

# 基于购买概率的临时超市网点优化设计模型

## 【摘要】

本文通过对所给调查数据的处理，得出了出行方式、餐饮方式和购物档次的统计规律。同时分析了各种因素之间的相关性，得出了餐饮方式、消费档次的选择均与出行方式没有关系的结论。

对于问题二，我们按“出行路径最短原则”测算出了 20 个商区的人流量分布（见图 6），得到和公路相接的出口处人流量最大等规律。

我们引入观众在某商区购物概率来衡量观众的购物欲望：(1)推导出某商区内购物概率和 MS 数量之间的非线性关系： $p_A = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_{MSj})$ （其中  $p_{MSj}$  为第  $j$  个 MS 吸引观众购物的概率），很好地刻画了商区的“规模效应”和同一商区内的“竞争效应”。(2)结合人流量推导出某商区赢利的数学期望。

同时，我们同时，我们定义商区的最大承载人流量和此商区流量的比值  $\frac{N_i \phi_M + n_i \phi_m}{\lambda_i A}$  为容量人流比，来衡量商区是否满足购物需求；用 MS 的位置分布均衡率  $\alpha_0 = \frac{\max_{i,j}[C_i - C_j]}{\max[C_k]}$  和规模类型分布均衡率  $\alpha_1 = \frac{|N_i C_M - n_i C_m|}{N_i C_M + n_i C_m}$  来衡量 MS 的分布的均衡性，以赢利的数学期望为目标，各商区每类 MS 个数为决策变量，满足需求以及均衡为约束条件，建立了商区 MS 非线性规划模型。

我们先求解出各商区满足购物需求约束的最优 MS 种类和数量，并利用启发式算法进行均衡调整，得到如下结果：大 MS 共 25 个，小 MS 共 60 个，此时赢利的数学期望为 473.9514 万元，商区的容量人流比：135%，MS 的位置分布均衡率 71.41%：规模类型分布均衡率 8.333%。通过对结果的分析，我们得出了商家赢利同 MS 种类和数量的关系，从商家的竞争、规模效应、均衡性与赢利性的关系等方面分析了结果的合理性。并对模型进行了灵敏度分析和优缺点评价。

最后，我们通过随机的模拟检验了结果的稳定性，即在整個奥运会期间，我们的 MS 设计是赢利、分布均衡和满足需求三者兼顾的。

**关键字：**购买概率 数学期望 非线性关系 最大承载人流量 均衡率

## 【问题提出】

奥运会期间，在比赛主场馆的周边地区需要建设由小型商亭构建的临时商业网点，称为迷你超市（Mini Supermarket，以下记做 MS）网，以满足观众、游客、工作人员等在奥运会期间的购物需求，主要经营食品、奥运纪念品、旅游用品、文体用品和小日用品等。在比赛主场馆周边地区设置的这种 MS，在地点、大小类型和总量方面有三个基本要求：满足奥运会期间的购物需求、分布基本均衡和商业上赢利。

为了得到人流量的规律，我们在已经建设好的某运动场通过对预演的运动会的问卷调查，了解观众（购物主体）的出行和用餐的需求方式和购物欲望。

我们应该按以下步骤对图 2 的 20 个商区设计 MS 网点：

1. 根据附录中给出的问卷调查数据，找出观众在出行、用餐和购物等方面所反映的规律。
2. 假定奥运会期间（指某一天）每位观众平均出行两次，一次为进出场馆，一次为餐饮，并且出行均采取最短路径。依据 1 的结果，测算图 2 中 20 个商区的人流量分布（用百分比表示）。
3. 如果有两种大小不同规模的 MS 类型供选择，给出图 2 中 20 个商区内 MS 网点的设计方案（即每个商区内不同类型 MS 的个数），以满足上述三个基本要求。
4. 阐明方法的科学性，并说明结果是贴近实际的。

## 【模型分析】

题目给定的观众的消费额的统计，反映的是观众潜在的消费力，但不一定每天会按消费额消费，加入只存在一个 MS 显然不能吸引所有的观众都按统计的消费额消费，因此观众消费的多少和商区的吸引力有关，这个吸引力即是观众的购物欲望。而各商区应该通过合理的 MS 种类和数量的设计，最大限度吸引观众在商区消费。

对于场馆周围的已经划分的商区，我们重点讨论的是每个商区如何选择合理 MS 的个数，以满足三方面的要求：购物需求，分布基本均衡和商业上的赢利。我们可以把这个问题归结为一个非线性规划，决策变量是各商区的每类 MS 个数，目标是赢利最大化，同时满足需求和均衡的约束。

模型建立的难点在于目标函数的建立，即是商区赢利如何表达。商区的赢利和商区的人流量以及购物欲望密切相关，我们用每个观众经过商区是在该商区购物的概率表示观众经过该商区的购物欲望，这个购物的概率只和商区内 MS 种类和个数相关，但并不是简单的线性关系，同一商区内 MS 的累加效应必须考虑。这可以从概率的角度推倒出来。这样就可以准确表达出商区赢利的数学期望。

### 【模型假设】

1. 观众每次出行在同一个商区内只购物一次。
2. 当同一出行方式的观众到同一看台同时存在两条或者两条以上最短路径时，选择各条路径的概率相等。
3. 对于观众一天内的两次出行，我们认为是住地 ->场馆 ->餐馆 ->住地
4. 各类 MS 售出商品的赢利率相同。

### 【符号说明】

$E_i$  : 商区  $i$  赢利的数学期望

$A$  : 所有商区一天内经过的总人次

$\lambda_i$  : 商区  $i$  人流分布的百分率

$e$  : 观众消费额的数学期望

$p_{MS}, p_{ms}$  : 大、小 MS 吸引观众购物的概率

$N_i, n_i$  : 商区  $i$  内大、小 MS 的个数

$\phi_M, \phi_m$  : 大、小 MS 的最大承载人流量

$C_M, C_m$  : 大、小 MS 的成本

$t$  : 奥运会进行的总天数

### 【模型建立及求解】

#### 问题 1 问卷调查反映的规律：

##### I、出行、饮食、消费档次分布规律

根据在已建好的体育场的问卷调查，我们得到观众在出行、用餐和购物档次三方面的规律：如图 1

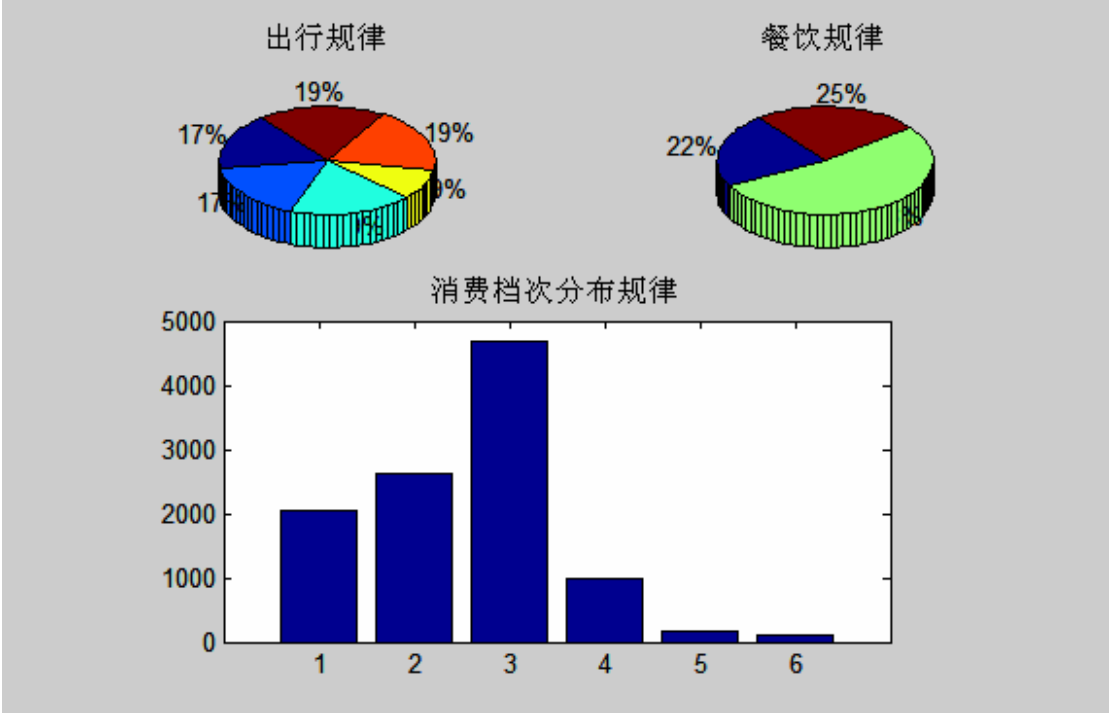


图 1 出行、用餐和购物档次三方面的分别规律图

出行规律：

表 1.各种出行方式的统计						
出行方式	公交（南北）	公交（东西）	出租车	私车	地铁（东）	地铁（西）
人数	1774	1828	2010	958	2006	2024

