4.1.6　微分方程的应用

一般步骤：

1、分析问题，建立微分方程并提出定解条件；

2、求微分方程的通解；

3、根据定解条件求出方程的特解.

作业: Page266,

(A) 7, 8, 10,11

(B) 1,3,4

例1 已知一放射性材料以与当前数量成正比的速度衰减，最初有50g的物质，两小时后减少了10%.

求 (1)在时刻 t，该材料质量的表达式。

(2)4小时后的表达式。

(3)何时质量为最初质量的一半？

解 (1) 设质量为 $M(t)$,则

$$\begin{cases} \dfrac{dM(t)}{dt} = -kM(t) \\ M(0) = 50, M(2) = 45 \end{cases}$$

$$M(t) = Ce^{-kt}$$

$$M(t) = 50e^{-0.053t}$$

$$(2) M(4) = 50e^{-0.053\times 4} = 40.5(g)$$

$$(3) M(t) = 25 = 50e^{-0.053t},\ -0.053t = \ln\frac{1}{2}, t = 13(h)$$

碳14断代法

- **1950年，美国芝加哥大学教授(Willard Libby)创立了^{14}C断代法，被视为史前考古学中一场划时代的革命，并因创立该法而获得了诺贝尔化学奖。**

- **其他几种断代方法， 如热释光断代、古地磁断代、钾-氩法断代、骨化石含氟量断代、铀系法断代等，都已陆续采用。**

- **^{14}C法建立在活的有机体中$^{14}C/^{12}C$之比保持恒定（1.3×10^{-12}），而死的有机体中^{14}C的含量由于衰变而逐渐减少这一基础上。**

^{14}C 的蜕变与考古问题

^{14}C 在 t 时刻的蜕变速度与该时刻的含量成正比

数学模型

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (k > 0)$$

$x = x(t)$ —— 在时刻 t，生物体中 ^{14}C 的存量

设生物体死亡时刻 $t=0$，其时 ^{14}C含量为 x_0

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-kt}$$

已知^{14}C的半衰期为5568年 $\Rightarrow \dfrac{x_0}{2} = x_0 e^{-k\cdot 5568}$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5568} = \frac{0.6931}{5568} = 0.0001244$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{-0.0001244t}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{0.0001244} \ln \frac{x_0}{x(t)}}$$

$$\because\ x(t)=x_0 e^{-kt}$$

$$\boxed{t=\frac{1}{0.0001244}\ln\frac{x_0}{x(t)}}$$

$$\therefore\ x'(t)=-kx(t),\quad x'(0)=-kx(0)=-kx_0$$

$$\frac{x'(0)}{x'(t)}=\frac{x_0}{x(t)}$$

$$\boxed{t=\frac{1}{0.0001244}\ln\frac{x'(0)}{x'(t)}}$$

推测1982年7月出土的长沙马王堆一号墓的年代:

出土木炭标本中 ^{14}C 每克每分钟衰减的原子数为**5.184**个

新木炭中 ^{14}C 每克每分钟衰减的原子数为**6.680** 个

$$t=\frac{1}{0.0001244}\ln\frac{6.680}{5.184}\approx 2036(a)$$

不同情形下混合问题的数学模型

液体混合问题

设一容器有V_0升盐水，含盐 x_0千克,现以 V_{in} 升/分钟的速度注入浓度为C_0千克/升的盐水，快速搅拌后，以 V_{out} 升/分钟的速度抽出盐水，试求容器内的含盐量与时间的关系。

解 设在t 时刻，容器内溶液的含盐量为$x(t)$.

当时间变到 $t+\Delta t$ 时,$x(t)$有改变量Δx .

令这段时间内注入与流出的液体的含盐量分别为Δy 和 Δz,

则 $\Delta x=\Delta y-\Delta z$, 由此得 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}-\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$

令 $\Delta t\to 0$ ，取极限得到求解混合问题的基本方程.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-c(t)v_{out}$$

$$\Delta x=\Delta y-\Delta z,$$

$x(t)=$ 原有含盐量 x_0 $+(0,\ t)$ 注入的盐量 $-(0,\ t)$ 流出的盐量

$x(t+\Delta t)=$原有含盐量$x_0+(0,\ t+\Delta t)$注入的盐量$-(0,\ t+\Delta t)$流出的盐量

$x(t+\Delta t)-x(t)=$ $(t,\ t+\Delta t)$ 注入的盐量 $-(t,\ t+\Delta t)$ 流出的盐量

$$\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-c(t)v_{out}$$

$$c(t)=\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}$$

$$\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}v_{out}$$

$$\text{s.t.}\quad x(0)=x_0$$

混合问题的基本模型

$$\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}v_{out}$$

$$\text{s.t.}\quad x(0)=x_0$$

理解了基本模型，无论条件怎么变，都可以正确地建立微分方程。如，

（1）如果是清水里注入盐水，则 $x(0)=0, C_0\neq 0$

（2）如果是盐水里注入盐水，则 $x(0)\neq 0, C_0\neq 0$

（3）如果是盐水里注入清水，则 $x(0)=x_0, C_0=0$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x(t)}{V_0+(v_{in}-v_{out})t}v_{out}$$

