8.3 Gauss公式与散度

- **Gauss公式**
- **通量与通量密度**
- **散度的定义及计算**
- **散度的运算法则和公式**

作 业

习题6.8 P262
16, 18, 19, 24

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

第三部分 Gauss公式与散度

定理8.4 (Gauss公式) 奥斯特罗格拉特斯基-高斯公式

设空间有界闭区域(V)由分片光滑的闭曲面(S)围成，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在(V)上连续且具有一阶连续偏导数，则

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$$

或

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oint\!\!\!\oint\limits_{(S)}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS$$

这里，(S)是(V)的整个边界曲面的外侧.

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$(S)$上点$(x,y,z)$处的外法向量的方向余弦.

证明: (等号两侧均化为二重积分，进行对比)

设闭区域(V)在面xoy上的投影区域为(σ_{xy}).

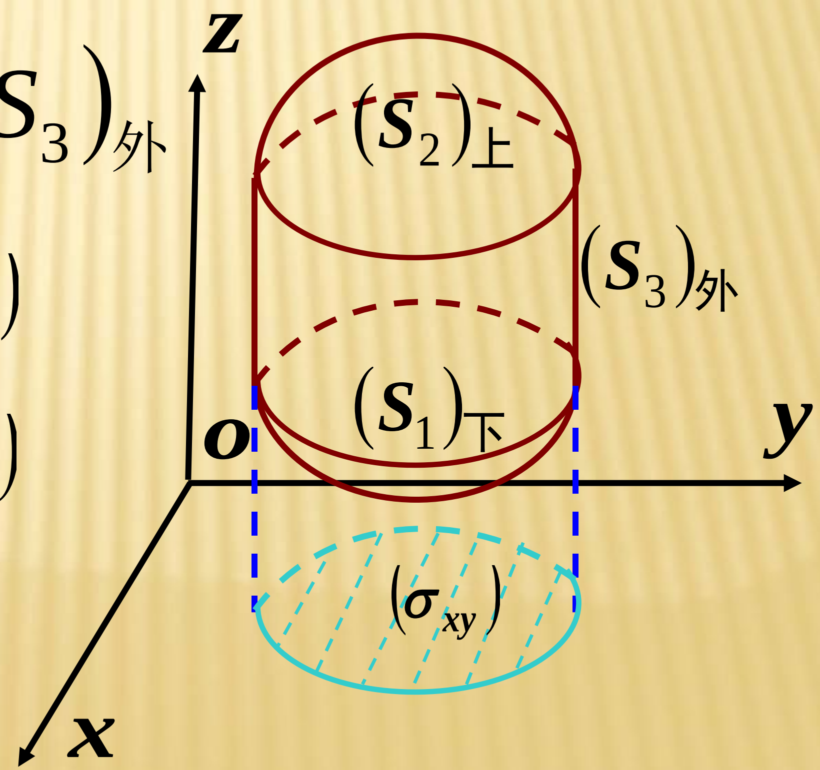
闭区域(V)可表为xy型区域:

