大学物理

张磊 （13072919527）
B824，Cyrus Tang Building

作业已经在3216，可按专业班级购买，每份4元

时间：周二1、2节和周四5、6节课间和课后

简 谐 振 动 总 结

分析振动系统 → 求动力学方程 → 求运动学方程

- 动力学特征

  $F = -kx$

- 运动学特征

  $a = -\omega^2 x$

- 能量特征

  $E = C$

- 求解圆频率

  ω

- 求解振动周期

  $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

- 求解振幅 A
- 求解初相 φ_0

- 初始条件
- 曲线法
- 旋转矢量法

§7.3 阻尼振动和受迫振动

一. 阻尼振动

1. 阻尼力 $f = -\mu\dot{x}$

2. 振动的微分方程(以弹簧振子为例)

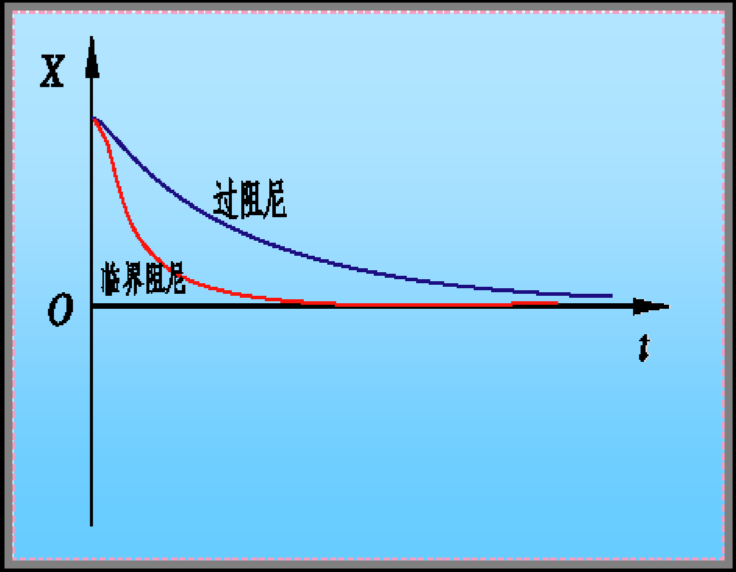
阻尼系数: $2n = \mu/m$

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3. 阻尼振动的振动方程、表达式和振动曲线

(1) 小阻尼 ($n^2 < \omega_0^2$)

$$x = Ae^{-nt}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}\,t + \varphi)$$



(2) 过阻尼和临界阻尼

临界阻尼: $n^2 = \omega_0^2$

过 阻 尼: $n^2 > \omega_0^2$

在过阻尼和临界阻尼时，无振动

二. 受迫振动（在外来策动力作用下的振动）

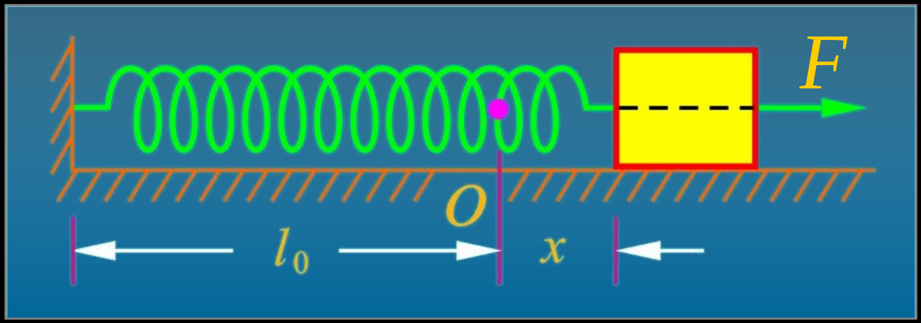
1. 系统受力

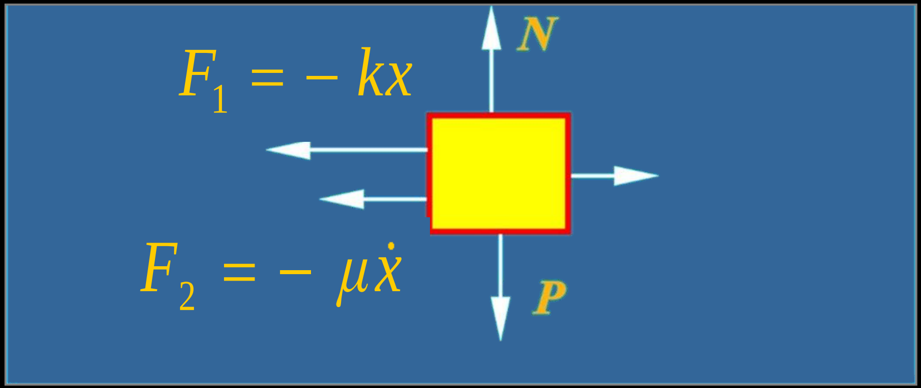
弹性力 $-kx$

阻尼力 $-\mu\dot{x}$

周期性策动力

$$F = F_0 \cos \omega t$$





2. 受迫振动的微分方程

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t}$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　$n = \dfrac{\mu}{2m}$　$f = \dfrac{F_0}{m}$

3. 受迫振动微分方程的稳态解为:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

可用旋转矢量叠加的方法求稳态解的振幅和初相

(将稳态解代入到振动微分方程中有):

$$\boxed{-\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi) - 2\omega n A\sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi) = f\cos\omega t}$$

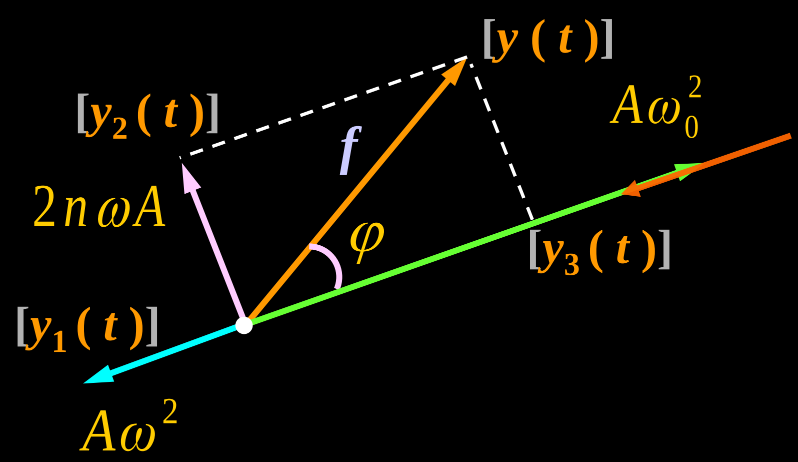
令(同时画出 t 时刻对应的矢量图):

$$y(t) = f\cos\omega t$$

$$y_1(t) = \omega^2 A\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$y_2(t) = 2\omega n A\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$y_3(t) = \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi)$$



因而: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$

根据 t 时刻的旋转矢量图，可得稳态时的振幅和初相：

$$A=\frac{f}{[(\omega^2-\omega_0^{\ 2})^2+4n^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\tan\varphi=\frac{2n\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

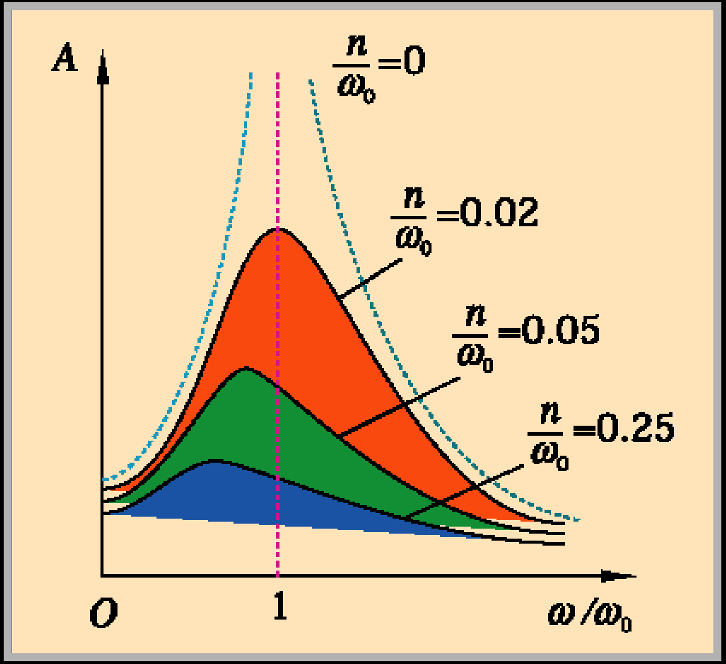
- **结论:** 受迫振动的振幅 A 及受迫振动与驱动力的相位差 φ 都与起始条件无关。

- **讨论**

（1）位移共振(振幅取极值)

共振频率： $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2n^2}$

共振振幅： $A_r=\dfrac{f}{2n\sqrt{\omega_0^2-n^2}}$

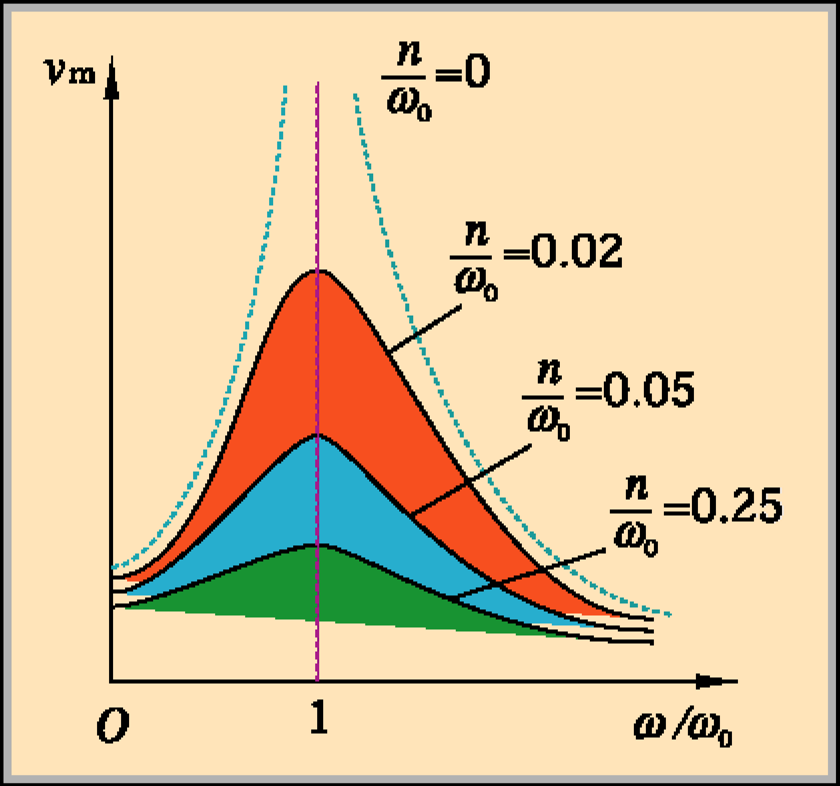


（振幅共振曲线）

(2) 速度共振

(速度振幅ωA取极值)

$$v_m = \frac{f\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega^2}}$$



(速度共振曲线)

