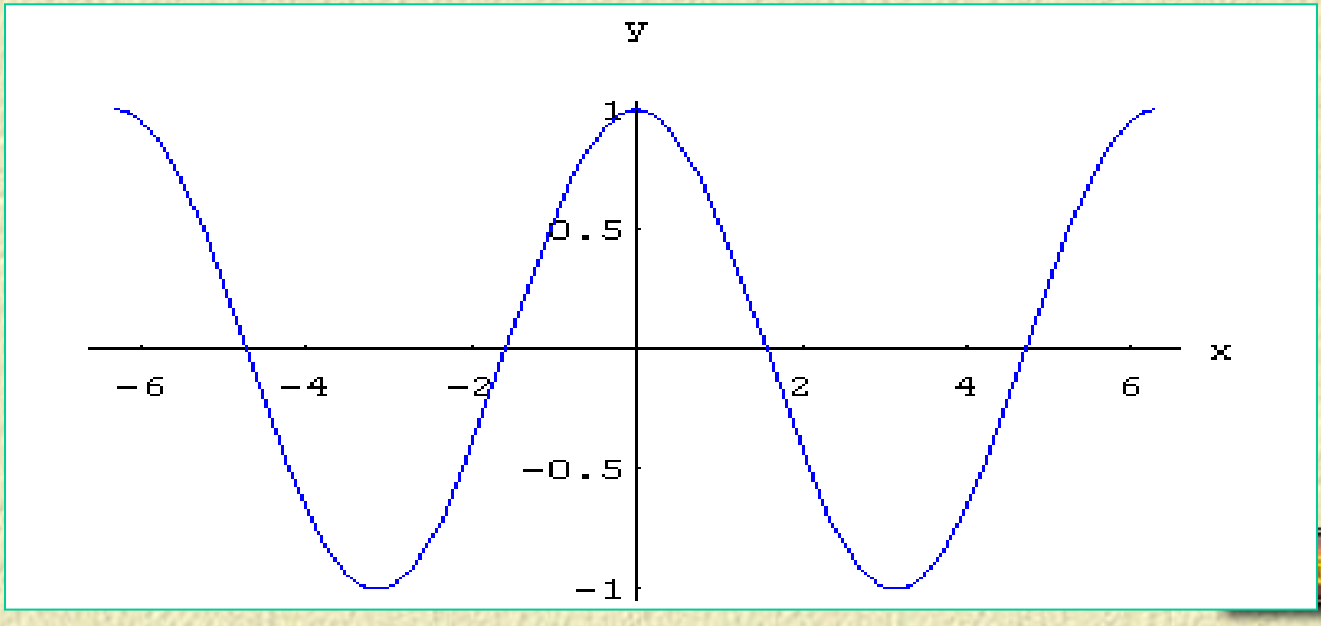
6.反三角函数　反正弦函数 $y = \arcsin x$



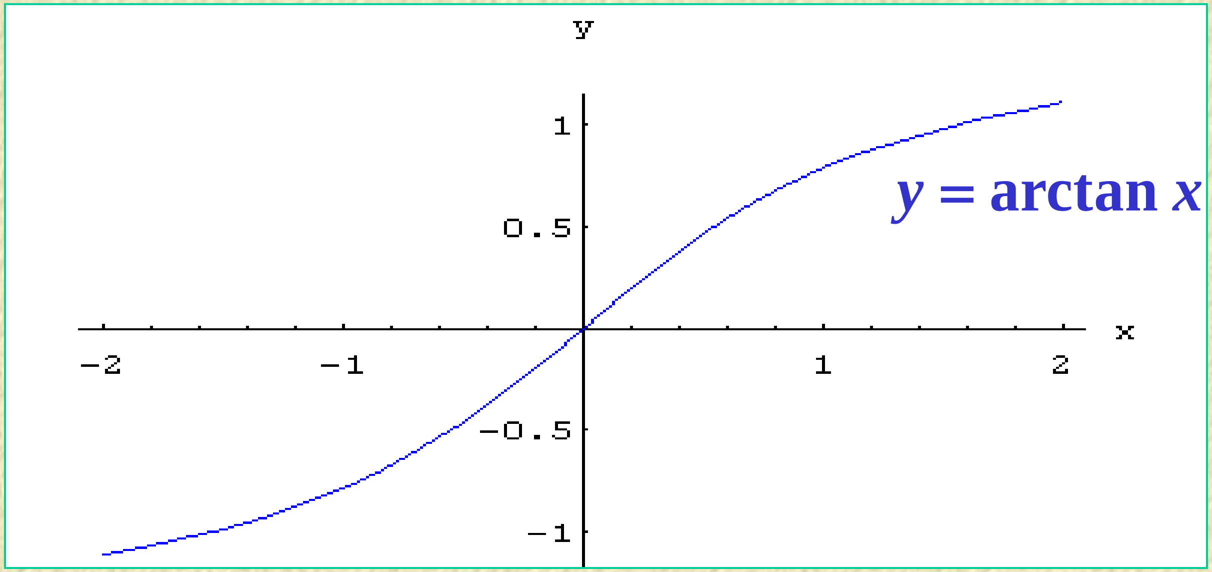


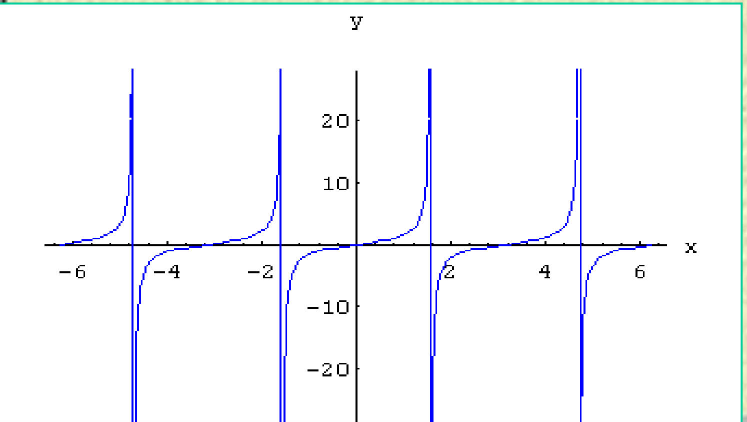
反余弦函数 $y = \arccos x$





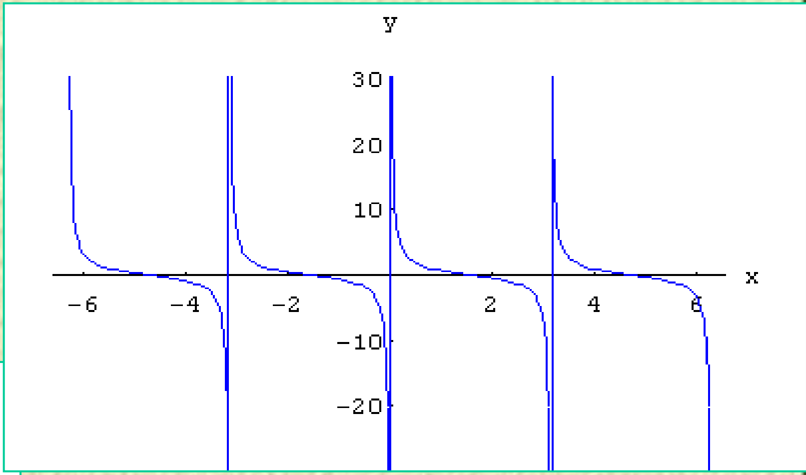
反正切函数 $y=\arctan x$

