4.函数极限与数列极限的关系

设 $f:\overset{0}{U}(x_0)\to R$, 对 $\overset{0}{U}(x_0)$中任何数列$\{x_n\}$,

对应于 $f(x)$, 有数列$\{f(x_n)\}$,

即$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$

定理:（函数极限的归并原理—Heine定理）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$$\forall\{x_n\}\in\overset{0}{U}(x_0), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

对 $x\to x_0, x\to x_0^+$,或 $x\to x_0^-, x\to\infty, x\to\pm\infty$ 亦成立.

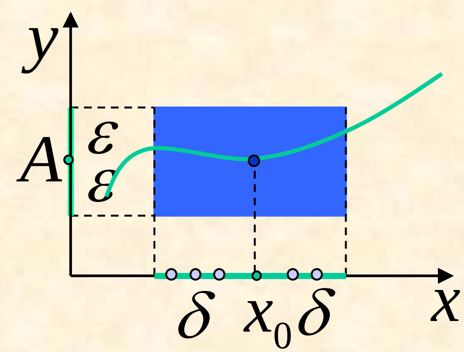
定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \rightleftarrows \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

证: “$\Rightarrow$” 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,

对上述 δ, $\exists\ N$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

于是当 $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.



故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

“$\Leftarrow$” 可用反证法证明

“$\Leftarrow$”反证法：假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，

$$\exists x:0<|x-x_0|<\delta\text{时，有}|f(x)-A|\geq\varepsilon_0.$$

取 $\delta_1=1$，$\exists x_1, 0<|x_1-x_0|<1$ 时，有 $|f(x_1)-A|\geq\varepsilon_0$；

取 $\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2},|x_1-x_0|\right\}$，$\exists x_2, 0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}$ 时，有 $|f(x_2)-A|\geq\varepsilon_0$；

$\cdots\cdots$ $\qquad$ $\cdots\cdots$

取 $\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n},|x_{n-1}-x_0|\right\}$，$\exists x_n, 0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ 时，有 $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$；

$\cdots\cdots$ $\qquad$ $\cdots\cdots$

由此得数列 $\{x_n\}$，因 $\delta_n<\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，

且 $x_n\neq x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，与已知矛盾，$\therefore$ 假设错误

归并原理—Heine定理

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff$$

$\forall$数列$\{x_n\}\in \overset{0}{U}(x_0)$，$f(x_n)$有定义

且 $x_n \to x_0$时 $(n\to\infty)$，

恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

(A为有限数或∞).

说明: 此定理常用于判断函数极限不存在 .

法1 找一个数列 $\{x_n\}$: 且 $x_n \to x_0\ (n\to\infty)$,

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在 .

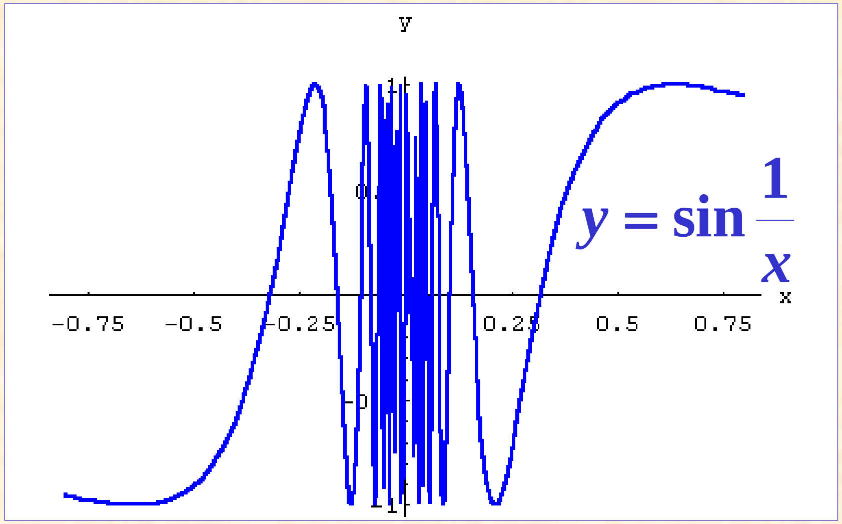
法2 找两个趋于 x_0 的不同数列$\{x_n\}$及 $\{x_n'\}$,

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$

例9 证明 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$, 且 $x_n\neq 0$;

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$



又取 $\{x_n'\}=\left\{\dfrac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi}\right\}$,

则 $\lim_{n\to\infty} x_n'=0$, 且 $x_n'\neq 0$;

