第七章 无穷级数 infinite Series

第一节 常数项级数

Series with constant terms

- 常数项级数的概念与性质
- 正项级数的审敛准则
- 变号级数的审敛准则
- 小结

作业：Page286

A. 3,6,7,8,12(双号),14, 15, 16,18

B.4

第二部分 正项级数的审敛准则

Convergence tests for series of positive terms

一、正项级数及其审敛法

1. 定义： 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数.

正项级数特征： $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$

即：部分和数列$\{s_n\}$为单调增数列.

2. 正项级数收敛的充要条件：

定理1.2

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列s_n有上界.

比较准则 1

定理1.3 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，且∃N, n>N 时

$u_n \le v_n\ (n=1,2,\cdots)$，（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

证明 (1)设$\sigma_n=\sum_{n=1}^{n}v_i$ $\because u_n \le v_n$,

$$\therefore s_n = u_1+u_2+\cdots+u_n \le v_1+v_2+\cdots+v_n = \sigma_n,$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则 σ_n有上界，从而 s_n 有上界

即部分和数列有界 $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(1)(2)互为逆否命题

Theorem 4.1.3. (**The first comparison test**) *Let* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *be two series of positive terms, and* $\exists N \in \mathbf{N}_+$ *such that* $a_n \leqslant b_n$ *for all* $n > N$.

(1) If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converges then* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converges*;

(2) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverges then* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverges*.

Proof According to the property 2, there is no loss of generality in assuming $a_n \leqslant b_n$ for $n \in \mathbf{N}_+$, so that

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k = \bar{S}_n .$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, by theorem 4.1.2 we know that the sequence $\{\bar{S}_n\}$ is

比较准则 1

定理1.3 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，且∃N, n>N 时

$u_n \le v_n\,(n=1,2,\cdots)$，（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

推论1: 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 且$v_n \le ku_n\,(n \ge N)$,则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛.

推论2: 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散, 且$ku_n \le v_n\,(n \ge N)$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

比较审敛法的不便: 须有参考级数.

比较准则 1

定理1.3 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数， 且∃N, n>N 时

$u_n \le v_n\ (n=1,2,\cdots)$，（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散， 则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

例3 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

证明 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$,

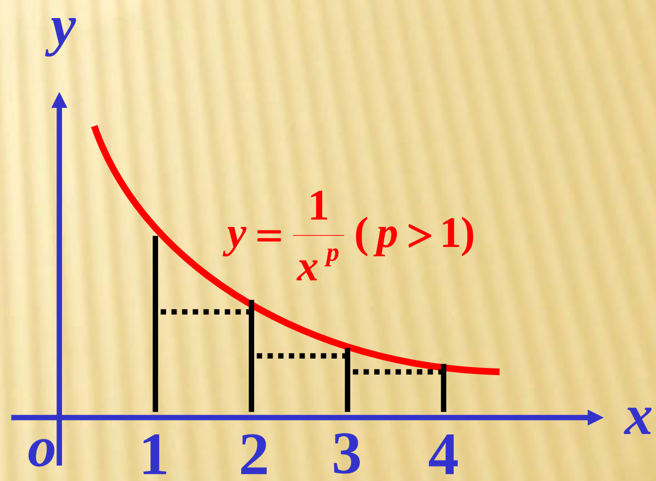
而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散, $\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

例4 讨论 P−级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \text{的收敛性.}(p>0)$$

解 设 $p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则$P-$级数发散.

设 $p>1$, 由图可知 $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$



$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^n=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

即s_n有上界，则$P-$级数收敛.

例4 讨论 P−级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \text{的收敛性.}(p>0)$$

结论：$P-$级数$\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时，发散}\end{cases}$

定理1.3 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，且∃N, n>N 时

$u_n\le v_n(n=1,2,\cdots)$，（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

比较准则 1

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

重要参考级数： 几何级数，P−级数，调和级数.

比较准则2　(比较准则1的极限形式)

定理1.4 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，$\forall n \in N_+, v_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \text{ (有限正数或} +\infty\text{)},$$

则 (1) 当 $\lambda > 0$ 时，二级数有相同的敛散性；

(2) 当 $\lambda = 0$时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 当 $\lambda = +\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

证明 (1) 由 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$ 取 $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0$, $\exists N$，当$n > N$时,

正项级数 $\dfrac{u_n}{v_n}$ (1)当 $\lambda > 0$ 时，二级数有相同的敛散性；

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lambda$ (2)当 $\lambda = 0$ 时，若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(有限正数/$+\infty$) (3)当 $\lambda = +\infty$ 时，若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明 (1) 由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lambda$ 取 $\varepsilon=\dfrac{\lambda}{2}>0$, $\exists N$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-\lambda\right|<\frac{\lambda}{2},\quad \lambda-\frac{\lambda}{2}<\frac{u_n}{v_n}<\lambda+\frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{\text{即 } 0<\frac{\lambda}{2}v_n<u_n<\frac{3\lambda}{2}v_n \quad (n>N)}$$ 由比较准则I, 得证.

