大学物理

张磊 （13072919527）

B824，Cyrus Tang Building

作业已经在3216，可按专业班级购买，每份4元

时间：周二1、2节和周四5、6节课间和课后

§ 13.2 平面简谐波 *Planar harmonic wave*

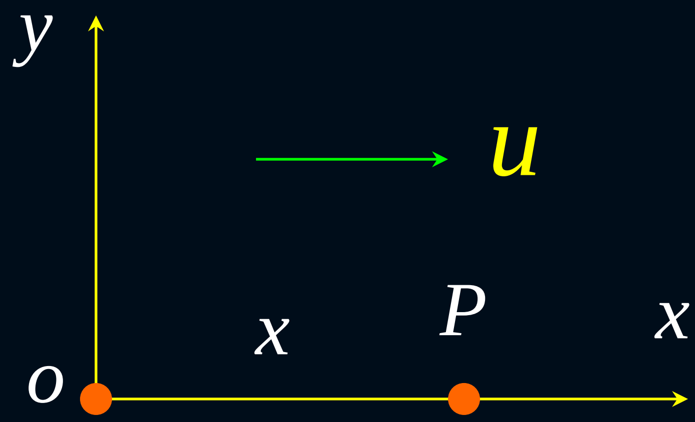
一 平面行波

已知位于坐标原点的质元的振动规律：

$$y_o = f(t)$$

在 t 时刻，x 处质元的振动状态应与

$t-\dfrac{x}{u}$ 时刻原点质元的振动相同。



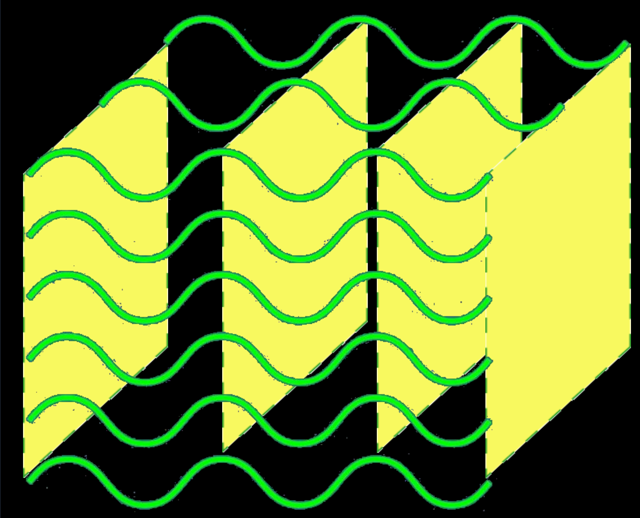
在 t 时刻，x 处质元的振动规律为

$$\boxed{y = f(t-\frac{x}{u}) = f(x,t)}$$

二　平面简谐波

简谐波　介质传播的是谐振动，即波所到之处，介质中各质点作同频率的谐振动。

平面简谐波　波面为平面的简谐波



平面简谐波

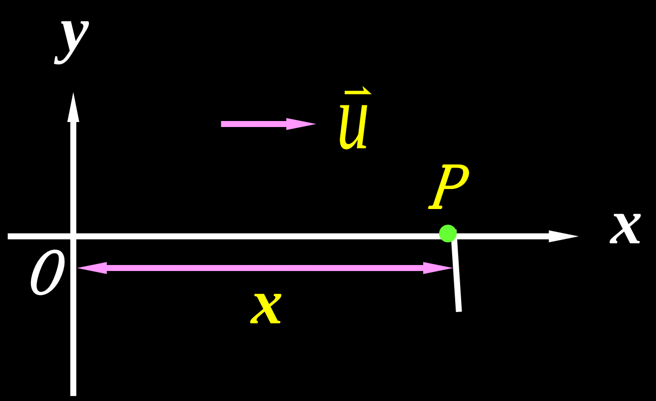
说明

- **简谐波是一种最简单、最基本的行波，研究简谐波的波动规律是研究更复杂波的基础。**
- **本节主要讨论在无吸收（即不吸收所传播的振动能量）、各向同性、均匀无限大媒质中传播的平面简谐波。**
- **同一波面上的点有相同的相位和位移（离开平衡位置）所以只要研究和波面垂直的波线上波的传播。/**

三. 平面简谐波的波函数

一般波函数 $y = f(x,t)$

简谐振动 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$



简谐振动 ➡ 平面简谐波的波函数

若 $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

从时间看，P 点 t 时刻的位移是O 点 $t - \frac{x}{u}$ 时刻的位移；

从相位看，P 点处质点振动相位较O 点处质点相位落后 $\omega \frac{x}{u}$

$$y_P(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

P 为任意点 $y(x,t) = A\cos\cancel{[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]}$ **(波函数)**

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$u=\nu\lambda,\ \omega=2\pi\nu=2\pi\frac{1}{T}$$

波函数的其它形式

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut-x)+\varphi_0]$$

讨论

(1) **由波函数可知波的传播过程中任意两质点 x_1 和 x_2 振动的相位差为**

$$\Delta=[\omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi_0]-[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]=\frac{\omega}{u}(x_1-x_2)$$

$x_2>x_1,\ \Delta<0$，**说明 x_2 处质点振动的相位总落后于 x_1 处质点的振动；**

(2) u 实际上是振动相位的传播速度。

t_1 时刻 x_1 处的振动状态经 Δt 时间传播到 $x_1+\Delta x$ 处，则

$$\omega(t_1-\frac{x_1}{u})=\omega(t_1+\Delta t-\frac{x_1+\Delta x}{u})$$

可得到

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(3) 若波沿轴负向传播时，同样可得到波函数:

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

其它形式

$$\begin{cases} y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t+\dfrac{x}{\lambda})+\varphi_0] \\ y(x,t)=A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda})+\varphi_0] \\ y(x,t)=A\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut+x)+\varphi_0] \end{cases}$$

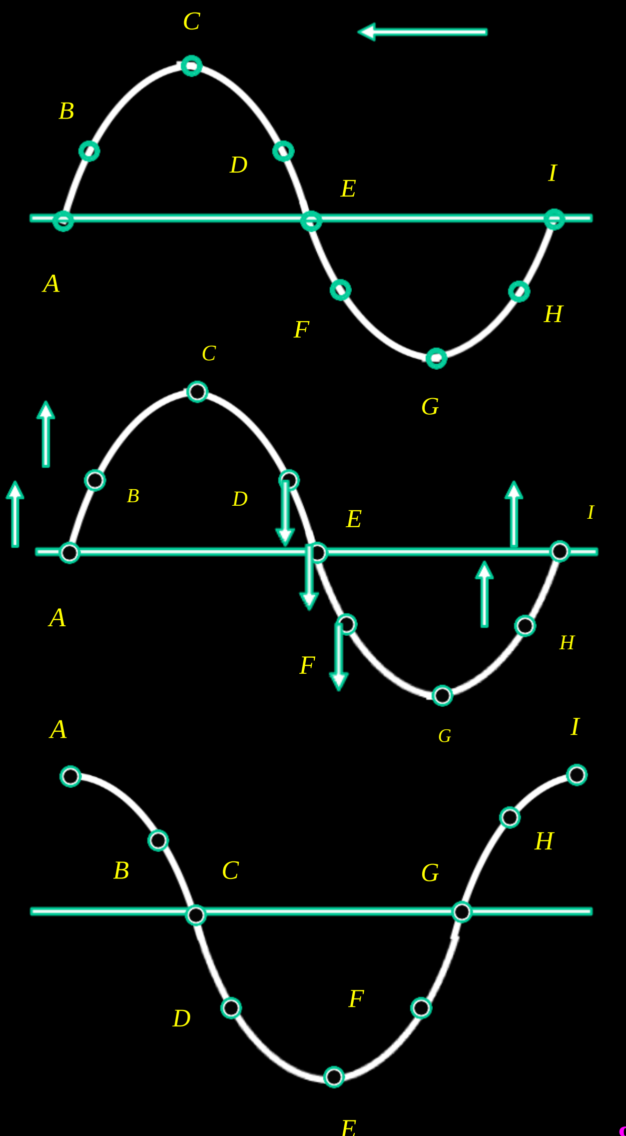
例 设某一时刻绳上横波的波形曲线如下图所示，水平箭头表示该波的传播方向。试分别用小箭头表明图中*A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*各质点的运动方向，并画出经过1/4周期后的波形曲线。

解

根据图中的波动传播方向，可知在*C*以后的质点*B*和*A*开始振动的时刻总是落后于*C*点，而在*C*以前的质点*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*开始振动的时刻却都超前于*C*点。

在*C*达到正的最大位移时，质点*B*和*A*都沿着正方向向着各自的正的最大位移行进，质点*F*、*E*、*D*已经过各自的正的最大位移，向负方向运动。质点I、H不仅过了自己的正的最大位移，还经过了负的最大位移，向正方向运动。质点G则处于负的最大位移处。

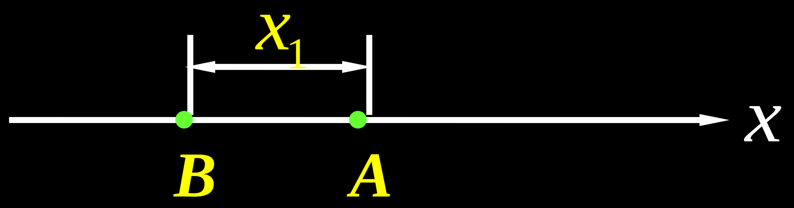
经过*T*/4，波形曲线如下图所示，它表明原来位于*C*和*I*间的波形经过*T*/4，已经传播到*A*、*G*之间来了。



例 如图，已知A 点的振动方程为：$y_A = A\cos[4\pi(t-\frac{1}{8})]$

在下列情况下试求波函数：

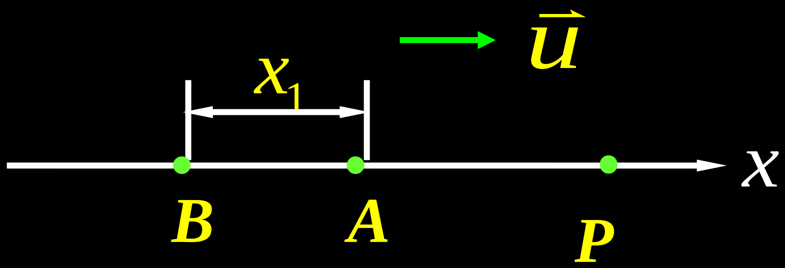
(1) 以 A 为原点；



(2) 以 B 为原点；

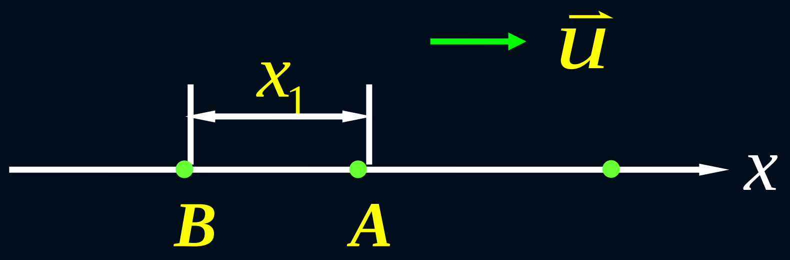
(3) 若 u 沿 x 轴负向，以上两种情况又如何？

解 (1) 在 x 轴上任取一点P，该点振动方程为：



$$y_p = A\cos[4\pi(t-\frac{x}{u}-\frac{1}{8})]$$

波函数为：$$y(x,t) = A\cos[4\pi(t-\frac{x}{u}-\frac{1}{8})]$$



(2) **B** 点振动方程为： $y_B(t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x_1}{u} - \frac{1}{8})]$

