第二章 一元函数微分学及其应用

第六节 函数性态的研究（2-3学时）

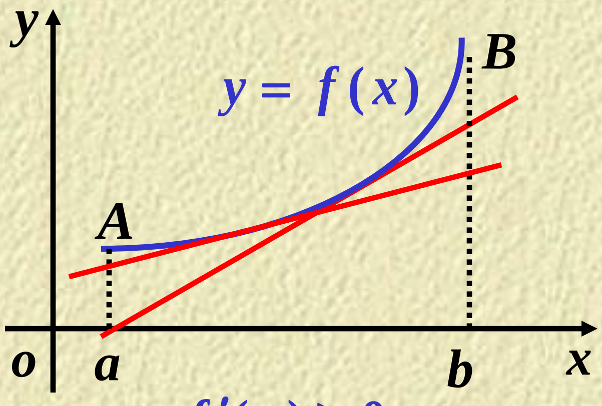
- 函数的单调性
- 函数的极值
- 函数的最大(小)值
- 函数的凹凸性 拐点

作业: P165.

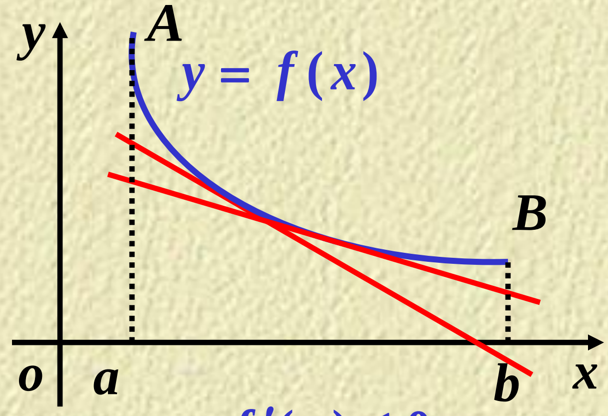
3(2)(4), 4(2)(4),7(1)(3)(5), 9(1)(3) , 13(1)(3), 16, 19, 22(1)(3), 26(2)

第一部分 函数的单调性

一、单调性的判别法



$f'(x)\geq 0$



$f'(x)\leq 0$

定理6.1 设函数 $y=f(x)$ 在 I 上连续，在 I 内可导，则

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 I 上单调增(减)的充要条件为：

在 I 内 $f'(x)\geq 0\,(f'(x)\leq 0)$；

(2) 如果在 I 内 $f'>0\,(f'<0)$，

则函数 $y=f(x)$ 在 I 上严格单调增(减).

上页 下页 返回

证：(1):充分性

设 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $x_1 < x_2$，**应用Larange定理,得**

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

$\because x_2 - x_1 > 0,$

若在(a,b)内，$f'(x) \geq 0$， 则 $f'(\xi) \geq 0$,

$\therefore f(x_2) \geq f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调增

若在(a,b)内，$f'(x) \leq 0$， 则 $f'(\xi) \leq 0$,

$\therefore f(x_2) \leq f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调减

在以上证明中,若 $f' > 0\,(f' < 0)$, **则命题(2)成立.**

(1) $f(x)$在 I 上单调增(减)的充要条件为:

在 I 内$f'(x) \geq 0\,(f'(x) \leq 0)$;

(2) 如果在 I 内 $f' > 0\,(f' < 0)$, 则$f(x)$在 I 上严格单调增(减).

(1):必要性

设 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增

在(a,b)内任取x, 取Δx使$x+\Delta x\in(a,b)$,

若 $\Delta x>0$ $(\Delta x<0)$ 则

$f(x+\Delta x)\geq f(x)$. $f(x+\Delta x)\leq f(x)$.

从而 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$. 即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$.

同理可得: 若$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\leq 0.$$

(1) $f(x)$在I上单调增(减)的充要条件为:

在I内$f'(x)\geq 0$($f'(x)\leq 0$);

定理6.1 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导则

① 函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增(减)的充要条件为:

在(a,b)内$f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$;

(2) 如果在(a,b)内 $f'>0(f'<0)$,

那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调增(减).

将上述自变量取值范围换为I仍成立

注意:命题(2)的逆命题不一定成立.

如$y=x^3$,此时应分子区间讨论

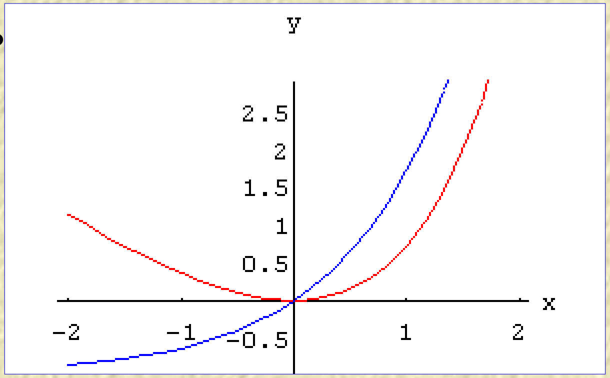
```
x=-2:0.01:2
y=x.^3
plot(x,y,'r*')
grid on
```

注意: 命题(2)的逆命题不一定成立.

如 $y=x^3$,此时应分子区间讨论

例1 讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $\because y' = e^x - 1$. 又 $\because D:(-\infty,+\infty)$.



在 $(-\infty,0)$ 内, $y' < 0$,

$\therefore$ 函数在 $(-\infty,0)$ 上严格单调减;

在 $(0,+\infty)$ 内, $y' > 0$, $\therefore$ 函数在 $(0,\infty)$ 上严格单调增.

注意:函数的单调性是一个区间上的性质,要用导数在这一区间上的符号来判定,而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

二、单调区间求法

定义:若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

问题:如上例，函数在定义区间上不是单调的，但在各个部分区间上单调.

