8.4　Stokes公式与旋度

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

作　业:

P262　10，11，12 , 13 , 14, 15
16，18，19 ,24

8.4　Stokes公式与旋度

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

斯托克斯（1819～1905年），英国数学家，物理学家，剑桥数学物理学派的代表人物之一，后被英王封为爵士 .

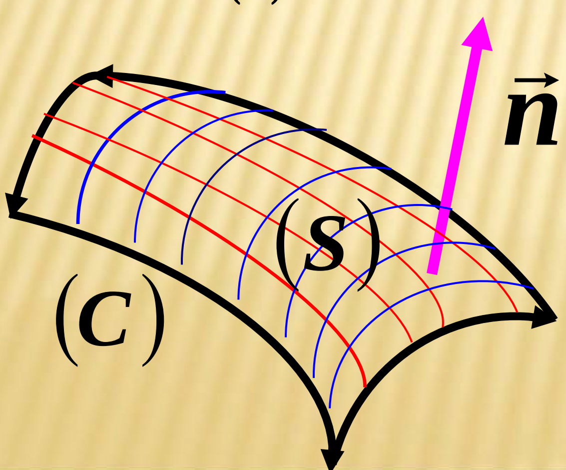
斯托克斯公式，是这一系列公式中最为奇妙的一个，它公开出现是作为剑桥大学 1854年度史密斯奖学金考试的第八题 .这一由剑桥大学里数学最优秀的学生参加的考试，从 1849年至 1882年由斯托克斯主持，因此这一公式被人们称为“斯托克斯公式”.实际上，这一公式是汤姆逊在 1850年 7月 2日写给斯托克斯 信中给出的 .当时人们至少给出了三个证明：汤姆逊给出第一个，另二个分别见于汤姆逊和泰特合著的《自然哲学》和麦克斯伟的“电磁论”（1881年）等书籍中 .

斯托克斯公式说明一闭曲线积分可由以该曲线为边界的一个曲面积分所表示 .它在数学的某些分支发展中起了突出的作用 .

一、Stokes公式

设区域$(G)\subsetneq R^3$,函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在区域(G)内具有一阶连续偏导数. (C)为(G)内任一分段光滑的有向简单闭曲线, (S)是以(C)为边界且完全位于区域(G)的任一分片光滑的有向曲面. (C)的方向与(S)的法向量符合右手螺旋法规则, 则

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$
$$=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$



该公式称为Stokes公式.

Nabla算子 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \vec{A}=(P,Q,R),$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z),\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=\vec{e}_n\mathrm{d}S,$$

则 $$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=$$

$$\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\oint_{(C)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\iint_{(S)}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{(S)}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S$$

Stokes公式的向量形式

Stokes公式

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z =$$

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\oint_{(C)} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{(S)} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S)} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Stokes公式的实质:

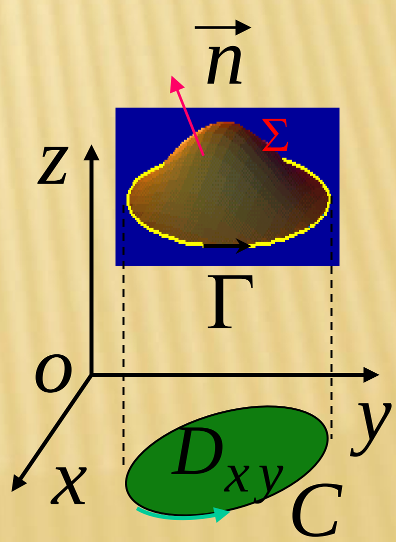
表明了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

二、 斯托克斯（ Stokes ） 公式的证明

定理1. 设光滑曲面 Σ 的边界 Γ是分段光滑曲线, Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则, P,Q,R在包含Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数,则:

$$\iint_{(\Sigma)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}\,z\wedge\mathrm{d}\,x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y$$

$$=\oint_{(\Gamma)}P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+R\,\mathrm{d}\,z$$



证: **情形1** Σ 与平行于 z 轴的直线只交于一点, 设其方程为

$$\Sigma: z=f(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy}$$

不妨设Σ 取上侧 (如图).

二、 斯托克斯（ Stokes ） 公式的证明

(Γ)是一空间曲线, 为了把它利用平面曲线 的方程表示, 考虑 (Γ) 在 xOy 平面上的投影曲 线,记为 (C).

