工科数学分析基础 (上)

第四章 常微分方程

第二节 高阶线性微分方程

王勇茂

第四章 常微分方程

第二节 高阶线性微分方程

- 高阶线性微分方程举例、解的结构
- 高阶常系数线性齐次微分方程的解法
- 高阶常系数线性非齐次微分方程的解法
- 高阶变系数线性微分方程的求解问题

作业 **P292**

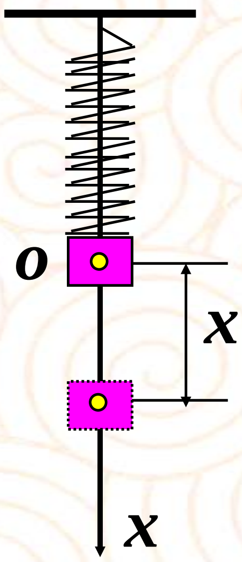
5. (4) (5) (6), 6. (2) (3),

7, 8.(2)(4)(6)(8), 11, 13

第一部分 高阶线性微分方程举例

例:设有一弹簧下挂一重物,如果使物体具有一个初始速度$v_0 \neq 0$,物体便离开平衡位置,并在平衡位置附近作上下振动.试确定物体振动的位移规律$x = x(t)$.

解　受力分析



1. 恢复力 $f = -cx$;　2. 阻力 $R = -\mu \dfrac{dx}{dt}$;

$$\because F = ma, \quad \therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$

为物体自由振动的微分方程。

若受到铅直干扰力$F=H\sin pt$，则$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\dfrac{dx}{dt}+F$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2n\dfrac{dx}{dt}+k^2x=h\sin pt$ 为强迫振动的方程

$Lc\dfrac{d^2u_c}{dt^2}+2\beta\dfrac{du_c}{dt}+\omega_0{}^2u_c=\dfrac{E_m}{LC}\sin\omega t$ 为串联电路的电压变化方程

一般地，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+P_1(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+P_2(t)x=F(t)$ 称为二阶线性微分方程。

线性：未知函数$x(t)$及各阶导数幂次均为一次.

当$F(t)=0$时，　称为二阶线性齐次微分方程。

当$F(t)\neq 0$时，称为二阶线性非齐次微分方程。

进一步，n阶微分方程

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=F(t) \quad (1)$$

称为n阶(线性)微分方程。

当$F(t)=0$时，称为n阶线性齐次微分方程。

当$F(t)\neq 0$时，称为n阶线性非齐次微分方程。

n阶微分方程的初值条件为:

$$x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)} \quad (2)$$

可以证明: 若方程(1)中的系数 $P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)$ 以及 $F(t)$均在区间(a,b) 连续，则方程（1）存在惟一的满足初值条件（2）的解 $x(t),t\in(a,b)$.

解的存在唯一性定理

第二部分 线性微分方程解的结构

针对n阶微分方程：

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=F(t) \quad (3)$$

引入记号： $L(x)=\dfrac{d^n(x)}{dt^n}+P_1(t)\dfrac{d^{n-1}(x)}{dt^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\dfrac{d(x)}{dt}+P_n(t)x(t)$

称 $L(\ )=\dfrac{d^n}{dt^n}+P_1(t)\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\dfrac{d}{dt}+P_n(t)$ **为线性微分算子。**

则 $x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=0$

$\Downarrow$

$L(x)=0$

性质

(1) $L(0)=0$;

(2) $L(Cx)=CL(x)$, C为任一常数;

(3) $L(C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n)=C_1L(x_1)+C_2L(x_2)+\cdots+C_nL(x_n)$

其中，C_1，$C_2,\cdots,C_n$为任意常数。

设有齐次方程

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=0 \qquad (4)$$

定理1（解的叠和性）

若$x_1,x_2,\cdots,x_n$均是线性齐次方程（4）的解，则

$x=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$也是线性齐次方程（4）的解。

其中，C_1，$C_2,\cdots,C_n$为任意常数。

可利用微分算子的线性性质证得：

$$L(x)=L(C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n)=C_1L(x_1)+C_2L(x_2)+\cdots+C_nL(x_n)$$

$$=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0+\cdots+C_n\cdot 0=0$$

问题：以上解的线性组合是否是方程的通解？

通解：微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解.

$x_1 = e^{-2t}$是方程 $x'' + 4x' + 4x = 0$ 的解；

$x_2 = 2e^{-2t}$是方程 $x'' + 4x' + 4x = 0$ 的解；

$x = C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{-2t}$也是方程 $x'' + 4x' + 4x = 0$ 的解；

但并非其通解！

其通解为：$x = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{-2t}$.

定义1：（线性相关与线性无关）

设 $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)$为定义在区间$I$内的$n$个函数. 如果存在$n$个不全为零的常数$C_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得当$t$在该区间内任意取值时，下列等式恒成立

$$C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)+\cdots+C_n f_n(t)=0,$$

则称这n个函数在区间I内线性相关;

否则, 称该函数组在区间I内线性无关或线性独立。

例如 $1,\ \cos^2 t,\ \sin^2 t$ 线性相关.

特别地:

若在 I 上有$\dfrac{y_1(t)}{y_2(t)} \neq$常数,则函数$y_1(t)$与$y_2(t)$在 I 上线性无关.

