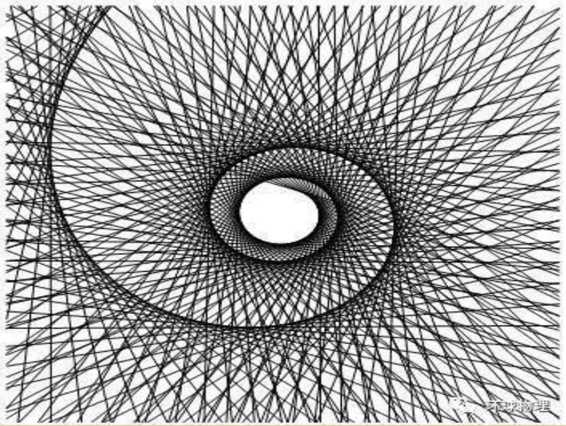
# 第一章　函数、极限、连续

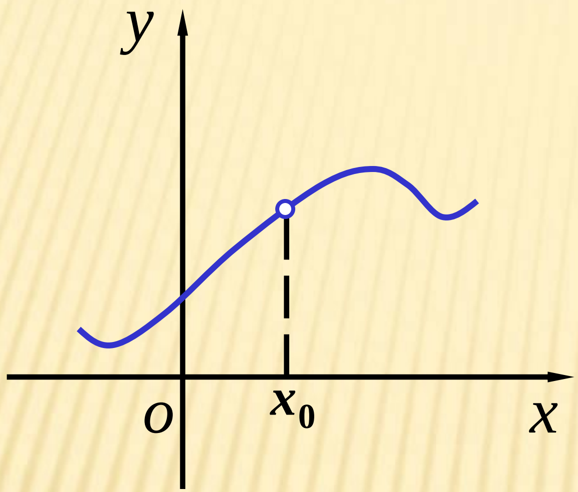
## 第五节 连续函数

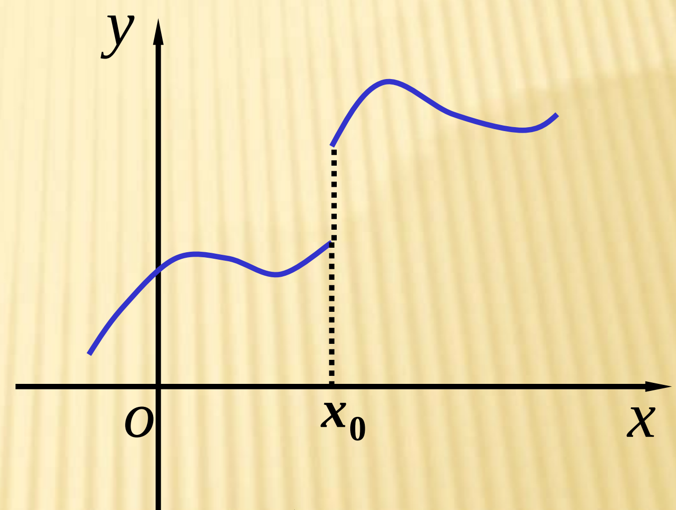
- 函数的连续性概念与间断点的分类
- 连续函数的运算性质与
  初等函数的连续性
- 闭区间上连续函数的性质
- 函数的一致连续性
- 不动点与压缩映射
- 小结与思考题

