第三部分 函数展开成幂级数

一、Taylor级数

上例题: $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=e^x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

约定: $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

是指存在幂级数在其收敛域内以$f(x)$为和函数。

也称函数 $f(x)$ 可展开成幂级数。

问题1: 1.如果能展开, a_n 是什么?

2.展开式是否唯一?

3.在什么条件下才能展开成幂级数?

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数，且在 $U_\delta(x_0)$ 内能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数.

即 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

则 $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),(n=0,1,2,\cdots)$ 且展开式是唯一的.

证明 $\because \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内收敛于 $f(x)$,

即 $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$,逐项求导得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)^2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数，且在 $U_\delta(x_0)$ 内能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数.

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

则 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),(n=0,1,2,\cdots)$ 且展开式是唯一的.

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)^2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

令 $x=x_0$，即得 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\ (n=0,1,2,\cdots)$ 泰勒系数

泰勒系数是唯一的，$\therefore f(x)$ 的展开式是唯一的.

上页 下页 返回

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处任意阶可导, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒级数.

Taylor展开式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数. （x_0=0）

Maclaurin展开式

一般地，给定的任意阶可导函数必存在形式上的幂级数。

问题2：泰勒级数(幂级数)在收敛区间是否收敛于 $f(x)$?

即：$$f(x) \overset{?}{==} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

不一定!

上页 下页 返回

例如：$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$点任意阶可导，且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)$的麦氏级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$

该级数在$(-\infty,+\infty)$内和函数$s(x)\equiv 0.$

但 除$x=0$外, $f(x)$的麦氏级数处处不收敛于 $f(x)$.

上页 下页 返回

例如： $$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f'(0)=\lim\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}\overset{令\frac{1}{x^2}=t}{=}\lim\frac{\pm\sqrt{t}}{e^t}=0$$

用数学归纳法，

假设$f^{(n-1)}(0)=0$,则可证明

$$f^{(n)}(0)=\ldots=0$$

定理3.8 $f(x)$在点x_0的泰勒级数在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x)$
$\Leftrightarrow$在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0.$

证明 必要性 设$f(x)$能展开为泰勒级数,

$$\because f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n(x)$$

$$\therefore R_n(x)=f(x)-s_{n+1}(x),$$

$$\because \lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x)=f(x)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=0;$$

充分性 $\because f(x)-s_{n+1}(x)=R_n(x)$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-[f(x)-s_{n+1}(x)]\right)=f(x),$$

$\therefore f(x)$的泰勒级数收敛于$f(x)$.

推论3.1 (充分条件)

设$f(x)$在$U(x_0)$上有定义, $\exists M>0$, 对$\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$, 恒有 $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 则$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内可展开成点x_0处的泰勒级数.

推论3.1 **(充分条件)** 设 $f(x)$在$U(x_0)$上有定义, $\exists M>0$, 对$\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$, 恒有 $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 则 $f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内可展开成点x_0处的泰勒级数.

f 的 n 阶导一致有界

证明:

$$\because\ \left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$x\in(x_0-R,x_0+R)$

$$\because\ \forall\alpha\in R,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=0,\ \text{(单调减有下界)}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}=0,\ \text{故}\ \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R,x_0+R)$$

$\therefore\ f(x)$可展成点x_0处的泰勒级数.

上页 下页 返回

二、函数展开成幂级数

1. 直接法(泰勒级数法)

步骤: (1) 求 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 或 $\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$,

则级数在收敛区间内收敛于 $f(x)$.

例6 将$f(x)=e^x$展开成幂级数.

解 $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1.$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$e^x \xleftrightarrow[\text{应}]{\text{对}} 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$\forall M>0$, 在$[-M,M]$上 $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x \le e^M$

$$\therefore e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

由于M的任意性, 即得

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例7　将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

解　$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$，$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$，

$\therefore\ f^{(2n)}(0)=0$，$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$，$(n=0,1,2,\cdots)$

且$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin(x+\frac{n\pi}{2})\right|\le 1 \quad x\in(-\infty,+\infty)$

$$\therefore \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

$$\because \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

例8 将$f(x)=(1+x)^{\alpha}\ (\alpha\in R)$展开成$x$的幂级数.

