第五章　定积分

5.1 定积分的概念与性质

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 定积分问题举例

2 定积分的定义

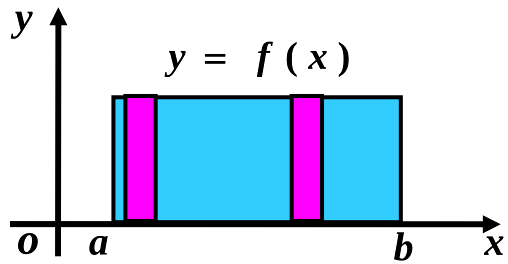
3 定积分的性质

主要内容

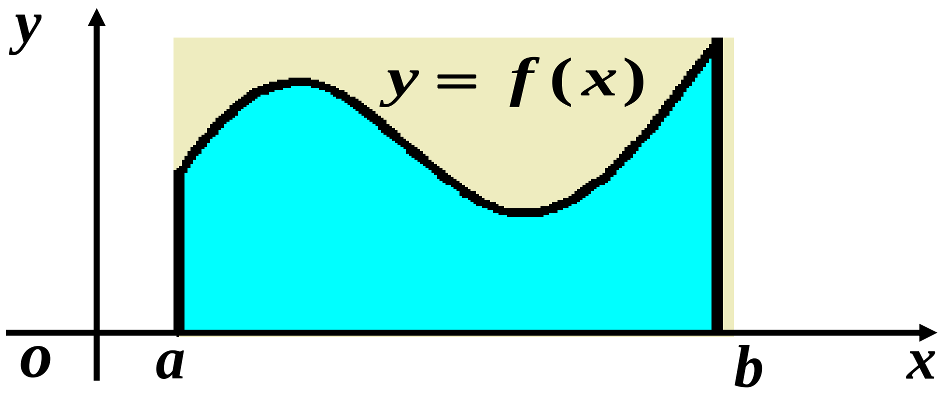
1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题

$f(x) \equiv k,$ 面积 $A = k(b-a)$

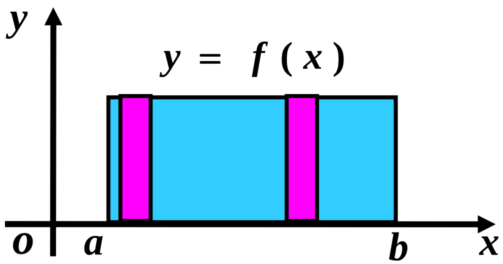


$f(x) \not\equiv k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)



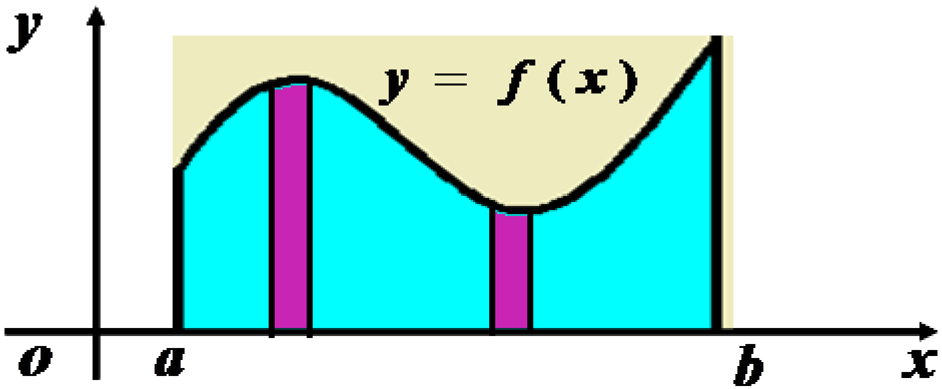
1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题



$f(x) \equiv k$, 面积 $A = k(b-a)$

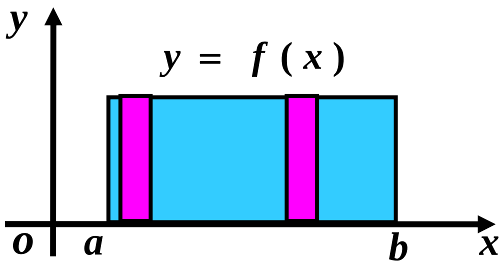
$f(x) \not\equiv k$, (设f 是[a,b]上的非负连续函数)



