一元函数微分学及其应用

第四节 微分中值定理及其应用

- Rolle中值定理
- Lagrange中值定理
- Cauchy中值定理

作业:习题2.4
Page142.　　4, 6, 7 , 10, 12 ,13

第一部分　预备内容

一、极大值和极小值

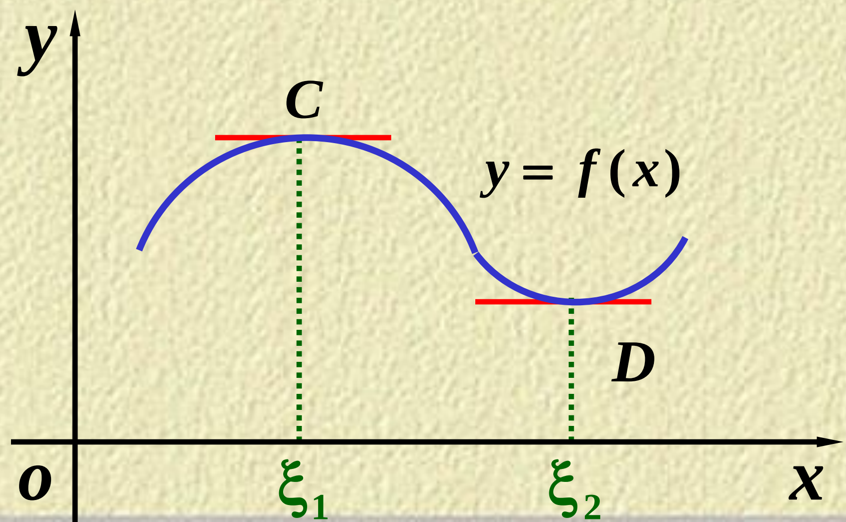
设有函数 $f(x)$: $I \to R, x_0 \in I$.

若存在$\delta > 0$,，使得对于$\forall x \in U\left(x_0,\delta\right) \subset I$,都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$在点x_0取得极大(小)值.

极大和极小值统称为极值. x_0称为极值点.



上页　下页　返回

二、Fermat lemma（费马引理）

若函数 $f(x):(a,b)\to R$在$x_0\in(a,b)$取得极值且$f(x)$在x_0处可导，则 $f'(x_0)=0.$

证 设$f(x)$在x_0取得极大值$f(x_0)$.

则对于满足$(x_0-\Delta x, x_0+\Delta x)\subseteq(a,b)$的$\Delta x$,有:

若 $\Delta x>0$, 则有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0;$

若 $\Delta x<0$, 则有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0;$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)\ge 0;$$

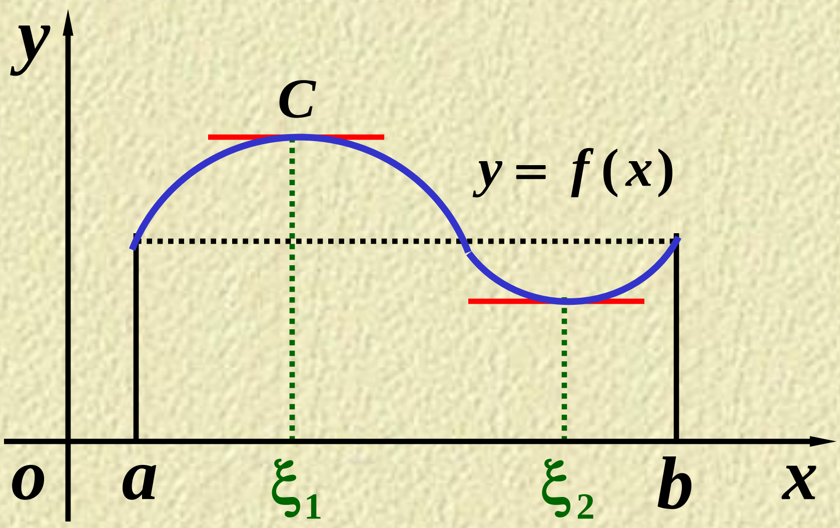
$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)\le 0;$$ $\because f'(x_0)$存在,

