

折叠结构几何非线性分析

陈向阳¹, 关富玲²

(1. 浙江省交通设计院, 浙江 杭州 310007; 2. 浙江大学 土木工程系, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 本文提出了一种推导折叠结构宏单元刚度矩阵的新方法, 即在所假设普通单元位移模式的基础上直接引入位移约束条件, 得到宏单元的形函数矩阵, 进而给出宏单元的力与位移间关系。利用该思路, 文中简捷地推导出剪式单元三节点梁大位移小变形的几何非线性切线刚度矩阵, 并给出了线性刚度矩阵的显式。算例表明, 分析折叠结构承载能力和自稳定结构的展开或收纳过程, 考虑几何非线性的影响是必要的。

关键词: 折叠结构; 几何非线性

中图分类号: TU31

文献标识码: A

1 引 言

人类运用折叠结构已有悠久的历史。据史料记载, 早在春秋时期, 中国人就发明了一种典型的折叠结构——雨伞。60 年代初, 西班牙建筑师 E. P. Pinero 成功地将折叠结构的概念应用于“可移动剧院”的设计。近 20 年来, 折叠结构在航空航天领域的应用取得了巨大进展, 促使国内外的学者对折叠结构进行广泛而深入的研究。由于可折叠的需要, 折叠结构往往具有一些特殊的约束, 它的单元难以用传统的梁单元处理, 必须把两个或多个普通单元组合成一个宏单元来考虑。文献(1)中, 作者首次推导了剪式单元三节点梁的刚度矩阵。但折叠结构在成型过程和承载时, 即使小变形也经历大位移的过程, 具有很强的几何非线性, 因而对折叠结构进行几何非线性分析是很有必要的。

本文提出了一种推导宏单元刚度矩阵的新方法, 即在所假设普通单元位移模式的基础上直接引入折叠结构宏单元的特殊约束条件, 然后利用应变-位移关系和应变-应力关系推导出宏单元的刚度矩阵。文中简捷地推导了剪式铰三节点梁宏单元的大位移小变形几何非线性切线刚度矩阵, 并给出了线性刚度矩阵的显式。文中两个典型算例说明了几何非线性对折叠结构的影响是不可忽略的。文献(1)的推导主要利用矩阵凝聚法, 本文的方法实际上是结构力学中矩阵凝聚法的力学本质, 矩阵凝聚法 n 个自由度外载为零的条件在本文中体现为宏单元的位移假设必须遵循相应的 n 个位移限制条件。

2 剪式单元的几何非线性切线刚度矩阵

剪式单元(Pantograph)是现代空间折叠结构中最常见的基本单元, 由两根共面的直梁中间用销钉连接而成, 剪式单元相互之间采用铰接。图 1 是由四个剪式单元构成的一维模型, 能够方便伸展和收缩, 其中任两个端点固定后成为结构。这种结构的计算比较特殊, 采用传统的两节点单元很难表达其正确的力

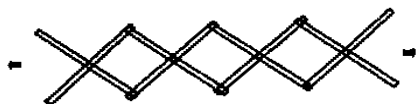


图 1 一维剪式单元结构

学模型, 必须采用三节点宏单元。图 2 是剪式单元中的一根梁, 局部坐标系的 x 轴沿梁轴向, y 轴和 z 轴与横截面形心主轴重合。为了推导方便, 假设为等截面梁, 截面积为 A , 弹性模量为 E , 截面对 z 轴和 y 轴的惯性矩分别为 I_z 和 I_y 。梁长 l , 其中 ij 部分长 a , jk 部分长 b 。宏单元含两个普通梁单元, 有三个节点, 且每个节点均只受节点力, 不能承受外加弯矩。荷载向量记为

$$P^{(e)} = \{p_{ix} \ p_{iy} \ p_{iz} \ p_{jx} \ p_{jy} \ p_{jz} \ p_{kx} \ p_{ky} \ p_{kz}\}^T \quad (1)$$

图 2 剪式铰三节点单元

相应地, 宏单元有 9 个独立的节点位移, 位移向量记作

$$\{\delta\}^{(e)} = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ v_j \ w_j \ u_k \ v_k \ w_k\}^T \quad (2)$$

下面分析宏单元的形函数。假设轴向位移呈分段线性变化, 即

$$u(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x) H_{0a}(x) + (\beta_1 + \beta_2(l-x)) H_{al}(x) \quad (3)$$

