第一章　函数、极限、连续

第二节　数列的极限（4课时）

- 数列极限的概念
- 收敛数列的性质与极限运算法则
- 数列收敛的判别准则

作业：**P41** 习题1.2

(A)　7,　10,　11　,　13

(B)　2, 3, 4(2)(3)

第一部分　数列极限的概念

1、数列的定义 concept of sequences

定义: 按自然数$1,2,3,\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \quad (1)$$

称为<u>无穷数列</u>,简称<u>数列</u>.其中的每个数称为数列的<u>项</u>,x_n称为<u>通项(一般项)</u>.数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如　$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$　　$\{2^n\}$

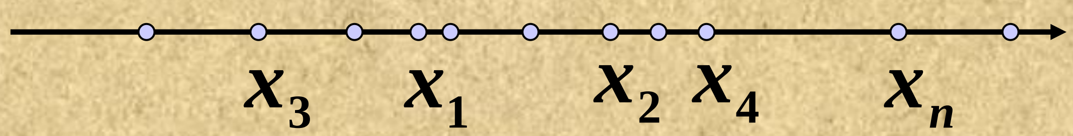
$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;\qquad \{\frac{1}{2^n}\}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots; \qquad \{(-1)^{n-1}\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots; \qquad \left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$$

$$\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\cdots,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}},\cdots$$

注意： 1.数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$.



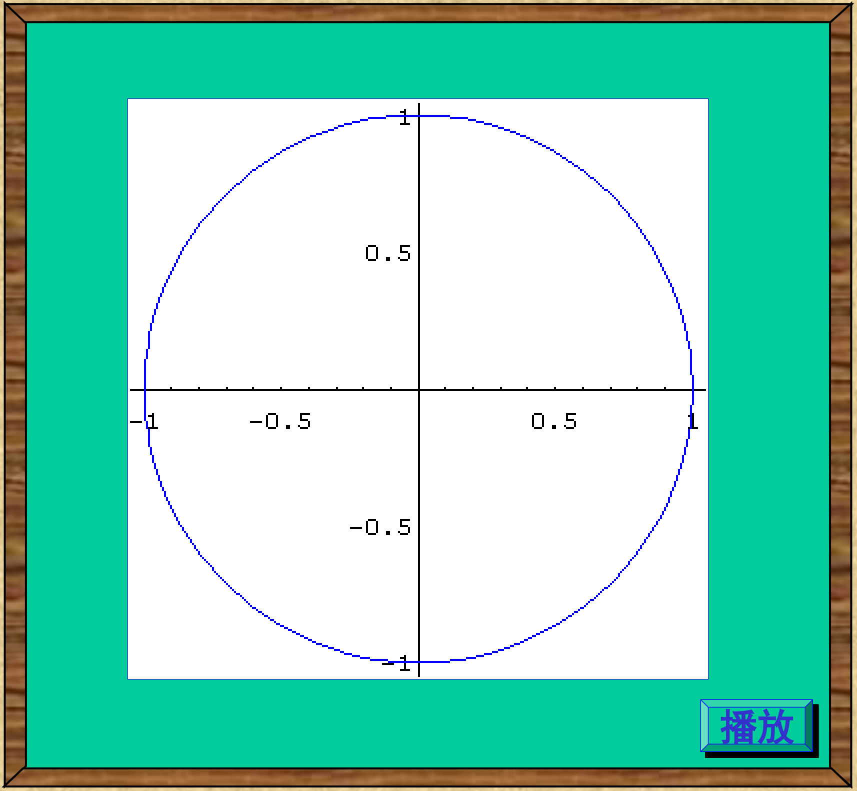
2.数列是**整标函数** $x_n=f(n)$.

2、极限的概念

（1）割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽

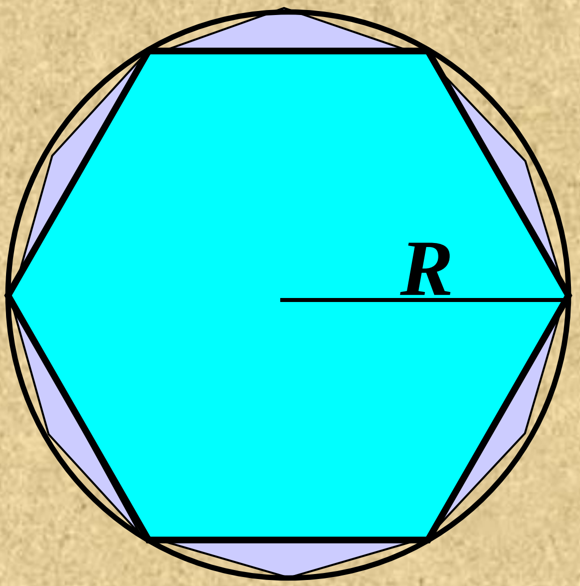


正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正 $6\times 2^{n-1}$ 形的面积 A_n