（4）如果 $v_{in}=v_{out}$，则 $\frac{dx}{dt}=c_0v_{in}-\frac{x(t)}{V_0}v_{out}$

（5）如果将两种不同浓度 ($C_{0,1}$和$C_{0,2}$) 的盐水同时以不同的速度$v_{0,1}$和$v_{0,2}$ 注入容器，则

$$\frac{dx}{dt}=(c_{0,1}v_{in,1}+c_{0,2}v_{in,2})-\frac{x(t)}{V_0+\left(v_{in,1}+v_{in,2}-v_{out}\right)t}v_{out}$$

根据各种不同情形，变换题目.

类似方法，可以求解气体混合问题。

设一车间空间容积为10000立方米,空气中含有0.12%的二氧化碳(以容积计算),现将含二氧化碳0.04%的新鲜空气以1000立方米每分钟的流量输入该车间,同时按1000立方米每分钟的流量抽出混合气体，问输入新鲜空气10分钟后，车间内二氧化碳的浓度降到多少？

分析

$$V_0 = 10000 \qquad x(0) = 1000 \times 0.12\% = 12$$

$$c_0 = 0.04\% \qquad v_{in} = v_{out} = 1000$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.04\% \times 1000 - \dfrac{x}{10000} \times 1000 \\ x(0) = 12 \end{cases}$$

$$x(t) = Ce^{-\frac{t}{10}} + 4, C = 8, x(10) = 6.96$$

$$\frac{dx}{dt} = c_0 v_{in} - \frac{x(t)}{V_0 + (v_{in} - v_{out})t} v_{out}$$

例3　抛物线的光学性质

实例：车灯的反射镜面--------旋转抛物面

解　如图为旋转面的轴截面.