解 $\because\ f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,$$

$\therefore R=1,$

这个幂级数是否正好收敛于$f(x)$?

上页 下页 返回

这个幂级数是否正好收敛于$f(x)$?

在$(-1,1)$内,若

$$s(x)=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$s'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$xs'(x)=\alpha x+\alpha(\alpha-1)x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots$$

利用 $\dfrac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}+\dfrac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

上页 下页 返回

$$\therefore (1+x)s'(x)$$

$$= \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha^2(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \alpha s(x)$$

$$\therefore \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\alpha}{1+x},$$ 且 $s(0)=1.$

两边积分 $$\int_0^x \frac{s'(x)}{s(x)}dx = \int_0^x \frac{\alpha}{1+x}dx, \qquad x \in (-1,1)$$

得 $$\ln s(x) - \ln s(0) = \alpha \ln(1+x),$$

即 $$\ln s(x) = \ln(1+x)^{\alpha},$$

$$\therefore s(x) = (1+x)^{\alpha}, \quad x \in (-1,1)$$

即 $\ln s(x) = \ln(1+x)^{\alpha}$,

$\therefore s(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x \in (-1,1)$

$\therefore$ $(1+x)^{\alpha}$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$x \in (-1,1)$

取整数时，为 牛顿二项展开式

上页 下页 返回

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$x \in (-1,1)$$

当$\alpha = -1, \pm\frac{1}{2}$时, 有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1,1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots$$

$$[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots$$

双阶乘

$$[-1,1]$$

上页 下页 返回

2. 间接法

根据级数展开式唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法,求展开式.

例如 $\cos x = (\sin x)'$

$$\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)dx$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$x \in (-1,1]$$

例9 将$f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$在$x=1$处展开成泰勒级数

(展开成$(x-1)$的幂级数),并求 $f^{(n)}(1)$.

解 $$\because \frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3(1-\frac{x-1}{3})},$$

$$=\frac{1}{3}[1+\frac{x-1}{3}+(\frac{x-1}{3})^2+\cdots+(\frac{x-1}{3})^n+\cdots] \qquad |x-1|<3$$

$$\therefore \frac{x-1}{4-x}=(x-1)\frac{1}{4-x}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(x-1)^3}{3^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots$$

$$|x-1|<3$$

于是 $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=\dfrac{1}{3^n}$, 故 $f^{(n)}(1)=\dfrac{n!}{3^n}$.

上页 下页 返回

常用已知和函数的幂级数

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\quad x\in(-1,1)$$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a x^{2n} = \frac{a}{1-x^2};$$

$$x\in(-1,1)$$

$$(4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x;$$

$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x;$$

$$(6)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x);$$

第四部分 幂级数的应用举例

一、近似计算

$$\because\ A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

$$\therefore\ A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\quad \text{误差}\ r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

两类问题: 1.给出精度,确定项数.

2.给定项数,求近似值并估计精度;

关键: 通过估计余项,确定精度或项数.

常用方法:

1.若余项是交错级数,则可用余和的首项来确定精度;

2.若不是交错级数,则放大余和中的各项,使之成为等比级数或其它易求和的级数,从而求出其和.

上页 下页 返回

1.给出精度,确定项数.

例10 计算e的近似值,使其误差不超过10^{-5}.

解 $\because e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

令 $x=1$,得 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$

余和: $r_n \approx \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots)$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots) = \frac{1}{n \cdot n!}$$

欲使 $r_n \le 10^{-5}$, 只要 $\frac{1}{n \cdot n!} \le 10^{-5}$, 即 $n \cdot n! \ge 10^5$,

而 $8 \cdot 8! = 322560 > 10^5$, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!}$

$$\approx 2.71828$$

上页 下页 返回

2.给定项数,求近似值并估计精度;

例11 利用 $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$ 计算 $\sin 9^0$ 的近似值,并估计误差.