例1: 证明函数组$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$在任何区间$I$上线性无关。

证明: 假设这n个函数线性相关。

则必存在n个不全为零的常数 $C_i (i = 0,1,2,\cdots,n)$, 使得

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{n-1} x^{n-1} = 0$$

对区间I上的所有点都成立。即方程有无多穷个根。

但以上n-1次方程在实数范围内最多有n-1个根。矛盾。

所以，函数组$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$在任何区间$I$上线性无关。

例2 当$t\in(-\infty,+\infty)$时，e^{t},e^{-t},e^{2t} 是否线性无关？

解: 假设 $C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3e^{2t}=0$ (1)

两边同时关于变量t 求一阶和二阶导数,得:

$$C_1e^{t}-C_2e^{-t}+2C_3e^{2t}=0 \qquad (2)$$

$$C_1e^{t}+C_2e^{-t}+4C_3e^{2t}=0 \qquad (3)$$

等式(1),(2),(3)联立关于变量 C_1,C_2,C_3 的线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} & e^{2t} \\ e^{t} & -e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^{t} & e^{-t} & 4e^{2t} \end{vmatrix}=e^{2t}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-6e^{2t}\neq 0\ \left(t\in(-\infty,+\infty)\right)$$

Wronski行列式

因此 $C_1=C_2=C_3=0$

即 当$t\in(-\infty,+\infty)$时，e^{t},e^{-t},e^{2t} 线性无关.

定理☆ 若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则它们在[a,b]上的朗斯基行列式 $W(t) \equiv 0$.

证明: 从题设可知，存在一组不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b, \quad ①$$

依次对 t 微分此恒等式，得到

$$\begin{cases} c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_nx_n'(t)=0, \\ c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_nx_n''(t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t)=0 \end{cases} \quad ②$$

证明过程中用到了导数

把方程①和方程组② 看成是关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性方程组，那么它的系数行列式就是 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$.

由线性代数的理论我们可以知道，要此方程存在非零解，它的系数行列式必须为零，即 $W(t) \equiv 0 (a \le t \le b)$. 证毕.

逆否命题

推论 1: 如果向量组(函数组) $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间[a,b]上存在一点 t_0 处的朗斯基行列式 $W(t_0) \ne 0$，则向量组(函数组)在 [a,b]上线性无关.

定理☆ 若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关,则它们在[a,b]上的朗斯基行列式 $W(t) \equiv 0$.

注意: 定理☆的逆定理一般是不成立的.

能给出这样的函数. 由其构成的朗斯基行列式恒为零, 但它们却线性无关.

例 1: $x_1(t) = \begin{cases} t^2, & -1 \le t \le 0, \\ 0, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$ 和 $x_2(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0, \\ t^2, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$

在区间 $-1 \le t \le 1$ 上,显然有 $W[x_1(t), x_2(t)] \equiv 0$, 但它们在此区间上却线性无关.

因为,假设存在恒等式 $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \equiv 0, -1 \le t \le 1$.

则当 $-1 \le t < 0$ 时, 推得 $c_1 = 0$;

当 $0 \le t \le 1$ 时又推得 $c_2 = 0$. 即除了 $c_1 = c_2 = 0$ 之外,找不到其它不全为零的常数 c_1, c_2 可以使得恒等式在区间[-1,1]上都成立.

因此 $x_1(t), x_2(t)$ 是线性无关的.

设齐次方程 $x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=0$ **(4)**

定理2（解的线性无关判别法）

若$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是$n$阶线性齐次方程(4)的定义于区间 I 的解，则

$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$线性无关 $\Longleftrightarrow$ 在I中存在一点t_0,使得

$$w(t_0)=\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) & \cdots & \dot{x}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$w(t_0)$称为解组$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在$t_0$处的Wronski行列式。

(充分性) 设 $w(t_0)\neq 0$, 证 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 在 I 上线性无关.
设有 n 个常 数 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$ 使

$$C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)\equiv 0,\ \forall t\in I.$$

但 $x_i(t)$ 为方程 **(4)** 的解, 必 n 阶可导, 上式两端对 t 逐次求导, 得

$$\begin{gathered}C_1\dot{x}_1(t)+C_2\dot{x}_2(t)+\cdots+C_n\dot{x}_n(t)\equiv 0,\ \forall t\in I,\\ C_1\ddot{x}_1(t)+C_2\ddot{x}_2(t)+\cdots+C_n\ddot{x}_n(t)\equiv 0,\ \forall t\in I,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_1x_1^{(n-1)}(t)+C_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+C_nx_n^{(n-1)}(t)\equiv 0,\forall t\in I.\end{gathered}$$

特别地,对于 $t_0\in I$ 有

$$\begin{cases}C_1x_1(t_0)+C_2x_2(t_0)+\cdots+C_nx_n(t_0)=0,\\ C_1\dot{x}_1(t_0)+C_2\dot{x}_2(t_0)+\cdots+C_n\dot{x}_n(t_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_1x_1^{(n-1)}(t_0)+C_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+C_nx_n^{(n-1)}(t_0)=0.\end{cases}$$

系数行列式为 $w(t_0)\neq\mathbf{0}$, 即 $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$,
所以 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 在 I 线性无关.

(必要性) 证若 $w(t_0)\equiv 0$,则 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 在 I 线性相关

设存在一点 $t_0\in I$ 使 $w(t_0)=0$, 考察以 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为未知数的线性代数方程组

$$\begin{cases} C_1x_1(t_0)+C_2x_2(t_0)+\cdots+C_nx_n(t_0)=0, \\ C_1\dot{x}_1(t_0)+C_2\dot{x}_2(t_0)+\cdots+C_n\dot{x}_n(t_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1x_1^{(n-1)}(t_0)+C_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+C_nx_n^{(n-1)}(t_0)=0. \end{cases} \qquad (2.17)$$

设 $C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0$ 为其一组非零解, 其中 $C_i^0(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零. 构造解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 的线性组合

$$x(t)=C_1^0x_1(t)+C_2^0x_2(t)+\cdots+C_n^0x_n(t),\ t\in I,$$

由叠合性知, 它是方程 (4) 的解, 而且由 (2.17) 知

$$x(t_0)=C_1^0x_1(t_0)+C_2^0x_2(t_0)+\cdots+C_n^0x_n(t_0)=0,$$

$$x^{(k)}(t_0)=C_1^0x_1^{(k)}(t_0)+C_2^0x_2^{(k)}(t_0)+\cdots+C_n^0x_n^{(k)}(t_0)=0, k=1,2,\cdots,n-1.$$

所以,解 $x(t)$ 满足初值条件

$$x(t_0)=\dot{x}(t_0)=\ddot{x}(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0. \qquad (2.18)$$

但$x\equiv 0$ 也是方程 (4) 的解, 且满足初值条件 (2. 18). 由解的唯一性知 $x(t)=C_1^0x_1(t)+C_2^0x_2(t)+\cdots+C_n^0x_n(t)\equiv 0,\forall t\in I$,

从而 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 在 I 线性相关.

