

第二章 一元函数微分学及其应用

第六节 Taylor定理 (2学时)

- 问题的提出
- P_n 和 R_n 的确定
- 泰勒(Taylor) 定理
- 应用

作业

习题2.5 2.(2)(4), 3.(2)(4), 5, 6, 7

一、问题的提出

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad [f(x) = f(x_0) + \alpha] \quad f(x) \approx f(x_0)$$

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad [f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)]$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 则有?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)}$$

$$= \frac{1}{2} f''(x_0) \quad \text{需 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 附近二阶可导? } f''(x_0) \text{ 定义!}$$

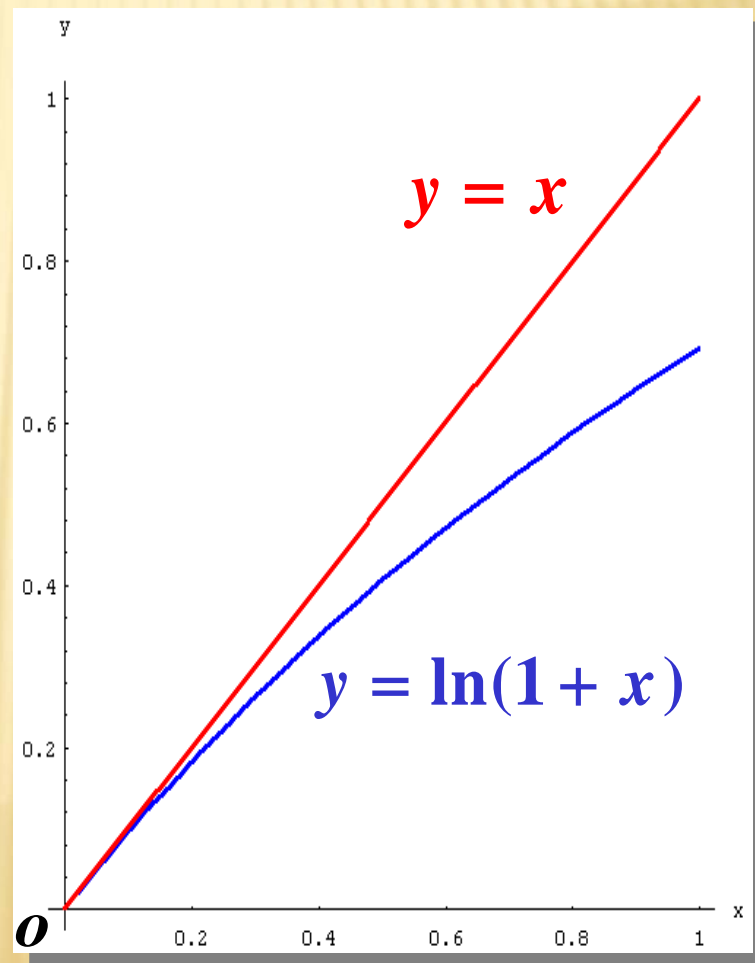
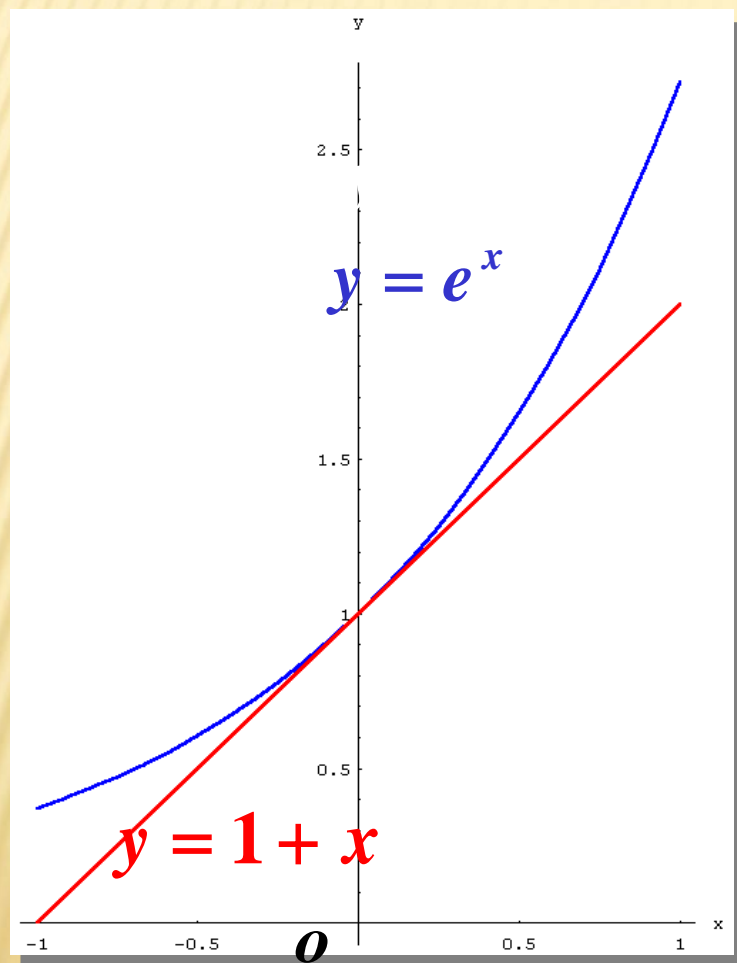
$$\therefore \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0) + \alpha$$

