带性能约束布局问题的全局优化算法

冯恩民 王锡禄 王秀梅 滕弘飞

(大连理工大学应用数学系)
(中科院现代制造CAD/CAM技术开放实验室)

摘 要 以人造卫星仪器舱布局为例,应用图论、群对集合的作用、轨道与等价关系等刻划各种布局方案的同构、等价类等内在性质,从而首次给出带有性能约束二维布局问题的一种全局优化算法.

关键词 人造卫星,布局,最优化算法,对称群,等价关系,同构.
分类号 (中图) O224; (1991MR) V474.

§1 引 言

人造卫星仪器舱布局是航天设计中极需解决的问题. 文[1,2]中构造了二、三维布局优化的数学模型,还给出了适合此类问题的启发式算法和应用实例. 一般卫星仪器舱布局的三维问题可简化为二维问题处理,文[3,4]讨论了矩形图元二维布局问题的优化模型、约束与目标函数的凸性及不干涉算法. 文[5]论述了任意连通图元可用三角形图元逼近后,可化此类布局问题为含有多个反凸约束的D. C. 规划问题. 虽然在文[6,7]中给出了关于D. C. 规划的最优性条件和算法,但因布局问题中的不干涉约束的特殊性质,还不能直接应用一般显示约束的D. C. 规划算法产生布局优化问题的下降方向,也不能判别解的最优性. 因此目前可实用的布局优化算法仍属启发式算法或人机交互式算法,且都存在以下问题:

(i) 从不同的初始点出发,可能得到相同的目标函数值,有时布局优化计算得不到任何有价值的信息,却浪费了大量计算时间.

(ii) 布局优化算法的结束准则,一般由计算机的运行时间控制,或用迭代次数(即选不同初始点的次数)控制.

收稿: 1997-03-27.
国家自然科学基金(69273036)资助项目.

由于上述原因, 已有的布局优化算法一般只能得到局部最优解, 就是得到了全局最优解, 也不能确认. 本文针对这些问题和不干涉约束的特殊性, 把布局方案的类型作为研究重点, 应用图论、群对集合的作用、同构、轨道及等价关系等讨论布局方案的基本性质. 在此基础上构造布局问题的全局优化算法, 并以人造卫星仪器舱布局为例, 说明其具体应用.

§2 布局优化问题

以人造卫星仪器舱布局为例说明布局优化问题. 设在卫星仪器舱承重板的任一基面上布 n 个矩形图元 $F_i, i\in I_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 如图1所示, 设第 i 个图元 F_i 的形心为 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^2$, 其方向为 $\boldsymbol{u}_i\in\mathbf{R}^2$, $\|\boldsymbol{u}_i\|=1$, $\boldsymbol{u}_i$ 平行于 F_i 的长边, 且 $\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{u}_i$ 之夹角不大于90°. 又设单位矢量 $\boldsymbol{v}_i\in\mathbf{R}^2$ 与 $\boldsymbol{u}_i$ 正交, 且 $\boldsymbol{u}_i$ 与 $\boldsymbol{v}_i$ 符合右手定则. 图元 F_i 的边长分别为 $2a_{i1}$ 与 $2a_{i2}$, $a_{i1}\geq a_{i2}$, 令 $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1}, a_{i2})\in\mathbf{R}^2$. 这样图元 $F_i\subset\mathbf{R}^2$ 可由 $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_i$ 唯一确定. 即

$$F_i = F(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{a}_i) = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_i + t_1\boldsymbol{u}_i + t_2\boldsymbol{v}_i : t_1\in[-a_{i1},a_{i1}], t_2\in[-a_{i2},a_{i2}]\},\ i\in I_n. \tag{1}$$

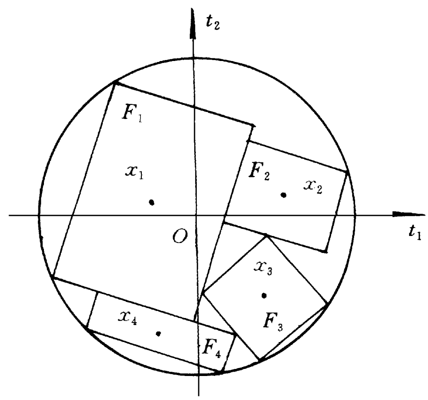

图1

设图元 F_i 的质心与形心重合, 图元 F_i 的质量为 $m_i\in\mathbf{R}_+, i\in I_n$. $\epsilon(>0)$ 为静不平衡量的允许值. 对于确定的布局问题, $\epsilon, n, \boldsymbol{a}_i, m_i, i\in I_n$ 都是已知量, 只有 $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i, i\in I_n$ 才是布局问题的优化变量.