而 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{4n+1}{2}\pi=\lim_{n\to\infty}1=1$,

二者不相等, 故 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists$时刻, 从此“时刻”以后,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

上页 下页 返回

过　程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n>N$	$\lvert x\rvert>N$	$x>N$	$x<-N$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			

过　程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

第二部分　性质与运算法则

1. 有理运算法则：

2.　极限唯一性

3.　局部有界性

4.不等式性质

5. 复合运算法则：

6、求极限方法举例

1.有理运算法则:

设在x的某一变化过程中$(x \to x_0 (x_0^+, x_0^-), x \to \infty(+\infty,-\infty))$,

$\lim f(x) = a, \lim g(x) = b$, 则

$$\lim\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b$$

$$\lim\left[f(x) g(x)\right] = \lim f(x) \lim g(x) = ab$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$$

（可推广到有限个函数的情形）

推论: (1) $\lim(kf(x)) = ka, k$ 为常数；(2) $\lim(f(x))^m = a^m, m \in Z^+$

(3) $\lim(k_1 f(x) + k_2 g(x)) = k_1 \lim f(x) + k_2 \lim g(x) = k_1 a + k_2 b$

2. 极限唯一性

定理　若$\lim f(x)$存在,则极限唯一.

证　假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$.

由极限定义，对任意$\varepsilon>0$，分别存在正数

δ_1，δ_2，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，有$|f(x)-B|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad |f(x)-B|<\varepsilon$$

同时成立. 于是，对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|A-B|&=|[f(x)-B]-[f(x)-A]|\\&\leqslant|f(x)-B|+|f(x)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 2ε 是任意小的正数，所以 $A=B$，即极限值唯一.

或用归并原理也可证明

3. 局部有界性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

则$\exists M>0,\delta>0,\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$,有$|f(x)|\le M.$

$f(x)$在x_0处是局部有界的.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow f(x)$在$x_0$处是局部有界的.

证 对$\varepsilon=1,\exists\delta>0,\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$,有$|f(x)-A|\le 1.$

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le 1+|A|.$$

取$M=1+|A|$即可证.

4.不等式性质

定理(局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且$A>0$(或$A<0$),

则$\exists\delta>0$, 当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时, $f(x)\ge q>0$(或$f(x)\le q<0$).

(A>0, A/2; A<0, -A/2)

定理(局部保序性) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B.$

若$\exists\delta>0,\forall x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)$,有$f(x)\le g(x)$,则$A\le B.$

(反证,设A>B,则有A-B>0,差的极限等于极限之差,局部保号性,f(x)>g(x),矛盾)

推论 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$,且$\exists\delta>0$,当$x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时,

$f(x)\ge 0$(或$f(x)\le 0$),则$A\ge 0$(或$A\le 0$).

推论 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,且$A<B$

$\Rightarrow \exists\delta>0, \forall x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)$,有$f(x)<g(x)$.

取$\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$,

$\exists\delta_1, \forall x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta_1)$,有$f(x)-A<\varepsilon$,得$f(x)<\dfrac{A+B}{2}$.

$\exists\delta_2, \forall x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta_2)$,有$g(x)-B>-\varepsilon$,得$g(x)>\dfrac{A+B}{2}$.

令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则$\forall x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$,必有$f(x)<g(x)$

定理（夹逼准则） 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} h(x)=A.$

若 $\exists\delta>0, \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，

则 $\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$

(利用函数极限定义，或归并原理—Heine定理及数列极限的夹逼准则可证)

夹逼准则 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.若$\exists\delta>0, \forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$,

有$f(x)\le g(x)\le h(x)$,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

证: $\forall\varepsilon>0, \because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \therefore \exists\delta_1>0$，使当

$0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

又$\because \lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A, \therefore \exists\delta_2>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta_2$,

有 $A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon$.

取 $\delta'=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta\}$, 于是当 $0<|x-x_0|<\delta'$ 时,

便有 $A-\varepsilon<f(x)\le g(x)\le h(x)<A+\varepsilon$,

成立,即 $|g(x)-A|<\varepsilon$. 由此证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

5.复合函数极限的运算法则：

设 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x)), x\in \overset{0}{U}(x_0)$是由$y=f(u)$, $u=g(x)$复合而成。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a$, 并且存在$\delta_0$,

使得对于每个$x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta_0)$, 都有$g(x)\neq u_0$

则：$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=a.$$

将自变量x的极限 转化为中间变量u的极限

设 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x)),x\in \overset{0}{U}(x_0)$是由$y=f(u),u=g(x)$复合而成。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0,\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a$, 并且存在$\delta_0$,

使得对于每个$x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta_0)$,都有$g(x)\neq u_0$

则：$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a.$

证：$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a \Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$, 当$\boxed{0<|u-u_0|<\eta}$时, 有$|f(u)-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0 \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有$|g(x)-u_0|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_0\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$0<|g(x)-u_0|=|u-u_0|<\eta$

故 $|f[g(x)]-a|=|f(u)-a|<\varepsilon$， 得证.

