第二章 一元函数微分学及其应用

2.6 隐函数求导法

作业：P121 习题2.2 （A）14, 16.(2)(4), 18

2.6 隐函数求导法

$$F(x,y)=0 \xrightarrow{\text{显化}}$$

$$y=y(x) \xrightarrow{\text{代回}} F[x,y(x)]\equiv 0;$$

例 $2x+y-1=0 \Rightarrow y=1-2x \Rightarrow 2x+(1-2x)-1\equiv 0$

在求导数时，应注意到式中 y 已代为 $y=y(x)$,

所以求导时把 y 看成是x的函数，运用**链导法则**

在等式两边对x求导

例1 求由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数。

解 根据上述求导方法，方程两端对 x 求导

（注意 y 是 x 的函数）

即得

$$3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0$$

从而解得

$$y'=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\qquad (ax-y^2\neq 0).$$

例2 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程。

解 $\frac{x}{8}+\frac{2yy'}{9}=0 \quad x=2, y=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$

斜率：$y'\big|_{x=2,y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

所以，切线方程为 $y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

一般地,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在点$P(x_0,y_0)$处的切线方程是:

$$\boxed{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

对数求导法:

——利用隐函数求导法求显函数导数的方法。

对数求导法:

先对 $y=f(x)$（>0）两边取对数(或加绝对值后两边取对数), 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

(1) 幂指型函数 $u(x)^{v(x)}$,

(2) 含有较多的乘、除、乘方、开方运算的函数。

对数求导法

$$\ln(MN) = \ln M + \ln N$$

$$\ln(M / N) = \ln M - \ln N$$

$$\ln M^{\alpha} = \alpha \ln M$$

在具体应用时，通常先取绝对值再取自然对数

$$y = \{u(x)\}^{v(x)}$$

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$y' = y\left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

对数求导法

在具体应用时，通常先取绝对值再取自然对数

$$y=\ln x,\ (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$y=\ln|x|,\quad y'=?\qquad (x\neq 0)$$

$$x>0,\ \ln(|x|)=(\ln x),y'=\frac{1}{x}$$

$$x<0,\ \ln(|x|)=\ln(-x),y'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

$$\therefore y=\ln|x|,\quad y'=\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)$$

例 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$，求 y'.

解 等式两边取对数，得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$,

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\therefore\ y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

问：能否用显式求导法求出（$x^{\sin x})'$？

例 设 $y = x^{x^x}, (x > 0)$ 求 y'.

解 两边取自然对数，得

$$\ln|y| = x^x \ln x$$

两边求导 $\frac{1}{y}y' = (x^x)'\ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}$

$$y' = y\left[(x^x)'\ln x + \frac{x^x}{x}\right]$$

$$= x^{x^x}\left[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right]$$

$$\because (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$$

例 设 $y=\dfrac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\cdot e^x}$， 求 y'.

解 等式两边取绝对值再取对数，得

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x,$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1,$$

$$\therefore\quad y'=\frac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\cdot e^x}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right).$$

($D=(-\infty,-4)\cup(-4,+\infty)$，在 $(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$上导数存在；函数不恒正.)

3.2 由参数方程所确定的函数的求导:

若 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 可确定 y 与 x 间的函数关系，

则称此函数为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases}$ → $t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

得，此参数方程确定的函数 $y = t^2 = (\dfrac{x}{2})^2$,

即 $y = y(x) = \dfrac{x^2}{4}$.

问题：消参数困难或无法消去参数时如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$, 为参数方程确定的函数

再设函数$x = \varphi(t), y = \psi(t)$都可导,且$\varphi'(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

若函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$二阶可导,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.}$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

1.如果 $x(t), y(t)$ 都可导且 $x_t' \neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

2.如果 $x(t), y(t)$ 都二阶可导，则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

例 已知摆线的方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad \text{求} \ \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\cos t \cdot (1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{a(1 - \cos t)^3}$$

$$= -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

例 已知椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}.$

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{b}{a}\csc^2 t\cdot\frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b\csc^3 t}{a^2}.$$

