第六章 多元函数积分学及其应用

第八节 各种积分的联系及在场中的应用

- Green公式
- 平面线积分与路径无关的条件
- Stokes公式与旋度
- Gauss公式与散度

几种重要的特殊向量场

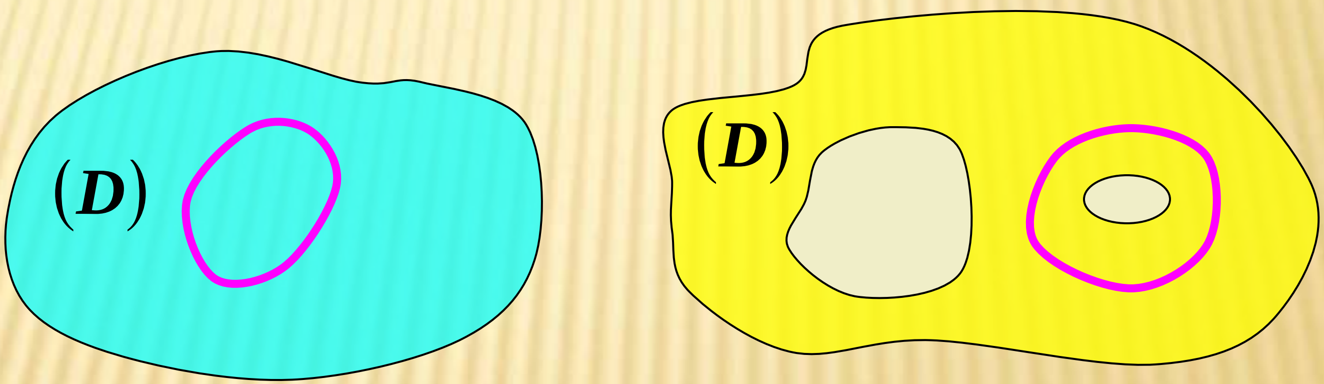
- 作业   习题6.8   P260

  2，3， 5， 7， 8， 9

第一部分 Green公式

一、区域连通性的分类

设(D)为平面区域，如果(D)内任一闭曲线所围成的部分都属于(D)，则称(D)为平面单连通区域，否则称为复连通区域.



单连通区域　　复连通区域

二、Green公式

定理8.1（Green公式）

设平面有界闭区域(σ)由有限条分段光滑的简单曲线(C)围成, 函数$P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}((\sigma))$, 则有：

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{(+C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

其中，$(+C)$是曲线(C)的正向.

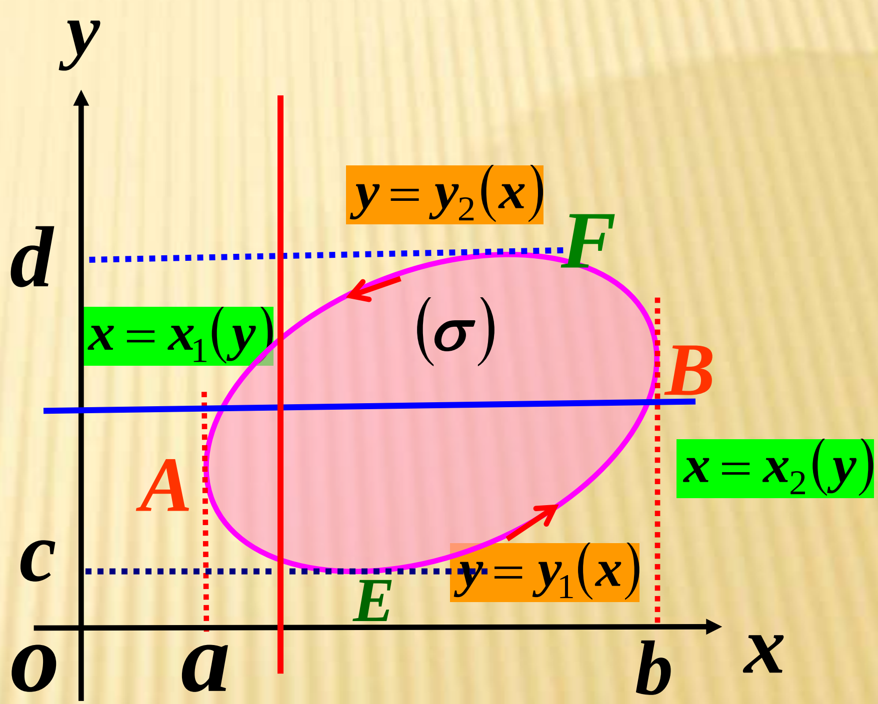
$f(x,y)\in C^{(1)}((\sigma))$: f在(σ)上具有连续的一阶偏导数