例. 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解: 令 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$

$\because \quad \lim\limits_{x\to 3} u=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{u\to\frac{1}{6}}\sqrt{u}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

将自变量x的极限 转化为中间变量u的极限

证明: 当 $x_0>0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

$$\boxed{\text{若} \lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \to u_0} f(u) = a,}$$

$$\text{则} \boxed{\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = a.}$$

例: $f(u) = \begin{cases} 2, u \neq 0 \\ 0, u = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases},$

例:

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a$,

则 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a.}$

$$f(u)=\begin{cases}2, u\neq 0\\ 0, u=0\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases},$$

$$f(g(x))=\begin{cases}0, x\neq 0\\ 2, x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))=0. \neq \lim_{u\to 0} f(u)=2.$$

$x_0=0$, $u_0=0$ $\quad\because x\neq 0$时, $g(x)=u_0$.

例．求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

解：方法 1　令 $u=\sqrt{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}u=1$,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{u^2-1}{u-1}=u+1$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{u\to 1}(u+1)=2$$

方法 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$$

$$=2$$

6、求极限方法举例

例10 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = \lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$= (\lim\limits_{x\to 2}x)^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$= 2^2 - 3\cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3 - \lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

上页 下页 返回

例11 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to1$时,分子,分母的极限都是零. $(\dfrac{0}{0}型)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例12 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

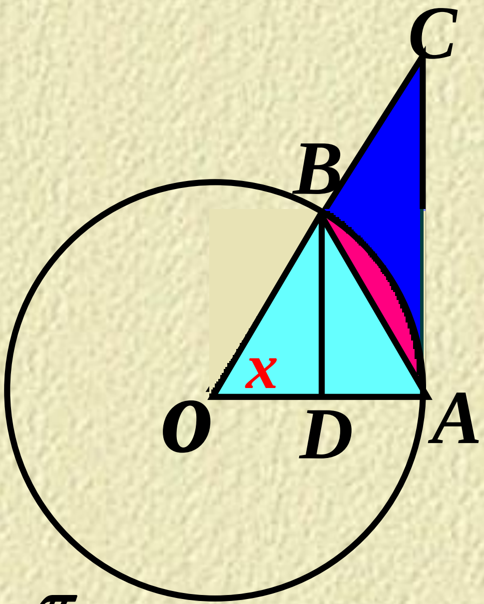
解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大.$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷因子分出法)

第三部分 两个重要极限



(1) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

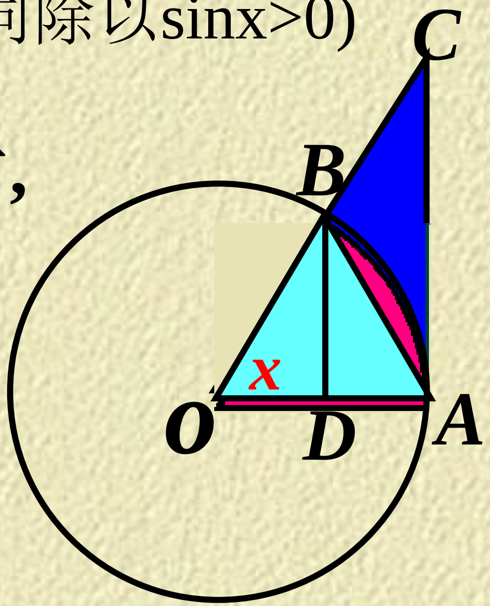
扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$,　$x =$ 弧 AB,　$\tan x = AC$,

上页　下页　返回

于是有 $\sin x = BD,\quad x = 弧AB,\quad \tan x = AC,$

$\therefore \sin x < x < \tan x,$ 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$ (同除以sinx>0)