可见，对于奥运会观众主要的出行方式为地铁，且优势明显，占到总的出行方式的近 40%，其次，选择的出行方式从大到小依次为公交车、出租车和私车。

餐饮规律：

表 2.各种餐饮方式的统计			
餐饮方式	中餐	西餐	商场
人数	2382	5567	2651

可见，西餐为观众最受欢迎的选择，占总数的 53%，选择中餐和商场的人数相近，分别为 22%和 25%。

消费档次分布规律：

表 3.各种档次的消费额统计						
交费档次	1	2	3	4	5	6
人数	2060	2629	4668	983	157	103

可见，观众的消费档次的分布为单峰值分布在消费档次为 3 处达到最大，达到最大

后迅速减低，即中档的较多，向低档和高档方向人数分别依次减少，且高档消费者所占比例明显小于总低档。

II、 出行、餐饮、消费档次相关性规律：

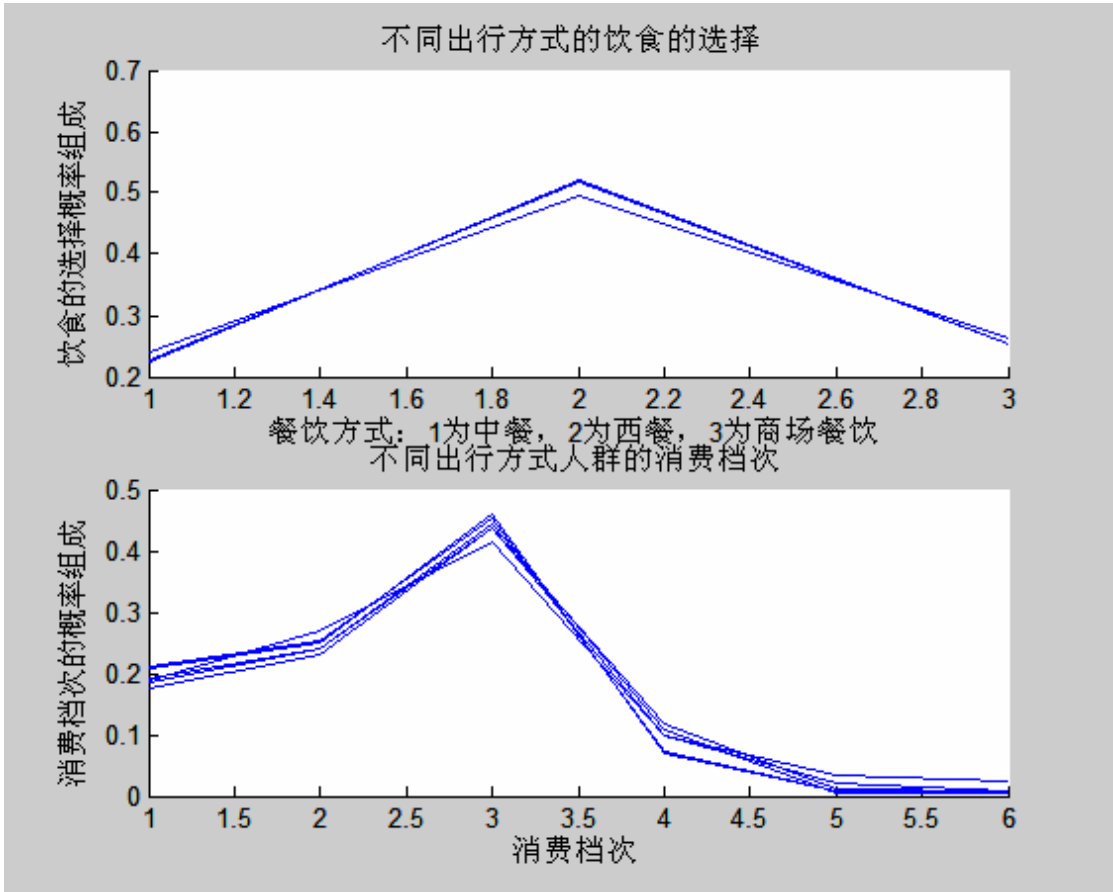


图 2 出行方式与饮食和消费档次之间相关性规律

图 2 理解：上图分别给出不同出行方式人群对餐饮选择和消费档次的概率组成，六条曲线分别代表六种不同出行方式人群，六条曲线几乎重合，表明出行方式的不同并未影响饮食的选择和消费档次，即出行方式与餐饮选择和消费档次间相关性非常小，可以忽略。

表 4.不同出行方式的观众饮食的选择概率：

出行方式	选择中餐的概率	选择西餐的概率	选择商场的概率
公交（南北）	0.24183	0.49605	0.26212
公交（东西）	0.22867	0.5186	0.25274
出租	0.22488	0.52239	0.25274
私车	0.21712	0.53967	0.24322
地铁（东）	0.22233	0.5349	0.24277
地铁（西）	0.21196	0.54298	0.24506

表 5.不同出行方式的观众消费档次概率组成

出行方式	档次 1	档次 2	档次 3	档次 4	档次 5	档次
公交（南北）	0.177	0.2299	0.4357	0.0992	0.0332	0.0248
公交（东西）	0.1892	0.2691	0.4130	0.099	0.0202	0.0092
出租	0.186	0.2408	0.4378	0.1164	0.0114	0.0074
私车	0.192	0.2400	0.4425	0.1096	0.0062	0.0093
地铁（东）	0.2073	0.2512	0.4586	0.0707	0.0084	0.0034
地铁（西）	0.2104	0.2524	0.4525	0.0716	0.0074	0.00543