1 定积分问题举例

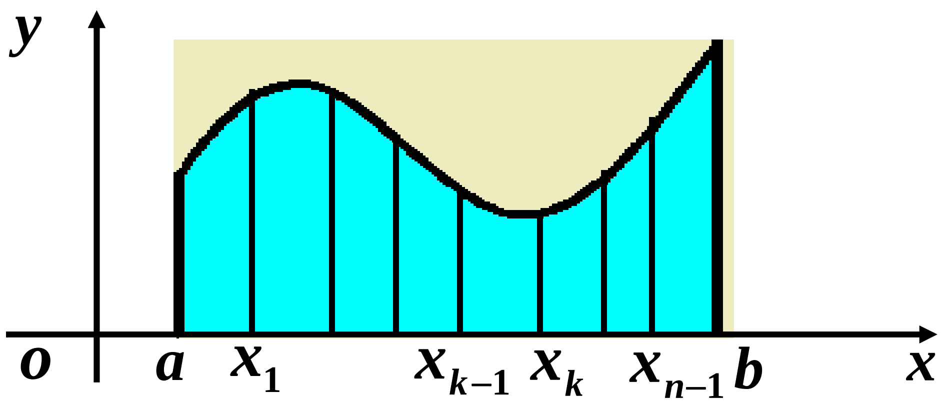
例1 曲边梯形的面积问题

$f(x) \equiv k,$ 面积 $A = k(b-a)$



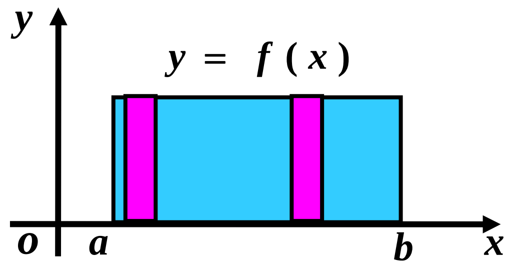
$f(x) \not\equiv k,$ (设 f 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数)

1) 分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$



1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题

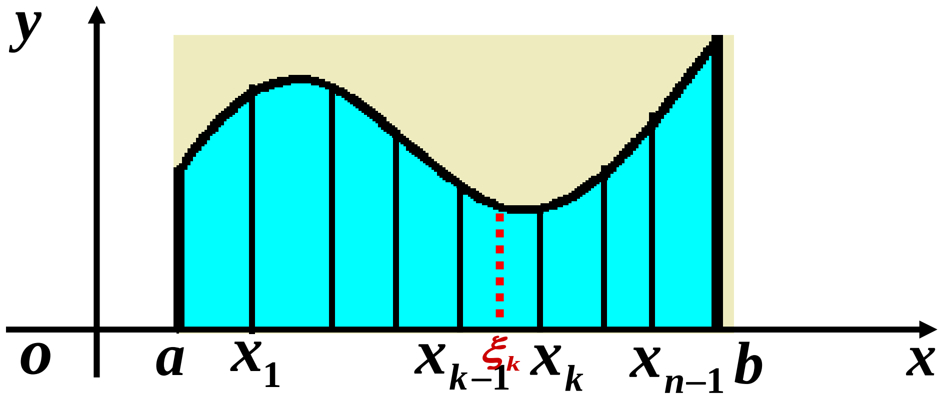


$f(x) \equiv k,$ 面积 $A = k(b-a)$

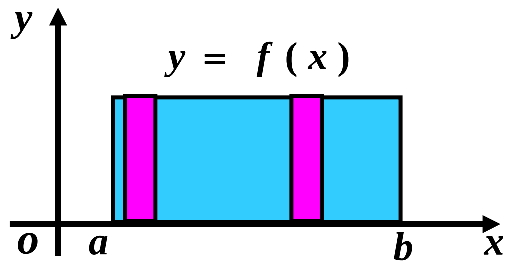
$f(x) \neq k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

1) 分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

2) 匀 $\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k \ (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ 任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$