式中 $H_{0a}(x) = H_a(x) - H_0(x)$, $H_{al}(x) = H_l(x) - H_a(x)$, $H_{t_0}(t)$ 是 Heaviside 函数, 其定义如下:

$$H_{t_0}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

利用下述位移约束条件:

$$u(x) \Big|_{x=0} = u_i; \quad u(x) \Big|_{x=a-0} = u(x) \Big|_{x=a+0} = u_j; \quad u(x) \Big|_{x=l} = u_k$$

可以把待定系数 α_1 , α_2 , β_1 和 β_2 用节点位移表示。根据材料力学知识, xy 平面内弯曲位移模式取分段的三次函数, 即

$$V(x) = (\alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3) H_{0a}(x) + [\beta_3 + \beta_4(l-x) + \beta_5(l-x)^2 + \beta_6(l-x)^3] H_{al}(x) \quad (4)$$

位移约束条件有

$$V(x) \Big|_{x=0} = v_i; \quad V(x) \Big|_{x=a-0} = V(x) \Big|_{x=a+0} = v_j; \quad V(x) \Big|_{x=l} = v_k$$

节点弯矩约束条件有

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0$$

在 $x = a$ 处, 由于没有外加弯矩, 故左右两边的弯矩应相同, 且相对转角为零。

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \Big|_{x=a-0} = \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \Big|_{x=a+0}; \quad \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=a-0} = \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=a+0}$$

利用上述约束条件, 式(4)的待定系数可以用节点位移表示。 xz 平面内弯曲位移也可作类似处理, 显然, 刚度矩阵中没有和扭矩相关的项。整理得到宏单元的位移插入函数

$$f^{(e)} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_u(x)^{(1)} \\ H_v(x)^{(1)} \\ H_w(x)^{(1)} \end{Bmatrix} [G^{(1)}] H_{0a}(x) + \begin{Bmatrix} H_u(x)^{(2)} \\ H_v(x)^{(2)} \\ H_w(x)^{(2)} \end{Bmatrix} [G^{(2)}] H_{al}(x) \{\delta\}^{(e)} \quad (5)$$

式中 $H_u(x)^{(1)} = [1\ 0\ 0\ x\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$, $H_v(x)^{(1)} = [0\ 1\ 0\ 0\ x\ 0\ 0\ x^3\ 0]$,
 $H_w(x)^{(1)} = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ x\ 0\ 0\ x^3]$, $H_u(x)^{(2)} = [1\ 0\ 0\ l-x\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$,
 $H_v(x)^{(2)} = [0\ 1\ 0\ 0\ l-x\ 0\ 0\ (l-x)^3\ 0]$,
 $H_w(x)^{(2)} = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ l-x\ 0\ 0\ (l-x)^3]$,

$$[G^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3a+2b}{2al} & 0 & 0 & \frac{a+2b}{2ab} & 0 & 0 & -\frac{a}{2bl} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3a+2b}{2al} & 0 & 0 & \frac{a+2b}{2ab} & 0 & 0 & -\frac{a}{2bl} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a^2l} & 0 & 0 & -\frac{1}{2a^2b} & 0 & 0 & \frac{1}{2abl} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2a^2l} & 0 & 0 & -\frac{1}{2a^2b} & 0 & 0 & \frac{1}{2abl} \end{bmatrix}$$
$$[G^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2al} & 0 & 0 & \frac{2a+b}{2ab} & 0 & 0 & -\frac{2a+3b}{2bl} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2al} & 0 & 0 & \frac{2a+b}{2ab} & 0 & 0 & -\frac{2a+3b}{2bl} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2abl} & 0 & 0 & -\frac{1}{2ab^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2b^2l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2abl} & 0 & 0 & -\frac{1}{2ab^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2b^2l} \end{bmatrix}$$

根据伯努利梁理论, 宏单元的应变包括拉压应变和弯曲应变^[2], 略去剪切应变, 有

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -y \frac{d^2v}{dx^2} \\ -z \frac{d^2w}{dx^2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

式中, 第一项表示线性项, 第二项就是二阶近似的非线性项。把插入函数代入式(6)

$$d\{\epsilon\}^{(e)} = ([B_0] + [B_L]) d\{\delta\}^{(e)} \quad (7)$$

$$[B_0] = [B_{0a}]H_{0a}(x) + [B_{0b}]H_{0b}(x) \quad (8)$$

$$[B_L] = [B_{La}]H_{La}(x) + [B_{Lb}]H_{Lb}(x) \quad (9)$$

其中 $[B_{0a}] = \begin{bmatrix} H_u(x)^{(1)} \\ -yH_v(x)^{(1)} \\ -zH_w(x)^{(1)} \end{bmatrix} [G^{(1)}], [B_{0b}] = \begin{bmatrix} H_u(x)^{(2)} \\ -yH_v(x)^{(2)} \\ -zH_w(x)^{(2)} \end{bmatrix} [G^{(2)}],$

