

4、 估计水箱的水流量*

1. 问题与假设

(1) 问题

本问题中使用的长度单位为 $E (=30.24\text{cm})$; 容积单位为 $G (=3.785\text{L}(\text{升}))$.

某些州的用水管理机构需估计公众的用水速度(单位是 G/h)和每天总用水量的数据。许多地方没有测量流入或流出水箱流量的设备,而只能测量水箱中的水位(误差不超过 5%)。当水箱水位低于某最低水位 L 时,水泵抽水,灌入水箱内直至水位达到最高水位 H 为止。但是也无法测量水泵的流量,因此在水泵启动时无法立即将水箱中的水位和水量联系起来。水泵一天灌水 1~2 次,每次约 2h. 试估计在任意时刻(包括水泵灌水期间) t 流出水箱的流量 $f(t)$, 并估计一天的总用水量。

表 4-1 给出了某镇中某一天的真实用水数据,表中测量时间以秒为单位,水位以 $10^{-2}E$ 为单位。例如 3 316s 以后,水箱中的水深为 31.10E. 已知水箱是直径为 57E, 高为 40E 的正圆柱体, 当水位落到 27E 以下,水泵自动启动把水泵入水箱;而当水位回升至 35.5E 时,水泵停止工作。

(2) 假设

1) 影响水箱流量的唯一因素是该区公众对水的普通需要。所给的数据反映该镇在通常情况下一天的用水量,不包括任何非常情况,如水箱中水的短缺、水管破裂、自然灾害等。

* 本题为 1991 年美国大学生数学建模竞赛的 A 题,本文根据[1]的解答编译而成。

表 4-1

时间(s)	水位($10^{-2}E$)	时间(s)	水位($10^{-2}E$)
0	3 175	46 636	3 350
3 316	3 110	49 953	3 260
6 635	3 054	53 936	3 167
10 619	2 994	57 254	3 087
13 937	2 947	60 574	3 012
17 921	2 892	64 554	2 927
21 240	2 850	68 535	2 842
25 223	2 795	71 854	2 767
28 543	2 752	75 021	2 697
32 284	2 697	79 254	泵水
35 932	泵水	82 649	泵水
39 332	泵水	85 968	3 475
39 435	3 550	89 953	3 397
43 318	3 445	93 270	3 340

由托里查里(Torricelli)定律,从水箱中流出水的最大速度与水位高的开方成正比。对于所给的数据,其水位的最大高度为 35.5E,最小高度为 27E,因此对两个高度的最大流速比为 $\sqrt{35.5/27} \approx 1.15$,这个数字已很接近于 1,所以可以假定水位对流速没有影响。类似地,还假设大气情况,温度变化等对水的流速均无直接影响。

2)水泵的灌水速度为常数,不随时间变化也不是已灌水量的函数,因而假设水泵大约在水位 27E 时开始灌水,在水位 35.5E 时停止灌水。同时假设水泵不会损坏或不需要维护。

3)从水箱中流出水的最大流速小于水泵的灌水速度。为了满足公众的用水需求不让水箱中的水用尽,这是显然的要求。

4)每天的用水量分布都是相似的。因为公众对水的消耗量是以全天的活动(诸如洗澡、做饭、洗衣服等)为基础的,所以每日用水类型是相似的。

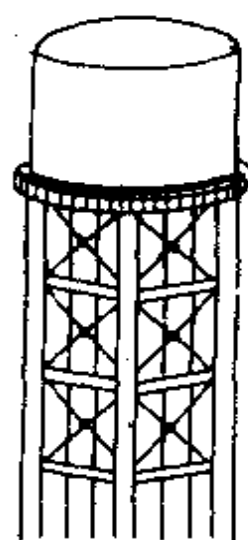


图 4-1

5)水箱的流水速度可用光滑曲线来近似。每个用户的用水需求量与整个区的用水需求量相比是微不足道的,而且它与整个社区需求量的增减情况是极不相似的。

2. 分析与建模

引入如下记号:

V, V_i ——水的容积,时刻 t_i 水的容积(G);

t ——时刻(h);

$f(t)$ ——流出水箱的流量是时间的函数(G/h).

p ——水泵的灌水速度(G/h).

T_0 ——初始数据的当天测量时间.

T ——当天的时间(以 24 小时制).

根据要求先将表 4-1 中数据作变换,秒(s)变换为小时(h),水位高变换为水的体积,得到表 4-2 和图 4-2.