$$(V)=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in(\sigma_{xy})\}$$

$$(S)=(S_1)_{下}+(S_2)_{上}+(S_3)_{外}$$

$$(S_1)_{下}: z=z_1(x,y),(x,y)\in(\sigma_{xy})$$

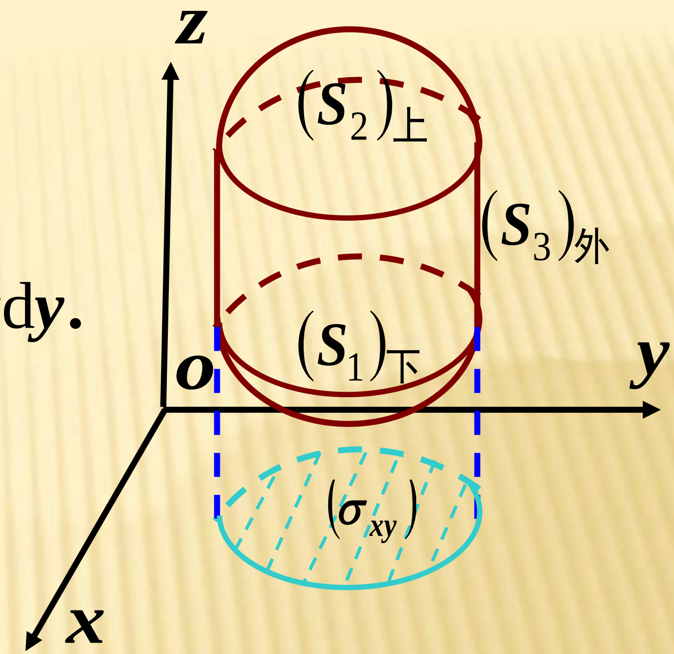
$$(S_2)_{上}: z=z_2(x,y),(x,y)\in(\sigma_{xy})$$



根据三重积分的计算法

$$\iiint_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dV=\iint_{(\sigma_{xy})}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{(\sigma_{xy})}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



$\because (S_1)$取下侧，(S_2)取上侧，(S_3)取外侧

$$\therefore \iint_{(S_1)}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint_{(\sigma_{xy})}R[x,y,z_1(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{(S_2)}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_{(\sigma_{xy})}R[x,y,z_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad \iint_{(S_3)}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

从而可得

$$\boxed{\oiint_{(S)}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}=\oiint_{(S_1)+(S_2)+(S_3)}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{(\sigma_{xy})}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\boxed{\iiint_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dV}$$

同理可得 $$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial P}{\partial x}dV=\oiint\limits_{(S)}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,$$

以上三式两端分别相加，即得：

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

由两类曲面积分之间的关系知

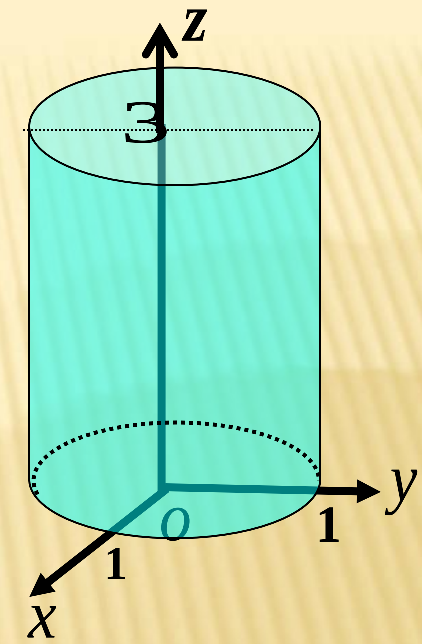
$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\,)\mathrm{d}S.$$

Gauss公式的实质

表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的第二型面积分之间的关系.

例1 计算曲面积分

$$\oiint_{(S)}(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$ 其中(S)为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=3$所围空间闭区域(V)的整个边界曲面的外侧.



解 $P=(y-z)x,\quad Q=0,\quad R=x-y.$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z,\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz$$

$$\xlongequal[z=z]{x=\rho\cos\phi,\,y=\rho\sin\phi}\iiint_{(V)}(\rho\sin\phi-z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(\rho\sin\varphi-z)\rho\,\mathrm{d}\rho=-\frac{9\pi}{2}.$$

Guass公式:

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oiint\limits_{(S)} P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

使用时应注意:

1. P,Q,R是对哪个变量求偏导数;
2. 是否满足高斯公式的条件;
3. (S)是取闭曲面的外侧.
4. 对三维复 连通区域(V)也成立.

向量形式:

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\qquad \nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\iiint\limits_{(V)}\nabla\cdot\vec{A}dV=\oiint\limits_{(S)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}$$

例2 计算曲面积分 $\iint\limits_{(S)}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，

其中(s)为锥面 $x^2+y^2=z^2$介于平面$z=0$及

$z=h(h>0)$之间的部分的下侧。

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$(s)$在$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦.