$\therefore f'_-(x_0)=f'_+(x_0).$ $\therefore$ 只有 $f'(x_0)=0.$

上页 下页 返回

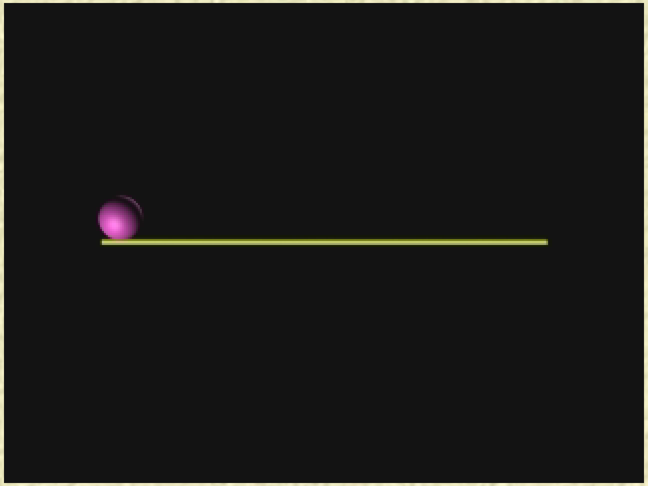
几何观察:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



物理观察:

变速直线运动在折返点（位移最大）处,瞬时速度等于零.



函数在一点取得极大值 为什么它的二阶导就会小于0呢？

- 该命题不严谨：
- 函数在某一点取得极大值，其在该点的二阶导数不一定小于0，甚至可能不存在。
- 如y=-x^4在x=0处取极大值，其二阶导数为0；
- 又如 y=-|x|在x=0取极大值，但它不存在一阶导数和二阶导数。

应改为：

具有连续二阶导数的函数y=f(x)在极大值点x=x0处的二阶导数非正

应改为:

具有连续二阶导数的函数y=f(x)在极大值点x=x0处的二阶导数非正

$y=f(x)$在定义域$x\in D$上有连续二阶导数,
且x_0为一极大值点,则 $f''(x_0)\leqslant 0$.

证明: $y=f(x)$在定义域$x\in D$上有连续二阶导数,且x_0为一极大值点,
则 $f'(x_0)=0$,且$\exists\delta>0$,使得:

$x\in(x_0-\delta,x_0)$, $f(x)<f(x_0)\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$

$x\in(x_0,x_0+\delta)$, $f(x)<f(x_0)\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$

所以在$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$上, $f'(x)$由正变负,即$f'(x)$单调减小.

又由于$f(x)$具有连续的二阶导数$f''(x)$

$\therefore f''(x)\leqslant 0, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$\therefore f''(x_0)\leqslant 0.$

上页 下页 返回

第二部分 中值定理 Mean value theorems

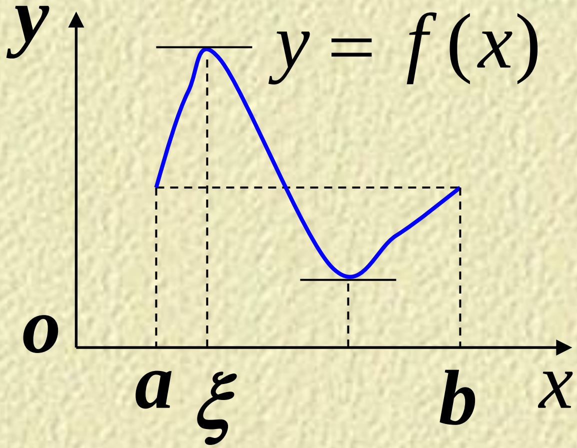
一、罗尔定理 (Rolle's theorem)

若 $y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在区间 (a,b) 内可导

(3) $f(a)=f(b)$



$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0.$

例如, $f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1).$

在$[-1,3]$上连续, 在$(-1,3)$上可导, 且 $f(-1)=f(3)=0,$

$\because f'(x)=2(x-1),$ 取$\xi=1, (1\in(-1,3))$ $f'(\xi)=0.$

上页 下页 返回

证 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M = m$.