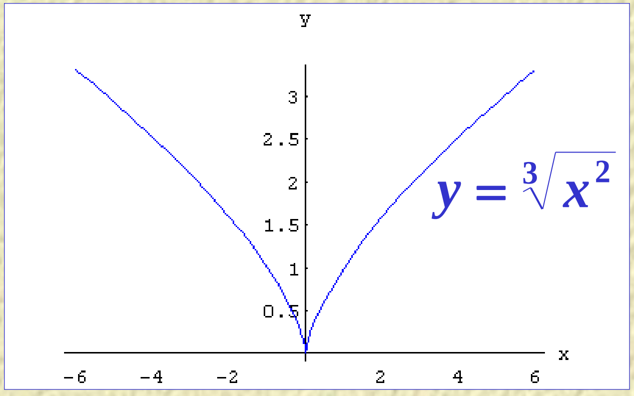
导数等于零的点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

方法:用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间,然后判断区间内导数的符号.

上页 下页 返回

例2 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty).$



$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad (x\neq 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

当$x=0$时,导数不存在.

当$-\infty<x<0$时，$f'(x)<0$;. 在$(-\infty,0)$上严格单调减;

当$0<x<+\infty$时，$f'(x)>0$,$\therefore$ 在$(0,+\infty)$上严格单调增;

单调减区间为 $(-\infty,0)$,

单调增区间为 $(0,+\infty)$.

上页 下页 返回

例4 当$x>0$时，试证$x>\ln(1+x)$成立.

证 设$f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

$\because$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$(0,+\infty)$可导，$f'(x)>0$，

$\therefore$ 在$[0,+\infty)$上严格单调增 $\because$ $f(0)=0$，

$\therefore$ 当$x>0$时，$x-\ln(1+x)>0$，即 $x>\ln(1+x)$.

例5 **证明** 当$0<x<1$时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

证 令$f(x)=e^{2x}(1-x)-(1+x)$,

则 $f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1,\quad f''(x)=-4xe^{2x}$,

所以, 当$x\in(0,1)$时，$f'(x)$严格单调减。而$f'(0)=0$,

因此 当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<f'(0)=0$.

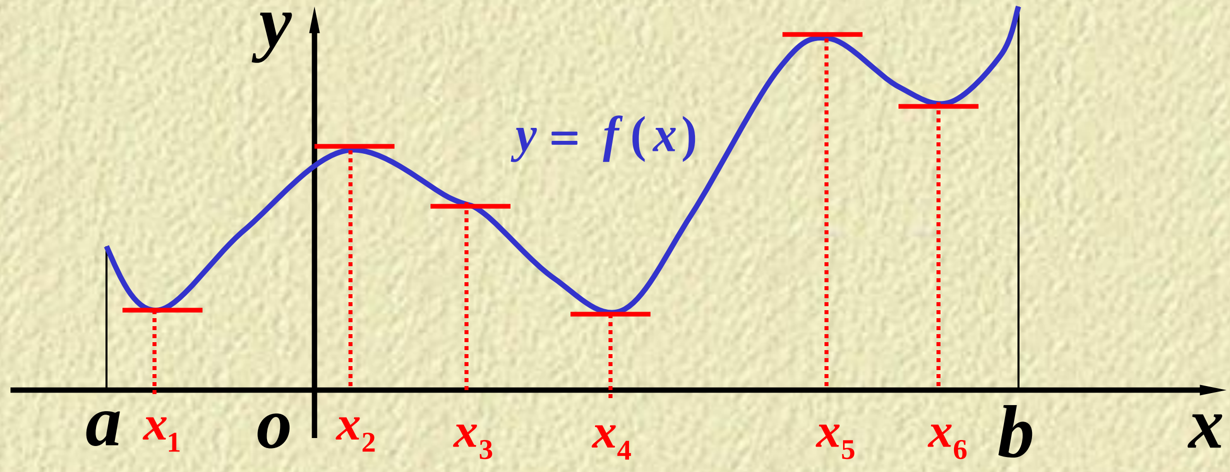
从而 当$x\in(0,1)$时，$f(x)<f(0)=0$.

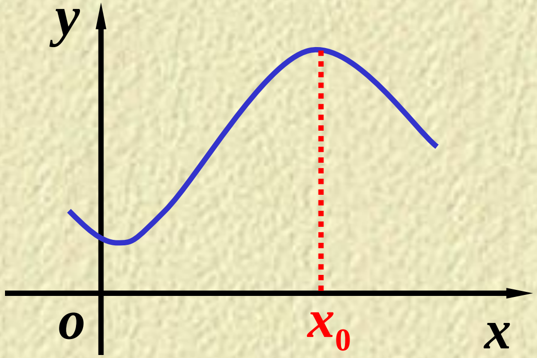
即: 当$x\in(0,1)$时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

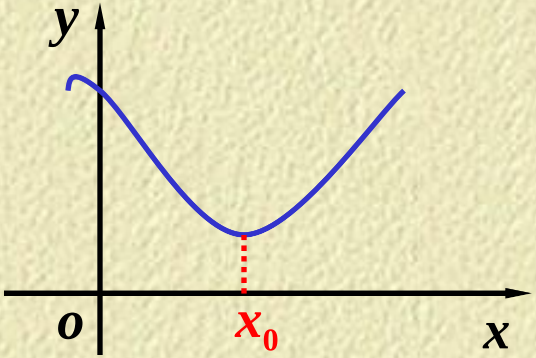
上页 下页 返回

第二部分 函数的极值

一、函数极值的定义







上页 下页 返回

定义

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内的一个点，

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，$f(x) \le f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值；

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，$f(x) \ge f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值。

函数的极大值与极小值统称为极值，使函数取得极值的点称为极值点。

二、函数极值的求法

定理1（必要条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点叫做函数 $f(x)$ 的**驻点**.