$$\therefore f(x) =$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

例如，当 $|x|$ 很小时， $e^x \approx 1 + x$ ， $\ln(1 + x) \approx x$

(如下图)



不足： 1、精确度不高； 2、误差不能估计。

问题： 寻找函数 $P(x)$, 使得 $f(x) \approx P(x)$

误差 $R(x) = f(x) - P(x)$ 可估计

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数, $P(x)$ 为 n 次多项式函数:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

二、 P_n 和 R_n 的确定

寻找函数 $P_n(x)$, 使得 $f(x) \approx P_n(x)$

分析:

近似程度越来越好

1. 若在 x_0 点相交

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

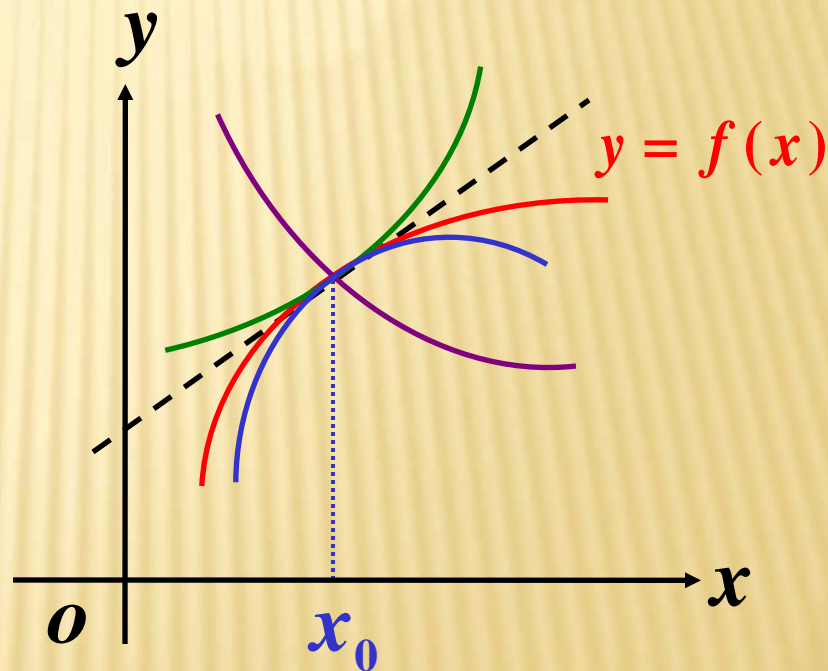
2. 若有相同的切线

$$P'_n(x_0) = f'(x_0)$$

3. 若弯曲方向相同

$$P''_n(x_0) = f''(x_0)$$

... ..