波函数为: $y(x,t) = A\cos[4\pi(t - \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$

(3) 以 **A** 为原点： $y(x,t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$

以 **B** 为原点： $y(x,t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$

写波函数 要注意 原点的选取 和 波传播的方向

四. 波函数的物理意义

$$y(x,t)=A\cos[2\pi\,(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

(1) 振动状态的空间周期性

$y(x+\lambda\ \ ,t)=y(x,t)$, 说明波线上振动状态的空间周期性

- 由质元看：相隔 λ 的两点振动状态完全*相同(同相点)*。
- 由波形看：波形在空间以λ为"周期" 分*布着*。

(2) 波形传播的时间周期性

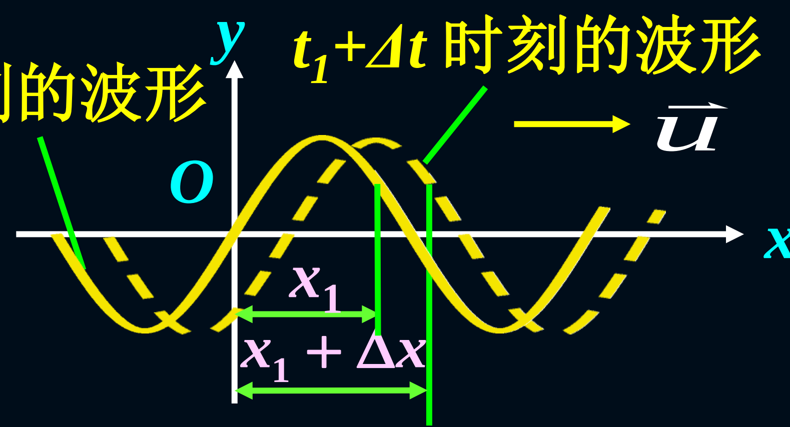
$y(x,t+T)=y(x,t)$, 说明波形传播的时间周期性

- 由质元看：*每个质元振动周期为T*
- 由波形看：*t时刻和 t+T 时刻的波形曲线完全重合*。

(3) x 给定，$y=y\,(t)$ 是 x 处振动方程 $y(x_0,t)=A\cos[\omega t-\omega\dfrac{x_0}{u}+\varphi_0]$

(4) t 给定，$y=y(x)$ 表示 t 时刻的波形图 $y(x,t_0)=A\cos[\omega t_0-\omega\dfrac{x}{u}+\varphi_0]$

(5) y 给定, x和 t 都在变化，表明波形传播和质点分布的时空周期性



y 给定
$$y(x_1,t_1)=A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})]$$

设初相 $\varphi_0=0$

$$=y(x_2,t_2)=A\cos[\omega(t_1+\Delta t-\frac{x_1+\Delta x}{u})]$$

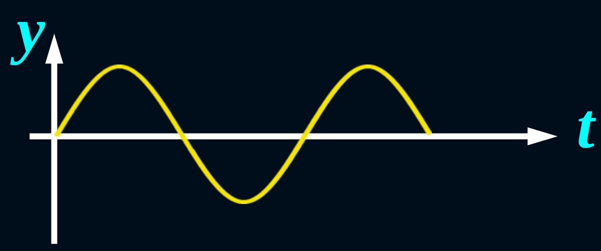
$$\Delta x=u\Delta t$$

振动状态 经过时间Δt，传过了$\Delta x = u\ \Delta t$ 的距离.

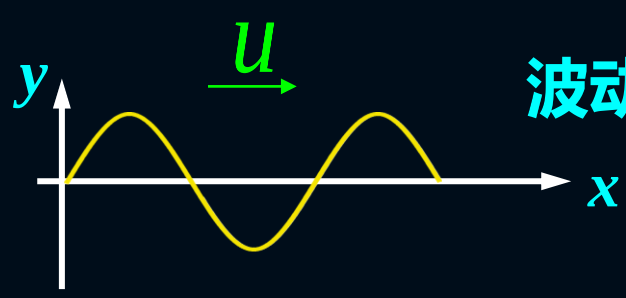
在 Δt 内，整个波形 传播了$\Delta x = u\ \Delta t$的距离。

波动曲线与振动曲线的不同

- 不同时刻对应有不同的波形曲线
- 波形曲线能反映横波、纵波的位移情况
- 波形曲线上必须标明时刻 t 和波的传播方向
- 振动曲线反映某一质元的位移随 t 的变化



振动曲线



波动曲线

y - x 曲线反映某时刻 t 各质元位移 y 在空间的分布情况

例 一平面简谐波沿x轴正方向传播，已知其波函数为

$$y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\ \mathrm{m}$$

求 (1) 波的振幅、波长、周期及波速；

(2) 质点振动的最大速度。

解 (1) **a. 比较法(与标准形式比较）**

标准形式 $$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

波函数为 $$y = 0.04\cos 2\pi(\frac{50}{2}t - \frac{0.10}{2}x)$$

比较可得 $$A = 0.04\ \mathrm{m} \qquad T = \frac{2}{50} = 0.04\ \mathrm{s}$$

$$\lambda = \frac{2}{0.10} = 20\ \mathrm{m} \qquad u = \frac{\lambda}{T} = 500\ \mathrm{m/s}$$

b. 分析法（由各量物理意义，分析相位关系）

$$\boxed{y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\ \mathrm{m}}$$

振幅 $A = y_{\max} = 0.04\ \mathrm{m}$

波长 $\pi(50t - 0.10x_1) - \pi(50t - 0.10x_2) = 2\pi$

$$\lambda = x_2 - x_1 = 20\ \mathrm{m}$$

波形图上相位相差2π两点的距离

周期 $\pi(50t_2 - 0.10x) - \pi(50t_1 - 0.10x) = 2\pi$

$$T = t_2 - t_1 = 0.04\ \mathrm{s}$$

振动质点相位变化经历2π的时间

波速 $\pi(50t_2 - 0.10x_2) = \pi(50t_1 - 0.10x_1)$

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 500\ \mathrm{m/s}$$

单位时间内相位传递的距离

(2)质点振动的最大速度?

$$\upsilon = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.04\times 50\pi\sin\pi(50t - 0.10x)$$

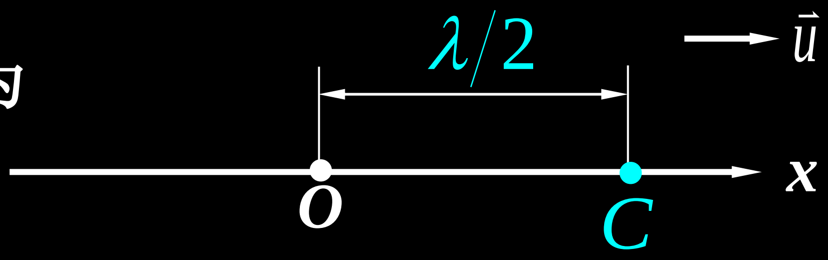
$$\upsilon_{\max} = 0.04\times 50\pi = 6.28\ \mathrm{m/s} \neq u$$

例 一列波长为λ的平面简谐波沿x轴正方向传播。已知在$x_0=(1/2)\lambda$处振动的方程为 $y = A\cos\omega t$

求 该平面简谐波的波函数

解 从时间上看，O点在t时刻的位移是C点在 $t+\dfrac{x_0}{u}$ 时刻位移

原点O处在t时刻质点的位移为



$$y = A\cos\omega(t+\frac{x_0}{u})$$

$$= A\cos\omega(t+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{u}) = A\cos(\omega t+\pi)$$

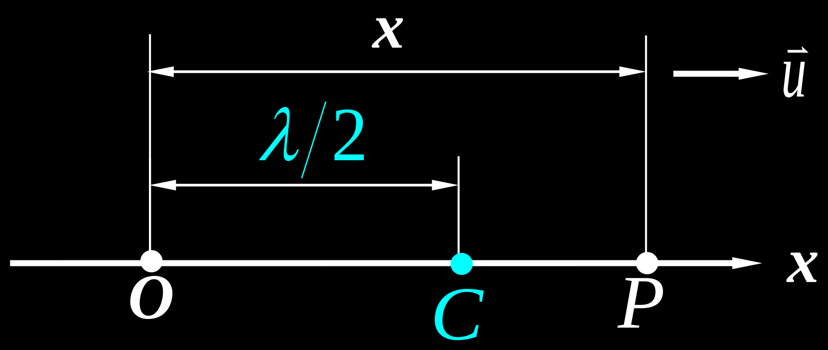
该平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda}+\pi)$$

另一解法

已知C点振动方程为

$$y = A\cos\omega t$$



从时间上看， P点在t时刻位移是C点在 $t - \dfrac{x-(\lambda/2)}{u}$ 时刻的位移

P点处质点在t时刻的位移为

$$y = A\cos\omega[t - \frac{x-(\lambda/2)}{u}]$$

$$= A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda} + \pi)$$

该平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda} + \pi)$$

1. 要写出平面简谐波的波函数，须知：

1) 某参考点的振动方程(知 A, ω, ϕ)

2).波的传播方向

3).波长λ (或 u)

设已知参考点 a （坐标为d）的振动表达式为

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi_a)$$

任意的P点的振动： A和 ω均与a点的相同, 沿+ x 方向传播，所以位相比a点落后 (2π/λ)(x - d). (对任意的 x 值都成立!)

∴P 点的振动表达式为

$$\boxed{y_p = A\cos[\omega t + \varphi_a - \frac{2\pi}{\lambda}(x-d)]}$$

称为沿+ x 方向的一维简谐波的波函数

2. 注意区别波形曲线和振动曲线

波形曲线 y—x ， 振动曲线 y—t

波形曲线上应标明 时刻 t 、传播方向u

振动曲线上应标明 哪个质元 x

3. 要求掌握

1) 由某时刻的波形曲线

→ 画出另一时刻的波形曲线

2) 由某时刻的波形曲线

→确定某些质元的振动趋势

→画出这些质元的振动曲线

3) 由某质元的振动曲线

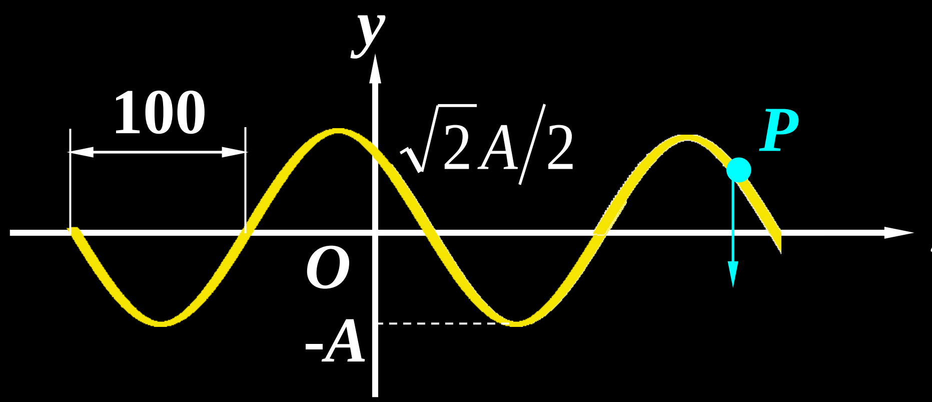
→画出某时刻的波形曲线

例 如图所示为一平面简谐波在t=0时刻的波形图，设此简谐波的频率为250Hz，且此时质点P的运动方向向下，

求 (1) 该波的波函数；

(2) 在距原点O为100米处质点的振动方程与振动速度表达式。

解 (1) P点振动方向向下，说明波沿$-x$ 轴传播.



