

## 7、飞机起飞的最优次序

### 1. 问题与假设

#### (1) 问题

机场通常都用“先来后到”的原则分配飞机跑道。即当飞机准备离开登机口时，驾驶员电告地面控制中心，加入等候跑道的行列。

假设控制塔可以从快速反应数据库中得到每架飞机的如下信息：

- 1) 预定离开登机口的时间；
- 2) 实际离开登机口的时间；
- 3) 机上乘客人数；
- 4) 预定在下一站转机的人数和转机时间；
- 5) 到达下一站的预定时间。

又设共有 7 种飞机，载客量从 100 人起以 50 人递增，最大的飞机载客量为 400 人。这 7 种飞机可能分属不同的航空公司。

试开发和建立一种能使乘客和航空公司双方都满意的数学模型，以安排飞机起飞的先后次序。

#### (2) 假设

1) 机场控制塔上有一个快速反应的数据库，该库中存贮着每一架飞机的正点起飞时间，正点抵达目的地的时间，乘客数量，飞行距离等信息，其他一些有用的参数，可以根据数据库中已有数据估

• 本题为 1989 年美国大学生数学建模竞赛的 B 题。本文根据 [5] 的解答编译而成。

计出来。

2) 所有飞机都在同一个专用跑道上起飞, 任何一种飞机在跑道上起飞所需时间相同, 这样可以把时间划分成间隔为  $\Delta$  的起飞时段。

3) 标号为  $i$  的飞机在第  $j$  个时段起飞所需费用与先前起飞的飞机无关, 仅与其安排的次序有关。这一假设使我们可以把总费用作为飞机调度排序的线性函数。

4) 所有飞机从登机口到跑道起点的时间相同。

5) 记  $\tau$  为使飞机尚能正点到达目的地所推迟起飞的最长时间。同时假定, 当飞机的误点时间超过  $\tau$  时, 则飞机将以最大的安全速度飞行。

6) 如果飞机推迟起飞的时间超过  $\tau$ , 则机上所有下站转机的乘客都将耽误转机。

7) 因误点而要求改航的赔偿费对每一个乘客都是相同的。

(3) 记号及其意义

$\Delta$ ——飞机起飞的时间间隔;

$t_0$ ——最早起飞的飞机的离港时间;

$t_d$ ——正点起飞的时间;

$T_A$ ——正点到达目的地的时间;

$t$ ——晚点时间;

$\tau$ ——最大允许晚点起飞的时间;

$k$ ——各种类型的飞机因晚点起飞而引起耗油的费用常数;

$V_{av}$ ——平均飞行速度;

$V_{max}$ ——最大的安全飞行速度;

$r$ ——要求改航的乘客的赔偿费;

$\pi$ ——下站转机的乘客数;

$P$ ——乘客总数;

$\alpha$ ——由于晚点起飞所引起的乘客不满意(程)度的增长率;

$a$ ——全体乘客由于飞机晚点起飞所引起的不满意度折合成美元的折合率；

$b$ ——耽误转机的乘客不满意度折合成美元的折合率。

## 2. 分析与建模

若有  $n$  架飞机都要求在  $t_0$  时刻正点起飞，并且认为所有飞机都有直通跑道的通道。我们以总费用最小作为目标来安排飞机起飞的次序。总费用由两部分组成，即航空公司的费用和乘客不满意程度所折合的费用。

设  $c_{ij}$  为标号  $i$  的飞机在第  $j$  个起飞时段起飞时的费用，引入状态变量  $x_{ij}$ ，其定义为

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当标号为 } i \text{ 的飞机第 } j \text{ 个起飞时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则总费用为

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (7-1)$$

为了保证每一架飞机只安排在一个时段内起飞及每一个时段  $\Delta$  内只有一架飞机起飞，因此对状态变量  $x_{ij}$  增加约束条件：

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (7-2)$$

由假设条件可知， $c_{ij}$  与  $x_{ij}$  无关，因而总费用  $C$  是一个线性函数。

问题的实质是在约束条件 (7-2) 之下求  $x_{ij}$ ，使得总费用  $C$  达到最小，这是一个指派问题。

假定每隔  $\Delta$  时间只有一架飞机离开登机口加入到请求起飞的行列中，这样就保证总有飞机请求起飞。每隔  $\Delta$  时间，执行一次程序，以安排在当前状态下最优的起飞次序。这里需要说明一点，该程序运行时间极短，不到一分钟便可完成，因此，如果数据发生变化时，如飞机晚点进港等，几乎可以立即决策。