### III、 观众年龄结构、性别组成以及它们与消费档次的关系：

根据调查数据得到观众年龄结构、性别组成以及它们与消费档次的关系，如图 3：

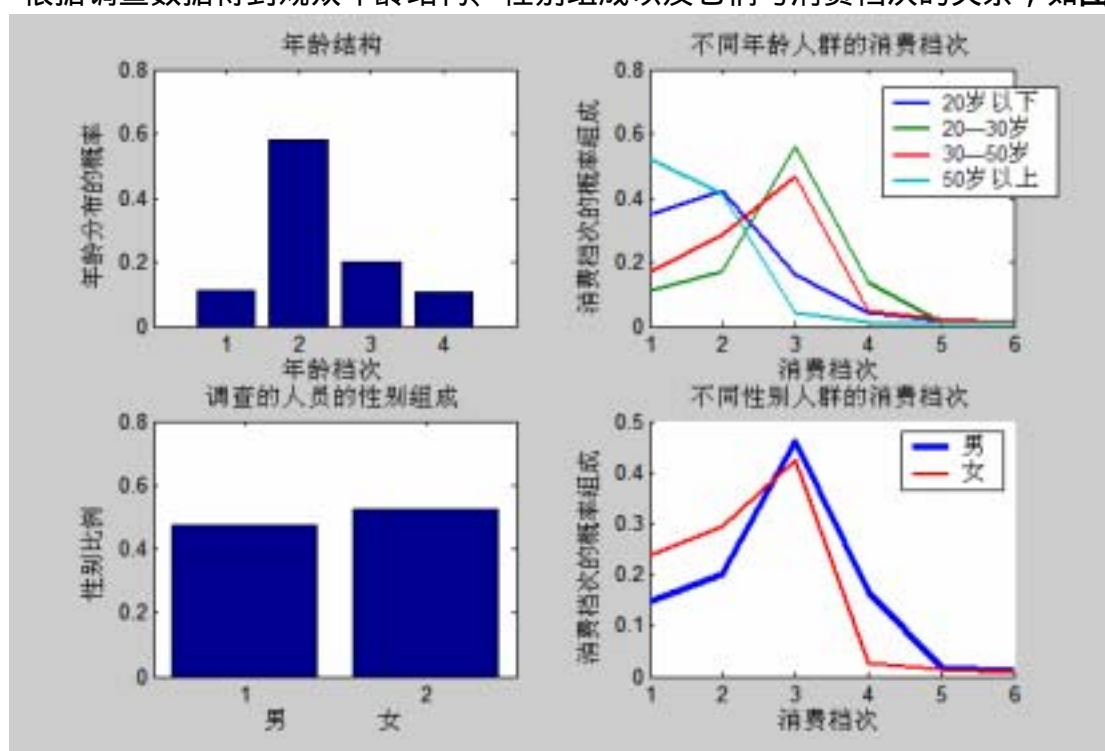


图 3 年龄结构、性别组成以及它们与消费档次的关系图

#### 观众年龄结构以及年龄与消费档次的关系：

年龄在 20-30 岁之间的观众居多，占到近 60%，其它占有量从大到小依次为 30-50 岁，20-30 岁，20 岁以下和 20-50 岁年龄段。观察右上子图，消费档次大于 3 的部分，曲线由上到下依次为绿、红、蓝、浅蓝，即 20-30 岁年龄段的观众消费档次最高，其次是 30-50 年龄段观众，50 岁以上年龄段观众消费档次最低。

#### 性别组成以及性别与消费档次之间的关系：

总体上，女性观众略多于男性观众。观察右下子图，消费档次大于 3 的部分，曲线由上到下依次为蓝、红，即男性观众消费档次高于女性观众消费档次。

### 规律总结：

奥运会观众主要的出行方式、饮食方式为地铁、西餐，消费档次集中在 200-300 元。年龄在 20-30 岁的观众居多，且女性观众略多于男性观众。

对于相关性的考虑，年龄与消费档次有关，中青年人的消费档次最高，老年人的消费档次最低。同时，性别与消费档次有关，男性观众略高于女性观众的消费档次。最后我们发现出行方式与饮食的选择和消费档次并无联系，相关性很小。

## 问题 2 各商区人流量的分布

### 1. 路径的选择

两次出行的理解：住地 ->场馆 ->饮食处 ->住地，如图 4：

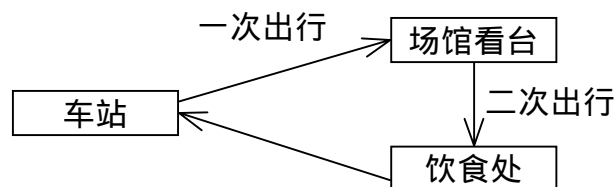


图 4:两次出行路线图

对于固定看台的观众（1 万人），我们已经假设一定从固定对应的商区出口出场（进场），而出场后一定存在一条固定的路径通往餐馆。因此我们可以给出每个看台的观众在进出场馆所要经过的商区。

通过对进场路径进一步分析，我们发现每个场馆只有两个商区对应进口，即南和北，因此，我们可以把车站（停车场）分为南区 and 北区，在同一个看台，去南区或北区车站（停车场）的路径相同。

特别的，按照模型假设，当同时存在两条或两条以上最短路径的时候，我们以等概率选取。

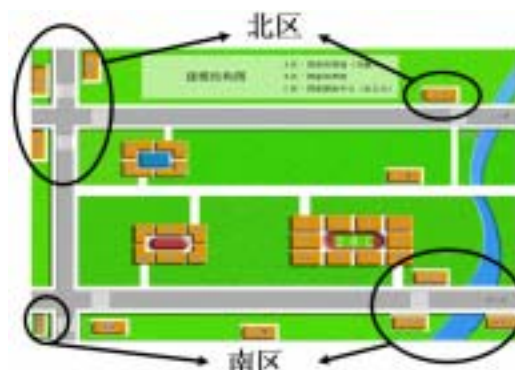


图 5.车站（停车场）南区 and 北区的划分

按照以上原则我们得出每个看台的观众进场路径如表 6。

表 6.车站（停车场）到场馆的路径

	南区	北区
	公交（南北） 地铁（东） 地铁（西）	公交（东西） 出租、私车
A1 正对看台	A1,A2,A3,A4,A5,A6 或者 A1,A10,A9,A8,A7,A6	A1
A2 正对看台	A2,A3,A4,A5,A6	A1,A2
A3 正对看台	A3,A4,A5,A6	A1,A2,A3
A4 正对看台	A4,A5,A6	A1,A2,A3,A4
A5 正对看台	A5,A6	A1,A2,A3,A4,A5
A6 正对看台	A6	A1,A2,A3,A4,A5,A6 或者 A6,A7,A8,A9,A10,A1
A7 正对看台	A6,A7	A1,A10,A9,A8,A7
A8 正对看台	A6,A7,A8	A1,A10,A9,A8
A9 正对看台	A6,A7,A8,A9	A1,A10,A9
A10 正对看台	A6,A7,A8,A9,A10	A1,A10
B1 正对看台	B1,B6	B1,B2,B3
B2 正对看台	B2,B1,B6	B2,B3
B3 正对看台	B3,B2,B1,B6 或者 B3,B4,B5,B6	B3
B4 正对看台	B4,B5,B6	B3,B4
B5 正对看台	B5,B6	B3,B4,B5
B6 正对看台	B6	B3,B4,B5,B6 或者 B3,B2,B1,B6
C1 正对看台	C1,C4	C1,C2
C2 正对看台	C2,C3,C4 或者 C2,C1,C4	C2
C3 正对看台	C3,C4	C3,C2
C4 正对看台	C4	C4,C1,C2 或者 C4,C3,C2

同理，我们的出了观众一天内场馆 ->饮食处的路径和饮食处—>车站的路径（附录 1）按照题目的假设选取最短路径。

## 2. 人流量及其购物欲望的分布

根据以上所分析的路径，观众每经过一次商区，其人流量总数加一。

从调查的数据分析，各商区的人流量取决于观众的行径，也就是上面分析的路径。这样我们可以先假设一天内这三个奥运场馆全部坐满，既有 20 万人在一天内在此区域里出行两次，通过计算得到每个观众可能的行走路线数为  $N_r = 2 \times 20 \times 3$ （车站所在方



向数、所到看台个数和索取餐厅的个数的乘积),按照问题一得到的出行和饮食的规律,我们可以准确计算出总人数为 20 万人时,对于一个人来说选择每条路径的概率,得到每条路径选择的人数的期望  $NP_i$ ,再根据每条路径和此路径上商区的对应关系,得到各商区的人流量的分布关系式:

$$\text{第 } X \text{ 商区的人流量 } A_x = \sum_{i=1}^{N_r} m \times NP_i, \text{ 其中,}$$

$$m_{Xi} = \begin{cases} 0 & \text{第 } X \text{ 商区不在第 } i \text{ 条路径上} \\ 1 & \text{第 } X \text{ 商区在第 } i \text{ 条路径上} \end{cases}$$

表 7.各商区的人流量及其购物欲望的分布

商区	人流量
A1	6.789944%
A2	4.478694%
A3	5.378604%
A4	6.278513%
A5	7.178421%
A6	13.68123%
A7	7.178421%
A8	6.278513%
A9	5.378604%
A10	4.478694%
B1	2.56769%
B2	2.244202%
B3	4.94668%
B4	2.244202%
B5	2.56769%
B6	7.501174%
C1	1.977115%
C2	2.677212%
C3	1.977115%
C4	4.197278%

### 3. 结果分析

根据人流量分布计算的结果,我们做出了人流量分布图(如图 6),从图上我们可以清晰的发现如下规律:

- 1) A, B, C 三个场馆周围商区的平均人流量呈递减规律,因为三处场馆容量依次递减(分别为 10 万、6 万、4 万)
- 2) A、B、C 三个场馆都是在出口处商区 A1、A6、B3、B6、C1、C4 的人流量最大,