$t=0 \qquad x=0$

处的初相位为：$\dfrac{\pi}{4}$

O点的振动方程 $$y = A\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{4})$$

$$= A\cos(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

该坐标下的波函数

$$y = A\cos[500\pi(t + \frac{x}{5\times 10^4}) + \frac{\pi}{4}]$$

(2) 在距原点***O***为**100**米处质点的振动方程

$$y = A\cos[500\pi(t + \frac{100}{5\times 10^4}) + \frac{\pi}{4}]$$

$$= A\cos(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

$$= -A\cos(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

$$\boldsymbol{v} = 500\pi A\sin(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

五. 平面波的波动微分方程

由 $$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

知
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=-A\omega^2\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}&=-A\frac{\omega^2}{u^2}\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

说明

(1) 上式是一切平面波所满足的微分方程（正、反传播）；

(2) 它的普遍意义在于：任何的物理量，不管是力学量，电学量或其它的量，只要它的时间和坐标关系满足该微分方程，则该物理量就按波的形式传播； 如：电磁波、热传导、化学中的扩散等过程。

(3) 若物理量是在三维空间中以波的形式传播，波动方程为右式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

§ 13.3 波的能量

波动过程 → { 质元由静止开始振动；质元也发生形变 } → 波动过程是能量的传播过程

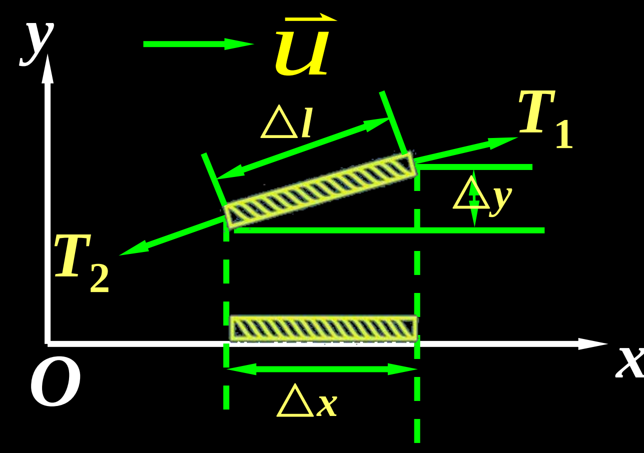
一. 波的能量和能量密度

以绳索上传播的横波为例：设波沿x方向传播，取线元

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

线元的动能为

$$W_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\Delta m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad ①$$



线元的势能（原长为势能零点）为

$$W_p = T(\Delta l - \Delta x)$$

其中 $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\Delta x[1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2]^{1/2}$

$$\approx \Delta x[1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2}\approx \Delta x[1+\frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2]$$

$$W_p\approx \frac{1}{2}T\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \qquad ②$$

线元的机械能为 $\quad W=W_k+W_p \qquad ③$

将 $T=u^2\mu$ 和 $y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$ 代入①、②、③

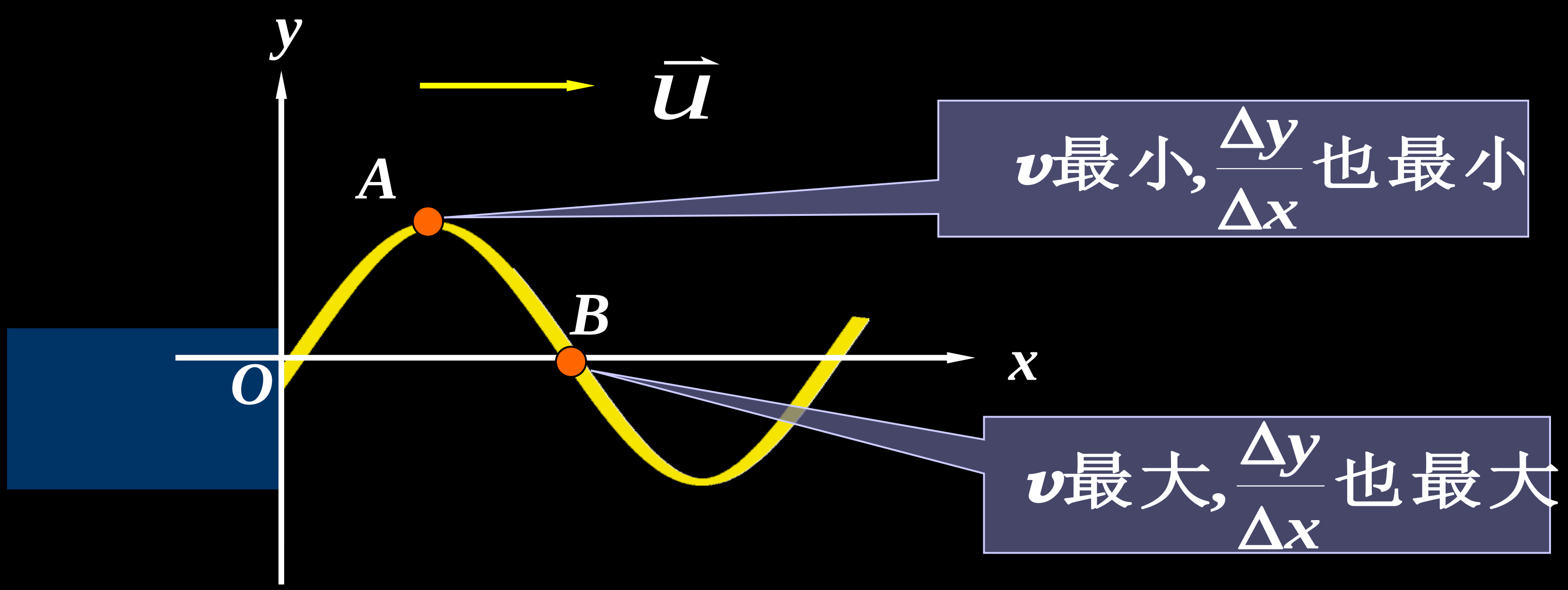
$$W_k=\frac{1}{2}\mu\Delta x(\frac{\partial y}{\partial t})^2=\frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$W_p=\frac{1}{2}T\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2=\frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

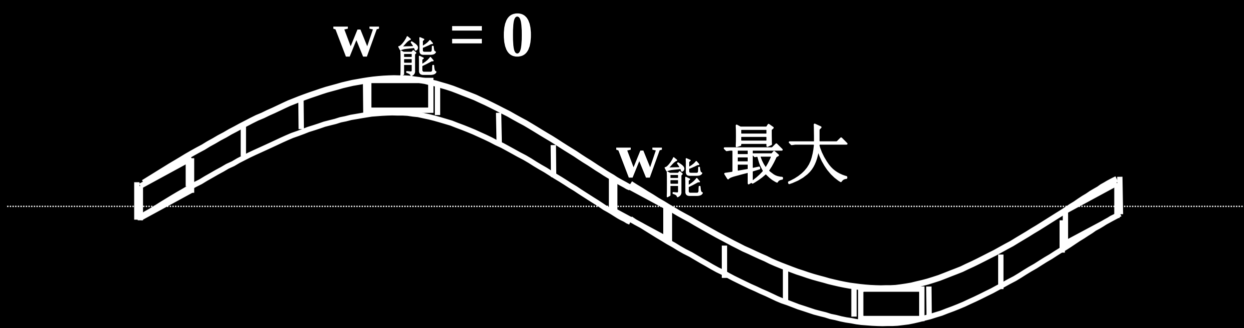
机械能 $W = W_k + W_p = \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

讨论

(1) 在波的传播过程中，**媒质中任一质元的动能和势能是同步变化的**，即W_k=W_p，与简谐弹簧振子的振动能量变化规律是不同的；如图所示，*A* **点质元**的动能、势能同时达到最小；*B* **点质元**的动能、势能同时达到最大；



机械能 $W = W_k + W_p = \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$



某时刻弹性棒中各质元能量分布情况

位移最大时	平衡位置时
速度为0 → w_k=0	速度最大→ w_k最大
变形为0 → w_p=0	变形最大→ w_p最大
所以 $W_{能}$最小。	所以 $W_{能}$最大。

(2) 质元机械能随时空周期性变化，表明任一质元在波传播过程中都在不断吸收和放出能量；因此，波动过程是能量的传播过程。

二. 能流密度

1. 能量密度

设绳子的横截面为S，体密度为ρ，则线元单位体积中的机械能(能量密度)为

$$w=\frac{W}{\Delta V}=\frac{W}{S\Delta x}=\frac{\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}{S\Delta x}$$

$$=\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]=w(x,t)$$

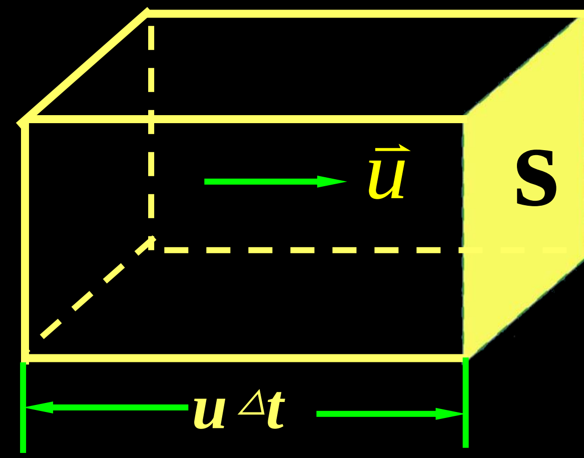
- 平均能量密度

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

2. 能流

在单位时间内通过一定截面的波动能量为**能流**

$$P=\frac{wu\Delta tS}{\Delta t}=wuS$$



在一个周期中的**平均能流**为

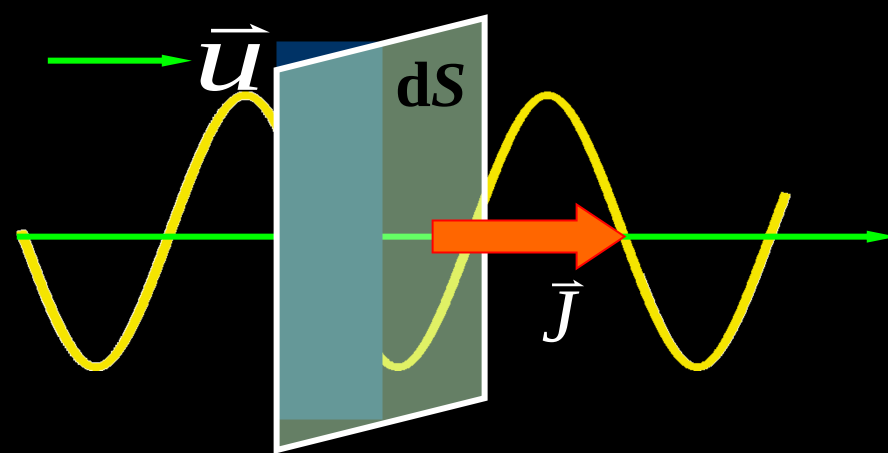
$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P\mathrm{d}t=\overline{w}uS$$

