第四节　Fourier级数

- 周期函数的Fourier展开
- 定义在$[0, l]$上的函数的Fourier展开
- 定义在$[a, b]$上的函数的Fourier展开

作业: Page332
4, 5(单号), 6(单号),
7(单号), 8, 9

周期为2*l*的函数如何展开为Fourier级数?

设$f(x)$周期为$2l$,在 $[-l, l]$上满足dirichlet条件

$[-l, l]$变为$[-pi, pi]$,令 $t=\frac{\pi}{l}x$,即 $x=\frac{l}{\pi}t$, 则$f(x)=f(\frac{l}{\pi}t)$,

记$f(\frac{l}{\pi}t)=g(t)$, 且$g(t)=g(t+2\pi)$, 展开为Fourier级数:

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)\cos ntdt, & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)\sin ntdt, & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

再将t换回为x，即得$f(x)$在$(-l,l)$上的的Fourier展开式.

第四部分 周期为2l的Fourier级数

一、周期为2l的函数展开为Fourier级数

定理 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足Dirichlet条件,则它的*Fourier*级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中系数a_n, b_n为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

该Fourier级数的**和函数也是**周期函数, $T=2l$

周期为$2l$的函数展开为Fourier级数:

(1) 如果$f(x)$为奇函数，则有 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$,

其中系数b_n为 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad (n=1,2,\cdots)$

(2) 如果$f(x)$为偶函数，则有 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$,

其中系数a_n为 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

例 设 $f(x)$是周期为 4 的周期函数,它在$[-2,2)$

上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$,

将其展成 Fourier 级数.

解 $l=2,\ f(x)$满足Dirichlet充分条件

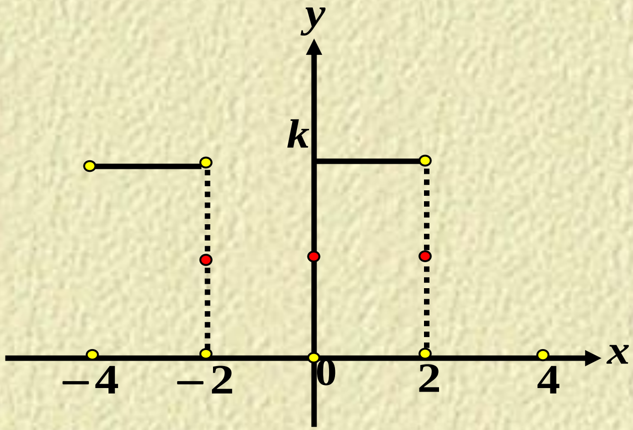
$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx=k,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}xdx\ =0,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi} & 当 n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & 当 n = 2,4,6,\cdots \end{cases},$$



根据Dirichlet定理,可得:

当$-\infty < x < +\infty$且$x \neq 0,\pm2,\pm4,\cdots$时

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

当$x = 0,\pm2,\pm4,\cdots$时 $f(x)$ 的Fourier级数收敛于$k/2$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

返回

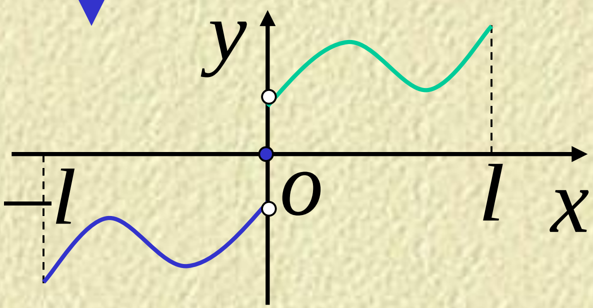
二、定义在[0, l]上的函数的Fourier 展开

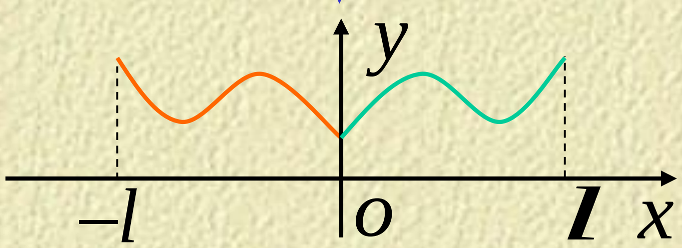
- 将函数$f(x)$延拓到[-l,0]上，得到一个定义在[-l, l]上的辅助函数F(x)，使F(x)在[-l, l]上满足Dirichlet条件，且在[0, l]上等于$f(x)$
- 求得F(x)在[-l, l]上的Fourier 展开式，再将该式限制在[0, l]上,即可得到$f(x)$在[0, l]上的Fourier 展开式