解: 空间曲面(S)在 xoy 平面上的投影域为(σ_{xy}): $x^2+y^2\le h^2$

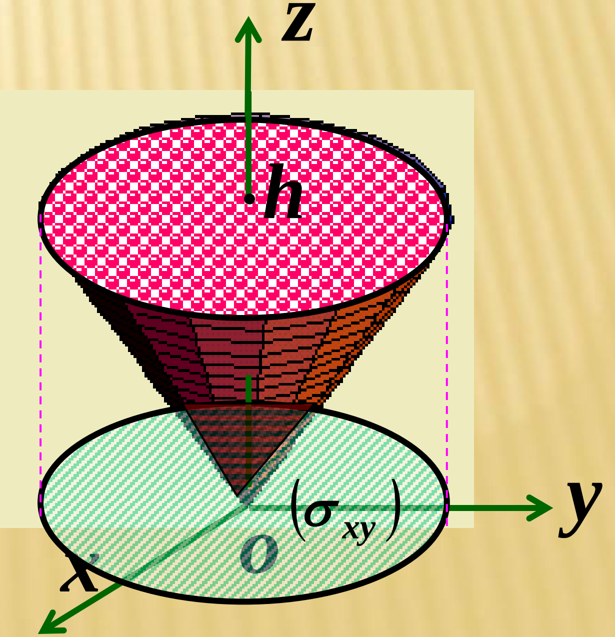
曲面(S)不是封闭曲面,

为利用Gauss公式,

补充曲面:

$(S_1)\quad z=h,\left(x^2+y^2\le h^2\right)$

设$(S)+(S_1)$围成空间区域(V).



设$(S)+(S_1)$围成空间区域(V). **则:**

$$\iint_{(S)+(S_1)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

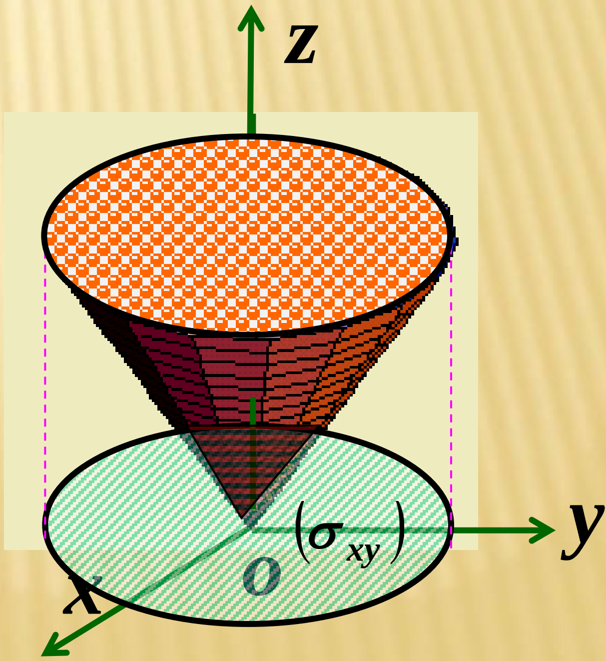
$$= \iint_{(S)+(S_1)} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 2\iiint_{(V)}(x+y+z)\mathrm{d}V$$

$$= 2\iint_{(\sigma_{xy})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\mathrm{d}z = \cdots\cdots$$

$$= \iint_{(\sigma_{xy})}(h^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\pi h^4.$$

而 $$\iint_{(S_1)}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{(S_1)}(0+0+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_{(\sigma_{xy})} h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi h^4.$$

