林晖、田翔、张均伟 华南理工大学 1995 Honorable Mention 数学中国提供:www.madio.net

案例 3.5 学院教师的付薪方案*

一、问题

Aluacha Balaclava 学院刚刚聘用了一位新的女教务长。学院教师工资的調整问题导致并迫使前教务长辞职,所以为学院制定一个公平合理的工资调整系统就成了她的首要任务。作为制定这个系统过程中的第一步,她聘任你们队作顾问为该学院设计一个能反映下列情况和原则的工资调整系统。

情况如下さい。 うっち こうじょ まわる

教师有四种可能的级别,就由低到高的次序而喜职称级别是: 讲师、助理教授、副教授和教授。具有博士学位的教师受聘为助理教授。正在攻该博士学位的教师受聘为讲师,当他们获得博士学位后自动晋升为助理教授。当了七年或七年以上的副教授可以申请晋升为教授。晋升的决定由教务长根据一个教师委员会的建议作出,这不是你们的事。

教师工资是从每年9月到次年6月共10个月的工资。涨工资总是在9月初生效。涨工资的总额每年有变化,一般在次年3月前是不知道的。

就今年而言,没有教学经验的讲师的起点工资是 27000 美元,助理教授的起点工资是 32000 美元。教师在受聘时可以转过来在其他院校具有最多不超过七年的教学经验的正式证明。

原则如下:

- ①在有钱可涨工资的任何一年,全体教师都应涨工资。
- ②晋升时教师应得到相当大的工资涨幅。如在最短可能时间

[•] 本案例指导教师肖人岳副教授 ,队员林晔、田翔、张均伟。

内得到晋升的教师所涨的工资大体上等于正常情况(没晋升)时七年间所涨的正资。

- ③及时(即任职七年或八年后)晋升并任职 25 年或 25 年以上的教师在退休时的工资大体上是取得博士学位开始工作时工资的两倍。
- ④同样取称但具有更多经验的教师应比经验较少的教师工资高一点,但多一年教学经验取得的经济效益应随年数增大而消失。 换音之,若两位教师职称相同,随时间的推移他们的工资应趋于 接近。

课题:

首先设计一个不考虑必要的生活指数提高的新的工资支付系统,然后再把生活指数的提高考虑进去。本课题的最终目标是设计一个转移过程,它能把现有教师的工资支付系统在不减少任何人的工资的情况下转移到你们的工资支付系统。现在教师的工资、职称和工作年限均列在表 3.5.1 中。

对你们认为将会改善你们的系统的任何细致的改进进行讨论。

教务长要求你们写出一个她能执行的详细的工资支付系统的 计划以及一个用清晰的语言概述本模型的假设,优、缺点以及预 - 期结果的能提交给董事会和教师的简短的实施摘要。

二、摘要

为了解决 Aluacha Balaclava 学院的教师付款问题,本文提出了一个符合题目要求的公平合理的工薪制度,并制定了能马上用于实施的详细的工薪制度计划,其中包括从现有工资到新工薪制度的转换方案,以及一份简要的执行概要。

