

文章编号: 1005-3085(2003)05-0057-08

## 车灯线光源的优化设计模型

张作启, 韩芳, 陈焰周

指导老师: 陈士华

(武汉大学, 武汉 430072)

**编者按:**本文的一个优点是运用空间解析几何知识和光学成像原理, 结合计算机搜索方法, 按照经过  $B$  点或  $C$  点的反射线条数, 分别对线光源进行分段。不少答卷也做了类似的工作, 此文是其中较好的一个(但结果还不够完整)。第二个优点是, 对  $B$  点或  $C$  点, 分段讨论功率和线光源半长的关系并图示, 从而得到线光源最优长度。虽然推理不甚严密, 但直观。不足之处是: 没有考虑辐射照度(即本题的功率密度)的余弦定律; 对距离平方反比定律的使用是否合适也缺乏依据; 亮区精度不够。

**摘 要:**本文首先研究了车灯线光源上各点有效投射点集合变化的规律, 进行了合理的区域划分; 在此基础上, 建立了问题的最小化模型, 然后通过数形结合的方法, 解得线光源最佳长度  $l = 3.8\text{mm}$  和相应最小功率  $P_{\min} = 7210$ 。在此最佳长度下, 利用平面镜成像原理和 Matlab 软件, 采用“模拟散斑”的方法, 给出了反射光的亮区图形。该模型简单直观, 亦可推广应用于太阳能热水器、电视机接收天线等相似领域。

**关键词:**优化设计模型; 线光源; 最佳长度; 最小功率

分类号: AMS(2000) 49K35

中图分类号: O224

文献标识码: A

### 1 问题的重述(略)

### 2 问题的分析

线光源任意一点发出的光, 可直接照射在光屏上, 也可以经过灯罩(旋转抛物面)一次反射(不考虑二次反射)后, 间接照射在光屏上。线光源上不同位置的点发射的光线投射到抛物面上, 反射后能够到达指定点的投射点的集合(称为有效投射点的集合)是不同的。因为线光源过焦点对称水平放置, 线光源上点的位置分布仅与长度有关, 因此在满足设计规范要求的条件下, 寻求线光源功率最小, 线光源长度是决定因素, 而弄清线光源上各点有效投射点的情况, 则是解决问题的一个关键所在。

### 3 模型的假设

- 1) 不考虑光的二次反射。
- 2) 不考虑光的折射。

- 3) 不考虑光的干涉和衍射。
- 4) 光在传播过程中不吸收新的能量,仅考虑光的扩散。
- 5) 光在同一连续均匀介质中(例如空气)传播。
- 6) 灯丝为理想线光源,没有横向尺寸,不考虑灯管遮光。
- 7) 旋转抛物面可认为由无数微小平面镜组成,入射光发生完全镜面反射,旋转抛物面不吸收能量。

#### 4 符号说明

$\alpha$ :入射光线、法线、出射光线所决定的平面

$\beta$ :过  $P_0$  作得的旋转抛物面的切平面

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ :旋转抛物面上任意一点

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ :线光源上任意一点

$P_2(x_2, y_2, z_2)$ :线光源上任意一点  $P$  关于  $\beta$  的对称点

$P_m(x_m, y_m, z_m)$ : $P_1P_2$  的中点

$M, N$ :线光源的两端点

$L_1$ :旋转抛物面过  $P_0$  点的法线

$L_2$ :旋转抛物面过  $P_0$  点的切线

$I_B$ : $B$  点的光照强度

$I_C$ : $C$  点的光照强度

$P$ :线光源的功率

其它符号均沿用题目所示

#### 5 模型的建立

如(图 1)所示按照右手螺旋准则建立空间直角坐标系(单位:mm),根据已知数据可以求出旋转抛物面的方程为  $x^2 + z^2 = 60y$ ,焦点  $F(0, 15, 0)$ ,  $A(0, 25015, 0)$ ,  $B(1300, 25015, 0)$ ,  $C(2600, 25015, 0)$ ,  $P_1(x_1, 15, 0)$ ,  $P_m(x_m, y_m, z_m)$ 。

