4.1.6　微分方程的应用

一般步骤：

1、分析问题，建立微分方程并提出定解条件；

2、求微分方程的通解；

3、根据定解条件求出方程的特解.

作业: Page266,
(A)7, 8, 10,11
(B)1,3,4

例1 已知一放射性材料以与当前数量成正比的速度衰减，最初有50g的物质，两小时后减少了10%.

求 (1)在时刻 t，该材料质量的表达式。

(2)4小时后的表达式。

(3)何时质量为最初质量的一半？

解 (1) 设质量为$M(t)$,则

$$\begin{cases} \dfrac{dM(t)}{dt} = -kM(t) \\ M(0) = 50, M(2) = 45 \end{cases}$$

$$M(t) = Ce^{-kt}$$

$$M(t) = 50e^{-0.053t}$$

$$(2) M(4) = 50e^{-0.053\times 4} = 40.5(g)$$

$$(3) M(t) = 25 = 50e^{-0.053t},\ -0.053t = \ln\frac{1}{2}, t = 13(h)$$

预测未来

^{14}C 的蜕变与考古问题

^{14}C 在 t 时刻的蜕变速度与该时刻的含量成正比

数学模型

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (k > 0)$$

$x = x(t)$ —— 在时刻 t，生物体中 ^{14}C 的存量

设生物体死亡时刻 $t = 0$，其时 ^{14}C含量为 x_0

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k\,x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-kt}$$

已知^{14}C的半衰期为5568年 $\Rightarrow \dfrac{x_0}{2} = x_0\, e^{-k\cdot 5568}$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5568} = \frac{0.6931}{5568} = 0.0001244$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\, e^{-0.0001244t}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{0.0001244} \ln \frac{x_0}{x(t)}}$$

$$\because x(t) = x_0 e^{-kt}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{0.0001244} \ln \frac{x_0}{x(t)}}$$

$$\therefore x'(t) = -kx(t), \quad x'(0) = -kx(0) = -kx_0$$

$$\frac{x'(0)}{x'(t)} = \frac{x_0}{x(t)}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{0.0001244} \ln \frac{x'(0)}{x'(t)}}$$

推测1982年7月出土的长沙马王堆一号墓的年代:

出土木炭标本中 ^{14}C 每克每分钟衰减的原子数为**5.184**个

新木炭中 ^{14}C 每克每分钟衰减的原子数为**6.680** 个

$$t = \frac{1}{0.0001244} \ln \frac{6.680}{5.184} \approx 2036(a)$$

不同情形下混合问题的数学模型

液体混合问题

设一容器有V_0升盐水，含盐 x_0千克,现以 V_{in} 升/分钟的速度注入浓度为C_0千克/升的盐水，快速搅拌后，以 V_{out} 升/分钟的速度抽出盐水，试求容器内的含盐量与时间的关系。

解 设在t 时刻，容器内溶液的浓度为 $c(t)$，含盐量为 $x(t)$.
当时间变到 $t+\Delta t$ 时，$x(t)$有改变量 Δx .

记这段时间内注入与流出的液体的含盐量分别为Δy 和 Δz,

则 $\Delta x=\Delta y-\Delta z$, 由此得 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}-\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$

令 $\Delta t\to 0$，取极限得到求解混合问题的基本方程.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt} \qquad \frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-c(t)v_{out}$$

$$\Delta x = \Delta y - \Delta z,$$

$x(t) =$ 原有含盐量 x_0 $+(0,\ t)$ 注入的盐量 $-(0,\ t)$ 流出的盐量

$x(t+\Delta t) =$原有含盐量$x_0 + (0,\ t+\Delta t)$注入的盐量$-(0,\ t+\Delta t)$流出的盐量

$x(t+\Delta t) - x(t) =$ $(t,\ t+\Delta t)$注入的盐量 $-(t,\ t+\Delta t)$流出的盐量

$$\frac{dx}{dt} = c_0 v_{in} - c(t) v_{out}$$

$$c(t) = \frac{x(t)}{V_0 + (v_{in} - v_{out})t}$$

$$\frac{dx}{dt} = c_0 v_{in} - \frac{x(t)}{V_0 + (v_{in} - v_{out})t} v_{out}$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) = x_0$$