$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

假设 $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 1, 2, \cdots, n$

则 $a_0 = f(x_0), \quad 1 \cdot a_1 = f'(x_0), \quad 2! \cdot a_2 = f''(x_0)$
 $\cdots \quad \cdots, \quad n! \cdot a_n = f^{(n)}(x_0)$

得 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

代入 $P_n(x)$ 中得

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

三、泰勒(*Taylor*) 定理

定理 6.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式) 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可微, 则 $f(x)$ 可以表示为 $(x - x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个高阶无穷小量 $o(x - x_0)^n$ 之和. 即:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

该公式称为带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式.

令
$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

又记: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 只需证: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

$$\text{令 } P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

该多项式称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **Taylor 多项式**.

其系数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **Taylor 系数**.

记: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 只需证: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明:

$$R_n'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \cdots$$

$$R_n''(x) = f''(x) - f''(x_0) - f^{(3)}(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \cdots$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0) \quad \text{则易知:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_n'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_n''(x) = \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} R_n^{(n-1)}(x) = 0$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$$

连续使用n-1次L'Hospital法则, 得:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

又因为函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0$$

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ 即: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 称为 $f(x)$ 的Peano余项.

定理 6.2 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上 $(n+1)$ 阶可导, $x_0 \in I$

则 $\forall x \in I$, 至少存在一点 $\xi \in (x_0, x)$, 或 $\xi \in (x, x_0)$ 使

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

$f(x)$ 可以表示为关于 $(x - x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

该公式称为带 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

证明: 令: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

则: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

由假设, $R_n(x)$ 在区间 I 上具有直到 $(n+1)$ 阶导数, 且

$$R_n'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 - \dots$$

$$R_n''(x) = f''(x) - f''(x_0) - f^{(3)}(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 - \dots$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0) - \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

证明: **令:** $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

则: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

由假设, $R_n(x)$ 在区间 I 上具有直到 $(n+1)$ 阶导数, 且

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

函数 $R_n(x)$ 及 $(x - x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

(ξ_1 在 x_0 与 x 之间)

两函数 $R'_n(x)$ 及 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\begin{aligned} \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} &= \frac{R'_n(\xi_1)-R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0} \\ &= \frac{R''_n(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}) \end{aligned}$$

如此下去, 经过 $(n+1)$ 次后, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_n \text{ 之间, 也在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because P_n(x) \text{ 是 } n \text{ 次式, } P_n^{(n+1)}(x) = 0, \quad R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$\therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

(ξ 在 x_0 与 ξ_n 之间, 也在 x_0 与 x 之间)

则由上式得 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

称为Lagrange形式的余项.

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$\text{若 } I = (a, b) \quad \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

注意:

1. 当 $n = 0$ 时, Taylor 公式变成 Lagrange 公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

2. 取 $x_0 = 0$,

ξ 在 0 与 x 之间, 令 $\xi = \theta x \quad (0 < \theta < 1)$

则余项
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

这时, Taylor 公式称为 **Maclaurin** 公式.

麦克劳林 (Mac l a u r i n) 公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解 $\because f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x,$

$$\therefore f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$ 代入公式,得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

常用高阶导数公式：

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$(4) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$y = \ln(1+x),$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

常用函数的Maclaurin公式

指数函数:
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1).$$

正弦函数:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1).$$

余弦函数:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2}$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1).$$

对数函数:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$x \in (-1, +\infty), \theta \in (0, 1)$$

幂函数:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}} \quad x \in (-1, +\infty), \theta \in (0, 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}} \quad x \in (-1, +\infty), \theta \in (0, 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}$$

四、Taylor公式的应用 (1) 近似计算

例 2: 求 e 的近似值并估计误差.

解

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1).$$

$$\text{由公式可知 } e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{估计误差 } |R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{e^x}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

$$\text{取 } x = 1, \quad e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\text{其误差 } |R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \quad \text{取 } n=8, \quad |R_8| < \frac{3}{(8+1)!} < 10^{-5}$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828$$

(2) 求极限

例3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4}.$

例4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

例5 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} \right]$

(3) 证明不等式

已知： $f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$

证明： $f(x) > x, (x \neq 0).$

将 $\tan x$ 展开到 x^5 的项.