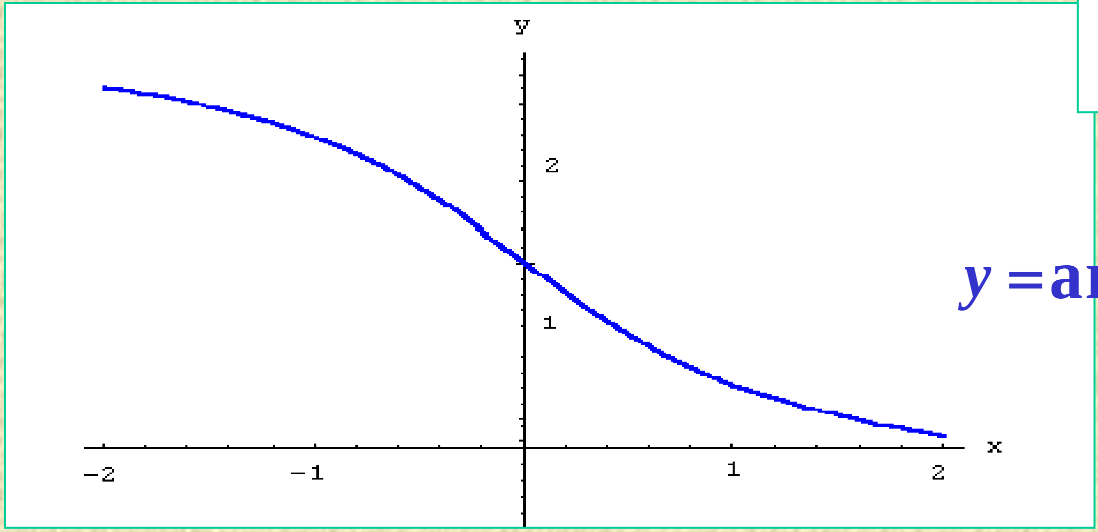




上页 下页 返回

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$





$y = \operatorname{arccot} x$

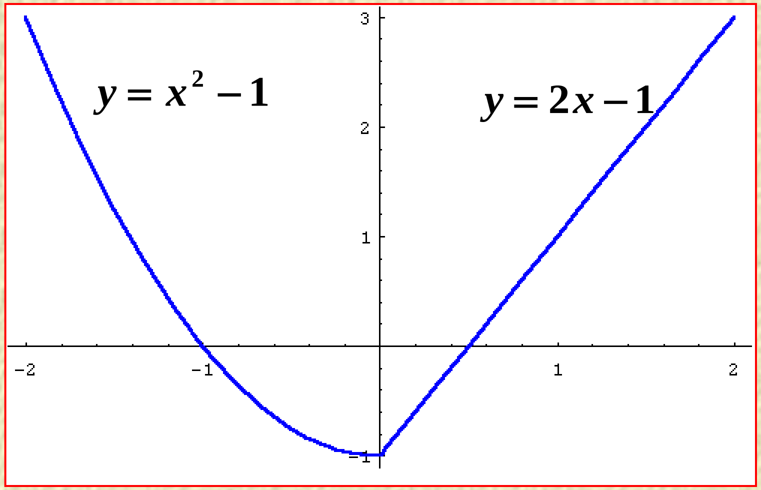
常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数, 都是用具体的数学表达式表示的函数.