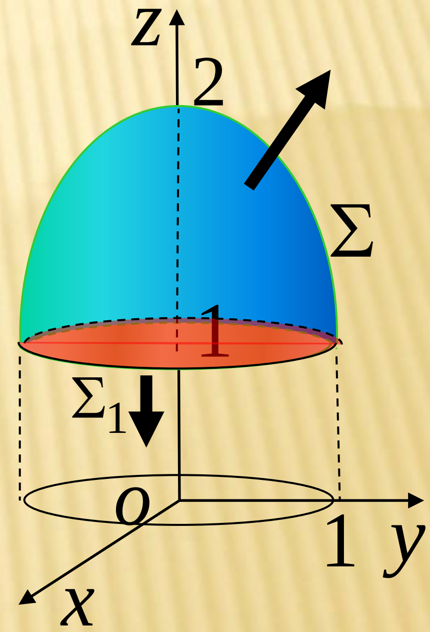


从而: 原式$= \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4.$

例3. 设Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$\boxed{I=\iint_\Sigma (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.}$$

解: 作取下侧的辅助面



$$\Sigma_1: z=1,\quad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_1^{2-\rho^2}\rho\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

定义 设向量场$A(M)$的场域为$(G)\subseteq R^3$，$(S)\subseteq(G)$，为可求面积的有向曲面. 把(S)分成n块小曲面(ΔS_i)（ΔS_i表示该小曲面的面积）， $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$是$(\Delta S_i)$上任意取定的一点，

作点积 $A(M_i)\bullet e_n(M_i)\Delta S_i$，

如果当各小块曲面的直径的最大值$d\to 0$时，

$\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}A(M_i)\bullet e_n(M_i)\Delta S_i$ 存在，

则称此极限为向量场$A(M)$沿有向曲面(S)的第二型曲面积分

记为

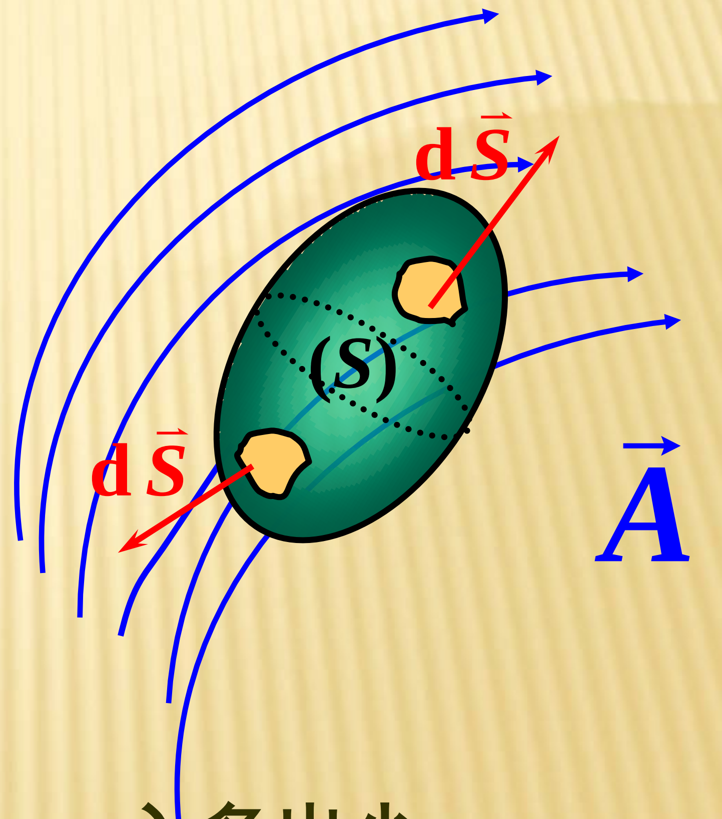
$$\iint\limits_{(S)} A(M)\bullet e_n(M)\,\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(M_i)\bullet e_n(M_i)\Delta S_i$$

通量与散度

通量flux 一般地，把向量场 $\vec{A}$ 对有向曲面 (S) 的通量定义为：

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$ （法向量指向外侧）



若$Q = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0$

表明流量---入少出多.

则 (S) 所包围的区域 (V) 内有产生流体的 ”源”.

若$Q = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} < 0$ 表明流量---入多出少.

则 (S) 所包围的区域 (V) 内有吸收流体的 ”洞”，称为”负源”.

