

## 基于 Matlab 三次样条插值的连杆机构轨迹再现优化设计

王 东<sup>1</sup> 陶跃珍<sup>2</sup>

(1 四川理工学院 建筑工程学院, 四川 自贡 643000)

(2 四川理工学院 机械工程学院, 四川 自贡 643000)

**摘要** 为了提高连杆机构轨迹再现优化设计精度, 连杆轨迹上已知点的位置和数目必须适当。基于此, 在连杆预定轨迹上已知离散点位置和数目不变的情况下提出一种新的设计方法, 利用 Matlab Spline 函数对离散点进行三次样条插值, 得到预定运动轨迹插值曲线数学模型, 在插值曲线上根据函数变化率增加离散点, 调用 Matlab 优化工具箱中的 fmincon 函数, 实现连杆机构轨迹再现优化设计。与传统优化设计方法相比, 由于在预定运动轨迹上增加了插值节点, 节点分布更为合理, 所以能够明显提高连杆机构轨迹再现优化设计的效率和精度, 该方法适用于任何机构轨迹再现优化设计, 具有一定实用价值。

**关键词** 连杆机构 轨迹再现 优化设计 三次样条插值 Matlab

### The Optimal Design of Link Mechanism Reappearing Trajectory based on Matlab of Cubic Spline Interpolation

Wang Dong<sup>1</sup> Tao Yuezhen<sup>2</sup>

(1 Institute of Architecture and Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

(2 School of Mechanical Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong, 643000, China)

**Abstract** For increasing the optimal design accuracy of reappearing trajectory of link mechanism, the positions and the numbers on the locus of link mechanism must be suitable. Based on this, a new design method is proposed under the condition of discrete points and number is constant. Cubic spline interpolation in Matlab spline function is used on those points to get the mathematical interpolation curve model of the trajectory, then adds discrete points on the interpolation curve based the change rate, so the reappearing trajectory of optimum design of link mechanism is come to pass by fmincon function in optimistic toolbox of matlab. In comparing with the traditional optimization design method, this method can greatly improve the efficiency and accuracy because of adding interpolation points on the trajectory. The method is suitable to any optimal design of reappearing trajectory mechanism, so it has certain practical value.

**Key words** Link mechanism Reappearing trajectory Optimization Cubic spline interpolation Matlab

## 0 引言

在连杆机构中, 连杆作平面运动, 连杆上各点的运动轨迹是各种不同形状的连杆曲线, 其形状随着各构件相对长度的改变而改变, 因而可以利用连杆曲线实现给定的运动规律及再现给定的运动轨迹, 完成预定的运动或动作, 实现复杂的运动要求。但是连杆机构按预定运动轨迹设计是十分复杂的, 利用解析法需要联立求解多个二阶非线性方程组, 计算比较困难, 且随给定点位的增加, 方程个数成倍增加, 求解越加困难, 而且还往往没有实解, 或即使有解, 也可能因杆长比、传动角等指标不能满足要求而无实用价值<sup>[1]</sup>; 利用实

验性质的图谱法, 工作量巨大且不能控制设计误差及设计精度。所以如何根据最优化方法设计连杆机构, 用数学关系式将各种设计要求限定为优化过程中不可违背的约束条件, 在约束条件的取值范围内寻优使机构实际连杆曲线尽可能地接近某一给定轨迹, 最佳地满足设计要求, 一直是连杆机构设计研究的一个重要课题。

在进行连杆机构轨迹再现优化设计中, 为使实际运动轨迹即连杆曲线最佳地再现给定运动轨迹, 以在各分点处, 机构所能实现的实际位置与预期要求实现的给定位置距离之差的平方和最小建立目标函数<sup>[2]</sup>。传统的分点截取方法是简单地按照原动件转角范围除

以分点数来等间距截取,这种方法没有考虑预定轨迹变化不均匀性的影响,显然是不够精确的。为了提高连杆机构轨迹再现优化设计精度,分点位置应按连杆曲线函数变化率来决定,函数变化较大的区域分点应取得密集一些,而函数变化较小的区域分点应取得稀疏,这种不等间距分点截取方法能在分点总数不变、计算量不增加的情况下提高优化设计的精度。