定义1 设 $\boldsymbol{y}_i=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{u}_i)\in\mathbf{R}^4$, $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n]\in\mathbf{R}^{4n}$, $F_i, i\in I_n$, 由式(1)定义, 则称 $\boldsymbol{Y}$ 为一布局方案.

为考查布局的聚集性, 应用集值映射可定义,

$$\begin{aligned} f_{\mu_i} = f_{\mu_i}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{u}_i) &= F_\mu(F_i) \\ &= \max\{\|\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x}\in F_i\},\ i\in I_n, \end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{Y}) = \max\{f_{\mu_i} : i\in I_n\}.$$

已经证明, f 是 $\boldsymbol{Y}$ 的凸不可微函数[3, 4].

定义2 若布局方案 $\boldsymbol{Y}$ 中各图元 F_i 满足不干涉性, 即

$$\mathrm{int}(F_i)\cap\mathrm{int}(F_j)=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j\in I_n, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{int}(F_i)$ 表示集合 F_i 的内部. 则称 $\boldsymbol{Y}$ 为不干涉布局方案.

人造卫星仪器舱的静不平衡量为

$$J(\boldsymbol{Y}) = \left\|\sum_{i=1}^n m_i\boldsymbol{x}_i\right\| \tag{3}$$

因此, 以卫星仪器舱为例的布局优化问题(记为(P))可表示为:

$$(\mathrm{P})\quad \begin{aligned} \min\quad & f(\boldsymbol{Y}) \\ \text{s. t.}\quad & \mathrm{int}(F_i)\cap\mathrm{int}(F_j)=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j\in I_n \\ & \left\|\sum_{i=1}^n m_i\boldsymbol{x}_i\right\|\leq\epsilon \\ & \boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{4n}. \end{aligned} \tag{4}$$

称式(4)为静不平衡约束.

定义3 若布局方案 $\boldsymbol{Y}$ 满足不干涉和静不平衡约束(2)与(4),则称 $\boldsymbol{Y}$ 为可行布局方案.

把问题(P)的所有可行布局方案与不干涉布局方案的集合分别记为: $D=\{\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{4n}\mid \boldsymbol{Y}$ 满足(2)与(4)$\}$, $D_n=\{\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{4n}\mid \boldsymbol{Y}$ 满足(2)式$\}$, 显然 $D\subset D_n$. 若 $D\neq\varnothing$, 则称问题(P)是适定的.

定义4 设 $\boldsymbol{Y}\in D_n$, 若其图元 F_i 与 F_j 满足下列条件之一,

(i) F_i 与 F_j 有部分边重合;

(ii) F_i 的某个顶点在 F_j 的边上;

(iii) 在保持不干涉的条件下, 从 F_i 的形心 $\boldsymbol{x}_i$ 出发沿 $\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{x}_j$ 的连线作平移或旋转移动后可满足条件(i)或(ii).

则称 F_i 与 F_j 在布局方案 $\boldsymbol{Y}$ 中是相邻图元, 记为 (F_i, F_j) 或 (F_j, F_i).

§3 布局方案的图及其性质

对任一不干涉布局方案 $\boldsymbol{Y}\in D_n$, 可定义下列集合: $V=\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$, $E(\boldsymbol{Y})=\{(F_i, F_j)\mid F_i, F_j\in V, F_i$ 与 F_j 为 $\boldsymbol{Y}$ 中的相邻图元$\}$, $G(\boldsymbol{Y})=(V, E(\boldsymbol{Y}))$ 则称 V 为布局问题(P)的图元集合, 称 $E(\boldsymbol{Y})$ 为布局方案 $\boldsymbol{Y}$ 的边集, 称 $G(\boldsymbol{Y})$ 为布局方案 $\boldsymbol{Y}$ 的图. 若 $\boldsymbol{Y}\in D$, 则称 $G(\boldsymbol{Y})$ 为可行布局图, 若 $\boldsymbol{Y}\in D_n$, 则称 $G(\boldsymbol{Y})$ 为不干涉布局图. 把问题(P)的所有可行布局图与不干涉布局图的集合分别记为:

$$G=\{G(\boldsymbol{Y})\mid \boldsymbol{Y}\in D\},\quad G_n=\{G(\boldsymbol{Y})\mid \boldsymbol{Y}\in D_n\}. \tag{5}$$