则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(x) = 0$. $\forall \xi \in (a,b)$, 都有 $f'(\xi) = 0$.

(2) 若 $M > m$.

$\because f(a) = f(b)$,

$\therefore$ 最大值与最小值不可能同时在端点取得.

设 $M \neq f(a)$, $M \neq f(b)$

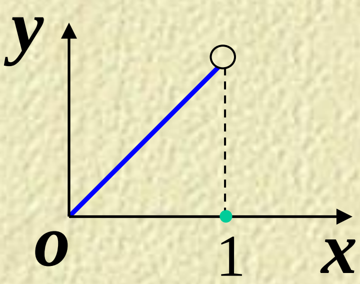
则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi) = M$.

由Fermat引理得: $f'(\xi) = 0$.

注意:若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.

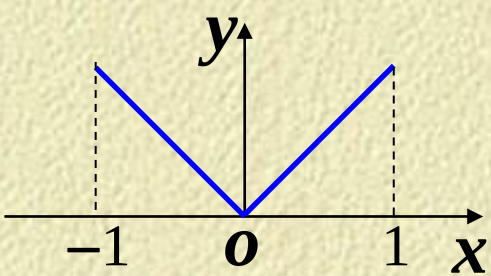
例如,

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



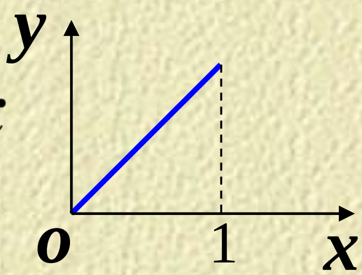
$f(x)=|x|$

$x \in [-1,1]$



$f(x)=x$

$x \in [0,1]$



例1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$在$[0,1]$连续,

且 $f(0)=1$, $f(1)=-3$. 由零点存在定理知:

$\exists\, x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$. 即为方程的小于1的正实根.

设另有 $x_1\in(0,1)$, $x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$.

$\because$ $f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件,

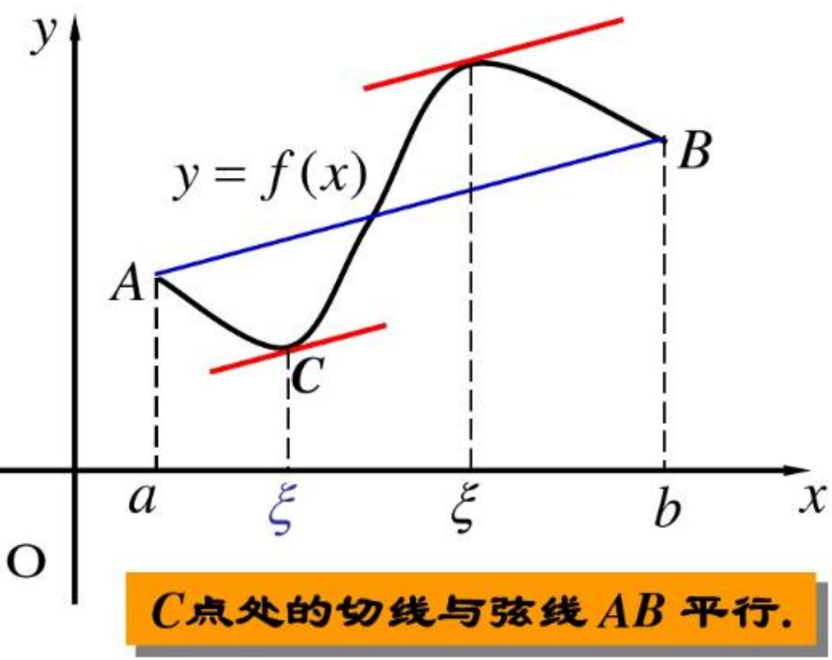
$\therefore$ 至少存在一个 ξ (在 x_0, x_1 之间), 使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0$, $(x\in(0,1))$ 矛盾!