设 (C) 的参数方程为: $x = x(t), y = y(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$

由于(Γ) 位于曲面 (Σ) 上, (Γ) 上点的 z 坐标应满足曲面方程: $z = f(x, y)$. 从而 (Γ) 的参数方程应是:

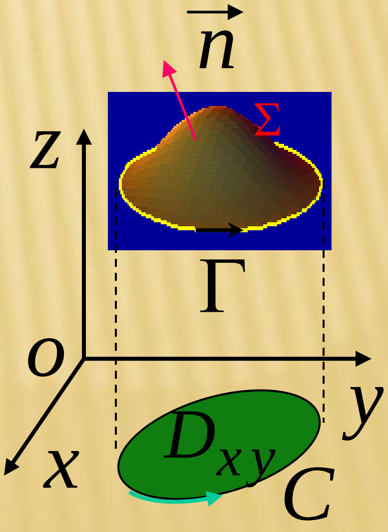
$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f[x(t), y(t)] \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

设 t 增大的方向对应于 (Γ) 的正向,故

$$\oint_{(\Gamma)} P\,\mathrm{d}x = \oint_{(C)} P(x, y, z)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P\{x(t), y(t), f[x(t), y(t)]\}\dot{x}(t)\mathrm{d}t$$

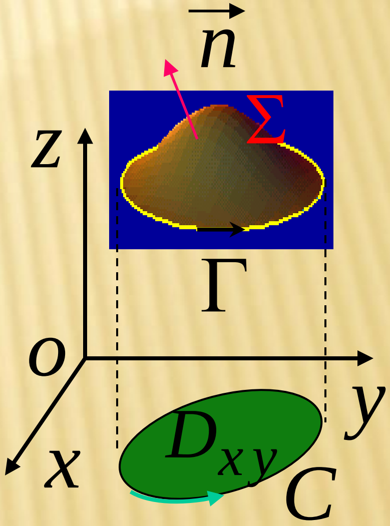
$$= \oint_{(C)} P[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x.$$



则 $\oint_{(\Gamma)} P\,\mathrm{d}x = \oint_{(C)} P(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x - 0\,dy$

$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ (利用格林公式)

$$= -\iint_{D_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$= -\iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y \right] \cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$\because \quad \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$

$\therefore \quad f_y = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$

因此 $\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x = -\iint_{(\Sigma)} [\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\ ]\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

$$= \iint_{(\Sigma)} [\ \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\ ]\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

同理可证 $\oint_{\Gamma} Q\,\mathrm{d}y = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

$$\oint_{\Gamma} R\,\mathrm{d}x = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得斯托克斯公式

$$\oint_{(\Gamma)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z =$$

$$\iint_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

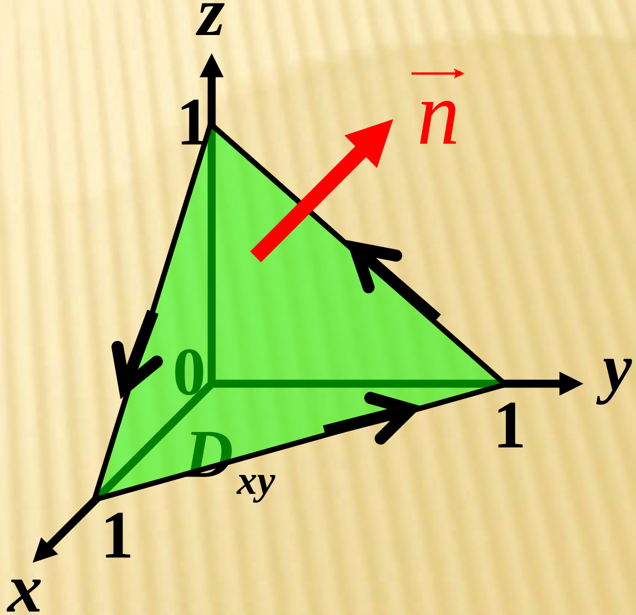
情形2 曲面Σ 与平行 z 轴的直线交点多于一个, 则可通过作辅助线面把 Σ 分成与z 轴只交于一点的几部分, 在每一部分上应用斯托克斯公式, 然后相加, 由于沿辅助曲线方向相反的两个曲线积分相加刚好抵消, 所以对这类曲面斯托克斯公式仍成立. 证毕

注意: 若 Σ 是 xoy 面上的一块平面区域, 则斯托克斯公式就是格林公式,故格林公式是斯托克斯公式的特例.

$$\boxed{\textbf{Stokes公式}} \xrightarrow{\vec{A}=(P,Q),\ (C)\subset R^2.} \boxed{\textbf{Green公式}}$$

例 计算曲线积分$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$,

其中Γ是平面$x + y + z = 1$被三坐标面所截成的三角形的整个边界,它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.



