计算机图形学中的流体：推导和经典实现

林圣翔，李方超，李昱，魏佳哲，许孜诚

2023 年 12 月 31 日

1 背景简介

流体模拟（Fluid Simulation）是计算机图形学（Computer Graphics，CG）领域所关注的一个经典问题。该项技术可用于计算机对于烟、水流、火焰等对象的模拟与可视化，并被广泛应用于游戏和电影工业。

对于粘性不可压缩流体，通过合适的物理建模和推导，我们能够获得 Navier-Stokes 方程组，作为合理描述流体行为的控制方程。计算机图形学对于对应定解问题的求解通常采用近似的数值方法，通过近似求解，我们得以对流体对象实施实时渲染。

2 物理建模与定解问题

考虑粘度为 μ，密度为 ρ，速度场为 $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ 的粘性不可压缩流体，其满足以下两个基本假设：

1. 不可压缩：满足 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$；由质量守恒原理 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ [1] 有 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$。
2. 粘性流体：满足牛顿内摩擦定律。

对于流体速度场 $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$，有牛顿第二定律

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{f} \tag{1}$$

其中 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ 反映流场中特定质点的性质变化；$\boldsymbol{f}$ 为质点受力。

忽略流体的粘性，考虑理想流体，其受到的表面力只有压力，则作用于单位体积流体的压力为 $-\boldsymbol{\nabla}p$；假定其受一个外力 $\boldsymbol{F}$，则有欧拉方程

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p+\boldsymbol{F} \tag{2}$$

对于粘性流体，其粘性应力满足牛顿内摩擦定律

$$\tau_{ij}=\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{3}$$

考虑作用于单位体积流体的粘性力

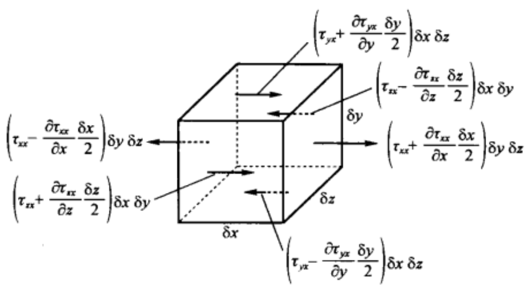

图 1: 作用在一个流体微元上沿 x 轴方向的表面力 [1]

其代数和为

$$
\begin{aligned}
\delta F_{sx} = &(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z - (\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z + \\
&(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta x}{2})\delta x\delta z - (\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta x}{2})\delta x\delta z + \\
&(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta x}{2})\delta x\delta y - (\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta x}{2})\delta x\delta y \\
= &(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z})\delta x\delta y\delta z
\end{aligned}
$$

则单位体积流体粘性力的 x 方向分量为

$$
\begin{aligned}
f_{sx} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(2\mu\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(2\mu\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}) \\
&= \mu\boldsymbol{\Delta} u_x + \mu\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) \\
&= \mu\boldsymbol{\Delta} u_x
\end{aligned}
$$

同理，有 $f_{sy} = \mu\boldsymbol{\Delta} u_y, f_{sz} = \mu\boldsymbol{\Delta} u_z$，则

$$
f_s = \mu\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} \tag{4}
$$

在欧拉方程右侧添加单位质量流体的粘性力可得

$$
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \nu\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \tag{5}
$$

其中 $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$；与 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$ 联立并整理即得 Navier-Stokes 方程组

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} &= -(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \nu\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

现在我们为其匹配定解条件：对于固定边界，有第一类边界条件 $\boldsymbol{u} = 0$；且我们假定初始流体状态为静止，则定解问题可描述为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} & = -(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \nu \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{F} \quad (x,y,z) \in \boldsymbol{\Omega} \quad t > 0 \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} & = 0 \quad (x,y,z) \in \boldsymbol{\Omega} \quad t > 0 \\
\boldsymbol{u} \mid_{\partial \boldsymbol{\Omega}} & = \boldsymbol{0} \quad t > 0 \\
\boldsymbol{u} \mid_{t=0} & = \boldsymbol{0} \quad (x,y,z) \in \boldsymbol{\Omega}
\end{cases}
\tag{7}
$$