混合问题的基本模型

$$\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}v_{out}$$

$$\text{s.t.}\quad x(0)=x_0$$

基于以上模型，相关条件改变时，均可建立相应的微分方程:

（1）如果是清水里注入盐水，则 $x(0)=0, C_0\neq 0$

（2）如果是盐水里注入盐水，则 $x(0)\neq 0, C_0\neq 0$

（3）如果是盐水里注入清水，则 $x(0)=x_0, C_0=0$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}v_{out}$$

（4）如果 $v_{in}=v_{out}$，则 $\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-\frac{x(t)}{V_0}v_{out}$

混合问题的基本模型

$$\frac{dx}{dt}=c_0 v_{in}-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}v_{out}$$

$$\text{s.t.}\quad x(0)=x_0$$

基于以上模型，相关条件改变时，均可建立相应的微分方程:

（5）如果将两种不同浓度 $(C_{0,1}$和$C_{0,2})$ 的盐水同时以不同的速度 $v_{0,1}$和$v_{0,2}$ 注入容器，则

$$\frac{dx}{dt}=(c_{0,1}v_{in,1}+c_{0,2}v_{in,2})-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in,1}+v_{in,2}-v_{out})t}v_{out}$$

类似方法，可以求解气体混合问题。

设一车间空间容积为10000立方米,空气中含有0.12%的二氧化碳(以容积计算),现将含二氧化碳0.04%的新鲜空气以1000立方米每分钟的流量输入该车间,同时按1000立方米每分钟的流量抽出混合气体，问输入新鲜空气10分钟后，车间内二氧化碳的浓度降到多少？

分析

$$V_0 = 10000 \qquad x(0) = 1000 \times 0.12\% = 12$$

$$c_0 = 0.04\% \qquad v_{in} = v_{out} = 1000$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.04\% \times 1000 - \dfrac{x}{10000} \times 1000 \\ x(0) = 12 \end{cases}$$

$$x(t) = Ce^{-\frac{t}{10}} + 4, C = 8, x(10) = 6.96$$

$$\frac{dx}{dt} = c_0 v_{in} - \frac{x(t)}{V_0 + (v_{in} - v_{out})t} v_{out}$$

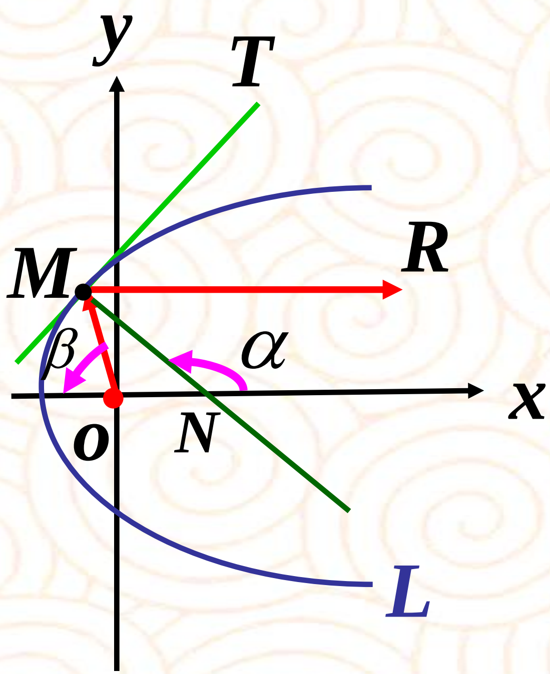
例3　抛物线的光学性质

实例：车灯的反射镜面--------旋转抛物面

解　如图为旋转面的轴截面.