- 约为其他商区人流量的 2 倍。
- 3) 从场馆去南边出口的人流量略大于北边出口的人流量，因为选择交通工具在南边的人数约多。
  - 4) 除了出口商区，在同一块场馆周围的其它商区人流分布对称。因为影响此分布的两个因素：来本看台的观看比赛的人数和经过此看台的人次，经过分析，具有地理对称位置的看台在这两个因素上具有对称性，所以人流分布对称。

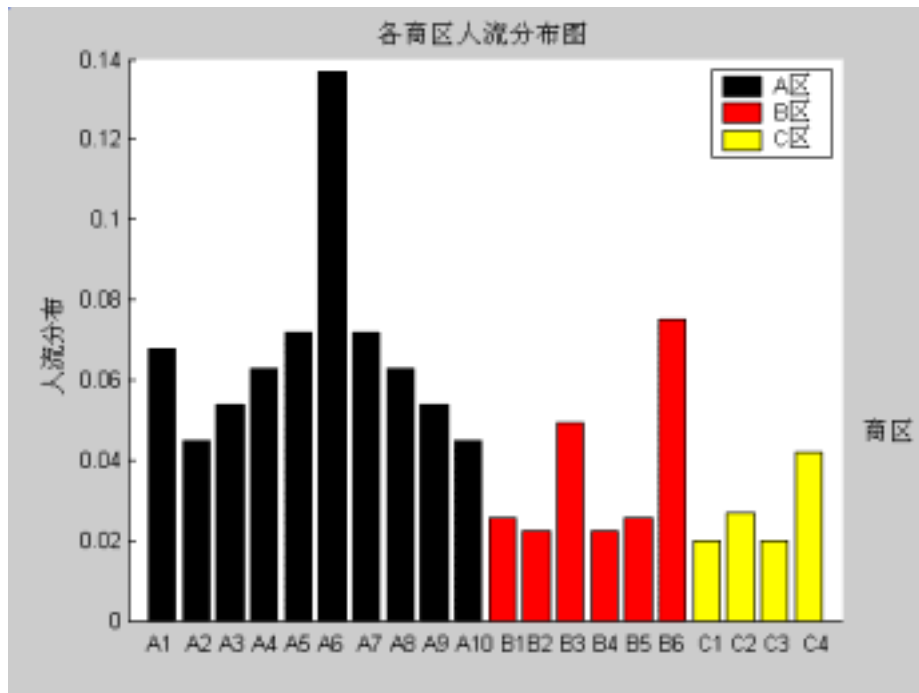


图 6.商区人流分布图

## 问题三 商区内 MS 网点的设计方案

### 1. 模型建立

#### ● 商圈屏蔽效应

**定理 1.**商区内增加一个 MS 时对本商区内的影响力远大于其他商区，因此新增加 MS 对其他商区的影响可以忽略。

**证明：**假设将商区看作为以圆形区域，管理者将 MS 的经营范围按 MS 的经营规模比例划分，如图，根据经济学的“分摊原理”MS 为了争夺客户，其选址位置将向圆心靠拢。当加入新的 MS 时，考虑新加 MS 对本商区的影响力  $F_0$  和对相邻商圈的影响力  $F_1$ 。

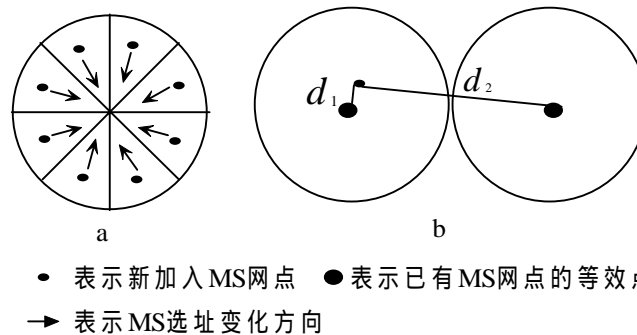


图7：a 网点SM商区选址趋势 b 新加MS网点对已有MS网点的影响

影响力定义：将万有引力定律引入区域经济学中，影响力  $F \propto \frac{P}{d^2}$ ， $P$  为新加入MS的

规模， $d$  为到商圈的距离。

$\frac{F_0}{F_1} = \frac{d_1^2}{d_0^2}$ ，由于  $d_0 < d_1$ ，所以  $F_0 < F_1$ ，因此新增加MS只会影响本商圈的吸引力，

对其他商圈的影响可以忽略。

## ● 商区内 MS 对观众购物概率的累加效应

根据上文提出的商圈屏蔽作用，我们仅考虑 MS 对所在商圈的影响。由于同一商区内的 MS 之间存在竞争，我们用观众只在同一商区内购物一次这一假设来描述这个竞争。那么商区内 MS 的数量  $N$  对商区的吸引力为非线性影响。

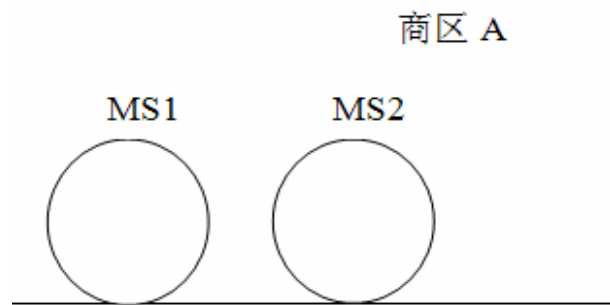


图 8. 同一商区内的 MS

我们引入概率来表示观众的购物欲望，即是说观众在某个商区的购物欲望我们表示为观众在某个商区购物的概率。

考虑两个 MS 对于商区吸引力的改变，如图 8。假设观众路过 MS1 的购物欲望为  $p_{MS1}$ ，即是观众路过 MS1 购物的概率为  $p_{MS1}$ ，同理观众路过 MS2 的购物欲望为  $p_{MS2}$ ，这时，观众如果不在商区 A 购物，那么必然是同时不在 MS1 和 MS2 购物，概率为  $(1 - p_{MS1})(1 - p_{MS2})$ 。

因此观众在 A 区购物的概率为： $p_A = 1 - (1 - p_{MS1})(1 - p_{MS2})$

同理，当商区 A 内加入 n 个 MS 时，观众路过时购物的概率为：

$$p_A = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_{MSj})$$

其中  $p_{MSj}$  为每个 MS 吸引观众购物的概率，它们对于商区总吸引力的贡献如图 9.

所示，可见同一商区内的 MS 之间存在着竞争的关系，它们的累加效应为观众在商区的总购物欲望。

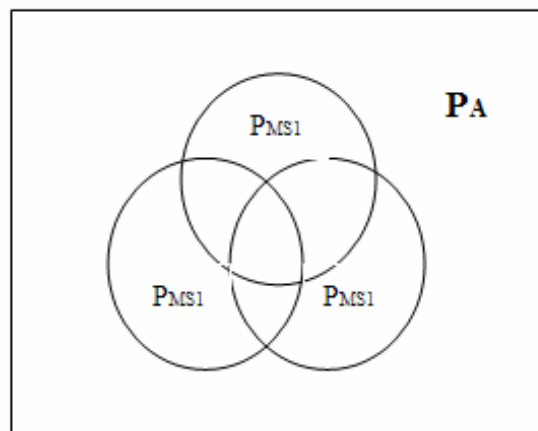


图 9.同一商区内 MS 的关系

由上式可以看出，随着商区内 MS 个数 n 的增加，观众在该商区的购物欲望并非线性增长，而是逐渐趋于饱和。因为一个商区内的 MS 之间是存在竞争的，一个 MS 的引入虽然会增加商区的吸引力，但同时会减少其他 MS 吸引顾客的机会。定性分析商区内观众购物欲望（商区吸引力）和商区内 MS 个数的关系如图 10.