共振频率： $\omega = \omega_0$

共振速度振幅： $v_m = \frac{f}{2n}$

$$\tan\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

速度共振时，速度与策动力同相，一周期内策动力总作正功，此时向系统输入的能量最大。

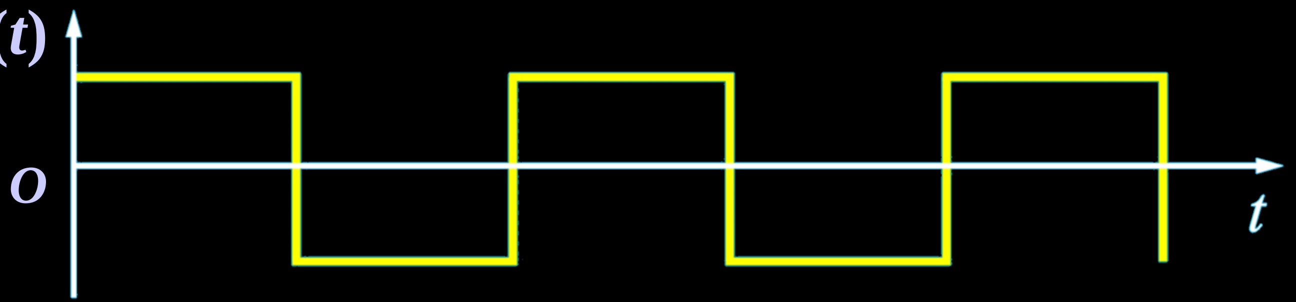
§7.4 非谐振动的傅氏分解 频谱

任何一个周期性复杂振动都可分解为一系列谐振动的叠加

例如:

方波:

(基频为ν_0)



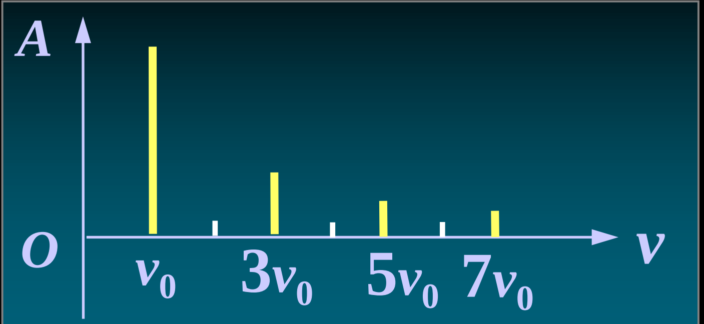
由傅里叶理论，有

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\sin 2\pi\nu_0 t+\frac{4}{3\pi}\sin 6\pi\nu_0 t+\frac{4}{5\pi}\sin 10\pi\nu_0 t+\cdots$$

结论:

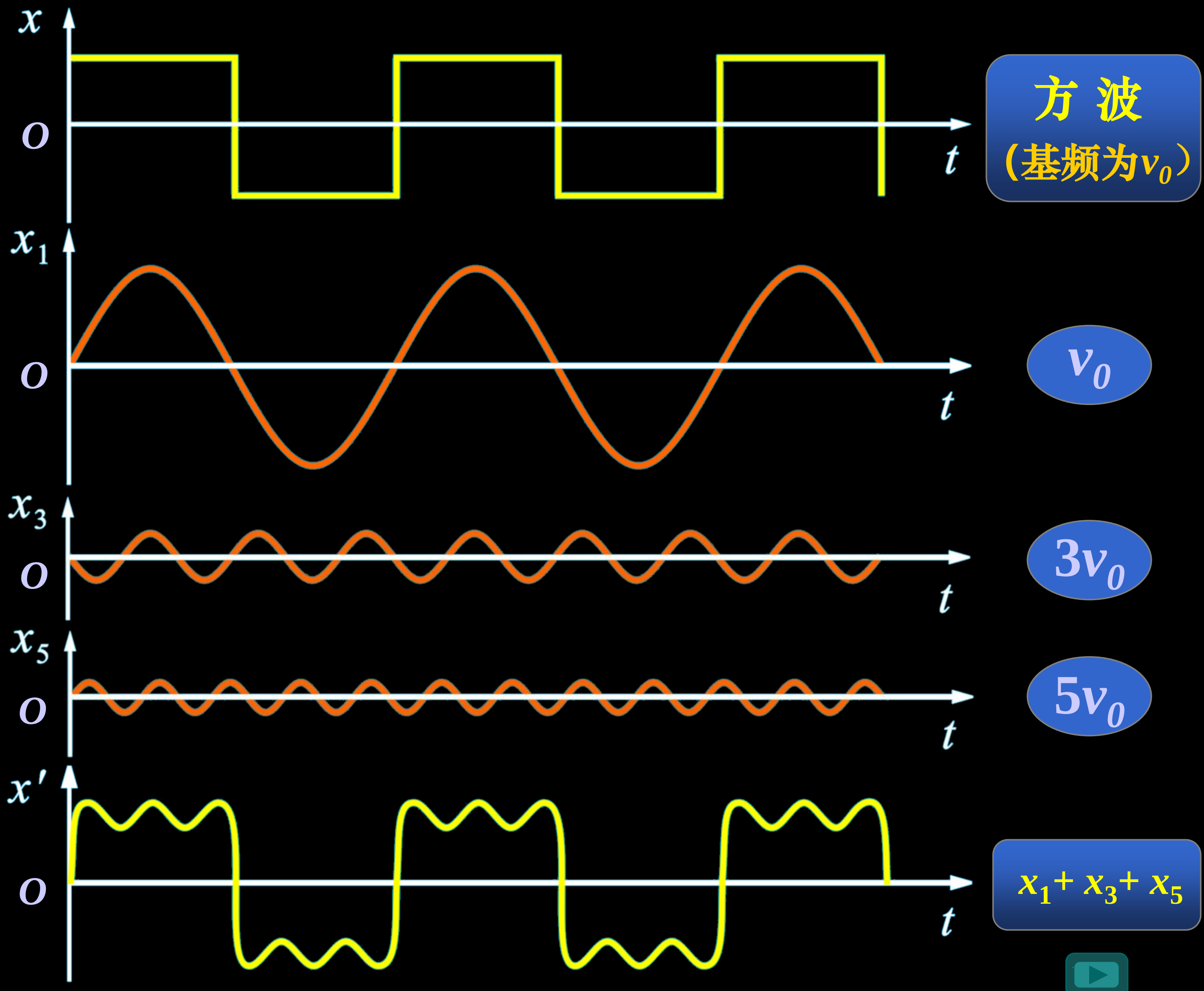
1.方波可分解为 ν_0，3 ν_0，5 ν_0 等谐振动的叠加。

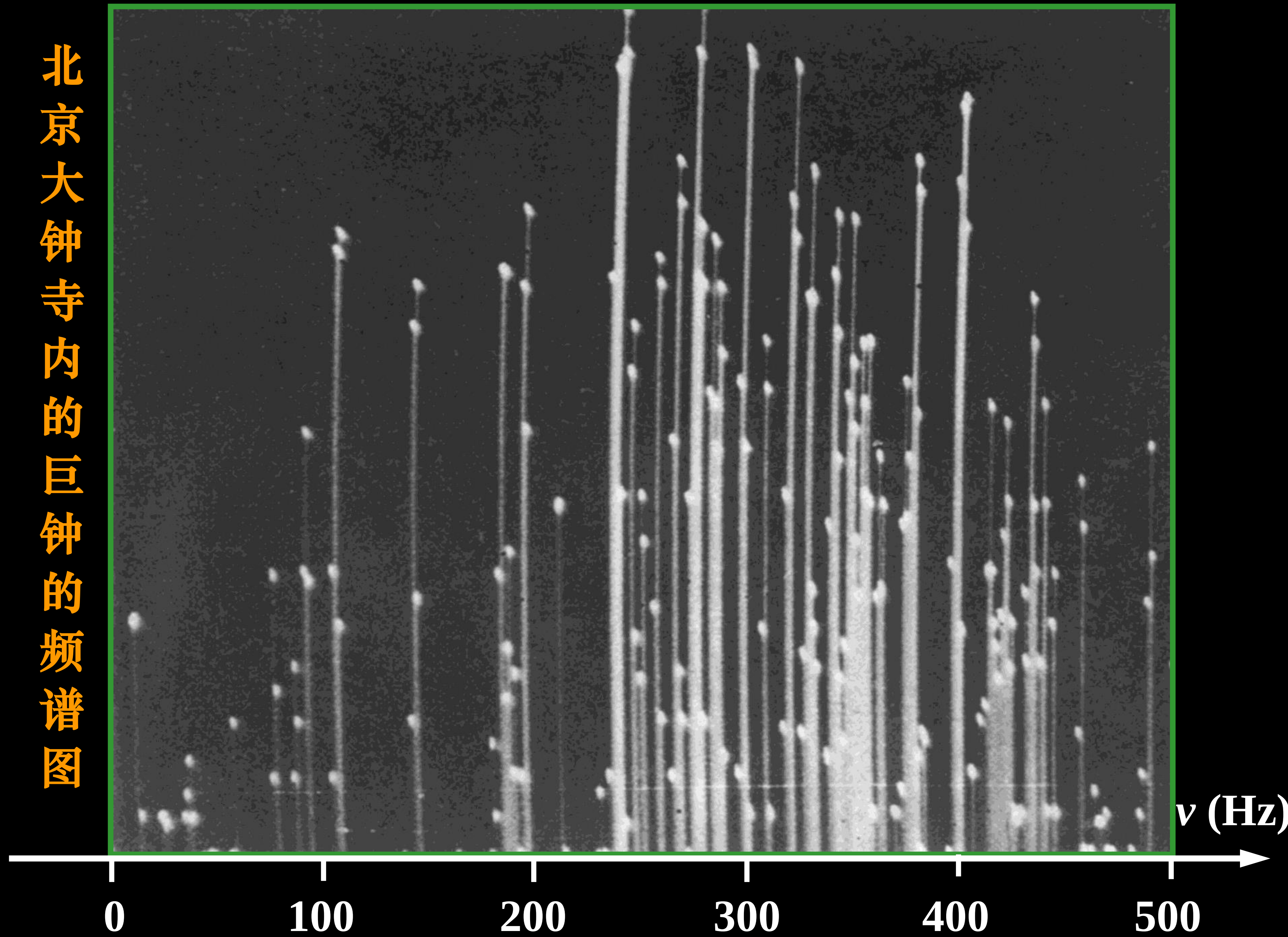
2.谐频次数越高的项振幅越小。



方波频谱图

方波的分解图



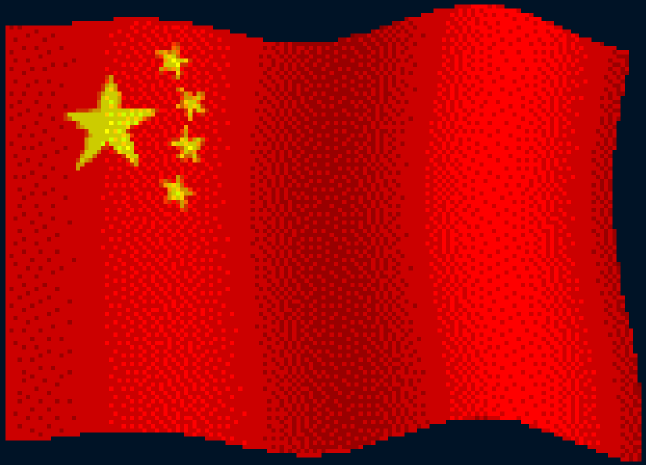

北京大钟寺内的巨钟的频谱图
ν (Hz)
0
100
200
300
400
500

第13章　机械波

Mechanical wave

国家管弦乐团在联合国总部的演出

V 字形二维“锥形波”—“舷波”



