第二节 幂级数

- 幂级数及其收敛性
- 幂级数的运算性质
- 函数展开成幂级数
- 幂级数的应用举例

作业: Page316

4, 6(双号), 8(双号), 9, 10, 11

13.(2)(4)

上页 下页 返回

第一部分 幂级数的收敛性及运算性质

一、幂级数及其收敛性 Power Series

1. 定义: 形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$的级数称为幂级数.

当$x_0 = 0$时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其中$a_n$为幂级数系数.

2. 收敛性:

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

当$|x| < 1$时, 收敛; 当$|x| \geq 1$时, 发散;

收敛域$(-1,1)$; 发散域$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

幂级数必有收敛点

定理3.1（Abel定理）

(1) 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则

它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切x处绝对收敛;

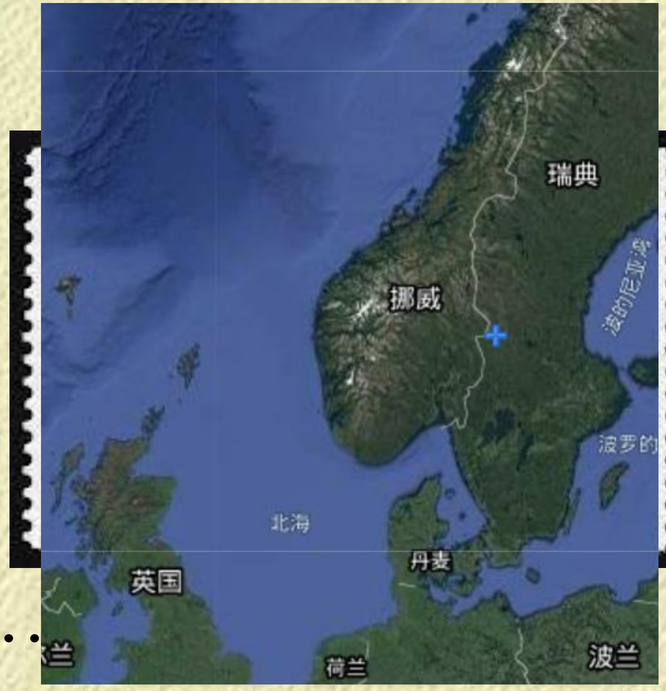
(2) 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足

不等式$|x| > |x_0|$的一切x处发散.

证明 (1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$$

$\exists M$, 使得$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0,1,2,\cdots$



$\exists M$，使得 $\left|a_n x_0^{\ n}\right| \le M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^{\ n} \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^{\ n}\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\because$ 当 $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ 时，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 收敛，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

定理1.3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且$\exists$N, n>N时

$u_n \le v_n \ (n = 1,2,\cdots)$，（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

定理3.1 (Abel定理)

(1) 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则

它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切x处绝对收敛;

(2) 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足

不等式$|x| > |x_0|$的一切x处发散.

证明 (2) 假设当$x = x_0$时发散,

而有一点x_1适合$|x_1| > |x_0|$使级数收敛,

由(1)结论 则级数当$x = x_0$时应收敛,

这与所设矛盾.

定理3.2

幂级数在X=0处必定收敛

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的敛散性仅有三种可能：

(1)在整个数轴上都收敛;

(2)只在 $x=0$ 点收敛;

(3) 存在一个正数R,它具有下列性质：

当 $|x|<R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

当 $|x|>R$ 时,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散;

