第四节　Fourier级数

- 周期函数与三角级数
- 三角函数系的正交性与Fourier级数
- 周期函数的Fourier展开
- 定义在[0, l]上的函数的Fourier展开
- *Fourier的复数形式

作业: Page332

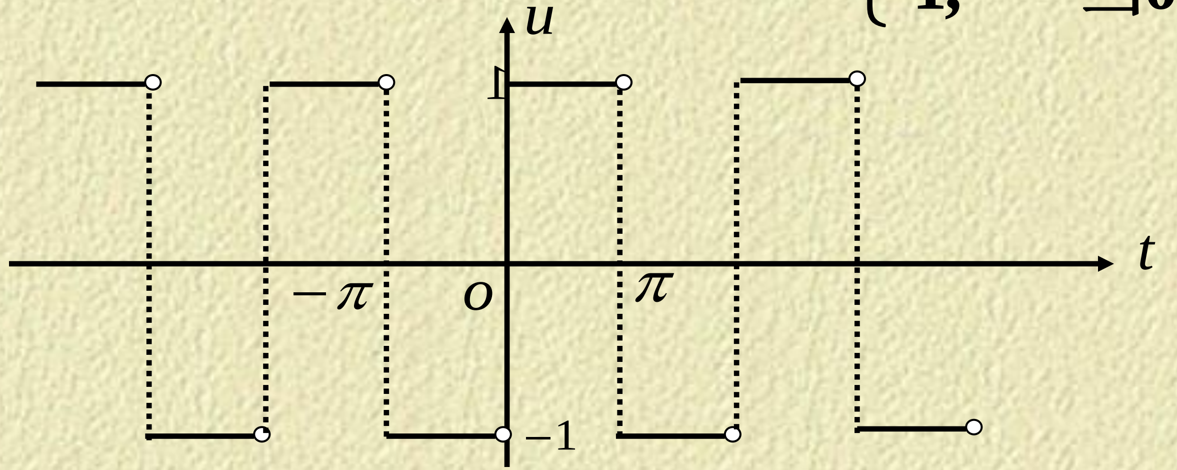
4, 5(单号), 6(单号),

7(单号), 8, 9

第一部分　周期函数与三角级数

一、问题的提出

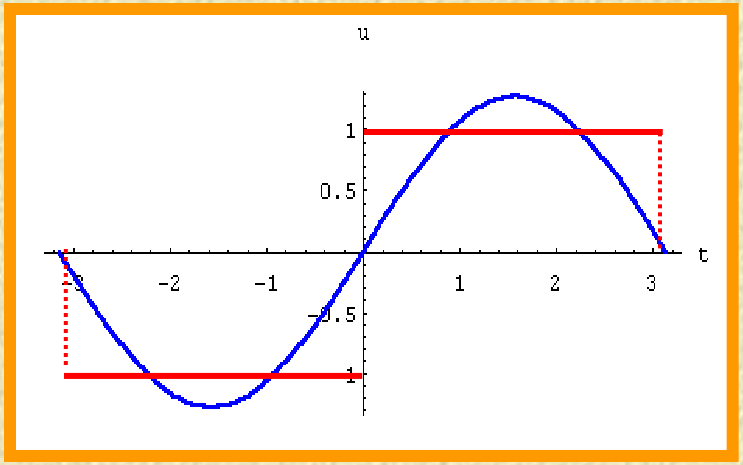
非正弦周期函数:矩形波 $u(t)=\begin{cases}-1, & 当-\pi\le t<0\\ 1, & 当 0\le t<\pi\end{cases}$