极坐标方程确定的函数的求导

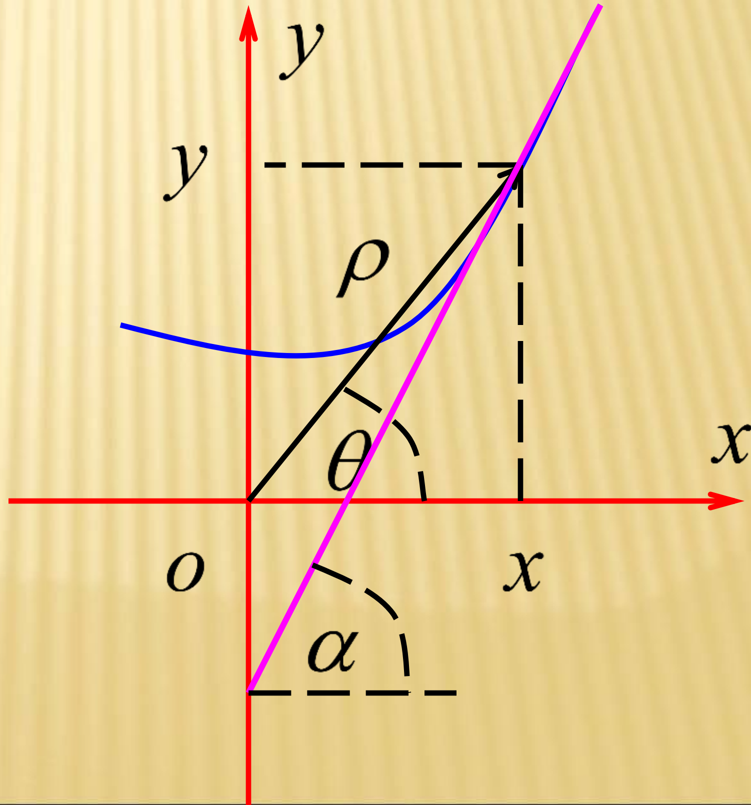
$$\rho = \rho(\theta) \qquad (\theta_1 < \theta < \theta_2)$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta, \end{cases} \qquad (\theta_1 < \theta < \theta_2)$$

据参数方程求导公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \tan\alpha$$

$$= \frac{\rho'_\theta \sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'_\theta \cos\theta - \rho\sin\theta}.$$



$\rho=\rho(\theta)\ (\theta_1<\theta<\theta_2)$ 极径OP与P处切线的夹角的一个结果：

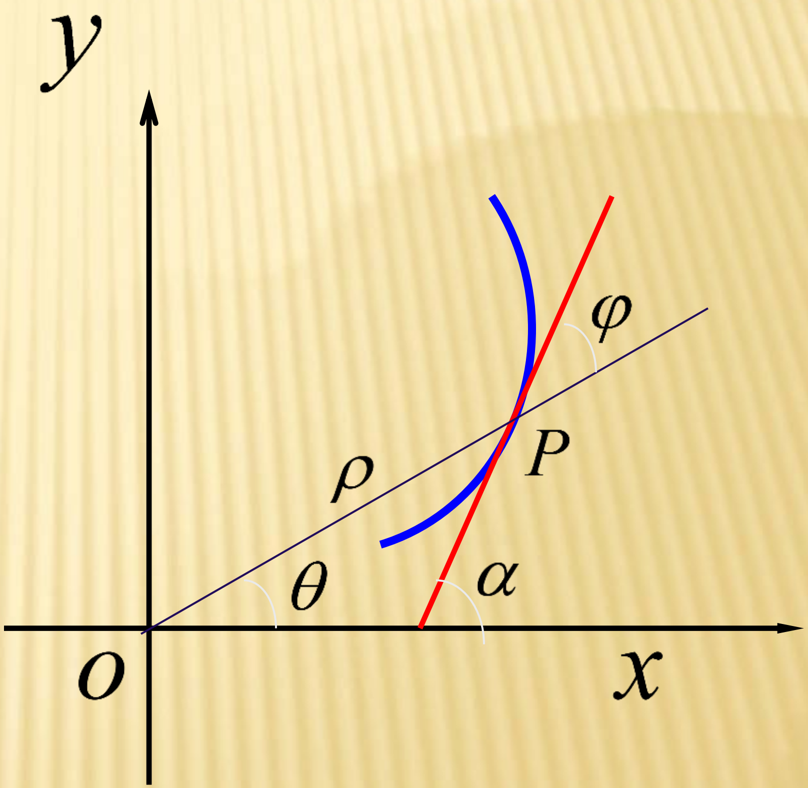
$\because\ \varphi=\alpha-\theta$

$$\tan\varphi=\tan(\alpha-\theta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{\rho'_\theta\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'_\theta\cos\theta-\rho\sin\theta}-\dfrac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}}{1+\dfrac{\rho'_\theta\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'_\theta\cos\theta-\rho\sin\theta}\cdot\dfrac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}}$$

