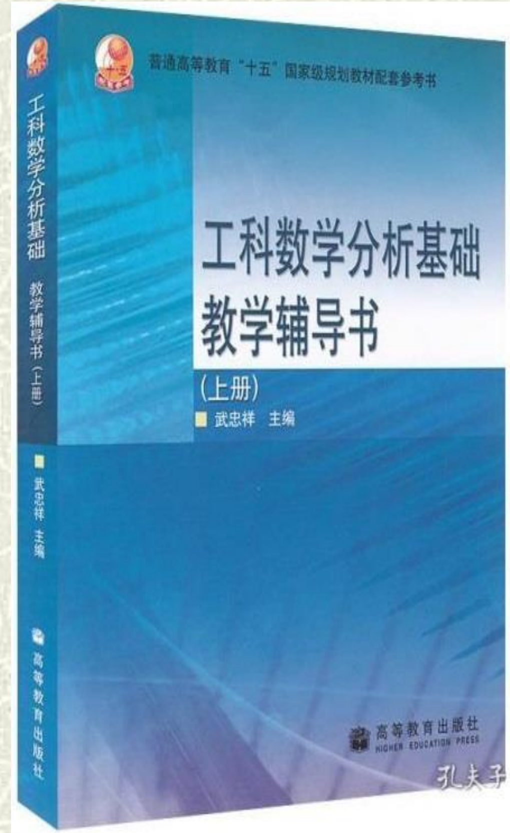

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书
工科数学分析基础
教学辅导书
(下册)
武忠祥 主编
高等教育出版社
www.kongfz.com


普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书
工科数学分析基础
教学辅导书
(上册)
武忠祥 主编
工科数学分析基础 教学辅导书 (上册)
武忠祥 主编
高等教育出版社
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS
孔夫子

6、单选

若 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$，则 $f(x)=$（ ）.

(10分)

A $\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\pi^2$

B $\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\dfrac{\pi^2}{2}$

C $\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\dfrac{\pi^2}{3}$

D $\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\dfrac{\pi^2}{4}$

参课本P208

证明: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

（2）设 $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt,$

$x = 0 \Rightarrow t = \pi,\qquad x = \pi \Rightarrow t = 0,$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t)f[\sin(\pi - t)]dt$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,$$

$\therefore\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

参课本P208

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$ 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

9、判断

设 $f \in C^{(1)}[a,b]$，且 $f(a)=0$ 则 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$

(10分)

A ×

B ✓

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a),\ x\in[a,b]$$

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^x 1^2dt\right)\left(\int_a^x [f'(t)]^2dt\right)$$

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a),\ x\in[a,b]$$

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^x 1^2 dt\right)\left(\int_a^x [f'(t)]^2 dt\right)$$

$$=(x-a)\left(\int_a^x [f'(t)]^2 dt\right)$$

$$\therefore \int_a^b f^2(x)dx \le \left(\int_a^b (x-a)dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx\right)$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx\right)$$

Cauchy-Schwarz

(柯西–施瓦兹)不等式

$$|\langle\alpha,\beta\rangle| \le \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \le \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$$

题目：设函数$y = y(x)$是微分方程$y'' + by' + cy = 0$的解，

其中b, c为正的常数，则$\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$ (　　).

$A.$与初值$y(0), y'(0)$及b有关，与c无关

$B.$与初值$y(0), y'(0)$及c有关，与b无关

$C.$与初值$y(0), y'(0)$有关，与b, c无关

$D.$与初值$y(0), y'(0)$及b, c都无关

[分析]

特征方程$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$,

特征根或为相异实根或为二重实根，或为共轭复根，

其实部均为负的，因而有$\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

因此对$y'' + by' + cy = 0$的任一解$y = y(x)$均有$\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$

选D.

课本P267 （B）

办公室到凶案现场步行需 5 min，问张某是否能被排除在犯罪嫌疑人之外？

3. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，求 $y=y(x)$，使它满足

$$x\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = (x+1)\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. 设 f 是 $C^{(1)}$ 类函数，且

$$f(x+t) = \frac{f(x)+f(t)}{1-f(x)f(t)}, \quad f'(0) = 3,$$

试导出 $f(x)$ 所满足的微分方程，并求 $f(x)$.

第二节　高阶线性微分方程

上一节讨论了几种一阶方程以及三种可降阶的高阶方程的求解问

课本P293 （B）

2.证明：设$x_1(t)$为二阶齐次线性微分方程$\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0$的一个

非零解，则其通解为$x=x_1(t)[C_1\int\frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{(x_1(t))^2}dt+C_2]$.