$\therefore$ x_0为唯一小于1的正实根

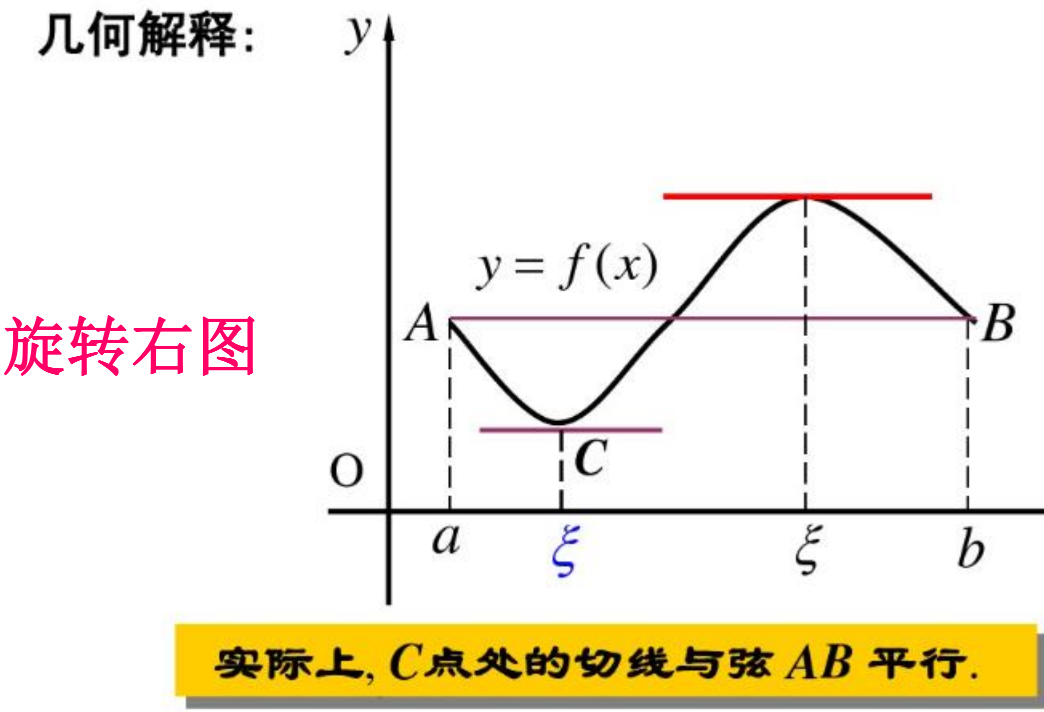
上页 下页 返回

罗尔（Rolle）定理　　如果函数[1] $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续,[2] 在开区间(a,b)内可导,[3] 且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$, 那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$, 使得函数 $f(x)$在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$



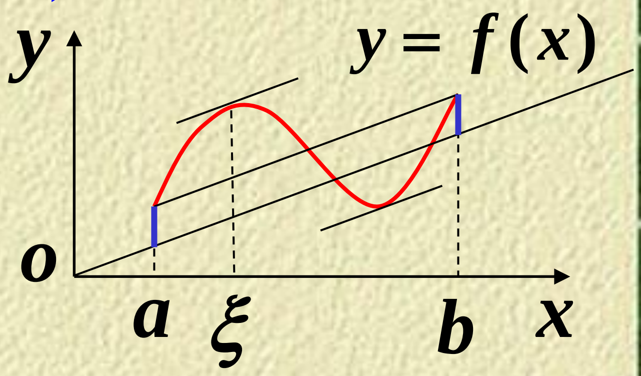
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

旋转右图



推论：可微函数的任意两个零点之间至少有导函数的一个零点。

二、拉格朗日定理(Lagrange's theorem)



若 $y=f(x)$满足:

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在区间 (a,b) 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

作辅助函数 $\phi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然, $\phi(x)$在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$\phi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\phi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi\in(a,b)$, 使 $\phi'(\xi)=0$, 即定理结论成立. 证毕

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

注意:拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

举例说明拉格朗日中值定理的条件缺一不可.