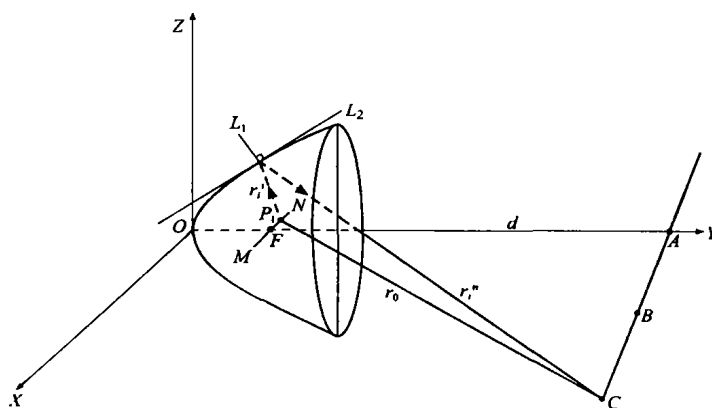


图 1 光源反射

切平面的方程

$$2x_0(x - x_0) - 60(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

$P_m(x_m, y_m, z_m)$  满足切平面方程,即;

$$2x_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_0\right)-60\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_0\right)+2z_0\left(\frac{z_2}{2}-z_0\right)=0; \quad (1)$$

入射光线

$$\overline{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - 15, z_0\}$$

法线

$$\overline{L_1} = \{2x_0, -60, 2z_0\}$$

反射光线

$$\overline{P_0C} = \{2600 - x_0, 25015 - y_0, -z_0\}$$

由反射定律,入射光线  $P_1P_0$ , 法线  $L_1$ , 反射光线  $P_0C$  在同一个平面  $\alpha$  内,则由向量的知识,三向量的混合积为 0,可得到

$$[(24985 - y_0)x_1 + 2600y_0 + 39000]z_0 = 0 \quad (2)$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$  在抛物面上,满足

$$x_0^2 + z_0^2 = 60y_0, (-36 \leq x_0 \leq 36, -36 \leq z_0 \leq 36, 0 \leq y_0 \leq 21.6)$$

分析(2)式:

1) 当  $z_0 \neq 0$ , 而  $[(24985 - y_0)x_1 + 2600y_0 + 39000] = 0$  时,得到

$$y_0 = \frac{24985x_1 + 39000}{x_1 - 2600}$$

得到  $0 \leq y_0 \leq 21.6$ , 求得  $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$ , 即仅在线光源上满足  $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$  的点发出的光经过抛物面上  $z_0 \neq 0$  的点反射后可经过  $C$  点。

2) 当  $z_0 = 0$ , 反射点位于用  $z_0 = 0$  平面截旋转抛物面所得的抛物线上;

以上分析仅是反射光线过  $C$  点的必要条件,但给出了线光源上点的初步划分,大大缩小了讨论的范围,为保证区域划分的准确性,需要再通过计算机变步长搜索的方法来加强该结论。

下面,利用虚像  $P_2$ 、反射点  $P_0$ 、光屏上点  $C$  三点共线的条件,以  $x_1$  为变量分别表示出  $x_0, y_0, z_0$ ,再利用 Matlab 对  $x_1$  进行变步长搜索,找出有效投射点集合的变化规律,进一步完善上述结论。具体步骤如下:

由平面解析几何知识,平面内垂直于同一条直线的两条直线互相平行,显然  $P_1P_2 // L_1$ , 则即

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{L_1} = 0 \text{ 得到}$$

$$[(15 - y_2)z_0 - 30z_2]i - [(x_1 - x_2)z_0 + z_2x_0]j + [-30(x_1 - x_2) - (15 - y_2)x_0]k = 0 \quad (3)$$