该Fourier级数的和函数也是周期函数, $T=2l$

定义在 [0, *l*] 上的函数的Fourier展开

奇延拓　　$f(x),\ x\in[0,l]$　　偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), x\in(0,l] \\ 0, \quad x=0 \\ -f(-x), x\in[-l,0) \end{cases}$$

$F(x)$为奇函数, 将$f(x)$ 在[$-l$, l]上展成Fourier级数,得 正弦级数:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,(n=1,2,\cdots)$$

$$F(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in[0,l] \\ f(-x), x\in[-l,0) \end{cases}$$

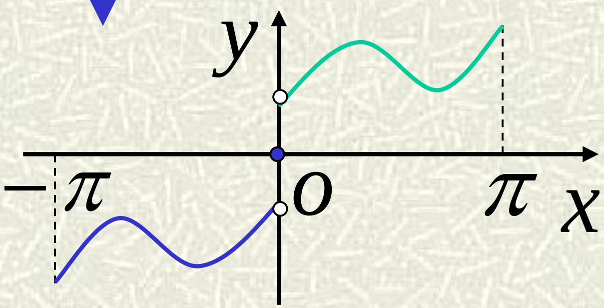
$F(x)$为偶函数,将 $F(x)$在[$-l$, l]上展成Fourier级数,得 余弦级数:

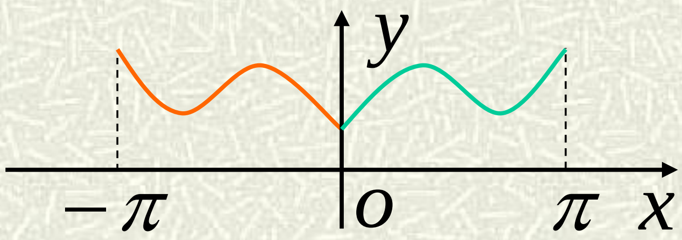
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,(n=0,1,2,\cdots)$$

$[0,\pi]$上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $\quad f(x),\ x\in[0,\pi] \quad$ 偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成

正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

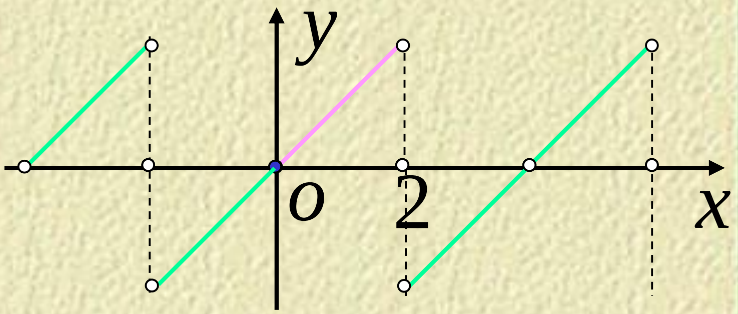
$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成

余弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

例. 把 $f(x)=x \quad (0<x<2)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

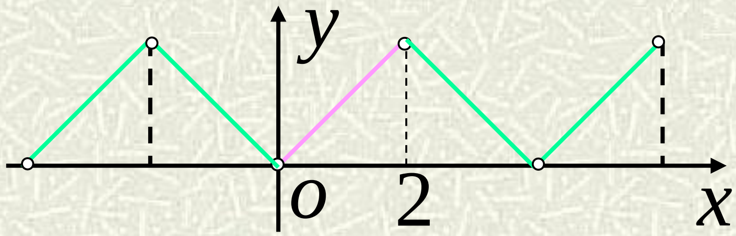
$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \quad (0<x<2)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,(n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(2) 将 $f(x)$ 作偶周期延拓,则有



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = x = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \quad (0 < x < 2)$$

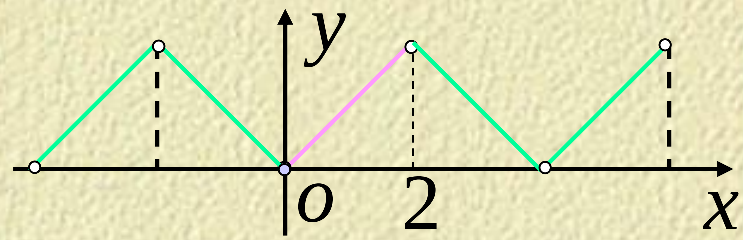
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}}$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

说明: 此式对 $x=0$ 也成立,

据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$



由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数.