证明：设$x_2(t)$为方程的与$x_1(t)$线性无关的另一解，则$\frac{x_2(t)}{x_1(t)}$为t 的函数

不妨设为$h(t)$，则 $x_2(t)=x_1(t)h(t)$，把$x_2'(t)$、$x_2''(t)$代入原方程可得

$$h(t)[\ddot{x}_1(t)+a_1(t)\dot{x}_1(t)+a_2(t)x_1(t)]+x_1(t)\ddot{h}(t)+$$

$$+[2\dot{x}_1(t)+a_1(t)x_1(t)]\dot{h}(t)=0.$$

又由$x_1(t)$是方程的解可知$\ddot{x}_1(t)+a_1(t)\dot{x}_1(t)+a_2(t)x_1(t)=0$,

$$\text{于是}x_1(t)\ddot{h}(t)+[2\dot{x}_1(t)+a_1(t)x_1(t)]\dot{h}(t)=0.$$

令$\dot{h}(t)=p$，则$\ddot{h}(t)=\dot{p}$，代入上式可得$\frac{dp}{p}=-\frac{2\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}-a_1(t)$

2.证明：设$x_1(t)$为二阶齐次线性微分方程$\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0$的一个

非零解，则其通解为$x=x_1(t)[C_1\int\frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{(x_1(t))^2}dt+C_2]$.

证明：令$\dot{h}(t)=p$，则$\ddot{h}(t)=\dot{p}$，代入上式可得$\frac{dp}{p}=-\frac{2\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}-a_1(t)$

两边积分得，$\ln|P|=-2\ln|x_1(t)|-\int a_1(t)dt$,

$\dot{h}(t)=p=\frac{C_1'}{[x_1(t)]^2}e^{-\int a_1(t)dt}$ 取$C_1'=1$，可得$h(t)=\int\frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt+C_2'$,

取$C_2'=0$，可得$x_2(t)=x_1(t)h(t)=x_1(t)\int\frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt$.

$\therefore$ 原方程的通解为$x=x_1(t)[c_1+c_2\int\frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt]$.

3.验证$x=\frac{\sin t}{t}$是微分方程 $\ddot{x}+\frac{2}{t}\dot{x}+x=0$ 的解,求此方程的通解.

解: 由上题知与$x_1(t)=\frac{\sin t}{t}$线性无关的特解可取为$x_2(t)=h(t)x_1(t)$,

$$\text{其中}\,h(t)=\int\frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{[x_1(t)]^2}dt=\int\frac{t^2}{\sin^2 t}e^{-\int\frac{2}{t}dt}=-\cot t.$$

故原方程的通解为:

$$x=\frac{\sin t}{t}(C_1+C_2\cot)=C_1\frac{\sin t}{t}+C_2\frac{\cos t}{t}.$$

第三节　线性微分方程组

线性微分方程组的基本概念

线性微分方程组解的结构

常系数线性齐次微分方程组的求解

常系数线性非齐次微分方程组的求解

作业：P318　1(2)(4)；3；5；10

矩阵函数的导数与积分

$$\mathrm{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times m}, \quad t \in I.$$

1) 矩阵函数$A(t)$连续：$a_{ij}(t)$连续

2) 导数与积分：$\dot{\mathrm{A}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{A}(t) = (\dot{a}_{ij}(t))_{n\times m}, \quad t \in I,$

$$\int_a^b \mathrm{A}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\times m}$$

性质：(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{CA}) = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t};$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{A}\pm\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t} \pm \dfrac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t};$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{AB}) = \mathrm{A}\dfrac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t}\mathrm{B};$

3.1线性微分方程组

线性微分方程组的一般形式:

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+f_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

其中 $a_{ij}(t)$ 与 $f_i(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 在 (a,b) 内连续.

$$\begin{cases}x_1'=a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)+f_1(t)\\x_2'=a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+\cdots+a_{2n}(t)x_n(t)+f_2(t)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n'=a_{n1}(t)x_1(t)+a_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)+f_n(t)\end{cases}$$

3.1 线性微分方程组

线性微分方程组的一般形式：

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+f_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n. \qquad (3.1)$$

其中 $a_{ij}(t)$ 与 $f_i(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 在 (a,b) 内连续.

n=1时，即一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

向量形式：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t), \qquad (3.2)$$ 非齐次

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \qquad (3.3)$$ 齐次

$\mathbf{A}(t)$为函数方阵

向量形式：
$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t),\qquad (3.2)$$ 非齐次

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x(t),\qquad (3.3)$$ 齐次

$\mathrm{A}(t)$为函数方阵 $a_{ij}(t)$ 与 $f_i(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 在 (a,b) 内连续.

若存在可微的向量值函数 $y=\vec{x}(t)\in C(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$

使方程组(3.2) 在 (α,β)成为恒等式,则向量值函数 $y=\vec{x}(t)$

称为方程组(3.2)在 (α,β)上的解

通解：含有个独立常数的解　特解

初值条件：

定解条件由 $x(t_0)=\left(x_{0,1},\cdots,x_{0,n}\right)^T$ 表示时称为初值条件.