联立(1),(3),得到

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-x_1x_0^2 + 900x_1 + x_1^2z_0^2 + 2x_0^3 + 900x_0 + 2x_0z_0^2 - 60x_0y_0}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ y_2 = \frac{15(4x_0x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ z_2 = \frac{2z_0(x^2 + 450 + z_0^2 - x_0x_1 - 30y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \end{cases} \quad (4)$$

反射光线能经过  $C$  点的充分必要条件是  $P_0, P_2, C$  三点共线, 因为

$$\overline{P_2 P_0} = \{x_0 - x_2, y_0 - y_2, z_0 - z_2\}, \overline{CP_0} = \{2600 - x_0, 25015 - y_0, -z_0\},$$

所以  $\overline{P_2 P_0} \times \overline{CP_0} = 0$

得

$$\begin{cases} -z_0(y_0 - y_2) - (z_0 - z_2)(25015 - y_0) = 0 \\ (x_0 - x_2)z_0 + (z_0 - z_2)(2600 - x_0) = 0 \\ (x_0 - x_2) + (25015 - y_0) - (y_0 - y_2)(2600 - x_0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

联立(4), (5)可以得到以  $x_1$  为变量表达的  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的值, 对于任一给定的  $x_1$ , 根据  $P_0$  值的有效个数即可确定有效投射点的个数, 从而校验线光源区段划分的正确性。(附变步长搜索结果, 见附表 1)。即线光源有如下划分:

- 1) 当  $x_1 > -1.56$  时, 没有反射线经过  $C$  点;
- 2) 当  $x_1 = -1.56$  时, 有 2 条反射线经过  $C$  点;
- 3) 当  $-3.81 \leq x_1 < -1.56$ , 有 4 条反射线经过  $C$  点;
- 4) 当  $x_1 < -3.81$  时, 有 2 条反射线经过  $C$  点。

同理当反射光线经过  $B$  点时亦可进行相同分析, 划分如下(搜索结果见附表 2)

- 1) 当  $x_1 > -0.78$  时, 没有反射光经过点  $B$ ;
- 2) 当  $-1.9 < x_1 < -0.78$  时, 有 4 条反射光经过点  $B$ ;
- 3) 当  $x_1 < -1.9$  时, 有 2 条反射光经过  $B$  点。

很显然, 以上对线光源的分段对应着不同的积分域, 欲求  $B, C$  点的光强度, 只需对点光源的功率分段积分求和。

记线光源的功率  $P$ , 线光源长度  $2a$ , 设从线光源上任意一点经过反射或直射到达指定点的总光线条数为  $k$ , 对应的每条路径的长度为  $\gamma_i = \gamma'_i + \gamma''_i$ , 则可以建立如下模型

$$\begin{aligned} \min P &= P(a) \\ s. t. \quad &\begin{cases} I_B = \int_{-a \leq x \leq a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P}{4\pi\gamma_i^2 2a} dx \geq 2 \\ I_C = \int_{-a \leq x \leq a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P}{4\pi\gamma_i^2 2a} dx \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

## 6 模型的求解

### 6.1 问题一的求解

对于上述模型中的  $\gamma_i$ , 由于  $\gamma'_i$  与  $\gamma''_i$  数量级相差很大, 如图 1 所示, 故可近似认为  $\gamma_i = \gamma''_i = \gamma_0$ , 而  $\gamma_0^2 = d^2 + (k_c - x_1)^2$ 。

下面先讨论在满足  $C$  点条件时, 线光源长度  $2a$  与  $P$  的关系:

由于第五步中已经求出

- 1) 当  $x_1 > -1.56$  时, 没有反射线, 只有 1 条直射光,  $k = 1$ 。
- 2) 当  $-3.8 < x_1 < -1.56$ , 有 4 条反射线, 1 条直射光,  $k = 5$ 。