上页 下页 返回

分段函数

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为<u>分段函数</u>.

例如, $$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$$



上页 下页 返回

基本初等函数

(1) $y = C$

(2) $y = x^{\alpha}\left(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1\right)$

(3) $y = a^{x}\left(a > 0, a \neq 1\right), y = e^{x}$

(4) $y = \log_a x \quad \left(a > 0, a \neq 1\right), y = \ln x$

(5) $y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$

(6) $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, \ldots$

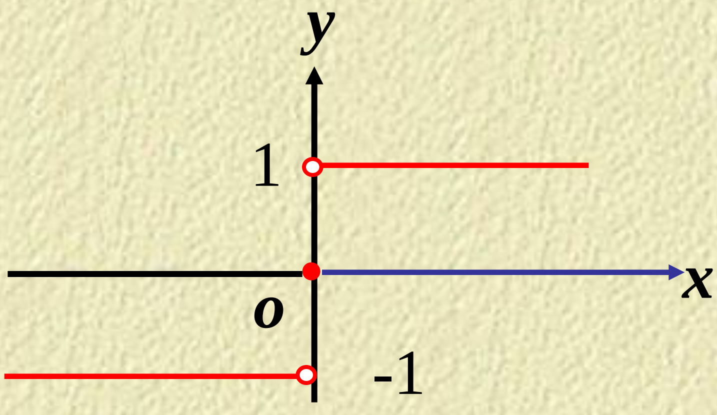
初等函数

由6种基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 一般情况下，分段函数不是初等函数。

几个特殊的函数举例

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当} x > 0 \\ 0 & \text{当} x = 0 \\ -1 & \text{当} x < 0 \end{cases}$$

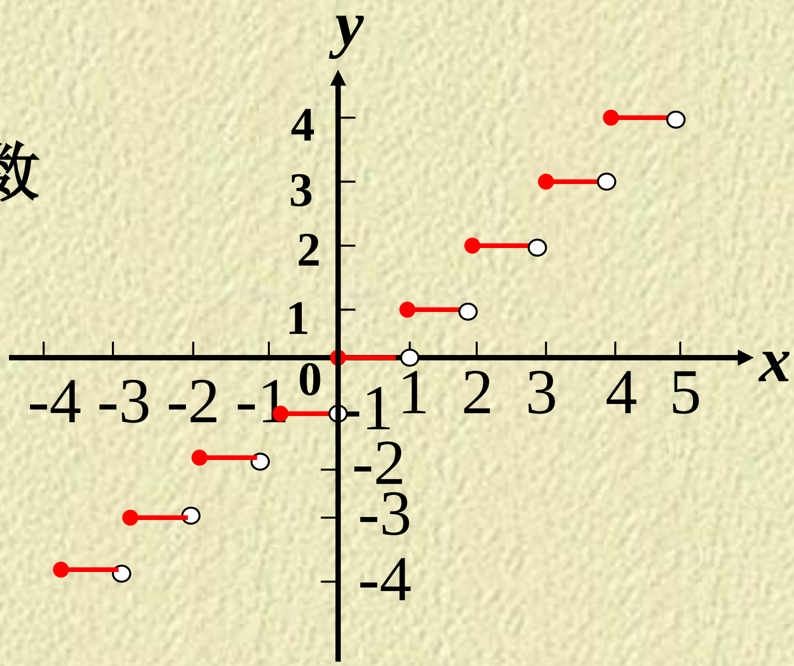


$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

上页 下页 返回

(2) 取整函数 $y=[x]$

$[x]$表示不超过 x 的最大整数

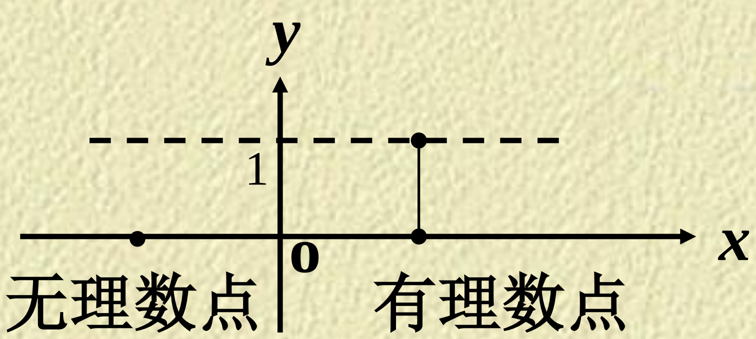


阶梯曲线

上页 下页 返回

(3) 狄利克雷函数

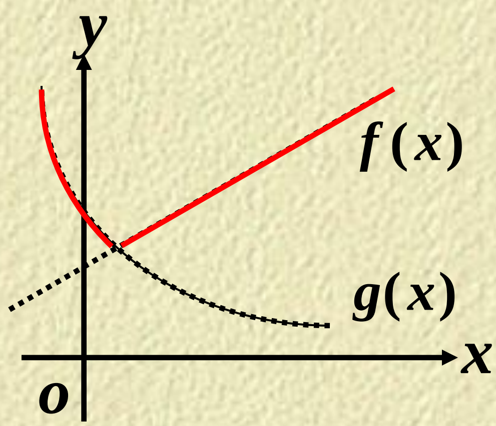
$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$