本案例采用了广泛应用于社会科学方面的 Logistic 曲线来建立模型 I (新制度下的薪金曲线),以起薪工资作为拐点,制定了222

表3.5.1

姓名 工静 🗵	無日	· 大学	工策	姓名		魯日	製業	T.	姓名		a H	赞	斯日
Name 1	-	ASSO	24000	Name	81	22	ASSO	46351	Name	33	23	PROF	60576
Name 2	13	ASST	43508	Name	13	22	ASSO	50979	Name	36	8	ASSO	48926
Name 3	8	ASST	39072	Name	20	02	ASST	48000	Name	33	ှတ	PROF	57956
Name 4	=	PROF	53900	Name	23	*	ASST	32500	Name	38	32	ASSO	52214
Name 5	12	PROF	44206	Nene En	22	7	ASSO	38462	Name	33	15	ASST	39259
Name 6	17	ASST	37538	Name	23	23	PROF	53500	Name	Q	23	ASSO	43672
Name 7	23	PROF	48844	Neme	24	23	ASSO	42488	Name	4 1	9	INST	45500
N See 6	10	ASST	32841	N me	25	20	ASSO	43892	Name	42	ĸ	ASSO.	52262
Name 9	•	ASSO	49981	Name	97	ι¢	ASST	35330	Name	€	, CO	ASSO	57170
Name 10	ឧ	888	42549	Name	27	39	ASSO	41147	Name	#	16	ASST	36958
Name 11	38	ASSO.	42649	Name	88	15	ASST	34040	Name	45	23	ASST	37538
Name 12	13	PROF	600\$7	Name	53	18	PROF	48944	Name	46	o,	PROF	58974
Name 13	12	ASSO	38002	Name	စ္တ	~	ASST	30128	Name	47	∞	PROF	49971
Name 14	•	ASST	30000	Name	31	S	ASST	35330	Name	84	23	PROF	62742
Name 15	34	PROF	60576	Name	32	9	ASSO	35942	Name	49	33	ASSO	52058
Name 16	`&	ASST	44562	Name	33	00	PROF	57295	Name	20	4	INST	26500
Name 17	.	ASST	30893	Name	34	10	ASST	36991	Name	21	2	ASST	33130

1、1、1、1

集		≇ H	聚养	K H	本名		套日	贵	K	群名		套日	景	K
Name	22	\$	PROF	59749	Name	2	4	ASST	29500	Name	88	=	ASST	36313
Name	53	₩.	ASSO	37954	Name	7	4	ASST	30186	Name	83	ç	ASST	33479
Zame	40	13	PROF	45833	Name	72	1	ASST	32400	Nате	ક	7	ASSO	38624
祖之	35	é	ASSO	35270	Name	73	13	ASSO	44501	Name	91	ស	ASST	32210
Name	28	40	ASSO	43037	Name	*	8	ASST	31900	Name	39	Ø	ASSO	48500
Nerse	23	20	PROF	58755	Name	33	1	ASSO	62500	Name	93	4	ASST	35150
Name	22	21	PROF	57797	Name	92	-	ASST	34500	Name	94	52	PROF	50583
Name	23	*	ASSO	53500	Name	23	91	ASSO	40637	Хате	95	23	PROF	60800
Name	9	9	ASST	32319	Name	78	*	ASSO	35500	Name	96	13	ASST	38464
Name	61	17	ASST	35663	Name	39	21	PROF	50521	Name	26	4	ASST	39500
Name	62	03	PROF	59333	Name	8	13	ASST	35158	Name	86	ë	ASST	52000
Name	63	₹.	ASST	30500	Name	8	4	INST	28500	Name	66	24	PROF	56922
Name	64	16	ASSO	41352	Name.	82	16	PROF	46930	Name	100	~1	PROF	78500
Name	- 62	15	PROF	43264	Name	83	24	PROF	55811	Name	101	2	PROF	52345
Name	99	02	PROF	50935	Name	84	æ	ASST	30128	Name 102	102	ø	ASST	35798
Name	67	9	ASST	45365	Name	88	16	PROF	46090	Name	103	24	ASST	43925
Name 68	89	ဖွ	ASSO	35941	Name	98	ເກ	ASST	28570	Name	104	œ	ASSO	35270
Name	69	ø	ASST	49134	Name	87	9	PROF	44612	Name	105	14	PROF	49472