- **能流密度** 通过垂直于波线截面单位面积上的能流。

大小： $J=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}=wu$

方向：波的传播方向

矢量表示式： $\vec{J}=w\vec{u}$



波的强度 一个周期内能流密度大小的平均值。

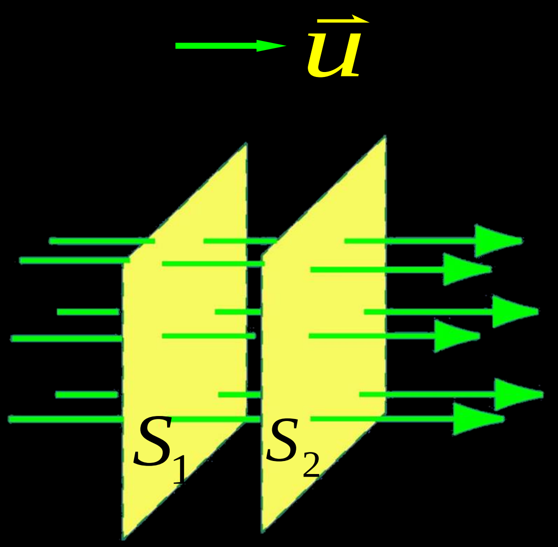
$$I=\bar{J}=\frac{1}{T}\int_0^T J\mathrm{d}t=\frac{u}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=u\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\propto A^2$$

三. 平面波和球面波的振幅 (不吸收能量)

1. 平面波

$$W_1=I_1S_1=\bar{w}_1uS=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS$$

$$W_2=I_2S_2=\bar{w}_2uS=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS$$

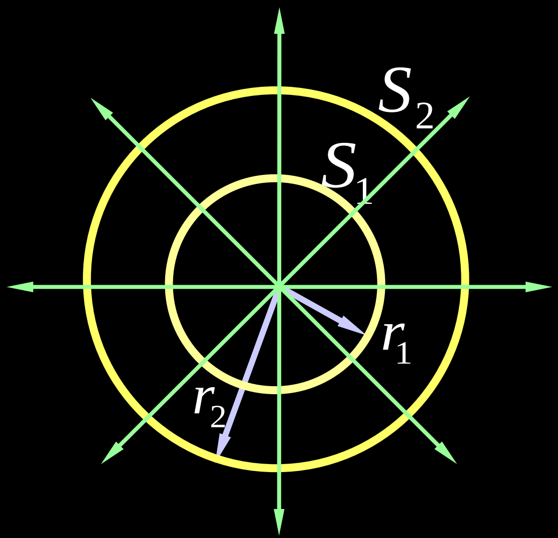


由 $W_1=W_2$

得 $\boxed{A_1=A_2}$

这表明平面波在介质不吸收的情况下，振幅不变。

2. 球面波



由 $$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u S_1=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u S_2$$

得 $$A_1^2\cdot 4\pi\ r_1^2=A_2^2\cdot 4\pi\ r_2^2$$

$$A_1 r_1=A_2 r_2$$

令 $Ar=A_0$(**A_0为离原点（波源）单位距离处波的振幅）**

则球面简谐波的波函数为

$$\boxed{y(r,t)=\frac{A_0}{r}\cos[\omega(t-\frac{r}{u})+\varphi_0],\qquad r>0}$$

球面波的振幅在介质不吸收的情况下,随 r 增大而减小.

声波是______(填“横波”或“纵波”).若声波波源是置于空气中的一个球面物，它发出的球面简谐波在与球心相距r_0处的振动振幅为A_0，不计空气对声波能量吸收等引起的损耗，则在 $r>r_0$ 处声波振动振幅为$A=$________。

解：声波是纵波

波的强度(能流密度) $I \propto A^2$

r_0处的平均能流密度为 $I_0 = kA_0^2$

r处的平均能流密度为 $I = kA^2$

不计能量的损耗，有 $4\pi r_0^2 I_0 = 4\pi r^2 I$

$$\therefore \quad A = \frac{r_0}{r} A_0$$

例　一平面简谐波在弹性介质中传播，在某一瞬时，介质中某质元正处于平衡位置，此时它的能量是

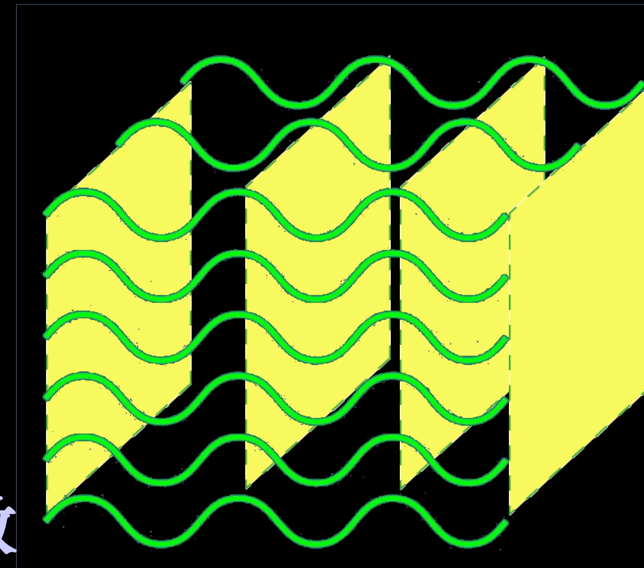
(1) 动能为零，势能最大。

(2) 动能为零，势能为零。

(3) 动能最大，势能最大。

(4) 动能最大，势能为零。

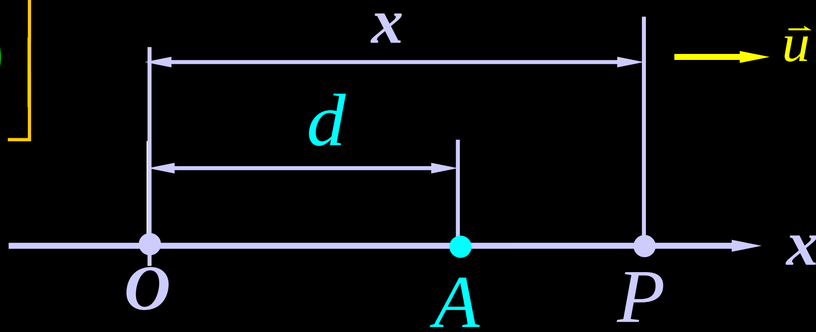
平面简谐波



简谐振动 ⟶ 平面简谐波的波函数

已知 $y_A = A\cos(\omega t + \varphi_A)$

→ 沿 +x 方向传播的一维简谐波的波函数



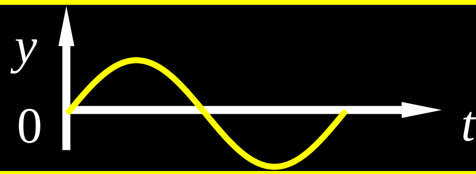
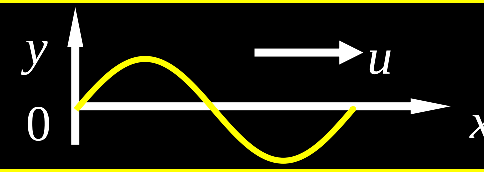
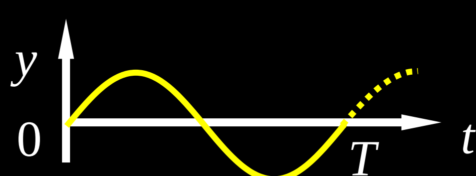
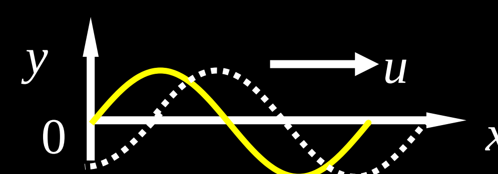
$$y_p = A\cos\left[\omega t + \varphi_A - \frac{2\pi}{\lambda}(x-d)\right]$$

$$= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x-d}{u}\right) + \varphi_A\right]$$

→ 沿 –x 方向传播的一维简谐波的波函数

$$y_p = A\cos\left[\omega t + \varphi_A + \frac{2\pi}{\lambda}(x-d)\right] = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x-d}{u}\right) + \varphi_A\right]$$

波动图像与振动图像的比较

	振动图像	波动图像
图像		
横坐标	时 间	质点的平衡位置
研究对象	一个质点	介质中的各个质点
物理意义	反映一个质点相对平衡位置的位移随时间的变化规律	反映某时刻介质中各质点相对平衡位置的位移值的波形
提供的物理信息	振幅、周期；任一时刻质点的位移、加速度、振动方向	振幅、波长；该时刻各质点的位移、加速度；已知波的传播方向可确定该时刻各质点的振动方向，反之亦然
图像变化		
形象比喻	拍一个人跳舞的录像	拍许多人跳舞的一张照片

1. 要写出平面简谐波的波函数，须知：

1) 某参考点的振动方程(知 A, ω, φ)

2).波的传播方向

3).波长λ (或 u)

设已知参考点 a （坐标为d）的振动表达式为

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi_a)$$

任意的P点的振动： A和 ω均与a点的相同, 沿+ x 方向传播，所以位相比a点落后 (2π/λ)(x - d). (对任意的 x 值都成立!)

∴P 点的振动表达式为

$$\boxed{y_p = A\cos[\omega t + \varphi_a - \frac{2\pi}{\lambda}(x-d)]}$$

称为沿+ x 方向的一维简谐波的波函数

2. 注意区别波形曲线和振动曲线

波形曲线 y—x ，　振动曲线 y—t

波形曲线上应标明　时刻 t 、传播方向u

振动曲线上应标明　哪个质元 x

3. 要求掌握

1) 由某时刻的波形曲线

→ 画出另一时刻的波形曲线

2) 由某时刻的波形曲线

→确定某些质元的振动趋势

→画出这些质元的振动曲线

3) 由某质元的振动曲线

→画出某时刻的波形曲线

波的能量

波动过程是能量的传播过程。

在波的传播过程中，媒质中任一质元的动能和势能是同步变化的，即$W_k=W_p$。质元机械能随时空周期性变化，表明质元在波传播过程中不断吸收和放出能量；

能量密度 $$w(x,t)=\frac{W}{S\Delta x}=\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

能流密度 $$\vec{J}=w\vec{u}$$

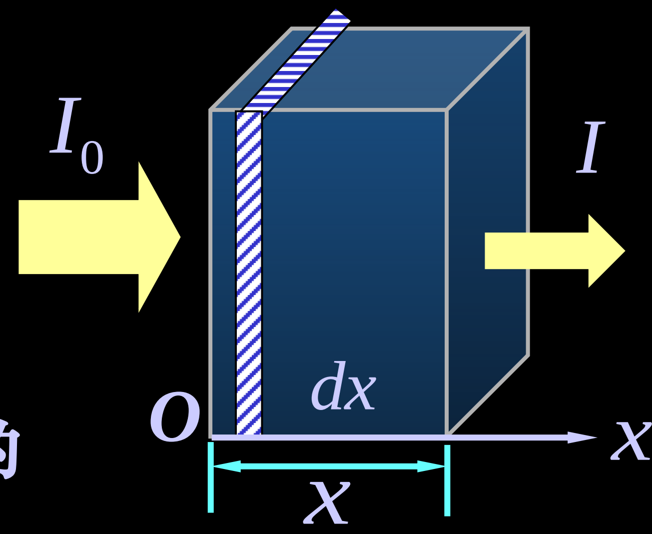
平均能量密度 $$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

平均能流密度(波的强度) $$I=\overline{J}=u\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u$$