下面来分析费用系数的确定。

总费用应包括航空公司的费用和乘客的不满意度所折合的费用。首先把基本费用视为零,即设飞机在正点起飞时的费用为零,仅考虑由于飞机晚点起飞所导致的额外费用。

航空公司的费用主要由两部分组成。一部分为额外的汽油费,这个费用主要是由于飞机晚点起飞时,要在空中快速飞行所额外消耗的汽油费;另一部分为耽误了转机的乘客需改航时的赔偿费。若飞机晚点起飞,为了正点抵达目的地,它必须在空中以更快的速度飞行,这样由于风阻力的增大和其它因素,就要增加汽油的消耗。我们不太清楚速度的增加如何引起耗油费的增加,但当飞机加速过程结束,在空中以最大安全速度飞行时,额外的耗油费将是一个常数。为简单起见,选用线性函数来表示额外的油耗费,其公式是

$$F(t) = \begin{cases} kt, & t < \tau \\ k\tau, & t \geq \tau \end{cases} \quad (7-3)$$

其中,  $t$  为飞机晚点起飞的时间,显然当飞机正点起飞时,  $t=0$ , 若  $t_0$  为首架起飞的时刻,  $t_d$  为正点起飞的时刻,  $\Delta$  为起飞的时间间隔,则第  $j$  个起飞的飞机晚点起飞的时间为

$$t = t_0 - t_d + (j-1)\Delta$$

由于  $\tau$  为最长的晚点起飞时间,即当晚点起飞的时间超过  $\tau$  以后,即使在空中以最大速度飞行,也不能正点抵达目的地,因此

$$\tau = T_A - t_d - \frac{d}{V_{\max}}^*$$

其中  $T_A$  为正点抵达目的地的时刻,  $d$  为飞行距离,  $V_{\max}$  为最大的安全飞行速度。 $d$  可用公式来表示

$$d = (T_A - t_d)V_m$$

其中  $t_d$  为正点起飞时刻,  $V_m$  为正点起飞时平均飞行速度。

---

\* 原文为  $\tau = T_A - \frac{d}{V_{\max}}$

式(7-3)中的常数 $k$ 与油价、单位晚点时间油耗的增加率及最大安全飞行速度有关,同时还应与飞行距离有关,当然飞行距离越长,额外的油耗就越大。由于飞行距离为 $T_A - t_d - \tau$ ,乘以最大安全飞行速度,因此式(7-3)可以改写为

$$F(t) = \begin{cases} k(T_A - t_d - \tau)t, & t < \tau \\ k(T_A - t_d - \tau)\tau, & t \geq \tau \end{cases} \quad (7-4)$$

下面再计算改航旅客的赔偿费。为简单起见,由假设条件,记每一个改航旅客的赔偿费用为一个常数 $r$ (若赔偿费不同,则令 $r$ 为赔偿费的期望值)。由于当飞机晚点起飞时,所有下站转机的乘客都将改航,则改航的赔偿费为

$$R(t) = r\pi u(t - \tau) \quad (7-5)$$

$\pi$ 为转机旅客总数, $u(t)$ 为单位阶梯函数,即

$$u(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1, & s \geq 0 \end{cases}$$

费用系数中还应考虑乘客的不满意程度。一般地,飞机晚点起飞的时间越长,旅客就越抱怨,其不满意程度就越大。如果晚点时间只有1~2min,旅客就不会太不满意。但是,随着晚点时间的增加,旅客会非常生气,而不满意度将急骤增加,因此我们选用指数函数描述旅客的不满意度。这个不满意度对机上每一个旅客都是如此,但对下站要转机的乘客,还需追加另外的不满意度,用 $D(t)$ 表示总的的不满意度所折合的费用,则

$$D(t) = ap(e^{\alpha t} - 1) + b\pi u(t - \tau)$$

$p$ 为机上乘客总数, $\pi$ 为下站转机的乘客总数,为了保证在正点起飞时乘客的不满意度为零,因而采用了 $(e^{\alpha t} - 1)$ 的形式,显然 $t=0$ 时, $D(0)=0$ 。 $\alpha$ 为乘客不满意度的增长率, $a, b$ 为折合率。 $ap(e^{\alpha t} - 1)$ 代表全体乘客不满意度所折合的费用, $b\pi u(t - \tau)$ 为下站转机乘客追加的不满意度所折合的费用,这一项只有当 $t \geq \tau$ 才起作用。

