

# 基于伪光谱方法月球软着陆轨道快速优化设计

王明光 裴听国

(中国航天时代电子公司研究院, 北京 100070)

袁建平

(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

**摘要** 根据软着陆轨道的特征和优化算法的特点, 对探月器软着陆轨道状态方程进行合理的转化处理, 使其更适合优化数值解法求解。在此基础上, 使用伪光谱方法将软着陆轨道优化问题转为一个约束参数优化问题, 然后采用乘子法处理约束条件, 采用变尺度法求解处理后的参数优化问题, 仿真结果表明此方法具有收敛速度快、对初始控制量不敏感、鲁棒性强的优点。

**关键词** 伪光谱方法 月球着陆 软着陆 最优控制 轨道控制

## 1 引言

国内外已经在探月器软着陆轨道优化方面做了较多研究工作<sup>[1-7]</sup>, 并取得了较好的成果。但绝大多数优化方法要花费较多的计算机时, 才能获得最优轨道及相应的控制量, 而且一般情况下探月器必须严格按照这条参考轨道导航飞行, 这限制了探月器飞行的自主性。根据探月器瞬时的飞行状态, 用机载计算机快速生成一条优化的参考轨道具有重要的工程实用价值, 新一代探月器应该具备快速或实时生成软着陆轨道的能力。

本文首先根据月球软着陆轨道的特征和优化算法的特点, 对软着陆轨道状态方程做量纲为 1 化处理, 然后引入中间积分变量代替原状态方程中的时间变量, 将原终端时间自由的轨道优化最优控制问题转化为一个终端积分变量固定的最优控制问题。在此基础上, 用 Legendre pseudospectral 方法将软着陆轨道优化问题转为一个约束参数优化问题, 采用乘子法处理约束条件, 采用变尺度法 BFGS 求解转化后的优化问题。

## 2 软着陆轨道优化的描述

### (1) 量纲为 1 的运动方程

由于月球表面附近没有大气, 所以在探月器的动力学模型中没有大气阻力项。从环月轨道 (200km × 15km 的椭圆) 的近地点软着陆到月球表面的时间比较短, 一般在几百秒的范围内, 所以诸如月球引力非球项、日月引力摄动等影响因素均可忽略不计; 另外, 月球引起的哥氏力和牵引力的影响也可以忽略。在上述假设下, 探月器软着陆轨道状态方程组为

$$\begin{aligned}m \frac{dv}{dt} &= T \cos \alpha - mg \sin \gamma \\v \frac{d\gamma}{d\tau} &= \frac{T}{m} \sin \alpha - g \cos \gamma + \frac{v^2}{r} \cos \gamma \\ \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma\end{aligned}$$

收稿日期: 2006-03-13。收修改稿日期: 2006-12-27

$$\frac{dm}{d\tau} = -\mu$$

式中  $m$ 、 $v$ 、 $\gamma$  和  $r$  分别为探月器质量、探月器相对于月球固连坐标系的速度、飞行轨道倾角和探月器质心距月心的径向距离;  $\alpha$  为推力攻角;  $\mu$  为探月器系统所用推进剂的特征参数, 称为燃料消耗率;  $P = Ig\mu(I$  为发动机比冲,  $g$  为月球重力加速度) 为发动机推力。令  $\tau = t/(R_0/g_0)^{\frac{1}{2}}$ ,  $V = V/(R_0g_0)^{\frac{1}{2}}$ ,  $R = r/R_0$ ,  $M = m/m_0$ ,  $F_T = T\cos\alpha/m_0g_0$ ,  $F_N = T\sin\alpha/m_0g_0$ ( $R_0$  为月球平均半径,  $g_0$  为月球海平面处重力加速度,  $m_0$  为探月器初始质量),  $\alpha$  和  $\mu$  为待优化的控制量。则原状态方程组可以转化为量纲为 1 的方程组(用 ODES1 表示):

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{F_T}{M} - \frac{1}{R^2}\sin\gamma \tag{1}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{F_N}{MV} - \frac{1}{R^2V}\cos\gamma + \frac{V}{R}\cos\gamma \tag{2}$$

$$\frac{dR}{d\tau} = V\sin\gamma \tag{3}$$

$$\frac{dM}{d\tau} = -\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}\frac{\mu}{m_0} \tag{4}$$