解 $\sin 9^0 = \sin\dfrac{\pi}{20} \approx \dfrac{\pi}{20} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^3,$

$$|r_2| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{300000} < 10^{-5},$$

$$\therefore \sin 9^0 \approx 0.157079 - 0.000646 \approx 0.156433$$

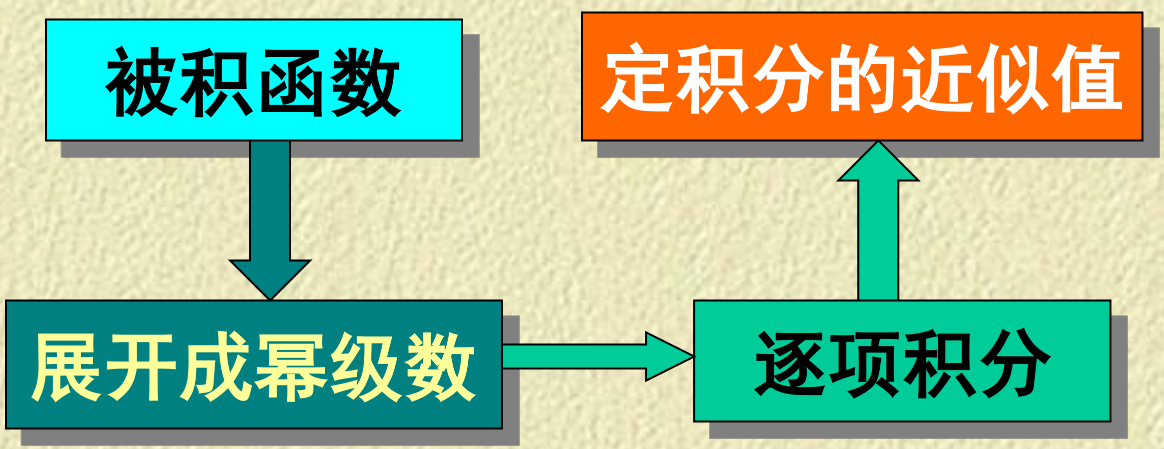
其误差不超过 10^{-5} .

$$\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

二、计算定积分

例如函数 $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$，原函数不能用初等函数表示，难以计算其定积分.

解法



上页 下页 返回

例12 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值，精确到10^{-4}.

解 $\because \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$$

收敛的交错级数

第四项 $\frac{1}{7\cdot 7!} < \frac{1}{30000} < 10^{-4}$,

取前三项作为积分的近似值,得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0.9461$$

欧拉公式

由泰勒级数展开知：

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6} + \cdots \qquad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \cdots$$

同样若 $e^{i\theta}$ 展开，可得到

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

$$= (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6} + \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \cdots)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

类似地可将 $e^{-i\theta}$ 展开

三角函数可表示为 $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中 $a>1$.

解: 令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}=\sum\limits_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{a}\right)^k$

构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为 $S(x)$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$$=x\cdot(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$$

求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数 **错在哪里？**

$$\because\ x^n S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n}$$

$$\therefore \int x^n S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

$$= \frac{x(1-x^{2n})}{1-x^2}$$

$$= \frac{x}{1-x^2}$$

$$\therefore\ x^n S(x) = \left[\frac{x}{(1-x^2)}\right]'$$

$$= \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^4}$$

$$= \frac{x^2+1}{(x^2-1)^4}$$

$$\therefore\ S(x) = \frac{x^2+1}{x^n(x^2-1)^4}$$

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数

正确解法

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = 2x\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}} + \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}x^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1),$$ 逐项求导可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$

故 $$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$

10 判断 (10分)

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 R=1，且 $a_n \neq 0$，则必有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

A. ✕

B. ✓

✕0

解：$R=1$，不一定能得出 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.

例：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$，有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 3, & \text{当}n\text{为奇数} \\ \frac{1}{3}, & \text{当}n\text{为偶数} \end{cases}$

即 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$ 不存在.

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$ 的收敛半径可用下述方法得到

由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,|x| = |x|$

可知当 $|x|<1$ 时级数收敛，
当 $|x|>1$ 时幂级数发散，
所以收敛半径 $R=1$