定义5 在布局问题(P)中, 若图 $G(\boldsymbol{Y}\backslash-1)=(V, E(\boldsymbol{Y}_1))$ 与图 $G(\boldsymbol{Y}_2)=(V, E(\boldsymbol{Y}_2))$ 满足

$$E(\boldsymbol{Y}_1)=E(\boldsymbol{Y}_2),\quad \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\in D_n,$$

则称图 $G(\boldsymbol{Y}_1)$ 与 $G(\boldsymbol{Y}_2)$ 为等价布局图, 记为 $G(\boldsymbol{Y}_1)=G(\boldsymbol{Y}_2)$.

在布局图 $G(\boldsymbol{Y})=(V, E(\boldsymbol{Y}))$ 中, 与 F_i 相邻图元的集合记为 $V_{F_i}(\boldsymbol{Y})=\{F_j\mid (F_i, F_j)\in E(\boldsymbol{Y}), F_j\in V\}$, 用 $|V_{F_i}(\boldsymbol{Y})|$ 表示集合 $V_{F_i}(\boldsymbol{Y})$ 中元素的个数. 实际上 $|V_{F_i}(\boldsymbol{Y})|$ 为布局图 $G(\boldsymbol{Y})$ 中图元 F_i 的度(或称阶). 从上述布局方案与图的对应关系可得:

性质1 若布局方案 $\boldsymbol{Y}$ 为不干涉布局方案, 则 $\boldsymbol{Y}$ 对应的布局图 $G(\boldsymbol{Y})$ 为连通图, 且成立

$$1\leq |V_{F_i}(\boldsymbol{Y})|\leq n-1,\ i\in I_n.$$

定义6 设 $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\in D_n$, 若其布局图 $G(\boldsymbol{Y}_1)$ 与 $G(\boldsymbol{Y}_2)$ 为等价图, 则称布局方案 $\boldsymbol{Y}_1$ 与 $\boldsymbol{Y}_2$ 为同构布局方案, 否则称 $\boldsymbol{Y}_1$ 与 $\boldsymbol{Y}_2$ 为不同构布局方案. 把集合

$$I(\boldsymbol{Y}_1)\triangleq\{\boldsymbol{Y}\in D_n\mid E(\boldsymbol{Y})=E(\boldsymbol{Y}_1)\}$$

称为布局方案 $\boldsymbol{Y}_1\in D_n$ 的同构布局等价类, $I(\boldsymbol{Y}_1)$ 中任一元素称为 $I(\boldsymbol{Y}_1)$ 的代表元.

将问题(P)的所有同构布局等价类的集合记为 $I_e\triangleq\{I(\boldsymbol{Y})\mid \boldsymbol{Y}\in D_n\}$. 实际上, $|I_e|$ 恰为问题(P)中不同构布局方案的个数. 从上述可得:

性质2 $\forall\ \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\in D_n$, 若 $\boldsymbol{Y}_1\notin I(\boldsymbol{Y}_2)$, 则 $I(\boldsymbol{Y}_1)\cap I(\boldsymbol{Y}_2)=\varnothing$, 若 $\boldsymbol{Y}_1\in I(\boldsymbol{Y}_2)$, 则 $I(\boldsymbol{Y}_1)=I(\boldsymbol{Y}_2)$, $E(\boldsymbol{Y}_1)=E(\boldsymbol{Y}_2)$, $G(\boldsymbol{Y}_1)=G(\boldsymbol{Y}_2)$.

性质3 $\bigcup_{\boldsymbol{Y}\in D_n} I(\boldsymbol{Y})=D_n$, 其中 $\bigcup_{\boldsymbol{Y}\in D_n}$ 表示对不同构布局等价类的代表元做并运算.

性质4 集合 G_n 与 I_e 中元素是一一对应的, 且有 $|G_n|=|I_e|$.