设齐次方程

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=0 \qquad \mathbf{(4)}$$

定理3（线性齐次方程的通解结构）

若$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是$n$阶线性齐次方程（4）的$n$个线性无关的解，则它的任一解$x$可表示为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数.

证明: 易证上式中的$x(t)$是解。

下证任一解$x(t)$具有上式形式。

设$x(t)$是方程（4)的任一解，且满足初值条件

$$x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)} \quad (2)$$

假设 $x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)$并求导, **构造方程组:**

$$\begin{cases} x(t_0)=C_1x_1(t_0)+C_2x_2(t_0)+\cdots+C_nx_n(t_0) \\ \dot{x}(t_0)=C_1\dot{x}_1(t_0)+C_2\dot{x}_2(t_0)+\cdots+C_n\dot{x}_n(t_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n-1)}(t_0)=C_1x_1^{(n-1)}(t_0)+\cdots+C_nx_n^{(n-1)}(t_0) \end{cases}$$

因Wronski行列式不等于零，故以上关于变量

$C_1,C_2,\cdots,C_n$ **的线性方程组存在惟一一组解:** $C_1',C_2',\cdots,C_n'$

$\therefore x(t)=C_1'x_1(t)+C_2'x_2(t)+\cdots+C_n'x_n(t)$ **且满足初始条件。**

$$\therefore x(t)=C_1'x_1(t)+C_2'x_2(t)+\cdots+C_n'x_n(t)$$

设n阶微分方程：

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=F(t) \quad (3)$$

则对应的齐次方程为

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=0 \quad (4)$$

定理4（线性非齐次方程的通解结构）

设$\bar{x}(t)$是线性非齐次方程(3)的任一特解，

$X(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)$是对应的齐次方程（4）的通解，则线性非齐次方程的通解$x(t)$可表为

$$x(t)=X(t)+\bar{x}(t)$$

证明三步曲：是解，是通解，任何一个解可被它表示

例3 已知 $y_1 = x,\ y_2 = x + e^x, y_3 = 1 + x + e^x$是微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$$

的解,试求此方程的通解.

解: 因为y_1, y_2, y_3是非齐方程的解,

所以 $y_2 - y_1 = e^x, y_3 - y_2 = 1$是对应齐次方程的解.

其Wronski 行列式为$w(x) = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ e^x & 0 \end{vmatrix} = -e^x \neq 0 \ \left(x \in (-\infty, +\infty)\right)$

所以 $y_2 - y_1 = e^x, y_3 - y_2 = 1$线性无关.

因此 对应齐次方程的通解为 $C_1 e^x + C_2$.

从而,原方程的通解为 $C_1 e^x + C_2 + x$.

定理5 若$x_1(t)$与$x_2(t)$分别是线性非齐次方程

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=F_1,$$

即$L(x_1)=F_1$

$$x^{(n)}(t)+P_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+P_{n-1}(t)\dot{x}(t)+P_n(t)x(t)=F_2,$$

即$L(x_2)=F_2$

的解，则$x_1(t)+x_2(t)$必为方程$L(x)=F_1+F_2$的解.

$$\because L(x_1+x_2)=F_1+F_2$$

第三部分 高阶常系数线性齐次微分方程的解法

一、定义

n阶常系数线性微分方程的标准形式

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=F(t)$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$均为实常数.

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$x''+a_1x'+a_2x=F(t)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$x''+a_1x'+a_2x=0$$

二、二阶常系数齐次线性方程解法(特征方程法)

设二阶常系数齐次线性方程为 $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$

设 $x = e^{\lambda t}$， 将其代入上方程，得

$$\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right)e^{\lambda t} = 0 \quad \because e^{\lambda t} \neq 0,$$

故有 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

特征方程

特征根 $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$,

情形1 特征方程有两个不相等的实根 $(\Delta > 0)$

特征根为: $\lambda_1 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$,

两个线性无关的特解 $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}$,

得齐次方程的通解为 $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$;

$(x'' + a_1 x' + a_2 x = 0)$ 的特征方程是: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

情形2　特征方程有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{a_1}{2}$，　一特解为 $x_1 = e^{\lambda_1 t}$，

设另一特解为 $x_2 = u(t)x_1$，

$$x_2' = u'x_1 + ux_1',\quad x_2'' = u''x_1 + 2u'x_1' + ux_1''$$

将 x_2，x_2'，x_2'' 代入原方程并化简，消去 $e^{\lambda t}$ 得

$$u'' + \underline{(2\lambda_1 + a_1)}u' + \underline{(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2)}u = 0,$$

知 $u'' = 0$，　取 $u(t) = t$，　则 $x_2 = te^{\lambda_1 t}$，

得齐次微分方程的通解为 $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t}$;

$\left(x''+a_1x'+a_2x=0\right)$ 的特征方程是：$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$

情形3　特征方程有一对共轭复根 $(\Delta<0)$

特征根为 $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$,

$$x_1=e^{(\alpha+i\beta)t},\qquad x_2=e^{(\alpha-i\beta)t},$$

重新组合 $\bar{x}_1=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)=e^{\alpha t}\cos\beta t,$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{2i}\left(x_1-x_2\right)=e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

得齐次方程的通解为

$$x=e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right).$$

例4　求方程 $x''+4x'+4x=0$ 的通解.