四. 波的吸收

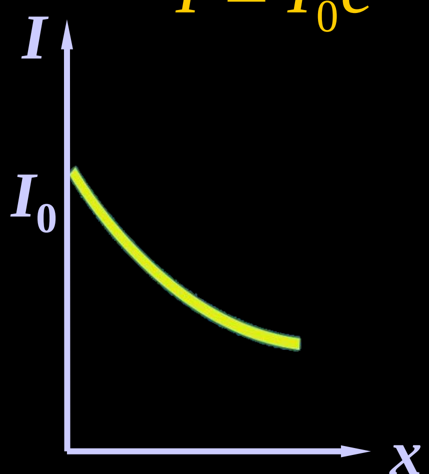
吸收媒质，实验表明

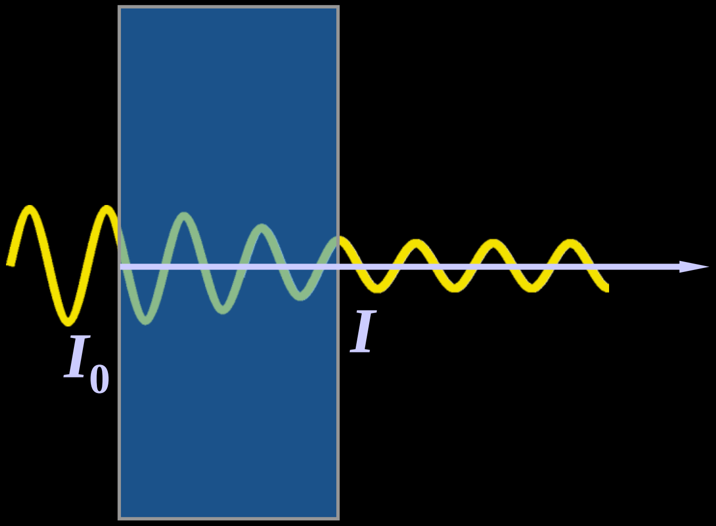
$$\mathrm{d}I = -\alpha I \mathrm{d}x$$



α 为介质吸收系数，与介质的性质、温度及波的频率有关

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$



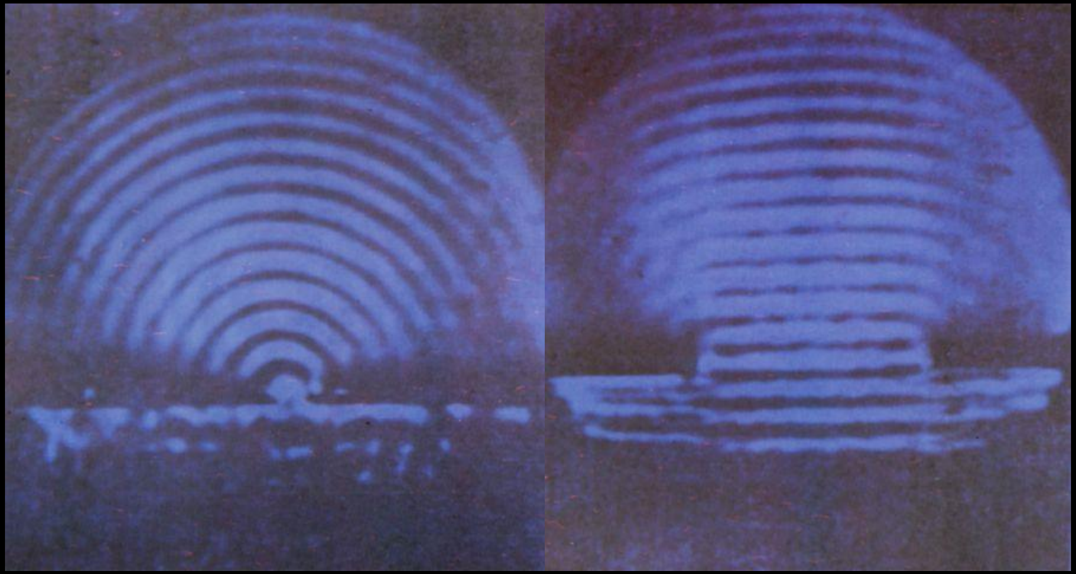


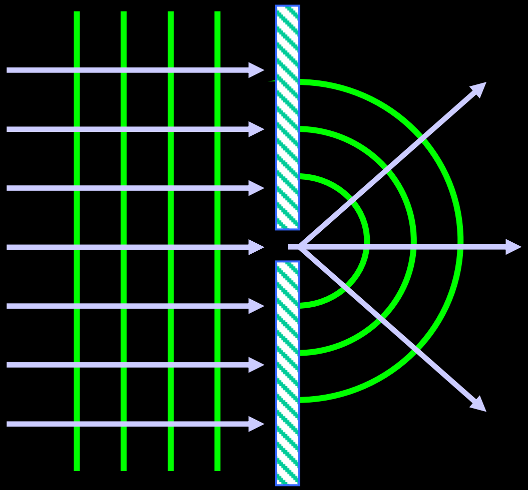
无吸收 平面波 $A_1 = A_2$

球面波 $A_1 r_1 = A_2 r_2$　　$y(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]$

有吸收 $I = I_0 e^{-\alpha x}$

§13.4 惠更斯原理





1690年，荷兰物理学家惠更斯提出：

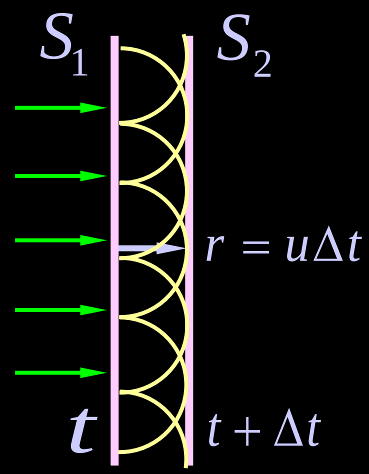
(1) 行进中的波面上任意一点都可看作是新的子波源；

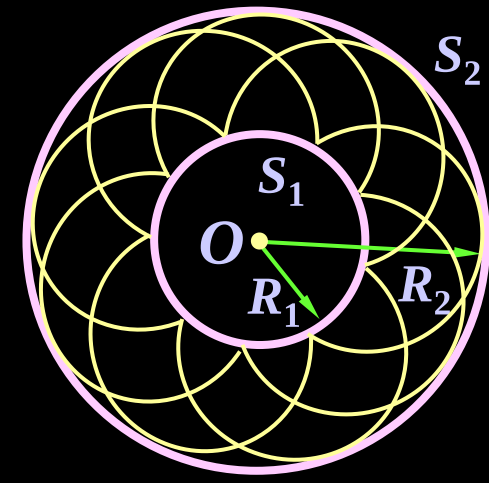
(2) 所有子波源各自向外发出许多子波；

(3) 各个子波所形成的包络面，就是原波面在一定时间内所传播到的新波面。

说明

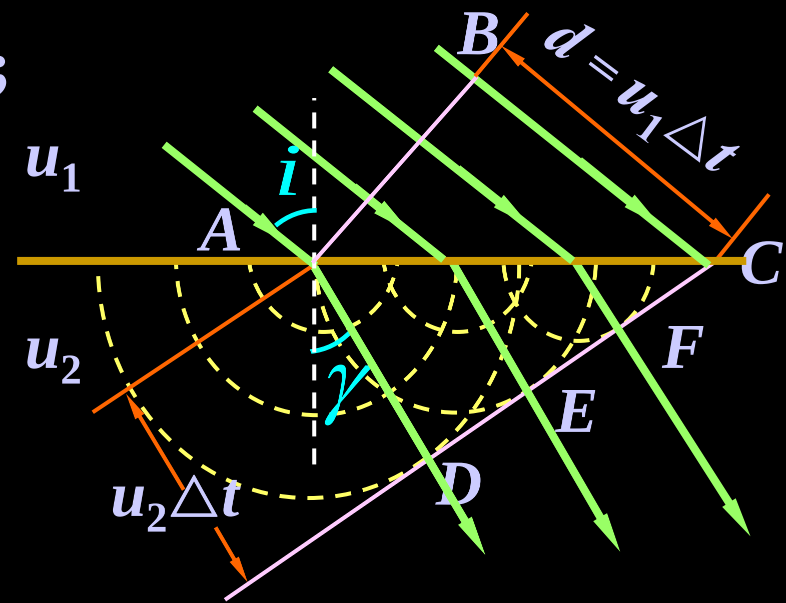
(1) 已知某一时刻波前，可用几何方法决定下一时刻波前；





(2) 亦适用于电磁波，非均匀和各向异性媒质；

(3) 解释衍射、反射、折射现象；



由几何关系知：

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1\Delta t}{u_2\Delta t} = \frac{u_1}{u_2}$$

(4) 不足之处（未涉及振幅，相位等的分布规律）。

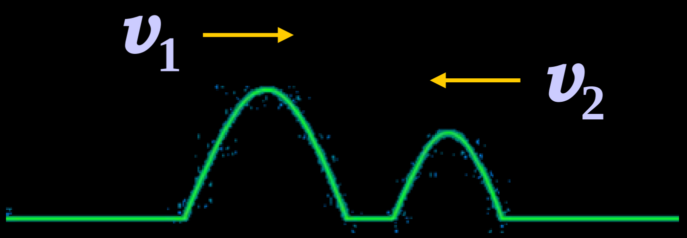
§13.5 波的干涉

波传播的独立性：

当几列波在传播过程中在某一区域相遇后再行分开，各波的传播情况与未相遇一样，仍保持它们各自的频率、波长、振动方向等特性继续沿原来的传播方向前进。

叠加原理：

在波相遇区域内，任一质点的振动，为各波单独存在时所引起的振动的合振动。



注意 波的叠加原理仅适用于**线性波**的问题

相干波与相干条件

一般情况下，各个波的振动方向和频率均不同，相位关系不确定，叠加的合成波较为复杂。

- **干涉现象**

当两列（或多列）**相干波**叠加的结果，其合振幅 A 和合强度 I 在空间形成一种**稳定的分布**，即**某些点上的振动始终加强，某些点上的振动始终减弱**。 —— **波的干涉**

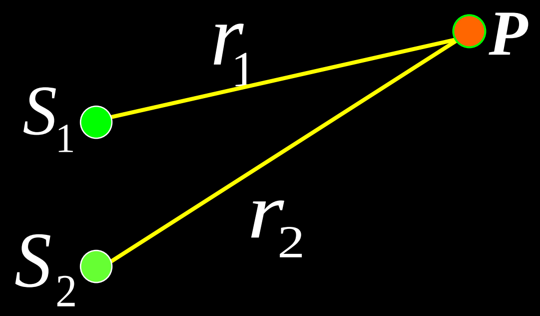
- **相干条件**　　**频率相同、振动方向相同、相位差恒定**
- **相干波**　　满足相干条件的波
- **相干波源**　　产生相干波的波源

干涉规律

相干条件:1.频率相同、2.振动方向相同、3.相位差恒定。

S_1 $\quad y_{01}=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

S_2 $\quad y_{02}=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$



P $\quad y_1=A_1\cos(\omega t-2\pi\frac{r_1}{\lambda}+\varphi_1)$

$$y_2=A_2\cos(\omega t-2\pi\frac{r_2}{\lambda}+\varphi_2)$$

根据叠加原理可知，P 点处振动方程为

$$y=y_1+y_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

- 合振动的振幅

$$A^2=A_1{}^2+A_2{}^2+2A_1A_2\cos[\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}]$$

- P 点处波的强度 $I=I_1+I_2+\boxed{2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}$

干涉项

相位差 $$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\frac{\boxed{r_2 - r_1}}{\lambda}$$