解 在 $x=0$ 附近, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta$$

其中 $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ 很小, 易见 $\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$.

$$\begin{aligned}\therefore \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) \frac{1}{1 - \Delta} \\&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)(1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)) \\&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) \\&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin^2 x} \ln \frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} \ln \frac{\sin x}{x}},$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right) \sim \frac{\sin x - x}{x} \sim \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3!} x^3 \right) = -\frac{1}{6} x^2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0, 1).$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{x^3}$

$$x \rightarrow 0, \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(tgx) - \sin(\sin x)}{tgx - \sin x} \cdot (tgx \text{ 即 } \tan x)$

分析： 虽是 $\frac{0}{0}$ 型, 但直接用洛必达法则或等价无穷小代替, 都不能求得结果.

从极限式构成形式, 可尝试借助微分中值定理.

$$\begin{aligned} \frac{tg(tgx) - \sin(\sin x)}{tgx - \sin x} &= \frac{tg(tgx) - tg(\sin x) + tg(\sin x) - \sin(\sin x)}{tgx - \sin x} \\ &= \frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} + \frac{tg(\sin x) - tg(\sin x) \cos(\sin x)}{tgx - tgx \cos x} \\ &= \frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} + \frac{tg(\sin x)}{tgx} \cdot \frac{1 - \cos(\sin x)}{1 - \cos x} \end{aligned}$$

由微分中值定理知 $\frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} = \sec^2 \theta_x, \theta_x \in (\sin x, tgx).$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 \theta_x = \lim_{\theta_x \rightarrow 0} \sec^2 \theta_x = 1.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(\sin x)}{tgx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{tgx} = 1$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(tgx) - \sin(\sin x)}{tgx - \sin x} \cdot (tgx \text{ 即 } \tan x)$

$$\frac{tg(tgx) - \sin(\sin x)}{tgx - \sin x} = \frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} + \frac{tg(\sin x)}{tgx} \cdot \frac{1 - \cos(\sin x)}{1 - \cos x}$$

由微分中值定理知 $\frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} = \sec^2 \theta_x, \theta_x \in (\sin x, tgx)$.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(tgx) - tg(\sin x)}{tgx - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 \theta_x = \lim_{\theta_x \rightarrow 0} \sec^2 \theta_x = 1.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(\sin x)}{tgx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{tgx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(tgx) - \sin(\sin x)}{tgx - \sin x} = 2.$$

写法二 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$

当 🐱 $\rightarrow 0$ 时

$$\sin \text{🐱} \sim \text{🐱}$$

$$\tan \text{🐱} \sim \text{🐱}$$

$$\ln(1 + \text{🐱}) \sim \text{🐱}$$

$$e^{\text{🐱}} - 1 \sim \text{🐱}$$

$$\arcsin \text{🐱} \sim \text{🐱}$$

$$\arctan \text{🐱} \sim \text{🐱}$$

$$\log_a(1 + \text{🐱}) \sim \frac{\text{🐱}}{\ln a}$$

$$a^{\text{🐱}} - 1 \sim \text{🐱} \ln a$$

$$1 - \cos \text{🐱} \sim \frac{1}{2} \text{🐱}^2$$

$$\sqrt[n]{1 + \text{🐱}} - 1 \sim \frac{\text{🐱}}{n}$$

$$\text{🐱} - \sin \text{🐱} \sim \frac{1}{6} \text{🐱}^3$$

$$\tan \text{🐱} - \text{🐱} \sim \frac{1}{3} \text{🐱}^3$$

$$(1 + \text{🐱})^\alpha - 1 \sim \alpha \text{🐱}$$

$$\arcsin \text{🐱} - \text{🐱} \sim \frac{1}{6} \text{🐱}^3$$

$$\text{🐱} - \arctan \text{🐱} \sim \frac{1}{3} \text{🐱}^3$$

$$\tan \text{🐱} - \sin \text{🐱} \sim \frac{1}{2} \text{🐱}^3$$

例 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且 $\max_{0 < x < 1} f(x) = 1, \min_{0 < x < 1} f(x) = 0$