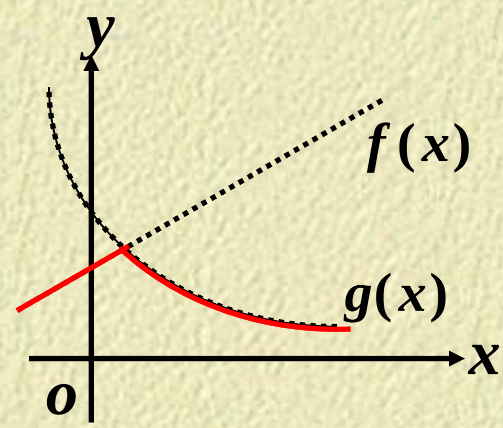


狄利克雷(1805～1859)Dirichlet,Peter Gustav Lejeune 德国数学家

(4) 取最值函数

$y = \max\{f(x), g(x)\}$ $\qquad$ $y = \min\{f(x), g(x)\}$





四、线性函数

线性函数: $y = ax + b,$

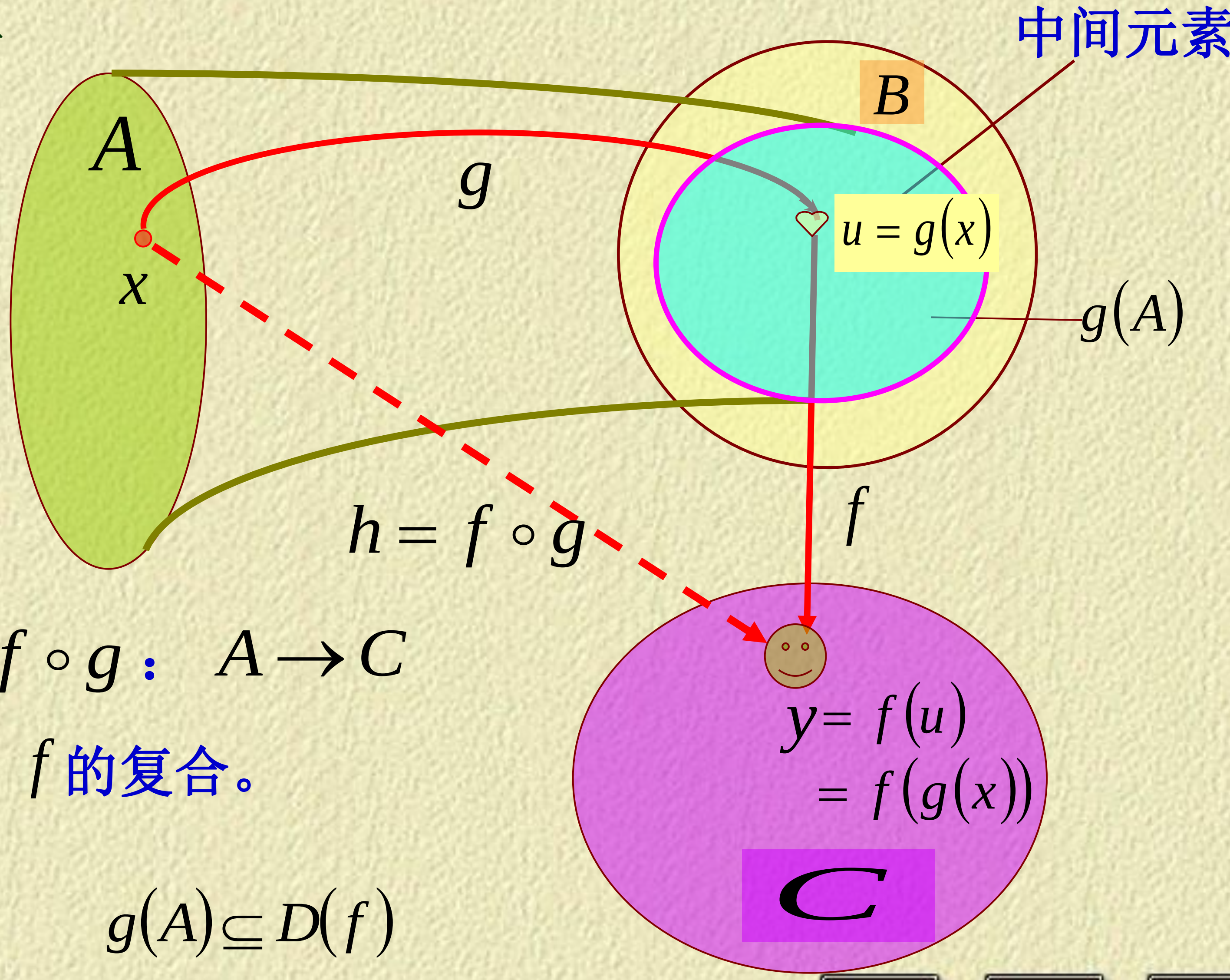
$$f(x) = ax + b$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