设旋转轴 ox轴 光源在$(0,0)$,

曲线$L: y = y(x)$



设$M(x,y)$为曲线上任一点,

MT为切线, 斜率为 y',

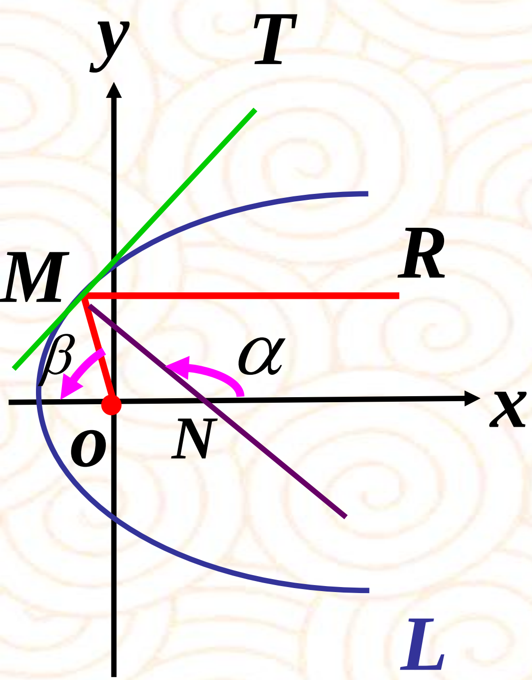
MN为法线, 斜率为$\tan\alpha = -\dfrac{1}{y'}$,

$\because \angle OMN = \angle NMR.$

即: $\tan\angle OMN = \tan\angle NMR.$

即: $\tan\angle OMN=\tan\angle NMR.$

由夹角正切公式得



$$\tan\angle OMN=\tan(\beta-(\pi-\alpha))=\tan(\beta+\alpha)$$

$$=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-\frac{y}{x}-\frac{1}{y'}}{1-\frac{y}{xy'}}=-\frac{yy'+x}{xy'-y}$$

$$\tan\angle NMR=-\tan\alpha=\frac{1}{y'}$$

得微分方程为: $\boldsymbol{yy'^2+2xy'-y=0,}$

即 $\boldsymbol{y'=-\frac{x}{y}\pm\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}.}$

令 $\boldsymbol{u=\frac{y}{x},}$ 则 $y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$ 得 $\boldsymbol{u+x\frac{du}{dx}=\frac{-1\pm\sqrt{1+u^2}}{u},}$

得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$, 分离变量得:

$$\frac{udu}{(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x},$$

令 $1+u^2=t^2$, 则得: $\dfrac{tdt}{t(t\pm1)}=-\dfrac{dx}{x}$,

积分得: $\ln|t\pm1|=\ln\left|\dfrac{C_1}{x}\right|$, 即 $\sqrt{u^2+1}=\dfrac{C}{x}\pm1$,

平方化简得 $u^2=\dfrac{C^2}{x^2}+\dfrac{2C}{x}$,

代回 $u=\dfrac{y}{x}$, 得 $y^2=2C(x+\dfrac{C}{2})$

抛物线

所求旋转轴为 ox 轴的旋转抛物面方程为

$$y^2+z^2=2C(x+\frac{C}{2}).$$

例4 **冷却问题**

(冷却定律：物体冷却的速率与温差成正比.)

将一个加热到$50^\circ C$的物体,放在$20^\circ C$的恒温室中冷却,求温度的变化规律.

