

文章编号:1005-3085(2005)07-0101-07

# DVD 在线租赁问题

范 浩, 薛世坤, 战东元

指导教师: 武汉大学指导组

(武汉大学, 武汉 430072)

**编者按:** 本文思路清晰, 解法简练有效。利用二项分布对 DVD 购买量进行了合理预测; 对 DVD 购买与分发建立了使顾客达到最大满意度又使服务商取得最大利润的双目标优化问题; 以使顾客达到足够满意度的购买量为随机变量, 建立随机搜索模型, 利用计算机搜索得到好的解答。

**摘 要:** 本文就 DVD 在线租赁问题建立了数学模型。我们假设会员在每月初申报订单, 只申报一次的会员在月末归还 DVD, 申报两次的会员在月中归还 DVD 并进行二次申报, 月末再次归还。对问题一本文建立了基于二项分布的随机模拟模型, 发现了 DVD 的最小购买量与会员需求量之间的正比关系。问题二先将订单中会员对光盘的偏好程度转化为满意度矩阵, 再建立 DVD 分配的 0-1 规划模型, 用 Lingo 求解得到最大满意度以及对应的最优解。此外, 文中还给出了一种高效率的贪婪算法, 也能求得满意度较大的分配方案。问题三先根据给出的1000位会员对每种 DVD 的满意度求出每种 DVD 的需求人数, 利用第一问最小购买量与会员需求量成正比关系的结论, 运用计算机模拟的方法, 先确定一较小的购买量, 再用贪婪算法作为策略进行分配, 计算满意的会员所占的百分比。按照需求比逐渐增加购买量直至满意的会员达到95%为止。此时的购买量即为最小购买量。问题四中我们提出网站如何进行信息预测并决策 DVD 的购买量, 通过减少订单周期和对会员还碟时间的随机化处理, 模型更加切合实际。

**关键词:** 二项分布; 0-1 规划; 贪婪算法; 随机模拟

**分类号:** AMS(2000) 90C10

**中图分类号:** O221.4

**文献标识码:** A

## 1 问题分析和模型假设

### 1.1 需求预测

假设抽样调查的1000个样本精确地反映了10万个会员的喜好。根据极大似然估计, 愿意看5种 DVD 的人数分别为20000, 10000, 5000, 2500, 1000;

### 1.2 会员结构

网站60%的会员每月租赁 DVD 两次, 我们称其为 A 类会员; 另外的40%只租一次, 称其为 B 类会员。A、B 类会员的人数只具有统计意义;

### 1.3 网站运营规则

假设网站规定会员只能在月初(每月1号)和月中(每月16号)提交订单, 随后网站立即根据订单发放 DVD (一次3张), A 类会员在月中归还 DVD 并进行二次申报, 在月末归还第二次发放的 DVD, B 类会员只在月末归还 DVD。

## 2 符号说明

$a_{ij}$  编号为  $i$  的会员对编号为  $j$  的 DVD 的满意度;

$x_{ij}$  0-1 变量:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{表示编号为 } i \text{ 的会员未得到编号为 } j \text{ 的 DVD} \\ 1, & \text{表示编号为 } i \text{ 的会员得到编号为 } j \text{ 的 DVD;} \end{cases}$$

$b_j$  编号为  $j$  的 DVD 的库存数量, 单位: 张;

$n_j$  编号为  $j$  的 DVD 的购买数量, 单位: 张。

$$(1 \leq i \leq 1000, 1 \leq j \leq 100)$$

### 3 模型的建立和求解

#### 3.1 问题一 (购买新的 DVD)

我们认为会员喜欢何种 DVD 与他属于 A、B 中哪一类是不相关的, 愿意看某种 DVD 的人中 A、B 两类会员人数之比亦为 6:4。

为满足一定时间内给定比例的会员看到他喜欢的新片, 网站要综合考虑 DVD 分配给两类会员的情况。如果新片分配给 A 类会员, 他们会在月中归还 DVD, 这些 DVD 又可分配给其他的尚未看到该片的 A 类会员以满足他们的需要, 因此这些 DVD 在一个月中被利用了两次。如果新片分配给 B 类会员, 他们将在月末归还, 这些 DVD 在一个月中只被利用了一次。