解　特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$,

解得 $\lambda_1=\lambda_2=-2$,

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1 t}$$

故所求通解为 $x=(C_1+C_2t)e^{-2t}$.

例5　求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$,

解得 $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$,

故所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

$$x=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t).$$

例6 求方程 $4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解.

解 特征方程为 $4\lambda^2+4\lambda+1=0$，

解得 $\lambda_{1,2}=-\dfrac{1}{2}$.

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1 t}$$

故所求通解为 $y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+xC_2e^{-\frac{1}{2}x}$

由 $y(0)=2, y'(0)=0$ 得: $C_1=2$. $C_2=1$.

方程满足初始条件的解为: $y=2e^{-\frac{1}{2}x}+xe^{-\frac{1}{2}x}$

三、n阶常系数齐次线性方程解法

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$$

特征方程为： $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

特征方程的根	通解中的对应项
若λ是单重实根	$Ce^{\lambda t}$
若λ是k重实根	$(C_0+C_1t+\cdots+C_{k-1}t^{k-1})e^{\lambda t}$
一对单重 共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right).$
一对k重 共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$\left(C_0+C_1t+\cdots+C_{k-1}t^{k-1}\right)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+\left(D_0+D_1t+\cdots+D_{k-1}t^{k-1}\right)e^{\alpha t}\sin\beta t$

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0 \qquad \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

特征方程的根	通解中的对应项
若λ是单重实根	$Ce^{\lambda t}$
若λ是k重实根	$(C_0+C_1t+\cdots+C_{k-1}t^{k-1})e^{\lambda t}$
一对单重 共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right).$
一对k重 共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$\left(C_0+C_1t+\cdots+C_{k-1}t^{k-1}\right)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+\left(D_0+D_1t+\cdots+D_{k-1}t^{k-1}\right)e^{\alpha t}\sin\beta t$

注意 n次代数方程有n个根，而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项，且每一项各有一个任意常数． $x=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$

例7 求方程 $x^{(5)}+x^{(4)}+2x^{(3)}+2x''+x'+x=0$ 的通解.

解 特征方程为 $\lambda^5+\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+1=0$,

$$(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2=0,$$

特征根为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=i$, $\lambda_4=\lambda_5=-i$,

故所求通解为

$$x=C_1e^{-t}+C_2\cos t+C_3t\cos t+C_4\sin t+C_5t\sin t.$$

$$=C_1e^{-t}+(C_2+C_3t)\cos t+(C_4+C_5t)\sin t.$$

第四部分 高阶常系数线性非齐次微分方程的解法

二阶常系数非齐次线性方程为 $x'' + a_1 x' + a_2 x = F(t)$

对应齐次方程 $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$

通解结构 $x(t) = X(t) + x^*(t)$,

问题：如何求特解 $x^*(t)$？

方法：待定系数法.

$$x''+a_1x'+a_2x=F(t)$$

情形1 $F(t)=\varphi(t)e^{\mu t}$，其中μ为常数,

$$\varphi(t)=b_mt^m+b_{m-1}t^{m-1}+\cdots+b_1t+b_0,\ m\geq 0$$

猜测非齐方程特解为$x^*(t)=Z(t)e^{\mu t}$.代入原方程

$$Z''(t)+(2\mu+a_1)Z'(t)+(\mu^2+a_1\mu+a_2)Z(t)=\varphi(t)$$

(1). 若μ不是特征方程的根, $\mu^2+a_1\mu+a_2\neq 0$,

设 $Z(t)$为与$\varphi(t)$次数相同的多项式, $Z(t)=B_mt^m+B_{m-1}t^{m-1}+\cdots+B_1t+B_0$,

则 $x^*(t)=Z(t)e^{\mu t}$代入原方程待定B_i,从而得到特解.

(2). 若μ是特征方程的单根, 则$\mu^2+a_1\mu+a_2=0,\ 2\mu+a_2\neq 0$,

可设 $Z(t)=t\left(B_mt^m+B_{m-1}t^{m-1}+\cdots+B_1t+B_0\right)$,

则 $x^*(t)=t\left(B_mt^m+B_{m-1}t^{m-1}+\cdots+B_1t+B_0\right)e^{\mu t}$ 代入原方程待定B_i,可得特解.

$$x''+a_1x'+a_2x=F(t)$$

$$Z''(t)+\left(2\mu+a_1\right)Z'(t)+\left(\mu^2+a_1\mu+a_2\right)Z(t)=\varphi(t)$$

(3). 若μ是特征方程的重根， $\mu^2+a_1\mu+a_2=0,\ 2\mu+a_1=0,$

可设 $Z(t)=t^2\left(B_mt^m+B_{m-1}t^{m-1}+\cdots+B_1t+B_0\right),$

$x^*(t)=t^2\left(B_mt^m+B_{m-1}t^{m-1}+\cdots+B_1t+B_0\right)e^{\mu t}$ 代入原方程待定B_i，可得特解.

综上：按不同情况可 设 $x^*(t)=t^ke^{\mu t}Z_m(t),\ k=\begin{cases}0 & \mu\text{不是根}\\ 1 & \mu\text{是单根},\\ 2 & \mu\text{是重根}\end{cases}$

$Z_m(t)$是关于 t 的 m 次多项式. 与$\varphi(t)$次数相同

注意 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程（k是重根次数）.