(2) 运动方程的转化处理

由方程组 ODES1 可以看出, 月球软着陆轨道优化问题是一个终端时间自由且终端受约束的最优控制问题。引入积分替换变量  $e$

$$e = \frac{1}{R} - \frac{V^2}{2}$$

结合式(1)和式(3), 则有

$$\frac{de}{d\tau} = -\frac{VF_T}{M}$$

显然, 中间变量  $e$  是对时间变量  $\tau$  的单调递增的函数, 故可以用  $e$  代替方程组 ODES1 中的  $\tau$  从而得到一组新的状态方程(用 ODES2 表示)。初始和终端的速度和高度已知, 即  $e_0$  和  $e_f$  已知, 即原终端时间自由最优控制问题就转化为终端积分变量固定最优控制问题(转化后的问题更适合优化数值解法求解), 积分区间为  $[e_0, e_f]$ 。为了便于使用伪光谱方法求解, 还需将方程组的积分区间  $[e_0, e_f]$  转化为  $[-1, 1]$ , 即引入一个积分替换变量  $l$  代替方程组 ODES2 中的积分变量  $e$ :

$$l = \frac{2e - (e_f + e_0)}{e_f - e_0}$$

这样即可以得到一组新状态方程(用 ODES3 表示), 其积分区间为  $[-1, 1]$ 。

综上所述, 探月器软着陆轨道优化问题可表述为一个非线性、带有控制约束和终端约束的最优控制问题(用 OPT1 表示), 即在积分区间  $[-1, 1]$  中, 寻找最优控制  $u(t)$ , 满足

运动微分方程:  $\dot{x} = f(x(t), u(t)), x \in R^n \quad u \in R^l \quad t \in [-1, 1]$  (5)

边界条件:  $x(t_0) = x_0, \quad \Psi(x(t_f)) = 0$  (6)

轨道约束:  $C(x(t), u(t)) \leq 0$  (7)

并且使性能指标:  $J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)dt$  (8)

最小。

式中  $\phi(x(t_f), t_f)$  为终端性能指标,  $L(x(t), u(t), t)$  为状态量和控制量的标量函数。

引入协态变量  $\lambda(t)$ , 构造哈密尔顿函数

$$H = L(x, u) + \lambda^T f$$

则状态变量和协态变量应满足如下正则方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}$$

最优控制解的必要条件为

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t)] = \text{常数}$$

式中  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$  分别为最优状态量、最优控制量和最优协状态量。

### 3 软着陆轨迹优化的算法设计

从第 2 节可知, 探月器软着陆轨道优化问题为一个受各种约束的最优控制问题, 由于直接法具有明显的优点, 本文采用直接法, 即使用伪光谱方法<sup>[5]</sup>将软着陆轨道优化问题转为一个约束参数优化问题, 然后采用乘子法处理约束条件, 采用变尺度法求解处理后的参数优化问题。

#### 3.1 勒让德伪光谱方法

设  $L_N(t)$  表示  $N$  阶勒让德正交多项式, 设  $t^0 = -1$ ,  $t^N = 1$ , 设  $t_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, N-1$ ) 为  $L_N(t)$  导数  $\dot{L}_N(t)$  的第  $m$  个零点。

任给定连续函数  $F(t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , 构造它的  $N$  次插值多项式, 定义拉格朗日多项式:

$$\phi_l(t) = \frac{1}{N(N-1)L_N(t)} \cdot \frac{(t^2-1)\dot{L}_N(t)}{t-t_l} \quad l = 0, 1, \dots, N$$

容易验证

$$\phi_l(t_j) = \begin{cases} 1 & l = j \\ 0 & l \neq j \end{cases} \quad (9)$$

这样, 即可以构造  $F(t)$  的  $N$  次 Lagrange 插值多项式  $F^N(t)$ :

$$F^N(t) = \sum_{l=0}^N F(t_l) \phi_l(t) \quad (10)$$

根据式(9), 可得:

$$F^N(t_k) = F(t_k) \quad k = 0, 1, \dots, N$$

对式(10)求微分, 即可得到插值函数  $F^N(t)$  在配置点  $t_k$  处的导数

$$\dot{F}^N(t_m) = \sum_{l=0}^N \mathbf{D}_{m \times l} F(t_l)$$

式中  $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{m \times l})$  是一个  $(N+1) \times (N+1)$  矩阵:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{m \times l})_{(N+1) \times (N+1)} = \begin{cases} \frac{L_N(t_m)}{(t_m - t_l)L_N(t_l)} & m \neq l \\ -\frac{N(N-1)}{4} & m = l = 0 \\ \frac{N(N-1)}{4} & m = l = N \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (11)$$