解 由Stokes公式,得

$$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

$$= \iint_{\Sigma} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

由于Σ的法向量的三个方向余弦都为正,

$$\oint_{(C)} P dx + Q dy + R dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

所以 $\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \frac{\quad}{2}$

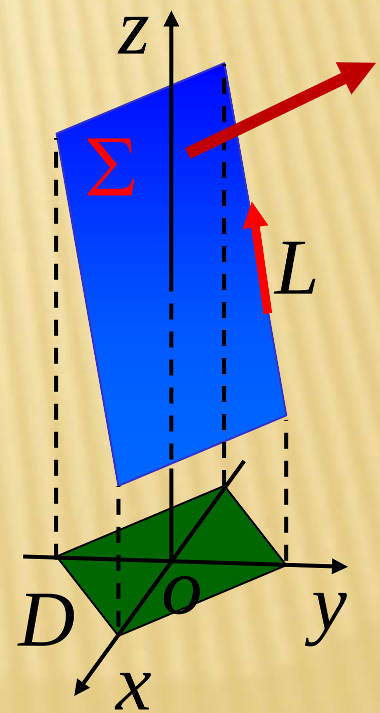
例. 设L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$的交线

从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$$

解: 记 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分的上侧,

D为Σ在 xoy 面上的投影. 由斯托克斯公式



$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

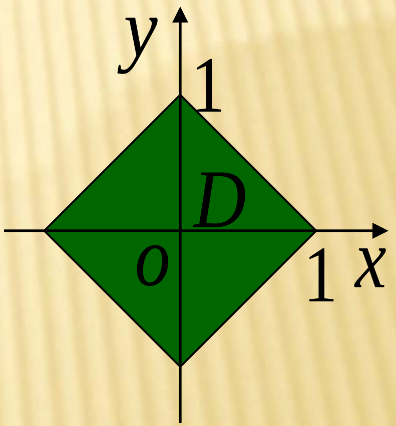
$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oint_{(C)} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\iint_{(S)} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{(S)} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \vec{e}_n \mathrm{d}S$$

$$I = \cdots = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma: x+y+z=2, \quad (x,y)\in D$$

$$D: |x|+|y|\le 1$$



$$= -2\iint_{D}(x-y+6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -12\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -24$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 计算$\oint_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$ $\quad C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$,

C的正向与平面$x+y+z=0$的法向量$\{1,1,1\}$符合右手法则.

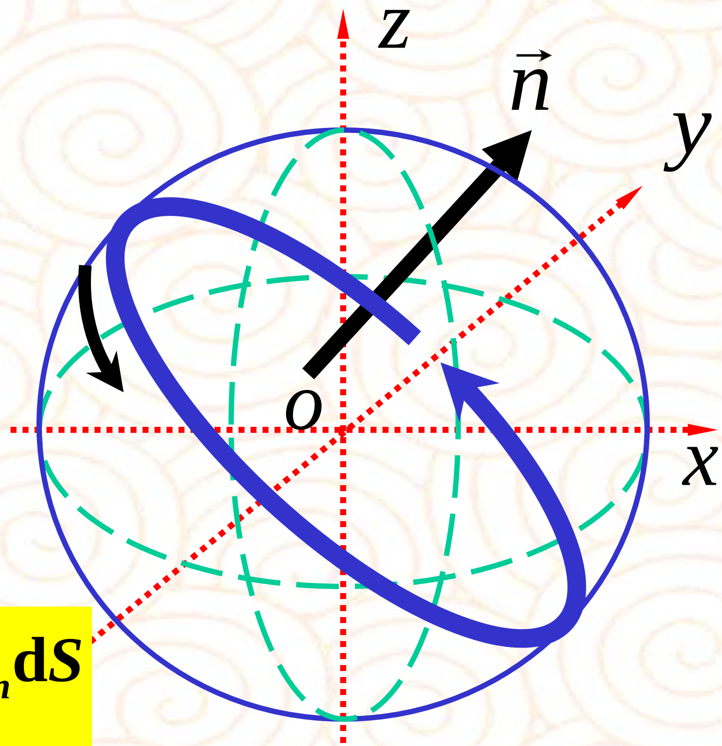
解

$$\oint_C = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \end{vmatrix} = -\iint_S \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

S为大圆周C及其内部所成曲面的上侧

$$= -\iint_S \{1,1,1\}\bullet\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\sqrt{3}\pi a^2$$