特别地 $\boxed{x''+a_1x'+a_2x=Ae^{\mu t}}$

$x^*(t)=Z(t)e^{\mu t}$. 代入原方程:

$$Z''(t)+(2\mu+a_1)Z'(t)+\left(\mu^2+a_1\mu+a_2\right)Z(t)=A$$

$$x^*(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{\mu^2+a_1\mu+a_2}e^{\mu t}, & \mu\text{不是特征方程的根}\\[2ex] \dfrac{A}{2\mu+a_1}te^{\mu t}, & \mu\text{是特征方程的单根}\\[2ex] \dfrac{A}{2}t^2e^{\mu t}, & \mu\text{是特征方程的重根}\end{cases}$$

例8 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 特征根: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x},$

$\because \lambda=2$ 是单根, 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$, $y^*=\left(Ax^2+Bx\right)e^{2x}$, 便于求导

则 $\left(y^*\right)'=\left(2Ax+B\right)e^{2x}+\left(2Ax^2+2Bx\right)e^{2x}=\ldots$

$\left(y^*\right)''=\ldots$

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$ $\quad\therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$

$\therefore y^*=x\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$

原方程通解为: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$.

$$x''+a_1x'+a_2x=F(t)$$

情形2 $F(t)=e^{\mu t}\varphi(t)\cos\upsilon t$或$F(t)=e^{\mu t}\varphi(t)\sin\upsilon t$

首先,可验证如下事实. 若$x(t)=x_R(t)+ix_I(t)$是方程

$$x''+a_1x'+a_2x=f_1(t)+if_2(t)$$ 的解,

则

$x_R(t)$是方程$x''+a_1x'+a_2x=f_1(t)$的解.

$x_I(t)$是方程$x''+a_1x'+a_2x=f_2(t)$的解.

因此,可先求出方程

$$x''+a_1x'+a_2x=e^{\mu t}\varphi(t)\cos\upsilon t+ie^{\mu t}\varphi(t)\sin\upsilon t$$
$$=e^{\mu t}\varphi(t)(\cos\upsilon t+i\sin\upsilon t)=e^{(\mu+i\upsilon)t}\varphi(t)$$

的特解,然后分出其实部和虚部,可得所求方程的解.

其求解方法可参照情形1.

例9 求方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2+1=0$, $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$,

对应齐次方通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,

作辅助方程 $\boxed{y''+y=4e^{ix}=4(\cos x+i\sin x),}$

$\because \mu=i$ 是特征方程的单根,

故设辅助方程的特解为 $\hat{y}^*(x)=Axe^{ix}$,

$$\hat{y}^{*\prime}(x)=\ldots?,\quad \hat{y}^{*\prime\prime}(x)=\ldots?$$

代入辅助方程,得 $2Ai=4$, $\therefore A=-2i$,

$$\therefore \hat{y}^*(x)=-2ixe^{ix}=2x\sin x-i(2x\cos x),$$

所求原非齐次方程特解为: $y^*(x)=-2x\cos x$,（取虚部）

原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x.$

例10 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,

对应齐次方程通解: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

作辅助方程 $\boxed{y'' + y = xe^{2ix} = x(\cos 2x + i\sin 2x),}$

$\because \mu = 2i$ 不是特征方程的根,

$\therefore$ 设 辅助方程的特解为$\hat{y}^*(x) = (Ax + B)e^{2ix}$,

$$\hat{y}^{*\prime}(x) = \ldots?, \quad \hat{y}^{*\prime\prime}(x) = \ldots?$$

代入辅助方程,得 $\begin{cases} 4Ai - 3B = 0 \\ -3A = 1 \end{cases}$ $\therefore A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{4}{9}i$,

$$\therefore \hat{y}^*(x) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i\right)e^{2ix} = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i\right)(\cos 2x + i\sin 2x)$$

例10 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,

对应齐次方程通解: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

作辅助方程 $\boxed{y'' + y = xe^{2ix} = x(\cos 2x + i\sin 2x),}$

$\because \mu = 2i$ 不是特征方程的根,

$\therefore$ 设 辅助方程的特解为 $\hat{y}^*(x) = (Ax + B)e^{2ix}$,

$$\therefore \hat{y}^*(x) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i\right)e^{2ix} = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i\right)(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x - \left(\frac{4}{9}\cos 2x + \frac{1}{3}x\sin 2x\right)i,$$

所求非齐次方程特解为: $y^*(x) = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$. (取实部)

所求非齐次方程通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$

实际上，对于方程 $x''+a_1x'+a_2x=e^{(\mu\pm iv)t}\varphi(t)$

设 $x^*(t)=t^kZ(t)e^{(\mu\pm iv)t}$，$k=\begin{cases}0,\mu\pm iv\text{不是根}\\1,\mu\pm iv\text{是单根}\end{cases}$

$Z(t)=R(t)\pm i*I(t)$　　$Z(t)$是与$\varphi(t)$同次的复值多项式.

$$x^*(t)=t^k\left[R(t)+i*I(t)\right]e^{\mu t}(\cos\upsilon t+i*\sin\upsilon t)$$

$$=t^ke^{\mu t}\left[R(t)\cos\upsilon t-I(t)\sin\upsilon t\right]+i*t^ke^{\mu t}\left[I(t)\cos\upsilon t+R(t)\sin\upsilon(t)\right]$$

其实部是方程$x''+a_1x'+a_2x=e^{\mu t}\varphi(t)\cos\upsilon t$ 的解.

其虚部是方程$x''+a_1x'+a_2x=e^{\mu t}\varphi(t)\sin\upsilon t$ 的解.

实部、虚部均为$\cos\upsilon t$, $\sin\upsilon t$ 分别乘以与$\varphi(t)$同次数的实值多项式形式.