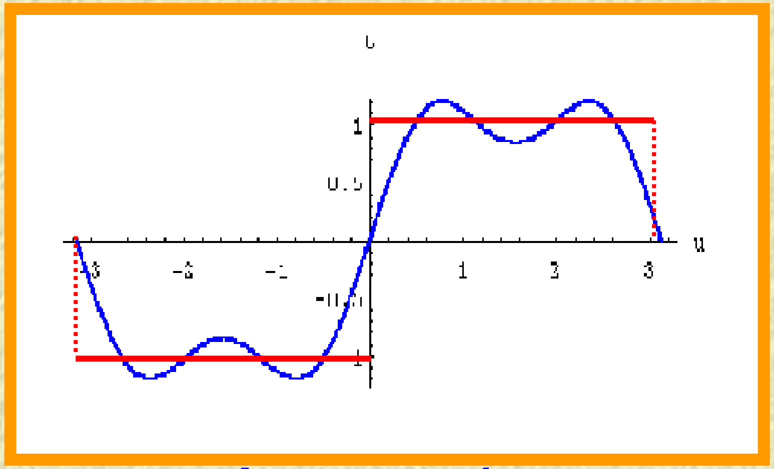


不同频率正弦波逐个叠加

$$\frac{\pi}{4}\sin t,\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$

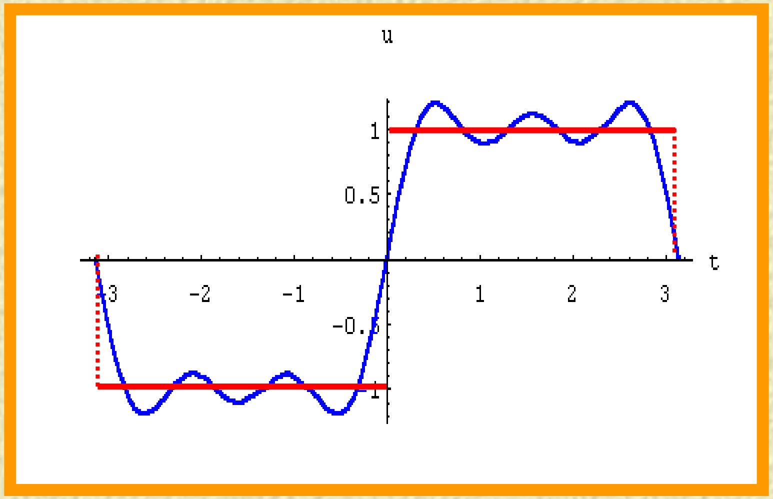
$$u = \frac{4}{\pi}\sin t$$

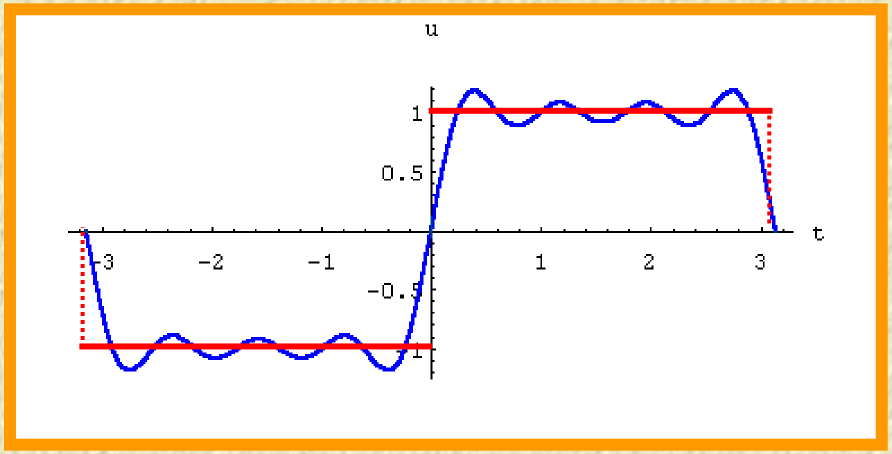




$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t)$$

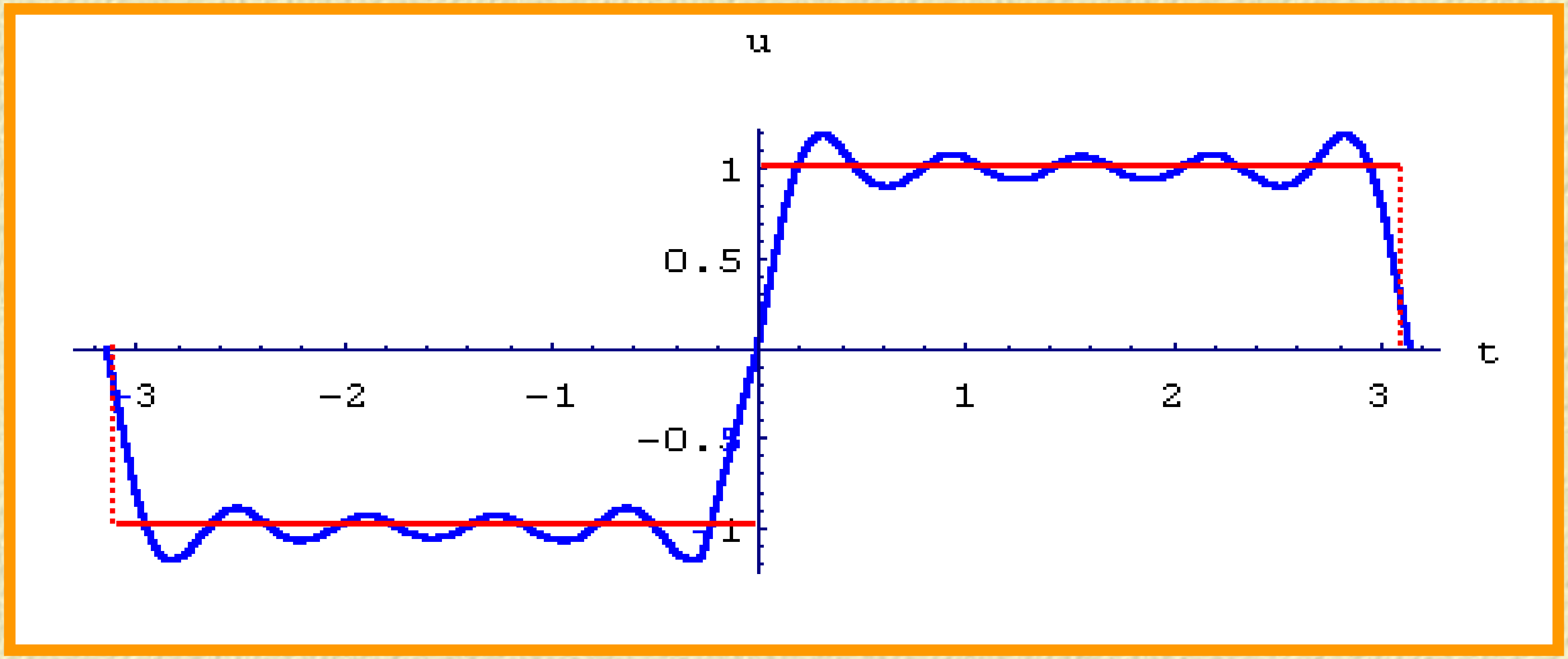
$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t)$$





$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t)$$

$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$



$$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

上页 下页 返回

二、 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$ 谐波分析

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t)$$

令 $\frac{a_0}{2}=A_0,\quad a_n=A_n\sin\varphi_n,\quad b_n=A_n\cos\varphi_n,\quad \omega t=x,$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$ 三角级数

两个主要问题:

(1) 若函数$f(x)$可展成三角级数,系数如何确定?

(2) 在什么条件下, 三角级数收敛于函数$f(x)$?

第二部分 三角函数系的正交性与 Fourier级数

一. 三角函数系及其特征

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

特征: 任意两个不同函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分等于零,

而任意一个函数的平方在$[-\pi, \pi]$上的积分不等于0.

即:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \ (\text{其中} m, n = 1, 2, \cdots)$$

•积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

定理 1. 组成三角级数的函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0 .

证：$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x=0\ (k\neq n)$$

同理可证：$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k\neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于 0 . 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi$$

$$\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}$$

返回

定义1：（函数正交）

一般地, 如果函数 f 和 g 在区间$[a,b]$上可积, 且

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

则称函数 f 和 g 在区间$[a,b]$上正交.

定义2：（正交函数系）

设 $\{f_n(x)\}$ 是区间$[a,b]$上的一个函数列，若

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)\mathrm{d}x = 0,\ (m \neq n) \qquad \int_a^b \left(f_n(x)\right)^2 \mathrm{d}x \neq 0$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 是区间$[a, b]$上的正交函数系.