初值问题(Canchy问题)：
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$$

解的存在唯一性定理

定理 假设$A(t)$是$n\times n$阶矩阵函数，$f(t)$是n维列向量．它们都在区间$a\le t\le b$上连续．则对$t_0\in[a,b]$及n维常向量$x_0=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})^T$，

初值问题
$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\qquad(3.4)$$

在区间$a\le t\le b$上存在唯一解$x=\varphi(t)$.

齐次线性微分方程组解的结构

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = A(t)x(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

简单性质：

1. $x(t) \equiv 0$ 是方程组(3. 3)的解，称为平凡解或零解；

2. 若方程组(3. 3)的解 $x(t)$满足初值条件$x(t_0) = 0$,则 $x(t) \equiv 0$.

在 $a \le t \le b$ 上恒等于零的向量值函数 也是(3. 3)的满足初始条件 $x(t_0) = 0$的解.

3. 若 $x_i(t)(i = 1, \cdots, n, t \in (a,b))$ 都是(3. 3)的解，则

$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)(t \in (a,b))$ 也是(3. 3)的解. （叠加原理）

3. 证明: 因 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$ 是方程(3. 3) 的解, 则有

$$\frac{dx_i}{dt}=A(t)x_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

$$\therefore \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}[\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_m\boldsymbol{x}_m]=c_1\frac{dx_1}{dt}+c_2\frac{dx_2}{dt}+\cdots+c_m\frac{dx_m}{dt}$$

$$=c_1A(t)x_1(t)+c_2A(t)x_2(t)+\cdots+c_mA(t)x_m(t)$$

$$=A(t)[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)]$$

$$=A(t)(\sum_{i=1}^{m}c_ix_i), \quad \therefore \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}_i \text{是方程组(3. 3)的解.}$$

(叠加原理)

方程组（3.3）的所有解构成一个线性空间，那么这个空间的维数是多少？于是有类似的概念：向量值函数组线性相关（无关）性，以及向量值函数组的伏朗斯基行列式。

线性相关 / 线性无关 /

定义在区间(a,b)上的m个n维向量值函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$

若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，**使等式**

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)\equiv\vec{0},\quad t\in(a,b)\text{恒成立};$$

则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$ **在**(a,b)**内线性相关，**

否则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$**在**$(a,b)$**内线性无关，**

或线性独立.

例1 证明

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ 1\\ t\end{pmatrix},\quad x_2(t)=\begin{pmatrix}-\sin^2 t+1\\ 1\\ t\end{pmatrix}$$

在任何区间I上都是线性相关的.

证明: 取 $c_1=1, c_2=-1$ 则

$$c_1\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ 1\\ t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\sin^2 t+1\\ 1\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad t\in I$$

故 $x_1(t), x_2(t)$ 在I上是线性相关的.

例2 证明: $x_1(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ $x_2(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_3(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

证明: 要使 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+c_3x_3(t)$

$$=c_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}\equiv 0 \quad t\in R$$

成立,显然只需下面方程成立:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\infty<t<+\infty$$

成立,显然只需下面方程成立

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -\infty < t < +\infty$$

因为 $\begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2e^{4t} < 0$

所以 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

所以有 x_1, x_2, x_3 线性无关.

定理3.1 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t), t\in(a,b)$是$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}(t)x(t)$的$m$个解.

则这m个解在(a,b)线性相关$\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\exists t_0\in(a,b),\text{使常向量组}\\ x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_m(t_0)\text{线性相关}\end{array}}$.

$\Rightarrow$ 必要性(易).

$\Leftarrow$ 充分性. $\exists t_0\in(a,b)$,使常向量组 $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_m(t_0)$线性相关.

即$\exists C_i$不全为零，使$C_1x_1(t_0)+C_2x_2(t_0)+\cdots+C_mx_m(t_0)=0.$

令 $x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_mx_m(t),\ t\in(a,b),$

则 $x(t)$也是$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}(t)x(t)$的解, 它满足初值条件 $x(t_0)=0,$

若方程组(3.3)的解 $x(t)$满足初值条件$x(t_0)=0,$则 $x(t)\equiv 0.$

$\therefore x(t)=0,$ 即$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$在$(a,b)$线性相关.

问题？：由定义可知，向量值函数的线性相关与否是对区间内的所有点来说的，会不会在 t_1 处所对应的常向量组线性相关，而在 t_2 处所对应的常向量组线性无关？

$\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ 在 $(-\infty,+\infty)\backslash\{\pm 1\}$ 内线性无关

但 $t=1$ or -1 时，向量 $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ 线性相关！

若 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t), t\in(a,b)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}(t)x(t)$ 的任意 m 个解.

则这 m 个解在 (a,b) 线性相关 $\Leftrightarrow \exists t_0\in(a,b)$，使常向量组 $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_m(t_0)$ 线性相关.

如何解释上述特例的矛盾？