Stolz 定理及其应用探究

◎张　睿　（西安高新第一中学高二（七）班，陕西　西安　710071）

【摘要】高等数学中，Stolz 定理是处理$\frac{*}{\infty}$型数列极限的有力工具. 本文在已有文献的基础上，对该定理再进行研究，阐述了 Stolz 定理及其注意点，得到了 Stolz 定理的逆命题相关的两个结论和给出了 Stolz 定理在求待定型数列极限方面的应用，通过一些数列极限的求解，更深刻地理解如何灵活运用 Stolz 定理.

【关键词】Stolz 定理; 数列极限; 待定型

我们接触过一些待定型极限问题，例如，$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 就是 $0\cdot\infty$ 待定型; 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+n}{n}$就是$\frac{\infty}{\infty}$. 讨论无穷大量之间运算的极限，往往并非轻而易举，需要针对具体问题分别判断. 本文介绍的 Stolz 定理及其在求某些待定型数列极限带来的方便.

一、Stolz 定理概述

施笃兹（Stolz）定理是求数列极限的一种重要方法，是处理$\frac{*}{\infty}$型数列极限的有力工具，常被人们誉为数列极限的洛必达（L'Hospital）法则.

定理 1　（Stolz 定理）设数列$\{y_n\}$是自某项后单调增加的正无穷大量，那么对任意数列$\{x_n\}$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\ (a\ \text{可以为有限量},+\infty\ \text{与}\ -\infty),$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$.

注 1　Stolz 定理给出了一种求离散型$\frac{*}{\infty}$的极限方法，它的几何意义为: 在平面上有一无限折线$\overline{P_1P_2\cdots P_n\cdots}$，其中 $A_n=(y_n,x_n)$. 折线段$\overline{P_nP_{n+1}}$的斜率为$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$，矢径$\overrightarrow{OP_n}$的斜率为$\frac{x_n}{y_n}$. 当 Stolz 定理条件满足时，矢径的斜率和折线段的斜率在 $n\to+\infty$ 时极限相等.

注 2　在 Stolz 定理中，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$ 不一定成立，例如，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$不存在，但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$可能存在.

反例 1　设 $x_n=[(-1)^n+1]n^2$，$y_n=n$，此时$\{x_n\}=\{0.2^2,0.4^2,0.6^2,\cdots\}$. 尽管$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$，而$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\{0.2,0.4,\cdots\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\neq\infty$.

反例 2　设 $x_n=(-1)^n n$，$y_n=n$，我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{1}=\infty$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 极限不存在.

反例 3　设 $x_n=[1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n]$，$y_n=n^2$，这里 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$，极限不存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$.

注 3　在 Stolz 定理中，其逆命题未必成立，即在定理 1 的假设条件下，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在（或$+\infty$，或$-\infty$），一般未必能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在（相应地为或$+\infty$，或$-\infty$）.

反例 4　设 a 为任意实数，$x_n=(-1)^n+an$，$y_n=n$，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$，然而因为$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=x_n-x_{n-1}=[(-1)^n-(-1)^{n-1}]+a$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$不存在.

反例 5　设 a 为任意非零实数，令 $x_n=a\left(n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)$，$y_n=n$，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\left(n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)}{n}=a$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})$ 不存在.

基于注 3 的认识，我们可得如下结论:

结论 1　设数列$\{y_n\}$是自某项后单调增加的正无穷大量，数列$\left\{\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}\right\}$有界，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$（$a$ 可以为有限量），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$.

证明　（ⅰ）先考虑 $a=0$ 的情况: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$，可知对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $\left|\frac{x_n}{y_n}\right|<\varepsilon$.

因为$\{y_n\}$从某项开始严格递增的正无穷大量，显然可以要求 $y_{N_2}>0$，于是存在 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$，$y_n>y_{n-1}>0$. 由于数列$\left\{\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}\right\}$有界，即存在 $M>0$，有$\left|\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}\right|\leqslant M$，故

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right|\leqslant\left|\frac{x_n}{y_n-y_{n-1}}\right|+\left|\frac{x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right|$$
$$\leqslant2\varepsilon\left|\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}\right|\leqslant2M\varepsilon,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=0$.