##### 3.1.1 一个月内保证至少50%会员看到喜欢的 DVD (仅以 DVD1 为例进行分析)

设网站购买了  $n_1$  盘 DVD1, 得到 DVD1 的 A 类会员的人数 (不妨记为  $k_{n_1}$ ) 服从二项分布:  $k_{n_1} \sim B(n_1, 0.6)$ , A 类会员得到的光盘可以利用两次, 得到 DVD1 的 B 类会员的人数为  $n_1 - k_{n_1}$ , 故一个月中共有  $n_1 + k_{n_1}$  会员看到这张光盘。若在 99% 的置信度下保证一个月内至少 50% 会员满意, 则认为达到预定的目的。模型如下:

$$\begin{aligned} & \min n_1 \\ & \text{s.t.} \begin{cases} P(n_1) = P(\{n_1 + k_{n_1} \geq 10000\}) \geq 0.99 \\ k_{n_1} : B(n_1, 0.6). \end{cases} \end{aligned}$$

显然  $P(n_1)$  是  $n_1$  的不减函数, 可采取计算机模拟方法求解, 为此建立如下算法:

Step1: 给定  $n_1$  的一个较小的初值, 如取  $n_1 = 5000$ ;

(2~4步检测约束条件是否满足)

Step2: 令  $s = 0$ , 作为计数变量;

Step3: 让计算机产生一个服从  $B(n_1, 0.6)$  的随机数, 判断是否满足  $n_1 + k_{n_1} \geq 10000$ , 若是则令  $s = s + 1$ ; 否则  $s$  保持不变;

Step4: 重复 Step3 共 10000 次。判断是否有  $s \geq 9900$ , 若是, 认为约束条件可以满足, 进入 Step5; 反之令  $n_1 = n_1 + 1$ , 回到 Step2;

Step5: 记下此时的  $n_1$  值;

以上算法可运用 Matlab 编程实现<sup>[1]</sup>, 结果由表1给出。

结果的分析:

从表1中不难发现, DVD 的最小购买量 (近似) 与其需求量 (愿意观看的人数) 呈正比关系:

$$\text{最小购买量} = \frac{\text{需求量} \times \text{保证满足的百分比}}{\text{每张DVD的平均利用率}}.$$

表 1: 一个月内保证至少50%会员看到喜欢的 DVD

	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	20000	10000	5000	2500	1000
最小购买量	6301	3163	1590	800	326

这一关系可以用  $F$  检验法<sup>[2]</sup>进一步验证。

### 3.1.2 三个月内保证至少95%会员看到喜欢的 DVD (仅以 DVD1 为例)

与3.1.1类似, 只需注意月中只有 A 类会员返还 DVD, 此时也只能将返还的 DVD 分配给没有看过该片的 A 类会员; 月末所有会员都返还 DVD, 下月初分配给所有需要该片 (没有看过而且喜欢该片) 的会员。在月初的分配中, 二项分布由目前需要该片的 A、B 两类会员人数决定。仍采用 Matlab 编程模拟求解, 结果由表2给出。

表 2: 三个月内保证至少95%会员看到喜欢的 DVD

	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	20000	10000	5000	2500	1000
最小购买量	4527	2270	1140	575	232

## 3.2 问题二 (在线订单的处理)

### 3.2.1 满意度的确定

为了体现会员对光盘的满意程度, 应建立合适的满意度函数。近似的认为会员对自己喜欢 DVD 的偏好级差是相同的, 采用线性的满意度函数。而若光盘并未出现在会员的订单中, 此时满意度值取0。认为0与会员申报的最后一个 DVD 的满意度差值显著地大于他所喜欢的相邻两个 DVD 之间的满意度差值。建立满意度函数如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 16 - \bar{a}_{ij}, & \bar{a}_{ij} \neq 0 \\ 0, & \bar{a}_{ij} = 0 \end{cases}$$