$f(x,y)\in C^{(m)}(\Omega)$: f在(Ω)上具有连续的m阶偏导数

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{(+C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

证明：情形(1)

若单连通区域(σ)既是x型又是y型,即平行于坐标轴的直线和(C)至多交于两点.



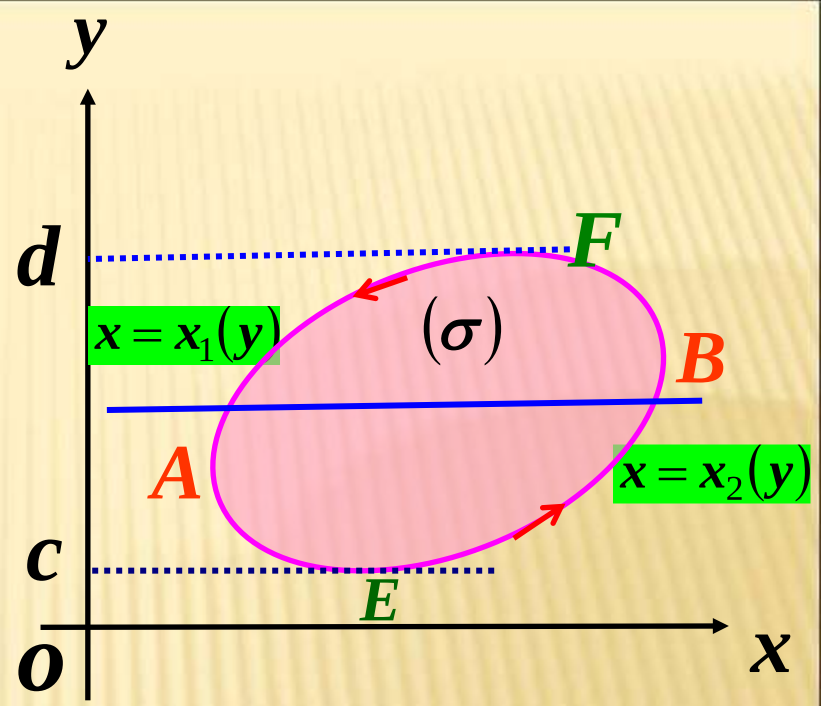
$$(\sigma)=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

$$(\sigma)=\{(x,y)\,|\,x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d \left[Q\left(x_2(y), y\right) - Q\left(x_1(y), y\right) \right] \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{弧EBF} Q(x,y)\mathrm{d}y - \int\limits_{弧EAF} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



$$= \int\limits_{弧EBF} Q(x,y)\mathrm{d}y + \int\limits_{弧FAE} Q(x,y)\mathrm{d}y = \oint\limits_{(+C)} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

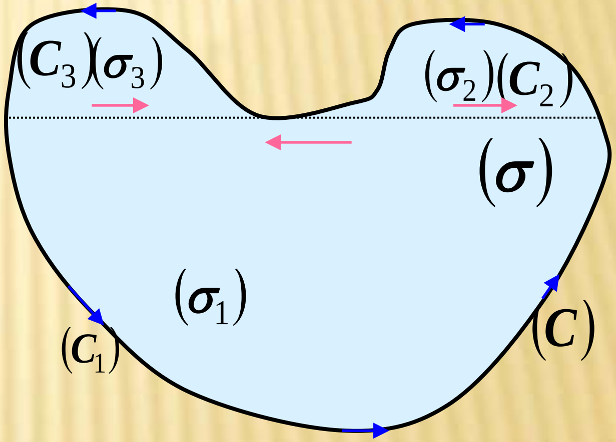
同理可证 $$-\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{(+C)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