$$=\frac{\rho}{\rho'_\theta}.$$

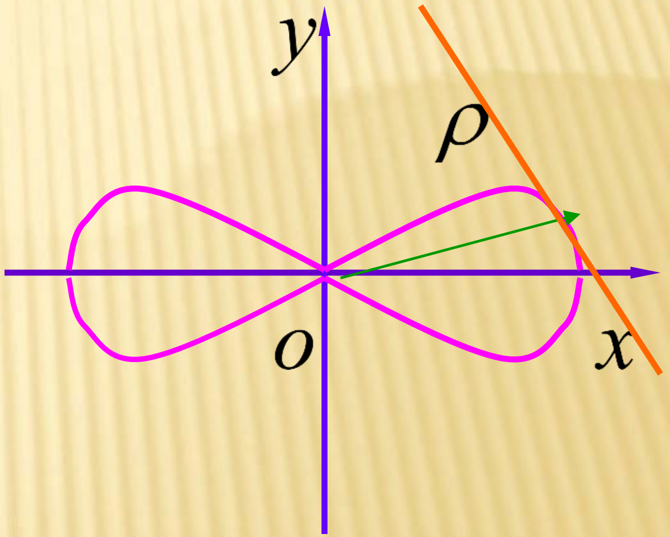


$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho(\theta)\sin\theta,\end{cases}\qquad(\theta_1<\theta<\theta_2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\rho'_\theta\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'_\theta\cos\theta-\rho\sin\theta}$$

例 求双纽线 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$

在 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 处的切线斜率。



解 $\because 2\rho\rho'_\theta=-4a^2\sin 2\theta$

$$\therefore \rho'_\theta=-\frac{2a^2}{\rho}\sin 2\theta.$$

从而 $\tan\alpha=\boxed{\dfrac{\rho'_\theta\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'_\theta\cos\theta-\rho\sin\theta}}.$

$$=\frac{-2a^2\sin 2\theta\sin\theta+\rho^2\cos\theta}{-2a^2\sin 2\theta\cos\theta-\rho^2\sin\theta}$$

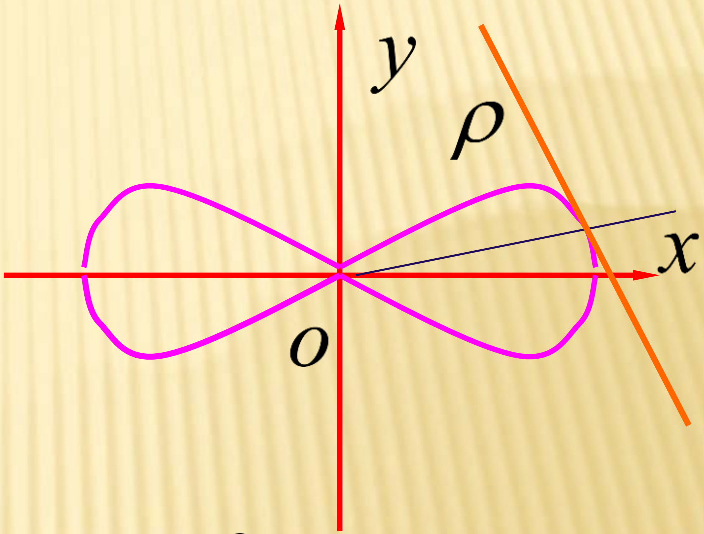
$\rho^2=2a^2\cos 2\theta$

$$=\frac{\cos 3\theta}{-\sin 3\theta}=-\cot 3\theta=-1.$$

$\therefore k=-1.$

双纽线: $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$

解2 $\because \tan\varphi = \dfrac{\rho}{\rho'_\theta}$,



$$\rho'_\theta = -\frac{2a^2}{\rho}\sin 2\theta$$

$$\therefore \tan\varphi = \frac{\rho}{\rho'_\theta} = \frac{\rho^2}{-2a^2\sin 2\theta} = -\cot 2\theta$$