(2) $u_n<\varepsilon v_n \quad (n>N)$ 由比较准则I, 得证.

(3) $u_n>Mv_n \quad (n>N)$ 由比较准则I, 得证.

正项级数 $\frac{u_n}{v_n}$ (1)当 $\lambda > 0$ 时，二级数有相同的敛散性；

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lambda$ (2)当 $\lambda = 0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(有限正数/$+\infty$) (3)当 $\lambda = +\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

推论： 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \lambda > 0$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \infty$) 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

如果有 $p > 1$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n$ 存在, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例5 判定下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\ ;\ (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}\ ;\ (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$, 故原级数发散.

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1$ $\quad\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛，故原级数收敛.

(3)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$x\in(-1,+\infty),\theta\in(0,1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$x\in(-1,+\infty),\theta\in(0,1)$$

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

由比较准则2知原级数收敛.

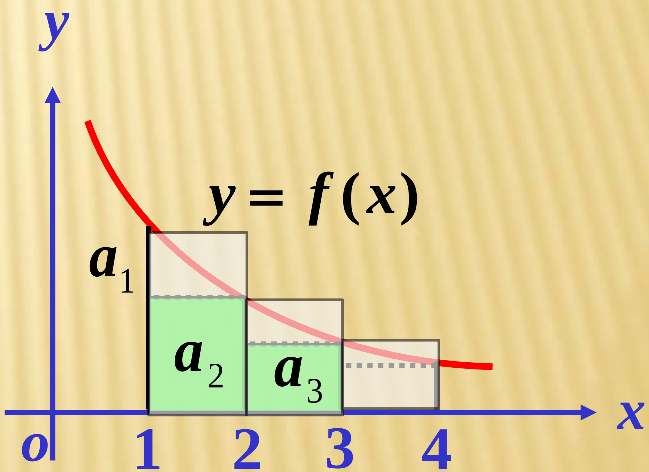
定理1.5
(积分准则)
The integral test

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数. 若存在一个单调减的非负连续函数 $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$,使得$f(n)=a_n$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

由图可知:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_{n\text{外包矩形}}=a_1+s_{(n-1)\text{内含矩形}}$$

$$a_{1\mathrm{w}}+a_{2\mathrm{w}}+a_{3\mathrm{w}}=a_{1w}++a_{2\mathrm{g}}+a_{3\mathrm{g}}$$



若$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛, 则$\{s_n\}$有上界,故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

若$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散, 则$\{S_n\}$无上界,故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散

积分准则

定理1.5 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数. 若存在一个单调减的非负连续函数 $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$, 使得 $f(n)=a_n$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

例6 讨论P-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解 令$f(x)=\dfrac{1}{x^p}, x\in[1,+\infty)$. $f(n)=u_n$, f非负连续单调减

可得: $\begin{cases} 当p>1时, & 级数收敛 \\ 当p\le 1时, & 级数发散 \end{cases}$

证明：p积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$

当$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散.

证 (1) $p=1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^{+\infty}=+\infty$,

(2) $p\ne 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$

因此当$p>1$时积分收敛，其值为$\frac{1}{p-1}$；

当$p\le 1$时积分发散.

2、单选

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-a\ln n}$收敛，则必有 （ ）.

(10分)

A $a > \dfrac{1}{\ln 3}$

B $a < \ln 3$

$a > \ln 3$

D $a \neq 1$

借助级数自身特点来判断敛散性

达朗贝尔 D’Alembert 准则：

定理1.6（检比法 the ratio test）

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，$\forall n \in N_+, u_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda\ (\text{有限或}+\infty)$$

则

$\lambda < 1$时级数收敛；

$\lambda > 1$（或$+\infty$）时级数发散；

$\lambda = 1$时失效.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\lambda\right|<\varepsilon$,

$$\boxed{\text{即 } \lambda-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\lambda+\varepsilon \quad (n>N)}$$

当 $\lambda<1$ 时, 取 $\varepsilon<1-\lambda$, 使 $\varepsilon+\lambda=r<1$,

$u_{N+2}<ru_{N+1}$, $u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1}$, $\cdots$,

$u_{N+m}<r^{m-1}u_{N+1}$, 而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{N+1}r^{m-1}$ 收敛,

$u_{N+m} < u_{N+1} r^{m-1}$，而级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{N+1} r^{m-1}$收敛,

性质 2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n$也收敛 $(k \ge 1)$. 且其逆亦真.