战机突破音障的瞬间

波动(wave) —— 振动或扰动在空间以一定的速度传播

机械波 *Mechanical wave*

—— 机械振动或扰动在介质中的传播

—— 声波、水波、地震波……

—— 遵从**经典力学理论**

电磁波 *Electromagnetic wave*

—— 变化电场和变化磁场在空间的传播

—— 无线电波、光波、X射线……

—— 遵从**麦克斯韦电磁场理论**

机械波和电磁波统称为经典波

—— 代表的是某种<u>实在的物理量</u>的波动。

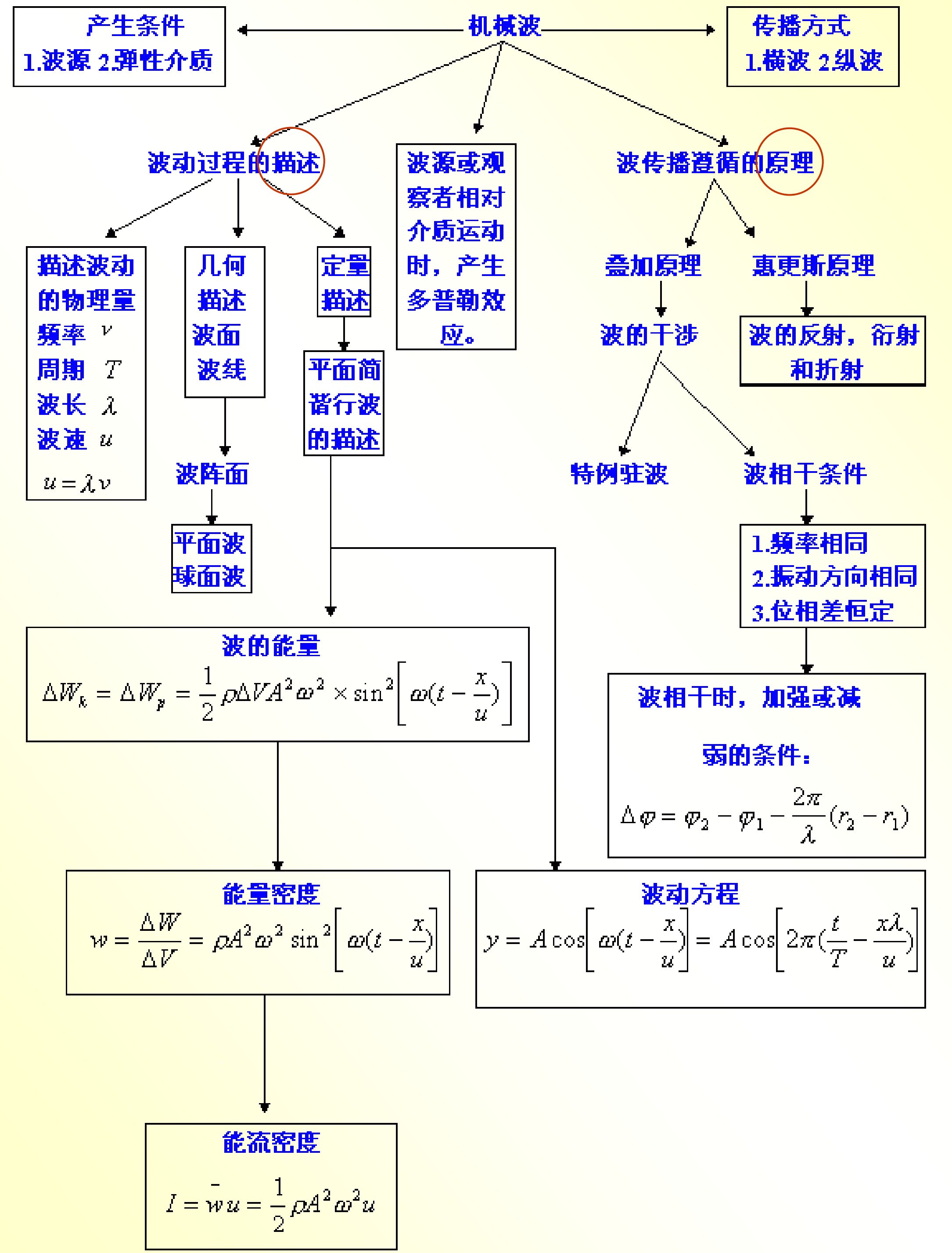
物质波 —— 近代物理实验中发现，电子、质子和中子等微观粒子也能发生干涉和衍射等现象。

—— **微观粒子具有波动性**（波粒二象性）

—— 描述微观粒子在空间各点分布的**几率波**

—— 遵从**量子理论**

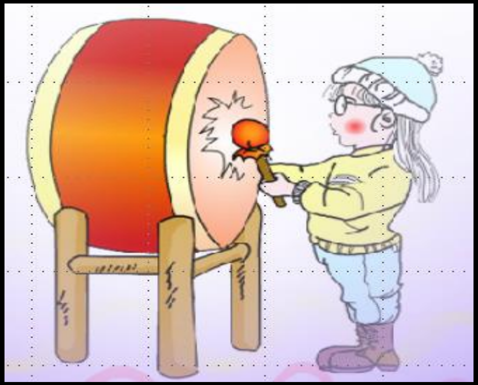
- 形成各类波的具体**物理机制各不相同**，具有各自的性质和规律
- 形式上具有很多**共同的特征和规律**：**叠加性，波的反射、折射、干涉**和**衍射**现象以及能量的传播等
- 都具有的波动的普遍性质
- 描述各类波的方法可以**相互借鉴、相互利用**



- ◆了解机械波在介质中传播的物理机制和图象，理解波动和振动的联系与区别；
- ◆理解描述波动的物理量（波频、波长、波速等）的物理意义，掌握这些量之间的关系；
- ◆掌握建立平面简谐波波动表达式的方法，理解波动表达式的意义；
- ◆了解波的能量传播特征，理解能流、能流密度等概念；
- ◆了解惠更斯原理及波的衍射、反射和折射现象；
- ◆理解波的叠加原理，掌握波的相干条件，掌握波程差与相位差的关系；
- ◆了解驻波形成的条件及主要特征；
- ◆了解多普勒效应的形成机理及简单应用。