设旋转轴 ox轴　光源在$(0,0)$,

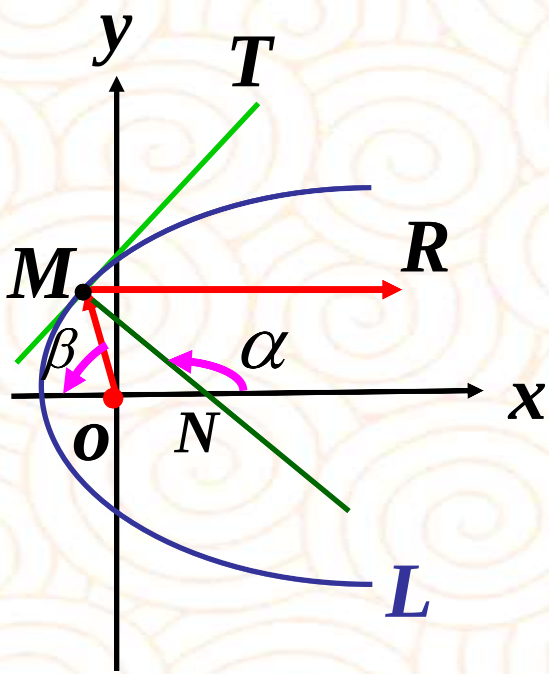
曲线$L: y = y(x)$

设$M(x, y)$为曲线上任一点，

MT为切线，斜率为 y',

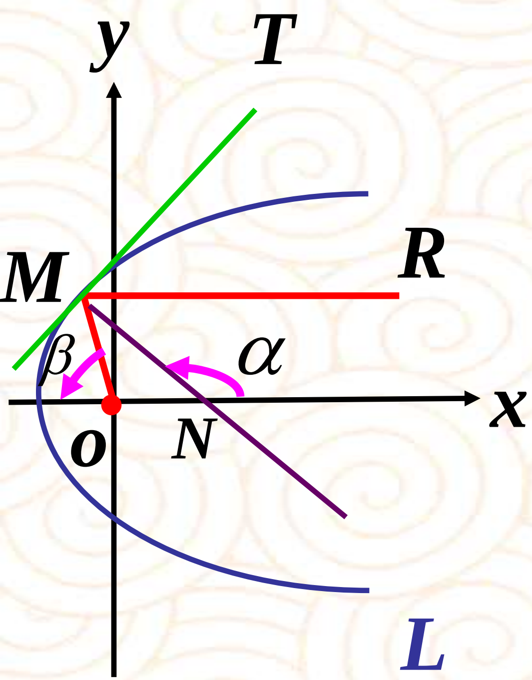
MN为法线，斜率为$\tan\alpha = -\frac{1}{y'}$,

$\because \angle OMN = \angle NMR.$



即：$\tan\angle OMN = \tan\angle NMR.$

即：$\tan\angle OMN = \tan\angle NMR.$



由夹角正切公式得

$$\tan\angle OMN = \tan(\beta - (\pi - \alpha)) = \tan(\beta + \alpha)$$

$$= \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha} = \frac{-\frac{y}{x} - \frac{1}{y'}}{1 - \frac{y}{xy'}} = -\frac{yy' + x}{xy' - y}$$

$$\tan\angle NMR = -\tan\alpha = \frac{1}{y'}$$

得微分方程为：$yy'^2 + 2xy' - y = 0,$

即 $y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{(\frac{x}{y})^2 + 1}.$

令 $u = \frac{y}{x}$，得 $u + x\frac{du}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+u^2}}{u},$

分离变量得: $$\frac{udu}{(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x},$$

令 $1+u^2=t^2$, 则得: $$\frac{tdt}{t(t\pm1)}=-\frac{dx}{x},$$

积分得: $$\ln|t\pm1|=\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,$$ 即 $$\sqrt{u^2+1}=\frac{C}{x}\pm1,$$

平方化简得 $$u^2=\frac{C^2}{x^2}+\frac{2C}{x},$$

代回 $u=\dfrac{y}{x}$, 得 $$y^2=2C(x+\frac{C}{2})$$

抛物线

所求旋转轴为 ox 轴的旋转抛物面方程为

$$y^2+z^2=2C(x+\frac{C}{2}).$$

例4 冷却问题

（冷却定律：物体冷却的速率与温差成正比.）

将一个加热到$50^\circ C$的物体,放在$20^\circ C$的恒温室中冷却,求温度的变化规律.

解

设t时刻, 物体的温度为$T(t)$, 则:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20)$$ (其中k为正常数, 负号表示冷却)

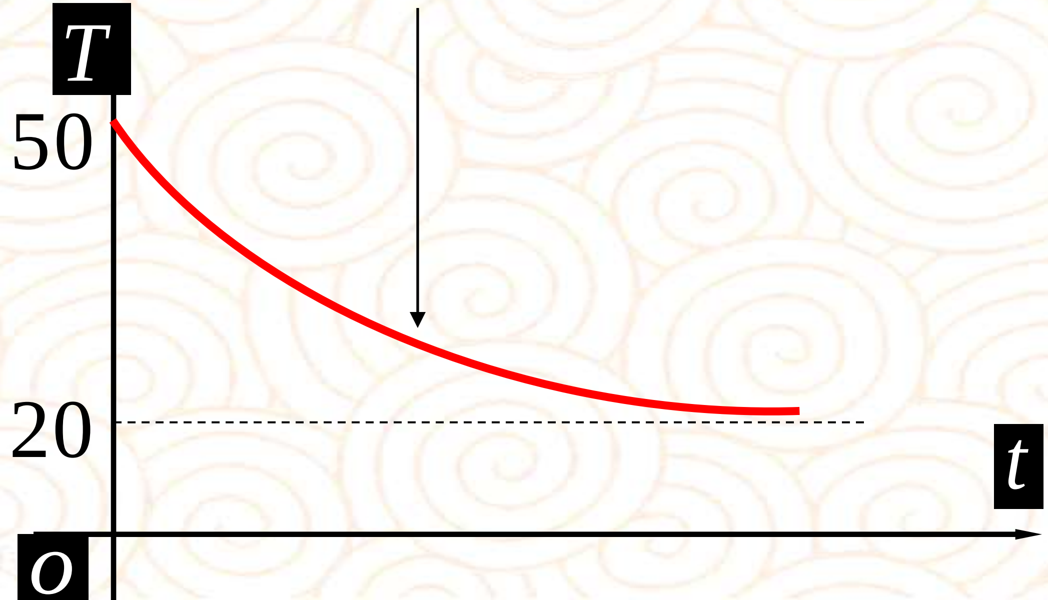
$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \quad (其中k为正常数,负号表示冷却)$$