我们以 Matlab 为研究平台,以连杆机构为研究对象,进行连杆机构轨迹再现优化设计,为了提高再现函数优化设计精度,提出了一种新的基于 Matlab 三次样条插值的不等间距分点优化方法,即不直接利用已知预定轨迹上的若干等间距分布点位进行优化设计,而是首先应用 Matlab 对已知预定轨迹上的若干等间距分布点位进行三次样条曲线插值,在得到的预定轨迹插值曲线上,根据函数变化率选择适当位置,增加适当数量的点位,再用 fmincon 优化函数求解连杆机构各杆长度。

## 1 连杆机构轨迹再现优化设计数学模型

如图 1 所示,  $M$  为连杆机构连杆  $BC$  上一定点,  $mm$  为  $M$  点的期望给定运动轨迹,要求设计该连杆机构的各杆长度,使  $M$  点在曲柄转动一周的循环中,实际运动轨迹  $MM$  最佳地再现给定运动轨迹  $mm$ 。

### 1.1 设计变量及目标函数

各符号几何意义如图 1 所示,连杆上  $M$  点的运动轨迹决定于设计变量  $X = (x_0, y_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \varphi_0, \theta)^T$ , 有 9 个待定参数,因此理论上连杆机构可以精确再现给定轨迹上所选的 9 个离散点位,如果给定点位超过 9 个或是要求实现某连续函数关系,就必须采用优化的方法求解<sup>[3/44-67]</sup>。如图 1 所示建立坐标  $(X_M, Y_M)$  系统,  $M$  点的坐标与设计变量的关系可用下列标量方程式来表示

$$X_M = x_0 + l_2 \cos(\varphi_0 + \varphi) + l_5 \cos(\theta + \psi)$$

$$Y_M = y_0 + l_2 \sin(\varphi_0 + \varphi) + l_5 \sin(\theta + \psi)$$

$$\psi = \beta + (\varphi_0 - \alpha)$$

由正弦定理及余弦定理求得

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{l_2}{l} \sin \varphi\right)$$

$$\beta = \arccos \frac{l^2 + l_3^2 - l_4^2}{2ll_3}$$

所以按照在各分点处,机构所能实现的实际位置

与预期要求实现的给定位置距离之差的平方和最小建立目标函数

$$\min f(X) = \sum_{i=1}^n [(X_M^i - X_m^i)^2 + (Y_M^i - Y_m^i)^2]$$

### 1.2 约束条件

根据机构需要,满足曲柄存在条件和机构传动角取值范围限制条件,建立如下符合 Matlab 格式的不等式约束

$$l_2 - l_1 \leq 0 \quad l_2 - l_3 \leq 0 \quad l_2 - l_4 \leq 0$$

$$l_1 + l_2 - l_3 - l_4 \leq 0 \quad l_2 + l_4 - l_1 - l_3 \leq 0$$

$$l_2 + l_3 - l_1 - l_4 \leq 0$$

$$[\gamma] - \arccos \frac{l_3^2 + l_4^2 - (l_1 - l_2)^2}{2l_3l_4} \leq 0$$

$$[\gamma] - [180 - \arccos \frac{l_3^2 + l_4^2 - (l_1 + l_2)^2}{2l_3l_4}] \leq 0$$