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

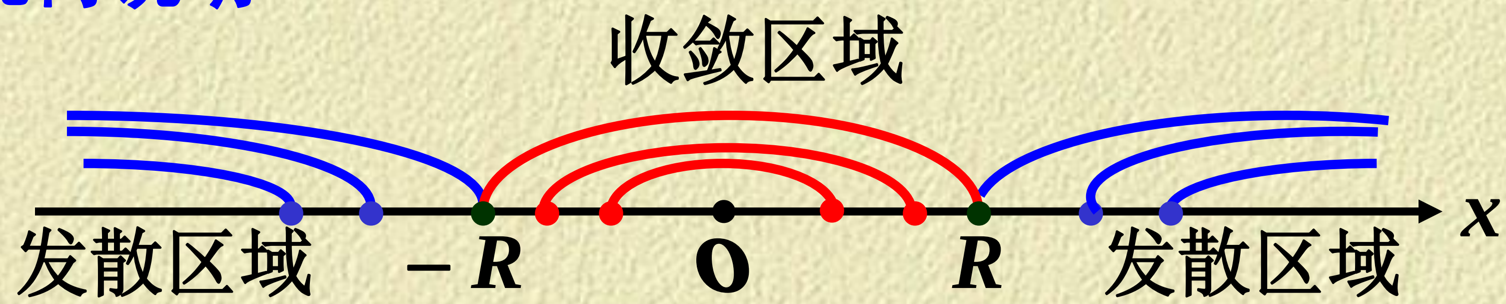
定义3.1： 上述正数R称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

可能的收敛域为 $(-R, R)$, $[-R, R)$,

$(-R, R]$, $[-R, R]$.

几何说明



上页 下页 返回

规定: (1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 只在 $x=0$ 处收敛， $R=0$,

收敛域 $x=\{0\}$；

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切 x 都收敛， $R=+\infty$,

收敛区间 $(-\infty,+\infty)$.

问题 如何求幂级数的收敛半径?

定理（检比法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$\forall n \in N_+, u_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \ (\text{有限或} +\infty)$$ 则

$\lambda < 1$ 时级数收敛；

$\lambda > 1$（或 $+\infty$）时级数发散

$\lambda = 1$ 时失效.

上页 下页 返回

定理3.3 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的所有系数 $a_n \neq 0$

且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 存在或为 $+\infty$，则它的收敛半径为 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

证明 记 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，对级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\left|x\right|=\frac{\left|x\right|}{\rho},$$

(1)若 $0<\rho<+\infty$，则 $\frac{|x|}{\rho}<1$ 时 由达朗贝尔准则知，

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，故 $|x|<\rho$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 绝对收敛.

$\frac{|x|}{\rho}>1$，即 $|x|>\rho$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 发散.

上页 下页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\left|x\right|=\frac{\left|x\right|}{\rho},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$\dfrac{|x|}{\rho}>1$，即 $|x|>\rho$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 发散.

此时 $\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|>\left|a_n x^n\right|$，$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n x^n \not\to 0$，从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 发散.

$\therefore$ 收敛半径 $R=\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

(2)若 $\rho=0$，则 $\forall x\neq 0$，$\dfrac{|x|}{\rho}$ 即 $+\infty$，由检比法知除 $x=0$ 外，$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 发散，故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 必发散. 收敛半径 $R=0=\rho$.

$(\because \left|a_{n+1}x^{n+1}\right|>\left|a_n x^n\right|,\ \therefore \lim_{n\to\infty}a_n x^n \not\to 0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\left|x\right|=\frac{\left|x\right|}{\rho},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(3)若$\rho=+\infty$, $\forall x\neq 0, \dfrac{|x|}{\rho}\to 0<1$, 由达朗贝尔准则知

级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛. 故收敛半径 $R=+\infty=\rho$;

定理3.4 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的所有系数 $a_n\neq 0$

且 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ 存在或为$+\infty$, **则它的收敛半径为$R=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$**

例1 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

解 (1) $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \quad \therefore R=1$

当$x=1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛.

当$x=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 该级数发散.

故收敛域是$(-1,1]$.

上页 下页 返回

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$\because R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

或 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n(n+1)}\right|=0$$

$\therefore R=0,$ 即该级数只在 $x=0$ 处收敛,

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\because R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

$\therefore R=+\infty,$ 收敛区间 $(-\infty,+\infty)$.

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$$

$$\because R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$$

即$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$收斂， $x\in(0,1)$收斂，

当$x=0$时， 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$， 发散

当$x=1$时， 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$， 收斂

故收斂域为$(0,1]$.