两式相加得 $$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{(+C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明: $\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{(+C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

情形(2)

若单连通区域(σ)由按段光滑的闭曲线围成. 如图,



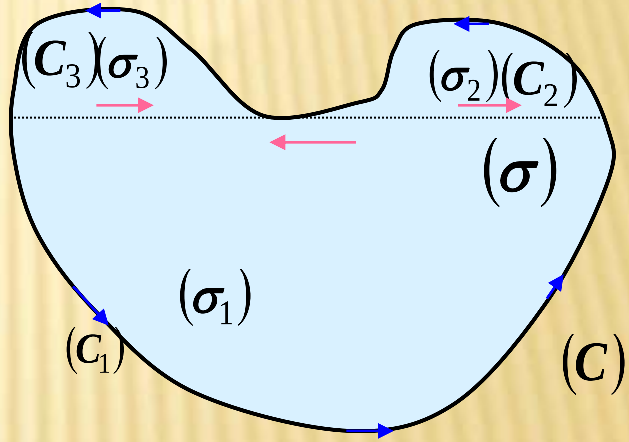
将(σ)分成三个既是x型又是y型的区域(σ_1)，(σ_2)，(σ_3).

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(\sigma_1)+(\sigma_2)+(\sigma_3)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{(\sigma_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{(\sigma_2)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{(\sigma_3)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{(C_1)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{(C_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{(C_3)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$



$(C_1),(C_2),(C_3)$对(σ)来说为正方向.

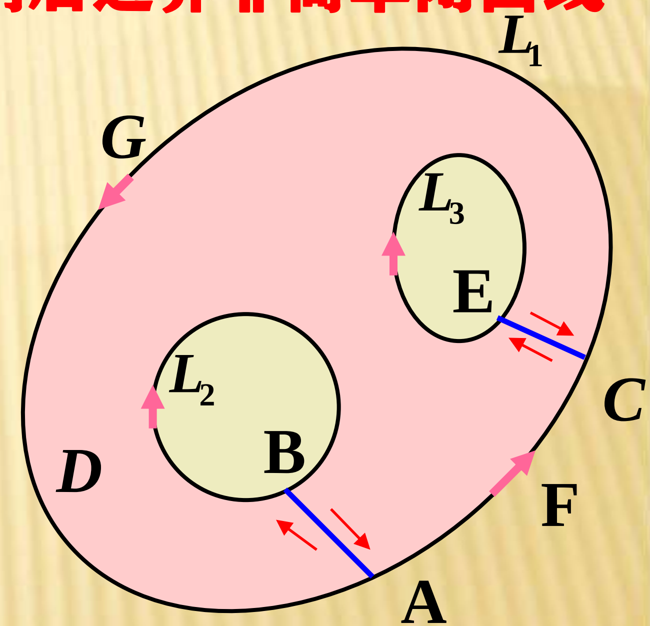
$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{(+C)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

情形(3)

复连通区域

证明：$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{(+C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

切割后边界非简单闭曲线



若区域(σ)由不止一条闭曲线所围成. 添加直线段 AB, CE. 则(σ)的边界曲线由 AB, L_2, BA， AC, CE， L_3, EC 及 CGA 构成.

由(2)知 $\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\left\{\int_{AB}+\int_{(-L_2)}+\int_{BA}+\int_{AC}+\int_{CE}+\int_{(-L_3)}+\int_{EC}+\int_{CGA}\right\}\cdot(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$$

$$=\left(\oint_{(-L_2)}+\oint_{(-L_3)}+\oint_{(+L_1)}\right)(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$$

$$=\oint_{(+C)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$(+L_1=\mathrm{AC}+\mathrm{CGA})$

$(+C)=(+L_1)\cup(-L_2)\cup(-L_3)$

$+L_1, -L_2, -L_3$对(σ)为正向

格林公式的实质:

沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系.

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{(+C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

将(P,Q)的某变化率的二重积分化为
原函数(P,Q)在边界曲线上的线积分.

