



山东大学
SHANDONG UNIVERSITY



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

第一章常考题型精讲

山东大学数学学院 · 张天德

2022年10月27日

本讲内容

01

知识点归纳

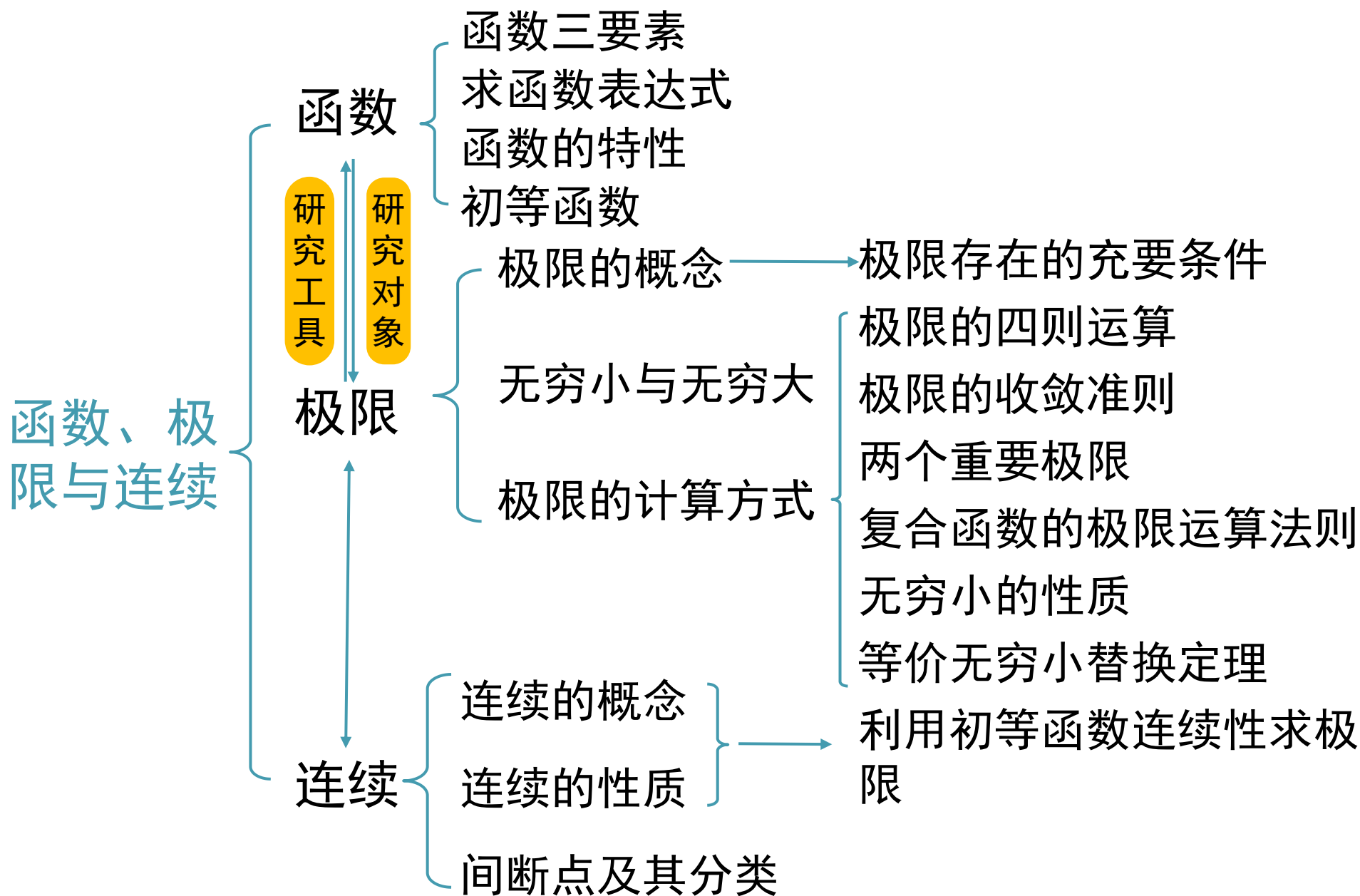
02

教学要求和学习建议

03

常考题型精讲





本讲内容

01 知识点归纳

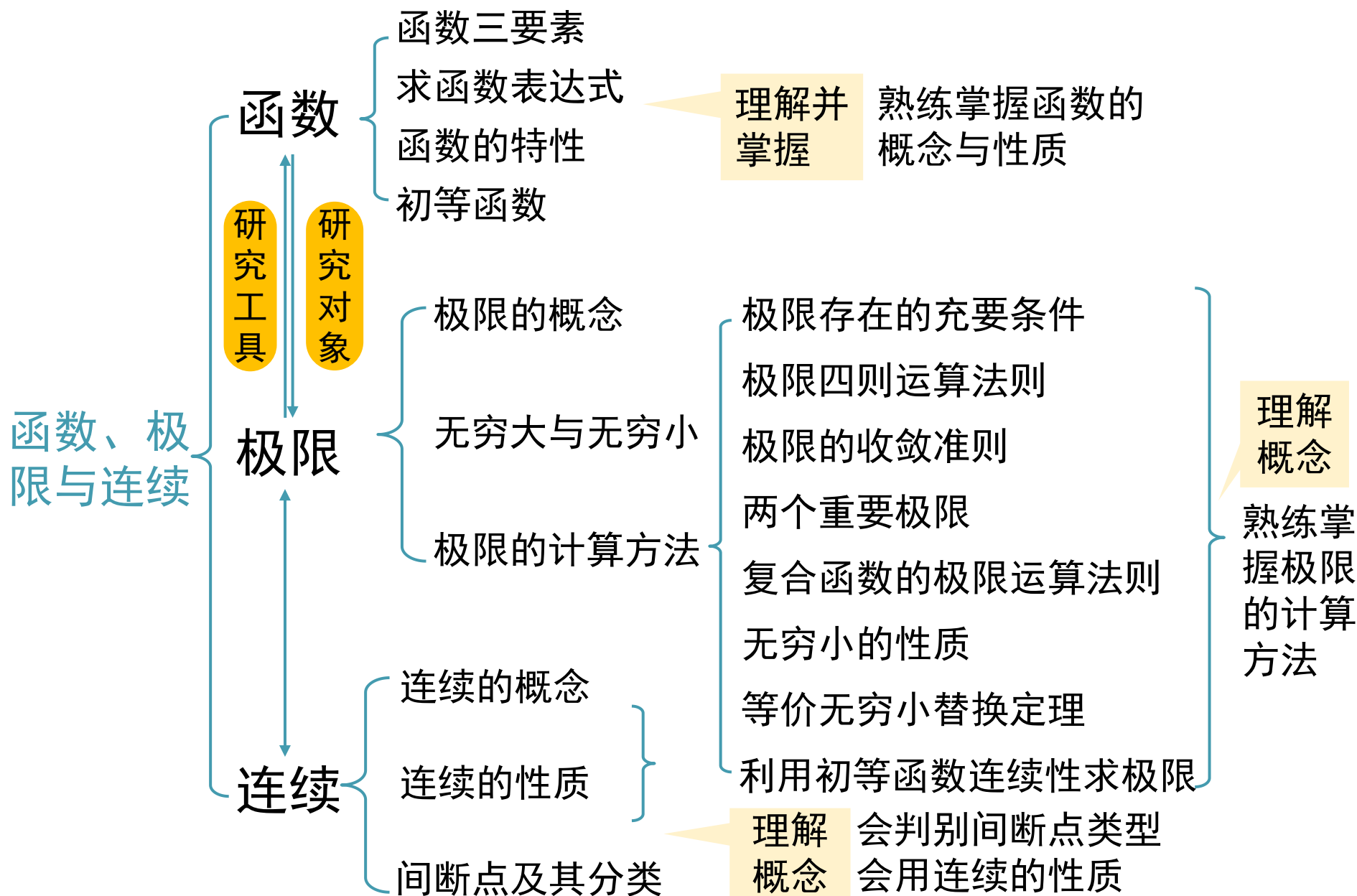
02 教学要求和学习建议

03 常考题型精讲





- (1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
- (2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
- (3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
- (4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
- (5) 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
- (6) 掌握极限的性质及四则运算法则.
- (7) 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
- (8) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
- (9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
- (10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.