$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Longrightarrow S$

（2）截杖问题：

战国《庄子·天下篇》中，惠施说：

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

第一天截下的杖长为 $X_1=\frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$;

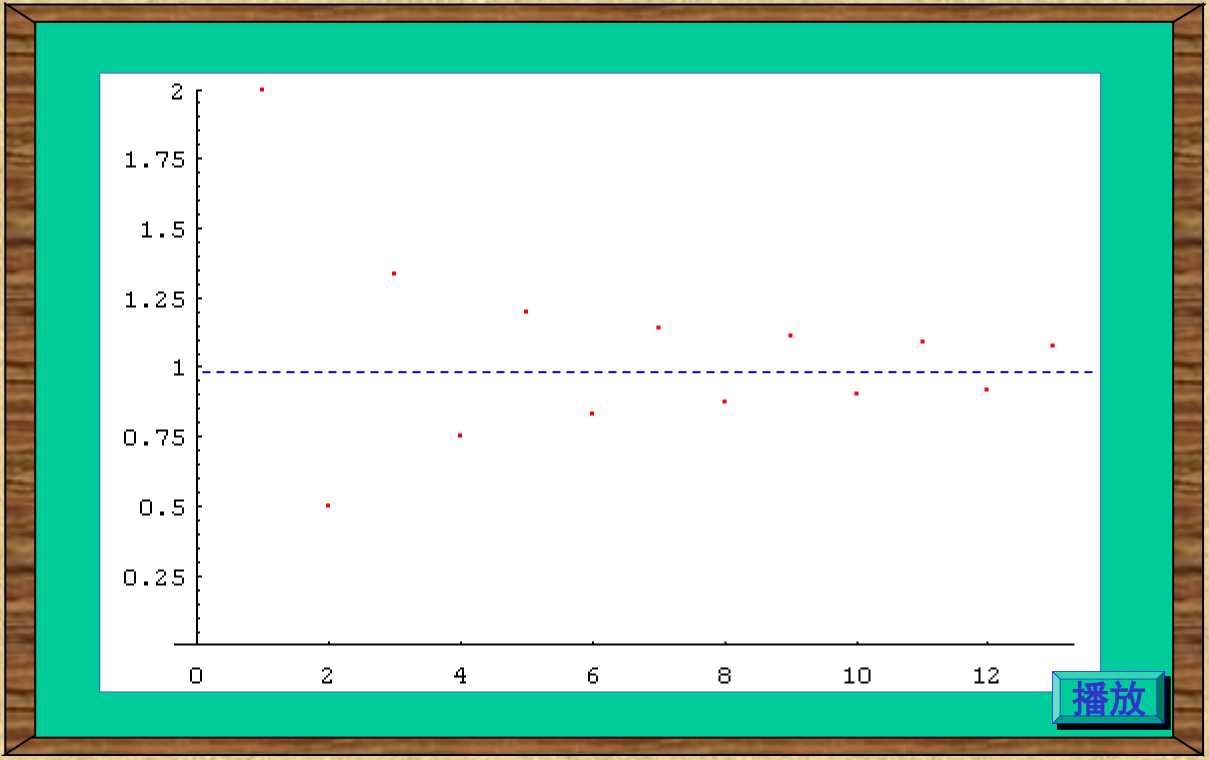
…… ……

第n天截下的杖长总和为 $X_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$;

$$X_n=1-\frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

3、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



❖数列极限的通俗定义

当n无限增大时，如果数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限接近于常数a，则常数a称为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ .$$

例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

问题: **“无限接近”意味着什么?如何用数学语言刻划它.**

问题1: 当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

通过上面演示实验的观察:

当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题2: "无限接近"意味着什么?如何用数学语言刻划它?

当n无限增大时，如果数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限接近于常数a, 则数列$\{x_n\}$收敛a.

•分析

当n无限增大时，x_n无限接近于a .

$\Leftrightarrow$当n无限增大时, $|x_n-a|$无限接近于0 .

$\Leftrightarrow$当n无限增大时, $|x_n-a|$可以任意小, 要多小就能有多小.

$\Leftrightarrow$当n增大到一定程度以后，$|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数.

因此, 如果 n 增大到一定程度以后, $|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数, 则当n无限增大时, x_n无限接近于常数a.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

给定$\frac{1}{100}$，由$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$，只要$n > 100$时，有$|x_n - 1| < \frac{1}{100}$，

给定$\frac{1}{1000}$，只要$n > 1000$时，有$|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$，

给定$\frac{1}{10000}$，只要$n > 10000$时，有$|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$，

给定$\varepsilon > 0$，只要$n > N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$时，有$|x_n - 1| < \varepsilon$成立.

Concept of limit of a sequence

定义： 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a。

记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

注意： 1.不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 刻划了 x_n 与 a 的无限接近;

2.N 与任意给定的正数 ε 有关.