表 4-2

时间(h)	水量(10^3 G)	时间(h)	水量(10^3 G)
0	606.1	12.954	639.5
0.921	593.7	13.876	622.4
1.843	583.0	14.982	604.6
2.950	571.6	15.904	589.3
3.871	562.6	16.826	575.0
4.978	552.1	17.932	558.8
5.900	544.1	19.038	542.6
7.001	533.6	19.959	528.2
7.929	525.4	20.839	514.8
8.968	514.8	22.015	/
9.981	/	22.958	/
10.926	/	23.880	663.4
10.954	677.7	24.987	648.5
12.033	657.7	25.908	637.6

水箱中水量随时间的变化状况

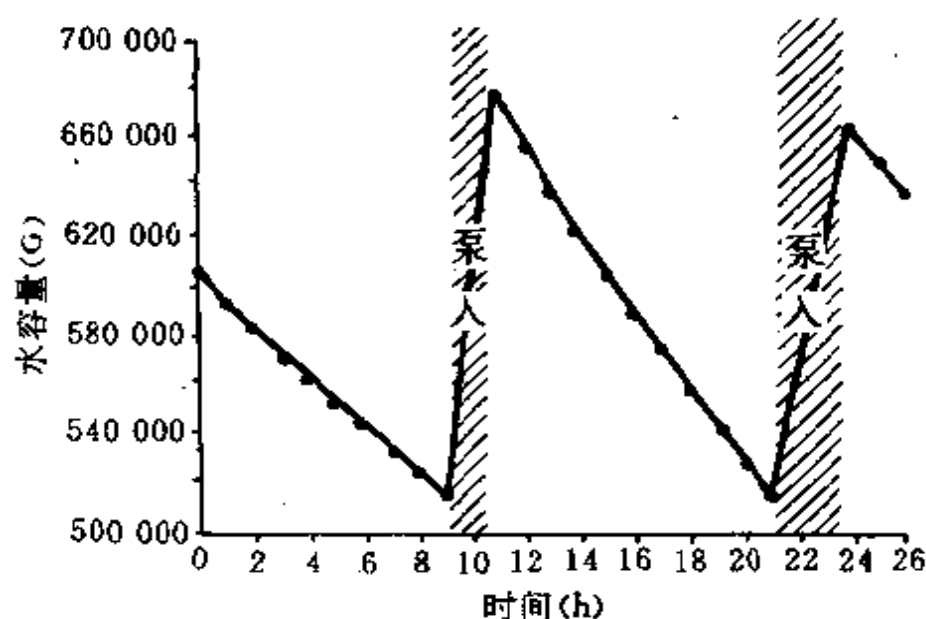


图 4-2

从此表的数据可知,在水泵的第二次抽水时间区间内,从水箱中流出的平均流速必定大于第一次抽水时的流速。因为第二次灌水时间长得多。但是,第二次水泵停止灌水的确切时刻是不知道的,在水泵第二次灌水后所测得的水位与水泵实际停止运行的水位是不同的,因此,水泵停止运行的时刻一定在图 4-2 右边阴影部分两次测量时间之间。我们需要估计水泵开始和停止灌水的时间。

水泵第一次约在 8.968h 后开始运行的,因为这时水箱中水的体积约为 514 800G,水泵停止灌水的时间在 10.926~10.954h 之间的 0.028h 长的区间内。

我们确定水泵的第二次开始运行时间为 20.839h,因为这时水的体积又为 514 800G。确定水泵第二次停止运行时间为 22.958h,因为在紧接着的测量时刻 23.88h 测得水的体积为 663 400G,与水泵停时的水位 677 700G 比流掉了 14 300G。

计算出在相邻时间区间的中点及在时间区间内水箱中流出水的平均速度,并将其列成表 4-3。图 4-3 给出表 4-3 的图形。下面就对表

4-3 的数据进行拟合,最后对其积分计算出每天的总用水量。

表 4-3

时间区间的中点值 h	平均流量 ($\times 10^3 \text{G/h}$)
0.460 6	14.0
1.382	12.0
2.396	10.0
3.411	9.6
4.425	9.6
5.439	8.9
6.45	9.6
7.468	8.9
8.448	10.0
9.474	/
10.45	/
10.94	/
11.49	18.6
12.49	20.0
13.42	19.0
14.43	16.0
15.44	16.0
16.37	16.0
17.38	14.0
18.49	14.0
19.50	16.0
20.40	15.0
21.43	/
22.49	/
23.42	/
24.43	14.0
25.45	12.0