波程差

- **空间点振动的情况分析** —— $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$

当 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \qquad k = 0,1,2,\cdots$

$$A_{\max} = A_1 + A_2 \qquad I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

振动加强 or 干涉相长

当 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi \qquad k = 0,1,2,\cdots$

$$A_{\min} = \left|A_1 - A_2\right| \qquad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

振动减弱 or 干涉相消

讨论 $$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$

(1) 若 $\varphi_1=\varphi_2$

干涉相长 $\delta=r_1-r_2=\pm k\lambda,\qquad k=0,1,2,\cdots$

干涉相消 $\delta=r_1-r_2=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2},\qquad k=0,1,2,\cdots$

(2) 若 $A_1=A_2=A$

干涉相长 $A_{\max}=2A \qquad I_{\max}=4I_0$

干涉相消 $A_{\min}=0 \qquad I_{\min}=0$

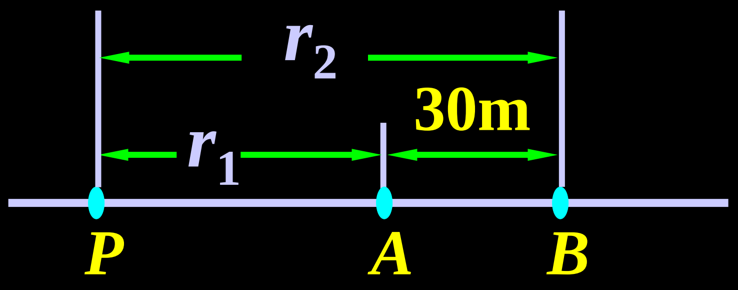
从能量上看，当两相干波发生干涉时，在两波交叠的区域，合成波在空间各处的强度并不等于两个分波强度之和，而是发生重新分布。这种新的强度分布是**时间上稳定的、空间上强弱相间**具有**周期性**的一种分布。

例 A、B 为两相干波源，距离为 30 m， 振幅相同，ω 相同，初相差为 π ，u = 400 m/s， f =100 Hz 。

求 A、B 连线上因干涉而静止的各点位置。

解

$$\lambda = \frac{u}{f} = 4\ \text{m}$$



$$\delta = r_2 - r_1 = \pm 30\ \text{m}$$

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \pi \pm \frac{2\pi}{4}\times 30 = \begin{cases} 16\pi & \text{（}P\text{ 在 }B\text{ 右侧）} \\ -14\pi & \text{（}P\text{ 在 }A\text{ 左侧）} \end{cases}$$

$I = I_{\max}$（即在两侧干涉相长，不会出现静止点）

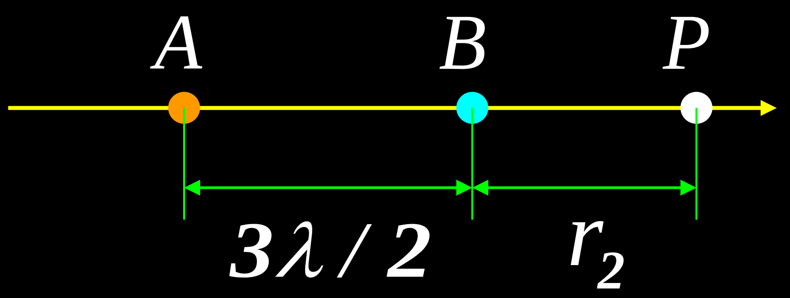
P 在 A、B 中间 $\delta = r_2 - r_1 = r_1 + r_2 - 2r_1 = 30 - 2r_1$

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{2\pi}{\lambda}\delta = -14\pi + \pi r_1 = \pm(2k+1)\pi$$ **干涉相消**

$$r_1 = 14 \pm (2k+1) \qquad k = 0,1,2,\cdots 7$$

（在 A，B 之间距离A 点为 r_1=1,3,5,…,29 m 处出现静止点）

例 如图所示， 有两个相干波源 A, B ，已知两波振幅相同，两波源的初相差为零，两波源相距差 $3\lambda/2$ 试求：连线上一点 P 的相位差和叠加振动的振幅。



解：P 点的相位差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

$$= 0 - \frac{2\pi(r_2 - r_2 - \frac{3}{2}\lambda)}{\lambda} = 3\pi$$ 减弱条件

P 点的叠加振幅：

$$A_P^{\ 2} = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos[3\pi] = 0$$ 干涉相消

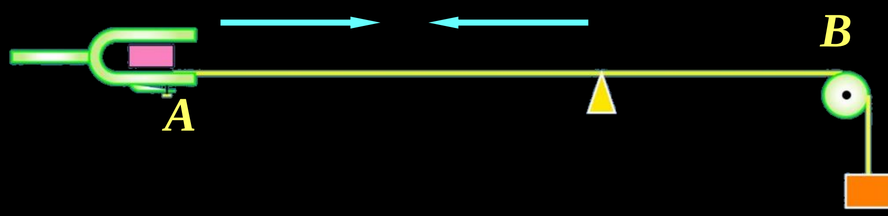
$\Rightarrow I_P = 0$

• 注意相位差与波程差在波叠加中的作用

§13.6 驻波

两列等振幅相干波相向传播时叠加形成驻波

一. 弦线上的驻波实验



波腹　　　　波节

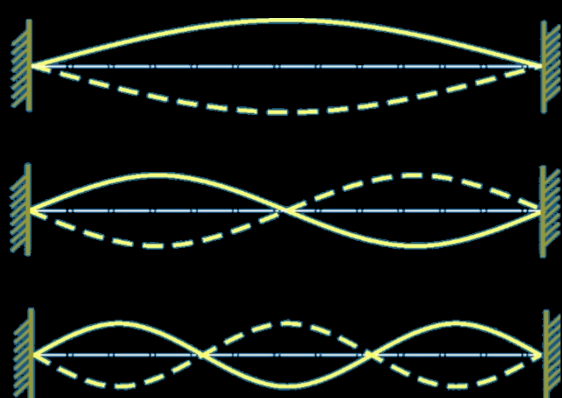
驻波条件：$L = n\dfrac{\lambda}{2}$

$n = 1,2,3\cdots$

二. 驻波波函数

$$y_1 = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$$

$$y_2 = A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$$



$L = \lambda/2$

$L = \lambda$

$L = 3\lambda/2$

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})]$$

$$= (2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}) \cdot \cos 2\pi\ \nu t = A'(x)\cos\omega t$$

讨论

(1) $A'(x) = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$，**即驻波是各质点振幅按余弦分布的特殊谐振动**

波腹($A' = A'_{max}$)： 当 $\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1$ 时 $2\pi\frac{x}{\lambda} = k\pi$

$$x = k\frac{\lambda}{2}, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

波节($A' = A'_{min}$)： 当 $\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0$ 时 $2\pi\frac{x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

相邻两波腹之间的距离：

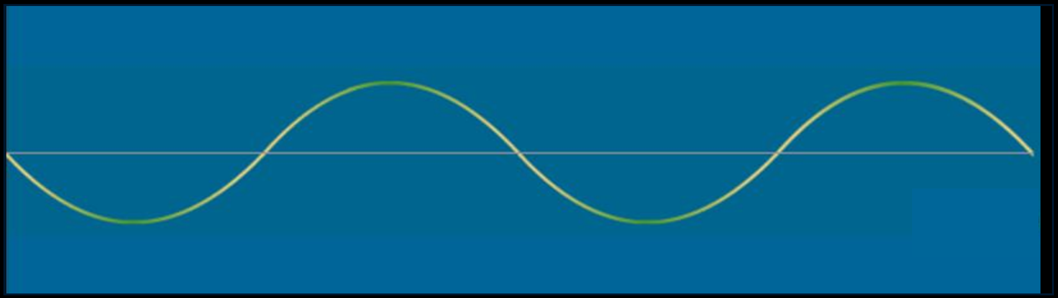
$$x_{k+1}-x_k=(k+1)\frac{\lambda}{2}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$$

相邻两波节之间的距离：

$$x_{k+1}-x_k=[2(k+1)+1]\frac{\lambda}{4}-(2k+1)\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}$$

(2) 所有波节点将媒质划分为长 $\lambda/2$ 的许多段，每段中各质点的振动振幅不同，但相位皆相同；而相邻段间各质点的振动相位相反；即驻波中不存在相位的传播。