该方程的解析解问题是一个著名的数学难题，其数值求解亦为计算流体力学（Computational Fluid Dynamic，CFD）领域所研究的主要问题。我们无法求得其解析解，但仍可以运用计算机图形学中的一些方法，基于该方程对流体行为实施实时模拟。

3 定解问题求解过程

根据 Stable Fluids [2]，我们考虑 Helmholtz-Hodge 分解；对于矢量场 $\boldsymbol{u}$，可以唯一分解为一个无源场与一个无旋场

$$
\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} q
$$

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0
$$

其中 q 为标量场；对任一矢量场 $\boldsymbol{w}$，定义投影算子 $\mathbb{P}$

$$
\mathbb{P}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla} q = \boldsymbol{u}
$$

其中 q 为 $\boldsymbol{\Delta} q = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w}$ 的一个解；对式（6）两边同时实施投影，则我们得以消去压力项

$$
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mathbb{P}(-(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \nu \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{F}) \tag{8}
$$

我们考虑方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = -(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} + \nu \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{F} \tag{9}$$

等式右边三项的物理意义依次为：对流、扩散、外力作用。若我们能够得到一个解 $\boldsymbol{w}$，则可实施投影得到 $\boldsymbol{u} = \mathbb{P}\boldsymbol{w}$。

计算机图形学的目标中，我们需要实施实时渲染，一个常用的做法是考虑对时间和空间均采取离散近似；假定我们模拟二维空间矩形区域的流体行为，则我们考虑离散的时间帧（frame），用两相邻时间帧的时间间隔 δt 作为 $\mathrm{d}t$ 的近似；对某一帧，我们将空间划分为若干个离散单元（unit）；对于某一个场，用离散单元的属性反映其某个点的属性；

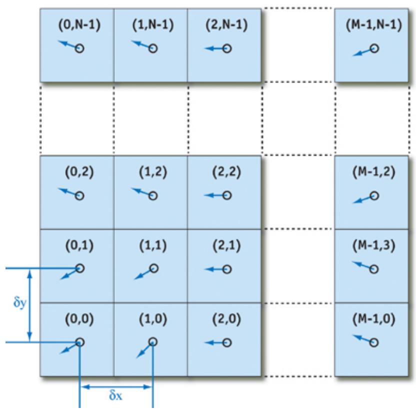

图 2: 某一时间帧的空间属性 [3]

考虑其物理意义，假定每一单元中央存在一个粒子（particle），则大量粒子的属性可反映该场的属性；考虑其图形学渲染，根据所选取的 $\delta x, \delta y$ 的大小，一个单元对应一个或若干像素（pixel）。

对于某一矢量场，我们对微分算子采用如下离散近似：

算子	定义	离散近似
梯度	$\boldsymbol{\nabla} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right)$	$\left(\frac{p(i+1,j)-p(i-1,j)}{2\delta x}, \frac{p(i,j+1)-p(i,j-1)}{2\delta y}\right)$
散度	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$	$\frac{u_x(i+1,j)-u_x(i-1,j)}{2\delta x} + \frac{u_y(i,j+1)-u_y(i,j-1)}{2\delta y}$
拉普拉斯算子	$\boldsymbol{\Delta} p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$	$\frac{p(i+1,j)-2p(i,j)+p(i-1,j)}{2\delta x} + \frac{p(i,j+1)-2p(i,j)+p(i,j-1)}{2\delta y}$

图 3: 矢量算子的离散近似

式（9）的左侧表示 $\boldsymbol{w}$ 在单位时间 δt 中的变化量，右侧仅与当前属性相关；则我们考虑叠加原理，分别求解对流、扩散、外力在 δt 时间内对 $\boldsymbol{w}$ 的贡献；最后通过投影算子 $\mathbb{P}$ 即可得到下一时间帧的 $\boldsymbol{u}$。