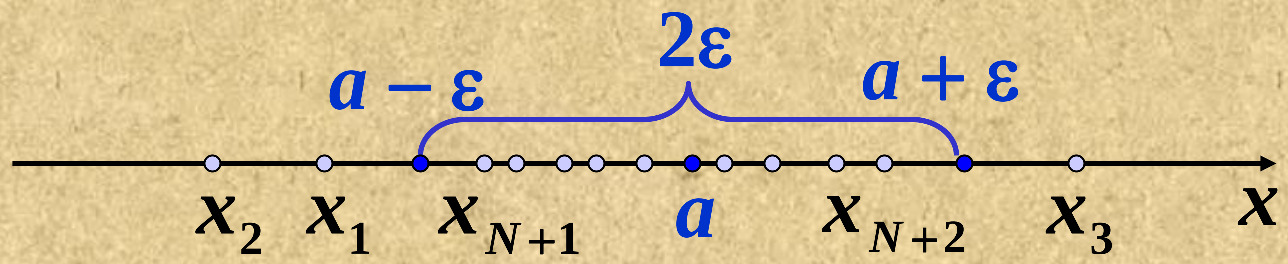
$\varepsilon - N$定义:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, 使 n > N 时, 恒有 \left|x_n - a\right| < \varepsilon.$$

其中 $\forall$: 每一个或任给一个;

$\exists$: 至少有一个或存在一个.

几何解释:



当$n > N$时, 所有的点x_n都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内,

只有有限个(至多只有N个)落在其外.

在证明极限时ε，n，N之间的逻辑关系如下图所示

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$n > N$$

定义中的不等式$|x_n - a| < \varepsilon$（$n > N$）是指下面一串不等式:

$$|x_{N+1} - a| < \varepsilon, \quad |x_{N+2} - a| < \varepsilon, \quad |x_{N+3} - a| < \varepsilon,$$

$\cdots\cdots$ 都成立,

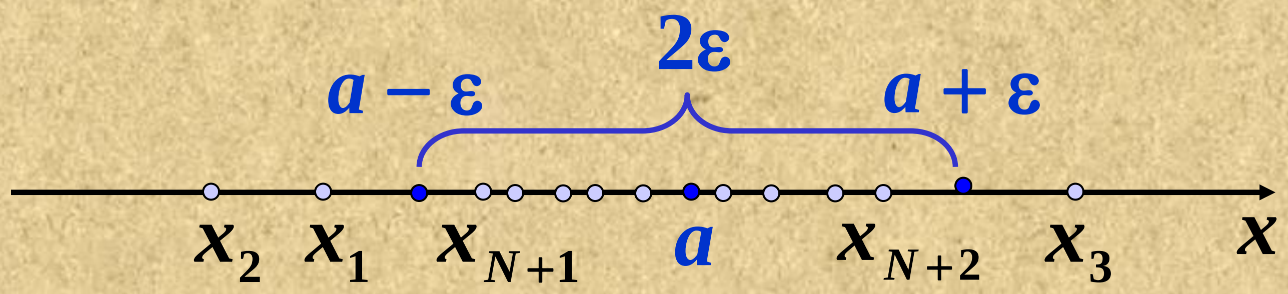
而对 $|x_1 - a| < \varepsilon \quad \cdots\cdots \quad |x_N - a| < \varepsilon$

则不要求它们一定成立

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，使得 N 项以后的所有项 $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \cdots$

都落在a点的ε邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内

因而在这个邻域之外至多只能有数列中的有限个点



这就表明数列x_n所对应的点列除了前面有限个点外都能凝聚在点a的任意小邻域内，同时也表明数列x_n中的项到一定程度时变化就很微小，呈现出一种稳定的状态，这种稳定的状态就是人们所称谓的“收敛”。

注意：数列极限的定义并未给出求极限的方法.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 $|x_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，或 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，

所以，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，

就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

例2 设$x_n \equiv C$(C为常数), 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证 任给$\varepsilon > 0$, 对于一切自然数n,

$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$成立,

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

说明: 常数列的极限等于同一常数.

小结: 用定义证数列极限存在时,关键是任意给定$\varepsilon > 0$,寻找N,但不必要求最小的N.

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中 $|q| < 1$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若 $0 < |q| < 1$, $|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, $n \ln|q| < \ln\varepsilon$,

$\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, 取 $N = [\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$, 则当 $n > N$ 时,

就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例4 设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

例4 设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证 任给$\varepsilon > 0$, 取$\varepsilon_1 = \sqrt{a}\varepsilon > 0$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N$,使得当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon_1$.

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

思考题:

下列说法能否作为 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限的等价定义？为什么？

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，恒有不等式 $|a_n - A| < k\varepsilon$ 成立，其中 k 为正常数.

(2) 对于无穷多个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，恒有不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，有无穷多项 a_n，使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.