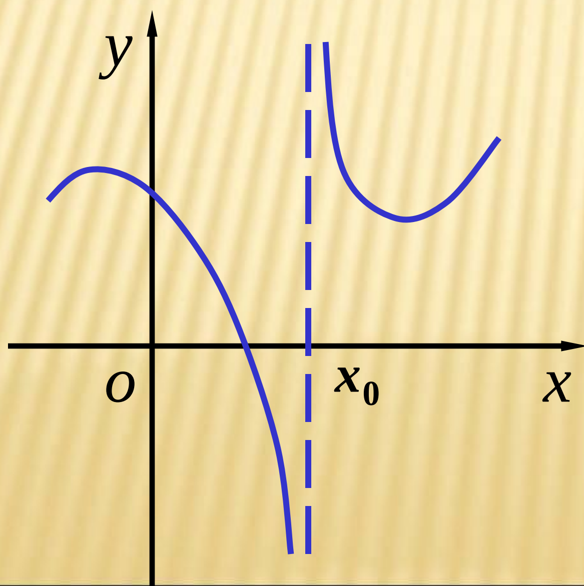


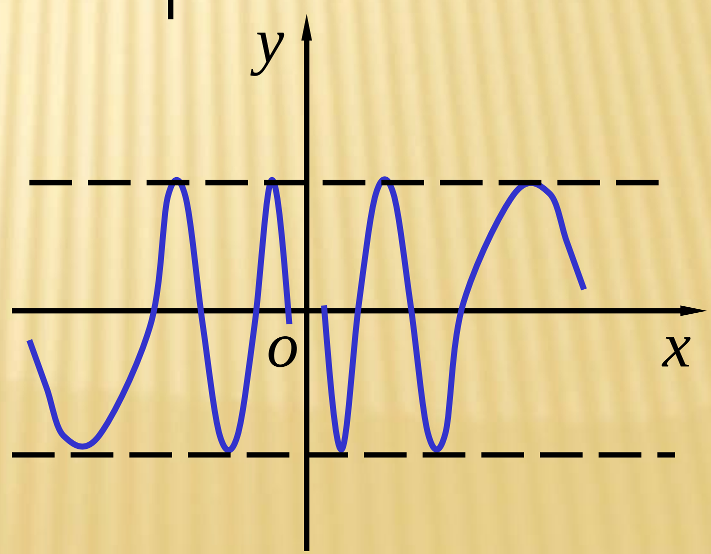
**作业: Page86.**
**9, 10, 11, 12, 13**

# 第一部分　函数的连续性概念与间断点的分类



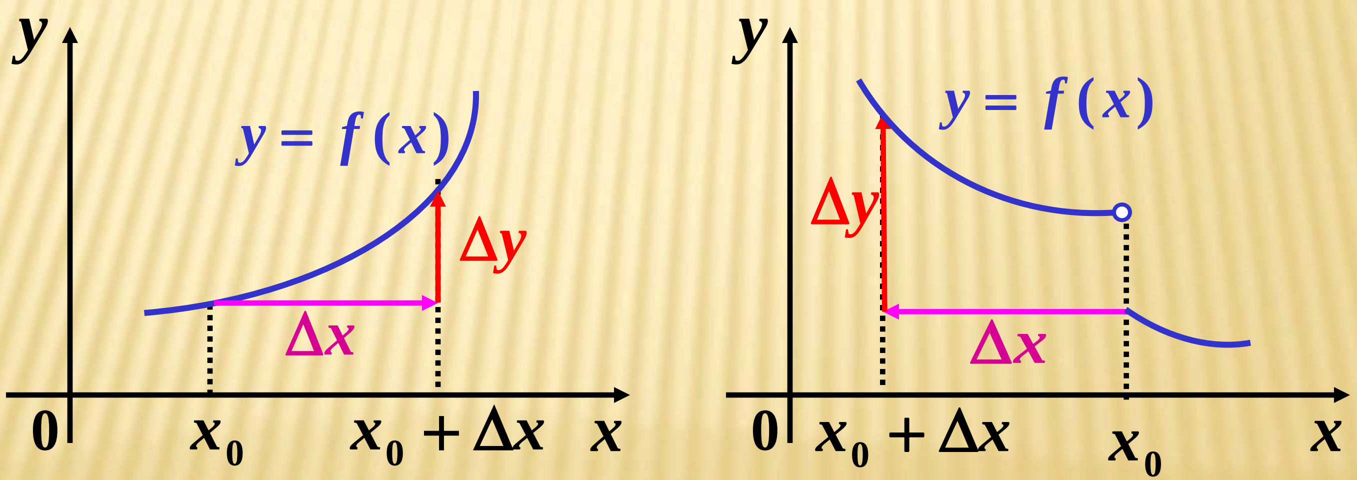
# 一、函数的连续性

## 1.函数的增量

设函数 $f(x)$在$U(x_0)$内有定义, $\forall\ x \in U(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$，称为**自变量在点 $x_0$的增量**.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数值的增量.



## 2.连续的定义

**定义 1** 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x$ 趋向于零时，对应的函数值的增量 $\Delta y$ 也趋向于零，即 $\boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0}$

或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0,$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，$x_0$ 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0+\Delta x,$ $\Delta y = f(x)-f(x_0),$

$\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$，$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$.