使用伪光谱方法的一个重要步骤是将状态星  $\mathbf{x}(t)$  和控制量  $\mathbf{u}(t)$  在配置点  $t_k$  离散化, 即构建  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  的  $N$  次 Lagrange 插值多项式:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^N(t) &= \sum_{l=0}^N a_l \phi_l(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \sum_{l=0}^N b_l \phi_l(t)\end{aligned}$$

$a_l$  和  $b_l$  是待求  $N+1$  维变量, 分别为  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  在配置点的值, 即:

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{x}^N(t_k) = \mathbf{x}(t_k), \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{u}^N(t_k) = \mathbf{u}(t_k)$$

将状态量和控制量离散后, 原最优控制问题的运动微分方程(见式(5))可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}}^N(t_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^N(t_k), \mathbf{u}^N(t_k)) \quad k = 0, 1, \dots, N \tag{12}$$

边值条件(见式(6))可以表示为

$$\mathbf{x}^N(-1) = \mathbf{x}_0, \quad \Psi(\mathbf{x}^N(1)) = \mathbf{0} \tag{13}$$

轨道约束(见式(3))可以表示为

$$C_j(\mathbf{x}^N(t_k), \mathbf{u}^N(t_k)) \leqslant 0 \quad j = 1, 2, \dots, c \tag{14}$$

性能指标(见式(8))可以表示为

$$J^N = h(\mathbf{x}^N(1)) + \int_1^1 g(\mathbf{x}^N(t), \mathbf{u}^N(t)) dt \tag{15}$$

记  $a_k = x_i(t_k) \quad \mathbf{a}_k = (a_{0k}, \dots, a_{(n-1)k})^T \quad b_k = u_i(t_k) \quad \mathbf{b}_k = (b_{0k}, \dots, b_{(l-1)k})^T$ 。

使用伪光谱方法的另一个重要步骤是将性能指标式(15)离散化: 用 Gauss-Lobatto 积分式近似  $J^N$  的积分项, 即

$$\int_{-1}^1 g(\mathbf{x}^N(t), \mathbf{u}^N(t)) dt \approx \sum_{k=0}^N g(\mathbf{x}^N(t_k), \mathbf{u}^N(t_k)) w_k$$

则

$$J^N = h(\mathbf{x}^N(1)) + \int_1^1 g(\mathbf{x}^N(t), \mathbf{u}^N(t)) dt \approx h(\mathbf{a}_N) + \sum_{k=0}^N g(\mathbf{x}^N(t_k), \mathbf{u}^N(t_k)) w_k = h(\mathbf{a}_N) + \sum_{k=0}^N g(\mathbf{x}_k, \mathbf{b}_k) w_k$$

其中权重  $w_k = -\frac{2}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{[L_N(t_k)]^2} \quad k = 0, 1, \dots, N$ 。

约束式(12)可以重新写成

$$\sum_{l=0}^N \mathbf{D}_{m \times l} \mathbf{x}(t_l) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^N(t_k), \mathbf{u}^N(t_k)) = \mathbf{0} \quad k = 0, 1, \dots, N$$

约束式(11)可以重新写成

$$C_i(\mathbf{x}^N(t_k), \mathbf{u}^N(t_k)) \leqslant 0 \quad j = 0, 1, \dots, c, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

通过上述处理, 原最优问题 OPT1 可以由如下约束参数优化问题(用 OPT2 表示)表述: 寻找  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N), \mathbf{b} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N)$ , 使

$$J^N = h(\mathbf{a}_N) + \sum_{k=0}^N g(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) w_k$$