变化率为常数的函数$\Leftrightarrow$线性函数

五、复合映射与复合函数

复合映射

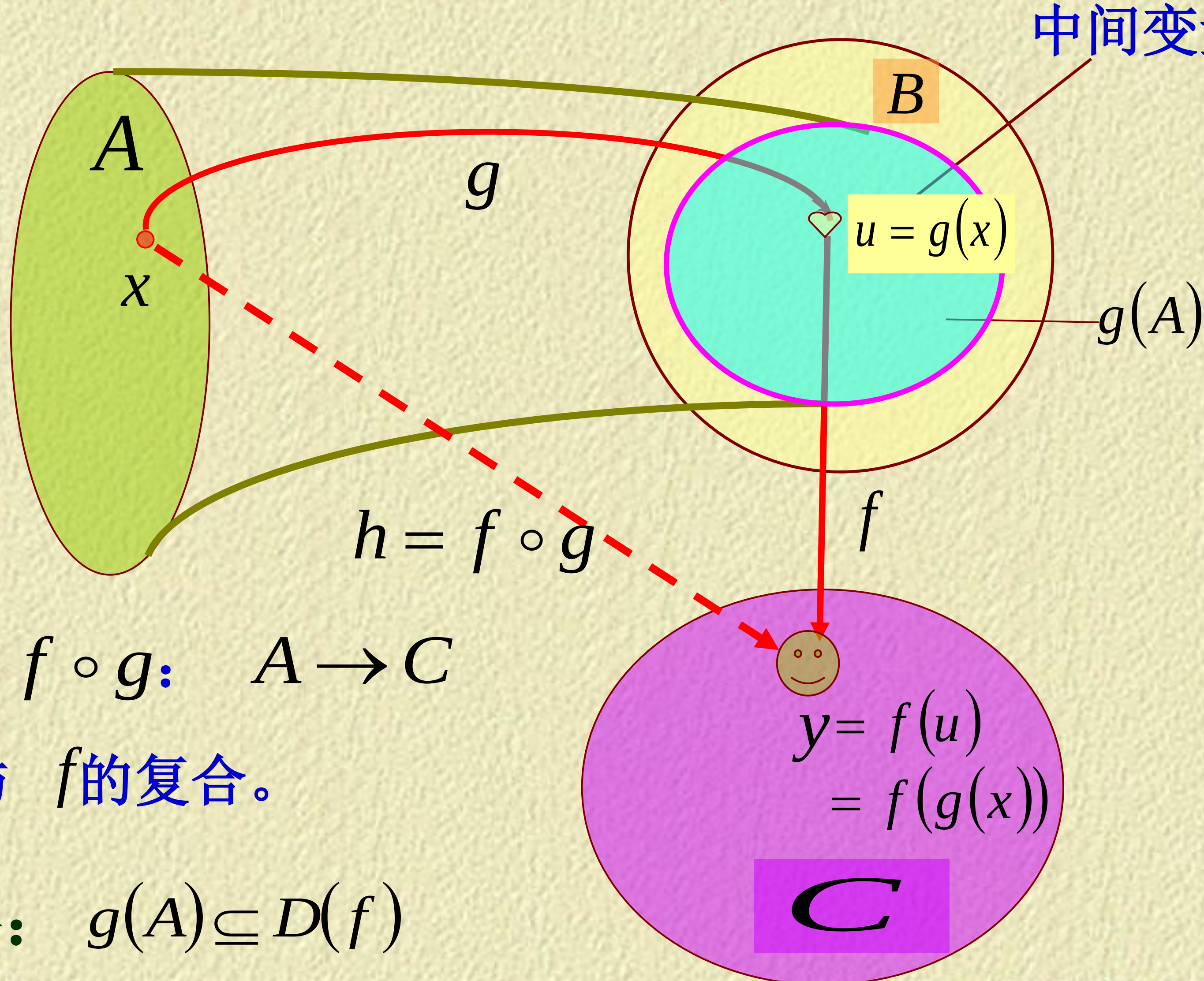


称映射 $h = f \circ g$： $A \to C$

为映射 g 与 f 的复合。

必要条件： $g(A) \subseteq D(f)$

复合函数： 若A, B, C 为非空实数集.



称函数 $h = f \circ g$： $A \to C$

为函数 g 与 f的复合。

必要条件： $g(A) \subseteq D(f)$

注意:

1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $\quad y \neq \arcsin(2 + x^2)$,

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $\quad y = \sqrt{u}$, $\quad u = \cot v$, $\quad v = \frac{x}{2}$.

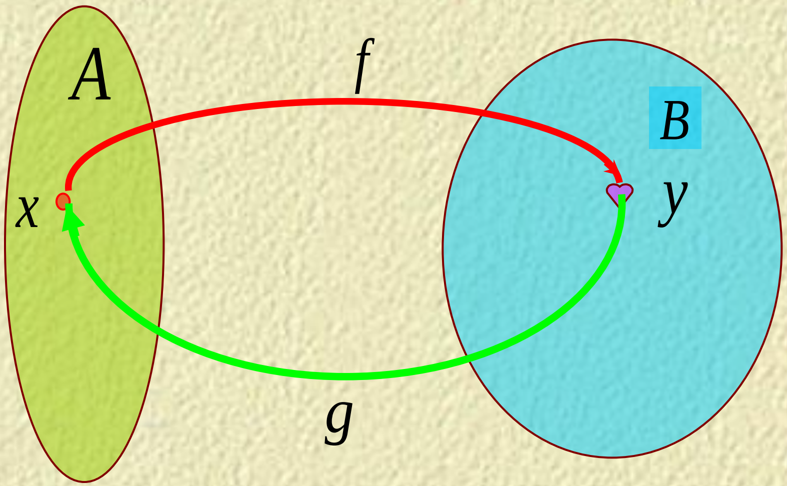
上页 下页 返回

六、逆映射与反函数

一一映射： 设映射

$f: A \to B$

$\forall x \in A \to \exists y = f(x) \in B$



反之，若

$\forall y \in B, \exists x \in A,$ 满足 $f(x) = y.$

$g: B \to A \quad \text{or} \quad y \to x = g(y)$

称映射 g 为映射 f 的逆映射。记为：$g = f^{-1}$

称映射 f 为从 ***A*** 到 ***B*** 的一一映射。

即：单射+满射

上页 下页 返回

反函数 若 $f: A \to B$ 且 f 为函数, 如果 f 可逆.