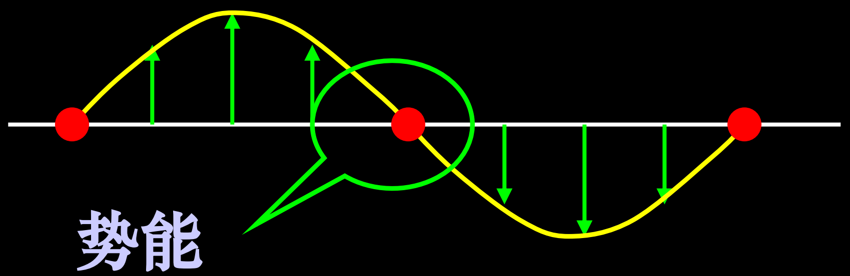
$$y=A'(x)\cos\omega t$$



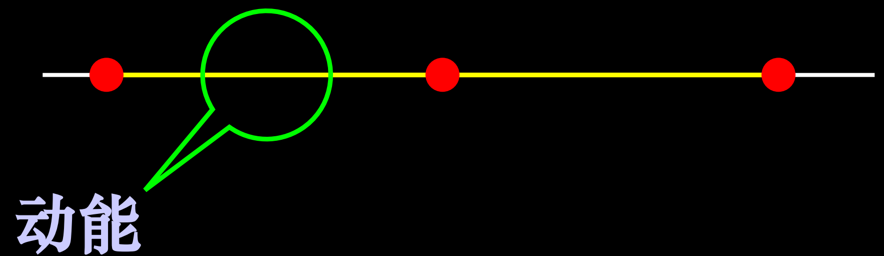
(3) 没有能量的定向传播

能量只是在波节和波腹之间，进行动能和势能的转化。

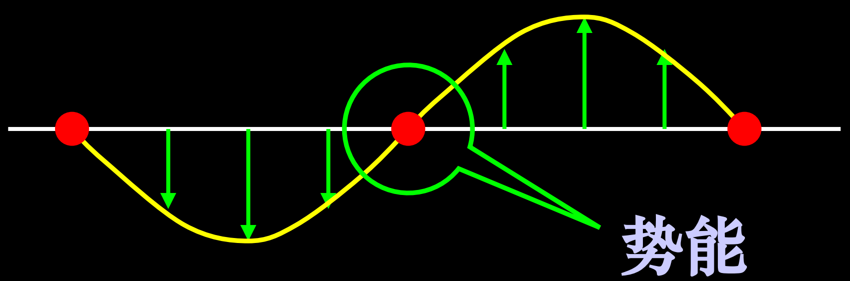
$t = 0$



$t = \frac{T}{4}$

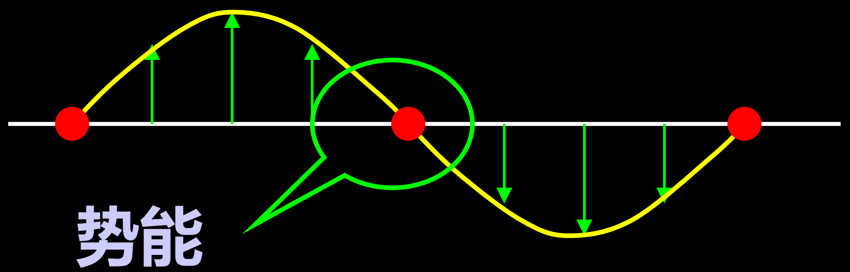


$t = \frac{T}{2}$



没有能量的定向传播。能量只是在波节和波腹之间，进行动能和势能的转化。这是“驻”的另一层含义。

$$t = 0$$



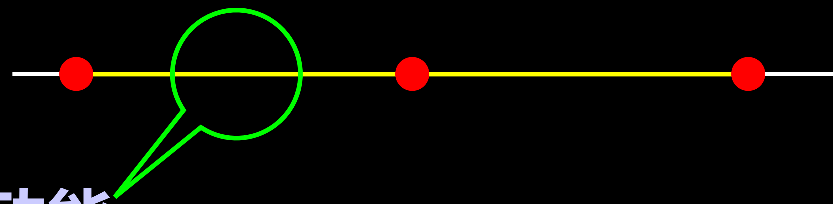
各质点的位移都同时达到各自的最大值时，其动能均为零。全部能量是势能。

但波节处的质元相对形变大，弹性势能大。

波腹处的质元形变为零，势能为零。

因此，能量主要集中波节附近。

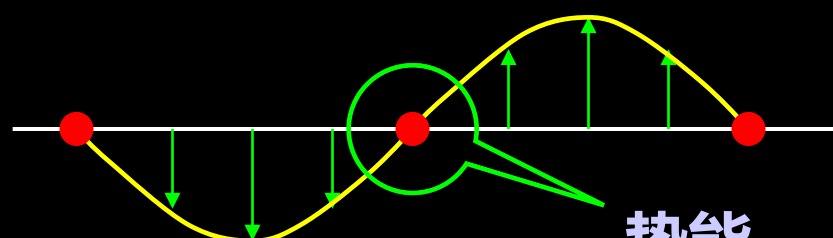
$$t = \frac{T}{4}$$



当各质元同时通过平衡位置时，各质元均无形变，势能为零。能量全部是动能。

由于波腹处的质元速度最大，动能最大，因而能量主要集中于波腹附近。

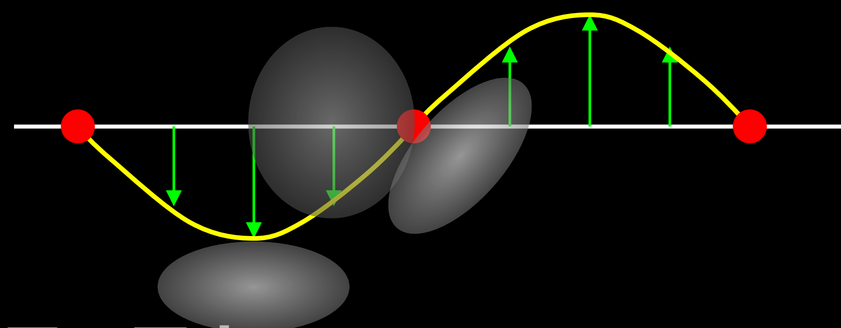
$$t = \frac{T}{2}$$



结论

从整个运动过程看，能量在相邻的波腹，波节间来回转换，它限制在以相邻的波腹和波节为边界的长为$\frac{\lambda}{4}$的小区段中。

波节两侧的媒质互不交换能量，波腹两侧的媒质也互不交换能量。

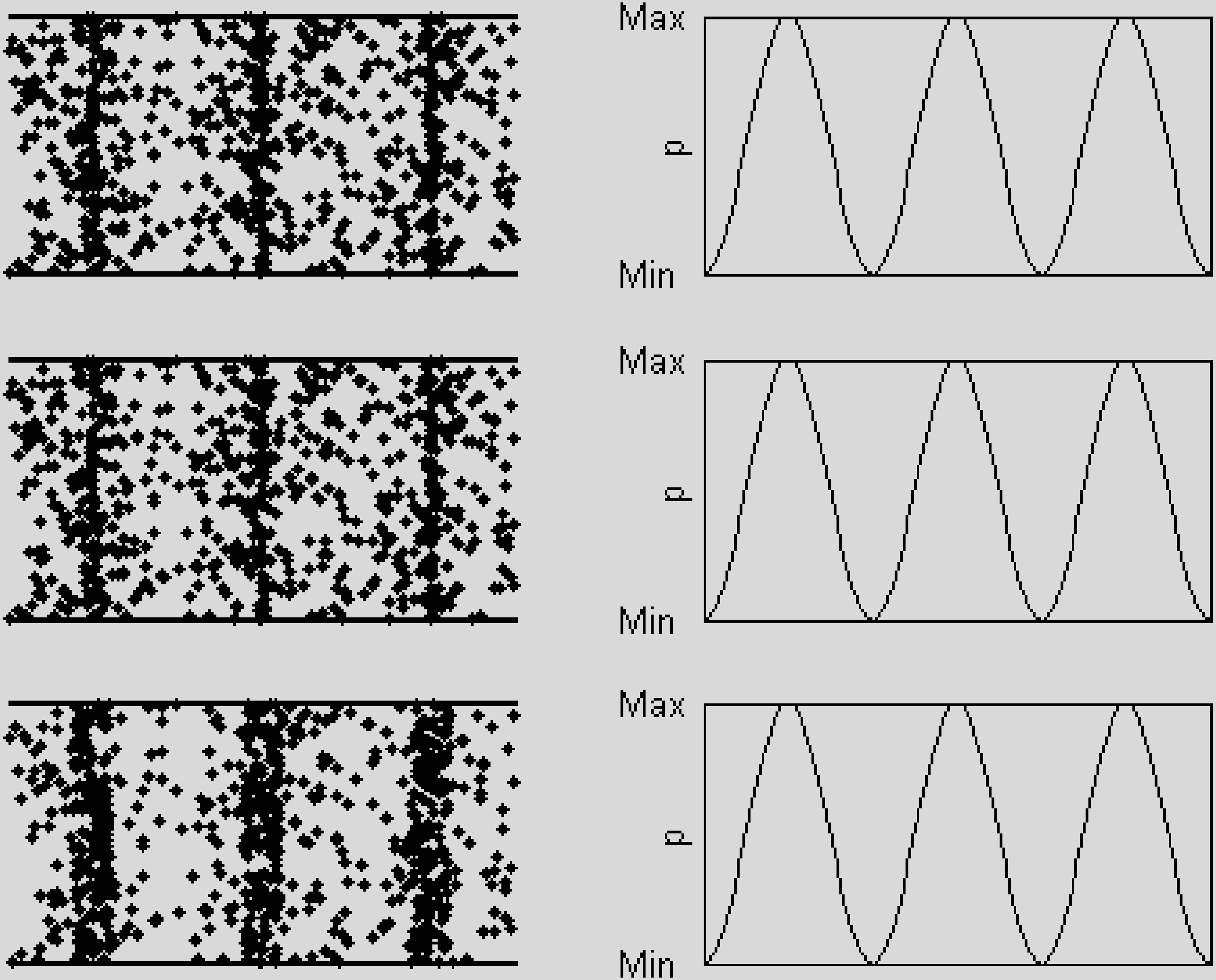


问题

驻波的能量那里去了?

从能流情况看，两列波的平均能流相等，但传播的方向相反，故叠加后的平均能流等于零。即驻波没有单方向的平均能流，驻波不能传播能量。

Superposition of Plane Waves to Create Standing Wave



(4) **简正模式：** 特定的振动方式称为系统的简正模式。

弦线上形成驻波的条件： $L = n\dfrac{\lambda}{2} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

驻波频率则为： $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{nu}{2L} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

(5) **半波损失**

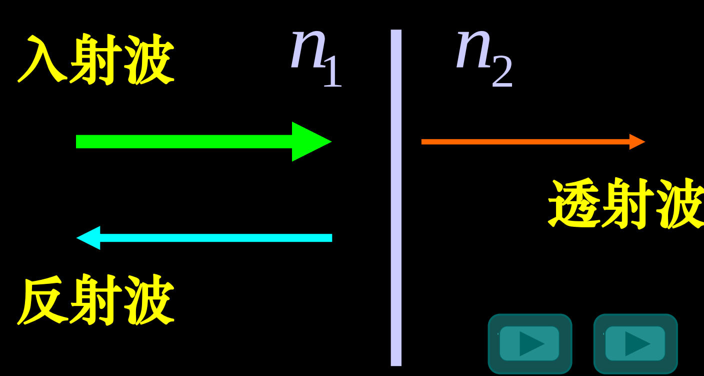
反射点为**波节**，表明入射波与反射波在该点**反相**。

$$\Delta\varphi = \pi \Longrightarrow \Delta r = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi \Longrightarrow \Delta r = \frac{\lambda}{2}$$

相当于入射波与反射波之间附加了半个波长的波程差

$n_1 < n_2$ 有半波损失（波节）

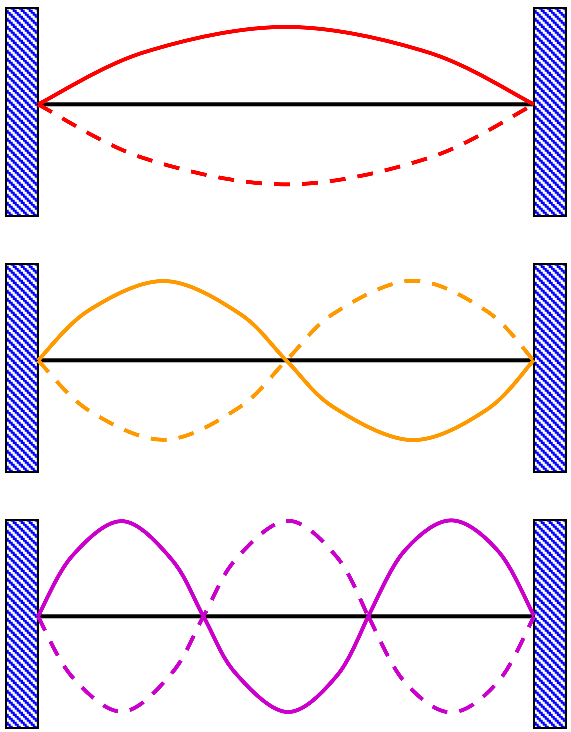
$n_1 > n_2$ 无半波损失（波腹）



透射波没有半波损失

两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2}$$



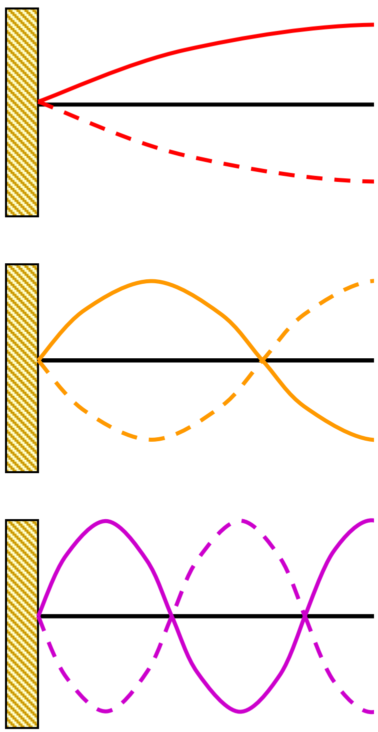
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式