§4　轨道与布局方案的图

设 $W=\{(F_i,F_j)\mid F_i,F_j\in V\}$, $A=\{0,1\}$, 因 $|V|=n$, $|A|=2$, 所以 $|W|=\binom{n}{2}=n(n-1)/2$. 依映射 $g: W\to A$ 可定义边集 E_g 及其图 G_g 为:

$$E_g=\{(F_i,F_j)\mid F_i,F_j\in V,g(F_i,F_j)=1\},\quad G_g=(V,E_g). \tag{6}$$

设 $M=\{g\mid g: W\to A\}$, $X=\{G_g\mid g\in M\}$, 则

$$|M|=|X|=|A|^{|W|}=2^{n(n-1)/2}. \tag{7}$$

定理1　设布局问题(P)是适定的, 则 G_n 为 X 的真子集, 且 $|I_e|$ 满足

$$0<|I_e|<2^{n(n-1)/2}. \tag{8}$$

证　$\forall \boldsymbol{Y}\in D_n$ 定义映射 $g: W\to A$ 为

$$g(F_i,F_j)=\begin{cases}1, \text{当 } F_i \text{ 与 } F_j \text{ 为相邻图元,}\\ 0, \text{否则,}\end{cases}\quad i\neq j,\ i,j\in I_n.$$

再依式(6)定义 E_g, 则 $E(\boldsymbol{Y})=E_g$ 和 $G(\boldsymbol{Y})=G_g=(V,E_g)$. 由上述可见, $\forall \boldsymbol{Y}\in D_n$, 均存在 $g\in M$, 使 $G(\boldsymbol{Y})=G_g\in X$. 由式(5)得 $G_n\subset X$. 另外, 设映射 $g_0\in M$ 满足: $g_0(F_i,F_j)=0$, $\forall F_i,F_j\in V, i\neq j, i,j\in I_n$. 则由 g_0 确定的图 $G_{g_0}=(V,\varnothing)\in X$. 由性质1知, $G_{g_0}\notin G_n$, 故证得 G_n 为 X 的真子集.

因问题(P)是适定的, 即 $D\neq\varnothing$, $D_n\neq\varnothing$, $G_n\neq\varnothing$, 所以 $|G_n|>0$, 再依性质4及式(7)直接证得式(8)成立.

设 S_n 为对称群, $\forall G_g=(V,E_g)\in X$, 定义 $\sigma\in S_n$ 对图 G_g 的作用为:

$$\sigma(G_g)=(V,\sigma(E_g)),\quad \sigma(E_g)=\{(\sigma(F_i),\sigma(F_j))\mid (F_i,F_j)\in E_g\}.$$

对称群 S_n 作用于图 $G_g\in X$ 的轨道为,

$$X_{G_g}=\{\sigma(G_g)\mid \sigma\in S_n\} \tag{9}$$

依 Burnside 引理, 群 S_n 作用于图集 X 的轨道数为

$$N=\frac{1}{|S_n|}\sum_{\sigma\in S_n}|X(\sigma)|, \tag{10}$$

其中 $|S_n|=n!$, $X(\sigma)$ 为 $\sigma\in S_n$ 在 X 上的不动点集,

$$X(\sigma)=\{G_g\mid \sigma(G_g)=G_g, G_g\in X\}. \tag{11}$$

所以群 S_n 作用于 X 上的轨道可记为 $X_1, X_2, \cdots, X_N$. 由轨道的性质可知, $\{X_k\mid k=1,2,\cdots,N\}$ 构成 X 的一个划分, 即

$$X=\bigcup_{k=1}^{N}X_k. \tag{12}$$

因 $\sigma\in S_n$ 是 V 上的双射, 所以同一轨道中的元素彼此互为同构图. 由此得:

性质5　设问题(P)是适定的, 若轨道 X_{G_g} 中存在连通图 $G_{g_1}\in X_{G_g}$, 则轨道 X_{G_g} 中所有元素均为连通图. 并称此轨道为连通轨道.

把 $\{X_k\mid k=1,2,\cdots,N\}$ 中连通轨道记为 X_{ck}, 其个数记为 N_c, 不连通轨道记为 X_{dk}, 其个数记为 N_d. 令 $X_c=\bigcup_{k=1}^{N_c}X_{ck}$, $X_d=\bigcup_{k=1}^{N_d}X_{dk}$, 则

$$X=X_c\cup X_d,\quad N=N_c+N_d. \tag{13}$$

根据相邻图元定义和只有不干涉限制,用构造法可以证明如下定理.