$\because \varphi = \alpha - \theta$

$\theta = \dfrac{\pi}{12}$ $\quad \tan\varphi = -\sqrt{3}$ $\quad \therefore \varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ $\quad \alpha - \theta = \dfrac{2}{3}\pi$

$$\therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi + \theta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{12} = \frac{3}{4}\pi \qquad \tan\alpha = -1.$$

3.3 相关变化率

建立x, y间的关系式$F(x,y)=0$

两个相互关联的变化率称为相关变化率.

$F(x,y)=0$两端对t求导

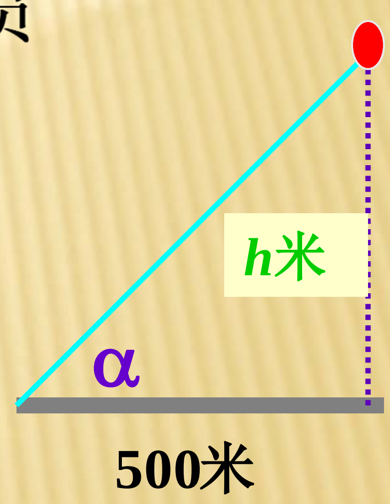
使用链导法则, 得到二个导数间的关系

从上述关系式中解得所求变化率

例 一汽球从离开观察员 500 米处离开地面铅直上升,其速率为 140米/分. 当气球高度为 500 米时,观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升 t 分后,其高度为 h,观察员视线的仰角为 α,则

$$\tan\alpha = \frac{h}{500}.$$



上式两边对 t 求导,得

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$\because$ 当 $h = 500$ 米时,$\sec^2\alpha = 2$,$\dfrac{dh}{dt} = 140$米/分,

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/分).

仰角增加率

例　当圆的半径增加时，面积也增加。

现已知一圆的半径以速率**a**厘米/分钟增加，

求当半径为**b**厘米时面积增加的速率。

解　$s=\pi r^2$　（两边对时间t求导）

$$\therefore \frac{ds}{dt}=(\pi r^2)'_t=2(\pi r)\frac{dr}{dt}=2\pi ar \qquad \boxed{\because \frac{dr}{dt}=a}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{r=b}=2\pi ab(cm^2/m)$$

例　设物体作直线运动的速度是 $v=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{s}}$,

其中 s为路程，**a,b**为常数。

证明：运动的加速度与路程的平方成反比。

证

加速度

$$a=\frac{dv}{dt}=\left(\sqrt{a^2+\frac{b^2}{s}}\right)_t'=\frac{1}{2v}(a^2+\frac{b^2}{s})'$$

$$=\frac{1}{2v}\cdot(-\frac{b^2}{s^2})\cdot\boxed{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{2v}\cdot(-\frac{b^2}{s^2})\boxed{\cdot v}=-\frac{b^2}{2s^2}$$

小结

隐函数求导法则: 视 $y=y(x)$， 利用复合函数求导法则直接对方程两边求导;

对数求导法: 对函数两边取对数，然后按隐函数的求导法则求导;

参数方程求导法: y对x的导数=y对参数的导数/x对参数的导数;

相关变化率: 两个相互关联的变化率;

解法: 通过建立两个变量之间的关系， 就将它们的变化率联系起来，从一个变化率得到另一个变化率.

命题1． $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，$f'(x)$ 仍以 T 为周期．

证： $f(x+T)-f(x)=0$ 对 $\forall x$ 成立，

两端同时求导得:(T 是常数)

$f'(x+T)-f'(x)=0$．证毕．

命题2． 奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数．

证: 设 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$ 对 $\forall x$ 成立，

等式两端同时关于 x 求导得:

$$f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x)$$

$$\Rightarrow \ f'(-x)=f'(x) \ \Rightarrow \ f'(x) \text{为偶函数.}$$

同理可证后半段.