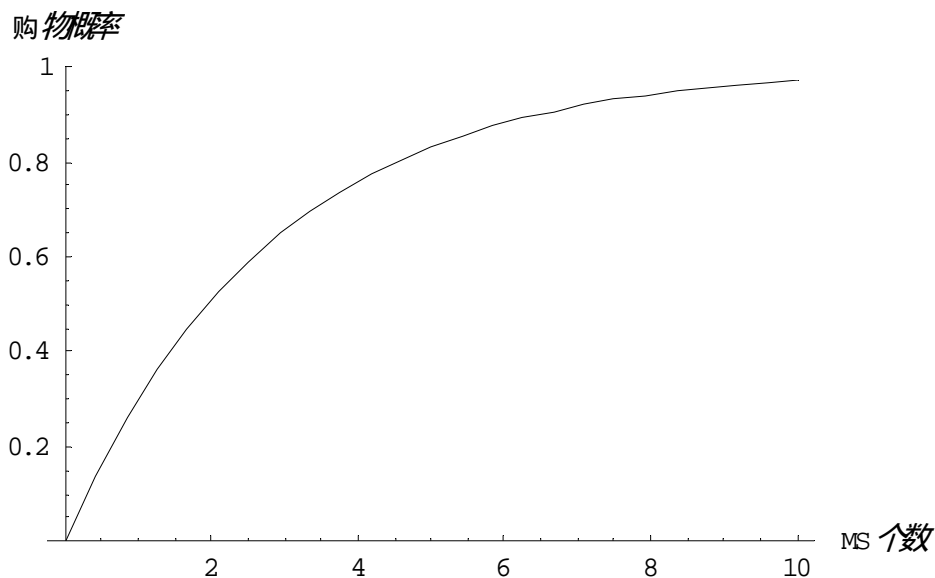


图 10.商区内观众购物概率和商区内 MS 个数的定性关系

## ● 商区赢利的数学期望

观众在商区 A 的消费是由观众的购物概率和消费水平决定的，因此某观众在商区 A 的消费期望可以表示为：

$$\boxed{\text{观众在商区 A 的消费期望} = \text{观众的消费额} \times \text{购物的概率}}$$

从问题一的结论我们可以得知，观众的消费档次和出行方式没有关系，也就是说商区内所有观众的消费额的数学期望是一个常数，和出行方式没有关系。

我们计算商区  $i$  赢利的数学期望  $E_i$ ， $A$  为一天内所以商区经过的总人次，用  $A \cdot \lambda_i$  即表示路过商区  $i$  的总人次，这些观众在商区  $i$  如果消费，消费额的数学期望为常数  $e$ ，我们可以假设观众一旦消费，商区的赢利率即为  $\mu$ 。这样，我们表示出了商区  $i$  赢利的数学期望  $E_i$

$$E_i = \mu A \lambda_i e \left[ 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{MSj}) \cdot \prod_{k=1}^{N_i} (1 - p_{msk}) \right] \cdot t$$

## ● 商区满足购物需求的约束

人购物需求满足衡量原则：

在一个商区内如果各 MS 的最大承载人流量之和大于此商区流量，并留有 20 % 的裕量时，我们称此商区满足购物需求，即满足购物需求条件：

$$\frac{N_i \phi_M + n_i \phi_m}{\lambda_i A_m} > 120\%$$

## ● 商区的均衡

定义MS位置分布均衡率：

$$\alpha_0 = \frac{\max_{i,j} [C_i - C_j]}{\max [C_k]}$$

其中  $C_i$  为第  $i$  个商区的总投资， $i = 1, 2, 3, \dots, 20$

定义MS规模类型分布均衡率：

$$\alpha_1 = \frac{|N_i C_M - n_i C_m|}{N_i C_M + n_i C_m}$$

对于均衡性的问题主要考虑MS位置分布与类型分布两方面的因素，我们分别定义位

置分布均衡率与规模分布均衡率来衡量，给出最大容许均衡  $\bar{\alpha}_0$  和  $\bar{\alpha}_1$ ，其中

$0 \leq \alpha_0 \leq 1, 0 \leq \alpha_1 \leq 1$ ，两种均衡率越小，均衡性越好。

综上所述，我们以赢利的数学期望为目标，各商区每类MS个数为决策变量，满足需求以及均衡为约束条件. 建立商区规划模型如下：

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_{i=1}^{20} \mu A \lambda_i e \left[ 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{MSj}) \cdot \prod_{k=1}^{N_i} (1 - p_{msk}) \right] \cdot t - \sum_{j=1}^{n_i} C_{mj} - \sum_{k=1}^{N_k} C_{Mk} \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \frac{N_i \phi_M + n_i \phi_m}{\lambda_i A} > 120\% \\ 0 \leq \frac{\max_{i,j} [C_i - C_j]}{\max[C_k]} \leq \bar{\alpha}_{0res} \dots\dots (1) \\ 0 \leq \frac{|N_i C_M - n_i C_m|}{N_i C_M + n_i C_m} \leq \bar{\alpha}_{1res} \dots\dots (2) \\ N_i, n_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}
 \end{aligned}$$

## 2. 模型求解及结果分析

### ● MS 的参数确定：

我们在衡量 MS 时引出了最大承载人流量  $\phi_M$ 、吸引顾客购物概率  $P_{MS}$  和投资总成本  $C_M$  三个参数，用最大承载人流量  $\phi_m$  来衡量 MS 的规模。

#### 1. $\phi_M$ 和 $\phi_m$ 的确定：

假定大规模 MS 的最大承载人流量  $\phi_M$  是最小承载人流量  $\phi_m$  的 3 倍，根据第二问中计算的人流量情况得到最大商区人流量和最小商区人流量，选取的大规模商区的承载人流量应小于最大商区人流量，小规模商区承载人流量应小于最小商区人流量，在各商区满足观众需求的基础上，将商区承载人流量取整，即  $\phi_M = 3$ ， $\phi_m = 1$ （单位：万人）。

#### 2. $C_M$ 和 $C_m$ 的确定：

其中，投资总成本与最大承载人流量为线性关系，即： $C_M = k\phi_M$ 。根据网上搜索的资料，某一同类零售店的 10 万元的商区日客流量达 2 万人次，可求得  $k=5$ 。因为  $\phi_M = 3$ ， $\phi_m = 1$ ，所以取  $C_M = 15$ ， $C_m = 5$ 。

### 3. $p_{MS}, p_{ms}$ 的确定：

我们考虑  $P_{MS}$  参数的合理性，根据第一问中的消费档次的调查，可得到消费额的数学期望  $e = \sum_{i=1}^6 Ex_i \times Pe_i$ ，其中  $Ex_i$  为第  $i$  档次平局消费额， $Pe_i$  为此档次的消费概率， $e = 201.48$  元。我们选择某典型商区来确定参数  $p_{MS}, p_{ms}$ ，在区域  $[0,1]$  内搜索  $p_{MS}, p_{ms}$  的值，假设此典型只有大型 MS 或小规模 MS 时，使当这一商区全部为大规模 MS 或小规模 MS 时最大利润相近，即  $\frac{|E_M - E_m|}{E_M} < 1\%$ ，且取利润最大时的  $N, n$  满足  $0.2 < \frac{N}{n} < 5$ ，得到合适的  $p_{MS}, p_{ms}$  的值， $p_{MS} = 0.488$ ， $p_{ms} = 0.2$ 。得到分别考虑大规模 MS 和小规模 MS 时商区利润与 MS 数量  $N$  的关系，如图 11：