定理2 设 $\boldsymbol{Y}\in D_n$, $G(\boldsymbol{Y})=(V,E(\boldsymbol{Y}))$, $\pi=(F_i,F_j)\in S_n$ 为 V 上的任一对换,则存在 $\boldsymbol{Y}_1\in D_n$, 使 $E(\boldsymbol{Y}_1)=\pi(E(\boldsymbol{Y}))$, $G(\boldsymbol{Y}_1)=\pi(G(\boldsymbol{Y}))$.

定理3 设 X_{G_g} 为对称群 S_n 作用于图集 X 上的一个轨道,若 $\exists\ G_{g_0}=(V,E(\boldsymbol{Y}_0))\in X_{G_g}$ 及 $\boldsymbol{Y}_0\in D_n$, 则 $\forall\ G_g\in X_{G_g}$, $\exists\ \boldsymbol{Y}\in D_n$, 使 $G_g=(V,E(\boldsymbol{Y}))$, 即 $X_{G_g}\subset G_n$.

证 $\forall\ G_{g_1}=(V,E_{g_1})\in X_{G_{g_0}}$, 依轨道定义式(9), $\exists\ \sigma\in S_n$, 使

$$\sigma(G_{g_0})=G_{g_1}=(V,E_{g_1}) \tag{14}$$

又因 σ 总可分解为对换 π_k 之积,即

$$\sigma=\pi_1\pi_2\cdots\pi_s. \tag{15}$$

令

$$G_{g_s}=\pi_s(G_{g_0}), \tag{16}$$

$$G_{g_k}=\pi_k\pi_{k+1}\cdots\pi_s(G_{g_0})=\pi_k(G_{g_{k+1}}),\ k=s-1,s-2,\cdots,3,2. \tag{17}$$

由式(14),(15)得

$$\sigma(G_{g_0})=\pi_1\pi_2\cdots\pi_s(G_{g_0})=\pi_1(G_{g_2})=G_{g_1}. \tag{18}$$

依定理2和式(16), $\exists\ \boldsymbol{Y}_s\in D_n$, 使 $G_{g_s}=G(\boldsymbol{Y}_s)$, $E(\boldsymbol{Y}_s)=\pi_s(E(\boldsymbol{Y}_0))$. 同样,从式(17)可得: $\exists\ \boldsymbol{Y}_k\in D_n$, 使

$$\pi_k(E(\boldsymbol{Y}_{k+1}))=E(\boldsymbol{Y}_k),\quad G_{g_k}=G(\boldsymbol{Y}_k)\in X_{G_{g_0}}, k=s-1,s-2,\cdots,3,2.$$

从上式和式(18)得: $\exists\ \boldsymbol{Y}_1\in D_n$, 使 $\sigma(E(\boldsymbol{Y}_0))=\pi(E(\boldsymbol{Y}_2))=E(\boldsymbol{Y}_1)$, 故证得 $G_{g_1}\in G_n$, 再由 G_{g_1} 的任意性,便有 $X_{G_{g_0}}\subset G_n$.

§5 全局优化算法及应用

由性质5,定理1及式(5),(12),(13)得

$$G_n\subset X=\bigcup_{k=1}^{N}X_k=X_c\cup X_d,\quad G\subset G_n\subset X_c=\bigcup_{k=1}^{N_c}X_{ck}.$$

设 $N_k=|X_{ck}|$, $X_{ck}=\{G_{ck,i}\cdot i=1,2,\cdots,N_k\}$, 由性质4知: $|I_e|=|G_n|\le|X_c|=\sum_{k=1}^{N_c}N_k$, 由图 $G_{ck,i}$ 构造 $\boldsymbol{Y}_{k,i}\in D_n$, 使 $G_{ck,i}=G(\boldsymbol{Y}_{k,i})$. 这样,集合 $\{\boldsymbol{Y}_{k,i}\cdot k=1,2,\cdots,N_c, i=1,2,\cdots,N_k\}$ 为问题(P)的所有不同构布局方案集. 由性质3得: $D_n=\bigcup_{k=1}^{N_c}\bigcup_{i=1}^{N_k}I(\boldsymbol{Y}_{k,i})$. 又因 $D\subset D_n$, 即有限个不同构布局等价类将覆盖问题(P)的可行域 D.