3) 当  $x > -3.8$  时, 有 2 条反射线, 1 条直射光,  $k = 3$ 。

故对线光源半长度  $a$  作以下分类讨论

$$1) \text{ 当 } a \leq 1.56 \text{ 时, } I_c = \int_{-a}^a \frac{P}{8\pi a [d^2 + (k_c - x_1)^2]} dx \geq 1$$

对等式右边进行积分和一次泰勒展开, 可求得此时,  $P \geq 4\pi(d^2 + k_c^2)$

2) 当  $1.56 < a \leq 3.8$  时,

$$I_c = \int_{-1.56}^a \frac{P}{8\pi a [d^2 + (k_c - x_1)^2]} dx + \int_{-a}^{-1.56} \frac{5P}{8\pi a [d^2 + (k_c - x_1)^2]} dx \geq 1$$

可求得

$$P \geq \frac{8\pi a (d^2 + k_c^2)}{6a - 6.24}$$

3) 当  $a > 3.8$  时,

$$I_c = \int_{-1.56}^a \frac{P}{8\pi a [d^2 + (k_c - x)^2]} dx + \int_{-3.8}^{-1.56} \frac{5P}{8\pi a [d^2 + (k_c - x)^2]} dx + \int_a^{-3.8} \frac{3P}{8\pi a [d^2 + (k_c - x)^2]} dx \geq 1$$

可求得

$$P \geq \frac{8\pi a (d^2 + k_c^2)}{4a + 1.36}$$

对  $B$  点进行相似处理, 由于

1) 当  $x_1 > -0.78$  时, 只有直射光, 经过  $B$  点  $k = 1$ 。

2) 当  $-1.9 < x_1 < -0.78$  时, 有 4 条反射光, 1 条直射光, 经过  $B$  点  $k = 5$ 。

3) 当  $x_1 < -1.9$  时, 有 2 条反射光, 1 条直射光, 经过  $B$  点,  $k = 3$ 。

处理结果如下:

1) 当  $a < 0.78$  时,  $P \geq 8\pi(d^2 + k_B^2)$

2) 当  $0.78 < a < 1.9$  时,  $P \geq \frac{16\pi a (d^2 + k_B^2)}{6a - 3.12}$

3) 当  $a > 1.9$  时,  $P \geq \frac{16\pi a (d^2 + k_B^2)}{4a + 0.68}$

$$\text{由于 } d^2 + k_B^2 = 626690000 \quad d^2 + k_c^2 = 631760000 \quad \frac{d^2 + k_B^2}{d^2 + k_c^2} \approx 0.99$$

令  $4\pi(d^2 + k_c^2) = A$ , 则  $8\pi(d^2 + k_B^2) = 1.98A$

则分别对点  $B, C, a, P$  关系如下:

$C$  点

1)  $a < 1.56$  时,  $P \geq A$

2)  $1.56 < a < 3.8$  时,  $P \geq \frac{2a}{6a - 6.24} A$

3)  $a > 3.8$  时,  $P \geq \frac{2a}{4a + 1.36} A$

$B$  点

1)  $a < 0.78$  时,  $P \geq 1.98A$

2)  $0.78 < a < 1.9$  时,  $P \geq \frac{2 \times 1.98a}{6a - 3.12} A$

3)  $a > 1.9$  时,  $P \geq \frac{2 \times 1.98a}{4a + 0.68} A$

将上述关系, 用图形表出, 如图 2 所示。

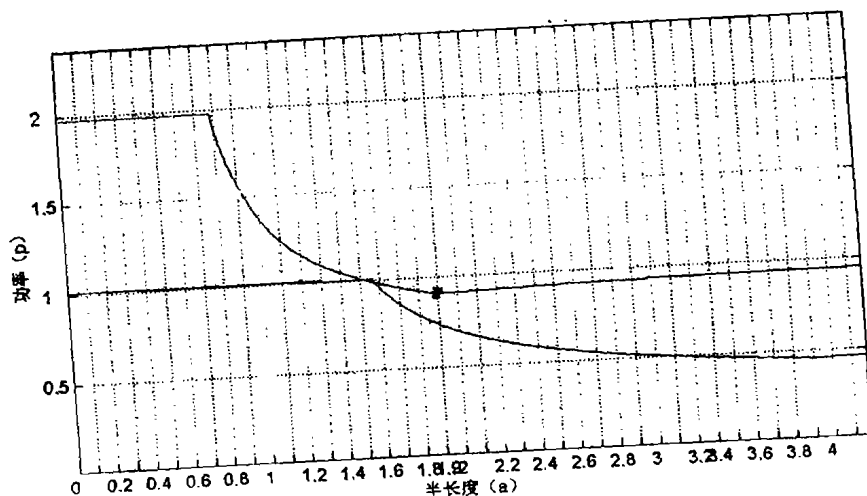


图 2 功率与半长度的关系曲线

由图 2 容易看出当  $a = 1.9$  时,  $P = 0.90A$  为满足约束最优解, 此时线光源的长度为  $2a = 3.8\text{mm}$ 。下面给予数学证明:

当  $0.78 < a < 1.9$  时,  $dp/da = 2 \times 1.98 \times (-3.12)/(6a - 3.12)^2 < 0$ , 单调递减

当  $a > 1.9$  时,  $dp/da = 2 \times 1.98 \times 0.68/(4a + 0.68)^2 > 0$ , 单调递增

显然, 函数在  $a = 1.9$  处取得最小值,  $P_{\min} = 7210$ 。

附带说明: 可以检验当线光源长度为  $3.8\text{mm}$  时, 所有反射光线能够到达指定点时, 都不会被抛物面遮盖。

## 6.2 问题二的求解

考虑线光源上的任意一点  $P_1(x_1, 15, 0)$  ( $-1.9 < x_1 < 1.9$ ), 其关于过旋转抛物面上任一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  切平面的对称点为  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  (即其像点), 连接  $P_0 P_2$ , 并反向延长交光屏于点  $P_3(x_3, 250155, z_3)$ , 则  $P_3$  可由下列几式确定:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-x_1 x_0^2 + 900 x_1 + x_1 z_0^2 + 2x_0^3 + 900 x_0 + 2x_0 z_0^2 - 60 x_0 y_0}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ y_2 = \frac{-15(-4x_0 x_1 + 3x_0^2 + 900 - 120 y_0 + 3z_0^2)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ z_2 = \frac{2z_0(x_0^2 + 450 + z_0^2 - x_0 x_1 - 30 y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_3} = \frac{y_0 - y_2}{y_0 - 25015} = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \end{cases}$$

因为不同的  $x_1$  和  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  可以确定所有反射到屏上的斑点, 要画出其反射亮区, 本文采用以下方法:

用  $\gamma, \theta$  表示出  $x_0, y_0, z_0$  ( $x_0 = \gamma \cos \theta, z_0 = \gamma \sin \theta, y_0 = \frac{\gamma^2}{60}$ ), 然后将  $x, \gamma, \theta$  离散化, 对其建立三重循环, 利用 Matlab 软件, 采用“模拟散斑”的思想将这些斑点记录在屏上, 从而得