(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)

注意: 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

例如， $y=x^3,\ y'\big|_{x=0}=0,$ 但 $x=0$ 不是极值点.

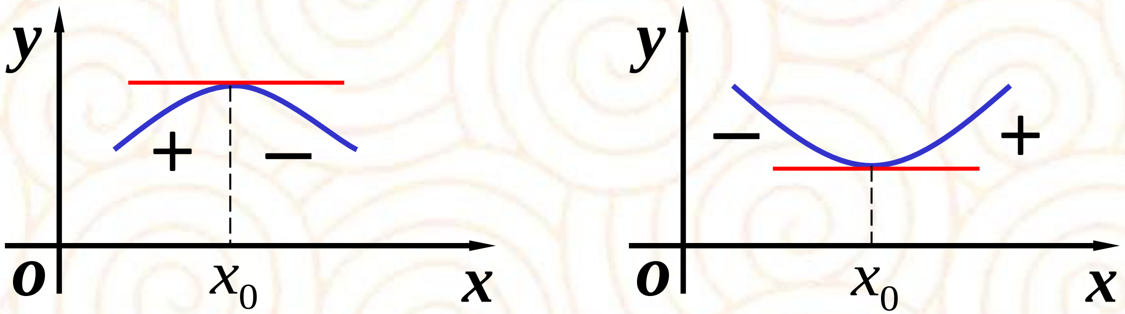
定理6.2(第一充分条件)

设$f(x)$在 x_0的某领域内可导, 且$f'(x_0)=0$

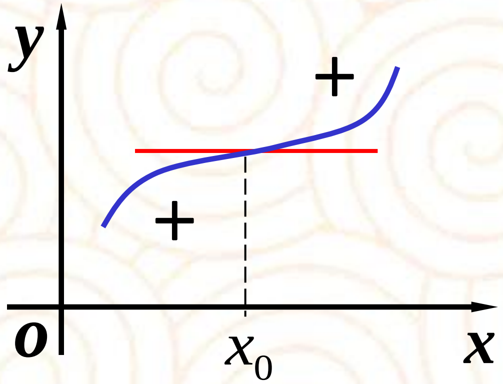
(1) 如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)\geq 0$而$x\in(x_0,x_0+\delta)$,有 $f'(x)\leq 0$，则 $f(x)$在x_0处取得极大值.

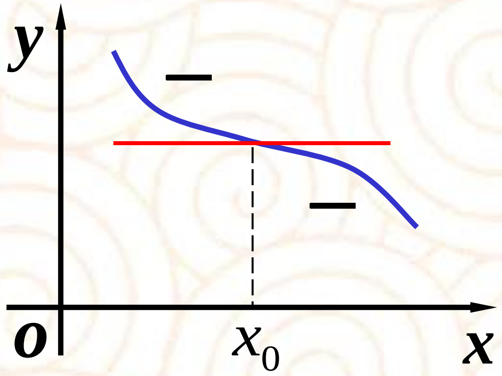
(2) 如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)\leq 0$而$x\in(x_0,x_0+\delta)$有 $f'(x)\geq 0$，则 $f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 如果当$x\in(x_0-\delta,x_0)$及$x\in(x_0,x_0+\delta)$时， $f'(x)$符号相同, 则 $f(x)$在x_0处无极值.



(是极值点情形)





(不是极值点情形)

不可导点也有可能是极值点,如绝对值函数在x=0处

求极值的步骤:

(1) 求$f'(x)$，及不可导的点

(2) 求驻点，即方程 $f'(x)=0$ 的根;

（3）检查不可导的点，和各驻点左右两侧的符号变化情况;

(4) 求极值.

注意: 函数的**不可导点**,也可能是函数的**极值点**.

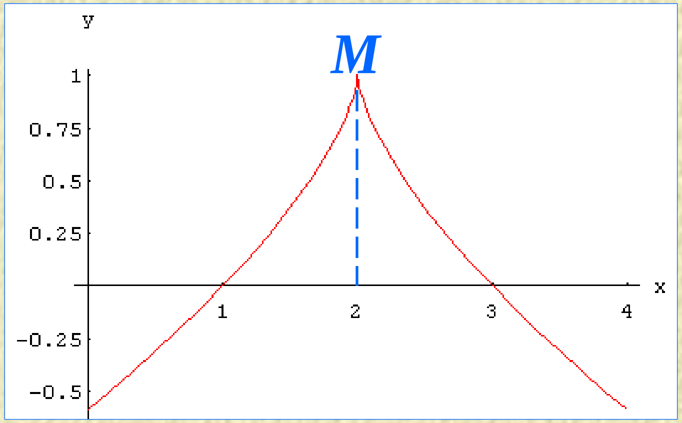
例3 求出函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 $$f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}\quad(x\neq 2)$$

当 $x=2$ 时, $f'(x)$ 不存在. 但函数 $f(x)$ 在该点连续.

当 $x<2$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x>2$ 时, $f'(x)<0$.



$\therefore f(2)=1$ 为 $f(x)$ 的极大值.