综上所述,费用系数 $c_{ij}$ 应为额外油耗费、赔偿费、及不满意度

所折合的费用之和

$$c_{ij} = F(t) + R(t) + D(t)$$

为了使  $c_{ij}$  对所有  $t$  都有意义, 也为了同时考虑还未离开登机口的飞机, 当  $t < t_d$  时, 定义  $c_{ij} = \infty$ 。由于模型中考虑总费用的最小值, 当加入未离开登机口的飞机时总费用  $C$  变为  $\infty$ , 当然不能达到最小, 因而自然不会影响排队的最优次序, 扩充定义后的  $c_{ij}$  为

$$c_{ij} = \begin{cases} \infty, & t < t_d \\ k(T_A - t_d - \tau)t + ap(e^a - 1), & t_d \leq t < \tau \\ k(T_A - t_d - \tau)\tau + ap(e^a - 1) + r\pi + b\pi, & t \geq \tau \end{cases}$$

$t$  和  $\tau$  可由下式给出

$$t = t_0 - t_d + (j-1)\Delta \quad (7-6)$$

$$\tau = T_A - t_d - \frac{(T_A - t_d)V_{av}}{V_{max}} \quad (7-7)$$

$a, \alpha, b$  为自由参数, 其它参数  $t_d, T_A, \pi, p, r, \Delta, k, V_{av}, V_{max}$  均可从快速数据库中查到,  $t_0$  可由计算机的系统时钟给出, 因此除 3 个自由参数外, 其它参数都可以进行计算。

### 3. 模型的检验

#### (1) 稳定性分析

为了使模型有意义, 必须进行检验。我们用线性规划的单纯形法编制了程序, 在几种简单的情形下显示了模型的性态, 下面的计算实例所得的结果与我们所期望的完全一致。模型是否成功的标志就是看是否为航空公司节约开支, 同时又保持乘客的满意程度在可接受的水平内。

然而在对模型检验前, 必须分析模型对参数扰动的稳定性, 也就是说, 必须保证在有些参数与真值有微小差别的情况下, 所得到的解与最优解相差也不大。另外还需辩认哪一个参数对结果影响最为敏感, 而对这个参数必须由更多的方面来确定, 以使模型能够真实地被执行。

我们所建立的模型不是一个严格的线性规划问题，其原因就是状态变量  $x_{ij}$  不是连续变量，而只能取 0 或 1，这给稳定性分析带来不便。为此把  $x_{ij}$  的取值放宽到非负实数范围内，即

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

用  $Z = -C$  代替，则原问题转化为：

$$\max Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-c_{ij} x_{ij}) \quad (7-8)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7-9)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

熟悉线性规划问题的读者知道，如果问题 (7-8), (7-9) 有可行解，则必然有最优解，且最优解中的状态变量仅取整数值，即只能取 0 或 1，因而问题 (7-8), (7-9) 与原问题 (7-1), (7-2) 是等价的。

把式 (7-8) 和式 (7-9) 用向量形式写出来将更加简洁，而且更容易进行稳定性分析和误差估计，令

$$C = -(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn})$$

$$X' = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$$

$$b' = (1, 1, \dots, 1)$$

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} n \text{ 列} & 2n \text{ 列} & & n^2 \text{ 列} \\ \hline 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ \dots \ \dots \ \dots & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 1 \ \dots \ 1 & \dots \ \dots \ \dots \ \dots & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \ \dots \ \dots & \dots \ \dots \ \dots & \dots \ \dots \ \dots \ \dots & \dots \ \dots \ \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ \dots \ \dots \ \dots & 1 \ 1 \ \dots \ 1 \\ \hline E_n & E_n & \dots \ \dots \ \dots \ \dots & E_n \end{array} \right]_{(2n \times n^2)}$$