到反射光的亮区图形见(图3)所示。

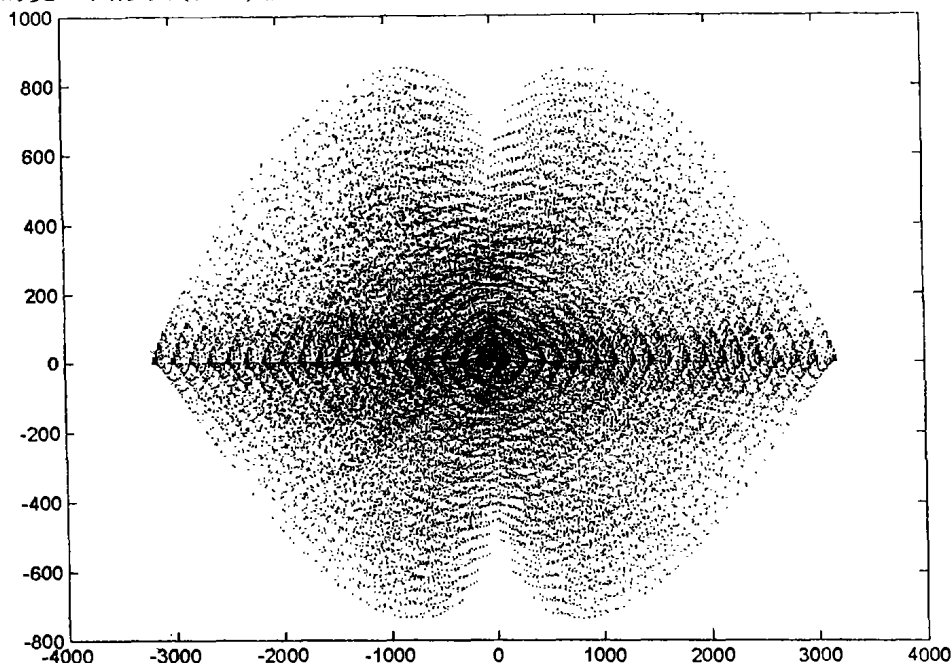


图3 光亮度区

对反射光亮区的若干分析:

1) 定性分析:从以上光斑聚合图中,我们得到以下几个特点:

光亮区呈两头稍尖的“类椭圆形”分布,这与实际生活中灯罩形状相似。由于旋转抛物面有一定的聚光性,所以中心点处光线最为集中,且光强沿四周发散,但“类长轴”上点的光强明显高于同一扩散圈上的其它点,这应该受益于该轴的直线平行于线光源,它们可以接受更多的反射光线;更出人意料的是“类短轴”上居然有一定范围的“无光区”,这使在垂直方向小角度范围内有一个明显的亮度差,符合汽车前大灯照明特点。

2) 定量分析:同前利用成像原理,虚像点、入射点、C点三点共线,可以求得

当  $x_1 > -1.56$  时,没有反射线经过C点,即  $x_1 = -1.56$  是反射向C点的临界光线。以C点为基准点,将AC上的其它点表示成C的坐标形式,例如  $Q(2600t, 25015, 0)$  ( $t$  为比例常数,  $t = \frac{Q \text{ 点横坐标}}{C \text{ 点横坐标}}$ ),将此一般形式带入三点共线方程,可以得到更一般的结论,即线光源上满足  $-3.81t < x_1 < -1.56t$  的点,其反射光线可以经过Q点,换句话说,  $x_1 = -1.56t$  是反射经过Q点的临界光线。第一问中已经求出光源长度为3.8mm,由前面的分析,光源的端点  $M(1.9, 0)$  所能射到的最远位置即为“类椭圆”的“长半轴”。仍然以C为基准,可以得到如下比例式:  $1.9/1.56 = t$ ,则  $2600t$  即为所能照射的最远点。此题中,  $S_{\max} = 2600 \times 1.9/1.56 = 3167(\text{mm})$ 。对照图示,此结果与图3所示结果近似吻合。此结论可以用于求解任意长度线光源在该问题下的“长半轴”长度。

### 6.3 问题三的求解

汽车车灯设计规范的合理性是指按此设计能够更好有利于汽车司机的操作,尽可能减小发生危险的可能性,其主要因素是考虑灯光强度的分布对汽车司机的视觉影响。首先,从

照明效果分析,“类短轴”小角度范围内由“有光区”过渡到“无光区”,符合实际生活中“小范围亮度差强烈变化”;散斑中部光线密集,四周扩散递减,可避免汽车交会时的眩光干扰。其次,从光源类型选择分析,点光源形成的反射加强区域仅限于直径为抛物面口径的圆形区域,而线光源形成“类椭圆”,既符合司机视野要求,又使光强集中分散恰到好处,可避免大范围的光强差异引起的交通事故。另外,也可比较说明此题中线光源过焦点且垂直于轴线对称放置方式也是合理的。