$\therefore \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{N}$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon \quad (n > N)$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,

当$\lambda > 1$时, 取$\varepsilon < \lambda - 1$, 使$\lambda - \varepsilon = r > 1$,

则$n > N$时， $u_{n+1} > r u_n > u_n$， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0.$

级数发散

以上介绍的关于正项级数的五个审敛准则都是充分条件，而对于某些正项级数，利用这些准则难于判定敛散性，此时，要想办法灵活运用性质、基本定理，再配合审敛准则。

达朗贝尔（1717～1783）是圣让勒隆教堂附近的一个弃婴，被一位玻璃匠收养，后来这个教堂的名字就成了他的教名。达朗贝尔在数学、力学和天文学等许多领域都作出了贡献，是法国著名物理学家、数学家和天文学家。一生研究了大量课题，完成了涉及多个科学领域的论文和专著，其中最著名的有八卷巨著《数学手册》、力学专著《动力学》、23卷的《文集》、《百科全书》的序言等等。他的很多研究成果记载于《宇宙体系的几个要点研究》中。1760年以后，达朗贝尔的研究成果不断涌现，声誉也不断提高，尤其以写论文快速而闻名。1762年，俄国沙皇邀请达朗贝尔担任太子监护，被他谢绝；1764年，普鲁士国王邀请他到王宫住了三个月，并邀请他担任普鲁士科学院院长，被他谢绝。1754年，他被提升为法国科学院的终身秘书。欧洲很多国家的科学院都聘请他担任国外院士。

定理1.6（达朗贝尔准则 检比法 the ratio test）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$（有限或$+\infty$）

则 $\lambda<1$ 时级数收敛；

$\lambda>1$（$\lambda=+\infty$）时级数发散； $\lambda=1$ 时失效.

达朗贝尔准则的**优点**：不必找参考级数.

两点注意事项:

1. 当 $\lambda=1$ 时比值审敛法失效；

例 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\lambda=1$.

2.达朗贝尔准则的条件只是正项级数收敛的充分条件.

2. 条件是充分的, 非必要条件.

例 $\because u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n,$

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛,

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = a_n,$ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{6}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \dfrac{3}{2}, \end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例7 判别下列级数的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n};\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.$$

解 (1) $\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\dfrac{1}{n+1}\to 0\quad (n\to+\infty),$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\dfrac{10^n}{n!}=\dfrac{n+1}{10}\to+\infty\ \ (n\to+\infty),$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

例7 判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

(3) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=1,$

比值审敛法失效，但 $\because \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2},$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较准则1可知:

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

借助级数自身特点来判断敛散性

柯西 Cauchy 准则（检根法 the root test）

定理1.7 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$（有限或 $+\infty$）

则：当 $\lambda<1$ 时，级数收敛；

$\lambda>1$（或 $\lambda=+\infty$）时，级数发散；

$\lambda=1$ 时失效.

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$，

$$\because \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to+\infty)$$ 故级数收敛.

例8 判断下列级数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{n}};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}(a>0)$$

提示：1)开n次根号，极限为0。故级数收敛

2）极限为a ,

a <1收敛,

a >1发散;

a=1时通项趋于1/e,不趋于0，故发散。

例7 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$的敛散性。

解 因$\frac{\pi}{4}<1$,故相邻两个自然数中最 多有一个位于长度为$\frac{\pi}{4}$的区间$(n\pi-\frac{\pi}{8},n\pi+\frac{\pi}{8})$内,从而有$|\sin(2n-1)|+|\sin 2n|>\sin\frac{\pi}{8}$,

于是 $\frac{|\sin(2n-1)|}{2n-1}+\frac{|\sin 2n|}{2n}>\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{2n}$,又因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{n}$发散,

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{|\sin(2n-1)|}{2n-1}+\frac{|\sin 2n|}{2n}\right]$发散,故去括号后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$发散.

性质 4 不改变收敛级数各项顺序，任意加括号后所成的新级数仍收敛，且其和不变.

逆否命题： 一个级数任意添加括号后得到的新级数发散，则原级数也发散

第三部分 变号级数的审敛准则

同号级数：正项级数，负项级数，

一、交错级数及其审敛法

Alternating series

定义：正、负项交替出现的级数称为**交错级数**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

莱布尼兹准则　如果交错级数满足条件：

（ⅰ）$u_n \geq u_{n+1}\ (n = 1,2,3,\cdots)$；（ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则级数收敛，且其和 $s \leq u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

莱布尼兹准则 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，（$u_n>0$）满足条件:

（ⅰ）$u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$;（ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0$,

$$\because s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

数列 s_{2n} 是单调增加的,

又 $s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$

数列 s_{2n} 是有界的,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s$,

$\therefore$ 级数收敛于和 s, 且 $s \leq u_1$.