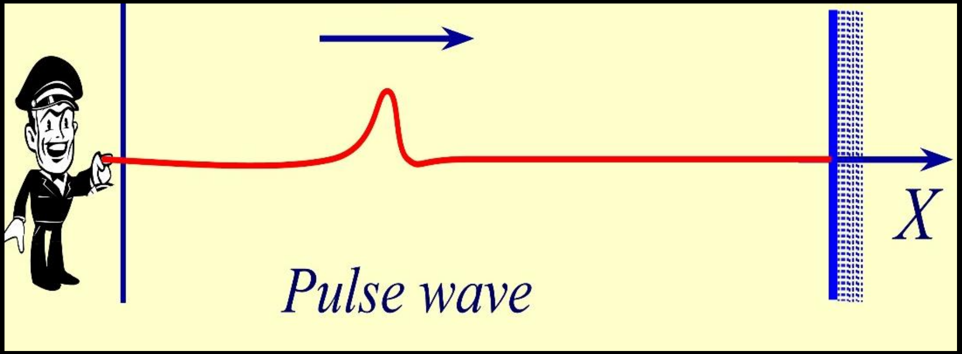
§13.1 机械波的产生和传播

一. 机械波的产生

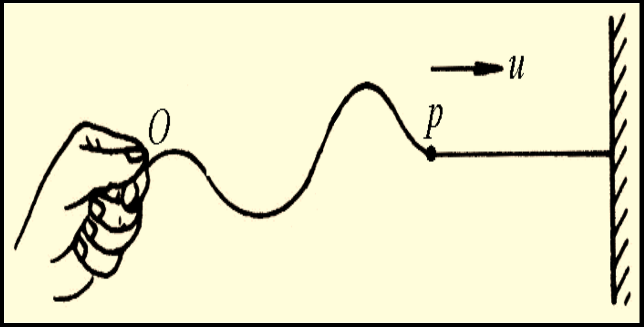


例1. 声波 —— 鼓声

例2. 绳波



固定绳子的另一端抖动一下，该扰动在绳子中向前传播



若扰动是连续的振动，就形成连续波

机械波(mechanical wave)：

弹性介质的质元受外界扰动而发生振动时，因质元之间的弹性联系，会使振动传播开去

机械振动以一定速度在弹性介质中由近及远地传播出去，就形成机械波。

产生机械波的条件
- 波源：产生机械振动的物体
- 弹性介质：承担传播振动的物质

空气中传播的声波

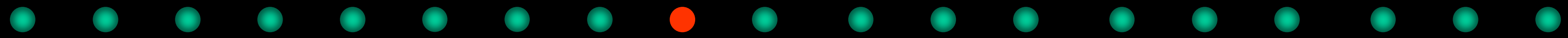
—— 介质质点的振动方向和波传播方向相互平行

—— 纵波

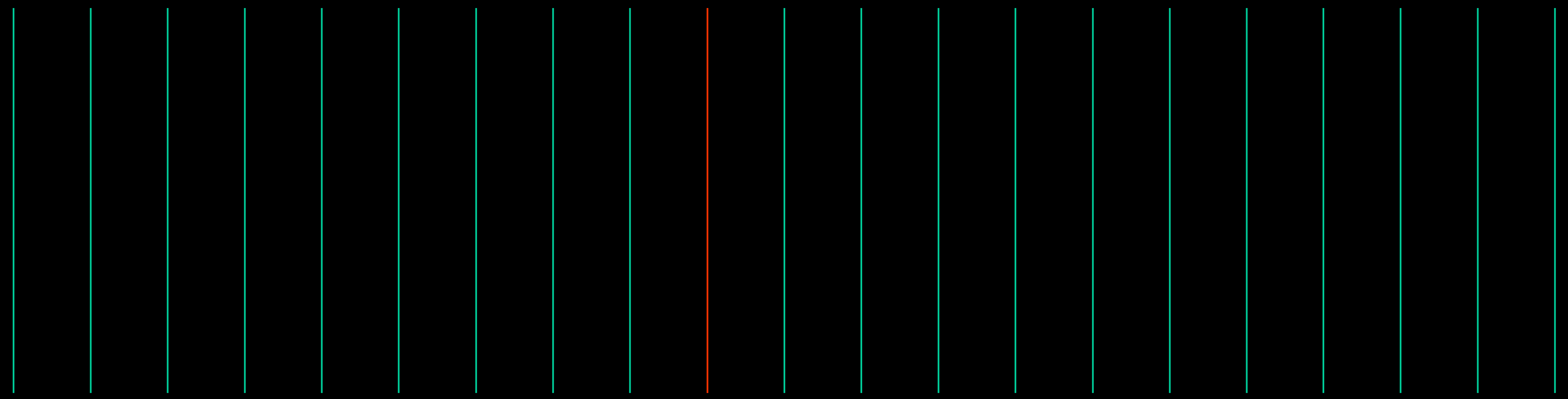
柔绳上传播的绳波

—— 介质质点的振动方向与波传播方向相互垂直

—— 横波

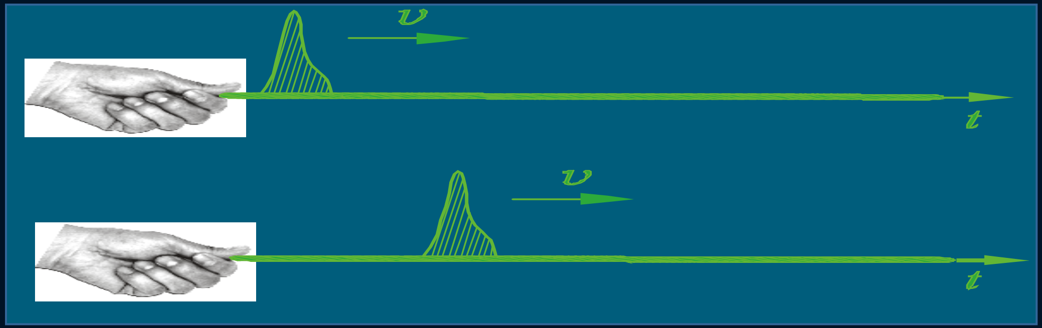


横波演示

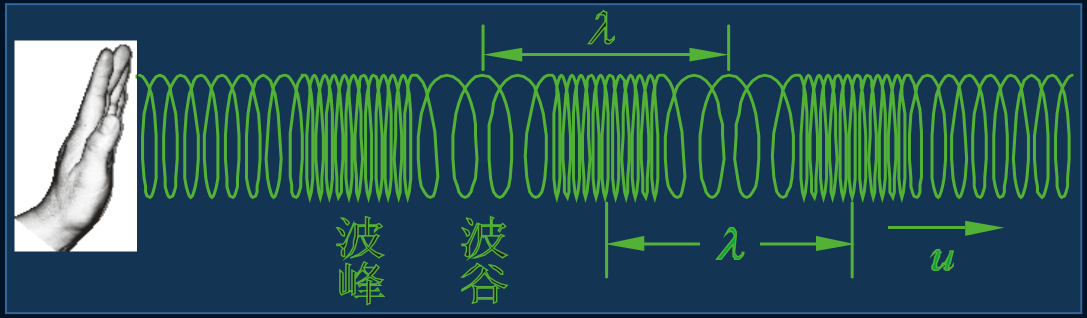


纵波演示

◆ 横波：介质质点的振动方向与波传播方向**相互垂直**的波；如柔绳上传播的波.

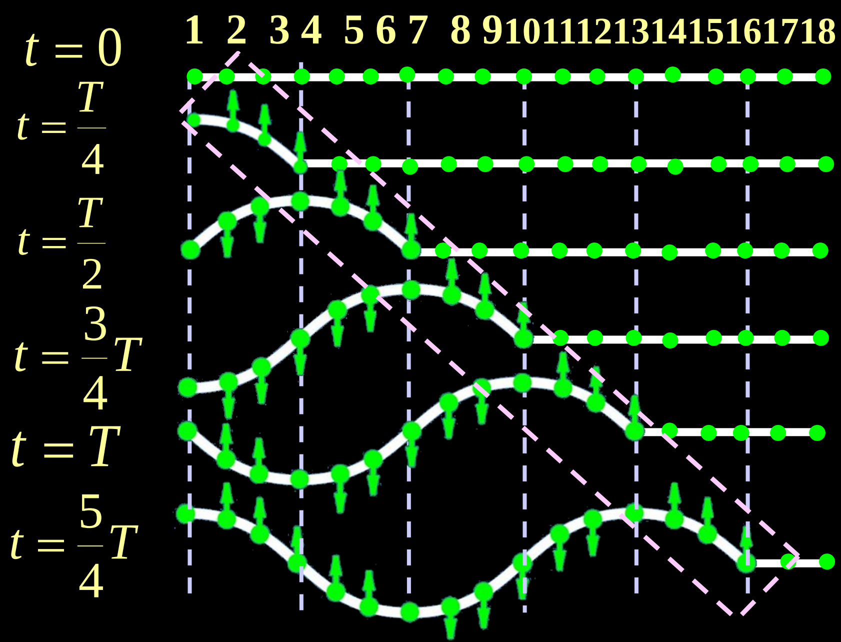


◆ 纵波：介质质点的振动方向和波传播方向**相互平行**的波；如空气中传播的声波.



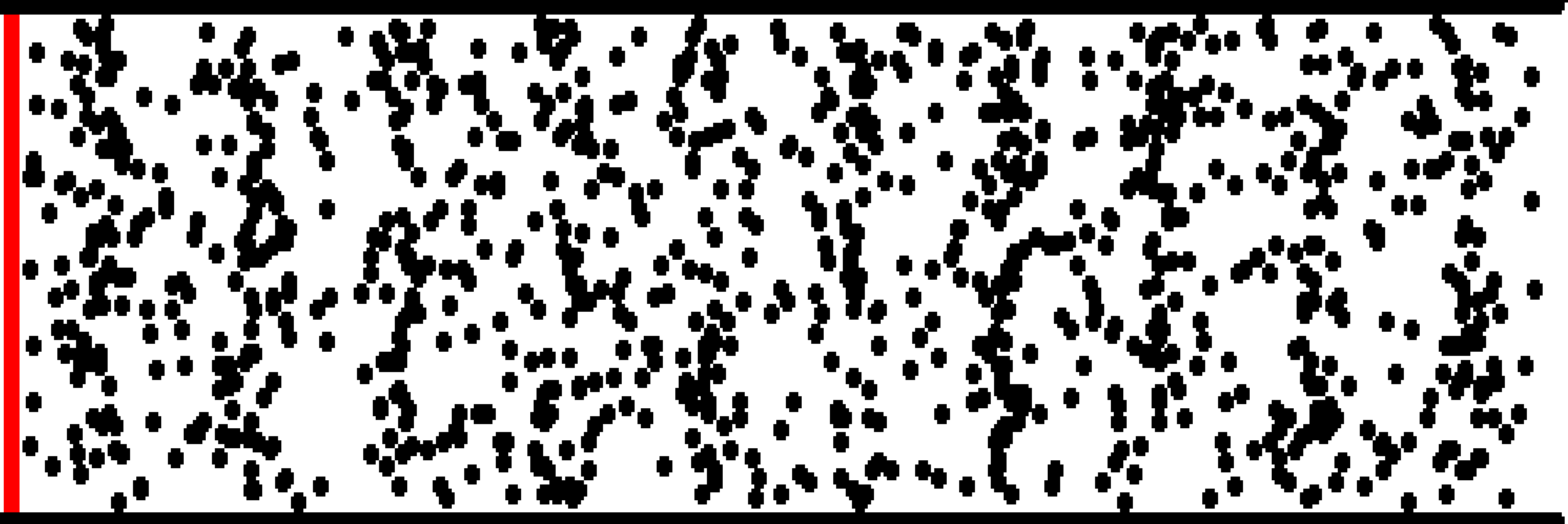
(气体和液体内只能传播纵波，不能传播横波)

横波：质点振动方向 ⊥ 波传播方向

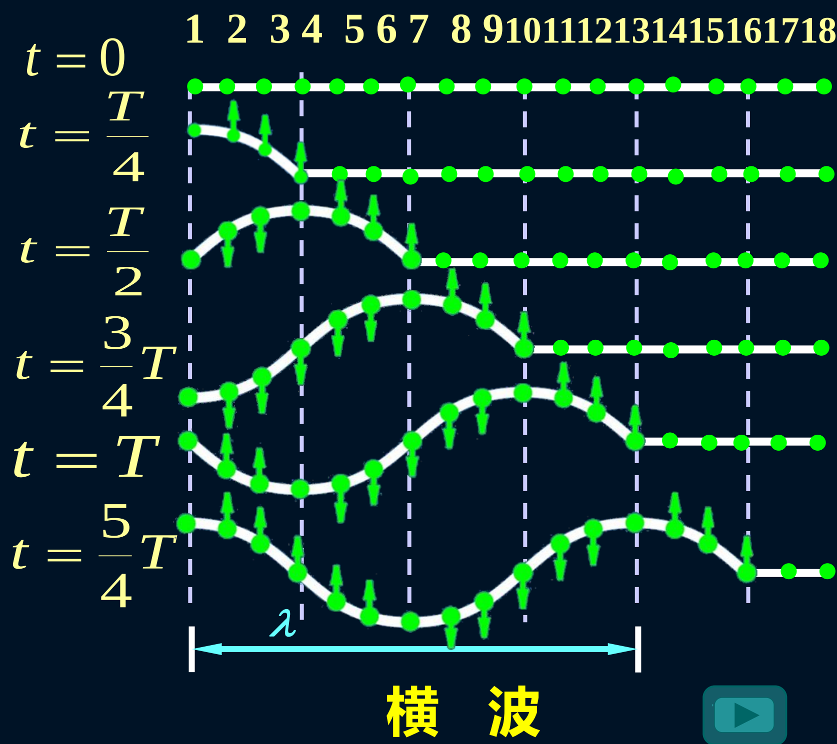


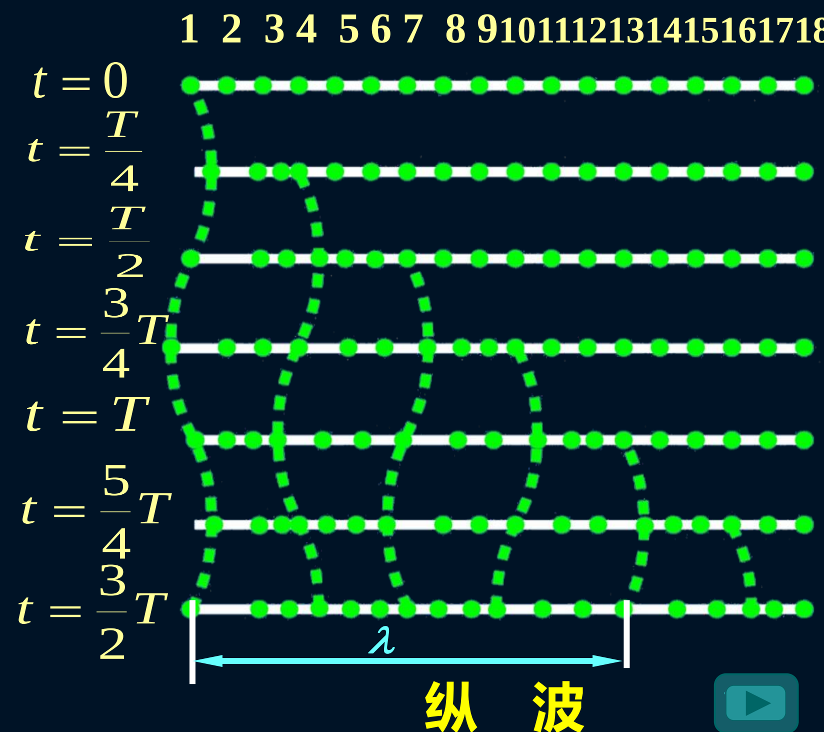
- ➢ 横波的产生 → 介质切向形变产生**切向弹性力**
  → 相邻质元依次作用下去形成横波
- ➢ 横波只能在**固体**中传播
- ➢ 横波传播时各质点并不随波前进
- ➢ **波动是振动状态的传播，是相位的传播**