例1. $f_1(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$

不满足在闭区间上连续的条件;

例2. $f_2(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x\in[a,b] \quad$ 且 $ab<0$

不满足在开区间内可导的条件;

上页 下页 返回

设 $f(x)$在 在(a,b)内可导, $x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$, 则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量Δy的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称**有限增量公式**.

推论 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, I 内可导. 则$f'(x)\equiv 0 \Leftrightarrow f(x)\equiv C$.

证 必要性 $\forall x_1, x_2 \in I$,在$[x_1,x_2]$上对$f(x)$应用$Lagrange$定理知,

$\exists \xi \in (x_1,x_2)\subseteq(a,b)$,使

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$, $\therefore f(x_1)=f(x_2)$.

由x_1,x_2的任意性知f在I上是常数.

充分性 (易)

推论4.3 如果函数 $f(x)$在$[x_0,b)$上连续, 在开区间(x_0,b)内可导, 且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$

则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$, ($A$为有限或无限).

证: 由拉格朗日**有限增量公式**

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

可得: $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x) \quad (0<\theta<1)$

$$\therefore\ f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+} f'(x_0+\theta\Delta x)=A$$

类似可证，该结论对x_0的左导数也成立。

导函数在x_0的单侧极限=函数在x_0的单侧导数

下页 返回

导函数在x_0的单侧极限=函数在x_0的单侧导数

可简化分段函数在分界点处的求导

例3 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\sin x, & x>0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解：当$x<0$时，$f'(x)=2x$；当$x>0$时，$f'(x)=\sin x+x\cos x$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+x\cos x)=0$，

在区间$(a,0]$$(a<0)$上应用推论4.3，有 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$.

在区间$[0,b)$$(b>0)$上应用推论4.3，有 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$，

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \sin x+x\cos x, & x>0 \end{cases}$$

上页 下页 返回

例4 证明 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}\ (-1 \le x \le 1).$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in [-1,1]$

$$\because\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

$$\therefore\ f(x) \equiv C, \quad x \in [-1,1]$$

又 $\because\ f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2},$

即 $C = \dfrac{\pi}{2}.$

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

例5 证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

观察分析： $\ln(1+x)-0=\dfrac{1}{1+\xi}(x-0),\quad \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$???

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)$在$[0,x]$上满足拉氏定理的条件，

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),(0<\xi<x)$$

$\because f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1,$

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x,$ 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

上页 下页 返回

三、柯西(Cauchy)中值定理

柯西, A. -L.

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a,b) 内可导

(3)在开区间 (a,b) 内 $F'(x)\neq 0$

$\longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

思考: 柯西定理的下述证法对吗？

$$\because\ f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

两个 ξ 不一定相同

上面两式相比即得结论. **错!**

上页 下页 返回

至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

证： $\boxed{\text{构造}\ \phi(x)=\left[f(b)-f(a)\right]F(x)-\left[F(b)-F(a)\right]f(x).}$

易知，$\phi(x)$满足Rolle中值定理的条件.

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $\phi'(\xi)=0$.

即$\left[f(b)-f(a)\right]F'(\xi)-\left[F(b)-F(a)\right]f'(\xi)=0$,

$\because F'(\xi)\neq 0$ $\qquad\therefore \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