结论: 三角函数系在任意长度为 2π 的区间上都是正交函数系. （正交三角函数系）

二. 函数展开成Fourier级数

问题: 1.若能展开, a_i, b_i 是什么? 2.展开的条件是什么?

1. Fourier系数

若 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$能展开为三角级数, 且级数在$[-\pi,\pi]$可以逐项积分

即 假设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

(1) 求a_0.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

$$\therefore\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

(2) 求a_n.

$$f(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx\cos nx+b_k\sin kx\cos nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=a_n\pi,$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

(3) 求b_n.

$$f(x)\cdot\sin nx=\frac{a_0}{2}\cdot\sin nx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx\cdot\sin nx+b_k\sin kx\cdot\sin nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx=b_n\pi,$$

$$\therefore\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

Fourier系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

或

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0 f(x)\sin nx\,dx, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

因为:三角函数系在任意长度为 2π 的区间上都是正交函数系.（正交三角函数系）

Fourier级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

问题: $f(x)$ 条件? $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

第三部分 周期函数的 Fourier展开

狄利克雷(Dirichlet)定理

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内分段单调, 而且除有限个第一类间断点外连续, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 内收敛而且其和函数情形如下:

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时,

收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

(3) 当 x 为端点 $x=\pm\pi$ 时,

收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

说明: (1)尽管在上述定理中, 函数的Fourier级数并非在一个周期内处处收敛于函数本身,为方便起见, 人们常将上述三种收敛的情形说成函数的Fourier级数在一个周期内收敛于函数f,或者说函数被展开为Fourier级数.

(2) 函数展开成Fourier级数的条件比展开成幂级数的条件弱得多.

(3) 对于非周期函数,如果函数 $f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义,并且满足Dirichlet充分条件, 也可展开成Fourier级数.

作法: 将$f(x)$作周期$T=2\pi$延拓为$F(x)$. 即:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi]; \\ f(x-2k\pi), & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi],k\in Z,k\neq 0. \end{cases}$$

此时,Fourier级数也称为 f 在$(-\infty,+\infty)$上的Fourier展开式

上页 下页 返回

傅里叶 (1768 – 1830)

法国数学家. 他的著作《热的解析理论》(1822) 是数学史上一部经典性文献, 书中系统的运用了三角级数和三角积分, 他的学生将它们命名为傅里叶级数和傅里叶积分. 他深信数学是解决实际问题最卓越的工具. 以后以傅里叶著作为基础发展起来的傅里叶分析对近代数学以及物理和工程技术的发展都产生了深远的影响.

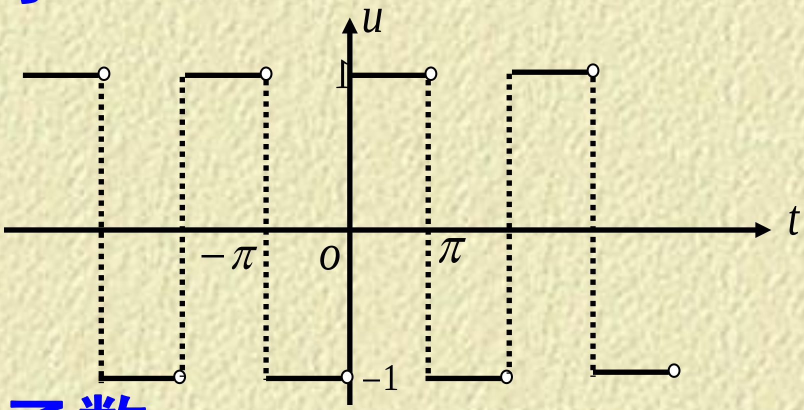
上页 下页 返回

狄利克雷 (18 05 – 1859)

德国数学家. 对数论, 数学分析和数学物理有突出的贡献, 是解析数论的创始人之一, 他是最早提倡严格化方法的数学家. 1829年他得到了给定函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛的第一个充分条件; 证明了改变绝对收敛级数中项的顺序不影响级数的和, 并举例说明条件收敛级数不具有这样的性质. 他的主要论文都收在《狄利克雷论文集 (1889—1897)中.

