

1. 设  $f(x)$  在  $x=0$  附近有界, 设  $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$ , 求  $f(x)$

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax + 2x}{e^x - 1}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{e^x - \sin x - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)}, & x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 求常数  $a, b$ .

3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ a, & x = 1, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

(I) 当  $a$  满足什么条件时,  $x=1$  是  $f(x)$  的可去间断点?

(II) 当  $a$  为何值时,  $f(x)$  在  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  是连续函数?

4. 设函数  $f(x) = x^{\sin x}$ ,  $x \in (0, 1]$ , 对于其他  $x$ ,  $f(x)$  满足  $3f(x+1) - f(x) = k$ , 其中  $k$  为常数.

(I) 写出  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上的表达式;

(II) 问  $k$  为何值时,  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续.

5. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} - ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$  是连续函数, 求常数  $a, b$ .

6. 设函数  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{\tan t}{\tan x} \right)^{\frac{x}{\tan t - \tan x}}$ , 求  $f(x)$  的间断点并判断其类型.

7. 设函数  $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \frac{\ln |x+2|}{x^2 + x - 6}$ , 求  $f(x)$  的间断点并判断其类型.

8. (I) 证明: 方程  $x^n + nx = 2$  存在唯一的正实根  $a_n$  (其中  $n$  为正整数);

(II) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{-2n}$ .