纵波： 质点振动方向 // 波传播方向



- 纵波的产生 → 介质的拉伸和压缩产生纵向弹性力
  → 相邻质元依次作用下去形成纵波
- 纵波能在固体、液体和气体中传播
- 纵波传播时各质点并不随波前进
- **波动是振动状态的传播，是相位的传播**



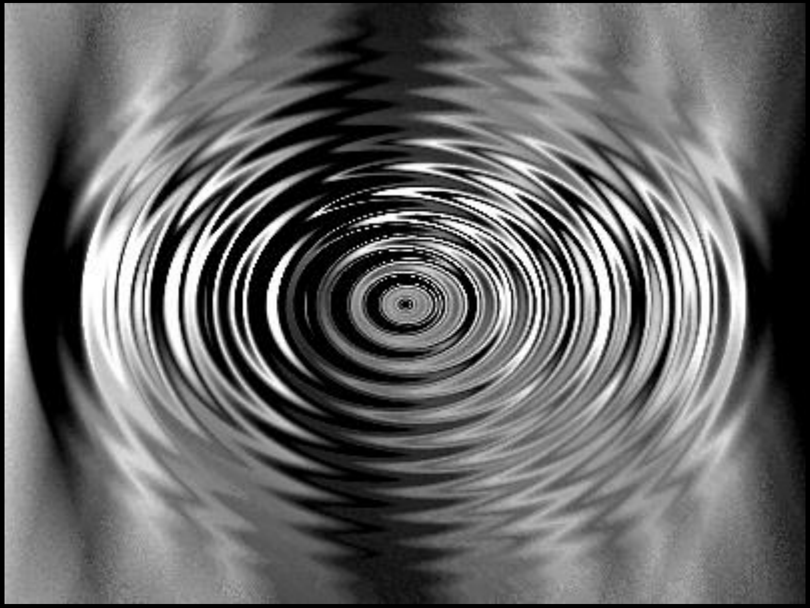


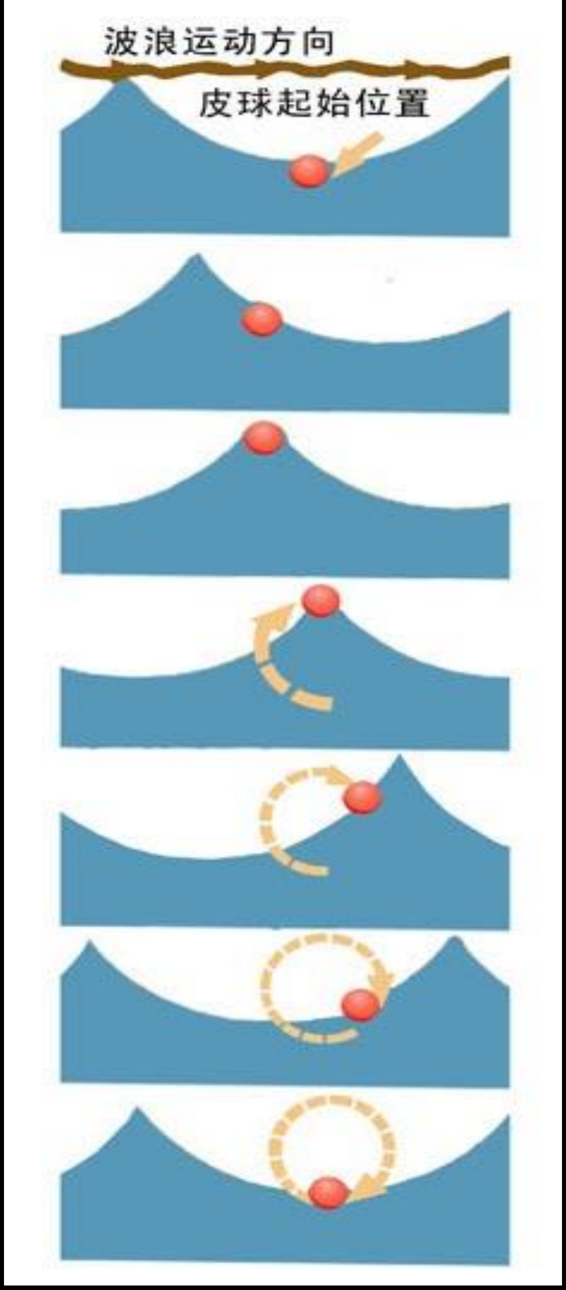
结论

(1) 波动中各质点并不随波前进;

(2) 沿波的传播方向,各个质点的相位依次落后,波动是相位(振动状态)的传播;

水面波

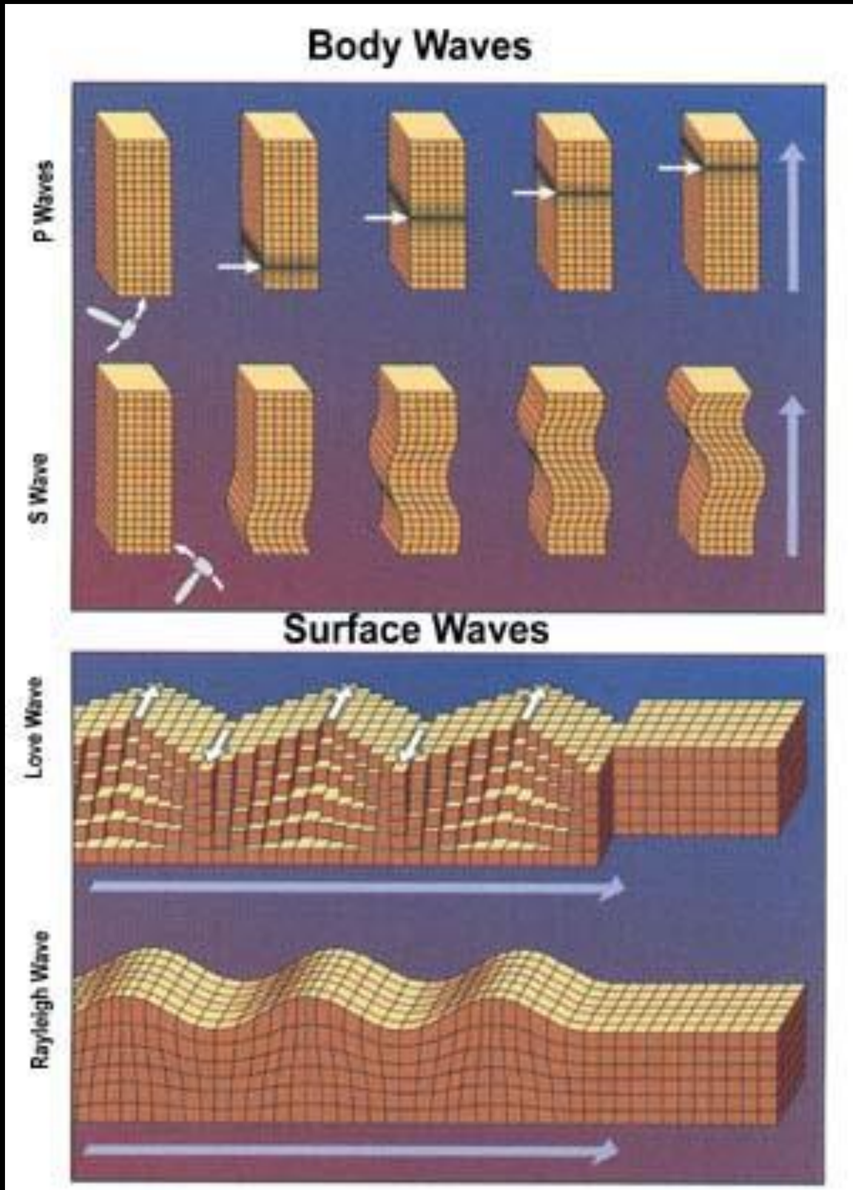




水面波既非横波又非纵波

地震波：从震源产生向四外辐射的弹性波

地震波：从震源产生向四外辐射的弹性波



两种：体波和面波

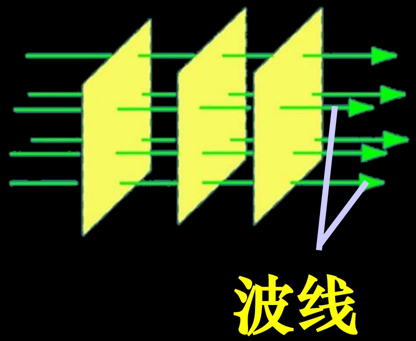
体波在地球内部传播，又分成P波和S波。P波为纵波，是推进波，速度最快，它使地面发生上下振动，破坏性较弱。S波为横波，是剪切波，第二个到达震中，它使地面发生前后、左右抖动，破坏性较强。