续装 3.5.1

幕名	盆日	赞	数 日.	姓名	祭	员类	終日	林名	8日	景學	其
Name 106	19	ASSO	42215	Name 124	23	ASSO	51991	Name 142	12	PROF	49687
Name 107	12	ASST	40427	Name 125	-	ASST	30000	Name 143	22	PROF	49972
Name 108	10	ASST	37021	Name 126	12	ASST	34638	Name 144	1	ASSO	46155
Name 109	18	ASSO	44166	Name 127	8	ASSO	56336	Name 145	12	ASST	37159
Name 110	ដ	ASSO	46157	Name 128	9	INST	35451	Name 146	G,	ASST	32500
Name 111	∞	ASST	32500	Name 129	91	ASST	32756	Name 147	ო	ASST	31500
Name 112	13	ASSO	40785	Name 130	14	ASST	32922	Name 148	13	INST	31276
Name 113	10	ASSO	38698	Name 131	12	ASSO	36451	Name 149	9	ASST	33378
Name 114	ĸ	ASST	31170	Name 132	-	ASST	30000	Name 150	13	PROF	45780
Name 115	-	INST	26161	Name 133	13	PROF	48134	Name 151	4	PROF	70500
Name 116	23	PROF	47974	Name 134	9	ASST	40436	Name 152	27	PROF	59327
Name 117	9	ASSO	37793	Name 135	8	ASSO	54500	Name 153	O	ASSO	37954
Name 118		ASST	38117	Name 136	*	ASSO	55000	Name 154	വ	ASSO	36612
Name 119	97	PROF	62370	Name 137	ĸ	ASST	32210	Name 155	83	ASST	29500
Name 120	8	ASSO	51991	Name 138	21	ASSO	43160	Name 156	m	PROF	66500
Name 121		ASST	31500	Name 139	87	ASST	32000	Name 157	13	ASST	36378
Name 122	ϡ	ASSO.	35941	Name 140	-e	ASST	36300	Name 158	လ	ASSO	46770
Name 123	14	ASSO	39294	Name 141	ø,	ASSO	38624	Name 159	75	ASST	42772

姓名	T	取养	H	姓名	≇ H	聚聚	数日	群名	名出	受养	H K
Name 160	9	ASST	31160	Name 176	22	PROF	48280	Name 192	97	ASST	34550
Name 161	11	ASST	39072	Name 177	m	ASST	55500	Name 193	22	PROF	50576
Name 162	02	ASST	42970	Name 178	12	ASSO	39265	Name 194	к э	ASST	32210
Name 163	84.	PROF	85500	Name 179	*	ASST	29500	Name 195	~	ASST	28500
Name 164	8	ASST	49302	Name 180	21	ASSO	48359	Name 196	12	ASSO	41178
Name 165	77	ASSO	43054	Name 181	23	PROF	48844	Name 197	22	PROF	53836
Name 166	21	PROF	49948	Name 182	~	ASST	31000	Name 198	19	ASSO	48519
Name 167	w	PROF	50810	Name 183	ယ	ASST	32923	Name 199	₹	ASST	32000
Name 168	19	ASSO	51378	Name 184	~	INST	27700	Name 200	18	ASSO	40089
Name 169	18	ASSO	41267	Name 185	16	PROF	40748	Name 201	23	PROF	52403
Name 170	81	ASST	42176	Name 186	24	ASSO	44715	Name 202	12	PROF	59234
Name 171	23	PROF	51571	Name 187	0.	ASSO	37389	Name 203	22	PROF	51898
Name 172	12	PROF	46500	Name 188	88	PROF	51064	Name 204	5 6	ASSO	47047
Name 173	φ	ASST	35798	Name 189	19	INST	34265				
Name 174	7	ASST	42256	Name 190	22	PROF	49756				
Name 175	23	ASSO	46351	Name 191	19	ASST	36958				

译性: 推名用蟾号表示,即 Neme 1 等等, INST 表示详解, ASST 表示思难表表, ASSO 表示函数表, PROF 表示数数, 工龄 以年计,工责以美元计。

符合要求的标准薪金表。

针对不少教师不能及时提职,给出解决各级教职之间的教**龄** 转换的简单方法。

考虑旧制度向新制度过渡以及生活费用的变化,在模型 I 的基础上建立模型 I ,利用程序模拟旧制度向新制度过渡,建立模型 I 以适应生活费用的变化,使整个付薪制度更加完善。

此外,本文还考虑到应加薪金总额与实际拨款总额的差额,提出了相应的方案处理有余款和金额不足的情形。

而在结果分析中,本文提出一些积极的建议,提高了模型的 适用性。

二、问题的重述

Aluacha Balaclava 学院的教职从低到高分为: INST, ASST, ASSO, PROF 四个级别。其中 INST 从博士生中聘用,取得学位后, INST 自动升为 ASST。而从 ASSO 申请升为 PROF,则至少儒任 ASSO 7年。教师每年领取 10 个月的工资,而用于提升工资的资金总额要到次年 3 月才知道。

没有教学经验的 INST 起薪为 \$ 27000, ASST 起薪为 \$ 32000。曾任教于外校的受聘教师的教龄可按某种方法折算, 但 最多只能按 7 年计。