例1 已知矩形波函数的周期为 2π

在 $[-\pi,\pi)$ 上的定义为:



$$u(t)=\begin{cases}-1, & 当 -\pi\le t<0\\ 1, & 当 0\le t<\pi\end{cases}$$

求该函数的Fourier级数及和函数.

解 所给函数满足Dirichlet充分条件.

在点 $t=k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续

收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$,

当 $t\neq k\pi$ 时，收敛于 $u(t)$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nt\,dt=0$$

$(n=0,1,2,\cdots)$

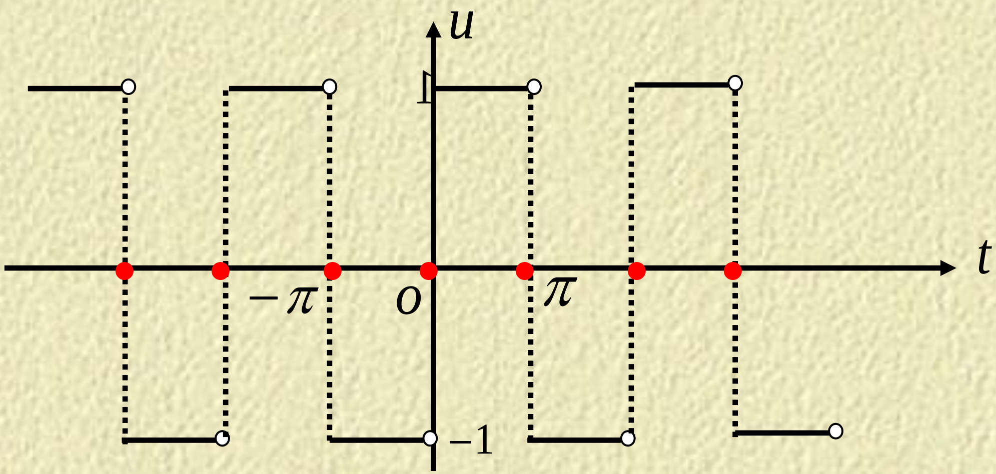
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin nt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt dt$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, k = 1,2,\cdots \\ 0, & n = 2k, k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

所以,Fourier 级数为 $\frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \cdots)$

和函数为 $s(t) = \begin{cases} u(t), t \in R, \text{且} t \neq k\pi, k \in Z \\ 0, \quad t = k\pi, k \in Z \end{cases}$

和函数图象为:



均方误差，均方逼近:

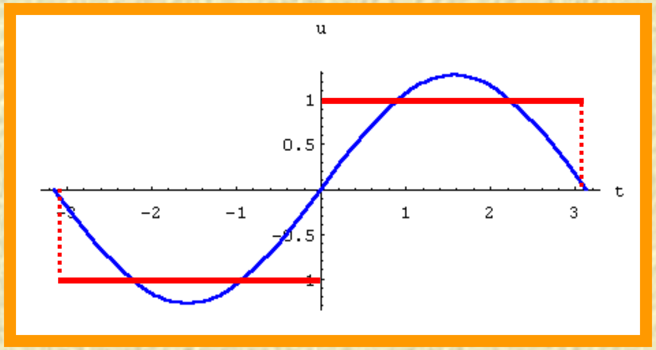
$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left[u(t)\text{-}S_n(t)\right]^2 dt}$$

Fourier级数是最佳均方逼近

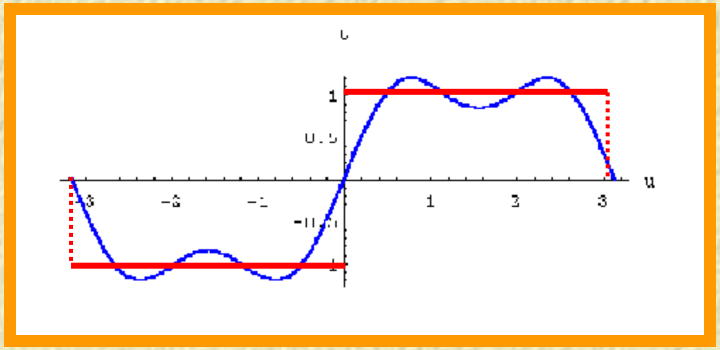
上页 下页 返回

在一个周期内各次近似图像为:

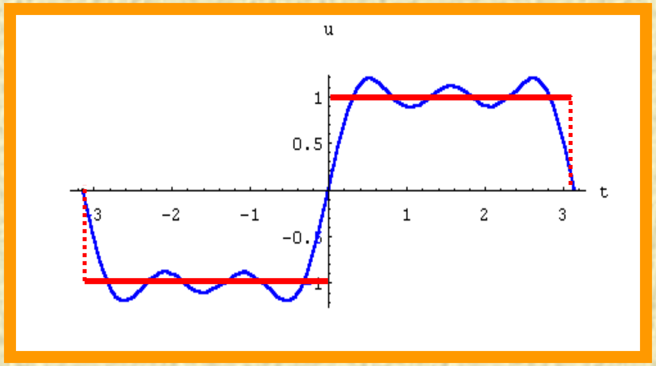
$$u_1(t)=\frac{4}{\pi}\sin t$$



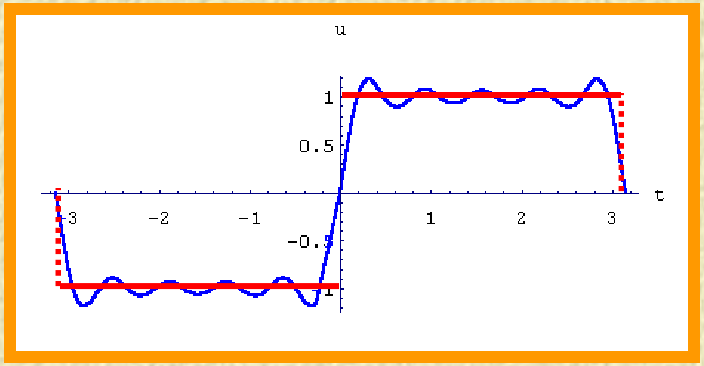
$$u_2(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t)$$



$$u_3(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t)$$



$$u_5(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$



从而 $$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

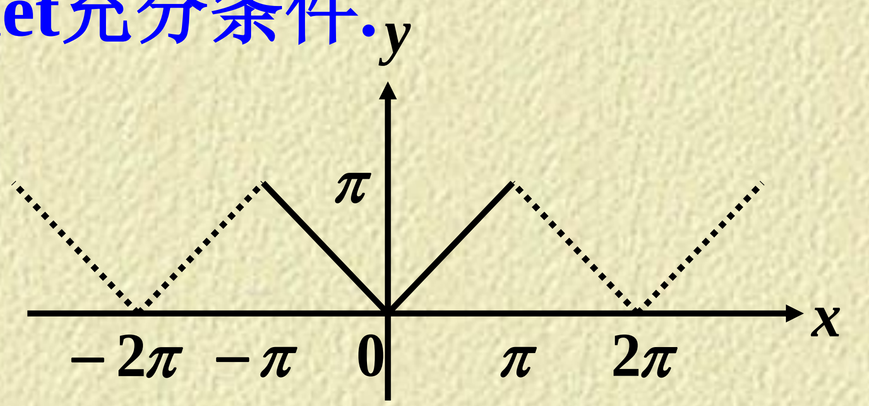
$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

上页 下页 返回

例2

将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为 Fourier 级数.

解　所给函数满足Dirichlet充分条件.



拓广的周期函数的Fourier级数展开式在 $[-\pi,\pi]$ 收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$ •奇函数

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=0,$$

上页　下页　返回

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1, k = 1,2,\cdots \\ 0, & n = 2k, k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

所以, 由Dirichlet定理得:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

上页 下页 返回

应用:利用Fourier展开式求级数的和

$$\because \quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,$$

当$x=0$时, $f(0)=0$, 从而 $\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$

$$\text{设}\ \sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\left(=\frac{\pi^2}{8}\right)$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots,$$

$$\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

$$\because 4\sigma_2=\sigma=\sigma_1+\sigma_2,\ \therefore \sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24},$$

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sigma_3=\sigma_1-\sigma_2=\frac{\pi^2}{12}.$$

上页 下页 返回

例3 将下列函数 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数：

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi\le x<0 \\ 1, & 0\le x\le \pi \end{cases}.$$