## 2 Matlab 的 Spline 函数及 Fmincon 函数

### 2.1 Spline 曲线插值函数

在工程实践中,曲线插值是指借助已有的一系列互不相同的离散点数据,选择适当的数学形式拟合变量间的关系,从而揭示变量间的内在规律,推导离散点以外的其它点的数值的方法。在 Matlab 中,利用多项式进行函数的拟合与插值并不是次数越高精度越高,高阶等距节点多项式插值常常不收敛,产生病态的结果<sup>[4]</sup>,针对这种问题,最常用的方法是采用三次样条插值。Matlab 提供了 Spline 函数进行三次样条插值。在三次样条插值中,要寻找三次多项式,以逼近每对数据点间的曲线。两点决定一条唯一的直线,但在两点间的曲线可用无限多的三次多项式近似。因此,为使插值多项式具有唯一性并保证足够的精确性,在三次样条插值中,增加了三次多项式的约束条件。因为工程实际中往往要求图形是一阶和二阶光滑的,所以通过限定每个三次多项式的一阶和二阶导数,使其在节点处相等,就可以较好地解决这一问题,求出所有内部三次多项式的系数。然而,第一个和最后一个三次多项式在第一个和最后一个节点以外,没有伴随多项式,因此必须通过其它方法确定其余的约束。Spline 曲线插值函数所采用的方法是非扭结(not-a-knot)条件<sup>[3/44-67]</sup>,这个条件强迫第一个和第二个,最后一个和倒数第二个三次多项式的三阶导数相等,因此确定三次样条多项式未知系数需要求解大量的线性方程。给定  $N$  个节点,就要寻找  $N-1$  个三次多项式,每个多项式有 4 个未知系数,故所求解的方程组包含有  $4 \times (N-1)$  个未知数。把每个三次多项式列成特殊形式,并且运用各种约束,通过求解  $N$  个具有  $N$  个未知系数的方程组,就能确定三次多项式。

Spline 函数的调用格式为  $PP = \text{spline}(X, Y)$ , 式中,

X 为插值节点的 X 坐标向量; Y 为插值节点的 Y 坐标向量。

2.2 Fmincon 约束优化算法函数

连杆机构轨迹再现优化设计属于多元非线性约束最优化的极小值问题, 采用 Matlab 优化工具箱的 Fmincon 函数求解, 其使用格式为:

[xopt, fopt] = FMINCON (FUN, X0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, NONLCON, OPTIONS)

其中, 输出参数 xopt 和 fopt 返回目标函数的最优解及其函数值。输入参数: FUN 是调用目标函数的函数文件名; X0 是设计变量初始值; A 和 B 表示线性不

等式约束的系数矩阵和常数向量; Aeq 和 Beq 表示线性等式约束的系数矩阵和常数向量, 若无等式约束, Aeq= [ ], Beq= [ ]; LB 和 UB 表示设计变量的下界向量和上界向量, 若不指定, LB= [ ], UB= [ ]; NONLCON 表示非线性约束的函数名; OPTIONS 表示指定优化参数选项。

3 设计实例

设计一个再现预期运动轨迹的曲柄摇杆机构, 已知预期运动轨迹上按曲柄转角等间距分布的 12 个关键点坐标值如表 1 所示, 许用传动角  $[ \gamma ] = 30^\circ$ 。

表 1 预期运动轨迹上按曲柄转角等间距分布的 12 个关键点坐标值<sup>[5]</sup>

曲柄转角 $\varphi$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$330^\circ$
X 坐标	50	48.5	42	34	29	30	34	42	48	55	56	51
Y 坐标	91	111	107	90	67	45	28	17	12	14	24	52

3.1 三次样条插值优化预期运动轨迹

工程应用中, 连杆机构轨迹再现设计由于给定预定轨迹上离散点位置的数目较少, 建立不起满足精度要求的连杆机构预定轨迹曲线数学模型, 直接影响利用数学方法进行连杆机构轨迹再现优化设计<sup>[6]</sup>。因此需要增加离散点的数目, 通过已知离散点, 推导这些离散点以外的其他点的数值。

根据预期运动轨迹上按曲柄转角等间距分布的 12 个关键点坐标值, 使用 Spline 三次样条插值函数优化预期运动轨迹, Matlab 源程序如下, 优化后的连杆机构预期运动轨迹如图 2 所示。