只要资金到位,每年教师的工资都会增加。若得到及时提升,则应增部分约等于未提职而继续工作7年应增加的那部分工资的总额。得到及时提升且工作满或超过25年的PROF退休时的工资大约为\$64000。同一级别的工资增长随任职年数而逐年下降。

要求分别考虑生活费用有无增加的两种情况,设计出加薪制度,并给出转换方案和改进细则,最后提交工薪制度计划和简短的执行摘要。

四、模型的假设

- ①不考虑教师的特殊贡献,认为教学质量仅与教师的工作年 限有关。
 - ②假设从 ASST 升为 ASSO 也至少需要任 ASST 7年。
- ③每年用于增加薪金的资金总额比较稳定(如:保持在工资总额的 2%左右)。

五、符号定义

K	生活费用上涨指数
R(t)	第 t 年的工资增长率
S_{tf}	上年实际工资
$S_{i_{\ell}}$	上年应得工资
S_{if}	今年实际工资
S_{**}	今年应得工资
t_{INST}	教师担任 INST 的年限
t_{ASST}	教师担任 ASST 的年限
$t_{ m ASSO}$	教师担任 ASSO 的年限
tprof	教师担任 PROF 的年限
$S_i(t)$	新制度下;任职:年的标准工资,其中;=1NST,
	ASST, ASSO, PROF.

六、问题的分析

我们的目标是建立一个公平合理的付薪制度,具体包括 INST, ASST, ASSO, PROF 四个不同层次的加薪规则及一些应 变措施。

首先,我们对单个级别的年薪变化进行分析。不妨设新的付薪制度已建立,而两位 ASSO A 与 B 都已获得合理的薪水。又设228

A 的工作年限 t_A 大于 B 的工作年限 t_B ,则由题意可知:

$$S_{ASSO}(t_A) > S_{ASSO}(t_B)$$

$$S_{ASSO}(t_A + \Delta t) - S_{ASSO}(t_A) < S_{ASSO}(t_B + \Delta t) - S_{ASSO}(t_B)$$

所以易推出 $S_{ASSO}(t)$ 为单调增函数, $\frac{\mathrm{d}S_{ASSO}(t)}{\mathrm{d}t}$ 是单调减函数。

为了求出具体的 $S_i(t)$,我们建立了模型 I ,是一个 Logistic 模型.

对此我们有以下解释:每年的薪水总金额可以认为是资源的总量,每年教师已分配掉绝大部分薪水。显然薪水总金额的增加是极其有限的。这就令教师薪水的增加受极大限制,再假设薪水的增长率为线性,则薪水符合了Logistic模型的规律。

第二步,用同样方法可得出其他级别的曲线 $S_i(t)$,并根据要求,使它们相互关联。

最后,根据所得曲线构造薪水表,制定出新的付薪制度。

七、模型的建立与求解

- 1. 模型 [(不考虑生活费用的增加)
- (1) 薪水增长率

设单位时间薪水增长率为r(S),则

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = r(S)\Delta t$$

$$\frac{1}{S(t)} \cdot \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = r(S)$$

取极限,则有

$$\begin{cases} \frac{1}{S} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = r(S) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \tag{1}$$

又因为同一级中随任职年数的增加,工资增长逐年下降,所以 r(S) 是单调减少的,不妨令 r(S) = a - bS

$$r(0)=r_0$$
 $\mathbb{Z}\lim_{t\to\infty}S(t)=S_0$

代入(1)解得

$$S(t) = \frac{S_0 \cdot Se^{r_0 t}}{S + S_0(e^{r_0} - 1)} = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{S_0} - 1\right)e^{-r_0 t}}$$

这是一条 Logistic 曲线,由 Logistic 曲线性质可知 $S_0 = \frac{S}{2}$ 时, $\frac{dS(t)}{dt}$ 有最大值,故 $S \ge 2S_0$.