故对于方程 $x''+a_1x'+a_2x=F(t)$

若$F(t)=e^{\mu t}\varphi(t)\cos\upsilon t$或$F(t)=e^{\mu t}\varphi(t)\sin\upsilon t$

可直接假设其特解为

$$\boxed{x^*(t)=t^k e^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos\upsilon t+Z_2(t)\sin\upsilon t\right]}$$

其中$Z_1(t),Z_2(t)$是与$\varphi(t)$同次的实系数多项式.

k为根 $\mu\pm i\upsilon$ 的重数.

当$\mu\pm i\upsilon$不是特征根时,$k=0$.

当$\mu\pm i\upsilon$是单特征根时,$k=1$;

上述结论可推广至n阶方程.

例11 求方程 $y''-2y'+5y=e^{x}\sin 2x$ 的一个特解.

解 特征方程 $\lambda^2-2\lambda+5=0$, $\lambda_1=1+2i$, $\lambda_2=1-2i$,

$\because\ \mu+\upsilon i=1+2i$ 是特征方程的单根, $\boxed{x^{*}(t)=t^{k}e^{\mu t}\left(Z_1(t)\cos\upsilon t+Z_2(t)\sin\upsilon t\right)}$

$\therefore$ 设方程的特解为 $\hat{y}(x)=e^{x}x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

则 $\hat{y}'(x)=\hat{y}(x)+e^{x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+e^{x}x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)$

$$\hat{y}''(x)=\hat{y}'(x)+\left(\hat{y}'(x)-\hat{y}(x)\right)+e^{x}(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)$$
$$+e^{x}(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+e^{x}x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)$$

即 $\hat{y}''(x)=2\hat{y}'(x)-5\hat{y}(x)+e^{x}(-4A\sin 2x+4B\cos 2x)$

整理得 $e^{x}\sin 2x=e^{x}(-4A\sin 2x+4B\cos 2x)$ $\quad\therefore A=-\dfrac{1}{4}, B=0.$

$\therefore$ 方程的特解为 $\hat{y}(x)=-\dfrac{1}{4}e^{x}x\cos 2x$.

对方程 $x'' + a_1 x' + a_2 x = F(t)$

若$F(t) = e^{\mu t}\varphi(t)\cos\upsilon t$或$F(t) = e^{\mu t}\varphi(t)\sin\upsilon t$

可直接假设其特解为

$$\boxed{x^*(t) = t^k e^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos\upsilon t + Z_2(t)\sin\upsilon t\right]}$$

其中$Z_1(t), Z_2(t)$是与$\varphi(t)$同次的实系数多项式.

k为根 $\mu \pm i\upsilon$ 的重数.

当$\mu \pm i\upsilon$不是特征根时,$k = 0$.

当$\mu \pm i\upsilon$是单特征根时,$k = 1$;

上述结论可推广至n阶方程.

上述结论可推广至n阶方程:

n阶常系数线性微分方程的标准形式:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=F(t)$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$均为实常数.

$F(t)=e^{\mu t}\phi(t)$	$F(t)=e^{\mu t}\phi(t)\cos\upsilon t$ or $e^{\mu t}\phi(t)\sin\upsilon t$
若μ是k重特征根,$k=0,1,\cdots,n$	若$\mu\pm i\upsilon$是k重特征根,$k=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$
可直接假设其特解为:	不是k-1次!
$\boxed{x^*(t)=t^kZ(t)e^{\mu t}}$	$t^ke^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos\upsilon t+Z_2(t)\sin\upsilon t\right]$
其中$Z(t),Z_1(t),Z_2(t)$是与$\phi(t)$同次数的实系数多项式.	

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$$

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

通解对应项

一个单实根λ:	$C\mathrm{e}^{\lambda t}$
一个 k 重实根λ:	$\mathrm{e}^{\lambda t}(C_1+C_2t+\cdots+C_kt^{k-1})$
一对单复根 $a\pm\mathrm{i}\beta$:	$\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$ 不是k次
一对 k 重复根$a+\mathrm{i}\beta$:	$\mathrm{e}^{\alpha t}[(C_{11}+C_{12}t+\cdots+C_{1k}t^{k-1})\cos\beta t$ $+(C_{21}+C_{22}t+\cdots+C_{2k}t^{k-1})\sin\beta t]$

二阶线性齐次方程 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0,$ $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$

1. 不等实根: $\lambda_1\neq\lambda_2$	$x=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2t},$
2. 相等实根: $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$	$x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\lambda t},$
3.共轭复根: $\lambda=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	$x=\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t),$

例12 求方程 $y^{(6)}+y^{(5)}-2y^{(4)}=x-1$的通解.

解 特征方程 $\lambda^6+\lambda^5-2\lambda^4=0$, $\lambda_1=0(4重)$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$.

对应齐次方程的通解为

$$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$$

$\because \mu+\upsilon i=0$是特征方程的4重根,

$\therefore$ 设 方程的特解为$\hat{y}(x)=x^4(Ax+B)=Ax^5+Bx^4$. 则

$$\hat{y}'(x)=5Ax^4+4Bx^3, \hat{y}''(x)=20Ax^3+12Bx^2, \ \hat{y}'''(x)=60Ax^2+24Bx,$$

$$\hat{y}^{(4)}(x)=120Ax+24B, \qquad \hat{y}^{(5)}(x)=120A, \qquad \hat{y}^{(6)}(x)=0.$$

代入原方程,得

$$120A-240Ax-48B=x-1, \qquad \therefore A=-\frac{1}{240}, B=\frac{1}{96}.$$

方程的通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6-\frac{x^5}{240}+\frac{x^4}{96}$$

练习：求方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解.

$$F(x)=xe^{(0+i)x}$$

对方程 $x''+a_1x'+a_2x=F(t)$

若$F(t)=e^{\mu t}\varphi(t)\cos\upsilon t$或$F(t)=e^{\mu t}\varphi(t)\sin\upsilon t$

可直接假设其特解为

$$x^*(t)=t^ke^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos\upsilon t+Z_2(t)\sin\upsilon t\right]$$

其中$Z_1(t),Z_2(t)$是与$\varphi(t)$同次的实系数多项式.

k为根 $\mu\pm i\upsilon$ 的重数.