## 7 模型的评价与探讨(略)

表 1:逐步细分法求反射光线过 C 点的反射点的个数

$X_1$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	反射点的个数
-30	-30	15	0	1
-29	-29.9479	14.9479	0	2
	27.1745	12.3076	0	
-25	-29.701	14.7027	0	2
	26.9753	12.1278	0	
-20	-29.2685	14.2774	0	2
	26.6233	11.8133	0	
-15	-28.584	13.6176	0	2
	26.0607	11.3193	0	
-10	-27.3320	12.4506	0	2
	25.0132	10.4277	0	
-5	-24.2232	9.7794	0	2
	22.3265	8.3079	0	
-1.91	-17.2188	4.9415	0	2
	15.9419	4.2357	0	
-1.90	-17.2188	4.9130	0	4
	15.9418	4.2110	0	
	0.84639	21.4851	-35.8943	
	0.84639	21.4851	35.89423	
-1.89	-17.1190	4.8844	0	4
	15.8484	4.1862	0	
	0.8375	21.2934	-35.7338	
	0.8375	21.2934	35.7338	
-1.5	-14.7422	3.6222	0	4
-1.5	13.6060	3.0854	0	
	0.6649	13.8129	-28.7808	
	0.6649	13.8129	28.7808	
-0.79	-2.4493	0.9998	0	4
	1.6349	0.0445	0	
	0.3503	0.1831	-3.2958	
	0.3503	0.1831	3.2958	
-0.781	-1.2580	0.0264	0	4
	0.4486	0.0033	0	
	0.3464	0.0021	-0.7020	
	0.3464	0.0102	0.7020	
-0.78	-0.990	0.0164	0	2
	0.1817	0.0006	0	
-0.779	无解			
-0.778	无解			
当 $X_1 > -0.78$ 时,抛物面上没有满足条件的解				

表 2:逐步细分法求反射光线过 B 点的反射点的个数

$X_1$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	反射点的个数
-30	-30	15	0	1
	24.8060	10.2556	0	
-25	-29.4432	14.4484	0	2
	24.40452	9.9263	0	
-20	-28.6567	13.6868	0	2
	23.8276	9.4626	0	
-15	-27.4548	12.5628	0	2
	22.9248	8.7591	0	
-10	-25.3590	10.7180	0	2
	21.2940	7.5573	0	
-5	-20.4973	7.0024	0	2
	17.2772	4.9754	0	
-3.82	-18.0683	5.4411	0	2
	15.1687	3.8348	0	
-3.81	-18.0428	5.4257	0	2
	15.1463	3.8235	0	
	0.42209	21.5810	-35.9817	
	0.42209	21.5810	35.9817	
-3.80	-18.0172	5.4103	0	4
	15.1237	3.8121	0	
	0.42099	21.4851	-35.9017	
	0.2098	21.4851	35.9017	
-2.5	-13.2787	2.9387	0	4
	10.8523	1.9629	0	
	0.27718	9.0154	-23.2561	
	0.2771	9.0154	23.2561	
-1.57	-2.7335	0.1245	0	4
	0.7664	0.0098	0	
	0.1741	0.0870	-2.2787	
	0.1741	0.0870	2.2787	
-1.56	-2.0491	0.0700	0	2
	0.8771	0.0001	0	
-1.55	无解			

当  $x_1 > -1.56$  时,抛物面上没有满足条件的解

## 参考文献:

- [1] 斋藤孟(日).汽车附件及辅助装置[M].北京:机械工业出版社,1991
- [2] 雷肇棣.物理光学导论[M].成都:电子科技大学出版社,1993
- [3] 苏金明,阮沈勇. Matlab 6.1 实用指南[M].北京:电子工业出版社,2002

(下转 40 页)