上页 下页 返回

例2 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛区间. 缺项幂级数

解 $\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$ 根据达朗贝尔准则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\big/2^{n+1}}{x^{2n-1}\big/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

$\therefore$ 当$|x|<\sqrt{2}$时, 级数收敛; 当$|x|>\sqrt{2}$时, 级数发散.

所以, 原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

当$x=\sqrt{2}$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$, 级数发散.

收敛区间等于收敛域

当$x=-\sqrt{2}$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$, 级数发散.

求缺项级数的收敛半径

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径 .

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理3.3, 可直接由检比法或检根法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}4x^2<1\text{即}|x|<\frac{1}{2}\text{时级数收敛}\\ \text{当}4x^2>1\text{即}|x|>\frac{1}{2}\text{时级数发散}\end{array}\right\}\text{故收敛半径为}\ R=\frac{1}{2}.$$

上页 下页

例4. 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$在$x=1$处收敛, 则在$x=4$处该幂级数

(A).绝对收敛　(B).条件收敛　(C).发散　(D).散性不定

X=1是收敛点，说明收敛半径至少是|1-3|＝2, 以3为对称中心，可得区间(1,5),该区间必包含于收敛区间.

故X=4包含在收敛区间内，在收敛区间内幂级数绝对收敛，所以x=4是绝对收敛点.

注意：在收敛区间内的都是指“绝对收敛”，只有在区间的端点才有可能找到“条件收敛”

如在X=5处，则选D.

上页　下页　返回

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n$收敛域为(C).

A $[-3,3]$; B $(-3,3)$; C $[-3,3)$; D $(-3,3]$.

解 $a_n=\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+1}+(-2)^{n+1})}{n(3^n+(-2)^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3-2(\frac{-2}{3})^n)}{n(1+(\frac{-2}{3})^n)}=3$$

当$x=-3$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{n(3^n+(-2)^n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(1+(-\frac{2}{3})^n)}$收敛;

当$x=3$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+(\frac{-2}{3})^n)}$发散.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{n[3^n+(-2)^n]}{(n+1)[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{3+(-2)(-\frac{2}{3})^n}=\frac{1}{3}$$

故**R=3**

当$x=3$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n}{n[3^n+(-2)^n]}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(-\frac{2}{3})^n}=1>0$$ 故原级数发散

当$x=-3$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n[3^n+(-2)^n]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{3^n+(-2)^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$$

当$x=-3$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n[3^n+(-2)^n]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{3^n+(-2)^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n[3^n+(-2)^n]}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{2}{3})^n}{n[1+(-\frac{2}{3})^n]}$$

由前后两个级数都收敛，
可知原级数收敛。
所以,收敛域为[-3,3)

与等比级数(2/3)^n比. 正项级数的比较准则II

第二部分 幂级数的运算性质

1. 代数运算性质:

定理3.5 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$,

$$R = \min\{R_1, R_2\}$$

(1) 线性组合收敛

$\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在$x \in (-R, R)$内收敛, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$

且$\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n.$

上页 下页 返回

(2) 乘积级数收敛 $x \in (-R, R)$ 且有：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

(其中 $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0$)

	1	x	x^2	x^3	$\cdots\cdots$	x^n
柯西乘积	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3	$\cdots$	a_0b_n
	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$\cdots$ a_1b_{n-1}	a_1b_n
	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$\cdots$	
	a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$\cdots$	
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

上页 下页 返回

说明：两个幂级数相除所得幂级数的收敛半径可能比原来两个幂级数的收敛半径小得多. 例如, 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \begin{pmatrix} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0,\ n = 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

它们的收敛半径均为 $R = \infty$, 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

上页 下页 返回

一. 填空题(每小题3分，共15分)

2. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\frac{1}{n})x^n$的收敛半径等于________.

幂级数的收敛半径

解 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛$\Rightarrow$幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为1;

又因为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$的收敛半径为1;

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\frac{1}{n})x^n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

$\Rightarrow$该幂级数的收敛半径为1;

注意:两个收敛幂级数的相加减或相乘得到的幂级数,其收敛半径$\geqslant \min\{R_1, R_2\}$. 例如,幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}(1+2^n)x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^n)x^n$ 的收敛半径分别为

$$R_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

$$R_2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-2^n}{1-2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

它们相加得到的级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(1+2^n)+(1-2^n)]x^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

收敛半径 $R=1$, 故 $R>\min\{R_1, R_2\}$.