对比Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$$

将F的变化率f 的积分化为原函数F在区间边界a,b上的值 来计算.

Green公式也可写成: $$\iint\limits_{(\sigma)}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{(C)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

三、简单应用

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{(+C)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

1. 简化曲线积分

例1 设L是在圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$上由点$A(2,0)$到$O(0,0)$的弧段, 计算下列曲线积分

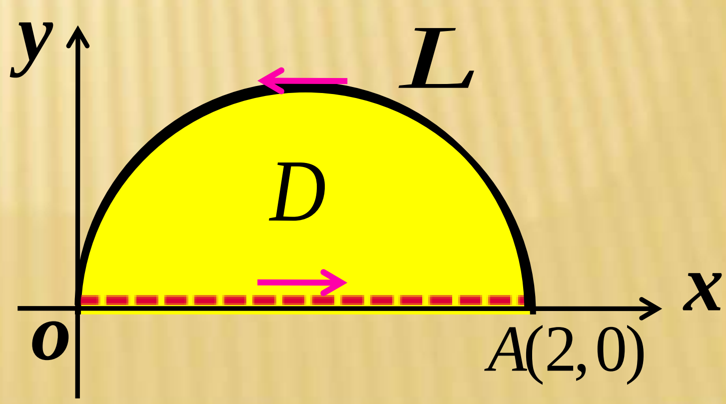
$$I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-2(x+y)]\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x\cos y+3x]\mathrm{d}y.$$

解 令 $P=\mathrm{e}^x\sin y-2(x+y)$, $Q=\mathrm{e}^x\cos y+3x$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=5.$

添加辅助线段OA:

$y=0,\quad x:0\to 2;$

OA与L围成闭区域D.



例1 设L是在圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$上由点$A(2,0)$到$O(0,0)$的弧段, 计算下列曲线积分

$$I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-2(x+y)]\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x\cos y+3x]\mathrm{d}y.$$

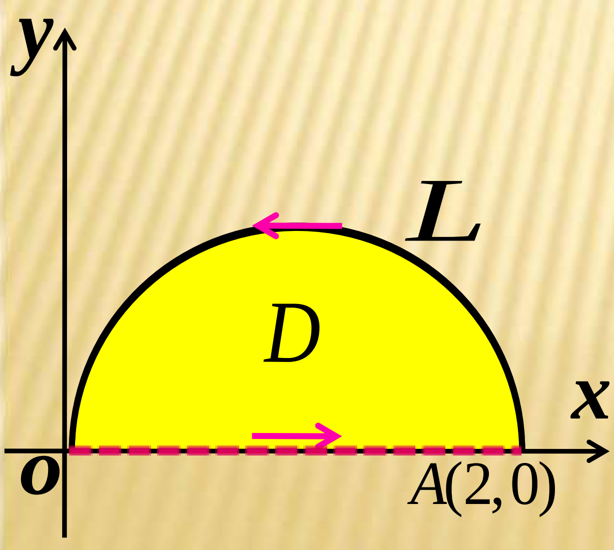
令 $P=\mathrm{e}^x\sin y-2(x+y)$, $Q=\mathrm{e}^x\cos y+3x$;

解 $$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+OA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{OA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

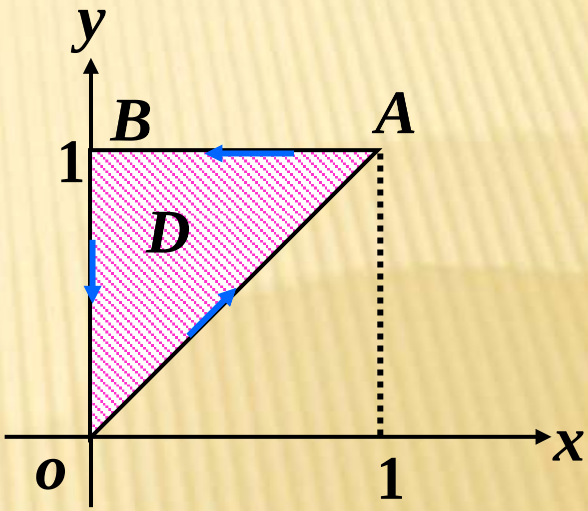
$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{OA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2(-2x)\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{2}+4.$$



2. 简化二重积分

例2 计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$,其中 D 是以 $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域.