$\bar{a}_{ij}$  为题表中编号为  $i$  的会员对编号为  $j$  的 DVD 的偏爱程度, 偏爱程度越高, 满意度越大。

### 3.2.2 订单处理模型

我们试图据此寻求一种最佳分配方案, 使得所有会员对获得光盘的满意度之和最大。按照“问题分析”中网站的运营规则, 每名会员每次应获得0或3张 DVD。当某名会员未获得 DVD 时, 一定可以通过向他任意分发3张 DVD 而使得目标函数值不减。因此模型的最优解一定在每名会员都获得3张 DVD 时取到。另外分配给会员的某种 DVD 的总数不应超过网站的

库存量。根据上述目标及约束条件建立 0-1 规划模型如下:

$$\begin{aligned} \max w &= \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} a_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3 \\ \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq b_j \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases} \end{aligned}$$

### 3.2.3 模型的求解:

1) 求精确解: 用 Lingo8.0 求解 0-1 规划得到最优的分配方案和最大满意度值。下表具体列出前30位会员 (C1~C30) 所获得的 DVD (用序号表示, 下同)。

表 3: 前30位会员获得的 DVD (lingo 结果)

会员	DVD1~3			C8	31	35	71	C16	10	84	97	C24	37	41	76
C1	8	41	98	C9	53	78	100	C17	47	51	67	C25	9	69	94
C2	6	44	62	C10	41	55	85	C18	41	60	78	C26	22	68	95
C3	32	50	80	C11	59	63	66	C19	66	84	86	C27	50	58	78
C4	7	18	41	C12	2	31	41	C20	45	61	89	C28	8	34	82
C5	11	66	68	C13	21	78	96	C21	45	50	53	C29	26	30	55
C6	19	53	66	C14	23	52	89	C22	38	55	57	C30	37	62	98
C7	26	66	81	C15	13	52	85	C23	29	81	95				

满意度: 39681

2) 贪婪算法 (求近似解): 按照如下步骤, 可以得到一种近似最优的分配方案:

Step1: 对于库存的100种光盘, 首先满足所有对它偏爱顺序为1的会员的需要, 即将每种光盘分配给所有对其偏爱顺序为1的会员, 如果该光盘的数目偏少无法完成此次分配, 则先分配给其中编号较小的那些会员;

Step2: 对于剩余光盘, 再优先满足对它偏爱顺序为2的会员需要, 同样地, 如果该光盘的数目偏少无法完成此次分配, 则先分配给其中编号较小的那些会员;

Step3: .....

依此类推分配下去, 在 Step3 以后分配时, 已经拥有3张光盘的会员不参加分配;

Step11: 如果还有剩下的光盘, 随机分配给尚未分满的会员, 分配结束。

这种贪婪算法计算量较小, 速度很快。由于上述步骤尽量保证了偏爱程度较高的匹配, 可以保证结果的近似最优。据此编程计算, 前30名会员的分配结果见表4。

满意度: 37519

3) 结果比较: 贪婪算法的结果比精确解差了5.45%。通过改变光盘的初始库存多次进行对比, 认为贪婪算法可以较好的保证近似最优, 而且时效性远好于大规模的 0-1 规划, 因此可以将这种算法作为一种有效的分配策略。

### 3.3 问题三 (DVD 的购买与分配)

表 4: 前30位会员获得的 DVD (贪婪算法结果)

会员	DVD1~3			C8	15	71	99	C16	97	6	84	C24	41	76	37
C1	8	98	82	C9	53	78	100	C17	47	51	67	C25	9	69	81
C2	6	44	42	C10	55	60	85	C18	41	60	78	C26	22	68	95
C3	50	80	4	C11	19	59	63	C19	86	66	67	C27	22	58	42
C4	7	18	41	C12	2	7	31	C20	45	61	89	C28	8	34	57
C5	11	66	68	C13	21	78	96	C21	45	53	2	C29	30	44	55
C6	19	53	16	C14	23	52	42	C22	38	55	57	C30	37	62	1
C7	8	26	81	C15	13	85	88	C23	29	81	95				