上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x$$

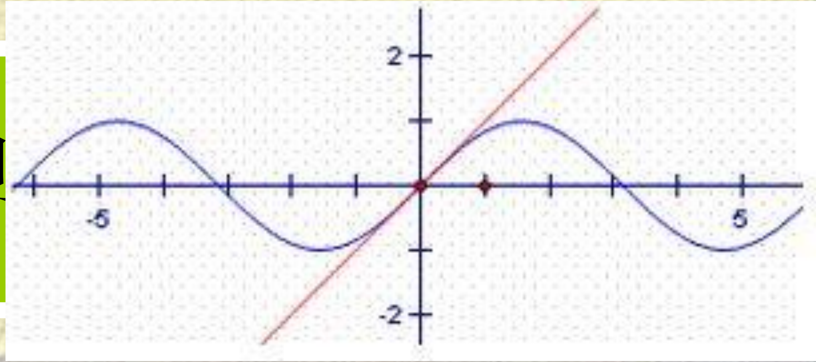
$$= 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2} = 0,\qquad \therefore \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1,\qquad$ 又 $\because \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1,\qquad \therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

在实际应用中，常用：

若 $x \to x_0$ 时， $u(x) \to 0,$ 则



例13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1$

例14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2$

令 $\dfrac{x}{2}=t$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}$$

例15 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\tan 3x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\left[\tan 3\left(\dfrac{\pi}{6}-t\right)\cdot\tan t\right]$

令 $\dfrac{\pi}{6}-x=t$

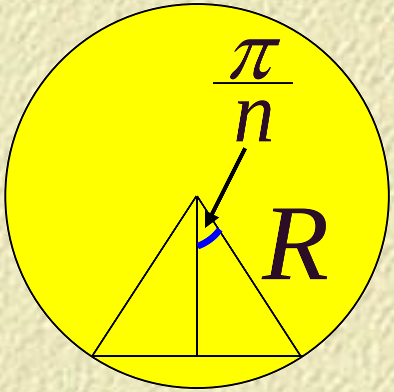
$$=\lim_{t\to 0}[\cot 3t\cdot\tan t]=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{\tan 3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{3t}{\tan 3t}=\frac{1}{3}$$

上页 下页 返回

例. 已知圆内接正 n 边形面积为 $A_n = nR^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \pi R^2$.



证:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \pi R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cos\frac{\pi}{n}$$

$$= \pi R^2$$

说明: 计算中注意利用 $\boxed{\lim\limits_{\phi(x)\to 0} \frac{\sin\phi(x)}{\phi(x)} = 1}$

上页 下页 返回

(2) $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$

当 $x \geq 1$时， 有$[x] \leq x \leq [x]+1$, 取倒数后，+1易知

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^x \leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} \cdot \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]}) = e,$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} \cdot \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} = e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xlongequal{\text{令 } t=-x} \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

在实际应用中，常用：

若$x \to x_0$时，$u(x) \to \infty$,则

$$\lim_{x \to x_0}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e.$$

$$1^{\infty}$$

若$x \to x_0$时，$u(x) \to 0$,则

$$\lim_{x \to x_0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

$$1^{\infty}$$

例16 求 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}$

$$=\frac{1}{e}.$$

例17 求 $\lim_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}$$

$$=e^{2}.$$

例18 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.}$$

例18 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

解:

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot 3x\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-6}$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ )\lim\limits_{x\to+\infty}(\ )\lim\limits_{x\to+\infty}(\ )\lim\limits_{x\to+\infty}(\ )\lim\limits_{x\to+\infty}(\ )\lim\limits_{x\to+\infty}(\ )}$$

$=e^{-6}$

连续复利问题

将本金A_0存入银行，年利率为 r, 则一年后本息之和为$A_0(1+r)$. 如果年利率仍为 r, 但半年计一次利息,且利息不取，前期的本息之和作为下期的本金再计算以后的利息，这样利息又生利息，由于半年的利率为$\frac{r}{2}$，故一年后的本息之和为$A_0(1+\frac{r}{2})^2$，这种计算利息的方法称为**复式计息法**.

如一年计息n次，利息按复式计算，则一年后本息之和为：$A_0(1+\frac{r}{n})^n$

$A_0(1+\frac{r}{n})^n$ 随着n无限增大，一年后本息之和会不断增大，但不会无限增大，其极限值为:

$$\lim_{n\to\infty} A_0(1+\frac{r}{n})^n = \lim_{n\to\infty} A_0(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}\cdot r} = A_0 e^r .$$

称之为连续复利。

例如，年利率为3%，则连续复利为$A_0 e^{0.03} \approx 1.03045 A_0$.

由于e在银行业务中的重要性，故有银行家常数之称.