解

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\pi}+\pi\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{(1+n^2)\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-n\left[1-(-1)^n\right]e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

上页 下页 返回

所以, 由Dirichlet定理得:

当 $-\pi < x < \pi$ 时,

$$f(x) = \frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}]\cos nx$$

$$+\frac{1}{\pi}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\left[1-(-1)^n\right]e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}]\sin nx$$

当 $x=\pm\pi$ 时, $f(x)$ 的Fourier级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

正弦级数和余弦级数

周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$，其傅里叶级数为**正弦级数**，它的傅里叶系数为

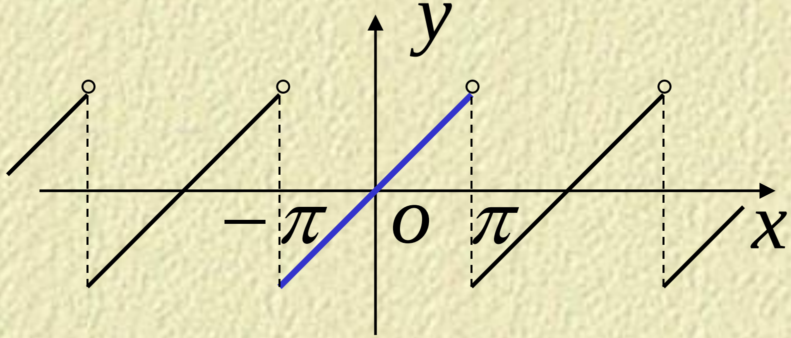
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$，其傅里叶级数为**余弦级数**，它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，将$f(x)$展成傅里叶级数.

解: 若不计$x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则$f(x)$是周期为 2π 的奇函数, 因此



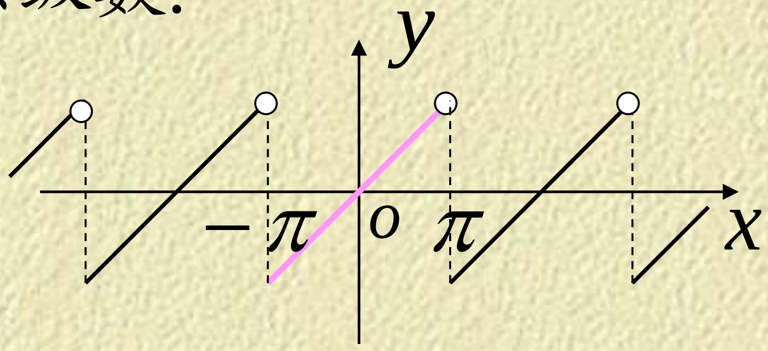
$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:



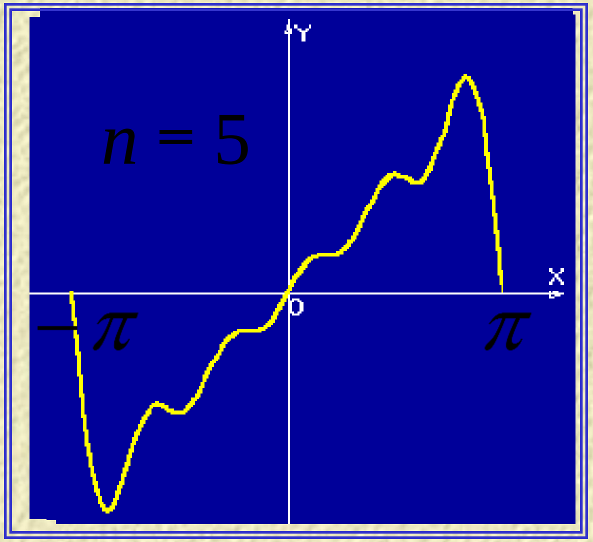
$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq(2k+1)\pi,\ k=0,\pm 1,\cdots)$$

在 $[-\pi,\pi)$ 上级数的部分和

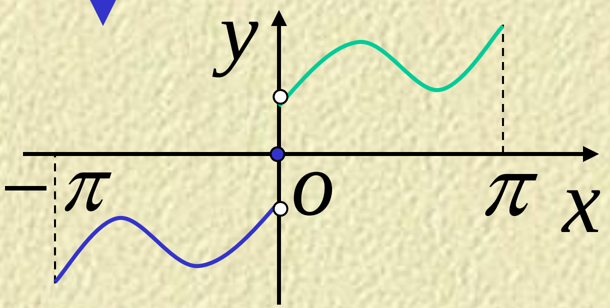
逼近 $f(x)$ 的情况见右图.