取极小值, 并满足等式约束(13)和不等式约束(14)。

3.2 乘子法和 BFGS 法

本文采用乘子法<sup>[8]</sup>处理 OPT2 的约束条件, 再应用变尺度法 BFGS<sup>[8]</sup>求解处理后的优化问题。下面以求解无约束参数优化问题  $\min f(\mathbf{X})$  ( $\mathbf{X}$  为待优化的参数)为例, 简要地介绍 BFGS 方法。

为了书写方便, 记  $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{X}_{k+1}), \mathbf{G}_k = \nabla^2 f(\mathbf{X}_k)$ 。BFCS 算法的基本思想是在  $\mathbf{X}_{k+1}$  处, 按某种规则产生一个正定对称矩阵  $\mathbf{B}_{k+1}$ :

$$\mathbf{B}_{k+1}^{-1} = \left[ \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{X}_k (\Delta \mathbf{g}_k)^T}{(\Delta \mathbf{X}_k)^T \Delta \mathbf{g}_k} \right] \times \mathbf{B}_k^{-1} \times \left[ \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{X}_k (\Delta \mathbf{g}_k)^T}{(\Delta \mathbf{X}_k)^T \Delta \mathbf{g}_k} \right]^T + \frac{\Delta \mathbf{X}_k (\Delta \mathbf{X}_k)^T}{(\Delta \mathbf{X}_k)^T \Delta \mathbf{g}_k}$$

其中  $\Delta \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k, \Delta \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k$ 。  $\mathbf{X}_k$  和  $\mathbf{X}_{k+1}$  为连续的两个迭代点。以  $\mathbf{P}_{k+1} = -\mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{g}_{k+1}$  作为  $\mathbf{X}_{k+1}$  处的搜索方向。

4 仿真计算及结果分析

设发动机比冲  $I_{sp} = 375s$ , 轨道边界条件为状态初始值和终端约束值见表 1。控制量约束为  $-270^{\circ} \leq \alpha \leq -90^{\circ}$ 、 $0 \leq \mu \leq 4.0 kg/s$ , 性能指标为软着陆过程中所消耗推进剂最少, 即:

$$J = -M(t_f)$$

终端约束满足情况见表 1; 终端质量为 361.3kg; 整个软着陆飞行时间为 270.3s。

仿真得到的优化轨道如图 1~ 4 所示, 分别为速度变化曲线、轨道倾角变化曲线、高度变化曲线和质量变化曲线。优化控制量变化曲线如图 5 和图 6 所示, 分别为推力攻角变化曲线和推进剂消耗率变化曲线。

从表 1 和图 1~ 6 中可以看出优化轨道变化平缓, 能很好地收敛到终端约束值, 且精度较高; 优化控制量推力攻角和推进剂消耗率变化平滑, 无突变且能很好满足控制量约束, 即整个飞行轨道是可控制的。

表 1 状态量边界值及终端约束满足情况

边界值	速度 / $m/s$	高度 / $m$	轨道倾角 / $^{\circ}$	质量 / $kg$
$x(t_0)$	1 670	15000	- 0 0	600
$x(t_f)$	18 655	156	free	free
$x(t)  _{t=t_f}$	18 59	156 3	- 60 7	361. 3