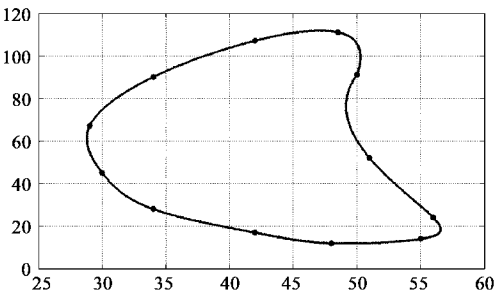


图 2 连杆机构预期运动轨迹

```
x= [ 50 48.5 42 34 29 30 34 42 48 55 56 51];
y= [ 91 111 107 90 67 45 28 17 12 14 24 52];
x= [x, x(1)]; y= [y, y(1)];
plot(x, y, 'r.', 'markersize', 9);
hold on;
n= length(x);
t= 1:n;
ti= linspace(1, n, 100);
xi= spline(t, x, ti); yi= spline(t, y, ti);
plot(xi, yi, 'b');
grid on;
```

根据优化后的连杆机构预期运动轨迹三次样条插值曲线, 在函数变化率较大的关键节点之间, 利用 Data Cursor 工具获取增加节点的坐标, 如表 2 所示。

3.2 优化设计结果及分析

本设计属于多元非线性约束最优化的极小值问题, 数学模型如上所述, 调用 Matlab 优化工具箱中的 fmincon 函数, 求解再现表 1 和表 2 所列 22 个关键点点位的预定轨迹连杆曲线优化问题。

表 2 在函数变化率较大节点之间增加的 10 个关键点坐标值

曲柄转角	$\varphi = 180^\circ + \arccos \frac{l_2^2 + (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - l_3^2}{2l_2 \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2}} - \arctan \frac{Y - y_0}{X - x_0} - \varphi_0$									
X 坐标	50.24	37.55	30.73	28.82	30.93	38.31	56.55	52.81	49.83	49.23
Y 坐标	101.8	98.85	78.44	58.6	38.68	21.28	19.39	40.84	62.06	81.19

表 3 优化解

机架长度 $l_1$	曲柄长度 $l_2$	连杆长度 $l_3$	摇杆长度 $l_4$	连杆刚性展开长度 $l_5$	连杆刚性展开角度 $\theta$	机架倾角 $\varphi_0$	曲柄铰链位置 $(x_0, y_0)$
131.9078	45.0916	74.2187	145.9433	57.8764	$7.4372^\circ$	$25.8270^\circ$	(67.0021, 10.0102)

若设计变量初始值取为

$$X_0 = (50, 10, 60, 90, 100, 100, 60, 30^\circ, 30^\circ)$$

设计变量的下界向量和上界向量均不指定, 优化设计的结果如表 3 所示。

图 3 为预期运动轨迹与实际运动轨迹的对比分析, 其中, 虚线为预期运动轨迹, 实线为优化后实际机构的连杆轨迹曲线。从图 3 中可见, 基于 Matlab 三次样条插值实现连杆轨迹的尺度综合可以根据预定轨迹曲线函数变化率而增加离散点, 机构实际运动轨迹曲线与预期轨迹曲线的误差很小, 能确保生成机构对给定的运动轨迹实现最佳一致逼近。

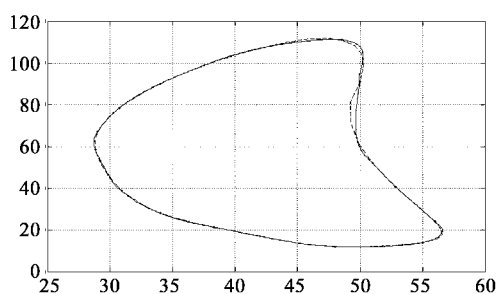


图 3 预期运动轨迹与优化运动轨迹

需要注意的是, 若改变设计变量的初始值, 则将导致优化结果略有不同。这说明, 给定连杆机构的各杆长度, 连杆上某点的运动轨迹是唯一确定的, 但根据连杆上某点的预定运动轨迹反求机构尺寸, 可以有多种不同尺寸组合的连杆机构满足预定条件。