称 f 的逆映射 f^{-1} 为 $f(x)$ 的反函数.

记作 $x = f^{-1}(y)$ 或 $y = f^{-1}(x)$.

例 1. 求下列函数的反函数.

（1） $y = 2x + 1$; （2） $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

例 1. 求下列函数的反函数.

（1） $y=2x+1$；（2） $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

(2) 在 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 中令 $\mathrm{e}^{x}=u$，可得 $u^{2}-2yu-1=0$,

解之得 $u=y\pm\sqrt{y^{2}+1}.$

因为 $u=\mathrm{e}^{x}>0$，所以上式取正号， 即

$$u=y+\sqrt{1+y^{2}},\quad \mathrm{e}^{x}=y+\sqrt{1+y^{2}},\quad x=\ln(y+\sqrt{1+y^{2}}).$$

故 $y=\operatorname{sh}x$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}}).$$

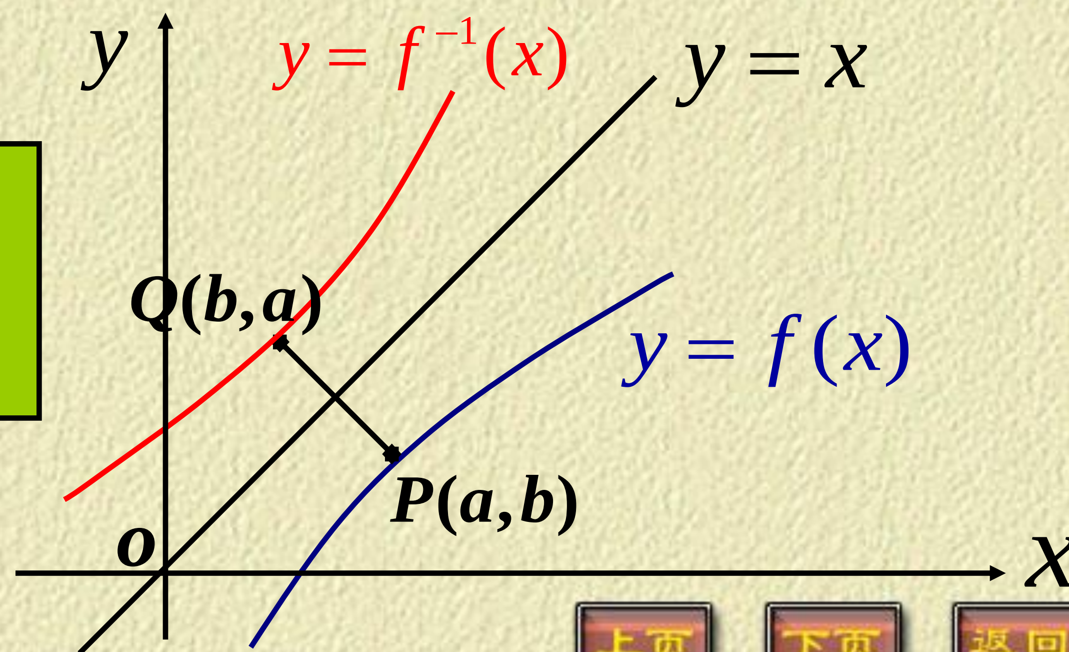
说明:

(1) $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 为同一函数, 都是 $y = f(x)$ 的反函数.

(2) $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 有相同的图像, 而 $y = f^{-1}(x)$ 的图形与原函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.

$y = f(x)$ 存在反函数

$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ 严格单调.



上页 下页 返回

非单调函数的反函数问题：

例. 求 $y=x^2$ 的反函数.

由于 $y=x^2$ 不单调, 因而整体上它没有反函数. 但在 $x\geq 0$ 与 $x\leq 0$ 两个部分 $y=x^2$ 单调. 因而在这两个区间可以分别求反函数

$x\geq 0$ 时, $x=\sqrt{y}$ 或 $y=\sqrt{x}$;

$x\leq 0$ 时, $x=-\sqrt{y}$ 或 $y=-\sqrt{x}$.

再如. $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调, . 因而可求得该区间上 $y=\sin x$ 的反函数为

$$x=\arcsin y \text{ 或 } y=\arcsin x$$

f 与 f^{-1} 的复合问题:

由于 $f: x\to y$, 而 $f^{-1}: y\to x$.

因而 $f^{-1}[f(x)]=x \quad x\in A$

$$f[f^{-1}(x)]=x \quad x\in B.$$

$\therefore$ 它们都是单位映射。但不一定是同一函数，原因是定义域不同，分别为 A 和 B.