其中,  $E_n$  是  $n$  阶单位矩阵。

$C$  和  $X$  均为  $n^2$  维的向量,  $b$  为  $2n$  维的向量, 上标  $t$  表示转置, 这样问题 (7-8), (7-9) 转化为

$$\max Z = CX$$

$$s.t. \quad AX = b \text{ 和 } X \geq 0 (\text{指各分量非负})$$

显然  $A$  和  $b$  不会改变, 而引起误差的原因来自于  $C$ 。若  $X^*$  为最优解,  $C$  的扰动为  $\Delta C$ , 即  $C' = C + \Delta C$ , 由于  $AX = b$  不受  $C$  的影响, 因而  $X^*$  仍然为可行解, 但此时未必为最优解。新的目标函数值  $Z'$  为:

$$\begin{aligned} Z' &= Z'X^* = (C + \Delta C)X^* \\ &= CX^* + (\Delta C)X^* \\ &= Z + (\Delta C)X^* \end{aligned}$$

目标函数的改变量为  $(\Delta C)X^*$ , 它是  $\Delta C$  的线性函数, 当然, 当  $|\Delta C|$  很小时,  $|Z' - Z|$  也很小, 因此模型是稳定的。

$C$  产生误差的原因有两个, 其一是忽略掉一些耗费, 如快速飞行时, 引起飞机额外的消耗; 其二是来自于旅客不满意度中的参数  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ , 这些参数很难得到真值, 因而是  $C$  产生误差的主要原因。顺便指出, 在这 3 个参数中  $\alpha$  最敏感, 因为  $\alpha$  为指数, 它对最优解的影响与  $a$ ,  $b$  对最优解的影响有量级的差别。

现在来分析参数  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  有扰动时的误差。设

$$a = \hat{a} + \sigma_a, \quad b = \hat{b} + \sigma_b, \quad \alpha = \hat{\alpha} + \sigma_\alpha$$

即 3 个参数的扰动分别为  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$ ,  $\sigma_\alpha$ 。  $c_{ij}$  对  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  的偏导数为

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial a} = p(e^\alpha - 1)$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial b} = \pi$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial \alpha} = a p t e^\alpha$$



如果我们设扰动误差是相互独立的, 则  $c_{ij}$  的误差  $\sigma_{c_{ij}}$  为

$$\begin{aligned}\sigma_{c_{ij}}^2 &= \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \sigma_a^2 [(e^a - 1)p]^2 + \sigma_b^2 \pi^2 + \sigma_\alpha^2 t^2 a^2 p^2 e^{2a}\end{aligned}$$

因为

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

因此

$$\frac{\partial Z}{\partial c_{ij}} = x_{ij}$$

所以目标函数  $Z$  的误差  $\sigma_Z^2$  可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial c_{ij}}\right)^2 \sigma_{c_{ij}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 \sigma_{c_{ij}}^2\end{aligned}$$

## (2) 计算实例

用我们编写的程序, 通过以下几个例子, 显示了模型的一些性质, 这些例子说明模型是合理的。

为了执行简单, 再作一些假设。

1) 至多有三架飞机等候起飞 (即  $n \leq 3$ ), 如果不足三架, 在模型中增加一架或两架虚拟的飞机, 只需要把虚拟飞机的费用系数视为零即可。在此之下, 可以调用国际数学统计库 (IMSL) 的子程序 ZX4LP 来求解线性规划问题。

2) 通过直觉来确定参数  $a, b, \alpha$ , 在实践中这三个参数应由经验和调查来确定。

i)  $\Delta = 1\text{min}$ , 即任何飞机起飞时间至多 1 min, 其间, 其它飞机不能占用跑道。

ii) 跑道上没有飞机降落。

iii) 每一个改航旅客的赔偿费用为 350 美元。

iv) 一个要改航乘客的不满意度是误点 15min 的乘客的 2 倍。

### 例 1 乘客多的飞机先起飞。

让我们考虑一个简单的例子, 有  $A, B, C$  三架飞机都已离开了登机口, 要求在上 6 点钟正点起飞, 这三架飞机将飞往三个不同城市, 但空中飞行距离都相同, 正点抵达目的地的时间均为上午 7 点 20 分。另外, 其乘客数量分别为 350, 100, 400, 且每架飞机上都有 100 名乘客将在下一站转机。