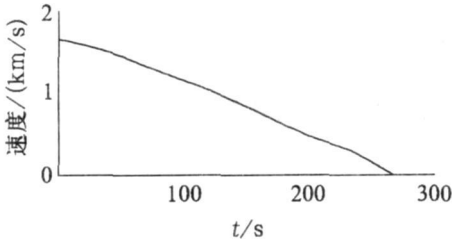


图 1 速度变化曲线

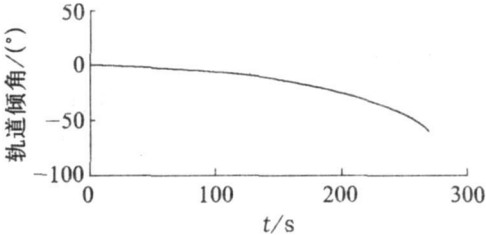


图 2 轨道倾角变化曲线

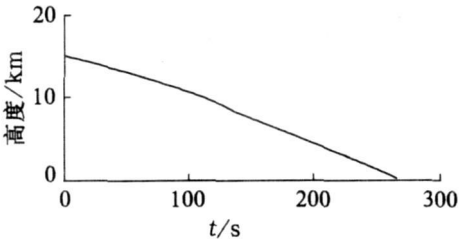


图 3 高度变化曲线

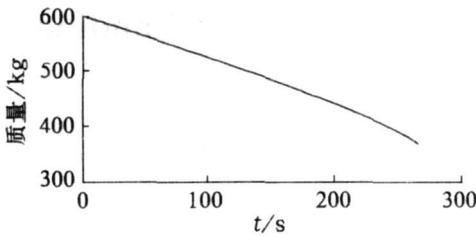


图 4 质量变化曲线

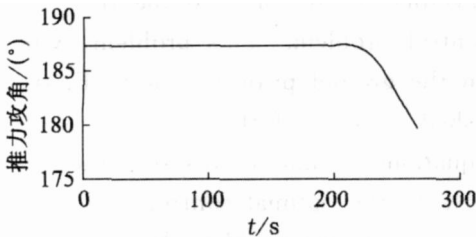


图 5 推力攻角变化曲线

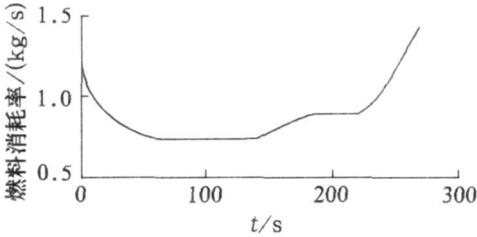


图 6 推进剂消耗率变化曲线

5 结论

本文应月球软着陆自主导航对快速优化生成软着陆的需求, 采用勒让德伪光谱方法快速优化软着陆轨道。仿真表明, 采用本文处理后的运动模型和优化算法, 可以利用桌面计算机快速或近实时

地生成一条满足各种约束条件的优化软着陆轨道。算法鲁棒性好、收敛半径大(对初始控制量不敏感)且收敛速度快。

### 参 考 文 献

- [1] 郝晓宁, 曾国强, 任萱, 等. 月球探测器轨道设计[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001: 145- 157.
- [2] 王劫, 李俊峰, 崔乃刚, 等. 登月飞行器软着陆轨道的遗传算法优化[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43 (8): 1056- 1059.
- [3] PIESON B L, KLUEVER C A. Three-stage approach to optimal low-thrust earth-moon trajectories [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1994, 17 (6): 1275- 1282.
- [4] GATH P F, WELL K. Trajectory Optimization Using A Combination of Direct Multiple Shooting and Collocation [C]. AIAA-2001-4070, 2001.
- [5] ELNAGAN G, KAZEMI M. The Pseudospectral Legendre Method for Discretizing Optimal Control Problem [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1995, 40 (10): 1793- 1796.
- [6] FAHROO F, ROSS I M. Direct Trajectory Optimization by a chebyshev Pseudospectral Method [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25 (1): 160- 166.
- [7] VIASSEN BROECK J, DOOREN R V. Chebyshev Technique for Solving Nonlinear Control Problems [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1988, 33 (4): 333- 340.
- [8] 粟塔山. 最优化计算原理与算法程序设计[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002

### 作者简介

王明光 1976年生, 2006年获西北工业大学航天学院交通运输规划与管理专业博士学位, 研究方向为航天器轨迹优化、最优控制等。

## Legendre Pseudospectral Method for Rapid Lunar Soft-Landing Trajectory Optimization

Wang Mingguang Pei Tingguo

(The Academy of China Aerospace Times Electronic Corporation, Beijing 100070)

Yuan Jianping

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract** Determining the best soft-landing trajectory of the lunar probe from the lunar satellite orbit involves the solution of an optimal control problem. This problem, which was considered to be difficult, was traditionally solved on the ground prior to flight. First, a new hypothesis was introduced according to the distinguished features of the lunar and soft-landing trajectory. Then, a set of dynamics and kinematics equations of motion was simplified, and this simplification reduced the computation load greatly. Next, the optimal control problem of soft-landing trajectory was transformed into a constrained parameter problem by using Legendre pseudospectral method, and nonlinear programming method (methods of multipliers and BFGS) was applied to solve the transformed problem. The simulation results show that the algorithm can generate a feasible soft-landing trajectory of about 300 seconds flight time in 30 seconds on the desktop computer.

**Key words** Legendre pseudospectral method Lunar landing module Soft land Optimal control Orbital control