单调函数: 设函数: $f: A \subseteq R \to R$,

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

则称函数 f 在 A 上单调增.

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

则称函数 f 在 A 上单调减.

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

则称函数 f 在 A 上严格单调增.

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

则称函数 f 在 A 上严格单调减.

(严格)单调增函数与(严格)单调减函数统称为(严格)单调函数.

上页 下页 返回

反函数存在定理:

函数 f 是 A 上的严格单调增**(减)**函数, 则它必存在反函数 f^{-1}, 且反函数 f^{-1} 在 f 的值域 $f(A)$ 上也是严格单调增**(减)**的.

七、双曲函数 反双曲函数

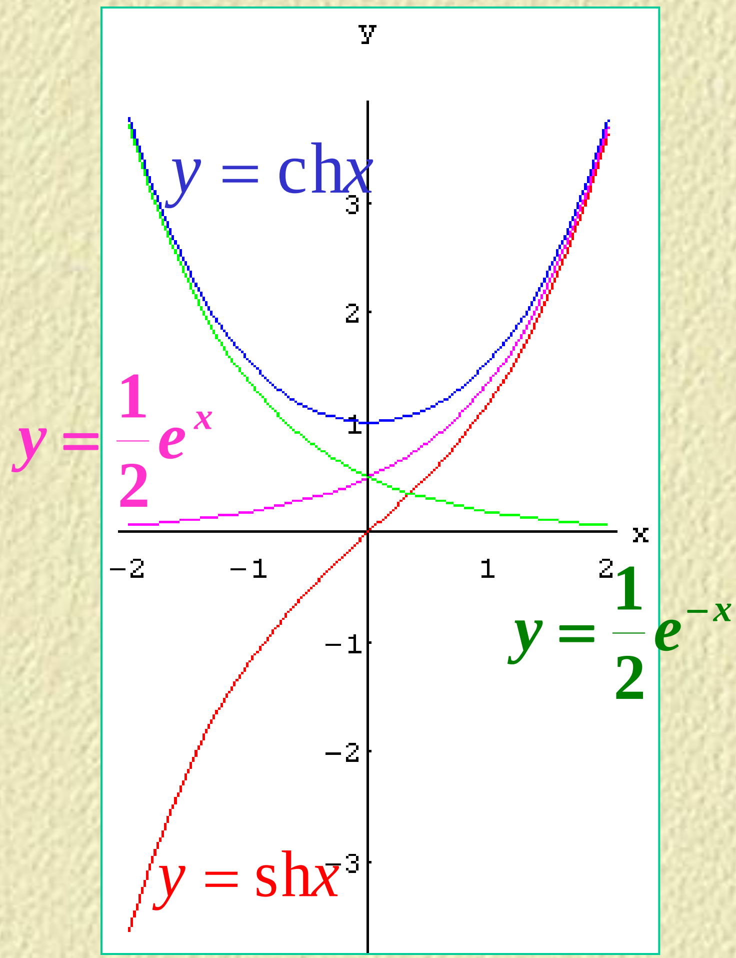
1.双曲函数

双曲正弦 $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

双曲余弦 $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

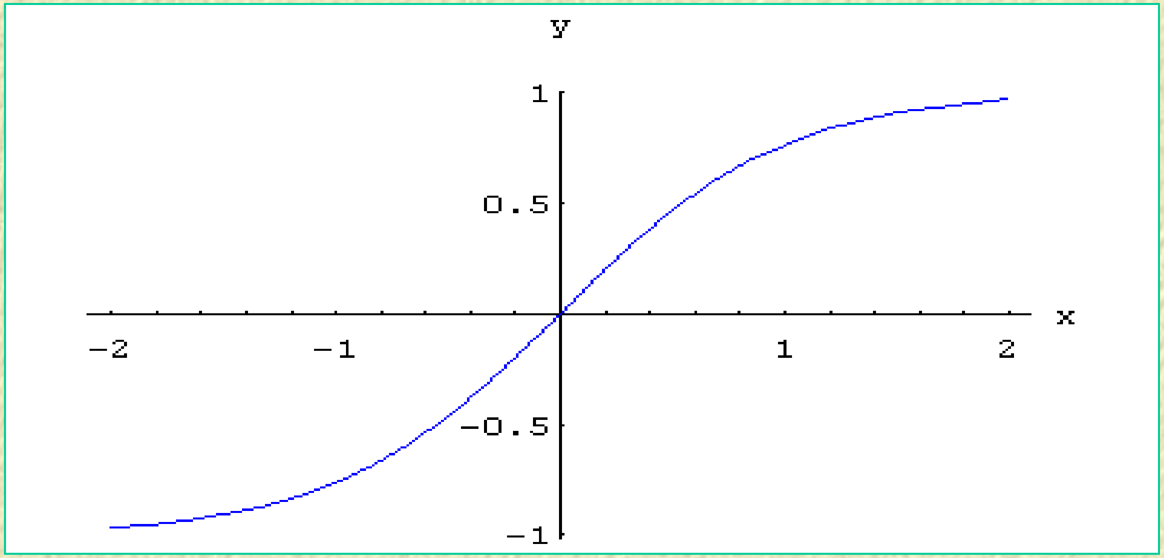
$D:(-\infty,+\infty)$, 偶函数.