且$t=0$时,$T=50$

求通解得: $\dfrac{dT}{T-20} = -kdt$ $\qquad T-20 = Ce^{-kt}$

由$t=0, T=50$得: $\qquad C = 30$

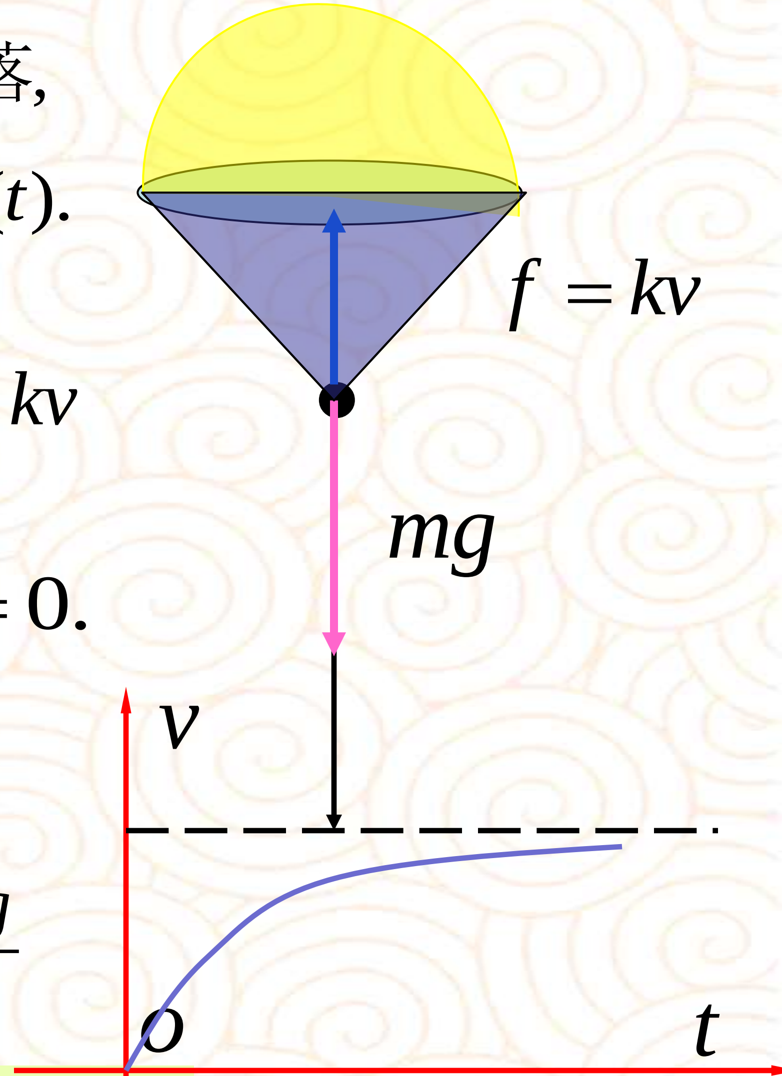
$\therefore$所求规律为: $\qquad T(t) = 20 + 30e^{-kt}$



例5 落体问题

质量为m的物体,由静止开始下落,

已知阻力f与速度v成正比,求$v(t)$.



解 由牛顿运动定律: $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv$

即 $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{k}{m}v=g$ 　且 $t=0\ ,v=0.$

通解为: $v=\dfrac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}.$

由 $t=0,v=0$ 求得: $C=-\dfrac{mg}{k}$

$$\therefore v(t)=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})\,(t\to+\infty,v\to\frac{mg}{k})$$

Malthus 人口模型及其修正

Malthus（1766—1834）英国人口学家，他根据100多年的资料，于1798年提出了人口指数增长模型。

假设： 单位时间内人口的增长量与当时的人口总数成正比。记时间 t 时的人口总数为$N(t)$，单位时间内人口增长量与当时的人口数之比为r

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN$$

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN\\ N(0)=N_0\end{cases}$$

$$N(t)=N_0e^{rt}$$

人口数随时间按指数增长

通过检验，这个模型相当准确地反映了地球上1700—1961年间的人口数，但 $t \to \infty$ 时，$N \to +\infty$ 这与事实不符。

Remark 这一模型仅适用于生物种群的生存环境较优雅、宽松的情况。当生物种群数量增长到一定值时，恶化的生态环境将抑制种群数量的增长，进而出现负增长，此时 Malthus 模型不再适用。

1838 年荷兰数学生物学家 Verhulst 指出，导致此情况的原因是Malthus 未考虑“密度制约”因素，即在资源给定的一个环境中，生物数量越多，每个生物体获得的资源越少，这将抑制生育率，增加死亡率。

修正的人口模型

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1-\dfrac{N}{k}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$N(t) = \frac{k N_0}{N_0 + (k - N_0)e^{-rt}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} N(t) = k$$