为判别同构布局等价类的可行性,依式(3)和(4)只须计算

$$J(\boldsymbol{Y}'_{k,i})=\min\{J(\boldsymbol{Y})\cdot\boldsymbol{Y}\in I(\boldsymbol{Y}_{k,i})\}.$$

若 $J(\boldsymbol{Y}'_{k,i})\le\epsilon$, 则称 $I(\boldsymbol{Y}_{k,i})$ 为问题(P)的可行同构布局等价类. 对每个可行同构布局等价类 $I(\boldsymbol{Y}_{k,i})$ 求问题的局部最优解. 因这样的局部最优解的个数是有限的($\le\sum_{k=1}^{N_c}N_k$), 由此可求得问题(P)的全局最优解. 从上述分析可构造问题(P)的全局优化算法,记为GPM,其主要步骤如下:

S1 读入已知数据 $\epsilon, n, m_i, \boldsymbol{a}_i, i\in I_n$, 取常数 $r_0>0$, 使 r_0 大于问题(P)的某个可行目标函

数值的10倍. 求集合 X 与对称群 S_n, 依式(10), (11) 求 S_n 作用于 X 上的轨道数 N. 再依式(9) 求所有轨道 $X_1, X_2, \cdots, X_N$. 根据性质1与性质5确定连通轨道 $X_{ck}, k = 1, 2, \cdots, N_c$. 令 $k = 1, r = r_0$.

S2 计算 $N_k = |X_{ck}|$, 求 $\boldsymbol{Y}_{k,i} \in D_n$, 使 $G_{ck,i} = G(\boldsymbol{Y}_{k,i}), i = 1, 2, \cdots, N_k$, 令 $i = 1$.

S3 可行性计算: $J(\boldsymbol{Y}'_{k,i}) = \min\{J(\boldsymbol{Y}) \cdot \boldsymbol{Y} \in I(\boldsymbol{Y}_{k,i})\}$. 若 $J(\boldsymbol{Y}'_{k,i}) \leq \epsilon$, 则 $\boldsymbol{Y}'_{k,i} \in D$, 转 S7, 否则 $r^* = r_0$.

S4 若 $r^* < r$, 则令 $k_0 = k, i_0 = i, r = r^*, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y}^*_{k,i}$.

S5 $i = i + 1$, 若 $i \leq N_k$, 则转 S3.

S6 $k = k + 1$, 若 $k \leq N_c$, 则转S2, 否则转 S8.

S7 以 $\boldsymbol{Y}'_{k,i}$ 为初始点, 求解子问题(P_{ki}),

$$
(\mathrm{P}_{ki})\quad
\begin{array}{ll}
\min & f(\boldsymbol{Y}) \\
\text{s.t.} & \operatorname{int}(F_i) \cap \operatorname{int}(F_j) = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j \in I_n, \\
 & J(\boldsymbol{Y}) \leq \epsilon, \\
 & \boldsymbol{Y} \in I(\boldsymbol{Y}'_{k,i}).
\end{array}
$$

设子问题(P_{ki})的解为 $\boldsymbol{Y}^*_{ki}$, 并令最优值 $r^* = f(\boldsymbol{Y}^*_{ki})$. 转 S4.

S8 若 $r^* < r_0$, 则问题(P)是适定的, 它的全局最优方案为 $\boldsymbol{Y}^*$, 最优值为 r^*, $G(\boldsymbol{Y}^*_{k_0, i_0})$ 为其布局图. 否则问题(P) 是不适定的, 即 $D = \varnothing$. 运算结束.