给定数据的变化率

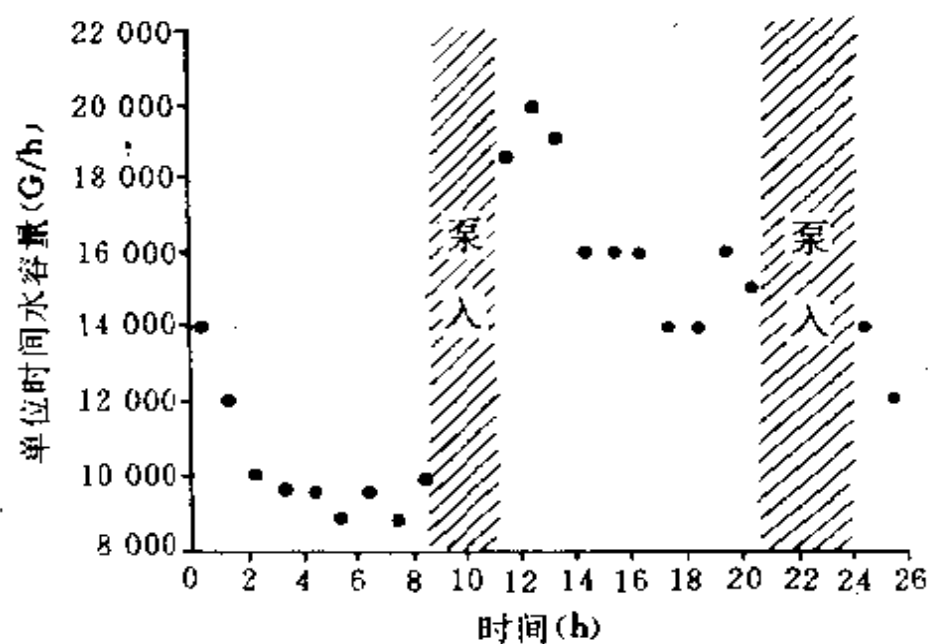


图 4-3

应用于给定数据变化率的模型

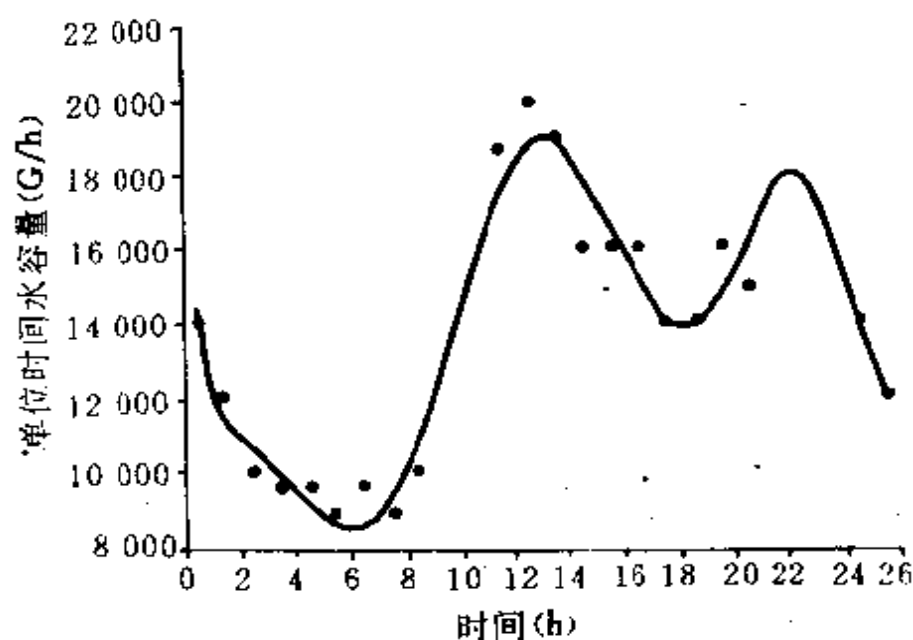


图 4-4

借助于软件包 (Kaleida Graph, Version 2.02) 用 8 阶多项式进行拟合, 得

$$f(t) = 17\,575 - 9\,624t + 4\,478t^2 - 1\,684t^3 + 268.9t^4 \\ - 23.31t^5 + 1.106t^6 - 0.027t^7 + 0.000\,265\,4t^8.$$

其图形见图 4-4。拟合的复相关系数 $r=0.971$, t 的定义由下式给出。

$$t = \begin{cases} 24 + (T - T_0) + 0.460\,6, & \text{当 } T < T_0 \\ (T - T_0) + 0.460\,6, & \text{当 } T \geq T_0 \end{cases}$$

猛一看,似乎采用 8 阶多项式有些过分难,其实,数据的波动决定了只有采用高阶多项式拟合才能提高数据拟合的准确性。采用低于 8 阶的多项式拟合,其复相关系数不是很大,因此,我们选择了 8 阶多项式进行回归拟合。另外, f 为多项式时,容易进行参数估计及进行积分。

已假定水泵的灌水速度为一常数,同时知道在水泵抽水时,水箱中水的体积的平均变化速度 $\Delta V/\Delta t$ 应近似等于水泵的灌水速度 p 减去这段时间从水箱中流出的平均流速。所以, p 可表示为

$$p = \frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{\int f(t)dt}{\Delta t}$$