解

设t时刻,物体的温度为$T(t)$,则:

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$$ (其中k为正常数,负号表示冷却)

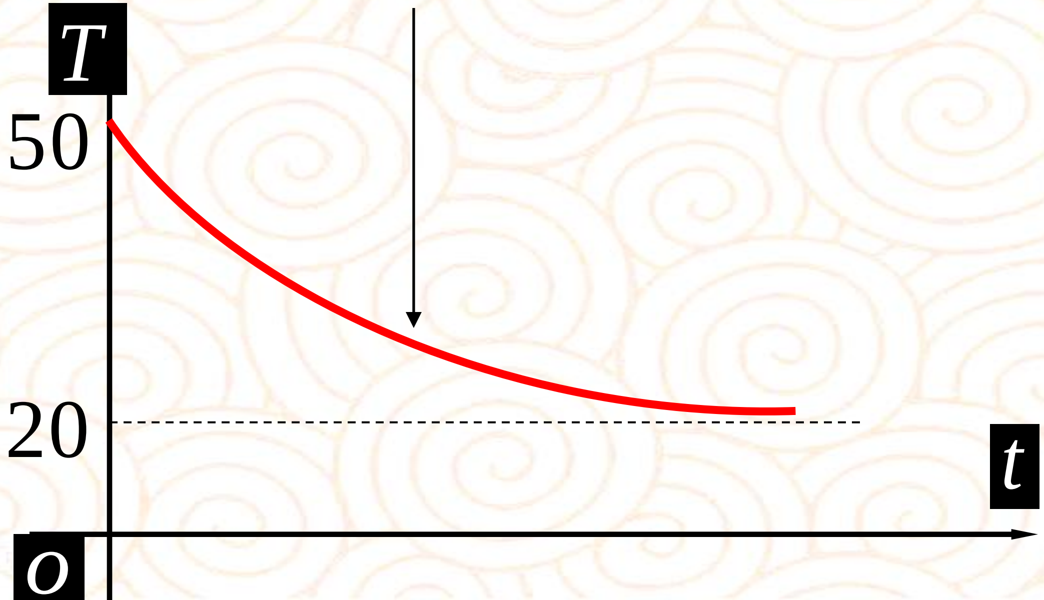
$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \quad (其中k为正常数,负号表示冷却)$$

且$t=0$时,$T=50$

求通解得: $\frac{dT}{T-20} = -kdt \qquad T-20 = Ce^{-kt}$

由$t=0, T=50$得: $C=30$

$\therefore$所求规律为: $T(t) = 20 + 30e^{-kt}$



例5 **落体问题**

质量为m的物体,由静止开始下落,

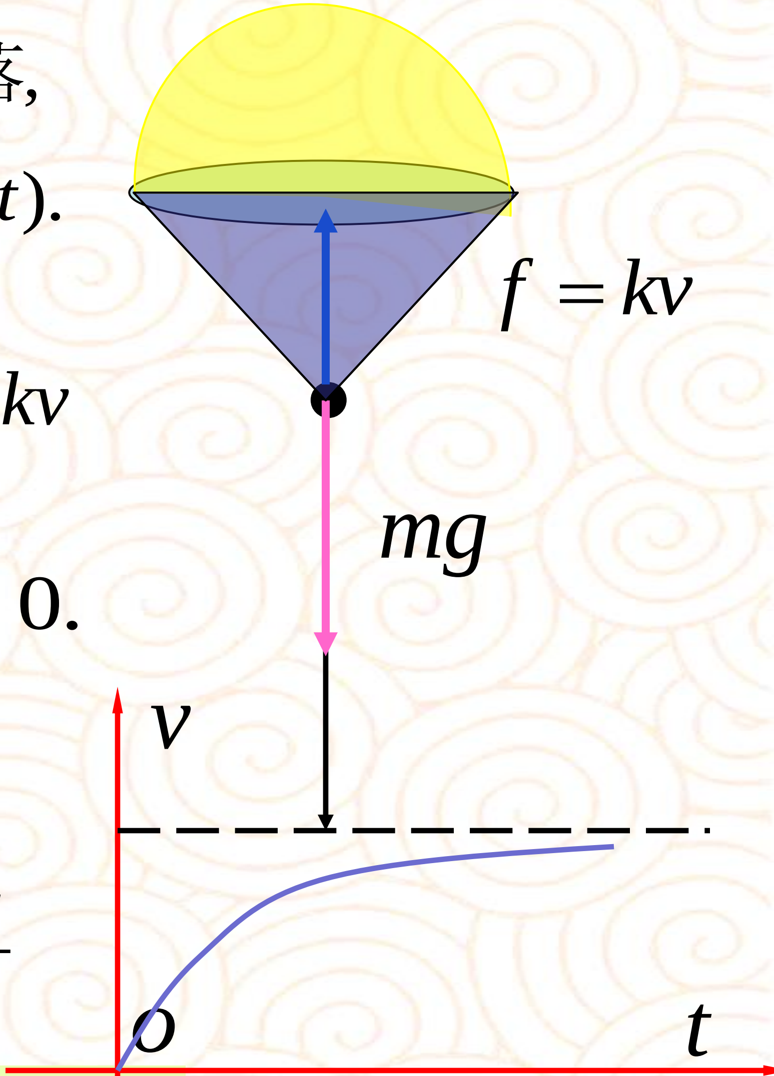
已知阻力f与速度v成正比,求$v(t)$.

