

文章编号:1005-3085(2005)07-0117-05

DVD 在线租赁问题研究

李孙良, 张云开, 崔 哲

指导教师: 黄光东

(中国地质大学(北京)人文经管学院, 北京 100083)

编者按: 本文对问题一考虑了每个 DVD 在给定周期内的周转次数, 所得结果符合实际情况, 对问题二基于所给的信息定义了满意度, 根据建立的 0-1 规划得到了较理想的 DVD 分配结果。

摘 要: 本文为在线租赁 DVD 服务的网站设计一种分配方案。该方案保证顾客的满意度最大且 DVD 购买量最少。对于问题一我们首先根据会员租赁 DVD 的频率及其概率, 算出会员租 DVD 频率的期望值, 从而求出各种 DVD 满足条件的最少需求量。问题二是一个单目标优化问题。我们以顾客满意度为目标函数, 建立 0-1 规划模型, 利用 Lingo 软件求得最大满意度。经过检验, 用此方法得到的结果是比较合理的。

关键词: 满意度; 期望; 0-1 规划

分类号: AMS(2000) 90C10

中图分类号: O221.4

文献标识码: A

1 问题提出

本题所解决的问题都是以顾客的需求为前提的。

问题一对于60%每月租赁 DVD 两次和40%每月租赁 DVD 一次的两种会员, 在分配 DVD 时是不可区分的。所以要用概率论中有关期望的知识去求解一般状况。

问题二是一个单目标优化问题。解此题最直接的方法是用贪心算法, 但本题数据量很大, 即使用计算机求解也很难得到理想的结果。所以本文先建立优化模型再用 Lingo 软件求解。

2 模型假设

- 1) 事先无法预测会员在本月订 DVD 的次数;
- 2) 会员每次得到3张 DVD;
- 3) 问题一中, 假设60%的每月租赁 DVD 两次的会员租赁的 DVD 一个月内可外借两次, 而40%的每月租赁 DVD 一次的会员租赁的 DVD 在一个月内只能外借一次。

3 符号说明

| | |
|------------|----------------------------------|
| $Ca(j)$ | 第 j 种 DVD 现有数量 |
| $V(i, j)$ | 0-1 变量, 第 i 位会员是否得到第 j 种 DVD |
| $Co(i, j)$ | 第 i 位会员得到第 j 种 DVD 的满意度 |
| E | 在一个月內每张 DVD 出租次数的期望值 |
| R | 能看到 DVD 的会员的比率 |

P_j 愿意观看第 j 种 DVD 的人数

x_j 第 j 种 DVD 应准备的数量

E_3 每个光盘在三个月内能利用的次数的期望

4 模型建立与求解

1) 模型I (问题一的解决)

第 j 种 DVD 应准备数量=愿观看人数除以每张光盘利用次数的期望乘以能看到该 DVD 人数的比例。即

$$x_j = \frac{p_i}{E} * R. \quad (1)$$

(a) 一个月的情况: 由于60%的会员每月租两次, 40%的会员每月只租一次, 我们假设光盘第一次被每月租两次的会员租的 DVD 光盘一个月能利用两次, 即可被两个会员租到, 被只租一次的会员租的 DVD 光盘一个月只能利用一次。可得到: 每个光盘在一个月内能利用次数的期望为

$$E = 2 \times 60\% + 1 \times 40\% = 1.6. \quad (2)$$

由于能看到该 DVD 人数的比例: $R = 50\%$ 。调查的人数只占全部会员的1%, 所以数据按100倍扩大。将数值代入模型 I 求解并且把解向右取整, 可得表1的结果

表1: 一个月最少 DVD 光盘数

| DVD 名称 | DVD1 | DVD2 | DVD3 | DVD4 | DVD5 |
|--------------|------|------|------|------|------|
| 1000人中愿观看人数 | 200 | 100 | 50 | 25 | 10 |
| 应准备最小 DVD 盘数 | 6250 | 3125 | 1563 | 782 | 313 |