$$[B_{La}] = \begin{bmatrix} H_v(x)^{(1)}G^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\delta\}^{(e)}[H_v(x)^{(1)}][G^{(1)}] + \begin{bmatrix} H_w(x)^{(1)}G^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\delta\}^{(e)}[H_w(x)^{(1)}][G^{(1)}],$$

$$[B_{Lb}] = \begin{bmatrix} H_v(x)^{(2)}G^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\delta\}^{(e)}[H_v(x)^{(2)}][G^{(2)}] + \begin{bmatrix} H_w(x)^{(2)}G^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\delta\}^{(e)}[H_w(x)^{(2)}][G^{(2)}],$$

利用式(8)和(9)得到剪式铰三节点梁在局部坐标系下大位移小变形几何非线性刚度矩阵,整理后可得

$$[K_T] = [K^0] + [K^L] + [K^\sigma] \quad (10)$$

其中 K^0 是剪式梁线性刚度矩阵

$$[K^0] = \begin{bmatrix} k_{11}^0 & & & & & & & \\ 0 & k_{22}^0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & k_{33}^0 & & & & \\ k_{41}^0 & 0 & 0 & k_{44}^0 & & & & \\ 0 & k_{52}^0 & 0 & 0 & k_{55}^0 & & & \\ 0 & 0 & k_{63}^0 & 0 & 0 & k_{66}^0 & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{74}^0 & 0 & 0 & k_{77}^0 & \\ 0 & k_{82}^0 & 0 & 0 & k_{85}^0 & 0 & 0 & k_{88}^0 \\ 0 & 0 & k_{93}^0 & 0 & 0 & k_{96}^0 & 0 & 0 & k_{99}^0 \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (11)$$

其中, $k_{11}^0 = -k_{14}^0 = \frac{EA}{a}, k_{22}^0 = \frac{3EI_z}{a^2l}, k_{52}^0 = -\frac{3EI_z}{a^2b}, k_{82}^0 = \frac{3EI_z}{abl}, k_{33}^0 = \frac{3EI_y}{a^2l}, k_{63}^0 = -\frac{3EI_y}{a^2b}, k_{93}^0 = \frac{3EI_y}{abl}, k_{44}^0 = \frac{EAl}{ab}, k_{74}^0 = -\frac{EA}{b}, k_{55}^0 = \frac{3EI_zl}{a^2b^2}, k_{85}^0 = -\frac{3EI_z}{ab^2}, k_{66}^0 = \frac{3EI_yl}{a^2b^2}, k_{96}^0 = -\frac{3EI_y}{ab^2}, k_{77}^0 = \frac{EA}{b},$

$k_{88}^0 = \frac{3EI_z}{b^2l}, k_{99}^0 = \frac{3EI_y}{b^2l}$. K^L 是宏单元初始位移刚度矩阵,也是对称矩阵。

$$[K^L] = \int_0^a ([B_{0a}]^T[D][B_{La}] + [B_{La}]^T[D][B_{0a}] + [B_{La}]^T[D][B_{La}]) dx + \int_0^l ([B_{0b}]^T[D][B_{Lb}] + [B_{Lb}]^T[D][B_{0b}] + [B_{Lb}]^T[D][B_{Lb}]) dx \quad (12)$$

K^σ 是宏单元的初应力刚度矩阵

$$[K^\sigma] = N^{(1)} \int_0^a ((H_v(x)^{(1)}G^{(1)})^T [H_v(x)^{(1)}][G^{(1)}] + (H_w(x)^{(1)}G^{(1)})^T [H_w(x)^{(1)}][G^{(1)}]) dx +$$

$$N^{(2)} \int_a^l \left((H_v(x))^{(2)} G^{(2)} \right)^T [H_v(x))^{(2)}] [G]^{(2)} + \left(H_w(x))^{(2)} G^{(2)} \right)^T [H_w(x))^{(2)}] [G]^{(2)} dx \quad (13)$$

$N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 分别是梁 ij 和 jk 的估计轴力。可见, 切线刚度矩阵考虑了轴向力对横向位移的影响。 K^L 和 K^σ 的显式可以利用公式推导软件 Mathematics 方便地得到, 但其表达式很复杂。