（ⅱ）当 a 是非零有限数时，令 $x'_n=x_n-ay_n$，

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y_n}+a=a$，

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y_n}=0$，

由（ⅰ）可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x'_n-x'_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a=0$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$.

结论2　设数列$\{y_n\}$是自某项后单调增加的正无穷大量，数列$\{x_n\}$从某项开始严格递增（减）且$\left\{\frac{x_n}{x_n-x_{n-1}}\right\}$有界，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$（或$-\infty$）

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$（或$-\infty$）.

证明　（ⅰ）对 $a=+\infty$ 的情况：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$ 可知，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n>y_n$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$.

因为$\{x_n\}$从某项开始严格递增的正无穷大量且$\left\{\frac{x_n}{x_n-x_{n-1}}\right\}$有界，由结论1可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$，

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$.

（ⅱ）对 $a=-\infty$ 的情况：因为数列$\{x_n\}$从某项开始严格递减，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=-\infty$ 可令 $z_n=-x_n$，类似于（ⅰ）证明可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=-\infty$.

二、利用 Stolz 定理求极限

例1　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

解　令 $x_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，$y_n=n^2$，由 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

例2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$（$k$ 为自然数）.

解　令 $x_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$，$y_n=n^{k+1}$，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k-C_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots}=\frac{1}{k+1},$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$.

例3　设 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=1,2,\cdots$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n$.

解　由于 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，故$\{x_n\}$严格递减且有下界，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

由 Stolz 定理，得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\sin^2x_n}{x_n^2-\sin^2x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4}{\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^4)}=3,$$

这里用到 $x_{n+1}=\sin x_n=x_n-\frac{1}{3!}x_n^3+o(x_n^4)$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

例4　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$（$a>1$，$k$ 是正整数）.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k-(n-1)^k}{a^n-a^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}$，

其中 $P_{k-1}(n)$ 为关于 n 的 $k-1$ 次多项式；重复上述过程 k 次即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-2}(n)}{a^{n-2}(a-1)^2}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{P_0(n)}{a^{n-k}(a-1)^k}=0.$$

注4　Stolz 定理类似于求函数极限的洛必达法则，求解过程都需重复使用定理，相比较而言，洛必达法则要容易点.

例5　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a^2-1}\right)^{\frac{1}{a^{n-1}}}\left(\frac{a^2}{a^3-1}\right)^{\frac{1}{a^{n-2}}}\cdots\left(\frac{a^{n-1}}{a^n-1}\right)^{\frac{1}{a}}$，$a>1$.

解　令 $x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a^2-1}\right)^{\frac{1}{a^{n-1}}}\left(\frac{a^2}{a^3-1}\right)^{\frac{1}{a^{n-2}}}\cdots\left(\frac{a^{n-1}}{a^n-1}\right)^{\frac{1}{a}}$，

两边取对数，得

$$\ln x_n=\frac{1}{a^{n-1}}\ln\left(\frac{a}{a^2-1}\right)+\frac{1}{a^{n-2}}\ln\left(\frac{a^2}{a^3-1}\right)+\cdots+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a^{n-1}}{a^n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{a^{n-1}}\left(\ln\left(\frac{a}{a^2-1}\right)+a\ln\left(\frac{a^2}{a^3-1}\right)+\cdots+a^{n-2}\ln\left(\frac{a^{n-1}}{a^n-1}\right)\right),$$

由 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\frac{a^{n-2}\ln\left(\frac{a^{n-1}}{a^n-1}\right)}{a^{n-1}-a^{n-2}}=\ln\frac{1}{a},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{a}$.

【参考文献】

[1] 刘三阳. 数学分析选讲［M］. 北京：科学出版社，2007.

[2] Г М 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程·1卷：第1分册［M］. 杨弢亮，叶彦谦，译. 北京：人民教育出版社，1956：7.

[3] 常雁玲. Stolz 定理和不等式在数列极限证明中的应用［J］. 高等数学研究，2015（5）：37－40.

[4] 陈纪修，於崇华，金路. 数学分析：上册［M］. 北京：高等教育出版社，2001.

[5] 庹亚林. Stolz 定理数列形式的一个逆命题及其推广［J］. 重庆工商大学学报（自然科学版），2009（4）：322－326.