源的强度:通量密度 flux density

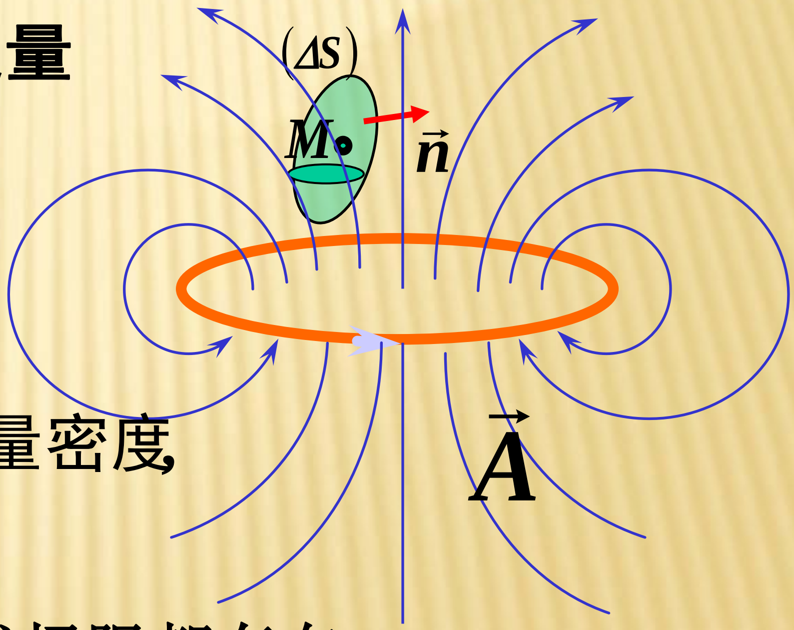
过场中一点 M 任做一包含M, 法向量朝外的闭曲面(ΔS)

(ΔS)所围区域为(ΔV).

当(ΔV)很小时,向量场$\vec{A}$沿(ΔS)的通量

$\Delta\Phi$与小立体(ΔV)的体积之比

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\!\oint_{(\Delta S)}\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



的值表征了向量场$\vec{A}$在点M处的平均通量密度,

它近似反映了点M处源的强度.

当 ΔV以任意方式缩小为点 M 时, 若上式极限都存在.

则称极限值 $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\!\oint_{(\Delta S)}\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

为向量场 $\vec{A}$ 在点 M的通量密度. 也称为向量场在 M点处的散度.

散度记作 $\mathrm{div}\vec{A}(M)=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim\limits_{\Delta V\to M}\dfrac{1}{\Delta V}\oint\!\!\!\oint_{(\Delta S)}\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

注　意:

若向量场$\vec{A}=(P,Q,R)\in C^{(1)}(G)$,则$(G)$内任一点$M$均有其散度与之对应，从而散度$\mathrm{div}\,\vec{A}$是$(G)$内一数量场。称为散度场。

散度场揭示向量场内各点源的分布与强弱程度.

散度为正,表明向量场在该点有”正源”；

散度为负,表明向量场在该点有”负源”,

散度为0,表明向量场在该点无源.

三. 散度的计算 Divergence and the formula for its Computation

由散度定义,得: $\mathbf{div}\vec{A}(M)=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim\limits_{\Delta V\to M}\dfrac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{(\Delta S)}\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$\underline{\underline{Gauss公式}}\lim_{\Delta V\to M}\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_M$$

即 $\boxed{\mathrm{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}}$

从而Gauss公式为: $\iiint\limits_{(V)}\mathbf{div}\vec{A}dV=\oiint\limits_{(S)}\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

通量密度

表明向量场$\vec{A}$在空间区域(V)各点处的通量的无限累加

$\iiint\limits_{(V)}\mathrm{div}\vec{A}dV$等于通过$(V)$的边界$(S)$的通量$\oiint\limits_{(S)}\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

例13 计算向量场 $\vec{A}=x^3\vec{i}+y^2\vec{j}+z^3\vec{k}$ 在 $M(1,0,-1)$ 处的散度.