上页 下页 返回

例4 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

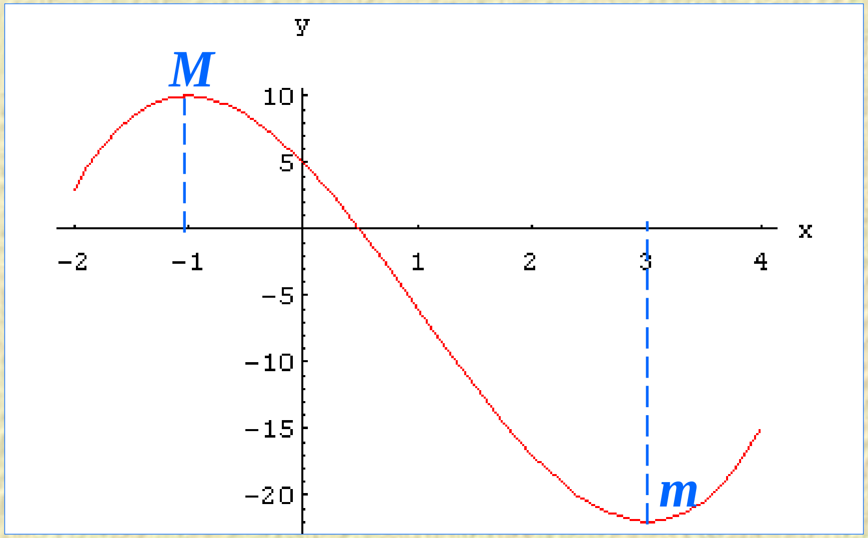
解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

极大值 $f(-1)=10$,

极小值 $f(3)=-22$.



定理6.3(第二充分条件) 设 $f(x)$在 x_0处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$时, 函数 $f(x)$在 x_0处取得极大值

(2) 当 $f''(x_0)>0$时, 函数 $f(x)$在 x_0处取得极小值.

证 (1) $\because$ $f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0,$

故$\exists U(x_0,\delta)$,使$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx异号,

当$\Delta x<0$时,有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0,$

当$\Delta x>0$时,有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0,$

所以,函数 $f(x)$在x_0 处取得极大值

(2)同法可证

定理6.4(第三充分条件)

设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导$(n\geq 2)$,并且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\text{而 } f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(1) 当n为偶数时,x_0 必为极值点$\begin{cases}\text{若}f^{(n)}(x_0)>0,\text{则}x_0\text{为极小值点}\\ \text{若}f^{(n)}(x_0)<0,\text{则}x_0\text{为极大值点}\end{cases}$

(2) 当n为奇数时,x_0不为极值点.

证: 利用$f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式, 可得

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当x充分接近 x_0 时, 上式左端正负号由右端第一项确定 , 故结论正确 .

说明: 上述极值的判别法(定理6.2 ~ 定理6.4) 都是充分的.

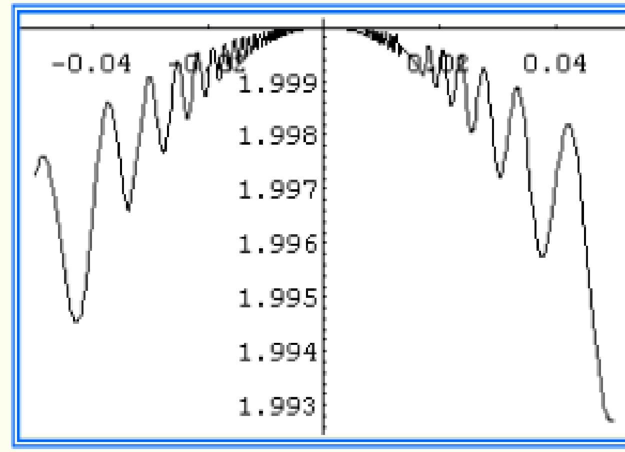
当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

说明：上述极值的判别法都是充分的.

当这些充分条件不满足时，不等于极值不存在.

例如：

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$



$f(0)=2$ 为极大值，但不满足上述定理的条件.

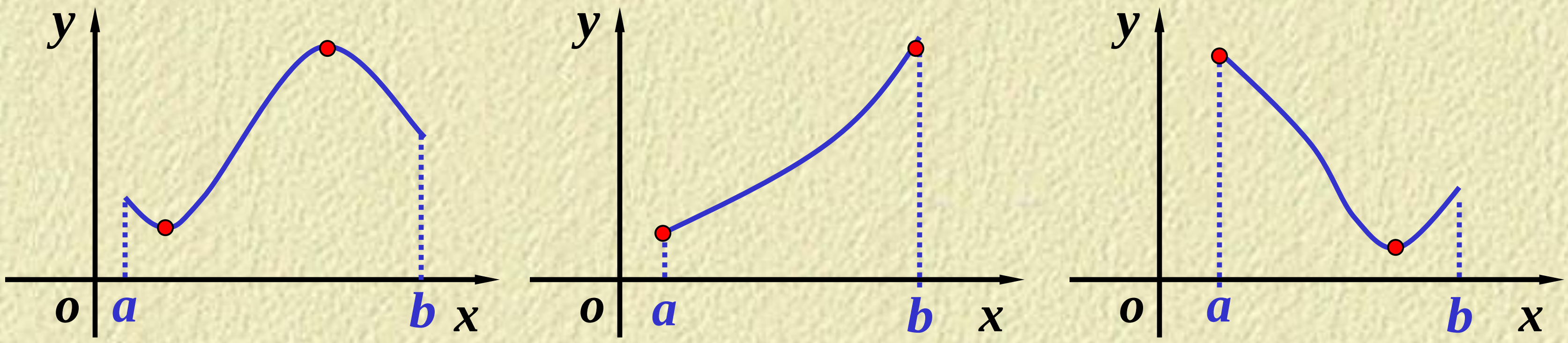
$$f'(0)=0$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \text{不存在}$$

第三部分 函数的最大(小)值

一、最优化问题中最值的求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上的最大值与最小值存在.



若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上的最大值与最小值存在.

[a,b]=（a,b）+ {a} + {b}

最值点可能是：极值点（驻点或不可导点），区间端点

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.