**定义 2**　设函数 $f(x)$在$U(x_0)$内有定义，如果函数 $f(x)$当$x \to x_0$时的极限存在，且等于它在点$x_0$处的函数值 $f(x_0)$，即 $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

则称函数 $f(x)$在点$x_0$连续.

"$\varepsilon-\delta$"定义：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当$|x - x_0| < \delta$时，

恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

**例1** 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在 $x=0$

处连续.

**证** $\because \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,$ 又 $f(0)=0,$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

## 3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$处右连续.

**定理** 函数$f(x)$在$x_0$处连续 $\Longleftrightarrow$ 函数$f(x)$在$x_0$处既左连续又右连续.

**例2** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x+2) = 2 = f(0),$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(x-2) = -2 \neq f(0),$

$f(x)$在$x=0$处是右连续，但不是左连续，

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

## 4.连续函数与连续区间

**在开区间$(a,b)$上每一点都连续的函数,称为在开区间$(a,b)$内的连续函数,或者说函数在开区间$(a,b)$内连续.**

如果函数在开区间$(a,b)$内连续，并且在左端点$x=a$处右连续，在右端点$x=b$处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

$C(I)$:区间$I$上连续函数的全体构成的集合.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如，多项式函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

**例3** 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

**证** 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

URL

$$\because\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,\qquad \text{则}\ |\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 $\alpha$, 当 $\alpha\ne 0$ 时，有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$,

$$\text{故}\ 0\le|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|,\qquad \therefore \text{当}\ \Delta x\to 0\ \text{时}, \Delta y\to 0.$$

即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

$$\sin x\in C(-\infty,+\infty).$$

# 二、函数的间断点 discontinuous point

函数 $f(x)$在点 $x_0$处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点$x_0$处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 $x_0$处不连续(或间断)，并称点 $x_0$为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

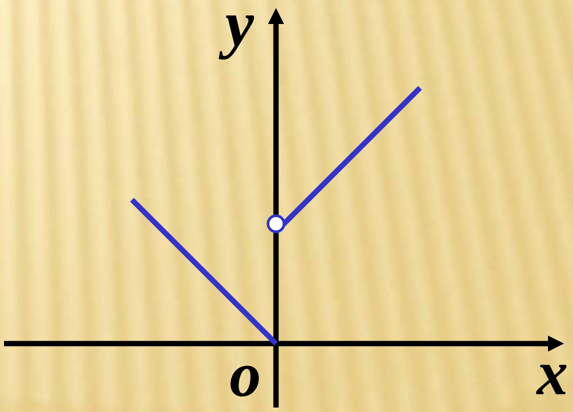
**1.跳跃间断点** 如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

**例4** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** $f(0-0)=0,\qquad f(0+0)=1,$

$\because\ f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore\ x=0$ 为函数的跳跃间断点.



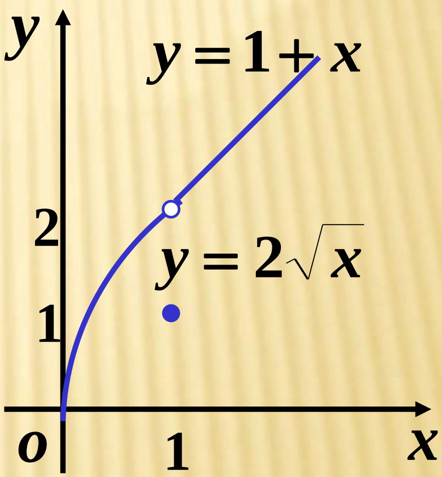
**2.可去间断点** 若 $f(x)$在点 $x_0$处的极限存在，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

但$A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$在点 $x_0$处无定义，则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**.

**例5** 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1 + x, & x > 1, \end{cases}$$

在$x = 1$处的连续性.




**解** $\because f(1) = 1,$

$f(1-0) = 2, \ f(1+0) = 2,$

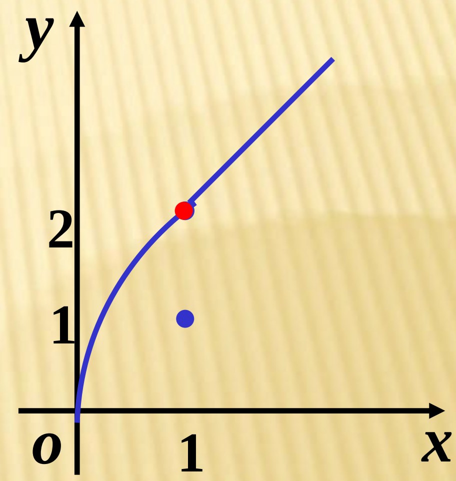
$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1), \ \therefore x = 1$为函数的可去间断点.