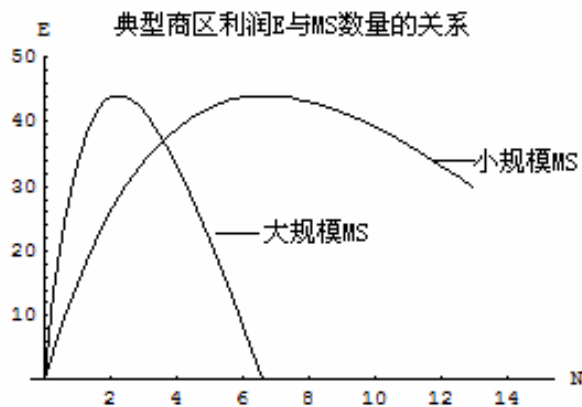


图 11：分别考虑大规模 MS 和小规模 MS 时  
利润 E 与 MS 数量的关系图

在这一典型商区内，我们用上文取定的参数，得到既有小规模 MS 又有大规模 MS 时，利润 E 与 MS 数量  $N, n$  的关系，见图 12：

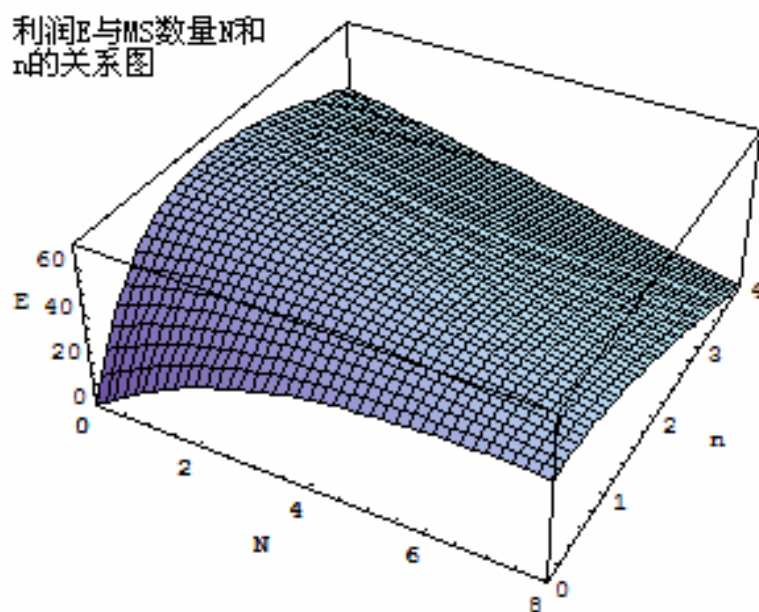


图 12：典型商区利润 E 与 MS 数量 N , n 的关系

大小规模 MS 参数见下表 8

表 8.大小规模 MS 的参数

	最大承载人流量 (万人)	投资总成本 (万元)	购物吸引力
大规模 MS	3	15	0.800
小规模 MS	1	5	0.488

### ● 最佳 N,n 值求解

不考虑均衡的约束条件时，搜索的时间复杂度大大降低，因此我们先忽略均衡的约束，用 Matlab6.5 编程搜索出最优的 MS 规划策略见表 9：



表 9.最优 MS 规划策略

商区	人流量	离散 N 最佳值	离散 n 最佳值	利润 E (万元)
A1	6.789944%	2	2	41.7286
A2	4.478694%	1	3	18.0478
A3	5.378604%	2	1	26.7958
A4	6.278513%	2	2	36.18
A5	7.178421%	2	3	46.0294
A6	13.68123%	3	7	124.438
A7	7.178421%	2	3	46.0294
A8	6.278513%	2	2	36.18
A9	5.378604%	1	4	26.7958
A10	4.478694%	1	3	18.0478
B1	2.56769%	0	4	3.22427
B2	2.244202%	0	3	1.62213
B3	4.94668%	1	4	22.5037
B4	2.244202%	0	3	1.62213
B5	2.56769%	0	4	3.22427
B6	7.501174%	2	3	49.6528
C1	1.977115%	0	3	0.647355
C2	2.677212%	0	4	3.85231
C3	1.977115%	0	3	0.647355
C4	4.197278%	1	3	15.4833

总赢利：522.7522 万元

$$\alpha_0 = \frac{\max_{i,j}[C_i - C_j]}{\max[C_k]} = 81.25\% , \quad \alpha_1 = \frac{|N_i C_M - n_i C_m|}{N_i C_M + n_i C_m} = 1.538\%$$

$$\text{容量人流比: } \frac{N_i \phi_M + n_i \phi_m}{\lambda_i A} = 130\%$$

$\alpha_0$  过大，位置分布不均匀，根据此表绘制出图 13。

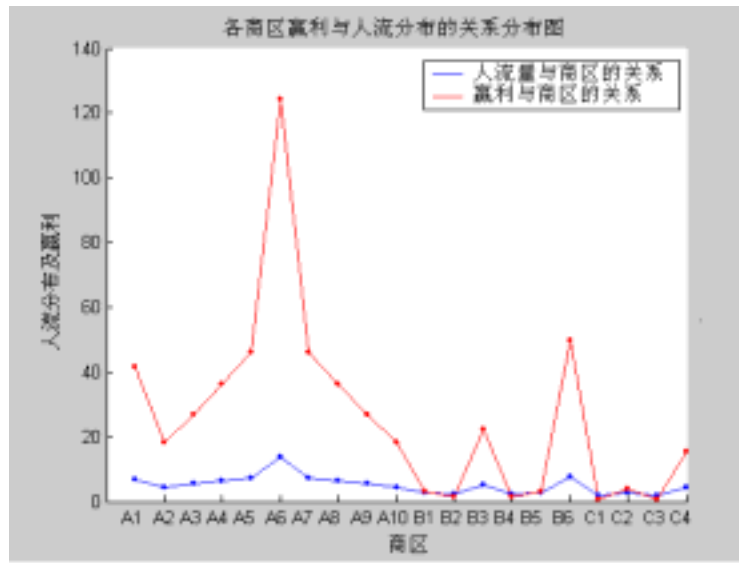
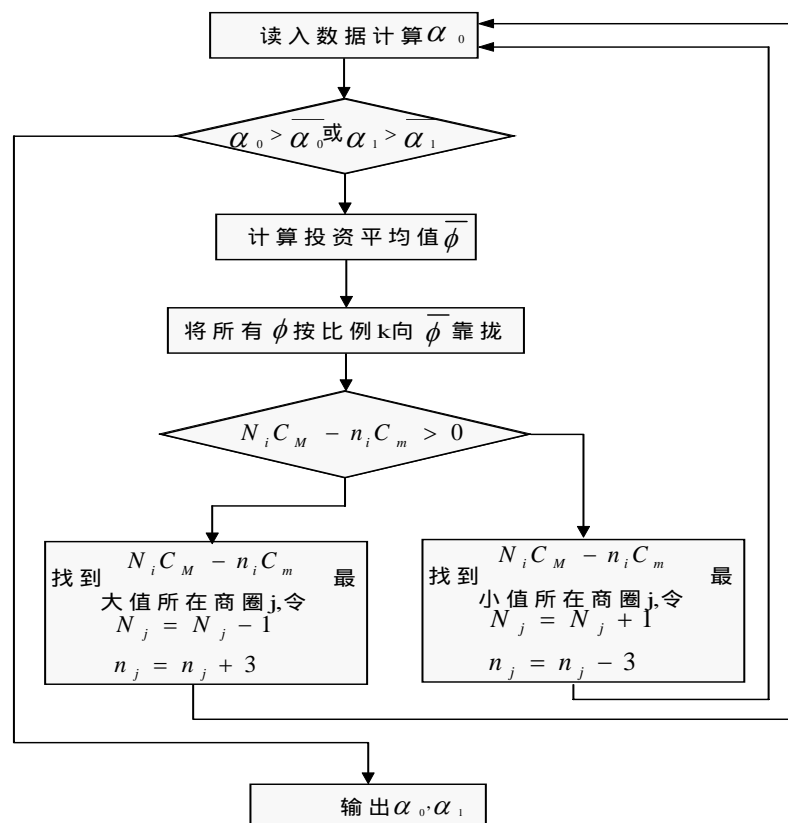


图 13. 20 个商区赢利与人流分布的关系图

上图反映人流量与赢利的非线性关系， $\frac{\Delta E}{\Delta A}$  随 A 的增加单调递增为下凹函数。

● 均衡性调整的算法：

因为以上的MS网点的设计方案并未考虑均衡性，对于不满足最大容许均衡度的情况给出调整方案流程图：



均匀调整后，最佳 N，n 值和利润值如下表 11

表 10.均衡后的 MS 规划策略

商区	人流量	离散 N 值	离散 n 值	利润 E
A1	6.789944%	1	5	40.69314
A2	4.478694%	1	3	17.19013
A3	5.378604%	1	4	25.69898
A4	6.278513%	1	5	34.61519
A5	7.178421%	2	3	43.74948
A6	13.68123%	3	5	116.7756
A7	7.178421%	2	3	43.74948
A8	6.278513%	1	5	34.61519
A9	5.378604%	1	4	25.69898
A10	4.478694%	1	3	17.19013
B1	2.56769%	1	2	-0.3483
B2	2.244202%	1	1	-1.07933
B3	4.94668%	1	4	20.8246
B4	2.244202%	1	1	-1.07933
B5	2.56769%	1	2	-0.3483
B6	7.501174%	2	3	47.7398
C1	1.977115%	1	1	-3.33112
C2	2.677212%	1	2	0.703188
C3	1.977115%	1	1	-3.33112
C4	4.197278%	1	3	14.22497