[a,b]=（a,b）+ {a} + {b}

最值点可能是：极值点（驻点或不可导点），区间端点

求最值点步骤:

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点、不可导点的函数值,
比较它们的大小,确定最大值和最小值;

注意:如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.
(最大值或最小值)

二、应用举例

例5 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在$[-3,4]$上的最大值与最小值.

解 $\because f'(x)=6(x+2)(x-1)$

解方程 $f'(x)=0$,得 $x_1=-2,\ x_2=1.$

计算 $f(-3)=23;$ $f(-2)=34;$

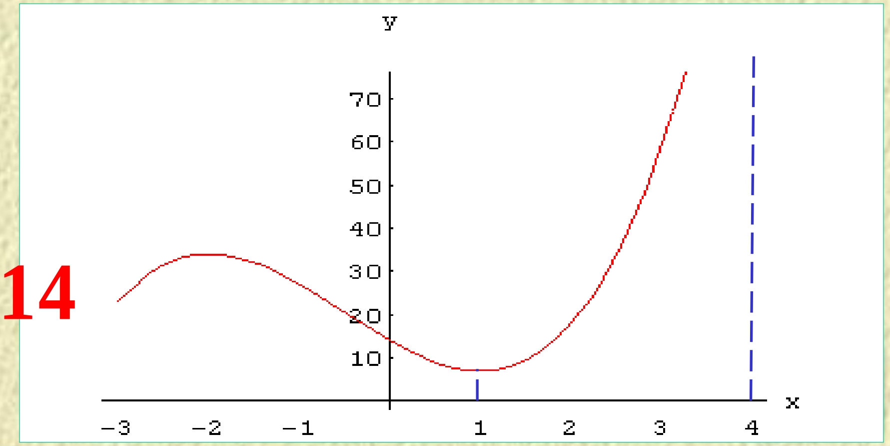
$f(1)=7;$ $f(4)=142;$

比较得:

最大值 $f(4)=142,$

最小值 $f(1)=7.$

$y=2x^3+3x^2-12x+14$



实际问题求最值应注意:

(1)建立目标函数;

(2)求最值;

若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值通常即为所求的最(或最小)值.

例6 某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月180元时，公寓会全部租出去. 当租金每月增加10元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费20元的整修维护费. 试问房租定为多少可获得最大收入?

例6 某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月180元时，公寓会全部租出去．当租金每月增加10元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费20元的整修维护费．试问房租定为多少可获得最大收入？

解 设房租为每月x元，租出去的房子有 $50-\left(\dfrac{x-180}{10}\right)$ 套，

每月总收入为 $R(x)=(x-20)\left(50-\dfrac{x-180}{10}\right)$

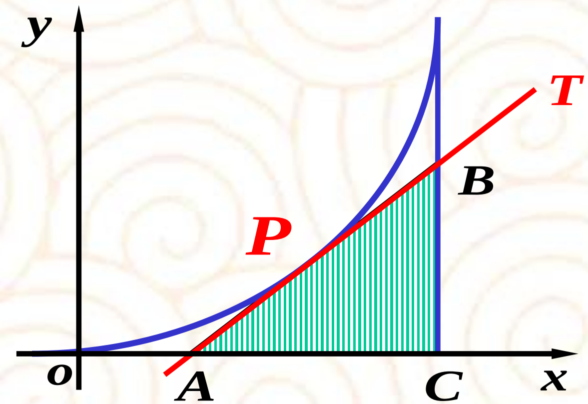
$$R'(x)=\left(68-\frac{x}{10}\right)+(x-20)\left(-\frac{1}{10}\right)=70-\frac{x}{5}$$

$R'(x)=0 \Rightarrow \quad x=350$ （唯一驻点）

故每月每套租金为350元时收入最高。

最大收入为 $R(x)=(350-20)\left(68-\dfrac{350}{10}\right)=10890\,(\text{元})$

例7 由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$所围成的三角形面积最大.



解 如图，设所求切点为 $P(x_0, y_0)$，

则切线PT为 $y-y_0=2x_0(x-x_0)$，

$\because y_0=x_0^2$，$\therefore A(\frac{1}{2}x_0,\ 0)$，$C(8,\ 0)$，$B(8,\ 16x_0-x_0^2)$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x_0)(16x_0-x_0^2)\quad (0\le x_0\le 8)$$

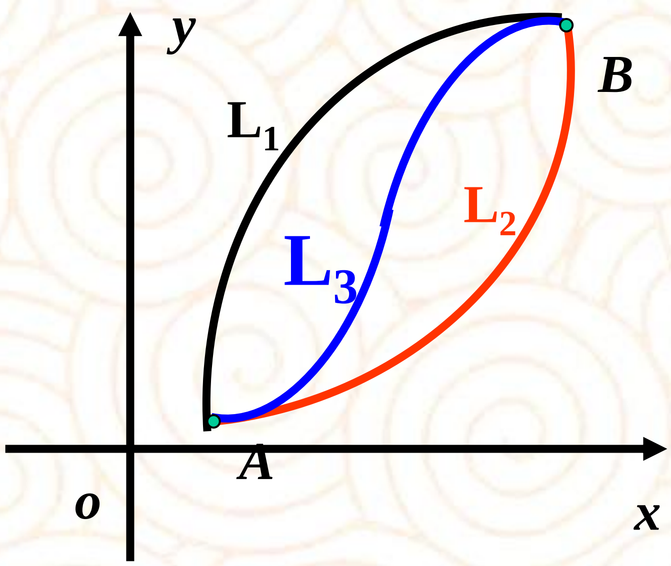
令 $S'=\frac{1}{4}(3x_0^2-64x_0+16\times16)=0$，解得 $x_0=\frac{16}{3}$，$x_0=16$ (舍去).