莱布尼兹准则 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，（$u_n>0$）满足条件:

（ⅰ）$u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$;（ⅱ）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

$$\text{余项 } r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),$$

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

该级数显然满足leibniz准则中收敛的两个条件,

$$\therefore |r_n| \leq u_{n+1}.$$

该准则只是判断交错级数收敛的充分条件！

例9 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$的收敛性.

解 $\because \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$

故函数$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$单调递减, $\therefore u_n > u_{n+1}$,

又$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$

该级数显然满足leibniz准则,故收敛.

二、绝对收敛与条件收敛

定义：正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理（绝对收敛准则） 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证明 $$0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n| \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{收敛} \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|) \text{收敛},$$

$$\text{又} \because \sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{收敛}.$$

或由Cauchy收敛原理及绝对值不等式也可得证

但其逆命题不成立。

例：$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

该定理的作用：

任意项级数 → **正项级数**

absolutely convergent

定义：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**绝对收敛**；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**条件收敛**.

Conditionally convergent

例10 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

解 $\because \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，

故由绝对收敛准则知原级数绝对收敛.

例11 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ 的收敛性.

解 $\because \left|(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\right| = e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1 \sim \frac{1}{n}\ln 2,$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故原级数的绝对值级数发散（正项, 比较准则II）

但原级数是Leibniz型级数，从而原级数条件收敛。

三、绝对收敛级数的性质

定理 1.10(可交换性） commutativablity

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛,

则任意交换它的各项次序所得到的新级数(原级数的一个重排)也绝对收敛，并且其和不变。

定理1.11 (乘积的收敛性）convergence of product

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都绝对收敛,

它们的和分别为A与B，则它们各项相乘得到的所有可能的乘积项按任何次序排列所得到的级数(称为乘积级数）也绝对收敛，并且其和为AB。

注意：Cauchy product 乘积形式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

$$\text{(其中 } c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1} + \cdots + a_n\cdot b_0 \text{)}$$

柯西乘积

$$\begin{array}{ccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

定理1.11 (乘积的收敛性）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都绝对收敛,

它们的和分别为A与B，则它们各项相乘得到的所有可能的乘积项按任何次序排列所得到的级数(称为乘积级数）也绝对收敛，并且其和为AB。

当$|x|<1$时, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (|x|<1\text{时})$$

It is worthwhile to indicate that absolutely convergent series have some useful properties which are not possessed by conditionally convergent series.We mention them but their proofs will be omitted.

第四部分 小结

级数： 把无穷数列各项用加号连起来的式子

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

部分和、级数的和

<table>
<tr><td></td><td>正 项 级 数</td><td>任意项级数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">审敛法</td><td colspan="2">1. 若 $S_n \to S$,则级数收敛;
2. 当 $n \to \infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散;
3.按基本性质;
4.Cauchy收敛原理（充要条件）</td></tr>
<tr><td>5.比较准则I，II
6.检比法
7.检根法</td><td>4.绝对收敛准则
5.交错级数
(莱布尼兹准则)</td></tr>
</table>

正项级数审敛法流程

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用充要条件、必要条件

Cauchy收敛原理（充要条件）

必要条件 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足 $\downarrow$

检比法 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

检根法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow[\text{用它法判别}]{\rho=1}$ 不定 $\left\{ \begin{array}{l} \text{比较准则I,II} \\ \text{部分和极限} \\ \text{积分准则} \end{array} \right.$

$\rho < 1$ $\downarrow$ 收 敛

$\rho > 1$ $\downarrow$ 发 散

3. 任意项级数审敛法

$$\begin{cases} 若\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|收敛,称\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ 绝对收敛 \\ 若\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|发散,\ \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{u_n}\ 收敛,称\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ 条件收敛 \end{cases}$$

$\boxed{绝对收敛准则}$

Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow 则交错级数\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n 收敛$$

思考题1 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，且$a_n \le c_n$ $(n = 1,2,\cdots)$，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛?

思考题1 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且 $b_n \le a_n \le c_n \ (n=1,2,\cdots)$，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛？

思考题1 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$b_n \le a_n \le c_n$

$(n=1,2,\cdots)$，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛？

思考题2

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$收敛?

反之是否成立?（$u_n > 0$）

$p-$级数 $:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

3. 判别级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

不是 ***p***–级数

题目 设正项数列$\{a_n\}$单调减, 且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散, 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$的敛散性.