因为着教师及时得到提升,则增加工资总额约等于不提升继续工作 7 年所加薪水的总和,所以有

$$S_{ASSO}(1) = S_{ASST}(14), S_{PROF}(1) = S_{ASSO}(14)$$

(2) 标准工资表的制定

就同一职别而言,选取 Logistic 曲线从 t_0 $\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)_{t_0<0}$ 点之后的部分为工资一时间曲线,这样可保证曲线的斜率(增长率)单调减少。

根据 Logistic 曲线,因为 $S_0 = 32000$,所以

$$S = \frac{32000C_1}{1 + (C_1 - 1) e^{-r_0 t}} \qquad C_1 \approx 0$$

我们利用计算机得出较合理的 C_1 与 r_0 ,同法可得出其他数据(参考教授第 12 年薪金约 64000 美元)。

2. 模型 Ⅱ

本模型将使所有教师的工资,在现有的基础上逐步向由模型 I 所建立的工资制度靠近。

(1) 关于教龄的转换

某教师提职时,我们认为他在原级别工作 t,年的经验相当于在新级别上有 t,年的经验,应领取新级别上第 t,年的薪金。转化公式为:

$$t_{\text{ASSO}} = \alpha(t_{\text{ASST}} - T) \quad t_{\text{ASST}} \geqslant T$$
 $t_{\text{PROF}} = \beta(t_{\text{ASSO}} - T) \quad t_{\text{ASSO}} \geqslant T$

其中 α , β 为常数, 称为转化系数, α , β 可通过层次分析法的 Satty 标度来确定。我们通过模拟比较认为 α =0.18, β =0.18 是比较合理的。

而对于外聘教师的教龄,我们有以下换算方法: 设教师被聘前在外校任教 x 年,则换算成本校教龄 y 为

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 7 \leqslant x \leqslant 14 \\ 7 & x > 14 \end{cases}$$

- (2) 加薪方法
- ①当某位教师当年未获提升时,则他第二年的工资为 $S_{ij} = S_{ij} + S_{ij} R(t_{S_{ij}})$ $(t_{S_{ij}} \# B)$ 指同级中薪水仅比 S_{ij} 大的那一年)
- ②若某位教师当年获得提升,则先由教龄转换公式和模型 I 得出的薪金表可查出他第二年应得工资 S_{ip}:

a. 若
$$S_{ij}$$
- S_{ij} >0,则
$$S_{ij}=S_{ij}+\min[S_{ij}-S_{ij},\ S_{ij}-S_{ij}]$$

$$S_{if} = S_{if} + S_{ip} R(t_{S_{if}})$$

显然,本模型可加快实际工资较低的数师的工资增长速度,同 时降低实际工资较高的教师的工资增长速度。事实证明其结果是 令人满意的。

- (3) 结果分析
- ①工资异常者

在表 3.5.1 INST 中出现有教师(Name 41)工作 6 年薪金为 45500 美元,不但远远高于其他 INST,甚至还高过某些 PROF.在 其他职别中一部分教师也存在类似情形。我们假设有两种情况可能导致这种现象,一是这些教师获得某种令人尊敬的荣誉,二是

以前的不合理工资制度所致。

对于第一种情况,可采取破格提拔的方法,使其薪金与职别相配。对第二种情况,可取消其合约,否则本模型将难以在短期内对其发生很大影响。

②平均薪金分析

四个级别的平均薪酬,分别为 31919,35908,44306,53947 美元,而四个起薪点分别为 27000,32000,40000,52000 美元, 两者相差不大,可以预期大部分教师会较快地转换到新制度。

3. 模型 ■

考虑到生活费用的上涨,我们在模型 I、I 的基础上建立本模型、设 ΔS 为模型 I 中,算出的应增加的工资,则

$$S_{tf} = (S_{tf} + \Delta S)K$$

又因为每年实施新付薪计划所需加薪的总金额,与实际每年的拨款不一定相同。所以,若资金充裕时,可将总金额分成两大部分,一部分用于增加教师的薪金,另一部分用于提升部分教师;若 资 金 不 足 时,则 每 位 教 师 所 加 薪 水 三 应 加 薪 水 × 实际加薪总金额,并在此原则上尽量控制升职。

我们把教师的工资分配模拟为5年(分两种情况),结果表明: 教师每年平均薪金增长率大约为2%并逐年上升,各个职别均为 此趋势。若考虑每年有教师被提取时,则教师薪金增长率大约为 1.7%,也是单调下降,这两个结果都很好地符合了原则。