解 由牛顿运动定律：$m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv$

即$\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{k}{m}v=g$　且$t=0$，$v=0$.

通解为:　$v=\dfrac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

由$t=0, v=0$求得：　$C=-\dfrac{mg}{k}$



$$\therefore v(t)=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})\ (t\to+\infty, v\to\frac{mg}{k})$$

Malthus 人口模型及其修正

Malthus（1766—1834）英国人口学家，他根据100多年的资料，于1798年提出了人口指数增长模型。

假设： 单位时间内人口的增长量与当时的人口总数成正比。记时间 t 时的人口总数为$N(t)$，单位时间内人口增长量与当时的人口数之比为r

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN$$

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}=rN \\ N(0)=N_0 \end{cases}$$

$$N(t)=N_0e^{rt}$$

人口数随时间按指数增长

通过检验，这个模型相当准确地反映了地球上1700—1961年间的人口数，但 $t \to \infty$ 时，$N \to +\infty$ 这与事实不符。

Remark 这一模型仅适用于生物种群的生存环境较优雅、宽松的情况。当生物种群数量增长到一定值时，恶化的生态环境将抑制种群数量的增长，进而出现负增长，此时 Malthus 模型不再适用。

1838 年荷兰数学生物学家 Verhulst 指出，导致此情况的原因是Malthus 未考虑“密度制约”因素，即在资源给定的一个环境中，生物数量越多，每个生物体获得的资源越少，这将抑制生育率，增加死亡率。

修正的人口模型

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{k}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

分离变量法可得通解：$N(t) = \dfrac{k}{1 + C\mathrm{e}^{-rt}}$

特解：$N(t) = \dfrac{kN_0}{N_0 + (k - N_0)\mathrm{e}^{-rt}}$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = k$ —— 最大容纳量

小结： 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微量分析平衡关系列方程

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

1.他是嫌疑犯吗？

某公安局于晚上7：30发现一具女尸，当晚8：20分法医测得尸体温度为32.6℃,一小时后尸体被抬走时测得体温为31.4℃,假定室温在几小时内均为21.1℃。由案情分析得知张某是此案的主要嫌疑犯，但张某矢口否认，并有证人说：“下午张某一直在办公室，下午5时打了一个电话后才离开办公室”，从办公室到凶案现场步行需5分钟，问张某能否被排除在嫌疑犯之外？

20:20---32.6°C,21:20---31.4°C, 室温:21.1°C。确定死亡时间是下午5点5分以前还是以后?