面波是由纵波与横波在地表相遇后激发产生的混合波，其波长大、振幅强，只能沿地表面传播，是造成建筑物强烈破坏的主要因素。

二. 波的(几何)描述：波面和波线

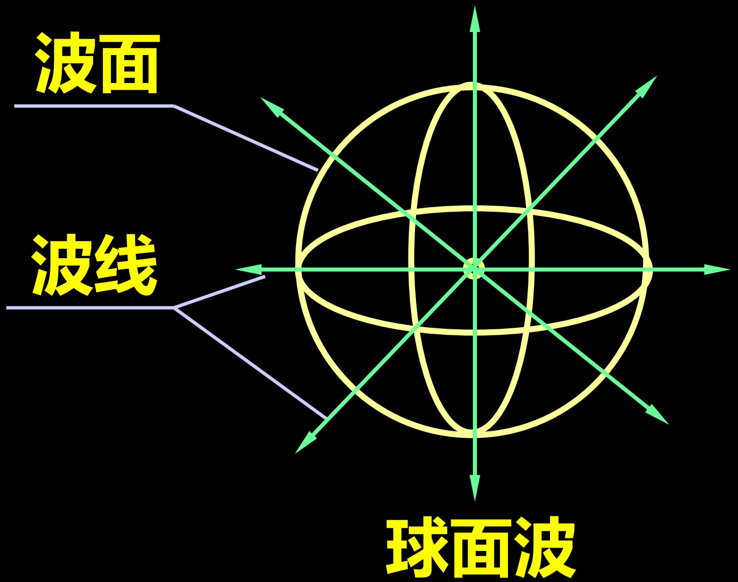
—— 波动是振动状态的传播，是振动相位的传播

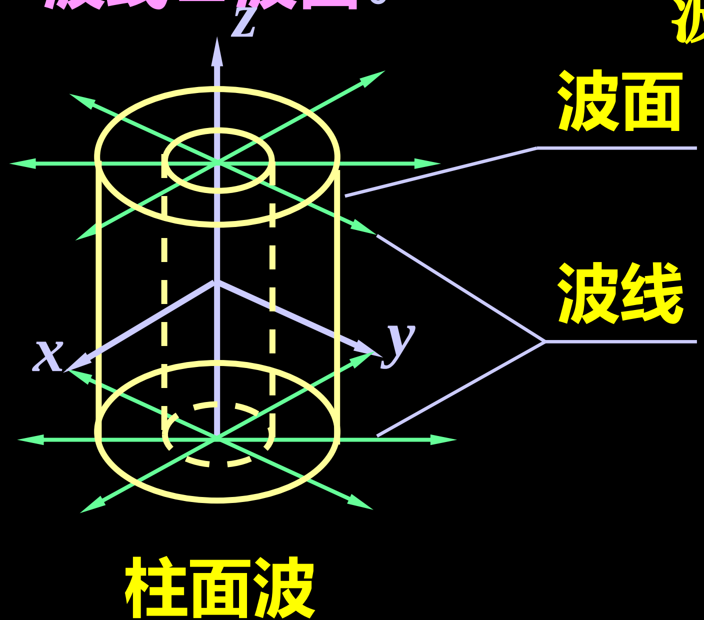
波面 在波传播过程中，任一时刻介质中振动相位相同的点联结成的面。



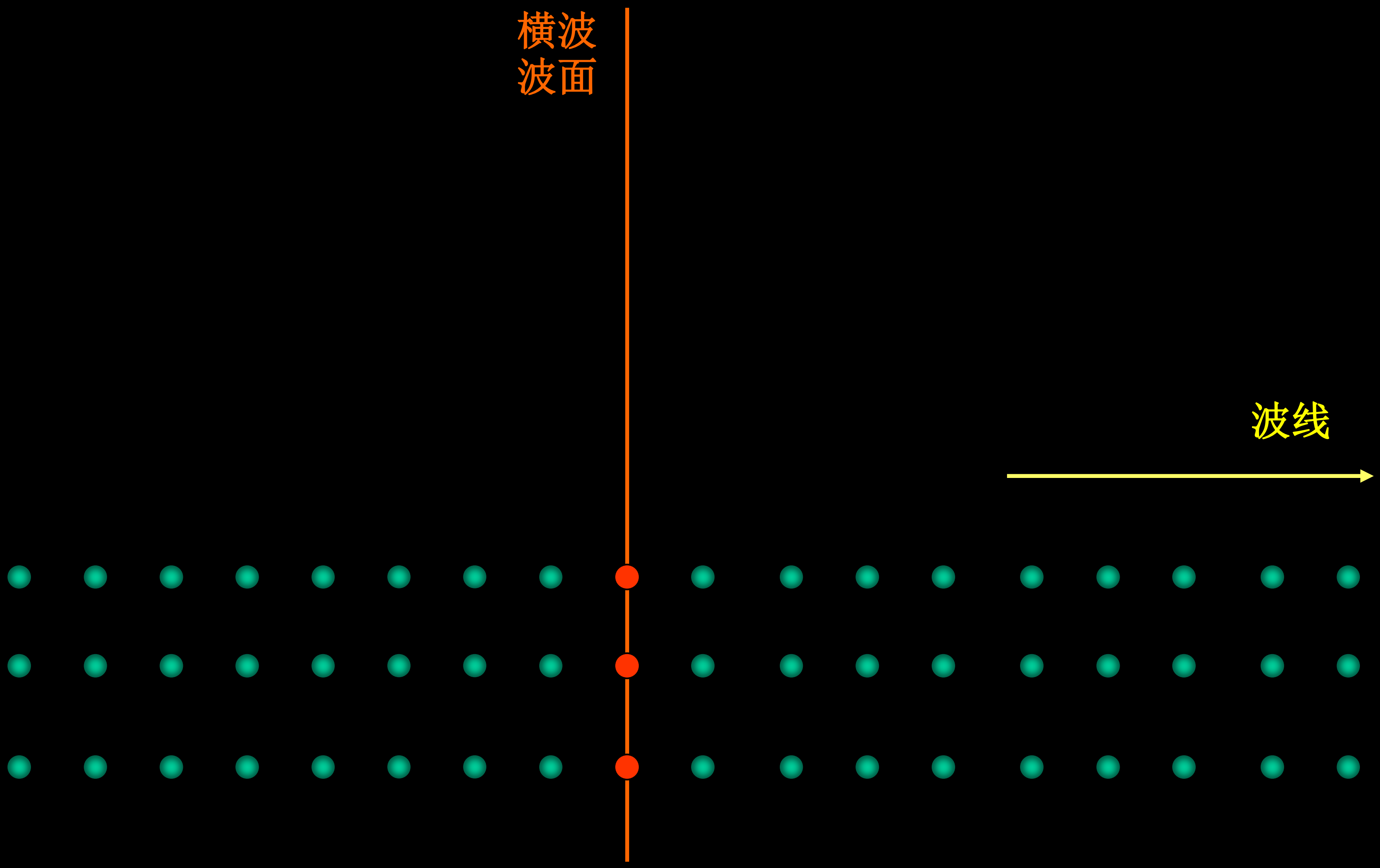
波线 沿波的传播方向作的有方向的线。

在各向同性均匀媒质中，波线⊥波面。

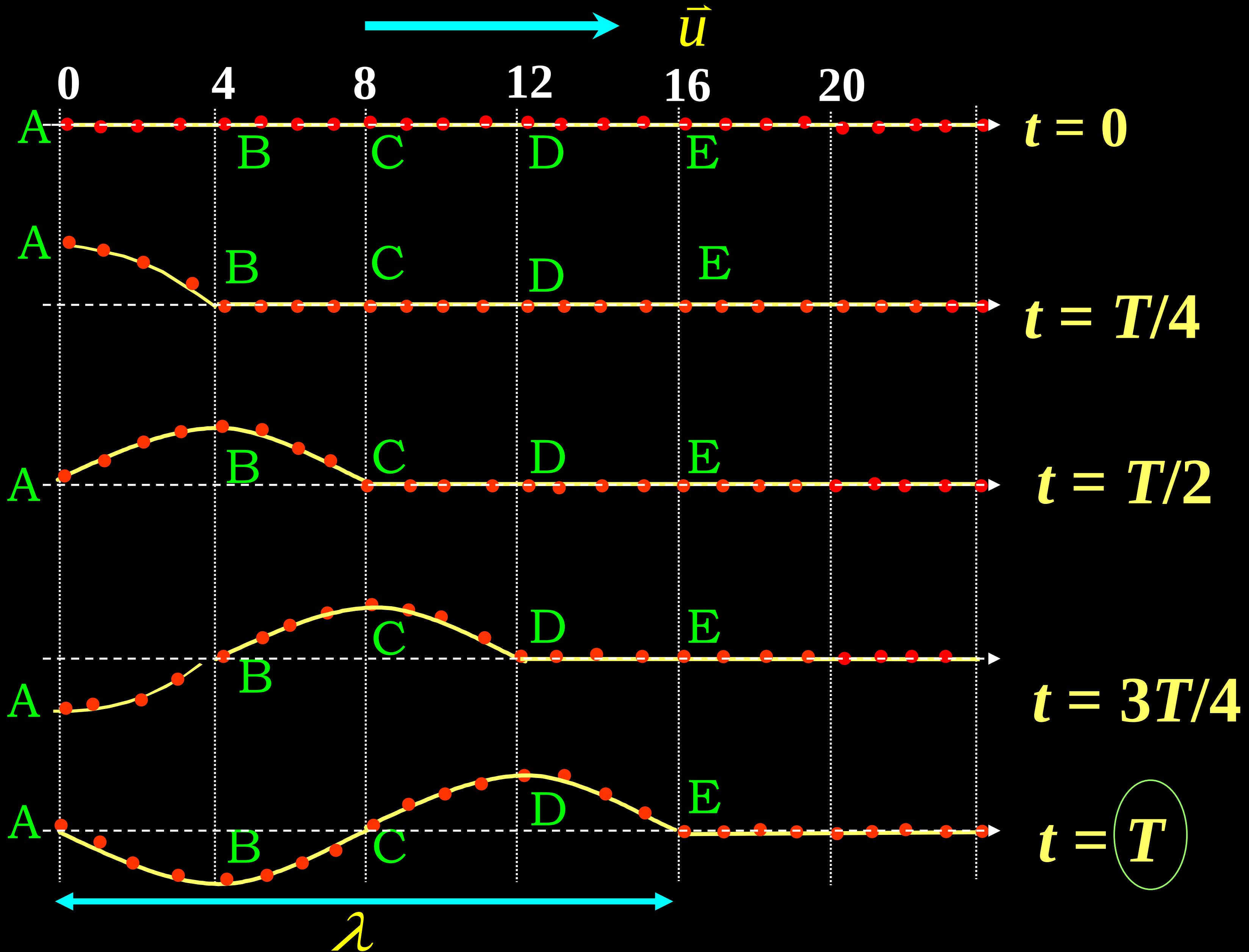




注意 在各向同性均匀媒质中，波线⊥波面。


横波
波面
波线

三. 波的描述（特征物理量）：波长 周期 频率 波速



Wavelength λ, Period T, Frequency ν, Wave velocity u

波长（λ）: 同一时刻同一波线上相邻两个相位差为 2π 的质点之间的距离；即波源作一次完全振动，波前进的距离。波长反映了波的空间周期性。

周期（T）: 波前进一个波长距离所需的时间。周期表征了波的时间周期性。

频率（ν）: 单位时间内，波前进距离中完整波的数目。频率与周期的关系为

$$\nu = \frac{1}{T}$$

波速（u）: 振动状态在媒质中的传播速度。波速与波长、周期和频率的关系为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda$$