1 定积分问题举例



例1 曲边梯形的面积问题

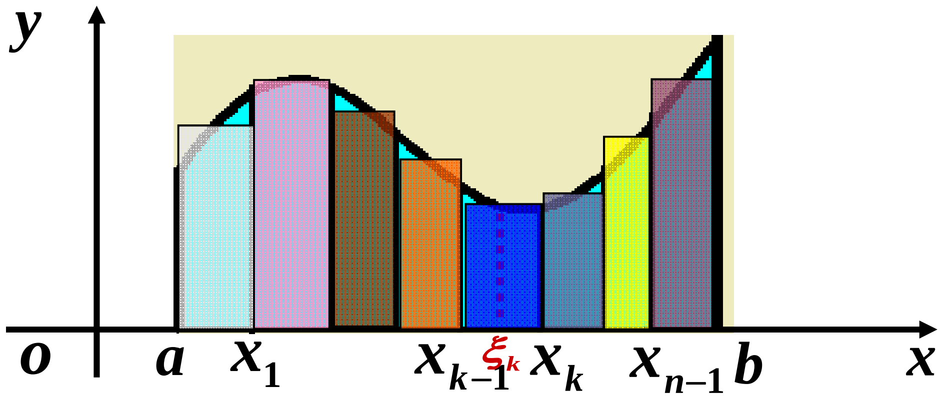
$f(x) \equiv k,$ 面积 $A = k(b-a)$

$f(x) \not\equiv k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

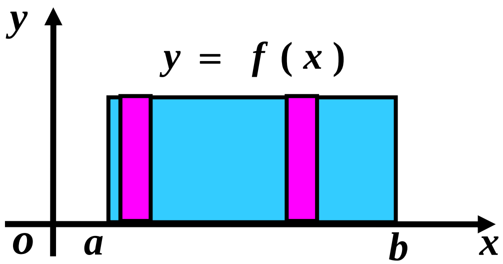
1) 分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

2) 匀 $\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k \; (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ 任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

3) 合 $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$



1 定积分问题举例



例1 曲边梯形的面积问题

$f(x) \equiv k,$ 面积 $A = k(b-a)$

$f(x) \not\equiv k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

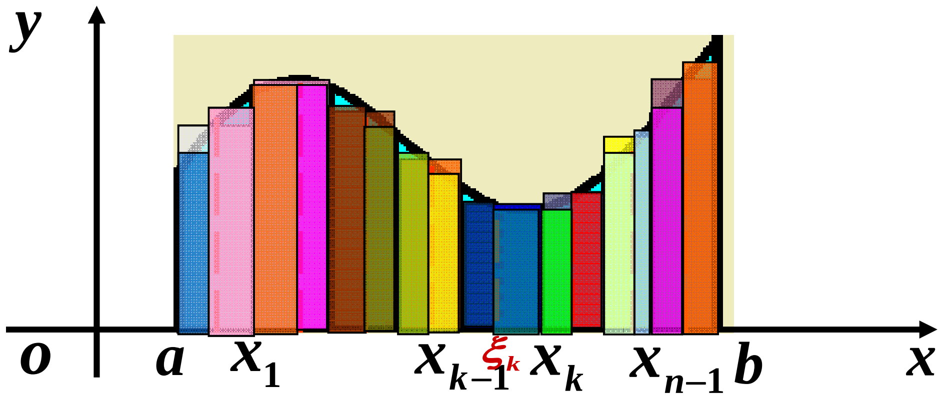
1) 分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

2) 匀 $\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k \ (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ 任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

3) 合 $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

4) 精 $A = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

$d = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$



例2 变速直线运动的位移问题

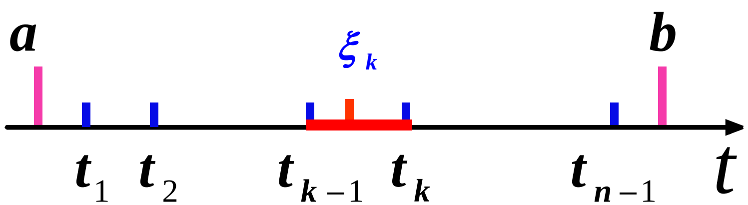
匀速：　　位移 $s=v(b-a)$　　　　乘法

非匀速：　(设$v(t)$ 是$[a,b]$上的连续函数)

1) 分　$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$

2) 匀　$\Delta s_k\approx v(\xi_k)\Delta t_k\ (\Delta t_k=t_k-t_{k-1})\quad \xi_k\in[t_{k-1},t_k]$

3) 合　$s\approx\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta t_k$



4) 精　$s=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta t_k$

两个问题的共性：

1) 求解具有同样特征的量

体现在两个方面：

（1）都是分布在区间上的量，且对区间具有可加性；

（2）量是非均匀分布在区间上的.