散度的运算性质：

(1) $\operatorname{div} C\vec{A}=C\operatorname{div}\vec{A}$, C为常数。

(2) $\operatorname{div}(\vec{A}\pm\vec{B})=\operatorname{div}\vec{A}\pm\operatorname{div}\vec{B}$。

(3) $\operatorname{div}(u(x,y,z)\vec{A})=u(x,y,z)\operatorname{div}\vec{A}+(\operatorname{grad}u)\cdot\vec{A}$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}}$$

(3) $\operatorname{div}\left(\boldsymbol{u}(x, y, z)\vec{\boldsymbol{A}}\right)=\boldsymbol{u}(x, y, z)\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}}+(\operatorname{grad}\boldsymbol{u})\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$。

- $\boxed{\nabla\cdot\left(u\vec{A}\right)=u\nabla\cdot\vec{A}+\nabla u\cdot\vec{A}}$

证 $\nabla\cdot\left(u\vec{A}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(uP)+\frac{\partial}{\partial y}(uQ)+\frac{\partial}{\partial z}(uR)$

$$=u\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]+\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R$$

$$=u\nabla\cdot\vec{A}+\nabla u\cdot\vec{A}$$

例14 **电量为q且位于原点处的点电荷产生静电场. 试计算**

(1) 电位移向量场$\overrightarrow{D}$穿过以原点为中心,以R为半径的球面(S)的电通量.

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon\|\vec{r}\|^2}\vec{e}_r,(\vec{r}\neq 0)$$

(2) 电位移向量场$\overrightarrow{D}$的散度.

解 (1)由电学知识得电位移向量为: $\overrightarrow{D}=\varepsilon\vec{E}=\frac{q}{4\pi\|\vec{r}\|^2}\vec{e}_r,(\vec{r}\neq 0)$

由于向径$\vec{r}=(x,y,z)$与球面的法向量同向,电通量为:

$$\Phi_e=\oiint_{(S)}\overrightarrow{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_{(S)}\frac{q}{4\pi R^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S=\oiint_{(S)}\frac{q}{4\pi R^2}\mathrm{d}S=q$$

表明:电位移向量场穿过任一包含点电荷q的闭球面的电通量为q.

$\vec{D}=\frac{q}{4\pi\|\vec{r}\|^2}\vec{e}_r,(\vec{r}\neq 0)$

$$\boxed{\operatorname{div}\left(u(x,y,z)\vec{A}\right)=u(x,y,z)\operatorname{div}\vec{A}+(\operatorname{grad}u)\cdot\vec{A}}$$

(2) 散度为: $\operatorname{div}\vec{D}=\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\left(\frac{q}{4\pi\|\vec{r}\|^2}\vec{e}_r\right)=\frac{q}{4\pi}\nabla\cdot\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}\right)$

$$=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\nabla\cdot\vec{r}+\left(\nabla\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\right)\cdot\vec{r}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{3}{\|\vec{r}\|^3}+\left(-\frac{3\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right)\cdot\vec{r}\right)=0.\quad(\vec{r}\neq 0)$$

表明:电位移向量场在除点电荷q所在的位置外的任意点的散度为零. 即无电荷源.

进一步可得:电位移向量场穿过不包含点电荷的所有闭曲面的电通量为零.

$$\iiint_{(V)}\operatorname{div}\vec{A}dV=\oiint_{(S)}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

一般地，如果电位移向量场是由分布于n个不同点，电荷分别为$q_1, q_2, \cdots, q_n$的点电荷产生的. 那么

电位移向量场穿过任一包含这n个点电荷的闭曲面的电通量为: $\Phi_e = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ (Gauss定理)

进一步，

如果电场中的点电荷是连续分布的，设其体密度为 $\rho(x, y, z)$，则封闭曲面 (S) 内部的所有电量为:

$$Q = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \mathrm{d}V$$

电通量为: $$\Phi_e = \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由Gauss公式得: $$\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \mathrm{d}V = \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\vec{D} dV$$

故散度为: $$\mathrm{div}\overrightarrow{D} = \rho(x, y, z)$$