当 $F(x)=x$, $\quad F(b)-F(a)=b-a, F'(x)=1$,

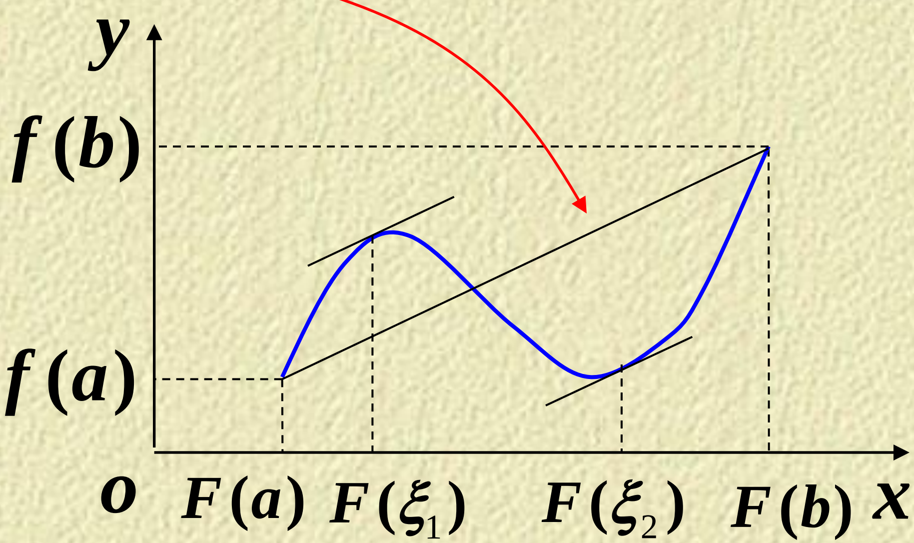
$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}}=\boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$



注意: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f'(t)}{F'(t)}$

切线斜率

另法分析：要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}=0$ $\varphi'(\xi)$

作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

证：作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

柯西(1789 – 1857)

柯西，A. -L.

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 .他是经典分析的奠人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.

例6 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

上页 下页 返回

例7 设$f(x)$在$[a,b]$连续,(a,b)可导

证明:在(a,b)内存在点ξ和η使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

上页 下页 返回

例9 设$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\in D(a,b)$, $f(a)=f(b)=0$

设$g(x)\in C[a,b]$, $g(x)\in D(a,b)$, $g'(x)\neq 0$,

证明: (1) $\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2) $\exists\eta\in(a,b)$,使$f'(\eta)-f(\eta)=0$;

(3) $\forall\lambda\in R$, $\exists c\in(a,b)$,使$f'(c)+\lambda f(c)=0$;

例10 设$f(x)\in C[a,b], f(x)\in D(a,b), f(a)=f(b)=0$

设$g(x)\in C[a,b], g(x)\in D(a,b), g'(x)\neq 0,$

证明： (4) $\exists\xi\in(a,b)$, 使$f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

上页 下页 返回

例11 设函数 $f(x), g(x)$ 都在 $[1,6]$上连续，在 $(1,6)$ 内可导，且 $f(1)=5, f(5)=1, f(6)=12.$ 求证:至少存在一点 $\xi\in(1,6)$ 使

$$f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-2\xi]=2.$$

四、小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

练 习 题

1、证明等式$\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\pi}{2}$

($x\in(0,1)$) .

2、设$a>b>0$，$n>1$，证明

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b) .$$

3、证明下列不等式:

(1)、 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$;

(2)、当$x>1$时，$e^x>ex$.

4、证明方程$x^5 + x - 1 = 0$只有一个正根．

5、设$f(x)$在$[a,b]$内上连续，在(a,b)内可导，若$0 < a < b$，则在(a,b)内存在一点ξ，使

$$af(b) - bf(a) = [f(\xi) - \xi f'(\xi)](a - b).$$

上页 下页 返回

不计算导数判断导函数零点的问题

- 例2：设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}$，证明f’(x)在(0,1)内存在零点。

这两个行列式为什么等于0？

- 证明：由于 $f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0, f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0$，

  故f(0)=f(1)，根据罗尔定理，存在ξ∈(0,1)使得f’(ξ)=0，即f’(x)在(0,1)内存在零点。

一般的，设

$$F(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1(x) & \alpha_2(x) & \cdots & \alpha_n(x) \end{vmatrix}$$

其中 $\alpha_i(x)=\begin{pmatrix} f_{1i}(x) & f_{2i}(x) & \cdots & f_{ni}(x) \end{pmatrix}^T$

那么有：

$$F'(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \alpha_1(x) & \cdots & \alpha_i'(x) & \cdots & \alpha_n(x) \end{vmatrix}$$

其中 $\alpha_i'(x)=\begin{pmatrix} f_{1i}'(x) & f_{2i}'(x) & \cdots & f_{ni}'(x) \end{pmatrix}^T$