2) 解决问题的思想方法和步骤相同

思想方法都是四步：分、匀、和、精，

核心都是匀、精，在均匀分布时都采用积运算.

3) 都归结为同样数学结构的和式极限的计算

都是乘积的和式的极限，只是函数的表示不同罢了.

主要内容

1 定积分问题举例

2 定积分的定义

3 定积分的性质

2 定积分的定义

1）定义（定积分）设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数,

1）分　任意划分$[a,b]$，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

2）匀　任取$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，做乘积 $f(\xi_k)\Delta x_k$.

3）合　$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

4）精　如果无论$[a,b]$怎样划分,ξ_k怎样选取,$d \to 0$时

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$趋于同一常数，则称 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$[a,b]$称为积分区间.

积分上限

积分下限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

被积函数

积分变量

被积式

积分和

注:

1） $d\to 0$与$n\to +\infty$不等价，所以不能用$n\to\infty$代替$d\to 0$;

2） 两个任意性;　　3） $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$仅与$f(x)$和$[a,b]$有关.

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

积分是处理均匀量的积运算在处理相应非均匀量中的发展

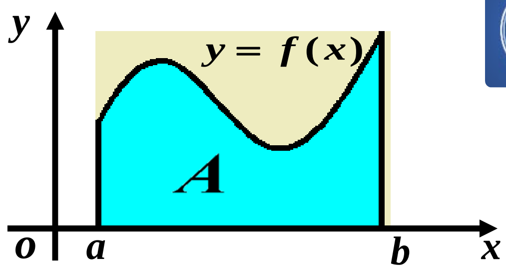
补充规定：

① $a > b$时， $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

② $a = b$时， $\int_a^b f(x)dx = 0$

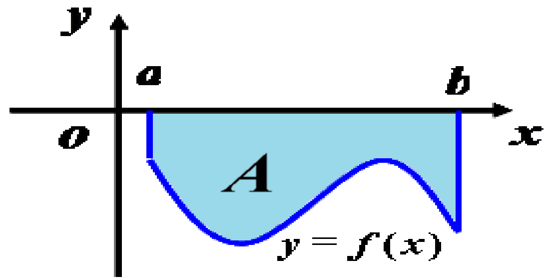
2）定积分的几何意义

$f(x)>0, \int_a^b f(x)dx = A$ 曲边梯形面积

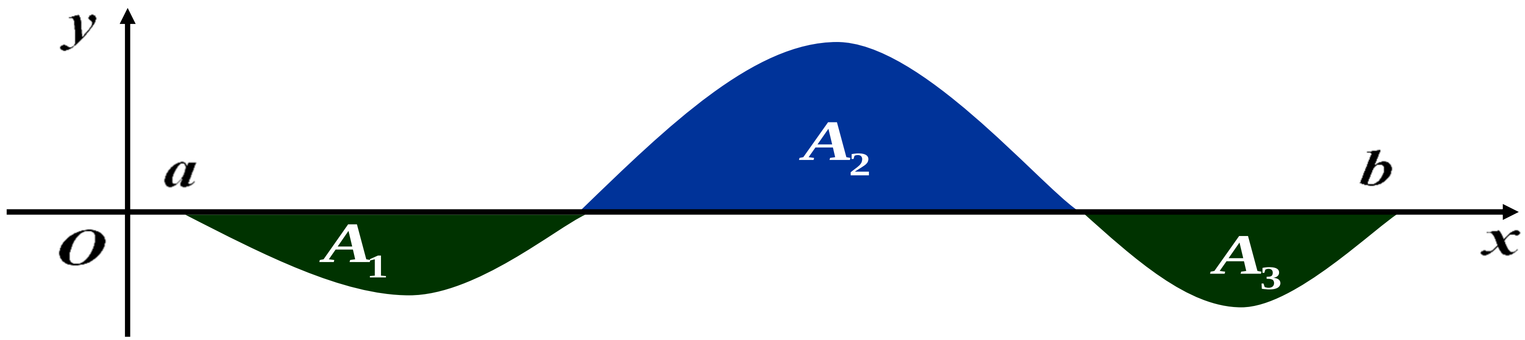


$f(x)<0, \int_a^b f(x)dx = -A$

曲边梯形面积的负值



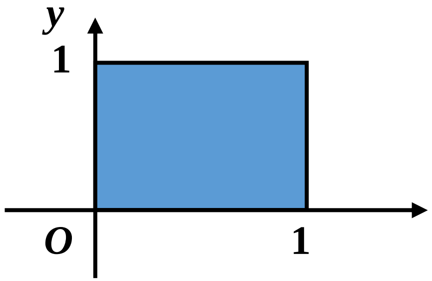
$f(x)$变号， $\int_a^b f(x)dx = A_2 - A_1 - A_3$



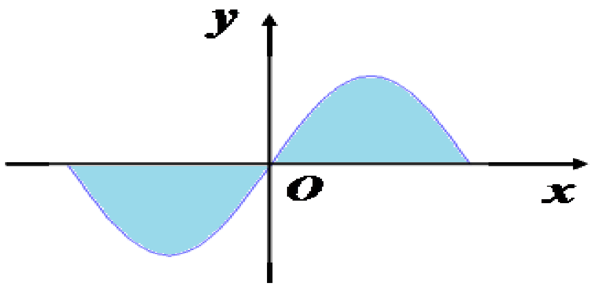
例3 利用定积分的几何意义求下列积分的值.

(1) $\int_0^1 dx$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$;　　(3) $\int_{-1}^{1} |x| dx$.

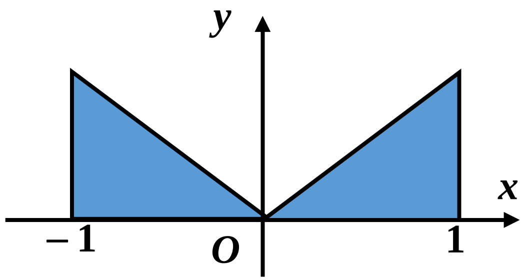
解 (1) $\int_0^1 dx = 1\cdot 1 = 1.$



(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$



(3) $\int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_0^1 x dx = 1.$



3）定积分存在的条件

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