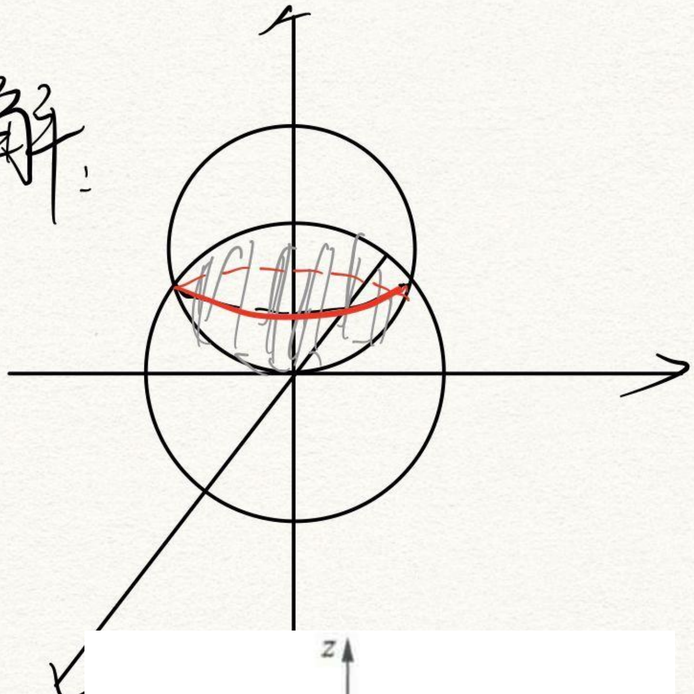
$$-\iint_S \{1,1,1\}\bullet\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\mathrm{d}S$$



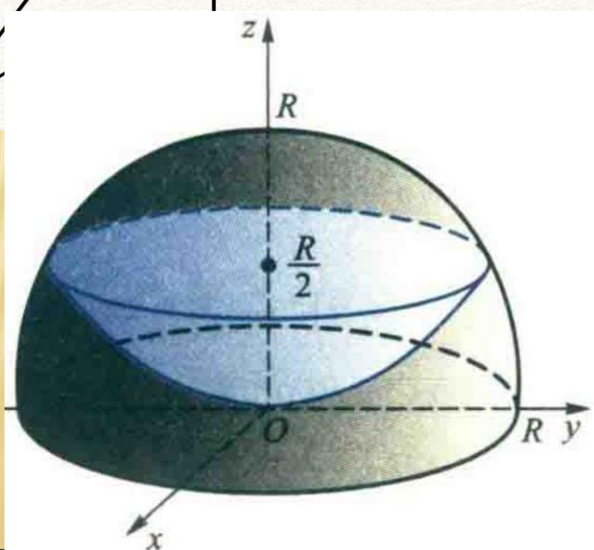
$$\oint_{(C)} A\cdot d\vec{s} = \iint_{(S)} (\nabla\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{(S)} (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n \mathrm{d}S$$

3.计算$I=\oiint_{(s)}(x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z^2-x+y)dx\wedge dy$，其中$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$所围立体表面的外侧.

解：



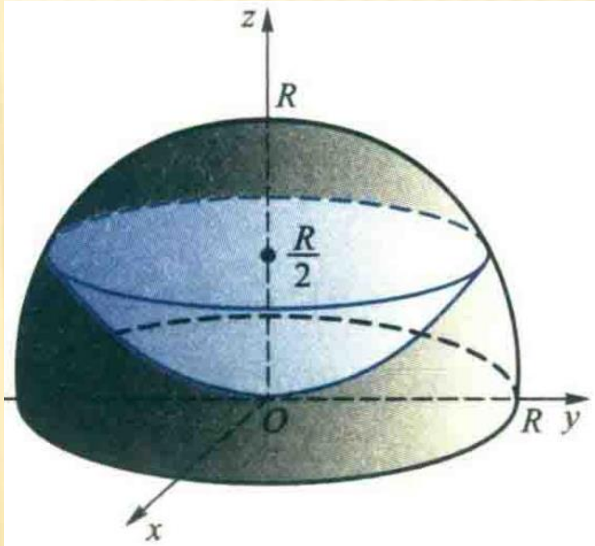
~~积分域如图，则由Stokes公式得，上半部分曲面积分等于红色圆周逆时针的线积分，下半部分曲面积分等于红色圆周顺时针的线积分，∴总积分为0.~~



若用 stokes公式，能找到这样的P，Q，R吗？

使得R Q, P R,Q P 两两偏导之差要等于x-y+z, y-z+x,z^2-x+y

3.计算$I=\oiint_{(s)}(x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z^2-x+y)dx\wedge dy$,其中$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$所围立体表面的外侧.



