仲英学辅模拟考试试题

成绩	

课程：高等数学

班级：________ 考场：________ 考试时间：2020.11.08

姓名：________ 座号：________ 考试类型：期中考[√]

※预祝考生们在考试中取得理想成绩※

命题：电气 93 吴佳睿、金融 91 赵佳明、力学理 91 徐世浩、统计 91 董晟渤、信计 91 高逸飞

排版：统计 91 董晟渤（以上排名不分先后，按照专业拼音及班级序号排序）

一、选择题（共 5 题，每题 3 分，共 15 分）

1. 已知当$x \to 0$时，$\sin x$与$\ln(1+ax)$是等价无穷小，则$a =$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ± 1

2. 设多项式函数

$$f(x) = (x-m)(x-n)(x-p)(x-q)(x-h)$$

其中$m < n < p < q < h$，则$f'(x)$的零点个数为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 不确定

3. 设函数$f(x)$满足$f(0) = 0$，则$f(x)$在$x = 0$处可导且$f'(0) = A$的充要条件是

A. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2} = A$　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{h} = A$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2} = A$　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{2h} = A$

4. 设数列$\{x_n\}$满足$x_n > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{3}$$

则下列叙述中正确的是

A. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，但不一定为$0$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在　　D. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$可能存在，也可能不存在

5. 设函数$f(x)$的二阶导数在$x=0$处连续，$f(0)=f'(0)=0$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^2}=1$$

由此可知$x=0$是$f(x)$的

A. 极小值点

B. 极大值点

C. 不是$f(x)$的极值点，但是$\big(0,f(0)\big)$是曲线$y=f(x)$的拐点

D. 不是$f(x)$的极值点，同时$\big(0,f(0)\big)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

二、填空题（共 4 题，每题 3 分，共 12 分）

1. 设m，n是正整数，则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

的值为______________。

2. 曲线

$$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)(x>0)$$

的渐近线的方程是______________。

3. 函数

$$f(x)=x+2\cos x$$

在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为______________。

4. 若

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$$

则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

的值为______________。

三、解答题（共 7 题，第 1 题 20 分，第 2~4 题每题 8 分，第 5 题 9 分，第 6~7 题每题 10 分，共 73 分）

1.（每小题 5 分，共 20 分）计算下列极限或导数。

（1）设a为常数，对于参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（用$t$表示）。

（2）求极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + \tan x)^x - 1}{x \sin x}$$

（3）求极限

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$$

（4）求极限

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$$

2.（共 8 分）设函数

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\sin x}{|x|}$$

求函数$f(x)$的全部间断点及其类型。

3.（共 8 分）设数列$\{x_n\}$满足$0<x_n<1$，且

$$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}$$

证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

4.（共 8 分）将4次多项式函数

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x - 1$$

按$(x-2)$展开。

5.（共 9 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=0$，$f(1)=\pi$，证明：存在$\xi \in (0,1)$，使

$$f'(\xi) = \tan f(\xi)$$

6.（共 10 分）设$C_i(i=1,2,3,4)$为常数，验证函数

$$y=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

满足$y^{(4)}+y=0$，其中$y^{(n)}$表示函数$y=y(x)$的n阶导数。

7.（共 10 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，并且在$[0,1]$上函数$f(x)$的最小值为-1，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使

$$f''(\xi)\geq 8$$

四、附加题（不算在总分内，第 1~2 题每题 6 分，第 3 题 8 分，共 20 分）

1.（共 6 分）设数列$\{x_n\}$中的每一项x_n都满足方程

$$nx-1+\ln x=0$$

证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

（董晟渤 **供题**）

2.（共 6 分）证明e是无理数。

（高逸飞 **供题**）

3.（共 8 分）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^{2n}-(\tan x)^{2n}}{\left(1-\prod_{k=1}^{2n}\cos kx\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(\cos^{k}x-1)\right)}$$

（赵佳明 **供题**）

※试卷到此结束，欢迎关注仲英学辅的后续讲座※