解 令 $P=0,\quad Q=xe^{-y^2}$,

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$, 应用格林公式,得:

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{OA+AB+BO} xe^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA} xe^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 xe^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

例3 计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中$L$为任一条分段光滑且不经过原点的正向简单闭曲线, L的方向为逆时针方向.

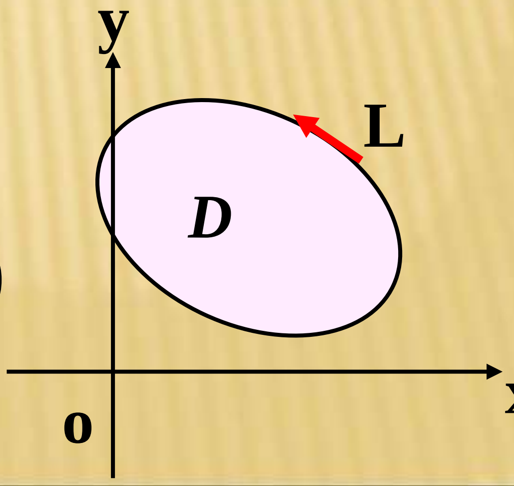
解 记L所围成的闭区域为D, 令$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$,

则当$x^2+y^2\neq 0$时, 有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

$x^2+y^2=0$时, $P,Q\notin C^{(1)}\left((\sigma)\right)$, 格林公式不成立

(1) 当$(0,0)\notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_{(+L)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$



例3 计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为任一条分段光滑且不经过原点的正向简单闭曲线，$L$的方向为逆时针方向.

(2) 当$(0,0)\in D$时，作位于D内圆周 $l: x^2+y^2=r^2$，

记D_1由L和l所围成，D_1为复连通区域

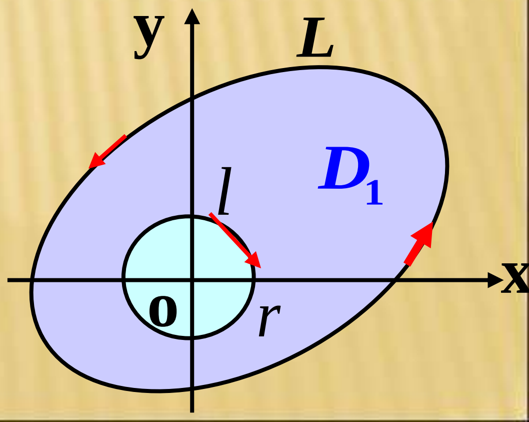
$P,Q\in C^{(1)}(D_1)$，格林公式成立

应用格林公式，得

$$\oint_{(+L)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\oint_{(-l)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$$\oint_{(+L)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\oint_{(-l)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$\oint_{(+L)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{(+l)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

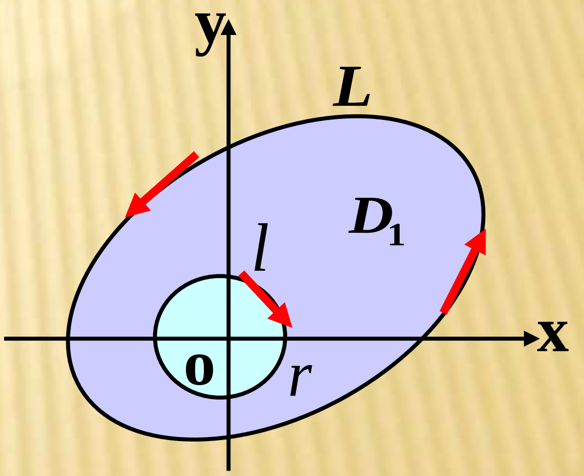


例3 计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, 其中$L$为任一条分段光滑且不经过原点的正向简单闭曲线, L的方向为逆时针方向.

$$\oint_{(+L)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \oint_{(+l)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^2} \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi$$