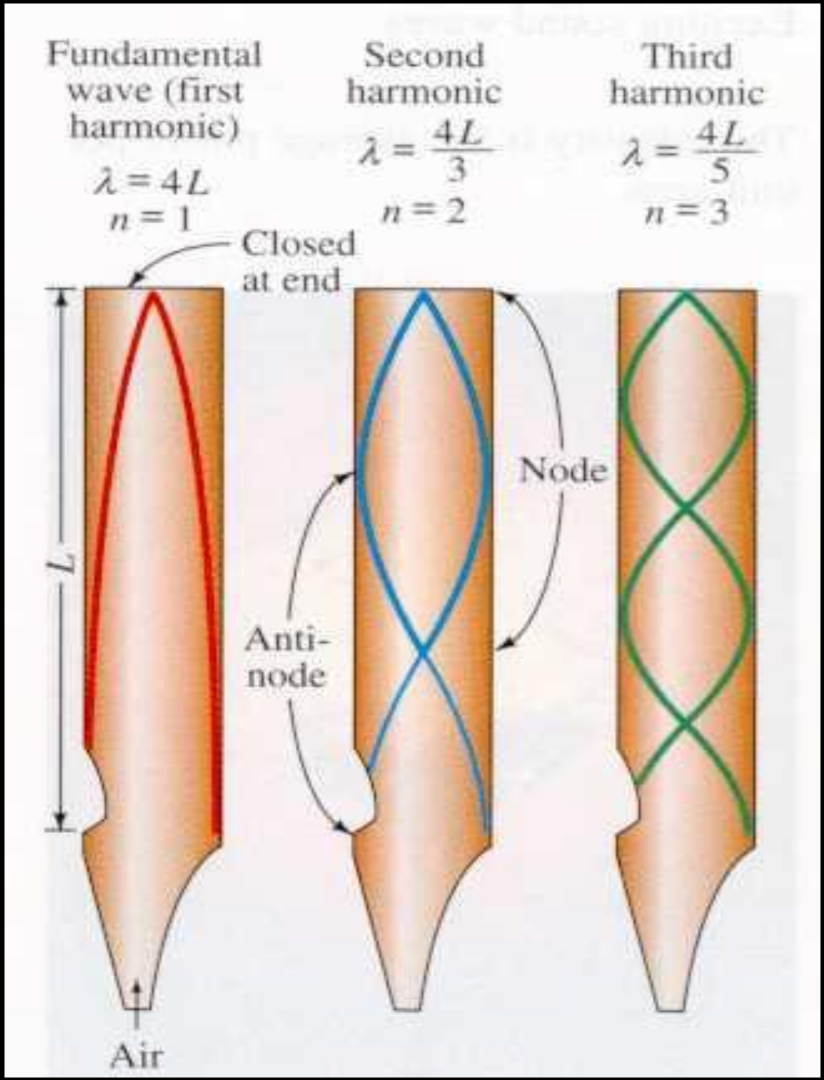
$$l = (n - 1/2)\frac{\lambda_n}{2}$$



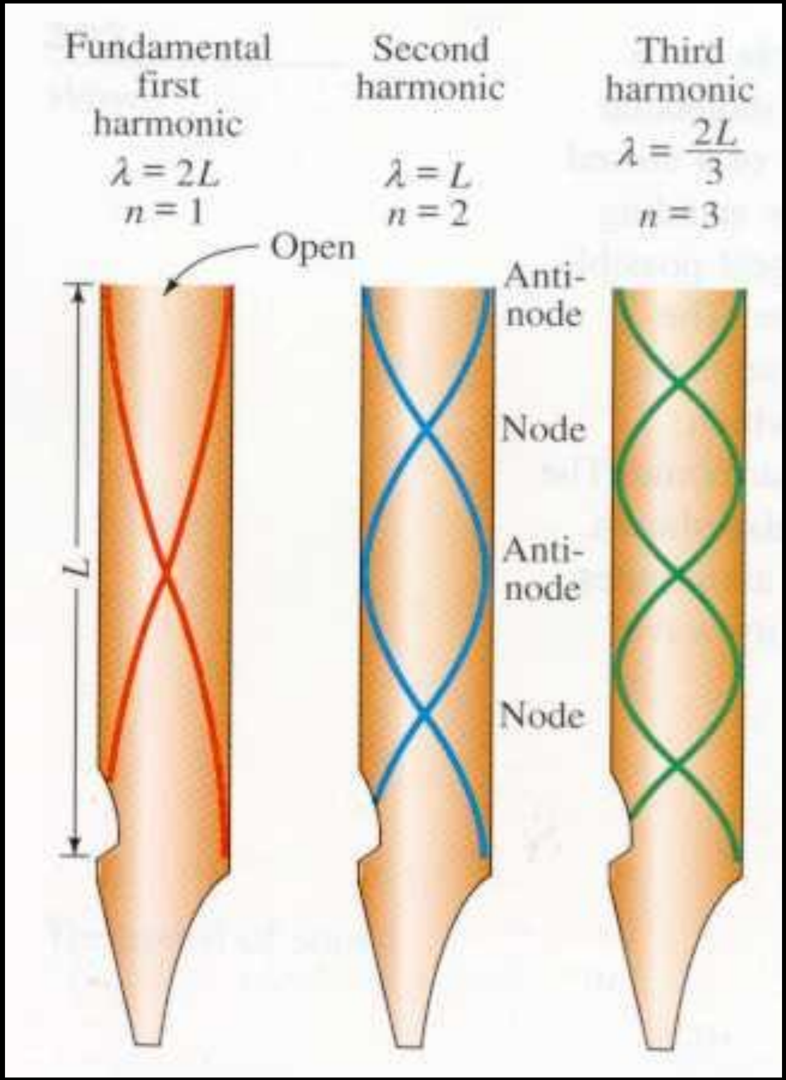
$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

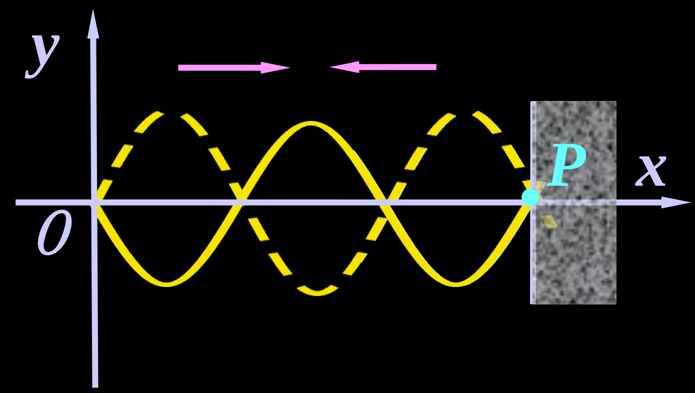


末端封闭的笛中的驻波



末端开放的笛中的驻波

半波损失和反射波波函数



$$y_{\text{入射波}}(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$y_{\text{反射波}}(x,t)=?$$

若入射波从**波疏介质**向**波密介质**传播 → 反射点P → **波节**

入射波在 P 点的振动和反射波在 P 点的振动始终**反相**!

$$\boxed{y_{\text{入射波}}(x_P,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_P}{u}\right)+\varphi_0\right]}$$

$$\boxed{y_{\text{反射波}}(x_P,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_P}{u}\right)+\varphi_0\pm\pi\right]} \longrightarrow \boxed{y_{\text{反射波}}(x,t)}$$

而对于入射波从波密介质向波疏介质传播发生反射以及两种情况下的透射，则无半波损失现象!

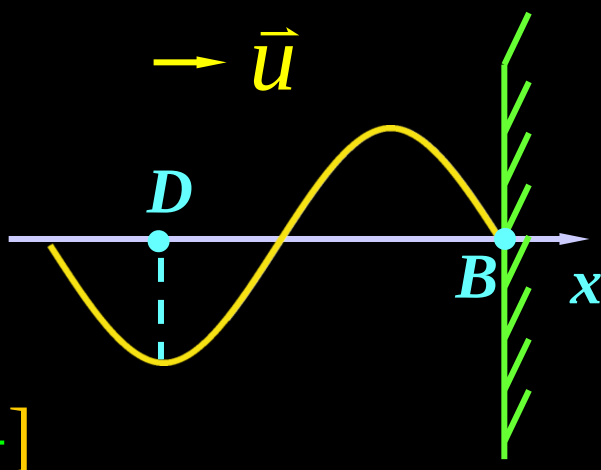
例 平面简谐波初始时刻的波形如图，此波波速为 u ，沿 x 方向传播，振幅为 A，频率为 f 。

求 (1) 以 D 为原点，写出波函数； → 反射波波函数?

(2) 以 B 为反射点，且为波节，若以 B 为 x 轴坐标原点，写出入射波、反射波波函数；

(3) 以 B 为反射点，求合成波，并分析波节、波腹的坐标。

解 (1) $$y(x,t)=A\cos[2\pi f(t-\frac{x}{u})+\pi]$$



(2) $$y_{入}(x,t)=A\cos[2\pi f(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y_{反}(x,t)=A\cos[2\pi f(t+\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$$

(3) $y(x,t) = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(2\pi f \dfrac{x}{u} + \dfrac{\pi}{2})\cos 2\pi ft$

$$= -2A\sin 2\pi f \frac{x}{u}\cos 2\pi ft$$

波腹 $\left|\sin 2\pi f \dfrac{x}{u}\right| = 1$ $\quad 2\pi f \dfrac{x}{u} = \dfrac{2k+1}{2}\pi$

$$x = \frac{2k+1}{4}\cdot\frac{u}{f} = \frac{2k+1}{4}\lambda \qquad k = -1, -2, -3\cdots$$

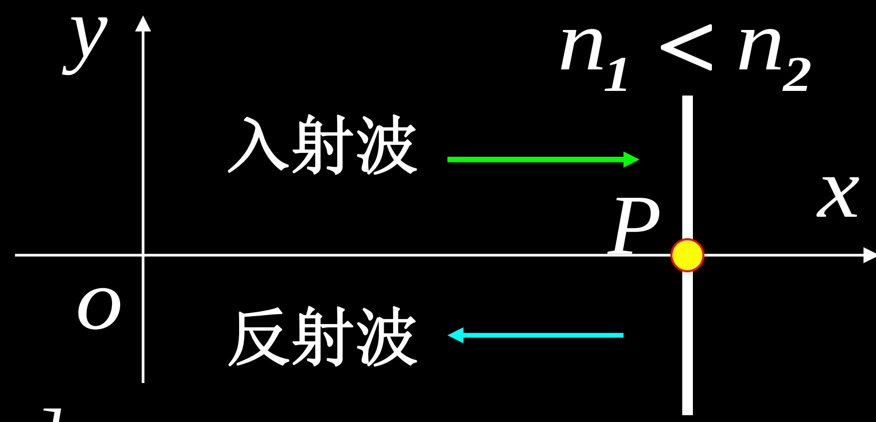
波节 $\left|\sin 2\pi f \dfrac{x}{u}\right| = 0$ $\quad 2\pi f \dfrac{x}{u} = k\pi$

$$x = \frac{k}{2}\cdot\frac{u}{f} = \frac{k}{2}\lambda \qquad k = 0, -1, -2, -3\cdots$$

例2 如图所示，$x_0 = 5\lambda$

$$y_{入} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})]$$

求反射波和驻波的波节，波腹点。



解：$y_{入P} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}) - 10\pi]$

$$y_{反P} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}) - 11\pi]$$

$$y_{反O} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}) - 21\pi]$$

$$y_{反} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) - 21\pi]$$

- 波节点：

$$x = \frac{k\lambda}{2}$$

- 波腹点：

$$x = (2k+1)\frac{k\lambda}{4}$$

入射波与反射波叠加：

$$y = y_{入} + y_{反} = -2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{T}$$