表 7-1 给出了执行程序的结果。

表 7-1

标号	乘客数/转机乘客数	费用系数 $c_{ij}$			解 $x_{ij}$		
A	350/100	0	0.48	0.97	0	1	0
B	100/100	0	0.41	0.83	0	0	1
C	400/100	0	0.5	1	1	0	0

其最小费用为 1.31, 起飞的次序为  $C, A, B$ 。这一结果与我们的直觉完全一致, 即在其它条件相同的情况下, 乘客数量多的飞机优先起飞。

### 例 2 误点时间最长的飞机优先起飞。

接着例 1 的问题, 飞机  $C$  正在起飞的同时, 飞机  $D$  已离开了登机口请求起飞。已知飞机  $D$  载有 200 名乘客, 其中 150 名将在下站转机, 这架飞机已经晚点 18min, 要使飞机  $D$  正点抵达目的地, 必须在 2min 内起飞 (即必须在 6 点 02 分或 6 点 03 分两个起飞时段内起飞)。程序运行结果由表 7-2 给出。

表 7-2

标号	乘客数/转机乘客数	已晚点时间 (min)	费用系数 $c_{ij}$	解 $x_{ij}$
D	200/150	18	0.82 0.91 1	1 0 0
A	100/100	1	0.07 0.15 0.22	0 0 1
B	350/100	1	0.09 0.17 0.26	0 1 0

这个例子中的总费用为 1.22, 最优的起飞次序为 D, A, B。这一结果与直觉相符, 即晚点时间最长的飞机优先起飞。

**例 3** 优先权相差不明显的情形。

当系统时钟指向 6 点 03 分, 此时 C, D, A 三架飞机已先后起飞, 飞机 B 已晚点 3min, 而又有一架飞机 E 离开登机口, 请求起飞。对飞机 E, 我们知道如下信息: 总乘客数 122 名, 其中 89 名乘客在下站转机; 晚点 1min 的费用为 450 美元; 最长的晚点时间为 45min。

用我们的程序求解这个问题, 须增加一架虚拟飞机 X, 对应于飞机 X 的所有参数为零, 表 7-3 给出了例 3 的结果。

表 7-3

标号	乘客数/转机乘客数	已晚点时间 (min)	费用系数 $c_{ij}$	解 $x_{ij}$
B	100/100	3	0.6 0.8 1	0 1 0
E	122/89	0	0 0.28 0.56	1 0 0
X	0/0	0	0 0 0	0 0 0

从表 7-3 可以看出, 总费用之差  $0.88 - 0.8 = 0.08$ , 这个数目不太大, 因而究竟哪一架飞机应先起飞不甚明显。事实上, 由于飞机 E 有较多的富裕时间, 因而应先安排飞机 B 起飞。但是, 由于飞机 E 在飞行时费用较大, 以及有更多的乘客, 因而飞机 E 应先起飞, 这与模型的结果一致。总体上来讲, 这个例子与我们的直觉有差异。

#### 4、模型的优缺点

本模型有两个缺点：其一， $a$ ， $b$ ， $\alpha$ 三个参数很难精确地确定，只能凭经验给出；其二，在建模时仅考虑了飞机起飞的情形，而忽略了在跑道上飞机降落的情形。

该模型适合于有两个以上跑道的机场。

虽然如此，这个数学模型的优点还是明显的。首先，执行简单，利用当前的计算机技术和快速数据库，可在几秒钟内得到最优解，甚至对飞机数量较大时也是如此；第二，模型具有广泛性，对于飞机数量的多少，机上乘客数和下站转机乘客数等，都可以在一般的情形下给出最优解；第三，模型是稳定的，其可靠性可以信赖。

因此，利用该模型既可为航空公司节约费用，又能使乘客得到足够的满意。

#### 参考文献

- [1] Bevington, Philip R. : *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science*, New York, McGraw Hill, 1969
- [2] Cooper, Leon, David Steinberg: *Methods and Applications of Linear Programming*, Philadelphia, PA; Saunders, 1974
- [3] Hiller, Frederik and Gerald Lieberman: *Introduction to Operations Research*, Oakland, CA; Holden — Day, 1986
- [4] Spivey, W. Allen, Robert M. Thrall: *Linear Optimization*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1970
- [5] R. Ngo, M. Overley, J. Pilliod: Controlling Departing Airport Traffic: *The UMAP Journal* Vol. 10 No. 4, 1989