可积性

计算

可积 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 有界

可积的充分条件

1) $f(x)$在$[a,b]$上连续；

2) $f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点.

例4 计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 由于 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以可积. 将 $[0,1]$ 分为 n 等份，并取 ξ_k 为第 k 个子区间的右端点，则有

$$\Delta x_k=\frac{1}{n},\xi_k=\frac{k}{n}\,(k=1,2,\cdots,n)$$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

主要内容

1 定积分问题举例

2 定积分的定义

3 定积分的性质

3. 定积分的性质　　Riemann积分　　$R[a,b]$

1）线性性质：设 $f,g\in R[a,b],\alpha,\beta\in R$，则 $\alpha f+\beta g\in R[a,b]$

且 $$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

2) 对区间的可加性：设 I 是有限闭区间，$a,b,c\in I$

且 $f\in R(I)$，则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

证　设 $a<c<b,$

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{[a,c]} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{[c,b]} f(\xi_k)\Delta x_k$$

3) 积分不等式： 设 $f, g \in R[a,b]$

（1）若 $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$

则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

（2）$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(3) 若 $m \le f \le M$，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

4）积分中值定理

设 $f \in C[a,b]$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

证 由于 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $m \le f(x) \le M$,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M \qquad f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

函数的平均值　n 个数 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 的平均值

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

设 $f(x) \in C[a,b]$, 将 $[a,b]$ 区间 n 等分，$\xi_k = x_k$

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

$$\boxed{\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \bar{f}}$$