2004.8.19, Google 的初次公开募股 (IPO)融资 2 718 281 828 美元，这是自然对数底数 e 的前十位。

假如以谷歌85美元的IPO发行价买入该股，并且一直持有至2017年，价值就是当初的22倍. 投资4.55万美元，即成百万美元富翁。

If You Bought Google at Its IPO Price, Here's How Much Richer You'd Be

第四部分　函数极限的存在准则

1.单调有界准则

2.Cauchy收敛原理

第四部分 函数极限的存在准则

1.单调有界准则

(1) 设$f(x)$在$[\alpha,+\infty)(\alpha\in R)$上单调增(减)有上(下)界,

则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

证: 设$f(x)$在$[\alpha,+\infty)$上单调增有上界, 必有上确界.

记$A=\sup\limits_{[\alpha,+\infty)}\{f(x)\}$,

则$\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in[\alpha,+\infty), A-\varepsilon< f(x_1)\le A< A+\varepsilon$,

故可取$M\ge x_1,\forall x: M< x<+\infty$,

有$A-\varepsilon< f(x_1)\le f(x)\le A< A+\varepsilon$,

即$\forall\varepsilon>0,\exists M,\forall x: M< x<+\infty$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\sup\limits_{[\alpha,+\infty)}\{f(x)\}$.

上页 下页 返回

1.单调有界准则

(2) 设函数$f(x)$是区间I上的单调函数，

则$f(x)$在I内每一点的单侧极限存在.

证：设$f(x)$在I上单调增，$\forall x_0 \in I$，$\forall x \in (x_0-\eta, x_0), \eta \in R$

$f(x) \le f(x_0)$，故$f(x)$在$(x_0-\eta, x_0)$上有界，必有上确界.

记$A = \sup\limits_{(x_0-\eta, x_0)} \{f(x)\}$，

则$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (x_0-\eta, x_0), A-\varepsilon < f(x_1) \le A < A+\varepsilon$，

故可取$\delta \le |x_1 - x_0| < \eta, \forall x: x_0-\delta < x < x_0$，

有$A-\varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le A < A+\varepsilon$，即：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，存在.

类似可证$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = B$存在. $B = \inf\limits_{(x_0, x_0+\eta)} \{f(x)\}$.

2. 柯西收敛原理

设函数 f 在 $\overset{o}{U}(x_0,\delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (< \delta')$, 使得 $\forall x', x'' \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 有: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证明: 必要性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (< \delta')$, 使得对任何

$x \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是对 $\forall x', x'' \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 有

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

上页 下页 返回

设函数 f 在 $\overset{o}{U}(x_0,\delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(<\delta')$,使得 $\forall x',x''\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 有: $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

充分性: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(<\delta'),\forall x',x''\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

$\forall$数列 $\{x_n\}\subset\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

$\because x_n\to x_0(n\to\infty)$, 对上述 $\delta>0,\exists N>0$,当 $n,m>N$ 时,

有 $x_n,x_m\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$,从而有 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$

$\therefore$ 数列 $\{f(x_n)\}$ 柯西数列, 极限存在, 记为 A, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A.$

设另一数列 $\{y_n\}\subset\overset{o}{U}(x_0,\delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$,同理知,

$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$ 存在, 记为 B.

设函数 f 在 $\overset{o}{U}(x_0,\delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(<\delta')$,使得 $\forall x',x''\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 有: $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$

充分性: 现证 $B=A$.为此构造数列:

$\{z_n\}$: $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$ 易见 $\{z_n\}\subset\overset{o}{U}(x_0,\delta')$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=x_0$.同上法可证, $\{f(z_n)\}$ 也收敛.

作为 $\{f(z_n)\}$ 的两个子列, $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 必有相同的极限,

$B=A$ 得证.

由归并原理知: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,得证.

上页 下页 返回

(柯西收敛原理)

极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$$\forall x', x'': 0 < |x' - a| < \delta 与 0 < |x'' - a| < \delta,$$

有: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

函数 $f(x)$ 在点 a **发散** $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall \delta > 0,$

$$\exists x', x'': 0 < |x' - a| < \delta 与 0 < |x'' - a| < \delta,$$

有:

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

例：证明$f(x)=\cos\frac{1}{x}$在点0发散

证明：$\exists\varepsilon_0=1,\ \forall\delta>0.$取 $x'=\frac{1}{2k\pi}, x''=\frac{1}{(2k+1)\pi}$

$$0<|0-x'|=\frac{1}{2k\pi}<\delta, 0<|0-x''|=\frac{1}{(2k+1)\pi}<\delta$$(只需k充分大)

有

$$|f(x')-f(x'')|=|\cos 2k\pi-\cos(2k+1)\pi|=2>\varepsilon_0=1$$

也可用Heine定理