说明

(1) 波的周期和频率与媒质的性质无关；一般情况下，与波源振动的周期和频率相同 。

(2) 波速实质上是相位传播的速度，故称为相速度； 其大小主要决定于媒质的性质，与波的频率无关。

例如：

a. 拉紧的绳子或弦线中横波的波速为：

$$u_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T — 绳的初始张力

μ — 质量线密度

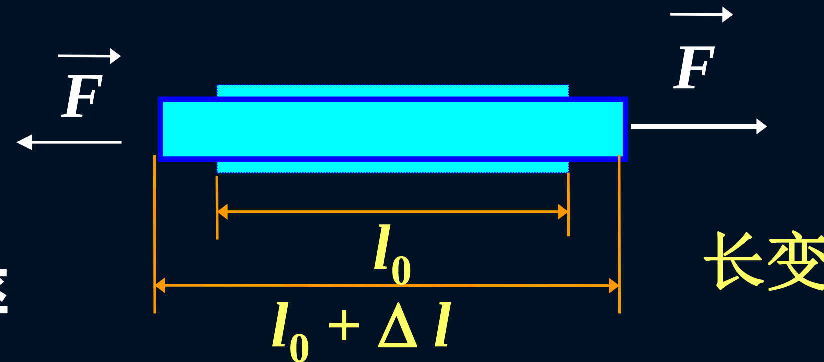
b. 均匀细棒中，纵波的波速为：

$$u_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Y — 固体棒的杨氏模量

ρ — 固体棒的体密度

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$



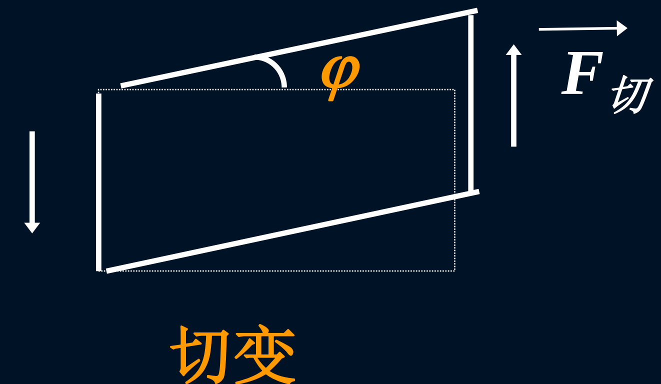
c. **固体媒质中传播的横波速率**

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

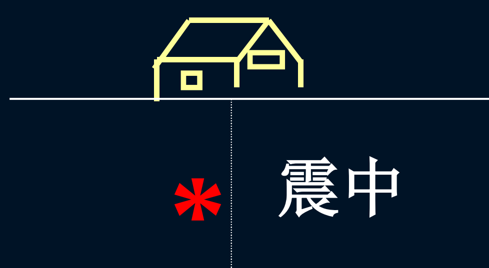
G — **固体的切变弹性模量**

ρ — **固体密度**

$$\frac{F}{S} = G\varphi = G\frac{\Delta x}{h}$$



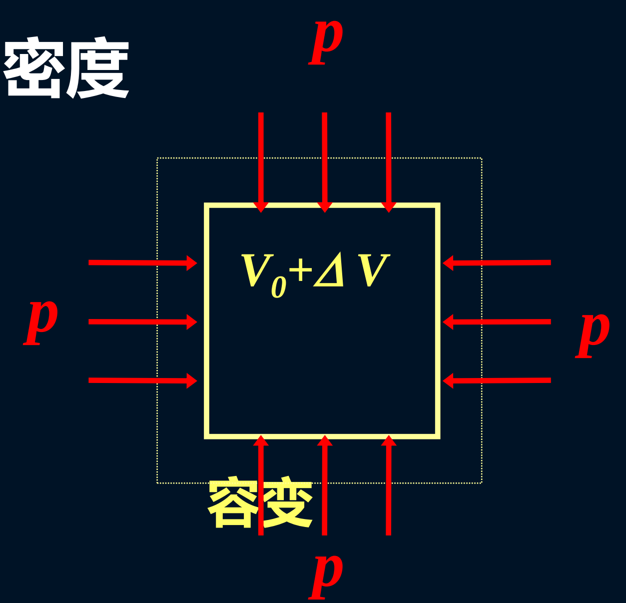
$\because G < Y$, **固体中** $u_{横波} < u_{纵波}$



d. 液体和气体只能传播纵波，其波速由下式给出

$$u_l = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \begin{cases} B & \text{— 流体的容变弹性模量} \\ \rho & \text{— 流体的密度} \end{cases}$$

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V_0}$$



e. 稀薄大气中的纵波波速为

$$u_l = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad \begin{cases} \gamma & \text{— 气体摩尔热容比} \\ M & \text{— 气体摩尔质量} \\ R & \text{— 气体摩尔常数} \end{cases}$$

例: 标准状态下，声波在空气传播的速度?

$$u_l = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{(7/5)\cdot 8.31\cdot 300}{29\times 10^{-3}}} \approx 347\mathbf{m/s}$$

波的类型(横波、纵波)；

波速度取决于·媒质的性质(弹性和惯性)；

在相同介质、相同传播距离的条件下，纵波比横波的速度快。

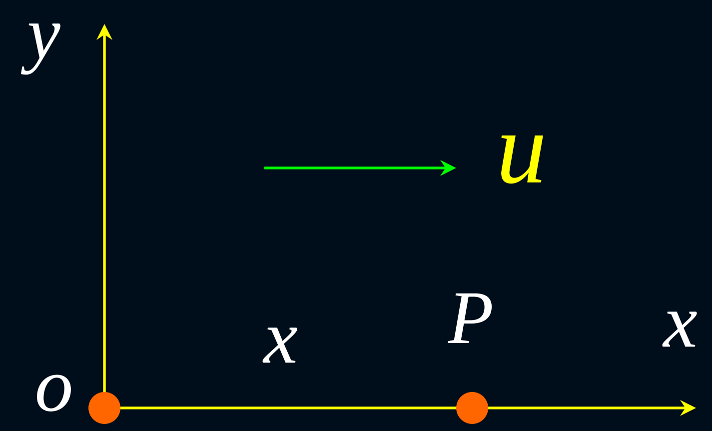
§ 13.2 平面简谐波 *Planar harmonic wave*

一 平面行波

已知位于坐标原点的质元的振动规律：

$$y_o = f(t)$$

在 t 时刻，x 处质元的振动状态应与 $t-\dfrac{x}{u}$ 时刻原点质元的振动相同。



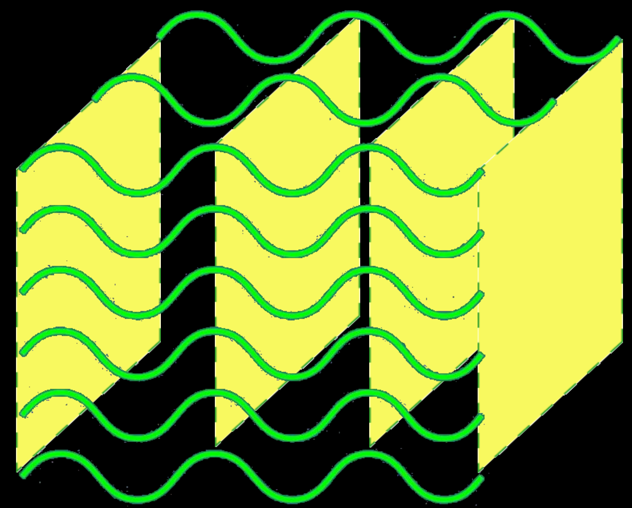
在 t 时刻，x 处质元的振动规律为

$$\boxed{y = f(t-\frac{x}{u}) = f(x,t)}$$

二 平面简谐波

简谐波 介质传播的是谐振动，即波所到之处，介质中各质点作同频率的谐振动。

平面简谐波 波面为平面的简谐波



平面简谐波

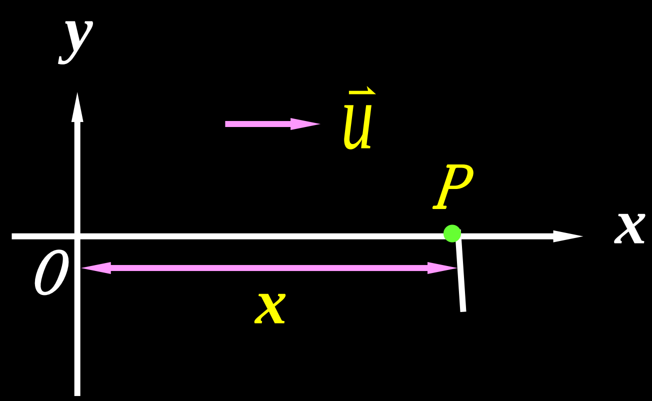
说明

- **简谐波是一种最简单、最基本的行波，研究简谐波的波动规律是研究更复杂波的基础。**
- **本节主要讨论在无吸收（即不吸收所传播的振动能量）、各向同性、均匀无限大媒质中传播的平面简谐波。**
- **同一波面上的点有相同的相位和位移（离开平衡位置）所以只要研究和波面垂直的波线上波的传播。/**

三. 平面简谐波的波函数

一般波函数 $y = f(x,t)$

简谐振动 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$



简谐振动 ⇨ 平面简谐波的波函数

若 $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

从时间看，**P** 点 **t** 时刻的位移是**O** 点 $t - \dfrac{x}{u}$ 时刻的位移；

从相位看，**P** 点处质点振动相位较**O** 点处质点相位落后 $\omega\dfrac{x}{u}$

$$y_P(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

P 为任意点 $y(x,t) = A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0]$ **(波函数)**

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$u = \nu\lambda, \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T}$$

波函数的其它形式

$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y(x,t) = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0]$$

讨论

(1) **由波函数可知波的传播过程中任意两质点 x_1 和 x_2 振动的相位差为**

$$\Delta = [\omega(t - \frac{x_2}{u}) + \varphi_0] - [\omega(t - \frac{x_1}{u}) + \varphi_0] = \frac{\omega}{u}(x_1 - x_2)$$

$x_2 > x_1$, $\Delta < 0$，**说明 x_2 处质点振动的相位总落后于 x_1 处质点的振动；**

(2) u 实际上是振动相位的传播速度。

t_1 时刻x_1 处的振动状态经Δt 时间传播到$x_1+\Delta x$ 处，则

$$\omega(t_1 - \frac{x_1}{u}) = \omega(t_1 + \Delta t - \frac{x_1 + \Delta x}{u})$$

可得到

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(3) 若波沿轴负向传播时，同样可得到波函数:

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

其它形式

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut + x) + \varphi_0] \end{cases}$$

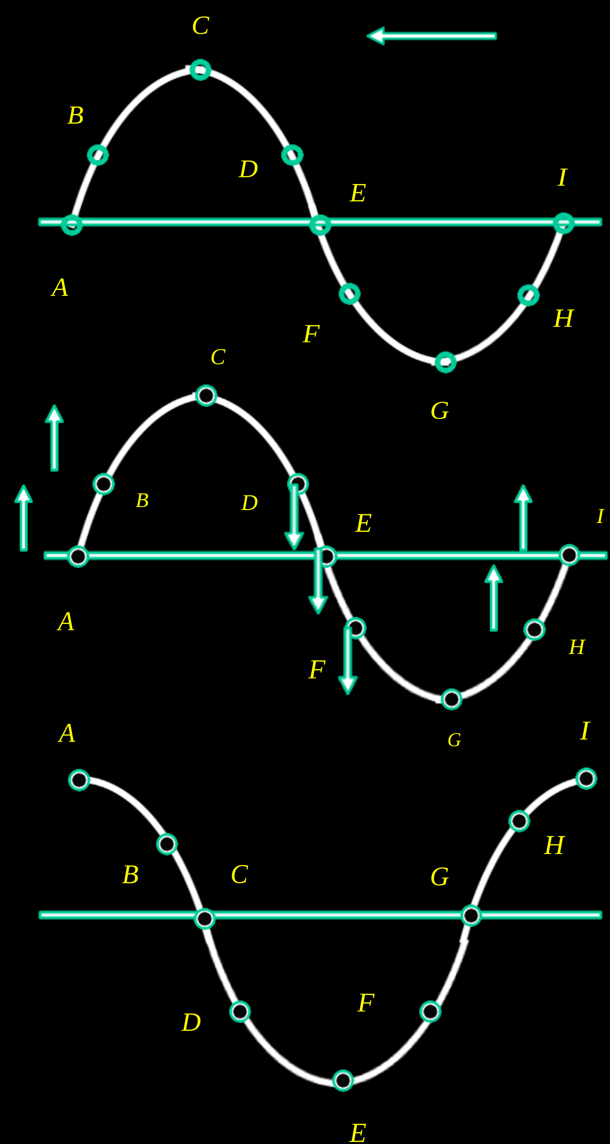
例 设某一时刻绳上横波的波形曲线如下图所示，水平箭头表示该波的传播方向。试分别用小箭头表明图中*A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*各质点的**运动方向**，并画出经过**1/4周期后**的**波形曲线**。