首先考虑外力的贡献 $\dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{F}$，则更新

$$\boldsymbol{w}(t+\delta t) = \boldsymbol{F}\delta t \tag{10}$$

其次考虑求解对流的贡献 $\dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = -(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w}$；我们考虑每个粒子位置 $\boldsymbol{x}$ 的变化量 [3]；

$$\boldsymbol{x}(t+\delta t) = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t)\delta t \tag{11}$$

我们追踪每个粒子上个时刻的位置 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}(t)\delta t$，用该上一时刻位置粒子的属性作为当前时刻粒子属性的近似，从而更新

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t+\delta t) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}(t)\delta t, t) \tag{12}$$

然后考虑扩散 $\dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \nu \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{w}$。该方程形式为导热方程；直接考虑 δt 内其变化量的精度较差，根据 Fast Fluid Dynamics Simulation on the GPU [3]，若采取 Jacobi 迭代，则能得到精度较好的解

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \frac{x_{i-1,j}^{(k)} + x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k)} + x_{i,j+1}^{(k)} + \alpha b_{i,j}}{\beta} \tag{13}$$

其中，设定边界条件 $\boldsymbol{w}|_{\partial\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$。

最后，对于投影算子 $\mathbb{P}$，我们通过求解如下 Poisson 方程定解问题得到标量场 q，并从 $\boldsymbol{w}$ 中减去其梯度 $\boldsymbol{\nabla} q$ 从而得到 $\boldsymbol{u} = \mathbb{P}\boldsymbol{w}$；

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta} q & = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w} & (x, y, z) \in \boldsymbol{\Omega} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \boldsymbol{n}} & = 0 & (x, y, z) \in \partial\boldsymbol{\Omega} \end{cases} \tag{14}$$

其中，为其匹配第二类边界条件 $\dfrac{\partial q}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$；该 Poisson 方程亦可使用 Jacobi 迭代式（13）求解。

4 模型实现与可视化

我们做了一个简单的实现，部署于 hfos.github.io/applications/cgtest (实现结果见图 4)，其中参数 $N = 100, \nu = 0.01, \delta x = \delta y = 1$。当鼠标移动至屏幕中央方格区域内，将对半径 7 像素之内的单元施加一个外力 $\boldsymbol{F}$，每个像素的亮度表示该单元处速度值大小。(作为对该站点所有权的证明，我们在 cgtest/proof.jpg 放置了一张本课程的实拍图)

图 4: 实现结果

5 结论

通过合适的物理建模和理论推导，我们得到了 Navier-Stokes 方程组，并为其匹配定解条件。该 PDE 定解问题是我们实施图形学方法的基础，为我们提供了流体行为在数学物理层面的定量描述。基于 Navier-Stokes 方程组和 Stable Fluids 方法，我们得以对流体对象实施实时渲染。在这一过程中，我们根据 Stable Fluids 方法处理原方程，采取离散近似的方法实施计算，从而实施渲染。根据这一方法，我们实现了一个简单的 demo，其能够在个人电脑上运行。

在对该问题的推导与实现中，我们学到了知识，增强了能力，积累了经验，并加深了我们对于数学物理方程课程精神的理解：对于一个现实中的物理过程，我们需要给出合适的数学物理建模，通过适当的方法实施方程求解，从而解决问题。在以后类似的学习或研究中，我们将持续总结，不断改进，争取做得更好。

附：组员构成及其贡献度

姓名	学号	贡献率	签名
林圣翔	2223312202	20%	林圣翔
李方超	2223312273	20%	李方超
李垦	2223312154	20%	李垦
魏佳哲	2223612432	20%	魏佳哲
许孜诚	2223211978	20%	许孜诚

参考文献

[1] 张鸣远.《流体力学》. 高等教育出版社.

[2] Jos Stam. Stable Fluids. In *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '99, page 121–128, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

[3] Mark J. Harris. Chapter 38. Fast Fluid Dynamics Simulation on the GPU. *GPU Gems*, 38, 2004.