另外,我们通过对所作的 Logistic 曲线和职别之间提职所增薪水的分析,确定在新制度下副教授和教授的起薪点分别为40000 美元和 \$2000 美元,因个级别的标准工资表和递增曲线、每年薪水增加曲线和增长率曲线略。

八、模型的优缺点分析

- 1. 优点
- ①本文所选用的 Logistic 曲线,应用广泛,有成熟的理论基础,具有很高的可靠性。
- ②本模型的建立,使处理生活费用的升高等问题变得非常简 便。

2. 缺点

本模型的不足之处主要是因为题目未给出教师在各职别任职 年限,使我们无法更精确地预测出结果。

九、工薪制度计划

教师最终的工薪目标是模型所设计的标准工资。由于现在教师的工资存在不合理的地方,必须通过转换方案向标准工资过渡。 又因为用于提升工资的总金额不可能与标准工资表完全吻合(或超出,或不足),因此决定了本付薪制度计划是以标准工资为教师增加工资的依据。用于提升的总金额分成两部分:一部分用于增加各级别所有教师的工资(包括生活指数上升的津贴),另一部分用于教师提职。

1. 关于教龄的转换

某教师提职时,认为他在原级别上作的经验相当于在新的级别上有 4; 年的经验, 应领取新级别上第 4; 年的薪金。

转化公式为:

$$t_{\text{ASSO}} = \alpha(t_{\text{ASST}} - 7) \quad (t_{\text{ASST}} > 7)$$
$$t_{\text{PROP}} = \beta(t_{\text{ASSO}} - 7) \quad (t_{\text{ASSO}} > 7)$$

其中 α , β 为常数, 称为转化系数。 α 、 β 可通过层次分析法中的 Satty 标度来确定。我们通过模拟比较认为 α =0.68, β =0.78 是比较合理的。

而对于外聘教师的教龄,我们有如下换算方法; 设某教师被聘任前在外校任教业年,则换算成本校教龄为

$$y = \begin{cases} ax & 14 \geqslant x > 7 \\ 7 & x > 14 \end{cases}$$

其中 a 为常数,此处取 $a=\frac{1}{2}$.

- 2. 加薪方法
- (1) 资金充足时
- ①当某教师当年未获提升时,他当年的工资

$$S_{if} = S_{if} + S_{ip}R(t_{S_{if}})$$

其中 ts.,指同级中薪水仅比 Sif大的那一年。

- ②若某位教师当年获得提升,则先由教龄转换公式和模型 I. 得出的薪金表可查出他第一年应得工资 S.,,;
 - a. 若 $S_{ij}-S_{ij}>0$,则 $S_{ij}=S_{ij}+\min[S_{ij}-S_{ij}, S_{ij}-S_{ij}]$
 - b. 若 S₁₁-S₁₁≤0, 则

$$S_{if} = S_{if} + S_{ip} \cdot R(t_{S_{if}})$$

显然,本制度可增加实际工资较低的教师的工资增长速度。

(2) 资金不足时

且此时原则上少提职,以让资金更多地投放于教师工资的增长,使得增长水平接近于标准工资表的水平。

十、模型改进建议

①在一定年限后(如教授在 25 年后),工资以固定的较小数目增长,以使工资稳定在一个水平,这样处理本模型的 Logistic 曲线,可以完全符合原则中所提出的 25 年后教授的工资趋于平衡。234

- ②对于工资与职称和服务年数极不相称的教师在短期内给与个别处理(加薪或终止合约),会使得本模型的转换时间得到很快的改进。事实上,有相当一部分教师受以往工资制度的影响而呈现出极端异常,这是薪金趋于合理的障碍。
- ③确定一个过渡期(2~3年),在过渡期内尽量控制教师升职的数量,将剩余的资金按比例投给薪金水平未达到标准的教师,会加快转换速度。

- ②对于工资与职称和服务年数极不相称的教师在短期内给与个别处理(加薪或终止合约),会使得本模型的转换时间得到很快的改进。事实上,有相当一部分教师受以往工资制度的影响而呈现出极端异常,这是薪金趋于合理的障碍。
- ③确定一个过渡期(2~3年),在过渡期内尽量控制教师升职的数量,将剩余的资金按比例投给薪金水平未达到标准的教师,会加快转换速度。