## 4 结论

给定了连杆曲线上有限的几个离散点位置, 单就获得的原始数据本身来说根本反映不出连杆上给定点的运动轨迹, 传统的数据处理方法建立不起适应所有

点的满足精度要求的连杆预定运动轨迹曲线数学模型, 因此就不能利用数学方法进行连杆机构轨迹再现优化设计。为了提高连杆机构轨迹再现优化设计精度, 提出一种新的优化设计方法, 首先利用 Matlab Spline 函数对给定连杆曲线上的已知离散点进行三次样条插值, 得到连杆曲线, 再根据连杆曲线函数变化率增加关键节点, 和原有已知节点一起构成不等间距分布的控制连杆曲线运动轨迹的关键节点, 调用 Matlab 优化工具箱中的 fmincon 函数, 实现多余已知点位的连杆机构轨迹再现优化设计。

与传统优化设计方法相比, 由于增加了连杆曲线预定运动轨迹上的控制节点数目, 所以能够明显提高连杆机构轨迹再现优化设计的效率和精度, 该方法适用于任何机构轨迹再现优化设计, 且在三次样条插值曲线上增加的分点数越多, 本方法的优点就越突出, 精度就越高。

## 参 考 文 献

- [1] 孙桓, 陈作模. 机械原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000, 188-237.
- [2] 孟兆明, 常德功. 机械最优化设计技术[M]. 北京: 化学工业出版社, 2002, 128-131.
- [3] 郭仁生. 机械工程设计分析和 Matlab 应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006, 44-67.
- [4] 徐瑞, 黄兆东, 闫凤玉. Matlab 2007 科学计算与工程分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008, 395-409.
- [5] 韩玉强, 高秀兰. 再现运动规律的平面连杆机构优化设计[J]. 宝鸡文理学院学报, 2001, 21(3): 233-234.
- [6] 黄康, 汝艳, 田杰, 等. 基于优化理论的机构综合方法研究[J]. 中国制造业信息化, 2005, 34(5): 122-126.

收稿日期: 20100609

基金项目: 四川理工学院人才启动项目资助(07ZR30)

作者简介: 王东(1973-), 男, 重庆万州人, 工学硕士, 讲师

(上接第 22 页)

为“十一五”期间的“积极发展核电”, 核电快速发展的时期已到来。迄今为止, 我国已建了 4 个核电站, 共 11 个核电机组, 总装机容量 870 万千瓦。占国内发电总量的 2.3%。按照规划, 到 2020 年, 我国核电装机容量将达到 4000 万千瓦。在未来 11 年内, 我国平均每年要新建 2~3 台百万千瓦级核电机组总投资规模超过 400 亿美元。

国内核电用齿轮箱的发展前景广阔, 但起步较晚, 技术落后, 机遇与挑战并存。核电用齿轮箱的关键技术应注重高可靠性和长寿命。总体来看, 国产核电用齿轮箱与国外一流产品相比还有较大差距, 因此, 要全面掌握核电用齿轮箱设计制造技术, 还需要在吸收、消化国外先进技术的基础上进行系统深入的研究和创新。

## 参 考 文 献

- [1] 赵仁凯. 中国核电发展的现状及展望[J]. 国土资源, 2004(3): 1-5.
- [2] 王昌彦. 核电用泵浅谈[J]. 水泵技术, 1994(2): 1-3.
- [3] 陈娟, 田瑞航. 核电半速机组给水泵驱动方式的选择[J]. 广东电力, 2005, 18(8): 52.
- [4] 邹树梁, 刘兵, 陈甲华, 等. 中国核电发展的现状与展望[J]. 南华大学学报, 2004, 5(4): 39.
- [5] 罗海泉. 大型压水堆核电厂给水泵配置及选型分析[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2008, 21(1): 12-13.
- [6] 张仁田, 张平易. 齿轮箱传动在泵站中应用分析与选择方法[J]. 排灌机械, 2005, 23(2): 14.
- [7] 周富涛. 大亚湾核电站循环冷却水泵减速齿轮改进[J]. 机械, 2001, 28: 164.
- [8] 卢济武. 低速大转矩行星齿轮减速器设计研究[J]. 机械设计与研究, 1995(4): 15-17.

收稿日期: 20100715

作者简介: 邢志伟(1985-), 男, 河北沧州人, 硕士研究生