本讲内容

01 知识点归纳

02 教学要求和学习建议

03 常考题型精讲



题型一 极限存在充要条件



1

求函数 $f(x) = \frac{1 - a^{\frac{1}{x}}}{1 + a^{\frac{1}{x}}}$ ($a > 1$) 当 $x \rightarrow 0$ 时的左右极限,

并说明 $x \rightarrow 0$ 时极限是否存在.



证明

拓展例题 求函数 $f(x) = \frac{1 - a^{\frac{1}{x}}}{1 + a^{\frac{1}{x}}}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左右极限,

并说明 $x \rightarrow 0$ 时极限是否存在.

解



求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right).$



题型二 极限存在准则



1

设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) (n = 1, 2, \cdots)$

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.



(1) 证明



(2) 解



2

设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.



解



例 3 设 $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, a = \max \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 证明:

《高等数学精选精解1600题（上册）》93页 203题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = a.$$



证明

题型三 无穷小的比较及等价无穷小量代换求极限



1

当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 “ $o(x)$ ” 表示比 x 高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是.

A. $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

B. $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

C. $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$



解



当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 求正数 n 的值.



解




计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{(x + x^2) \ln(1 + x) \arcsin x}.$

《高等数学精选精解1600题（上册）》91页 197题

【为了解决这一问题补充】


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} =$$

 **例 3** 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{(x + x^2) \ln(1 + x) \arcsin x}.$

《高等数学精选精解1600题（上册）》91页 197题



解

 **例 4** 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln \cos x}$.

《高等数学精选精解1600题（上册）》92页 198题



解



5


计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2 [1 - \ln(1+x)]}{x}$.

《高等数学精选精解1600题（上册）》72页 159题



解

题型四 极限中参数的确定

 **例 1** 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

《高等数学精选精解1600题（上册）》92页 200题



解



2

已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .



解



3

n 为正整数, a 为某实数, $a \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2021}}{x^n - (x-1)^n} = \frac{1}{a}$,

则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$, 并且 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

《高等数学精选精解1600题（上册）》37页 84题



解

题型五 闭区间上连续函数的性质



1

设 $f(x)$ 在 $[0, 2L]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2L)$,

证明: 方程 $f(x) = f(x + L)$ 在 $[0, L]$ 内至少有一个根.



证明



2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 证明:

《高等数学精选精解1600题（上册）》94页 207题

- (1) 存在 $x \in [0,1]$, 使 $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$;
- (2) 对任何正整数 n , 存在 $x \in [0,1]$, 使 $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.



证明



证明: 多项式 $p(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n+1}$ ($a_0 \neq 0$)
至少含有一个零点.




题型六 函数连续性与间断点



若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 且对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 都成立, 试证 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.



解

 **例 2** 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, 问函数在 $x=1$ 处是

否连续? 若不连续, 修改函数在 $x=1$ 处的定义, 使之连续.



解

题型七 极限综合题



1

计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$.

《高等数学精选精解1600题（上册）》93页 205题



解



计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x - n}{\cos x - 1}.$

《高等数学精选精解1600题（上册）》91页 195题



解



3

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

《高等数学精选精解1600题（上册）》42页 95题



解



4

设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x) - \frac{1}{3} \sin f\left(\frac{1}{3}x\right) = x$, 求 $f(x)$.

《高等数学精选精解1600题（上册）》91页 196题



解

第一章常考题型精讲

学海无涯,祝你成功!