### 3.3.1 模型的准备

1) 由第一问结果可知, 新光盘最小购买量与需求量成正比关系。为满足客户需要, 使得一个月内95%的会员得到他们想看的光盘, 网站经营人员应考虑按每种光盘需求量的一定比例购买光盘。设最小购买量与需求量的比例系数为  $\eta$ ,  $\eta > 0$ 。

2) 只要会员在申报中选择了某光盘, 就认为该光盘是该会员所需要的。统计题目订单中每列非零元素的个数, 得到预订该 DVD 的会员数目, 认为它较客观地反映了会员对该 DVD 的需求量。记结果为  $D = \{d_1, \dots, d_{100}\}$ ,  $d_j$  表示第  $j$  种光盘的需求量。光盘的最小购买量  $n_j$  应与  $d_j$  呈正比:  $\frac{n_j}{d_j} = \eta$  为定值。

3) 采取3.2.3中贪婪算法作为分配策略。

4) 假设网站在月初、月中两次集中处理订单。月初时网站按照订单对所有会员分配一次光盘。月中时, 认为 A 类会员对已经看过的 DVD 满意度变为0, 得到新的虚拟满意度矩阵。按此虚拟满意度矩阵, 将 A 类会员归还的 DVD 进行重新分配。

5) 某名会员是否满意取决于在该月中所有获得的光盘都是他们希望看到的。具体的说, 当且仅当 A 类会员获得6张满意的盘, B 类会员获得3张满意的光盘, 才认为该会员满意。

### 3.3.2 模型的建立

沿用3.1.1的思想, 具体每名会员属于哪一类事先无法预知, 因此应建立具有统计意义的模型。如果购买和分配方案使得在99%的置信度下保证一个月内至少95%会员满意, 则认为满足约束条件。设  $T(\eta)$  表示以比例系数  $\eta$  购买 DVD, 按照贪婪策略进行两次分配后使95%以上的会员满意的事件, 建立模型如下

$$\min \eta \quad s.t. \quad g(\eta) = P(T(\eta)) \geq 0.99.$$

显然,  $g(\eta)$  是单增函数, 通过购买更多的 DVD 可以使满足95%会员的概率变大。采用计算机搜索的方法求解, 算法如下:

Step1: 给定  $\eta$  的一个较小的初值, 如令  $\eta = 0.2$ ;

(2~4步检测约束条件是否满足)

Step2: 令  $s = 0$ , 作为计数变量;

Step3: 让计算机随机产生600个人作为这个月内潜在的 A 类会员;

Step4: 按照3.2.3中贪婪算法计算月初的分配方案。统计 B 类会员满意的人数;

Step5: 月中收回 A 类会员的 DVD, 并继续按照贪婪方案再次分配 DVD。统计2次中均满意的 A 类会员的人数;

Step6: 根据 Step4、Step5 中的统计结果计算总的满意人数, 并判断满意人数是否超过会员总数的95% (即  $1000 \times 95\% = 950$  人)。若是则计  $s = s + 1$ , 否则  $s$  不变;

Step7: 重复 Step3~Step6 共1000次。判断是否有  $s \geq 990$ 。若是, 认为约束条件可以满足, 进入 Step8; 反之令  $\eta = \eta + 0.01$ , 回到 Step2;

Step8: 记下最终的  $\eta$  值。

按上述算法运用 Matlab 语言编程, 解得  $\eta^* = 0.32$ , 最小购买量见表5 (表略)。

购买 DVD 的总数量: 2983张; DVD 分配方案: 同3.2.3贪婪算法。

### 3.4 问题四 (模型的扩展)

结合实际问题, 模型的扩展可从以下几个方面展开:

- 1) 网站对顾客的消费习惯作市场调查, 预测在未来一段时间内会员归还的 DVD 数目;
- 2) 建立一套订单的排队等候系统以及集中处理系统, 缩短订单处理的周期;
- 3) 网站在经营中既要保证当期的收益以维持生存, 又要兼顾潜在收益以求得长远发展。

基于以上3个假设, 我们就网站决定新增 DVD 的购买量的问题建立了动态随机模型。

补充符号说明:

$i$  考察的阶段数, 这里取一周, 即每周新购买一批 DVD;

$x_i$  第  $i$  期购买 DVD 的数目, 模型中的决策变量;

$z_i$  第  $i$  期库存 DVD 的数目, 模型中的状态变量;

$y_i$  第  $i$  期会员归还的 DVD 数目, 可根据历史数据得到统计规律, 确定分布函数;

$w_i$  第  $i$  期派发的 DVD 数目, 与会员对 DVD 的需求和库存量有关;

$u_i(x_i, z_i)$  第  $i$  期的效益, 效益应综合考虑函数当前经济效益 (这里仅用购买 DVD 的成本代替) 和潜在经济效益 (满意度造成的);

$\rho$  将未来的效益折算到当期的贴现因子, 通常取为利息率。

根据经济学的原理, 商家总是最大化期望效益<sup>[3]</sup>, 所以对效用取期望作为目标函数。另外为商家会受到资金等方面的客观约束。据此, 建立带有贴现率的模型如下:

$$\begin{aligned} \max U &= E \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+\rho)^k} u_k(x_k, z_k) \right] \\ \text{s.t. } &\begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

库存数量  $z_i$  满足随机过程<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} z_0 = z & (z \geq 0 \text{ 为给定的自然数}) \\ z_{i+1} = z_i + x_i + y_i - w_i & (i \geq 0). \end{cases}$$

上式中  $z_0$  表示系统初始状态, 递推关系  $z_{i+1} = z_i + x_i + y_i - w_i$  表示: 下一期库存 = 当期库存 + 当期购买量 + 会员归还 DVD 数量 - 当期派发 DVD 数量。

模型的求解建议: 对于两期情形可采用拉格朗日法, 对于多期情形应采用变分法及动态规划方法求解。

由于该模型考虑了现实中的诸多因素, 因此可以更精确的估计当期购买量对未来的影响, 从而更有利于网站对 DVD 的购买量进行决策。当然, 由于随机因素的加入, 模型的求解变得更加复杂, 而且对于某些情形不一定能求得解析解, 可以考虑求近似的数值解。

**参考文献:**

- [1] 张志涌. 精通Matlab 6.5版[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003
- [2] 刘承平. 数学建模方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [3] David Romer. Advanced Macroeconomics (2nd edition)[M]. Columbus, Ohio: McGraw-Hill, 2000
- [4] Sheldon M. Ross. Stochastic Processes (2nd Edition)[M]. New York: John Wiley & Sons, 1995
- [5] 李贤平. 概率论基础(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997

## Online DVD Rental Business

FAN Hao, XUE Shi-kun, ZHAN Dong-yuan

Advisor: Wuhan University Instructor Group

( Wuhan University, Wuhan 430072 )

**Abstract:** In this article, we set up a series of mathematical models for DVD online rental service. We assume that customers should submit their orders at the beginning of each month; customers who rent DVDs only once a month should give them back at the end of the month, while those who rent DVDs twice a month should return them at mid-month and place new orders for the next half month. For Problem 1, by putting forward and applying a random simulation model, we discover that the minimum purchasing quantities are in direct ratio to the required quantities among all kinds of DVDs. For Problem 2, we convert the priority of customers' preference for DVDs into satisfaction matrix, develop a 0-1 programming model for the assignment of DVDs, and work out the exact maximum happiness quotient and corresponding scheme of assignment by Lingo. Moreover, we design a greedy algorithm to deal with the problem efficiently and satisfactorily. As to Problem 3, we take advantage of the conclusions of the former two problems. We decide an appropriately small number of DVDs at first. Then, by using the greedy algorithm to assign DVDs, and by keeping the purchasing quantities in proportion to the required quantities among all kinds of DVDs, we increase the purchasing quantities step by step until 95% customers can be satisfied within one month. Accordingly, we obtain the minimum purchasing quantities. Finally, based on economic theory, we put forward a more realistic method to forecast the demand of customers dynamically and determine the corresponding purchasing quantities.

**Keywords:** binomial distribution; 0-1 integer programming; greedy algorithm; random simulation