$\because s''(\frac{16}{3})=-8<0.\quad \therefore s(\frac{16}{3})=\frac{4096}{217}$为极大值.

故 $s(\frac{16}{3})=\frac{4096}{27}$为所有三角形中面积最大的.

函数的单调性和极值，对于了解函数的性态很有帮助，但仅知道单调性还不能比较全面地反映出曲线的性状，还须考虑弯曲方向。

如右图所示, L_1 ，L_2, L_3 虽然都是从A点单调上升到B点，但它们的弯曲方向却不一样。

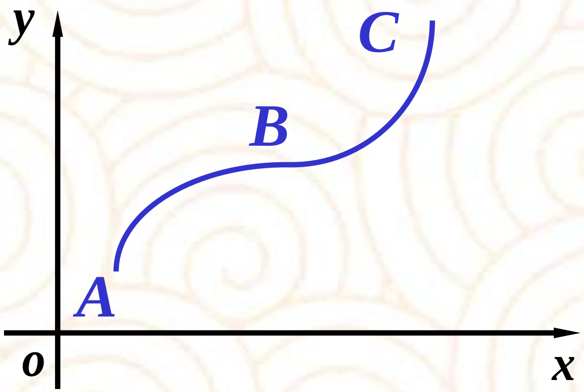


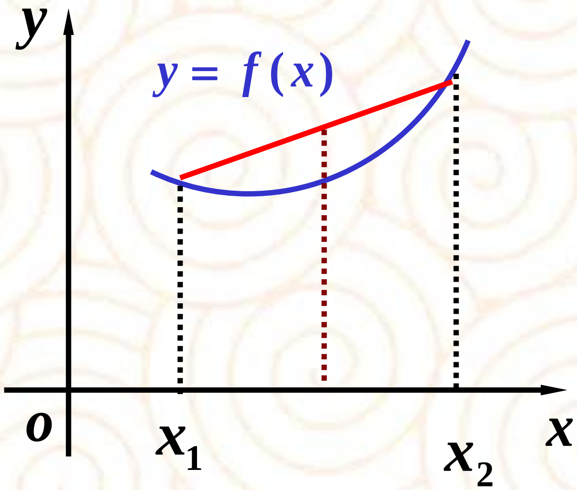
L_1 是 “凸”弧，L_2是 “凹”弧, L_3 既有凸弧，也有凹弧

第四部分 函数图象的凹凸性与拐点

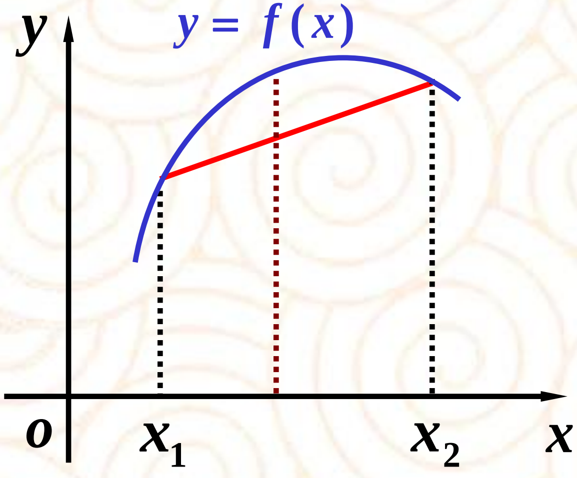
一、曲线凹凸的定义

问题:如何研究曲线的弯曲方向?

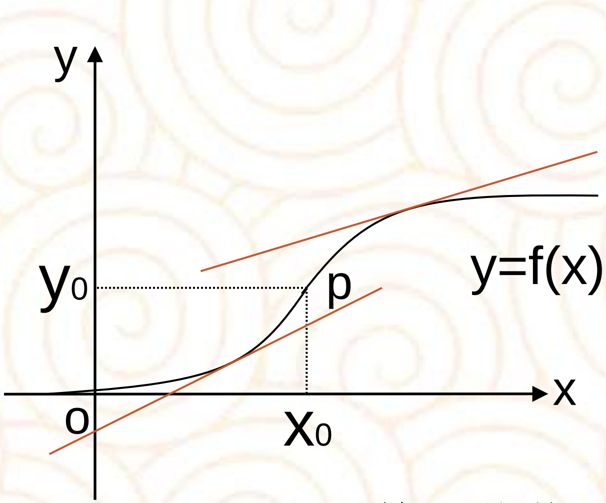




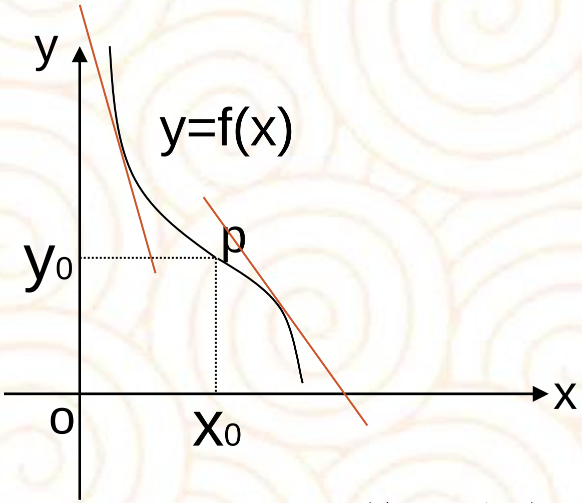
图形上任意弧段位于所张弦的下方



图形上任意弧段位于所张弦的上方



$K_{切}=f'(x)>0$ y单调递增



$K_{切}=f'(x)<0$ y单调递减

几何特征:

凡呈凹型的弧段其切线总位于曲线的下方.

凡呈凸型的弧段其切线总位于曲线的上方.