**注意** 可去间断点只要改变或者补充间断点处函数的定义，则可使其变为连续点.

**例5** 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

在$x=1$处的连续性.




如例5中, 令 $f(1)=2$,

则 $$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1+x, & x\ge 1,\end{cases}$$

在$x=1$处连续.

**跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.**

**特点:** 函数在点$x_0$处的左、右极限都存在.

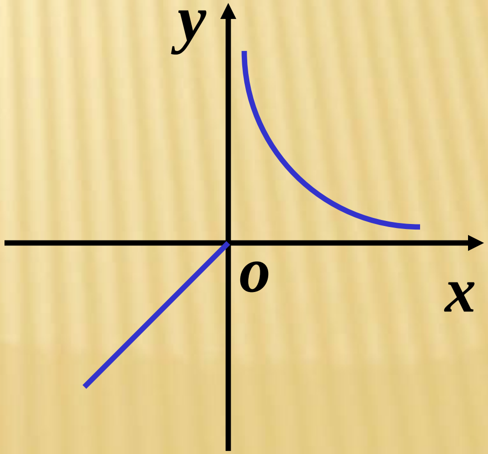
## 3.第二类间断点

若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

（不属于第一类的）

---

**例6** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.




**解** $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore x=0$ 为函数的第二类间断点．

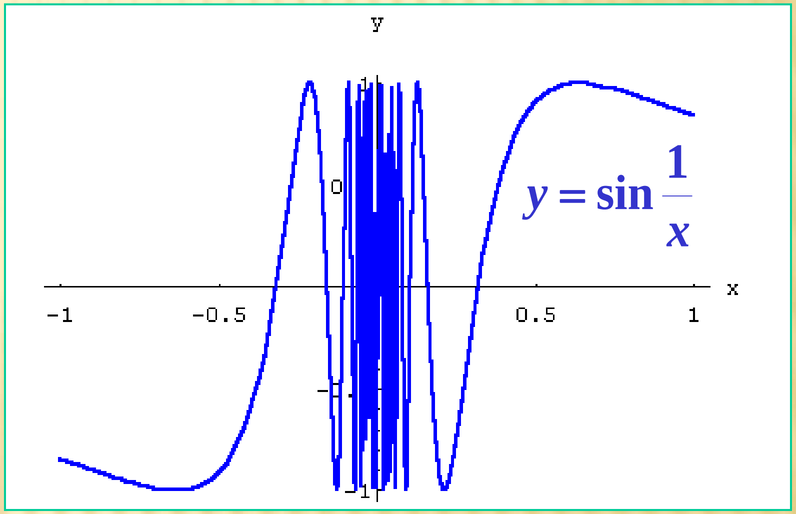
这种情况称为无穷间断点.

**例7** 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore$ $x=0$ 为第二类间断点.



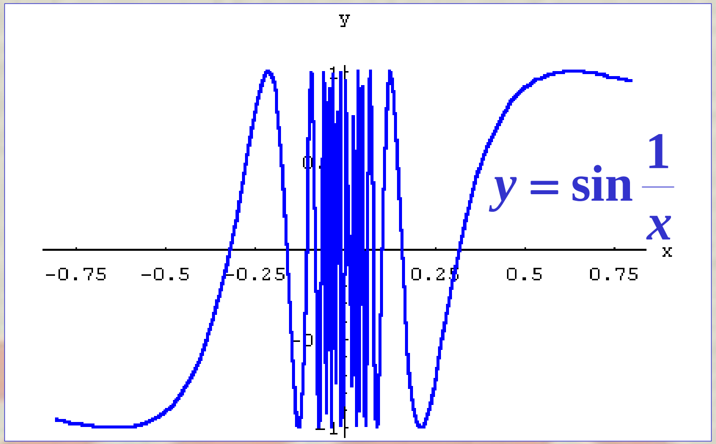

函数值在 $-1$, $1$ 间无限次往复振荡.