(b) 三个月的情况: 三个月内光盘的分配方案有

表2: 三个月内光盘的分配方案

| 光盘利用次数 | 具体方案 | 该方案的概率 |
|--------|--|--|
| 6 | B*B*B*B*B*B(A) | $60\%^5$ |
| 5 | A*B*B*B*A; B*A*B*B*A; B*B*A*B*A; B*B*B*A*A; B*B*B*B*A; A*B*B*B*B; B*A*B*B*B; B*B*A*B*B; B*B*B*B*A*B. | $60\%^3 \times 40\%^2 \times 5$ $+ 60\%^4 \times 40\% \times 4$ |
| 4 | A*A*B*B; B*A*A*B; A*B*A*B; A*A*B*A; B*A*A*A; A*B*A*A. | $60\%^2 \times 40\%^2 \times 3$ $+ 60\% \times 40\%^2 \times 3$ |
| 3 | A*A*A | $40\%^3$ |

(说明: A 指每个月只租一次的会员, B 指每月租两次的会员)

每个光盘在三个月内能利用的次数的期望

$$\begin{aligned}
 E_3 &= 60\%^5 \times 6 + (60\%^3 \times 40\%^2 \times 5 + 60\%^4 \times 40\% \times 4) \times 5 \\
 &\quad + (60\%^2 \times 40\%^2 \times 3 + 60\% \times 40\%^2 \times 3) \times 4 + 40\%^3 \times 3 \\
 &= 4.44890
 \end{aligned}$$

由于能看到该 DVD 人数的比例: $R = 95\%$ 将数值代入模型 I 求解并且把解向右取整, 可得表3的结果:

表3: 三个月最少 DVD 光盘数

| DVD 名称 | DVD1 | DVD2 | DVD3 | DVD4 | DVD5 |
|--------------|------|------|------|------|------|
| 愿观看人数 | 200 | 100 | 50 | 25 | 10 |
| 应准备最小 DVD 盘数 | 4233 | 2117 | 1059 | 530 | 212 |

2 模型II (问题二的解决)

这是0-1规划的问题, 根据题设建立模型II

目标函数:

$$\min \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} V(i, j) \times Co(i, j) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{100} V(i, j) \leq Ca(j), \quad j = 1, 2, \dots, 20, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{20} V(i, j) = 3, \quad i = 1, 2, \dots, 100, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} V(i, j) \text{ 为 0-1 变量,} \quad i = 1, 2, \dots, 100, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ Co(i, j) = \begin{cases} a(i, j) & a(i, j) \text{ 为 题中所给满意度} \\ M & a(i, j) = 0 \quad M \text{ 为 充分大的数.} \end{cases} \end{array} \right.$$

约束条件说明:

(4)式表示每种光盘出租数不能超过该种 DVD 光盘现有张数。

(5)式表示每个会员能且只能得到3张 DVD 光盘。

该模型是求满意度最大的优化模型。因为题中所给满意度数据中除0外, 数值越小表示满意度越大, 所以求满意度最大问题就是求满意度数值最小的问题。为了求解模型, 我们先将题中的0全部替换为10000, 然后再代入模型求解。用 lingo8.0 求得最优解为: 总体不满意度为40937.00, 有4张光盘租给了不愿观看它的会员, 其它基本上租给了对该光盘偏爱程度较高的会员, 解比较合理, 符合实际。