连续曲线的凹弧段与凸弧段有分界点.

$$x \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow 0 < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} < 1$$

令$\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$则 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

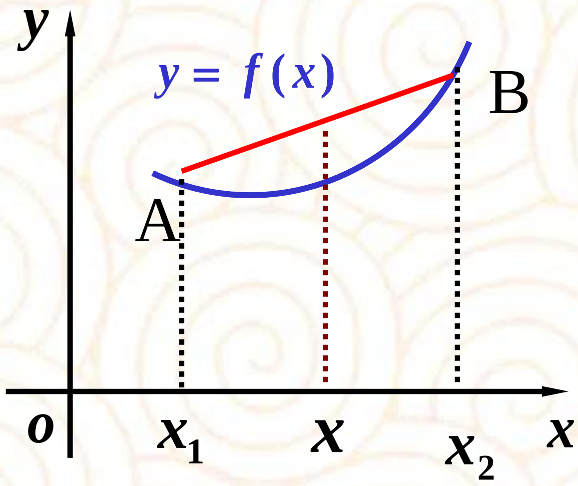
过$A(x_1, f(x_1))$与$B(x_2, f(x_2))$的弦的方程是：

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

$y = f(x)$与弦的方程(函数)在$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

处的值分别是:

$$\boxed{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} \qquad \boxed{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}$$



曲线上任意弧段位于所张弦的下方时，有：

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)<\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$$

定义6.1：函数图象的 凹性：

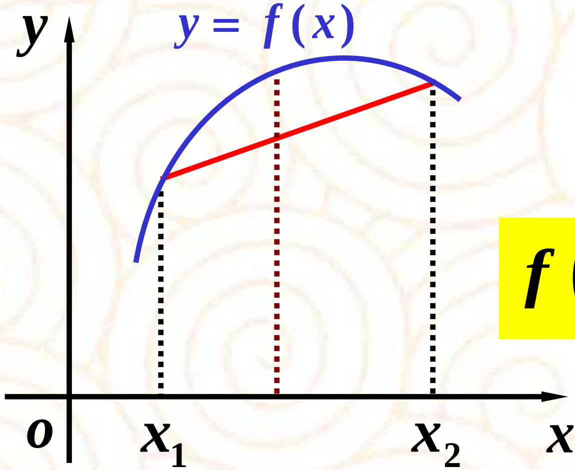
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$$

设$f:[a,b]\to \mathbf{R}$.若$\forall\, x_1,x_2\in[a,b],\forall\lambda\in[0,1]$,

若不等式 $f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)<\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$

恒成立, 则称函数 $f(x)$ **在** $[a,b]$**上的图象是凹的.**

也称曲线 $f(x)$ **在** $[a,b]$**上是凹的.**



曲线上任意弧段位于所张弦的上方时，有：

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)>\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$$

定义6.1：函数图象的 凸性：

设$f:[a,b]\to\mathrm{R}$.若$\forall\, x_1, x_2\in[a,b], \forall\lambda\in[0,1]$,

若不等式 $f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)>\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$

恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$上的图象是凸的.

也称曲线 $f(x)$ 在 $[a,b]$上是凸的.

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$$

注：1.由定义知，若f是(a,b)内的凸(凹)函数，

则$-f$是(a,b)内的凹(凸)函数，

2. 若当$x\in(a,b)$时，曲线 $y=f(x)$上每一点的切线位于曲线的下(上)方,则称曲线在区间(a,b)内是凹的(凸的).

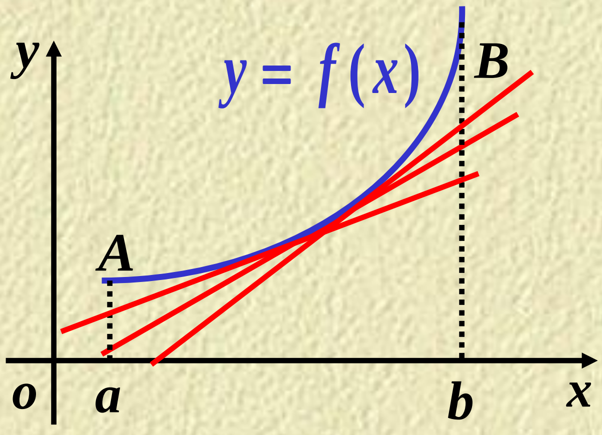
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

令$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$,则 $\lambda=\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}$

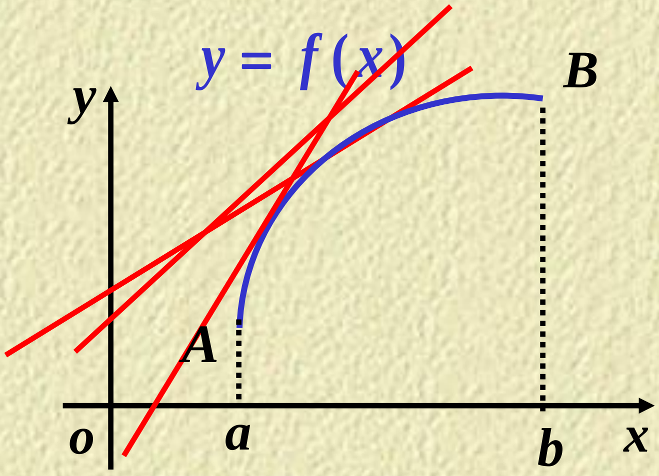
等价于：$\forall x\in(x_1,x_2)$，有

$$f(x)\le\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

二、曲线凹凸的判定



$f'(x)$ 递增　$y'' > 0$



$f'(x)$ 递减　$y'' < 0$

定理6.5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，若

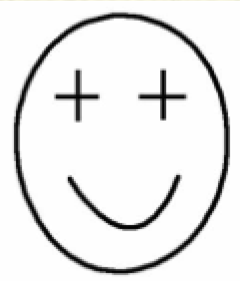
$\forall x \in (a,b)$

(1) $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 是凹的；

(2) $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 上是凸的.