上页 下页 返回

双曲正切 $\operatorname{th}x = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

$D: (-\infty, +\infty)$ 奇函数, 有界函数,



上页 下页 返回

双曲函数常用公式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x;$$

$$\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

2.反双曲函数

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh} x$;

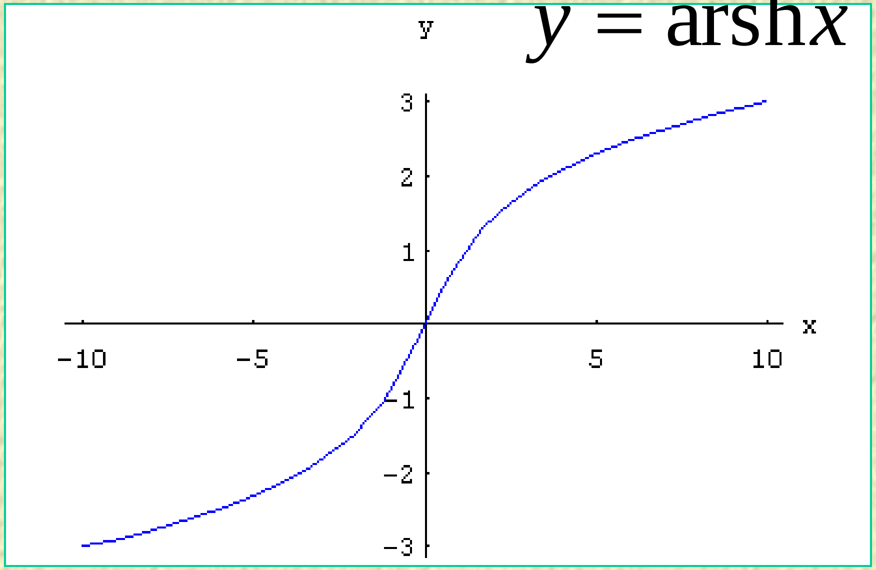
$$y = \operatorname{arsh} x$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$D: (-\infty, +\infty)$

奇函数,

在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.



上页 下页 返回

反双曲余弦 $y=\operatorname{arch}x$

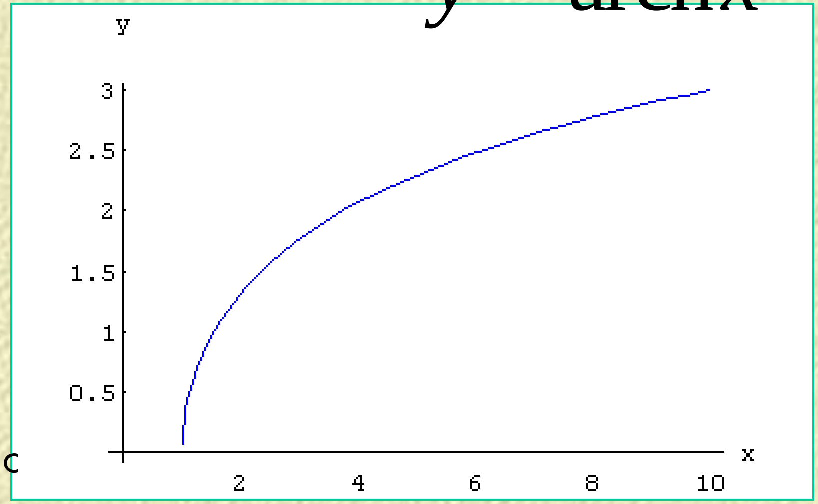
$$y=\operatorname{arch}x$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\boldsymbol{D:[1,+\infty)}$$

在 $[1,+\infty)$ 内单调递增。

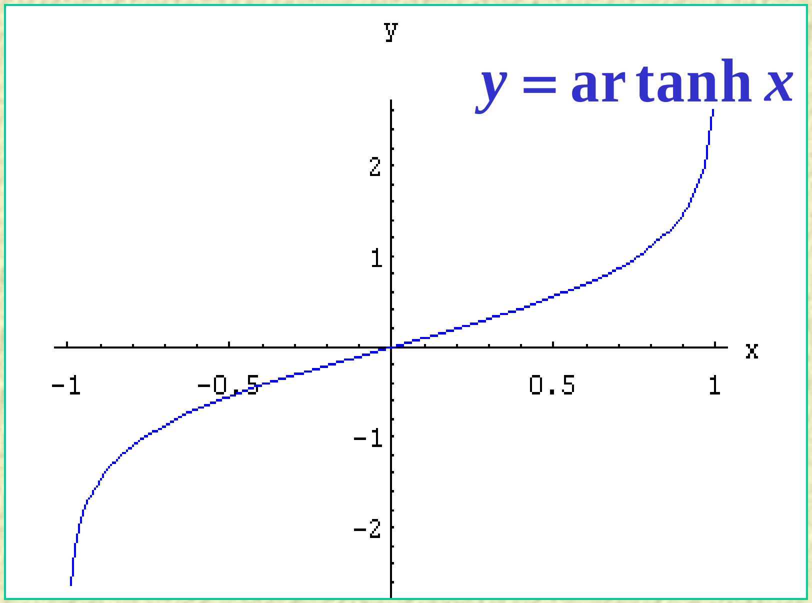
$y=\operatorname{arch}x$



反双曲正切 $y = \operatorname{arth} x$

$$y = \operatorname{arth} x$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$D:(-1,1)$



奇函数,

在 $(-1,1)$ 内单调增加.

上页 下页 返回