当$\mu\pm i\upsilon$不是特征根时,$k=0$.

当$\mu\pm i\upsilon$是单特征根时,$k=1$;

练习：求方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+4=0$,可解得$\lambda=\pm 2i$,

故其通解为$C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

$$y''+4y=x\cos x=xe^{(0+i)x}$$

又0+i不是特征根.故可设原方程特解为:

$$y^*=(b_0+b_1x)\cos x+(b_3+b_4x)\sin x.$$

$$y^{*\prime}=b_1\cos x-(b_0+b_1x)\sin x+b_4\sin x+(b_3+b_4x)\cos x$$

$$y^{*\prime\prime}=-b_1\sin x-b_1\sin x-(b_0+b_1x)\cos x+b_4\cos x+b_4\cos x-(b_3+b_4x)\sin x$$

代入 $y''+4y=x\cos x$,得:

$$-2b_1\sin x-(b_0+b_1x)\cos x+2b_4\cos x-(b_3+b_4x)\sin x$$
$$+4(b_0+b_1x)\cos x+4(b_3+b_4x)\sin x=x\cos x$$

即:$(-2b_1+3b_3)\sin x+3b_4x\sin x+(2b_4+3b_0)\cos x+(3b_1-1)x\cos x=0$

证明: $\sin x, \cos x, x\cos x, x\sin x$ 线性无关.

令 $k_1 \sin x + k_2 \cos x + k_3 x \cos x + k_4 x \sin x = 0 \qquad (*)$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均成立.

令x=0 , 则$k_2 \cos x = 0$, $k_2 = 0$

即 $k_1 \sin x + k_3 x \cos x + k_4 x \sin x = 0$

分别令 $x = \frac{\pi}{2}$ 和 $x = -\frac{\pi}{2}$, 得 $\begin{cases} k_1 + \dfrac{\pi}{2} k_4 = 0 \\ -k_1 + \dfrac{\pi}{2} k_4 = 0 \end{cases}$ 解得 $k_1 = k_4 = 0$.

$\therefore k_3 x \cos x = 0$ 令 $x = \frac{\pi}{3}$, 得 $k_3 = 0$.

因此, (*) 式仅在 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 时才成立, 由线性无关的定义, 故函数组 $\sin x, \cos x, x\cos x, x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关.

练习：求方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解.

解 $y''+4y=x\cos x=xe^{(0+i)x}$

又 $0+i$ 不是特征根. 故可设原方程特解为:

$y^*=(b_0+b_1x)\cos x+(b_3+b_4x)\sin x.$

求出 $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ **代入 $y''+4y=x\cos x$, 得:**

$$(-2b_1+3b_3)\sin x+3b_4x\sin x+(2b_4+3b_0)\cos x+(3b_1-1)x\cos x=0$$

即 $\begin{cases} -2b_1+3b_3=0 \\ 3b_4=0 \\ 2b_4+3b_0=0 \\ 3b_1-1=0 \end{cases}$ $\therefore b_4=0, b_0=0, b_1=\dfrac{1}{3}, b_3=\dfrac{2}{9}$

原方程特解可取作: $y^*=\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x,$

故原方程通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{x}{3}\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x.$

第五部分 高阶变系数线性微分方程的求解

Euler方程的一般形式

$$t^n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 t^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = f(t)$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$均为常数.

特点： 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的幂次相同.

解法： Euler方程是特殊的变系数方程，通过变 量代换可化为常系数微分方程.

$t = e^{\tau}$ 或 $\tau = \ln t$,

$$t^n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = f(t)$$

作变量变换 $t=e^{\tau}$ 或 $\tau=\ln t$, 将自变量换为τ,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{t}\cdot\frac{d\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)}{d\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t},$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} = \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right), \quad \cdots\cdots$$

将上式代入Euler方程，则化为以τ为自变量的常系数线性微分方程. 求出这个方程的解后，把τ换为 $\ln t$ ，即得到原方程的解.

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t^2}\cdot\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

$$=-2\frac{1}{t^3}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)+\frac{1}{t^2}\frac{d\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)}{dt}$$

$$=-2\frac{1}{t^3}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)+\frac{1}{t^2}\frac{d\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$

$$=-2\frac{1}{t^3}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)+\frac{1}{t^3}\left(\frac{d^3x}{d\tau^3}-\frac{d^2x}{d\tau^2}\right)=\frac{1}{t^3}\left(\frac{d^3x}{d\tau^3}-3\frac{d^2x}{d\tau^2}+2\frac{dx}{d\tau}\right)$$

例13 求Euler方程 $t^3x''' + t^2x'' - 4tx' = 3t^2$ 的通解.

解 作变量变换 $t = e^{\tau}$ 或 $\tau = \ln t$,

则 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} = \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right).$$

代入原方程,得 $$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = 3e^{2\tau}. \qquad \textbf{(1)}$$

其特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$.

对应的齐次方程的通解为

$$X = C_1 + C_2e^{-\tau} + C_3e^{3\tau}.$$

$$\frac{d^3x}{d\tau^3}-2\frac{d^2x}{d\tau^2}-3\frac{dx}{d\tau}=3e^{2\tau}. \qquad (1)$$

$$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0,$$

$$\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=3.$$

$\because \mu=2$ 不是特征方程的根,

设关于 τ 的方程(1)的特解为 $x^*(\tau)=be^{2\tau}$.