这种情况称为振荡间断点.

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

**证** 取 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 且 $x_n \neq 0$;

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0,$$




又取 $\{x_n'\}=\left\{\dfrac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi}\right\}$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$, 且 $x_n' \neq 0$;

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{4n+1}{2}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$,

二者不相等, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

## ★ 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.(用归并原理可证）

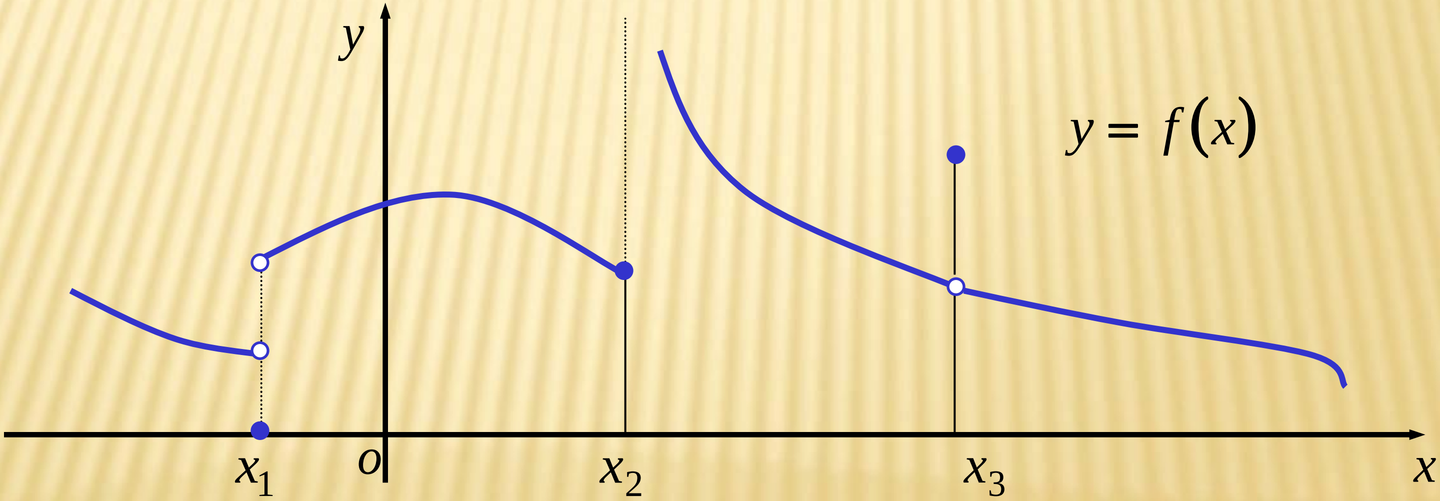
★ $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ -x, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

仅在$x$=0处连续，其余各点处处间断.

★ $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ -1, & \text{当}x\text{是无理数时},\end{cases}$

在定义域 $R$ 内每一点处都间断，但其绝对值函数处处连续.

判断下列间断点类型:



**例8** 当$a$取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

**解** $\because f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\ \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

# 第二部分 连续函数的运算性质与初等函数的连续性

## 一、和、差、积、商的连续性

**定理1** 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点$x_0$处连续,

则: 1) $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点$x_0$处都连续;

2) $f(x)$在$x_0$处局部有界.

例如, $\sin x, \cos x$在$(-\infty, +\infty)$内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

# 二、反函数与复合函数的连续性

**定理2　严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.**

例如, $y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续,

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=arc\cot x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

**定理** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，函数 $f(u)$在点 $u_0$连续, $u=g(x)$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f(u_0)=f[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)]$.

**证** $\because f(u)$在点 $u=u_0$连续,

$\therefore \forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \eta>0$, 当 $|u-u_0|<\eta$时, $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$ 恒成立.

又 $\because \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$,

$\therefore$ 对于$\eta>0$, $\exists\, \delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$时,

恒有 $|g(x)-u_0|=|u-u_0|<\eta$ 成立. $\therefore |f[g(x)]-f(u_0)|<\varepsilon$.