例1 设 $n = 3$, 则 $V = \{F_1, F_2, F_3\} = \{1, 2, 3\}$, $|X| = 2^3 = 8$, 映射 $g_i \cdot W \to A$ 定义边集 E_{g_i} 分别为: $E_{g_1} = \varnothing, E_{g_2} = \{(1, 2)\}, E_{g_3} = \{(2, 3)\}, E_{g_4} = \{(3, 1)\}, E_{g_5} = \{(1, 2), (2, 3)\}, E_{g_6} = \{(2, 3), (3, 1)\}, E_{g_7} = \{(3, 1), (1, 2)\}, E_{g_8} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. 于是得图集 $X = \{G_{g_i} = (V, E_{G_i}) \cdot i = 1, 2, \cdots, 8\}$, 对称群 S_3 作用于 X 的轨道为: $X_{g_1} = \{G_{g_1}\}, X_{g_2} = \{G_{g_2}, G_{g_3}, G_{g_4}\}, X_{g_5} = \{G_{g_5}, G_{g_6}, G_{g_7}\}, X_{g_8} = \{G_{g_8}\}$. $N = 4, N_c = 2, N_d = 2, N_1 = 3, N_2 = 1$, 故可构造不干涉布局方案 $\boldsymbol{Y}_i \in D_n$, 使 $G_{g_i} = (V, E(\boldsymbol{Y}_i)), i = 5, 6, 7, 8$. 同构布局等价类集 $I_e = \{I(\boldsymbol{Y}_i) \cdot i = 5, 6, 7, 8\}$, $G_n = \{G(\boldsymbol{Y}_i) \cdot i = 5, 6, 7, 8\}$, $D \subset D_n = \bigcup_{i=5}^{8} I(\boldsymbol{Y}_i)$. 然后应用算法 GPM, 便可求得问题(P)的全局最优解.

例2 设 $n = 4, V = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, $|X| = 64$, 用与例1类似的方法, 首先确定映射 $g_i \cdot W \to A$ 对应的边集 $E_{g_i}, i = 1, 2, \cdots, 64$. 由此求图集 X 中的元素. 用式(9)到(11)确定对称群 S_4 作用于 X 的轨道数 $N = 11$, 再应用式(12), (13)求连通轨道 $X_{ck}, k = 1, 2, \cdots, 6$, 即 $N_c = 6$. 每个连通轨道中元素个数 $N_1 = 4, N_2 = 12, N_3 = 3, N_4 = 12, N_5 = 6, N_6 = 1$. 用 GPM 算法可求得此问题的全局最优解.

(本文作者通讯地址: 大连理工大学应用数学系 邮编 116023)

参 考 文 献

1 滕弘飞, 孙守林等, 旋转舱内圆柱体及长方体群布局优化, 大连理工大学学报, 1993, 33: 303～310.

2 滕弘飞等, 转动圆桌平衡摆盘－带平衡性能约束的 Packing 问题, 中国科学(A 辑), 1994, 24: 754～760.

3 许广键, 冯恩民, 滕弘飞, 矩形图元几何布局优化问题及主要性质, 数学的实践与认识, 1993(2): 57～61.

4 冯恩民, 许广键, 滕弘飞, 带性能约束的矩形图元布局优化模型及不干涉性算法, 高校应用数学学报, 1993, 8(1): 53～60.

5 陈国庆, 冯恩民, 滕弘飞, 具有性能约束几何布局优化模型的研究, 大连理工大学学报, 1992, 32(4): 378～383.

6 Tuy, H., Horst, R., Convergence and restart in branch-and-bound algorithms for global optimization, application to concave minimization and D. C. optimization problems, Mathematical Programming, 1988, 41(2): 161～183.

7 Tuy, H., Convex programs with an additional reverse convex constraint, Journal of Optimization, Theory and Applications, 1987, 52(3): 463～486.

A GLOBAL OPTIMIZATION ALGORITHM FOR LAYOUT PROBLEMS WITH BEHAVIOUR CONSTRAINTS

Feng Enmin　Wang Xilu　Wang Xiumei　Teng Hongfei

(*Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Dalian* 116024)

(*Open Laboratory of CAD/CAM Technology for Advanced Manufacturing, Shenyang Institute of Computing Technology, Academia Sinica, Shenyang* 110003)

Abstract The layout problem about satellite cabin is studied as an example of the layout problems with behaviour constraints in the paper. And graph theory, group acting on sets, orbit and equivalent relation are used to discuss the isomorphism, equivalence and other inner properties of all sorts of layout schemes. Finally, a global optimization algorithm for two-dimensional layout problems with behaviour constraints is constructed for the first time based on the discussion.

Keywords Satellite, Layout, Optimization Algorithm, Symmetric Group, Equivalent Relation, Isomorphism.

Subject Classification (CL) O224; (1991MR) V474.