将上述自变量取值范围换为 I 仍成立

二、曲线凹凸的判定



凹图像

凸图像

定理6. 5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，若

$\forall x \in (a,b)$

(1) $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 是凹的;

(2) $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 的图象在 $[a,b]$ 上是凸的.

大凹(打噢) ,小凸。

(2) $f''(x)<0$,则 $f(x)$的图象在$[a,b]$上是凸的.

证明 (2)$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$

记 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, h = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

对 $f(x)$ 在$[x_1, x_0], [x_0, x_2]$上

分别应用Lagrange定理，得

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)h \quad (x_1 < \xi_1 < x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)h \quad (x_0 < \xi_2 < x_2)$$

两式相减，得

$$2f(x_0) - [f(x_1) + f(x_2)] = [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]h$$

两式相减，得

$$2f(x_0)-[f(x_1)+f(x_2)]=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]h$$

由假设 $f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$内单调减

由$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)-f'(\xi_2)>0$

$$\boxed{\Rightarrow \quad 2f(x_0)-[f(x_1)+f(x_2)]>0}$$

即 $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

这就证明了 $f(x)$的图象在(a,b)内是凸的

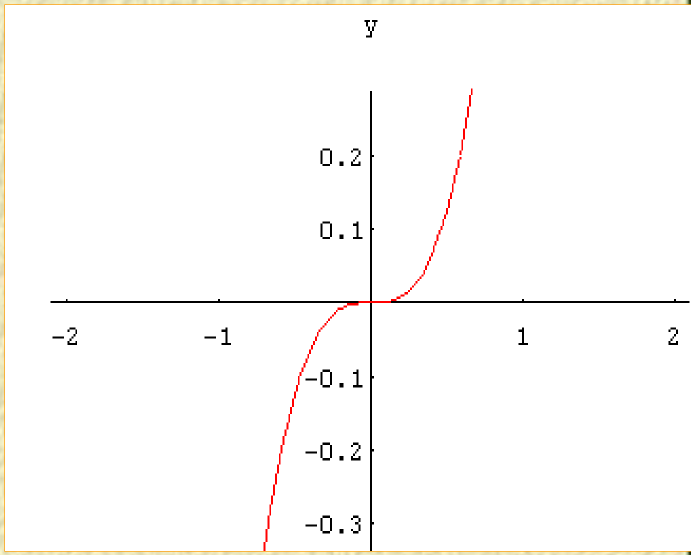
同理可证（1）

凸图像

注 定理的结论可推广到任意区间 I上

上页 下页 返回

例8 判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.



解 $\because y' = 3x^2, \quad y'' = 6x,$

当 $x < 0$ 时， $y'' < 0,$

$\therefore$ 曲线在区间 $(-\infty, 0)$ 为凸的;

当 $x > 0$ 时， $y'' > 0, \therefore$ 曲线在区间 $(0, +\infty)$ 为凹的;

注意到, **点(0,0)是曲线由凹变凸的分界点.**

上页 下页 返回

三、曲线的拐点及其求法

1. 定义 连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点**.

2. 拐点的求法

定理 如果$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内存在二阶导数, 则点$(x_0, f(x_0))$是拐点的必要条件是$f''(x_0)=0$.

注1： $f''(x_0)=0$ 时，x_0 不一定是 $f(x)$ 的拐点

一阶导数不存在的点，有可能是极值点，
同样，二阶导数不存在的点，有可能是拐点， 只要该点两侧二阶导数变号，即使该点处二阶导数不存在，也可能是拐点。

注3: 若 $f''(x_0)$ 不存在,点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$处.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, \quad (x \neq 0)$$

$x = 0$是不可导点, y', y''均不存在.

但在$(-\infty, 0)$内, $x < 0,\ f''(x) > 0$ 凹

在$(0, +\infty)$内, $x > 0,\ f''(x) < 0$ 凸

$\therefore$ 点$(0,0)$是曲线 $y = \sqrt[3]{x}$的拐点, 但二阶导数不存在.

找拐点方法1:

设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导，且$f''(x_0)=0$，

(1) 在x_0两侧$f''(x)$变号，点$(x_0, f(x_0))$即为拐点;

(2) 在x_0两侧$f''(x)$不变号，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

例14

求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸的区间

例9

求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间

方法2: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导, 且 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例15 求曲线 $y=\sin x+\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 内的拐点.

方法2: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,且 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

曲线$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是（　　）

$A.(1,0)$　　$B.(2,0)$　　$C.(3,0)$　　$D.(4,0)$

关于渐近线

曲线 $y=f(x)$ 上一点M沿曲线无限远离原点或无限接近间断点时，如果M到一条直线L的距离趋近零，则这条直线L称为该曲线的渐近线。可分为垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线。

$$\lim_{x\to\infty(\pm\infty)} f(x)=y_0 \qquad y=y_0 \text{ 是水平渐近线}$$

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty(\pm\infty) \qquad x=c \text{ 是垂直渐近线}$$

斜渐近线方程为: $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

求曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程

思考题1 如果x_0为$f(x)$的极小值点，那么必存在x_0的某邻域，在此邻域内，$f(x)$在x_0的左侧下降，而在x_0的右侧上升？

思考题2 $f'(x_0) > 0$,是否可断定$f(x)$在x_0的某邻域内单调增?

- 如果函数二阶可导，则相邻的两个极值点之间一定至少有一个拐点。

例10 讨论$f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$的各种性态,并画图.