即 $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$时,

$$|f(u)-f(u_0)|=|f[g(x)]-f(u_0)|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f(u_0)=f[\lim_{x\to x_0} g(x)].}$$

**定理3　复合函数的连续性.**

设 $y=(f\circ g)(x)=f\left(g\left(x\right)\right)$是由$y=f\left(u\right)$,

$u=g\left(x\right)$复合而成, $x_0\in D\left(f\circ g\right)$.

若$g$在$x_0$处连续, $u_0=g(x_0)$, 且$f$在$u_0$处连续,

**则:** $f\circ g$在$x_0$处连续.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f[g(x)]}=f(g(x_0))=\boxed{f[\lim_{x\to x_0} g(x)]}.$$

**意义**　**1.极限符号可以与函数符号互换;**

**2.变量代换($u=g(x)$)的理论依据.**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f[g(x)]} = f(g(x_0)) = \boxed{f[\lim_{x\to x_0} g(x)]}.$$

意义　1.极限符号可以与函数符号互换;

2.变量代换$(u=\varphi(x))$的理论依据.

例9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

**例10** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

**解** 令 $e^x-1=y$, 则 $x=\ln(1+y)$, 当$x\to 0$时, $y\to 0$.

$$\text{原式}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}}=1.$$

同理可得: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.}$ P76

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{2^x+3^x+6^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{2^x+3^x+6^x-3}\cdot\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3x}}$$

$$=(e)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3x}}=(e)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)+(6^x-1)}{3x}}$$

$$=e^{\frac{\ln2+\ln3+\ln6}{3}}=6^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3}\right)}{x}} \overset{?}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3}\right)}{x}}$$

当$x \to 0$时，$\ln(1+x) \sim x$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^x+3^x+6^x-3}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)+(6^x-1)}{3x}}$$

$$= e^{\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 6}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}[\ln(2^x+3^x+6^x)-\ln 3]}$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{[\ln(2^{0+x}+3^{0+x}+6^{0+x})-\ln(2^0+3^0+6^0)]}{x}}$

$= \cancel{\lim} e^{[\ln(2^x+3^x+6^x)]'(x=0)}$.

$[\ln(2^x+3^x+6^x)]' = \dfrac{\cancel{\ln 2}\ \ln 2\cdot 2^x+\ln 3\cdot 3^x+\ln 6\cdot 6^x}{2^x+3^x+6^x}$

$= e^{\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 6}{3}}$

$= e^{\frac{2\ln 6}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$

# 三、初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^{u}, u = \mu \log_a x.$

在$(0, +\infty)$内连续,

(均在其定义域内连续)

**定理5** 基本初等函数在定义域内是连续的.

**定理6** 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

**注意** 1. 初等函数仅在其**定义区间**内连续, 在其定义域内不一定连续;

例如, $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

在这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x=0$, 及$x\geq 1$,

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

**注意** 2. 初等函数求极限的方法<u>代入法.</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\quad (x_0\in\text{定义区间})$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in 定义区间)$$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$.

解 原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e - 1}$.

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

或用分子的等价无穷小代换

## 幂指函数的极限

设$f$和$g$是两个函数，它们定义在集合$A$上.

若$\forall x\in A,\ f(x)>0$,则称形如$f(x)^{g(x)}$的函数为 **幂指函数.**

$$\boxed{f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}}$$

**当 $f(x),g(x)$都连续时,**

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

**例13** 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$

**例14** 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\cot x}$

当 $f(x)$,$g(x)$都连续,相关极限为常数，$\lim f(x) > 0$时

$f(x) > 0$ $\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}>0$

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

$$= e^{\lim g(x)\cdot\lim\ln f(x)}$$

$$= e^{\lim g(x)\cdot\ln\left[\lim f(x)\right]}$$

$$= e^{\ln\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}}$$

$$= \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

# 第三部分 闭区间上连续函数的性质

有界性定理

最大值和最小值定理

零点存在定理

介值定理

值域定理

一致连续

## 一 有界性定理

$f(x)$在$[a,b]$上有界，即集合：$R_f=\{f(x)|x\in[a,b]\}$

是一个有界数集。

**定理5.4** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

若 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

注意：若[a,b]改成(a,b]或[a,b),(a,b)结论未必成立.

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间(0,1)上连续，但无界.