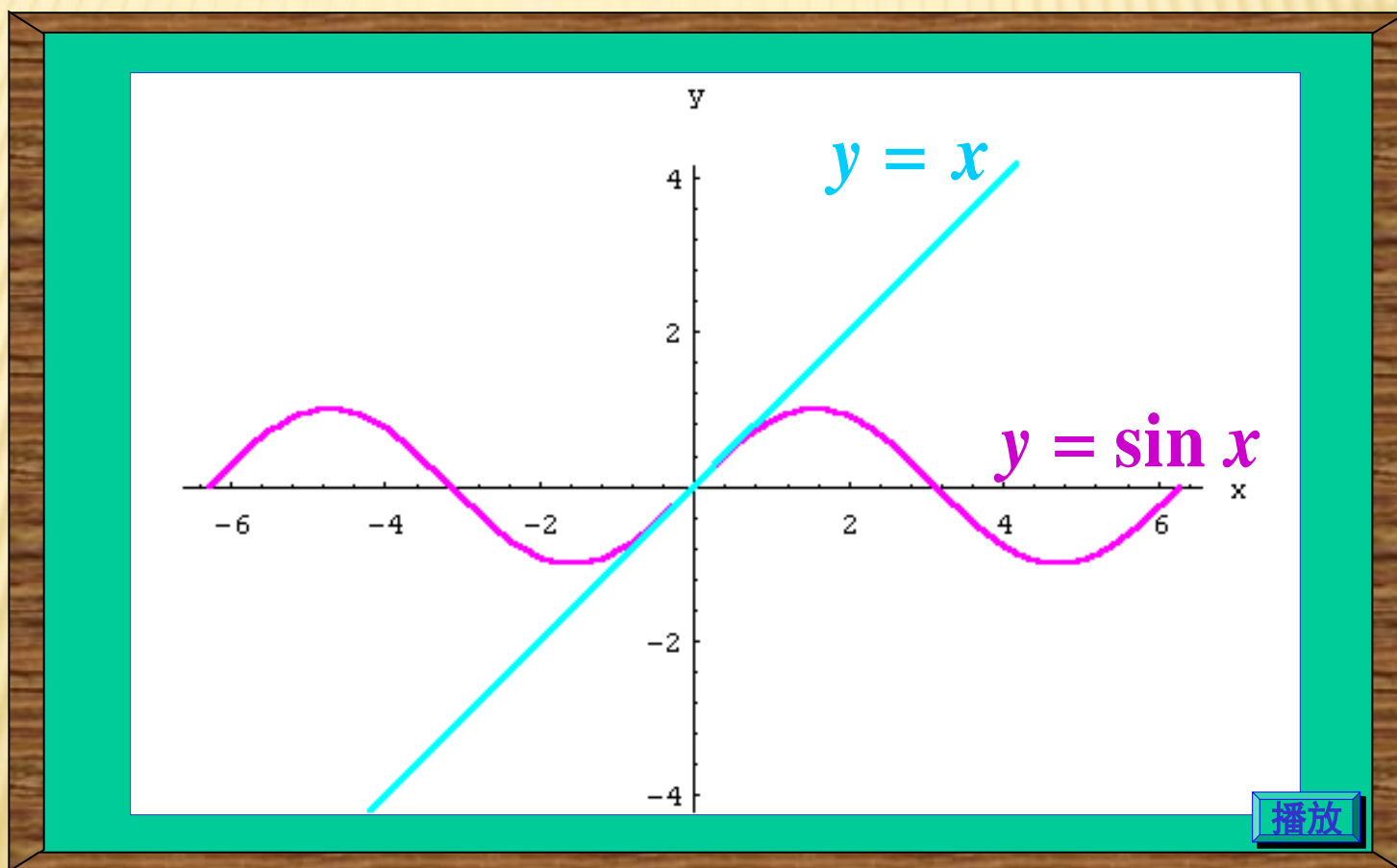
证明: 至少存在一点 $\zeta \in (0,1)$, 使 $f''(\zeta) > 2$

例 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一阶可导, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$