根据上表得到均衡前后赢利数学期望的关系图 14

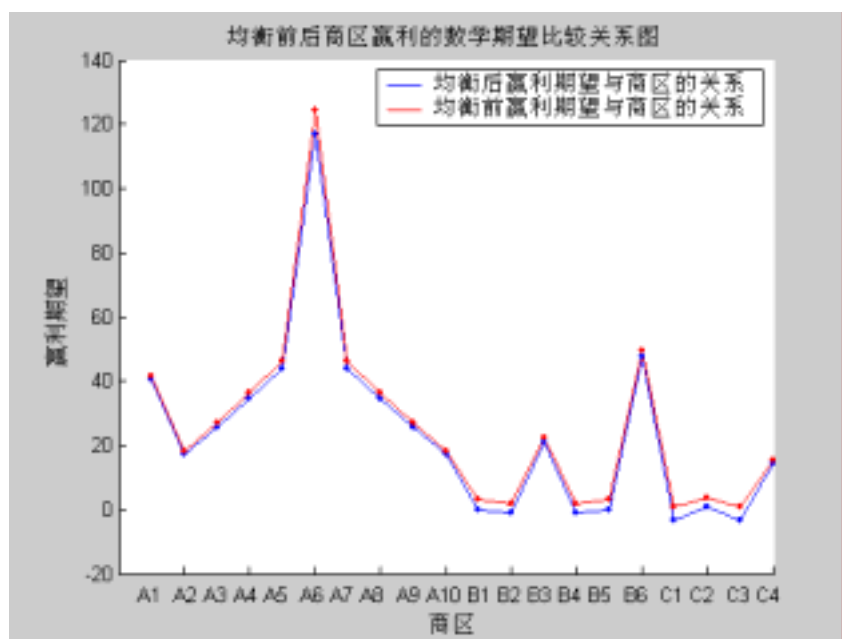


图 14 均衡前后赢利数学期望的关系图

由上图发现，经过均衡后各点利润有所下降，最高点和最低点变化较大，中间处几乎不变。

**总赢利：473.9514 万元**

$$\alpha_0 = \frac{\max_{i,j}[C_i - C_j]}{\max[C_k]} = 71.4\% , \quad \alpha_1 = \frac{|N_i C_M - n_i C_m|}{N_i C_M + n_i C_m} = 8.333\%$$

$$\text{容量人流比: } \frac{N_i \phi_M + n_i \phi_m}{\lambda_i A} = 135\%$$

满足  $\alpha_0 < 75\%, \alpha_1 < 10\%$

## 问题 4 的回答

我们模型建立的核心是引入了购买概率来度量观众的消费心里，即是购买欲望。

推出某个商区内的购买概率为： $p_A = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_{MSj})$ ，这个非线性关系有明确的实际意义：

义：

- 1) 反映同一商区内 MS 的规模效应，即是随着 MS 个数的增多，商区的吸引力会增大。
- 2) 反映同一商区内 MS 的竞争关系，由条件概率的推导可知，一个 MS 的加入会使商区内其他 MS 的吸引观众购买的概率下降。因此多个 MS 在商区内叠加呈非线性的累加效应。
- 3) 有了商区吸引观众购物的概率，我们可以准确的推导出目标函数：商区赢利的数学期望。

**结果的合理性分析**

- 1) 均衡性与最大赢利 E 的关系：

均衡性与最大赢利呈现出相互制约的关系，见上图 14,在均衡性调整后每个商区 E 均小幅下降。最大赢利 E 随均衡性要求的提高而降低，甚至出现盈利为负值的情况，即此商区的设立的根多考虑的是服务观众，在此均衡性体现了“普遍服务”的概念，因为奥运的 SM 的设计要体现奥运综合效应。

- 2) 赢利 E 与人流量的关系：

结果中得到赢利与人流量的非线性规律，体现了假设中的“规模效应”，与实际相符，即在人流量总数相等的情况下，消费人群越集中，赢利额越高。

- 3) 适应性的考虑：

结果求出的容量人流比为 135%。此值大于 1，以适应每日人流量的随机波动，因为每日的人流量与体育赛事的精彩程度、天气情况等因素有关。

## 【灵敏度分析】

### 1) 购物吸引力

购物吸引力对利润和 N 值得影响可由下图 15 得到：

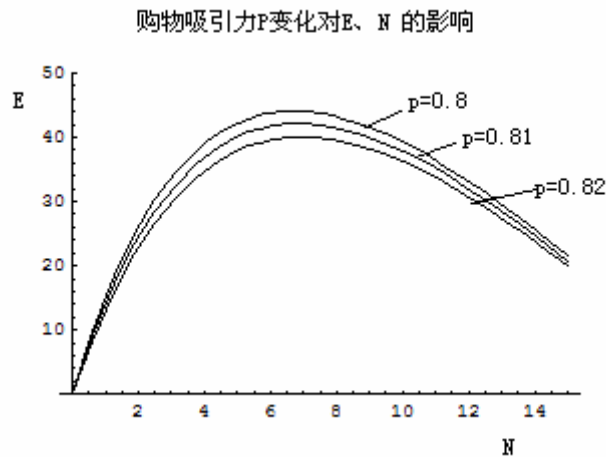


图 15 购物吸引力对利润和 MS 数量的影响

经过计算  $\frac{\Delta E}{\Delta P} = 19.38$  ,  $\frac{\Delta N}{\Delta P} = 1.226$  , 可见 P 对 E 的影响较大, 对 N 的影响

较小, 与实际情况相符。在考虑两种规模 MS 的数量 N, n 时, P 对 N, n 的分配影响极为敏感, 非常小的 P 的波动将导致两种规模 MS 的分配上偏向一方。

### 2) 承载人流量 $\phi$

$\phi$  承载人流量对利润 E 和 N 值得影响由图 16 得到：

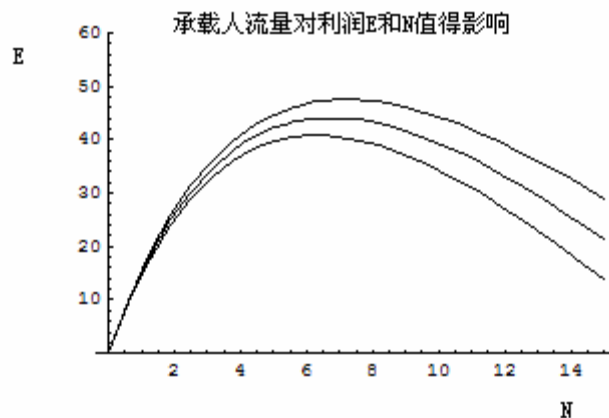


图 16 承载人流量对利润 E 和 N 值得影响

经计算,  $\frac{\partial E}{\partial \phi} = 4.936$  ,  $\frac{\partial N}{\partial \phi} = 0.8542$  , 可见  $\phi$  对 E 和 N 的影响都比较大。

## 【稳定性分析】

我们通过随机模拟来检验模型的稳定性

对个体考虑，他的行为是随机的，但是符合一定的概率，由问题一分析的图形 2 可知，不同地点到达的人群的消费观和饮食观是极其相似的，不存在不同出行方式的人的消费差别和饮食差别。