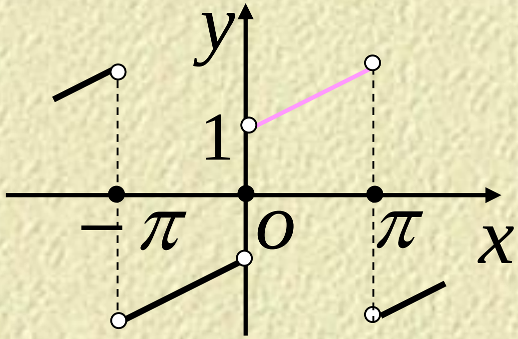
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 **f (x)** 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

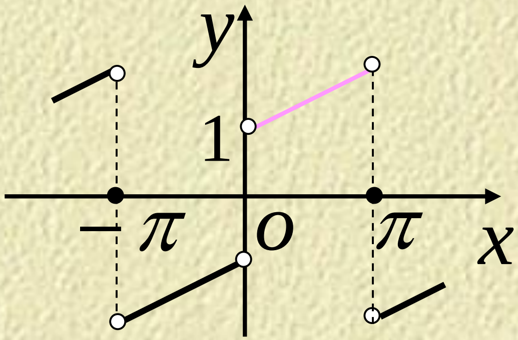
$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



因此得

$$x+1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

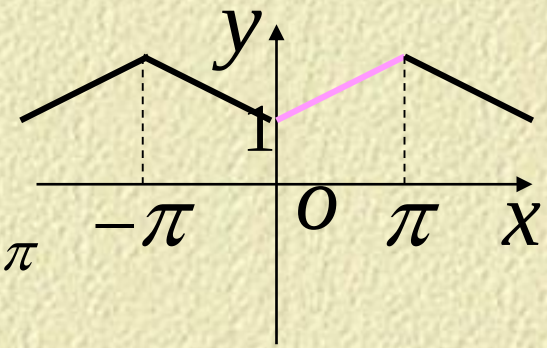
注意: 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0 , 与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$



$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

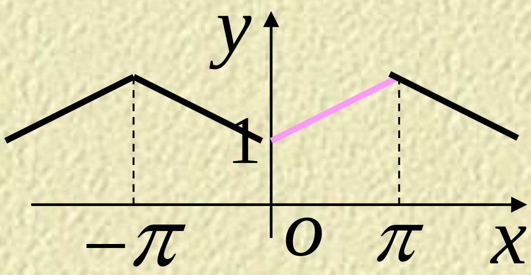
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

当函数定义在任意有限区间[*a*,*b*]时, 其傅里叶展开方法:

方法1　$f(x),\ x\in[a,b]$

令 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$，　即 $x=z+\dfrac{b+a}{2}$

$$F(z)=f(x)=f(z+\frac{b+a}{2}),\quad z\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$$

$$[-l,l],l=\frac{b-a}{2}$$

$F(z)$在 $[-\dfrac{b-a}{2},\dfrac{b-a}{2}]$上展成傅里叶级数

将 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$ 代入展开式

$f(x)$在 $[a,b]$上的傅里叶级数

如何求$f(x)$在$[a,b]$上的Fourier展开式？

令 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$，

令F(z)是周期为 $2l$ 的周期函数，且$F(z)=f(z+\dfrac{a+b}{2})$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(z)\cos\frac{n\pi z}{l}dz$$

$$z\in[-l,l],l=\frac{b-a}{2}$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(z+\frac{a+b}{2})\cos\frac{n\pi z}{l}dz,$$

令$x=z+\dfrac{a+b}{2}$

$$=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\frac{a+b}{2})dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}(x-\frac{a+b}{2})dx\quad(n=1,2,\cdots)$$

如何求f在$[a,b]$上的Fourier展开式？

令 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$，

令F(z)是周期为 $2l$ 的周期函数，且$F(z)=f(z+\dfrac{a+b}{2})$

$$z\in[-l,l],\ l=\frac{b-a}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(z)\sin\frac{n\pi z}{l}dz$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(z+\frac{a+b}{2})\sin\frac{n\pi z}{l}dz,$$

令$x=z+\dfrac{a+b}{2}$

$$=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}(x-\frac{a+b}{2})dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+b_n\sin\frac{n\pi}{l}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

例 将函数 $f(x)=10-x\left(5<x<15\right)$ 展开成Fourier级数.

解 $(5,15)\longrightarrow(-5,5)$　　$z=x-\dfrac{b+a}{2}$

$$F(z)=f(x)=f\left(z+\frac{b+a}{2}\right),\ z\in\left(-5,5\right)$$

$$\boxed{\left[-l,l\right],l=\frac{b-a}{2}}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),}$$

下页 返回

例 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展开成 Fourier 级数.