这里 $f(t)$ 在 Δt 区间的两端点间进行积分。

如果此模型确实准确地模拟了这些数据,那么在不同的灌水周期中,按此模型计算出的水泵灌水速度应近似为常数。下面,通过水泵开始和停止工作的两段区间检验这一点。

$$\Delta V_1 = 677\,600 - 514\,800 = 162\,800(\text{G})$$

$$\Delta t_1 = 10.926 - 8.968 = 1.958(\text{h})$$

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = 83\,150(\text{G/h})$$

$$\Delta V_2 = 677\,600 - 514\,800 = 162\,800(\text{G})$$

$$\Delta t_2 = 22.958 - 20.839 = 2.119(\text{h})$$

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = 76\,830(\text{G/h})$$

Δt_1 区间内 $f(t)$ 的平均值为

$$\frac{1}{10.926 - 8.968} \int_{8.968}^{10.926} f(t) dt = 14\,700 (\text{G/h})$$

所以,

$$p_1 = 83\,150 + 14\,700 = 97\,850 (\text{G/h})$$

Δt_2 区间内 $f(t)$ 的平均值为

$$\frac{1}{22.958 - 20.839} \int_{20.839}^{22.958} f(t) dt = 17\,647 (\text{G/h})$$

$$p_2 = 76\,830 + 17\,647 = 94\,377 (\text{G/h})$$

计算得到的 p_i 相差仅 3.6%, 此结果足以支持该模型。

由于假设了在全天中从水箱里流出的水流量是平稳的, 且我们所得到的数据点非常接近于水泵抽水的开启和停止时间, 因此, 在水泵第一次灌水时体积的平均变化速度与模型的值没有明显地差异。但是在第二次灌水时情况就不同了, 因为从表 4-3 估计得到水泵开启和停止时水的流速相差 1 000 G/h, 且数据没有给出水泵停止灌水的近似数据点, 因此, 在第二次灌水时得到的平均流速要比实际平均流速小很多。

3. 求解与结果

由 2 中得到水的流速函数 $f(t)$ 在 $t = 0.46(\text{h})$ 和 $t = 24.46(\text{h})$ 时的值分别近似为 14 170 G/h 和 13 730 G/h, 相差仅 3%, 从而可认为得到了 $f(t)$ 的连续性。于是, 一天里的用水总量近似地等于曲线 $f(t)$ 在 24 小时周期内的积分

$$\int_{0.4606}^{24+0.4606} f(t) dt = 338\,000 (\text{G})$$

这个数字近似对应于水箱总体积的 1.5 倍。因为按常规每 1 000 人的用水量为 105 000 (G/d*), 因此估计这个区大约有 3 200 人。

从 $f(t)$ 也可求得流出水箱的平均流速

* d 为天。

$$\frac{1}{24} \int_{0.4606}^{24+0.4606} f(t) dt \approx 14\ 100(\text{G/h})$$

还可求得水泵的平均流速为

$$(97\ 850 + 94\ 377)/2 = 96\ 100(\text{G/h})$$

4. 模型的评价

(1) 优点

1) 模型的主要优点是证实了水泵的灌水速度为一常数,这也是我们所期望的。

2) 如果所给的数据反映了该社区的通常情况,那么 $f(t)$ 可适合于一天的任何时刻。

3) 任意时刻从水箱中流出水的流速都可通过多项式模型计算出来。

4) 用多项式曲线拟合所给的数据其复相关系数为 0.971,且回归值与原始数据点没有很大的波动。

5) 在 24 小时周期的端点,模型的取值非常接近,可推测几天的流速。

6) 人们自然会将用水量与用电量联系起来,特别是对家庭不用天然气的情况。例如,烧饭需要大量的水来洗碗。同时烧饭和照明等也要用电,洗澡的耗水量也很大,并伴随着电力的消耗(热水器、电吹风等)。通过调查并与图 4-2 比较得到,用水分布类型和日常普通用电分布类型是极其相似的。

(2) 缺点

1) 本模型的一个主要缺点就是数据太少,只能参照一天的数据,而对任何现象建模时,最好有在不同条件下很多天所采集的数据。

2) 如果知道水泵的抽水速度,就能更好地估计水泵灌水期间水的流速以及更准确地建立此模型。

3) 通过考虑体积测量的差异建立模型,这种作法包含着某种不精确性。

参考文献

- [1] Scott Briercheck et al: A Polynomial Model for Estimating Water Flow, *The UMAP Journal*, Vol. 12, No. 3, PP. 201-208, 1991
- [2] Overman, Michael, Water: *Solutions to a Problem of Supply and Demand*, Garden City, NY; Doubleday 1969
- [3] Todd, David Keith, ed: *The Water Encyclopedia*, Port Washington, NY; Water Information Ctr. 1970