3 算 例

例 1 图 3 所示是边长为 16m, 厚 0.6mm 的折叠平板网架, 上弦节点简支, 剪式单元梁为 $\Phi 75 \times 4.0\text{mm}$ 钢管, 上弦节点受 0.1kN/m^2 竖直向下均布荷载, 图 4 给出上弦节点竖向位移的线性 and 几何非线性数值结果的比较, 节点下边数值是线性位移。计算表明, 此时不考虑几何非线性引起大约 30% 的误差, 因而分析折叠结构时, 考虑非线性的影响是必要的。说明折叠结构具有可折叠的优点, 但其力学性能很不理想, 一般地, 需要在下弦节点间布置一些索来提高结构的承载能力。

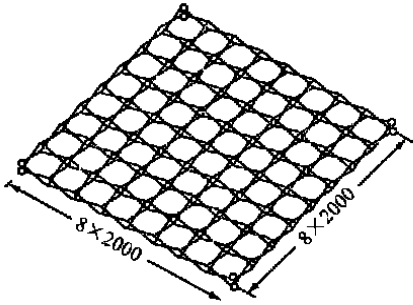


图 3 折叠平板网架

主

45.24	82.66	106.89	115.22
58.34	106.85	138.48	149.42
42.08	76.83	99.27	106.98
54.17	99.14	128.39	138.48
32.80	59.68	76.90	82.81
42.05	76.74	99.14	106.86
18.15	32.84	42.16	45.35
23.16	42.05	54.17	58.34

图 4 节点竖向位移

例 2 自稳定网架的展开过程分析涉及高度几何非线性, 如果仅仅采用线性分析, 会得到很不合理的结果。图 5 所示是一种常见的正方形自稳定单元, 正中下弦点 B 固定, 上弦点 A 受一竖向力。根据建筑设计的要求选定单元的长度 CE 和厚度 CD 后, 特征高度 H 是唯一的结构参数, H 的选取将敏感地影响到单元的展开过程和承载能力。图 6 是自稳定单元的刚度(点 A 产生一单位位移所需的力) 和高度 H 的关系曲线(材料 $E = 1.0 \times 10^{11}\text{Pa}$, 杆件 $\Phi = 20\text{mm}$), 可以看出, 自稳定单元的刚度随着 H 的减小而急剧地减小。图 7 是收纳过程和承载能力分析的线性和非线性数值结果比较($H = 10\text{mm}$), 当收纳力为 20N 时, 考虑非线性节点位移比线性结果小 12.38% 。因为展开过程有跳跃现象, 要分析展开的全过程, 还要用弧长法进行跟踪。

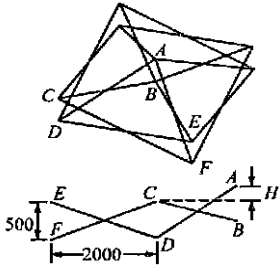


图 5 自稳定结构单元

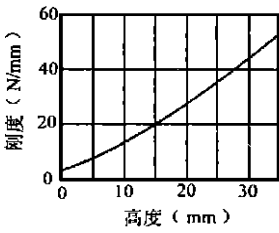


图 6 自稳定单元刚度

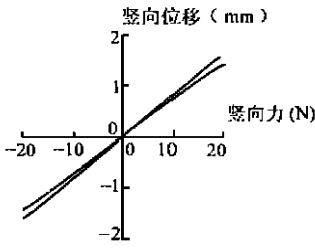


图 7 线性和非线性结果比较

4 结 语

1. 本文提出了一种推导宏单元刚度矩阵的新方法,并推导了剪式单元三节点梁宏单元大位移小变形几何非线性切线刚度矩阵。
2. 对于具有特殊约束的结构,可以先按一般方法选取位移模式,然后引入结构的约束条件,得到单元形函数矩阵,进而推导得到结构的刚度矩阵。
3. 可展结构的承载能力分析和展开过程的展开分析和控制,考虑大位移几何非线性的影响是必要的。

参考文献:

- [1] Computer W Shan. Analysis of foldable structures[J]. *Computers & Structures*, 1992, **42**: 903 ~912.
- [2] 聶江,何福保,谢贻权,徐 兴. 弹性和塑性力学中的有限单元法(第2版)[M]. 北京:机械工业出版社,1989.

Nonlinear formulation for foldable structures

CHEN Xiang-yang, GU AN Fu-ling

(Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Foldable structures are increasingly attracting to engineers. A new technique to formulate stiffness matrix of macro-elements for foldable structures is developed in this paper. A large-displacement geometrically nonlinear stiffness matrix formulation of uniplets of pantograph is also derived using this technique. Numerical examples show geometrical nonlinearity should not be negligible for deployable structures when analyzing load bearing capacity of deployable structures and deployment process of self-standing structures.

Key words: foldable structures; geometrically nonlinear