解 $a_n=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi}{5}(x-10)dx \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

$$=2\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx-\frac{1}{5}\int_5^{15}x\cos\frac{n\pi x}{5}dx=0,\ (n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx=\cdots=0,$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi}{5}(x-10)dx=(-1)^n\frac{10}{n\pi},\ (n=1,2,\cdots)$$

故 $f(x)=10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x \quad (5<x<15)$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\frac{a+b}{2})dx,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi}{l}(x-\frac{a+b}{2})dx$$

方法2 $f(x),\ x\in[a,b]$

$\Big\downarrow$ 令 $x=z+a$ 即 $z=x-a$

$$F(z)=f(x)=f(z+a),\quad z\in[0,b-a]$$

$\boxed{[0,l],l=b-a}$

$\Big\downarrow$ 奇或偶式周期延拓

$F(z)$ 在 $[0,b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

$\Big\downarrow$ 将 $z=x-a$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

第五部分　小结

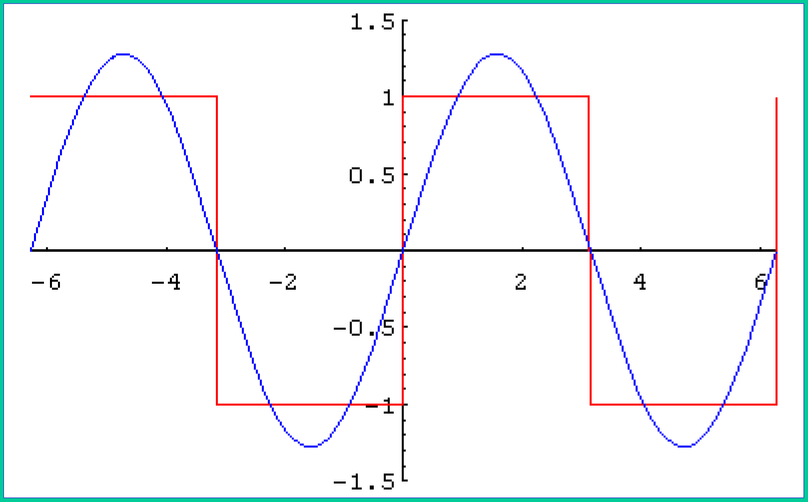
1.基本概念;

2.Fourier系数;

3.Dirichlet充分条件;

4.周期函数的

Fourier级数展开式;



求Fourier展开式的步骤:

(1).画图形验证是否满足Dirichlet条件(收敛域,奇偶性);

(2).求出Fourier系数;

(3).写出Fourier级数,并注明它在何处收敛于$f(x)$.

5. Fourier级数的意义——整体逼近.

上页　下页　返回

思考题 若函数$\varphi(-x)=\psi(x)$，问：$\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数a_n、b_n与α_n、β_n $(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系?

解:
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos(-nt)d(-t)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx=\alpha_n$$
$$(n=0,1,2,\cdots)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin(-nt)d(-t)$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\sin nx dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx=-\beta_n$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

所以 $a_n=\alpha_n$，$b_n=-\beta_n$.

思考题

- 2. 将函数展开为傅里叶级数时为什么最好先画出其图形?

答: 易看出奇偶性及间断点,从而便于计算系数和写出收敛域

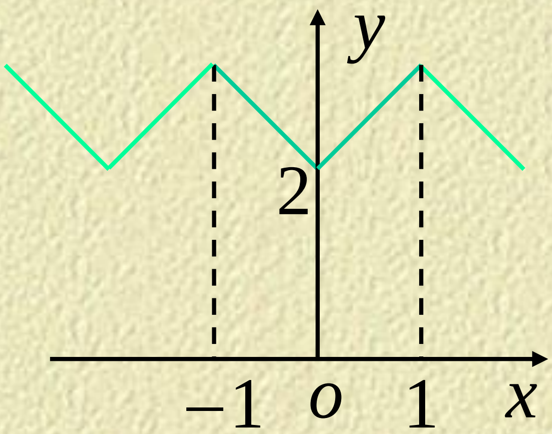
例 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和. (考研)

解: $f(x)$为偶函数, $\therefore b_n=0$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2(\cos n\,n\pi-1)}{n^2\pi^2}=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$



因 $f(x)$ 偶延拓后在 $(-\infty,+\infty)$上连续, 故得

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[-1,1]$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad (n=1,2,\cdots)$$

例 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[-1,1]$$

令 $x=0$, 得 $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$　　故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}\qquad \boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例 (08考题) 设银行存款年利率为 $r = 0.05$, 并按年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取19万元, 第二年提取28万元, 第 n 年提取$(10+9n)$万元, 并能按此规律一直提款下去, 问 A 至少应为多少万元?

解 设 A_n 为用于第n年提取 $(10+9n)$万元的贴现钱

$$A_n = (1+r)^{-n}(10+9n)$$

故 $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+9n}{(1+r)^n}$

令$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x\in(-1,1)$

则$s(x)=x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}=s\left(\frac{1}{1+r}\right)=420$（万元）

故$A=200+9\times 420=3980$（万元）