定理3.6（内闭一致收敛性）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R，$0 < R \le +\infty$

则它在收敛区间$(-R, R)$内的任何闭子区间$[a,b]$上都是一致收敛的.

证　记$r = \max\{|a|,|b|\}$，$[a,b] \subsetneq (-R,R)$　$\therefore 0 < r < R$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n|$收敛

$\because |x| \le r$时，$|a_n x^n| \le |a_n| r^n \ (n = 0,1,2,\cdots)$

由M-判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$[-r,r]$上一致收敛.

而$-r \le a < b \le r$，故$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$[a,b]$上一致收敛.

外尔斯特拉斯，K.（T.W.）

2. 和函数的分析运算性质:

定理3.7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $s(x)$

收敛半径为R,

(1) 和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内连续.

定理2.3（和函数的连续性）

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a,b]$上都连续, 且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$, 则$s(x)$在$[a,b]$上也连续.

2. 和函数的分析运算性质:

（2）和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内有连续的任意阶导数，并可逐项求导.

即：$\forall x \in (-R, R)$,

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(求导后所得级数的收敛半径与原级数相同)

(收敛半径不变)

上页 下页 返回

思考 幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变？

解答: 不一定.

例: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$,

$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$，它们的收敛半径都是1,

但它们的收敛域分别是: $[-1,1], [-1,1), (-1,1)$

$f''(x)$ 在-1,1处通项不趋于0

上页 下页 返回

2. 和函数的分析运算性质:

(3)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可积,且可逐项积分.

即: $\forall x \in (-R, R)$, $\int_0^x s(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(积分后所得级数的收敛半径与原级数相同)

(收敛半径不变)

可象多项式一样对幂级数进行代数运算、分析运算

例4 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解 设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$,收敛区间$x\in(-1,1)$ $s(0)=0$

$$s'(x)=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x},$$

两边取定积分得: $\int_0^x s'(t)dt=\ln(1+x)$

即$s(x)-s(0)=\ln(1+x)$ $\therefore s(x)=\ln(1+x)$,

又 $x=1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).\quad(-1<x\le 1)$$

例5　求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解　考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，收敛区间(-1,1),

则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n = x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$

$$= x(\frac{x^2}{1-x})'' = \frac{2x}{(1-x)^3},$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n} = s(\frac{1}{2}) = 8.$

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收敛域、和函数

解: $\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 收敛半径 $R=+\infty$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

两边逐项求导，得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

由分离变量法，可得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=S(x)$$

$$\frac{dS}{S}=dx$$

故有 $S(x)=Ce^{x}$

由 $S(0)=1$, 得 $S(x)=e^{x}$, 注意初值条件!

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=e^{x}$.

$$1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+\cdots=e^{x},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ **的和函数** $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x=\pm 1$ 时级数发散, 故当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)'$$

$$= x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

上页 下页 返回

例7. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 **1** , 且 $x=-1$时级数收敛 , 则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\qquad(0<|x|<1\text{及 }\boldsymbol{x=-1})$$

$$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x), \quad (0 < |x| < 1 \text{及} \ \boldsymbol{x = -1})$$

而 $S(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right) = 1$,

因此由和函数的连续性得:

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1,0) \cup (0,1) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

定义0的0次方为1就没问题了

上页 下页 返回

例8. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解: 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x\neq 0)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\qquad (x\neq 0)$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$$

$$=-\ln(1-x)$$

$\therefore$ $$S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\qquad (x\neq 0)$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

第三部分 函数展开成幂级数

一、Taylor级数

上例题: $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=e^x, \quad x\in(-\infty,+\infty)$

约定: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

是指存在幂级数在其收敛域内以$f(x)$为和函数。

也称函数 $f(x)$ 可展开成幂级数。

问题1: 1.如果能展开, a_n 是什么?

2.展开式是否唯一?

3.在什么条件下才能展开成幂级数?