分析　设T(t)表示t时刻尸体温度，并记8:20为t=0，则
T(0)= 32.6°C,T(1)= 31.4°C
假设受害者死亡时体温是正常的，即T= 37℃，求
T(t)= 37℃时的时间t

人体体温受大脑神经中枢调节，人死后体温调节功能消失，尸体温度受外界环境的影响，尸体温度的变化率服从冷却定律，即有

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 21.1) \Longrightarrow T(t) = 21.1 + Ce^{-kt}$$

由T(0)= 32.6°C, T(1)= 31.4°C，得c=11.5, k≈0.11

$$T(t) = 21.1 + 11.5e^{-0.11t}$$

当T= 37°C时，　t=-2.95小时 ≈2小时57分钟

死亡时间T_d≈8小时20分-2小时57分钟=5时23分

结论：张某不能被排除在嫌疑犯之外

例2 游船上的传染病人数

一只游船上有800人，一名游客患了某种传染病，12小时后有3人发病，由于这种传染病没有早期症状，故感染者不能被及时隔离，直升机将在60至72小时之间将疫苗运到，试估算疫苗运到时患此传染病的人数。

800人，一名游客患了某种传染病，12小时后有3人发病，60至72小时之间患此传染病的人数。

解　设y(t)表示发现首例病人后t小时时刻的感染人数

则800−y(t)表示此刻未受感染的人数.由题意知y(0)=1, y(12)=3

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(800-y) \\ y(0)=1 \\ y(12)=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = \dfrac{800}{1+Ce^{-800kt}} \\ y(0)=1 \\ y(12)=3 \end{cases}$$

$$800k \approx 0.09176, \quad C = 799 \qquad y(t) = \frac{800}{1+799e^{-0.09176t}}$$

t=60时感染人数为 y(60) ≈188

t=72时感染人数为 y(72) ≈385

可见传染病流行时及时采取措施是至关重要的

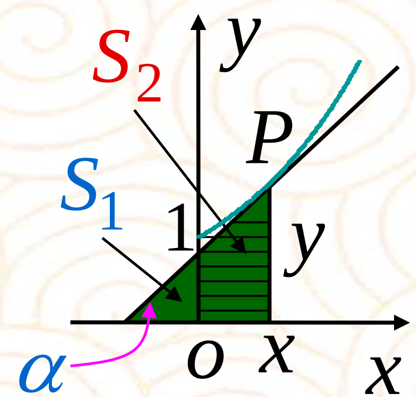
例. 设函数 $y(x)\ (x\ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x)>0,\ y'(0)=1$, $y(0)=1$, 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间[0, x] 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1-S_2\equiv 1$, 求 $y=y(x)$ 满足的方程 .

解: 因为 $y(0)=1,\ y'(x)>0$, 所以 $y(x)>0.$

设曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线倾角为 α, 于是

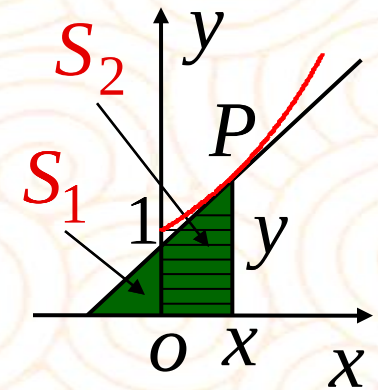
$$S_1=\frac{1}{2}y^2\cot\alpha=\frac{y^2}{2y'}$$

$$S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$

两边对 x 求导, 得 $yy'' = (y')^2$



定解条件为 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$, 再解 $y' = y$, 得

$y = C_2 e^x$, 再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$, 故所求曲线方程为

$y = e^x$

例　求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\underline{\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{令 u=x-t}$$

则 $du=-dt$

解: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

一阶线性非齐次微分方程

利用常数变易法或公式,可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$

例. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式,
可得:

$$y = \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right] e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = \left(\int 2e^{\int \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_1\right) e^{-\int \mathrm{d}x} = (2e^x + C_1)e^{-x} = 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

2) 再解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 0\,, & x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

分离变量法,该齐次线性微分方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3) 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1-e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$