D内圆周 l: $x^2+y^2=r^2$

$(+l)$ 的方向取逆时针方向)

(注意Green公式的条件)

3. 计算平面区域面积

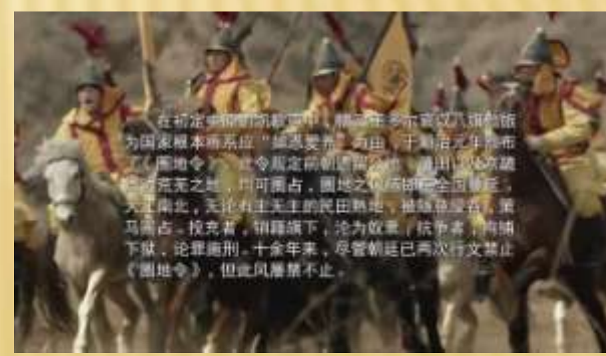
格林公式: $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

取 $P = -y,\ Q = x$，得 $2\iint\limits_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$

闭区域 D 的面积 $A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$

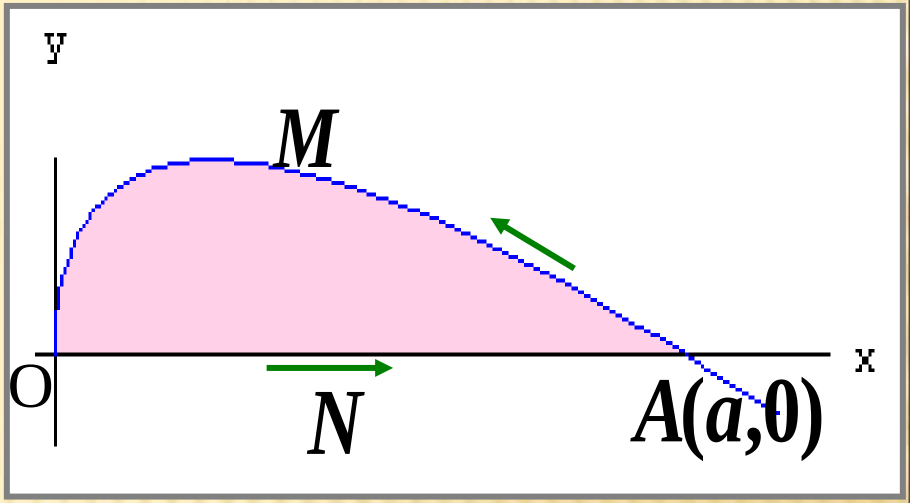
取 $P = 0,\ Q = x$，得 $A = \oint_L xdy$

取 $P = -y,\ Q = 0$，得 $A = \oint_L -ydx$



例4 计算抛物线$(x+y)^2 = ax(a>0)$与x轴所围成区域的面积.

解 ONA为直线$y=0$.



曲线AMO由函数

$y=\sqrt{ax}-x,\ x\in[0,a]$表示,

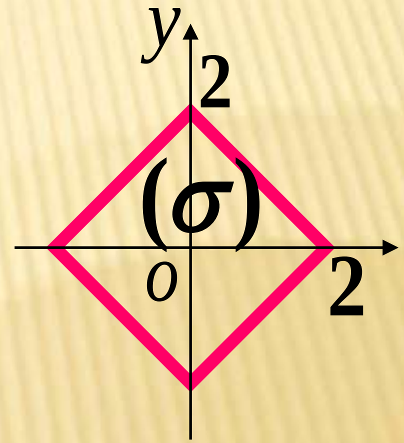
$$\therefore A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{ONA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{AMO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{AMO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^0 x\left(\frac{a}{2\sqrt{ax}} - 1\right)\mathrm{d}x - \left(\sqrt{ax} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^2.$$

设L为闭曲线$|x|+|y|=2$,逆时针方向为正,

则$\displaystyle\oint_L \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=?$



$$\oint_L \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\oint_L \frac{axdy-bydx}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\oint_L axdy-bydx$$

挖洞/不挖洞?

$$=\frac{1}{2}\iint_{(\sigma)}\left(a-(-b)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4(a+b)$$

$$\oint_{(+C)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$