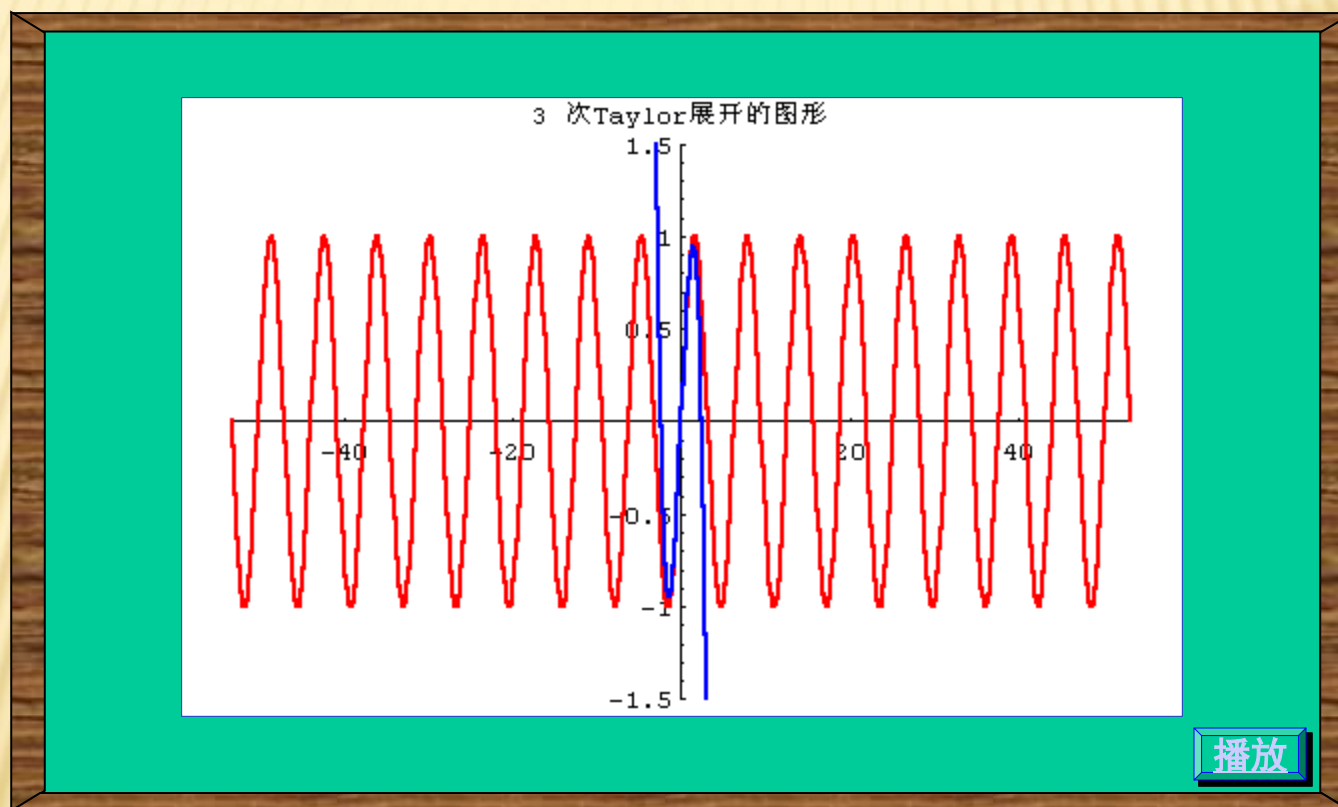
证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$

五、小结

1. Taylor 公式在近似计算中的应用；



2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



思考题

利用泰勒公式求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

练习题

- 一、 当 $x_0 = -1$ 时, 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的 n 阶泰勒公式 .
- 二、 求函数 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦格劳林公式 .
- 三、 验证 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值, 可产生的误差小于 0.01, 并求 \sqrt{e} 的近似值, 使误差小于 0.01 .
- 四、 应用三阶泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 的近似值, 并估计误差.
- 五、 利用泰勒公式求极限:

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$;

2、 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$.

练习题答案

$$\begin{aligned} \text{一、} \quad \frac{1}{x} &= -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] \\ &\quad + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{[-1 + \theta(x+1)]^{n+2}} \quad \theta \in (0,1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{二、} \quad xe^x &= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} (n+1 + \theta x) e^{\theta x} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

$$\text{三、} \quad \sqrt{e} \approx 1.645.$$

$$\text{四、} \quad \sqrt[3]{30} \approx 3.10724, |R_3| < 1.88 \times 10^{-5}.$$

$$\text{五、} \quad 1, -\frac{1}{12}. \qquad 2, \frac{1}{2}.$$