代入方程(1)得 $b=-\frac{1}{2}$. 即 $x^*(\tau)=-\frac{1}{2}e^{2\tau}$.

方程(1)的通解为 $X=C_1+C_2e^{-\tau}+C_3e^{3\tau}-\frac{1}{2}e^{2\tau}$.

代入 $\tau=\ln t$ 得原方程的通解为:

$$x(t)=C_1+\frac{C_2}{t}+C_3t^3-\frac{1}{2}t^2.$$

求微分方程 $(2x-1)^2 y'' + 4(2x-1)y' - 8y = 4x-3$ 的通解.

令$2x-1=t$,则$x=(t+1)/2$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=2\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4\dfrac{d^2y}{dt^2}$, 原方程转化为:

$4t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+8t\dfrac{dy}{dt}-8y=2t-1$, 即 $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+2t\dfrac{dy}{dt}-2y=\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}$ ....(1)

令$t=e^\tau$ 或 $\tau=\ln t$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{d\tau}\dfrac{d\tau}{dt}=\dfrac{1}{t}\dfrac{dy}{d\tau}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{d^2y}{d\tau^2}-\dfrac{dy}{d\tau}\right)$,代入得

$\dfrac{d^2y}{d\tau^2}+\dfrac{dy}{d\tau}-2y=\dfrac{e^\tau}{2}-\dfrac{1}{4}$. ....(2)

$\lambda^2+\lambda-2=0, \lambda_1=1, \lambda_2=-2$. 齐次方程 $\dfrac{d^2y}{d\tau^2}+\dfrac{dy}{d\tau}-2y=0$ 的通解为: $X=C_1e^\tau+C_2e^{-2\tau}$

下面分别求二个微分方程的特解: $\dfrac{d^2y}{d\tau^2}+\dfrac{dy}{d\tau}-2y=\dfrac{1}{2}e^\tau$, $\dfrac{d^2y}{d\tau^2}+\dfrac{dy}{d\tau}-2y=-\dfrac{1}{4}$

求微分方程 $(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'-8y=4x-3$ 的通解.

设 $\dfrac{d^2y}{d\tau^2}+\dfrac{dy}{d\tau}-2y=\dfrac{1}{2}e^{\tau}$ 的特解为 $A\tau e^{\tau}$，计算得 $A=\dfrac{1}{6}$

设 $\dfrac{d^2y}{d\tau^2}+\dfrac{dy}{d\tau}-2y=-\dfrac{1}{4}$ 的特解为 B，计算得 $B=\dfrac{1}{8}$

方程（2）的通解为：$y=C_1e^{\tau}+C_2e^{-2\tau}+\dfrac{1}{6}\tau e^{\tau}+\dfrac{1}{8}$

代入 $\tau=\ln t$ 得方程(1)的通解为：$y=C_1t+C_2\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{6}t\ln t+\dfrac{1}{8}$

将 $t=2x-1$ 代回, 得原微分方程通解为:

$$y=C_1(2x-1)+C_2\frac{1}{(2x-1)^2}+\frac{1}{6}(2x-1)\ln(2x-1)+\frac{1}{8}$$

第六部分 小结

主要内容　线性方程解的结构；

线性相关与线性无关；

二阶常系数齐次微分方程求通解的一般步骤:

（1）写出相应的特征方程;

（2）求出特征根;

（3）根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = F(t)$$

二阶常系数非齐次微分方程求通解的一般步骤:

(待定系数法)

(1). $F(t) = e^{\mu t}\varphi_m(t)$, (μ可以是复数)

$$x^*(t) = t^k Z_m(t) e^{\mu t};\quad k = \begin{cases} 0 & \mu\text{不是根} \\ 1 & \mu\text{是单根,} \\ 2 & \mu\text{是重根} \end{cases}$$

(2) $F(t) = e^{\mu t}\phi(t)\cos\upsilon t$ 或 $F(t) = e^{\mu t}\phi(t)\sin\upsilon t$

直接假设其特解为 $\boxed{x^*(t) = t^k e^{\mu t}(Z_1(t)\cos\upsilon t + Z_2(t)\sin\upsilon t)}$

其中$Z_1(t), Z_2(t)$是与$\varphi(t)$同次的实系数多项式.

k为根 $\mu \pm i\upsilon$ 的重数. 当$\mu \pm i\upsilon$不是特征根时,$k = 0$.

当$\mu \pm i\upsilon$是单特征根时,$k = 1$;

Euler方程解法思路

$$\boxed{\text{变系数的线性微分方程}} \xrightarrow[t = e^{\tau} \text{ 或 } \tau = \ln t]{\text{变量代换}} \boxed{\text{常系数的线性微分方程}}$$

注意：**Euler**方程的形式.

思考题 写出微分方程

$y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$ 的待定特解的形式.

解 设 $y'' - 4y' + 4y = 6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^* = y_1^* + y_2^*$

$\because \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \therefore$ 特征根 $\lambda_{1,2} = 2$

$\therefore y_1^* = Ax^2 + Bx + C \qquad y_2^* = Dx^2 e^{2x}$ （重根）

$$y^* = y_1^* + y_2^* = Ax^2 + Bx + C + Dx^2 e^{2x}.$$

复数r(cosθ+isinθ)的n次方是：

$$z^{n}=[r(cos\theta+isin\theta)]^{n}=r^{n}(cosn\theta+isinn\theta),n\in N.$$

复数r(cosθ+isinθ)的n次方根是：

$$\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{(\theta+2k\pi)}{n}+isin\frac{(\theta+2k\pi)}{n}\right),\quad\left(k=0,1,2,...n-1\right).$$

这两个公式称为棣莫弗公式