前30位会员具体获得 DVD 光盘情况见表4。

表4: 前30位会员具体获得 DVD 光盘情况

| 会员 | 获得的 DVD 种类 | 会员 | 获得的 DVD 种类 | 会员 | 获得的 DVD 种类 |
|-------|-------------|-------|------------|-------|-------------|
| c0001 | D3,D17,D20 | c0011 | D3,D10,D20 | c0021 | D6,D13,D15 |
| c0002 | D1,D6,D12 | c0012 | D7,D11,D19 | c0022 | D3,D7,D11 |
| c0003 | D6,D17,D20 | c0013 | D6,D17,D20 | c0023 | D7,D11,D13 |
| c0004 | D7,D11,D12 | c0014 | D6,D16,D17 | c0024 | D7,D11,D13 |
| c0005 | D6,D7,D17 | c0015 | D7,D17,D20 | c0025 | D15,D17,D19 |
| c0006 | D6,D12,D16 | c0016 | D7,D9,D17 | c0026 | D3,D6,D16 |
| c0007 | D7,D11,D20 | c0017 | D4,D7,D17 | c0027 | D6,D7,D10 |
| c0008 | D1,D13,D14 | c0018 | D7,D18,D20 | c0028 | D5,D7,D9 |
| c0009 | D3,D7,D15 | c0019 | D6,D15,D17 | c0029 | D12,D13,D20 |
| c0010 | D10,D12,D17 | c0020 | D6,D7,D20 | c0030 | D3,D17,D20 |

5 模型评价与改进

问题一中, 假设每月租两次的会员与每月租一次的会员可分。我们可以建立模型 I'
 每种 DVD 应准备的数量=愿意观看人数除以每个光盘利用次数的期望
 乘以能看到该 DVD 人数的比例。

一个月的情况:

在分配 DVD 光盘时对会员进行排列, 优先满足每月租两次的会员。因为, 被该类会员租赁的 DVD 光盘在还回后可再次租给其他会员。又因为 B 类会员占60%, A 类会员占40%, 所以每个 DVD 光盘出租次数的期望值为2。即每个 DVD 光盘都能出租两次。求解模型得到如下结果。

| DVD 名称 | DVD1 | DVD2 | DVD3 | DVD4 | DVD5 |
|--------------|------|------|------|------|------|
| 应准备最小 DVD 盘数 | 5000 | 2500 | 1250 | 782 | 250 |

三个月的情况:

分配方案与一个月的分配方案同理。由于每张 DVD 光盘均出租过5次, 所以每张盘的总体出租次数的期望值为5, 求解模型得到如下结果。

| DVD 名称 | DVD1 | DVD2 | DVD3 | DVD4 | DVD5 |
|--------------|------|------|------|------|------|
| 应准备最小 DVD 盘数 | 3800 | 1900 | 950 | 475 | 190 |

与模型 I 相比, 模型 I' 是假设网站管理人员可根据历史数据判断会员属于每月租赁一次还是两次, 进而可对会员进行排序。这种假设不符合实际问题, 只能得出理论上的最小值。

模型 I 考虑到会员是不可区分的, 只能知道两种会员的比例关系。不对会员进行排序, 该假设符合实际情况, 而且所得数据与模型 I 得出的理论值很接近。

在问题二中, 我们采用了 0-1 规则对本题进行优化求解。若第 i 个会员看到第 j 种 DVD, 则 0-1 变量 V 为 1, 否则为 0。利用 lingo 软件可求解。解如表 4。从表中可知, 除其中 4 张 DVD 分发给未对该 DVD 订租的会员外, 网站可将各种 DVD 按会员的满意度从高到低依次发给各会员, 这样就可以满足整体的满意度最大, 进而可确定模型合理性。

参考文献:

- [1] 盛骤等. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001年

- [2] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005年
[3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003年

The Research of the Problem for Hiring DVD on Line

LI Sun-liang, ZHANG Yun-kai, CUI Zhe

Advisor: HUANG Guang-dong

(School of humanities and economic management, China Geosciences University, Beijing 100083)

Abstract: In this paper, we design a distribution scheme about hiring DVD on line. It gives the maximal value of trades' satisfaction degree and the minimal volume of buying DVD. According to the frequency and probability of members' hiring DVD, we compute the expectation of members' hiring DVD, and then we compute the minimal volume. Problem 2 is an objective optimal question. We build up 0-1 programming model and compute the maximal satisfaction by Lingo. The verification shows that the result is very reasonable.

Keywords: satisfaction degree; expectation; 0-1 programming