上页 下页 返回

[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in[0,\pi]$ 偶延拓

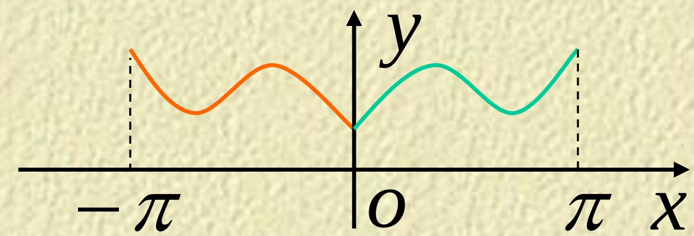


$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成

正弦级数



$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成

余弦级数

上页 下页 返回

例. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数.

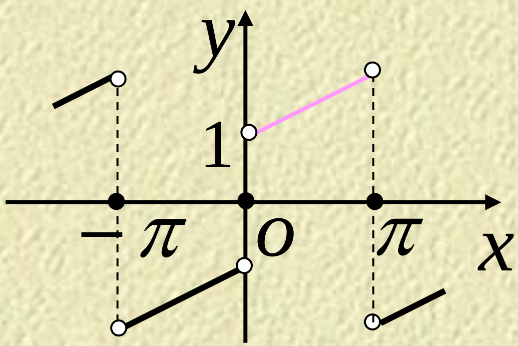
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

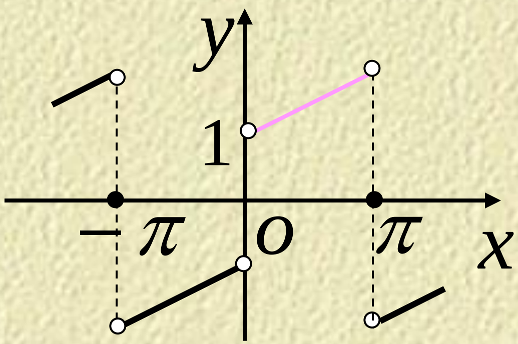
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad(k=1,2,\cdots)$$



$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



因此得

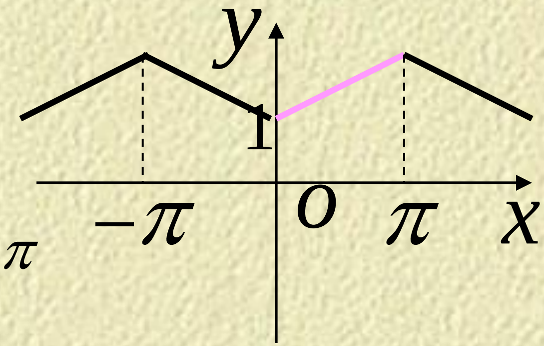
$$x+1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

注意: 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0, 与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{\pi} = \pi+2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$



$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

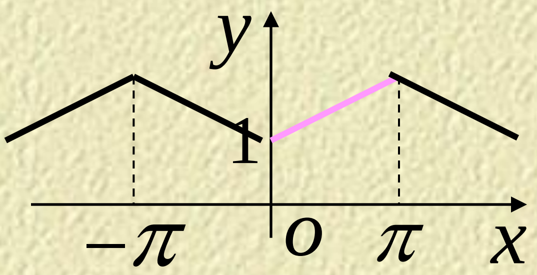
上页 下页 返回

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

上页 下页 返回

思考题 若函数$\varphi(-x)=\psi(x)$，问：$\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数a_n、b_n与α_n、β_n $(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系？

解:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos(-nt)d(-t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx=\alpha_n$$

$(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin(-nt)d(-t)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\sin nx dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx=-\beta_n$$

$(n=1,2,\cdots)$

所以 $a_n=\alpha_n$， $b_n=-\beta_n$.

上页 下页 返回