解: **记 S 所围区域为 V, 则由高斯公式知:**

$$I=2\iiint_{(V)}(1+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\frac{R}{2}}\pi(1+z)(R^2-(z-R)^2)\mathrm{d}z+2\int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi(1+z)(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{5\pi}{12}(2+R)R^3.$$

斯托克斯公式: **设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中分片光滑有向曲面, $\boldsymbol{\Sigma}$的边界是逐段光滑的有向封闭曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$; $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$在曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 及其附近有定义, 且在曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 直到 $\boldsymbol{\Gamma}$ 上有连续的偏导数,则**

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中 Σ 及 Γ 的方向符合右手法则, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 Σ 在点 (x, y, z) 处的法线方向余弦.

注 1 **当曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 在 $\boldsymbol{xOy}$ 面上, 即 $\boldsymbol{\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 1}$ 可得格林公式 $\boldsymbol{\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$ ……………… (2)**

注 2 当 Γ 为曲面 Σ 与另一曲面 $z=f(x,y)$ (其中 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数) 的交线时, 可以简单推导出如下的格林公式.

假设式(1) 中的积分曲线 $\Gamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, 则 Γ 可以表示成 $z=f(x(t),y(t))$,

利用一阶微分形式的不变性得 $\mathrm{d}z=f_x\,\mathrm{d}x+f_y\,\mathrm{d}y$,

再把 $\mathrm{d}z$ 代入式 (1), 可得

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\big(f_x\,\mathrm{d}x+f_y\,\mathrm{d}y\big)$$

$$=\int_L (P+Rf_x)\mathrm{d}x+\big(Q+Rf_y\big)\mathrm{d}y$$

$$=\int_L \tilde{P}\mathrm{d}x+\tilde{Q}\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{P}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $\tilde{P}=P+Rf_x, \tilde{Q}=Q+Rf_y$, L 为 Γ 在 xOy 平面上的投影,

D 是 L 围成的区域,二者也呈右手关系.

注 3 若引进旋度算子 curl, 斯托克斯公式 (1) 和格林公式 (2) 就可以写成如下统一的形式

$$\iint_{(S)} \mathrm{curl}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S = \int_{(\partial S)} \tau \cdot u \,\mathrm{d}S$$

其中当 $(S) \subset \mathrm{R}^2$,即为平面区域时, ∂S 是 S 的边界, τ 为 ∂S 的单位切向量, 呈右手关系,

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \in \boldsymbol{R}^2, \mathbf{curl}\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}};$$

当 $(S) \subset \mathrm{R}^3$,即为分片光滑曲面时, ∂S 是 S 的边界曲线, τ 为 ∂S 的单位切向量, 呈右手关系,

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}) \in \boldsymbol{R}^3,$$

$$\boldsymbol{curlu} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{y}} - \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{z}}, \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{z}} - \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)$$

曲线积分既可以用斯托克 斯公式处理,也可以用格林公式处理

例 1 求曲线积分 $\oint_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$

其中 Γ: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 取顺时针方向.

例 1 求曲线积分 $\oint_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$

其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 取顺时针方向.

解 1 (利用斯托克斯公式) 取 $\Sigma: z=2-x+y$ (τ 所围部分) 上侧

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}=-2\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi$$

解 2 (利用格林公式) 由 $x-y+z=0$ 知 $z=2-x+y, \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

令 $\Gamma':\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 取顺时针方向, 则

$$\text{原式}=\oint_{\Gamma'}(2-x)\mathrm{d}x+(2x-y-2)\mathrm{d}y+(x-y)(-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

$$=\oint_{\Gamma'}(-2x+y+2)\mathrm{d}x+(3x-2y-2)\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi$$

注 4 当斯托克斯公式中的曲线 Γ 由两个可显式表达的曲面相交而成，即 $\Gamma:\begin{cases} z = G(x,y) \\ z = F(x,y) \end{cases}$，则用斯托克斯公式把曲线积分转化为曲面积分时，可以灵活选取积分曲面,也可构造便于计算的曲面.

例 3 计算线积分 $\oint_{\Gamma} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, 其中 Γ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z \geqslant 0)$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线, 从 z 轴正向看取逆时针方向.

注 5 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 时, 既可用 Stokes公式转化为曲线积分, 又可用高斯公式转化为三重积分.

若 $\mathrm{div}(P,Q,R)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$, 则积分曲面可灵活选取.

例 4 计算 $\iint_S \mathrm{curl}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$, 其中 $\boldsymbol{F}=(x-z,x^3-yz,-3xy^2)$, S 为半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.,n 为 S 上侧的单位向量.