所以，任何出行方式的人都是等同的独立个体，我们根据问题一的在出行、用餐、购物等方面的规律生成个体的随机行为：

设：

$$P_{way}(n) = \begin{cases} 0.1674, n=1 \\ 0.1725, n=2 \\ 0.1896, n=3 \\ 0.0904, n=4 \\ 0.1892, n=5 \\ 0.1909, n=6 \end{cases}; P_{eat}(n) = \begin{cases} 0.2247, n=1 \\ 0.5252, n=2 \\ 0.2501, n=3 \end{cases}; P_{cost}(n) = \begin{cases} 0.1943, n=1 \\ 0.2480, n=2 \\ 0.4404, n=3 \\ 0.0927, n=4 \\ 0.0148, n=5 \\ 0.0097, n=6 \end{cases}$$

$P_{way}(n)$  为选择出行方式的概率；

$P_{eat}(n)$  为选择用餐方式的概率；

$P_{cost}(n)$  为选择不同消费档次的概率；

**模拟步骤：**

子程序一：

初始化随机行为的人群，以概率生成三个不同的数组：

$[H_{way}]_{1 \times M} = [W_{11} \quad W_{12} \quad \cdots \quad W_{1(M-1)} \quad W_{1M}]$ ；其中  $W_{li}$  为以  $P_{way}(n)$  的概率生成的样本值；

$[H_{eat}]_{1 \times M} = [E_{11} \quad E_{12} \quad \cdots \quad E_{1(M-1)} \quad E_{1M}]$ ；其中  $E_{li}$  为以  $P_{eat}(n)$  的概率生成的样本值；

$[H_{cost}]_{1 \times M} = [C_{11} \quad C_{12} \quad \cdots \quad C_{1(M-1)} \quad C_{1M}]$ ；其中  $C_{li}$  为以  $P_{cost}(n)$  的概率生成的样本值；

构造人群的随机行为矩阵： $H = \begin{bmatrix} H_{way} \\ H_{eat} \\ H_{cost} \end{bmatrix}_{3 \times M}$  :

### 确定商区的人流量分布

针对  $H$  矩阵中的每个列向量就是行为个体的随机选择， $H_j = [W_{1j} \quad E_{1j} \quad C_{1j}]'$ ，根据其元素值按照：

(1) 最近路径原则 (2) 出行起始点位置 (3) 目标位置。

由  $W_{1j}$  和  $E_{1j}$  可以确定此个体的路径  $Path_j$  也即可以确定了个体通过的商区个数，假设为  $N_{path}$ 。如果同时存在两条或两条以上最短路径的时候，我们以等概率选取。每经过一个商区，其人按照其消费档次的特征属性和在此商区的消费概率进行消费。也既计算  $\sum_{i=1}^{n_{path}} C_{1j} P_i$ ， $P_i$  为  $Path_j$  所经过的商区的促使消费者消费的概率。叠加  $M$  个随机个体的在每个商区的消费，得到总的收入  $S_t$ 。

子程序二：

以  $T = 20$  天进行模拟整个奥运过程，循环调用子程序一。

由问题三求解出的总的大小  $MS$  的个数  $N, n$ ，计算  $\sum_{t=1}^T S_t - \sum_{i=1}^n c_i - \sum_{i=1}^N C_i$  得到净赢利。

主程序：

随机模拟 1000 次奥运过程，得到解的稳定性曲线如下：

其中，中间的直线为 3 问求解的赢利基准线，上下的波动为随机情况与基准的偏差值。

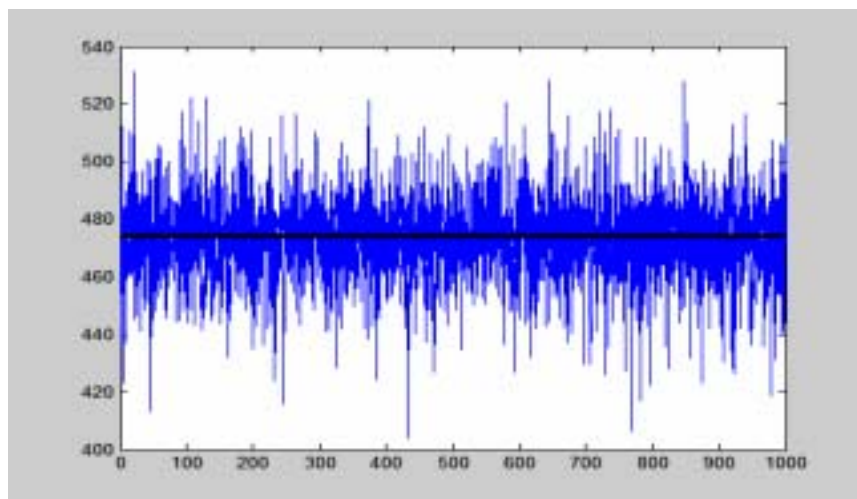


图 17 模型结果稳定性分析

从图中可以看出：

最大正偏差为：34.3779 万；

最大负偏差为：-28.2227 万

说明该模型对随机人群的不同消费需求和出行及餐饮特点，适应性很好，模型具备很强的适应性和稳定性。

## 【参考文献】

- [1] 杨丽君等，基于GIS 的零售业商圈分析，《遥感技术与应用》，2003
- [2] 王厚东，商圈理论分析，《山西财经大学学报(高等教育版)》，2002
- [3] 张志勇等，《精通 Matlab6.5》，北京航空航天大学出版社，2003
- [4] 李涛等，《Matlab 工具箱应用指南—应用数学篇》，2000
- [5] 洪维恩等，《数学运算大师 Mathematica4》，2002

## 【附录 1】

表 11.场馆 - > 饮食处的路径

	西餐	中餐	商场
A1 正对看台	A1,A2,A3,A4,A5,A6 或者 A1,A10,A9,A8,A7,A6	A1	A1,A2,A3,A4,A5,A6 或者 A1,A10,A9,A8,A7,A6
A2 正对看台	A2,A3,A4,A5,A6	A1,A2	A2,A3,A4,A5,A6
A3 正对看台	A3,A4,A5,A6	A1,A2,A3	A3,A4,A5,A6
A4 正对看台	A4,A5,A6	A1,A2,A3,A4	A4,A5,A6
A5 正对看台	A5,A6	A1,A2,A3,A4,A5	A5,A6
A6 正对看台	A6	A1,A2,A3,A4,A5,A6 或者 A6,A7,A8,A9,A10,A1	A6
A7 正对看台	A6,A7	A1,A10,A9,A8,A7	A6,A7
A8 正对看台	A6,A7,A8	A1,A10,A9,A8	A6,A7,A8
A9 正对看台	A6,A7,A8,A9	A1,A10,A9	A6,A7,A8,A9
A10 正对看台	A6,A7,A8,A9,A10	A1,A10	A6,A7,A8,A9,A10



B1 正对看台	B1,B6	B1,B2,B3	B1,B6
B2 正对看台	B2,B1,B6	B2,B3	B2,B1,B6
B3 正对看台	B3,B2,B1,B6 或者 B3,B4,B5,B6	B3	B3,B2,B1,B6 或者 B3,B4,B5,B6
B4 正对看台	B4,B5,B6	B3,B4	B4,B5,B6
B5 正对看台	B5,B6	B3,B4,B5	B5,B6
B6 正对看台	B6	B3,B4,B5,B6 或者 B3,B2,B1,B6	B6
C1 正对看台	C1,C4	C1,C2	C1,C4
C2 正对看台	C2,C3,C4 或者 C2,C1,C4	C2	C2,C3,C4 或者 C2,C1,C4
C3 正对看台	C3,C4	C3,C2	C3,C4
C4 正对看台	C4	C4,C1,C2 或者 C4,C3,C2	C4

表 12.饮食处—>车站的路径

车站（停 车场） 观众	公交（南 北）	公交（东 西）	出租	私 车	地铁（东）	地铁（西）
中餐	A1,A2,A3, A4,A5,A6 或者 A6,A7,A8, A9,A10,A1	C2,C3,C4 或者 C2,C1,C4 或者不经 过商区			A1,A2,A3,A4,A5,A6 或者 A6,A7,A8, A9,A10,A1	B3,B4,B5, B6 或者 B3,B2,B1, B6
西餐			A1,A2,A3, A4,A5,A6 或者 A6,A7,A8, A9,A10,A1			
商场（餐 饮）			B3,B4,B5, B6 或者 B3,B2,B1, B6			