最大容纳量

小结： 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微量分析平衡关系列方程

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

1.他是嫌疑犯吗？

某公安局于晚上7：30发现一具女尸，当晚8：20分法医测得尸体温度为32.6℃，一小时后尸体被抬走时测得体温为31.4℃，假定室温在几小时内均为21.1℃。由案情分析得知张某是此案的主要嫌疑犯，但张某矢口否认，并有证人说：“下午张某一直在办公室，下午5时打了一个电话后才离开办公室”，从办公室到凶案现场步行需5分钟，问张某能否被排除在嫌疑犯之外？

20:20---32.6°C,21:20---31.4°C, 室温:21.1°C。确定死亡时间是下午5点5分以前还是以后?

分析 设T(t)表示t时刻尸体温度，并记8:20为t=0，则

T(0)= 32.6°C,T(1)= 31.4°C

假设受害者死亡时体温是正常的，即T= 37℃，求T(t)= 37℃时的时间t

人体体温受大脑神经中枢调节，人死后体温调节功能消失，尸体温度受外界环境的影响，尸体温度的变化率服从冷却定律，即有

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 21.1) \Longrightarrow T(t) = 21.1 + Ce^{-kt}$$

由T(0)= 32.6°C, T(1)= 31.4°C，得c=11.5, k≈0.11

$$T(t) = 21.1 + 11.5e^{-0.11t}$$

当T= 37°C时， t=−2. 95小时 ≈2小时57分钟

死亡时间T_d≈8小时20分-2小时57分钟=5时23分

结论：张某不能被排除在嫌疑犯之外

例2 游船上的传染病人数

一只游船上有800人，一名游客患了某种传染病，12小时后有3人发病，由于这种传染病没有早期症状，故感染者不能被及时隔离，直升机将在60至72小时之间将疫苗运到，试估算疫苗运到时患此传染病的人数。

800人，一名游客患了某种传染病，12小时后有3人发病，60至72小时之间患此传染病的人数。

解　设y(t)表示发现首例病人后t小时时刻的感染人数

则800−y(t)表示此刻未受感染的人数.由题意知y(0)=1, y(12)=3

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(800-y) \\ y(0)=1 \\ y(12)=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = \dfrac{800}{1+Ce^{-800kt}} \\ y(0)=1 \\ y(12)=3 \end{cases}$$

$$800k \approx 0.09176, \quad C = 799 \qquad y(t) = \frac{800}{1+799e^{-0.09176t}}$$

t=60时感染人数为 y(60) ≈188

t=72时感染人数为 y(72) ≈385

可见传染病流行时及时采取措施是至关重要的

例. 设函数 $y(x)\ (x \ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x) > 0,\ y'(0) = 1$

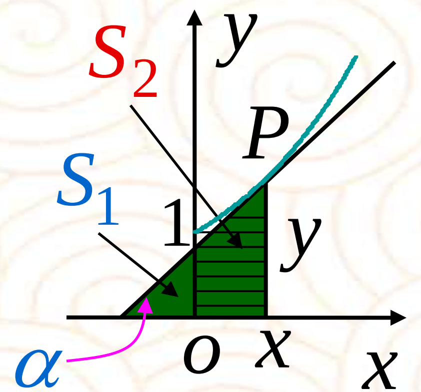
$y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间[0, x] 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1 - S_2 \equiv 1$, 求 $y = y(x)$ 满足的方程 .

解: 因为 $y(0) = 1,\ y'(x) > 0$, 所以 $y(x) > 0$.

设曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线倾角为 α, 于是

$$S_1 = \frac{1}{2} y^2 \cot\alpha = \frac{y^2}{2y'}$$

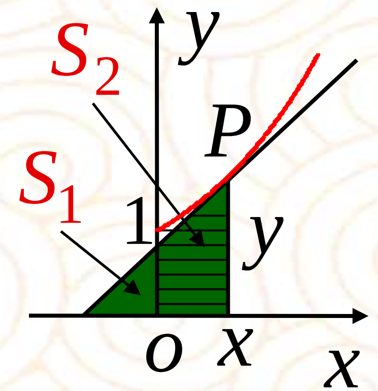
$$S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$ $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'}$

两边对 x 求导, 得 $yy'' = (y')^2$

定解条件为 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$



令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$, 再解 $y' = y$, 得

$y = C_2 e^x$, 再利用 $\boldsymbol{y(0) = 1}$ 得 $C_2 = 1$, 故所求曲线方程为

$y = e^x$

例 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\underline{\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$$

令 $u=x-t$

则 $du=-dt$

解: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

一阶线性非齐次微分方程

利用常数变易法或公式,可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$