证明：（反证法+闭区间套定理）

## 一 有界性定理

**定理5.4** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证明:（应用反证法及闭区间套定理）

假设 $f(x)$在$[a,b]$上无界，将$[a,b]$等分为两个小区间

$[a,\frac{a+b}{2}]$与$[\frac{a+b}{2},b]$,则$f(x)$至少在其中之一上无界,

把它们记为$[a_1,b_1]$；再将闭区间$[a_1,b_1]$等分为两个小

闭区间$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$与$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，同样$f(x)$至少在其中之一

上无界，把它们记为$[a_2,b_2]$;$\cdots$这样的步骤一直做下去，

可得一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$, $f(x)$在其中任何一个闭区间

$[a_n,b_n]$上都是无界的.根据闭区间套定理知,

$f(x)$ 在任一$[a_n,b_n]$上都是无界的．根据闭区间套定理知，

存在唯一的实数$\xi$属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，并且

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

因为 $\xi\in[a,b]$， 而f(x)在点 连续，

由连续函数的局部有界性定理知，

存在$M>0,\delta>0$，对一切$x\in O(\xi,\delta)\cap[a,b]$，成立$|f(x)|\le M$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，$\therefore$ $n$充分大时，$[a_n,b_n]\subset O(\xi,\delta)\cap[a,b]$，

$\therefore$ $f(x)$ 在这些闭区间$[a_n,b_n]$($n$充分大)上有界

从而产生矛盾，证毕.

# 二、最大值和最小值定理

**定理5.5（最大值和最小值定理）** 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

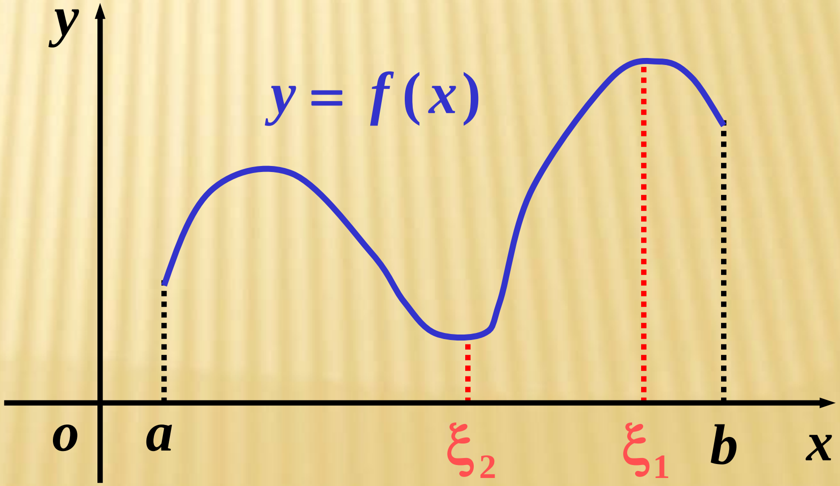
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

有 $f(x) \geq f(\xi_2)$,

$f(x) \leq f(\xi_1)$.



**定理5.5（最大值和最小值定理）** 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

证明 (应用致密性Weierstrass定理)

由确界定理，集合$R_f=\{f(x)|x\in[a,b]\}$是一个有界数集,所以必有上（下）确界,记 $\alpha=\inf R_f,\beta=\sup R_f$

现在证明存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\alpha$.

按下确界的定义，一方面$\forall x\in[a,b]$，成立$f(x)\geq\alpha$；

另一方面$\forall\varepsilon>0,\exists x\in[a,b]$,使得$f(x)<\alpha+\varepsilon$,于是，取

$\varepsilon_n=\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$，得到一个数列$\{x_n\},x_n\in[a,b]$,并且满足：

$\alpha\leq f(x_n)<\alpha+\dfrac{1}{n}$ 因$\{x_n\}$是有界数列，由Weierstrass定理知，

存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$,其极限记为$\xi$.则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=\xi$且$\xi\in[a,b]$

**定理5.5（最大值和最小值定理）** 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

考虑不等式：$\alpha \le f(x_{n_k}) < \alpha + \dfrac{1}{n_k} \quad k = 1,2,\cdots$

令$k \to \infty$,由夹逼准则及 $f(x)$在$\xi$点的连续性知，

$$f(\xi) = \alpha = \inf R_f$$

故$f(x)$在$[a,b]$上的$\xi$点取到最小值$\alpha$

同理可证,存在$\eta \in [a,b]$,使得$f(\eta) = \beta = \sup R_f$.

**注意:** 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.