解

根据图中的波动传播方向，可知在*C* 以后的质点*B* 和*A*开始振动的时刻总是落后于*C* 点，而在*C* 以前的质点 *D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I* 开始振动的时刻却都超前于*C* 点。

在*C* 达到正的最大位移时，质点*B* 和*A* 都沿着正方向向着各自的正的最大位移行进,质点*F*、*E*、*D*已经过各自的正的最大位移，向负方向运动。质点I、H 不仅过了自己的正的最大位移，还经过了负的最大位移，向正方向运动。质点G 则处于负的最大位移处。

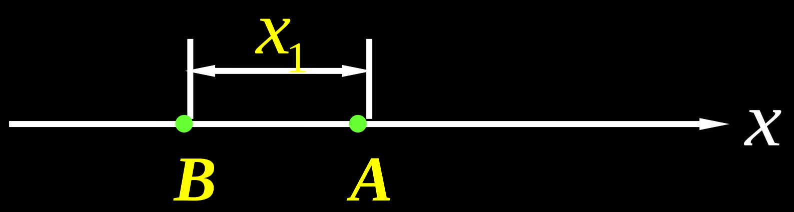
经过*T*/4，波形曲线如下图所示，它表明原来位于*C* 和*I* 间的波形经过*T*/4 ，已经传播到*A*、*G* 之间来了。



例 如图，已知*A* 点的振动方程为：$y_A = A\cos[4\pi(t-\frac{1}{8})]$

在下列情况下试求波函数：

(1) 以 *A* 为原点；

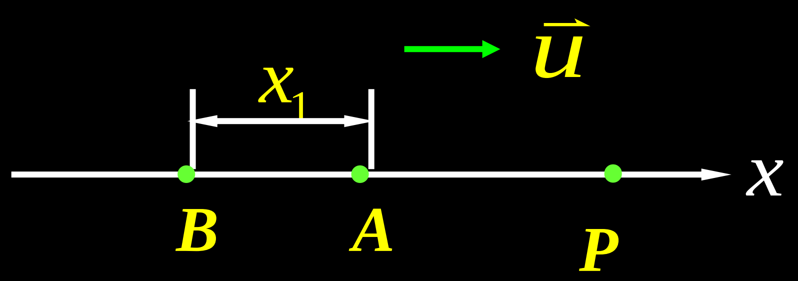


(2) 以 *B* 为原点；

(3) 若 *u* 沿 *x* 轴负向，以上两种情况又如何？

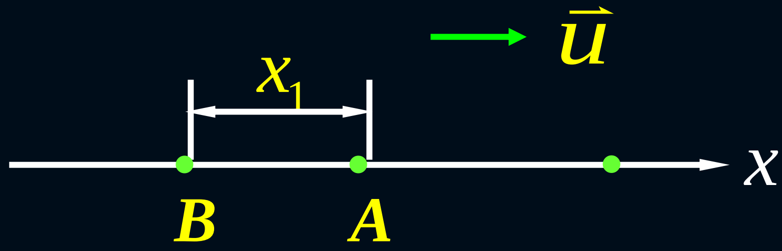
解 (1) 在 *x* 轴上任取一点*P*，该点

振动方程为：



$$y_p = A\cos[4\pi(t-\frac{x}{u}-\frac{1}{8})]$$

波函数为：$$y(x,t) = A\cos[4\pi(t-\frac{x}{u}-\frac{1}{8})]$$



(2) **B** 点振动方程为：$y_B(t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x_1}{u} - \frac{1}{8})]$

波函数为: $y(x,t) = A\cos[4\pi(t - \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$

(3) 以 **A** 为原点：$y(x,t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$

以 **B** 为原点：$y(x,t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$

写波函数 要注意 原点的选取 和 波传播的方向

四. 波函数的物理意义

$$y(x,t)=A\cos[2\pi\,(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

(1) 振动状态的空间周期性

$y(x+\lambda\;\;,t)=y(x,t)$, 说明波线上振动状态的空间周期性

- 由质元看：相隔 λ 的两点振动状态完全*相同(同相点)*。
- 由波形看：波形在空间以λ为“周期” 分*布着*。

(2) 波形传播的时间周期性

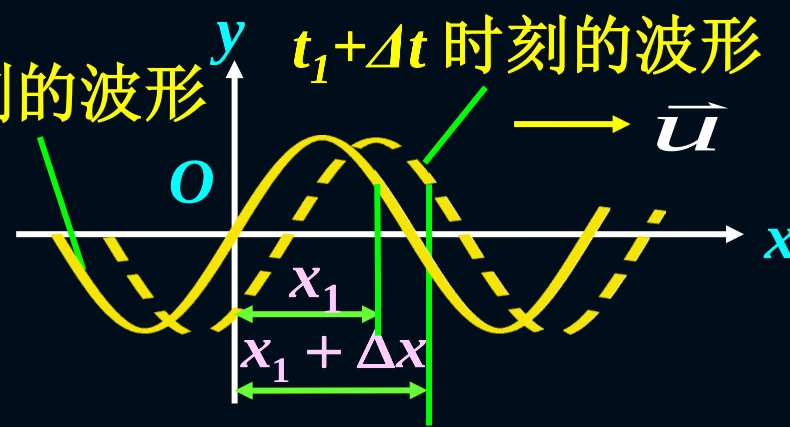
$y(x,t+T)=y(x,t)$, 说明波形传播的时间周期性

- 由质元看：*每个质元振动周期为T*
- 由波形看：*t时刻和 t+T 时刻的波形曲线完全重合*。

(3) x 给定，$y=y\,(t)$ 是 x 处振动方程 $y(x_0,t)=A\cos[\omega t-\omega\dfrac{x_0}{u}+\varphi_0]$

(4) t 给定，$y=y(x)$ 表示 t 时刻的波形图 $y(x,t_0)=A\cos[\omega t_0-\omega\dfrac{x}{u}+\varphi_0]$

(5) y 给定, x和 t 都在变化，表明波形传播和质点分布的时空周期性



y 给定 $$y(x_1,t_1)=A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})]$$ 设初相 $\varphi_0=0$

$$=y(x_2,t_2)=A\cos[\omega(t_1+\Delta t-\frac{x_1+\Delta x}{u})]$$

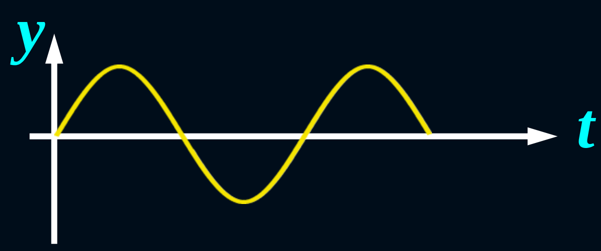
$$\Delta x=u\Delta t$$

振动状态 经过时间Δt，传过了$\Delta x = u\ \Delta t$ 的距离.

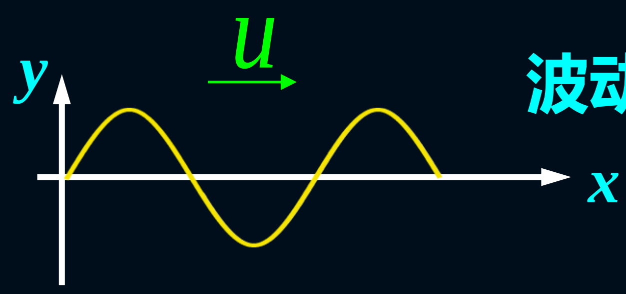
在 Δt 内，整个波形 传播了$\Delta x = u\ \Delta t$的距离。

波动曲线与振动曲线的不同

- 不同时刻对应有不同的波形曲线
- 波形曲线能反映横波、纵波的位移情况
- 波形曲线上必须标明时刻 t 和波的传播方向
- 振动曲线反映某一质元的位移随 t 的变化



振动曲线



波动曲线

y - x 曲线反映某时刻 t 各质元位移 y 在空间的分布情况

例 一平面简谐波沿x轴正方向传播，已知其波函数为

$$y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\ \text{m}$$

求 **(1)** 波的振幅、波长、周期及波速；

(2) 质点振动的最大速度。

解 **(1)** **a.** 比较法(与标准形式比较）

标准形式 $$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

波函数为 $$y = 0.04\cos 2\pi(\frac{50}{2}t - \frac{0.10}{2}x)$$

比较可得 $$A = 0.04\ \text{m} \qquad T = \frac{2}{50} = 0.04\ \text{s}$$

$$\lambda = \frac{2}{0.10} = 20\ \text{m} \qquad u = \frac{\lambda}{T} = 500\ \text{m/s}$$

b. 分析法（由各量物理意义，分析相位关系）

$$\boxed{y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\ \mathrm{m}}$$

振幅 $A = y_{\max} = 0.04\ \mathrm{m}$

波长 $\pi(50t - 0.10x_1) - \pi(50t - 0.10x_2) = 2\pi$

$$\lambda = x_2 - x_1 = 20\ \mathrm{m}$$

波形图上相位相差2π两点的距离

周期 $\pi(50t_2 - 0.10x) - \pi(50t_1 - 0.10x) = 2\pi$

$$T = t_2 - t_1 = 0.04\ \mathrm{s}$$

振动质点相位变化经历2π的时间

波速 $\pi(50t_2 - 0.10x_2) = \pi(50t_1 - 0.10x_1)$

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 500\ \mathrm{m/s}$$

单位时间内相位传递的距离

(2)质点振动的最大速度?

$$\upsilon = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.04\times 50\pi\sin\pi(50t - 0.10x)$$

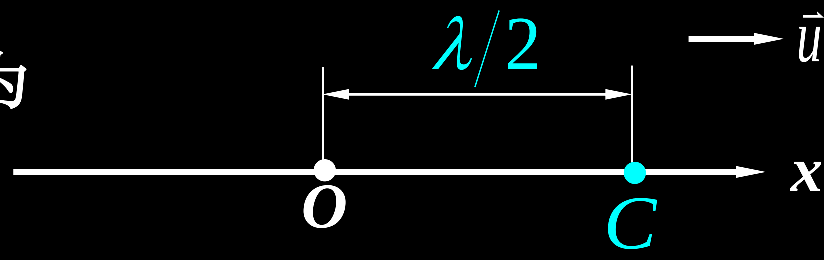
$$\upsilon_{\max} = 0.04\times 50\pi = 6.28\ \mathrm{m/s} \neq u$$

例 一列波长为λ的平面简谐波沿x轴正方向传播。已知在$x_0=(1/2)\lambda$处振动的方程为 $y = A\cos\omega t$

求 该平面简谐波的波函数

解 从时间上看，O点在t时刻的位移是C点在 $t+\dfrac{x_0}{u}$ 时刻位移

原点O处在t时刻质点的位移为



$$y = A\cos\omega\left(t+\frac{x_0}{u}\right)$$

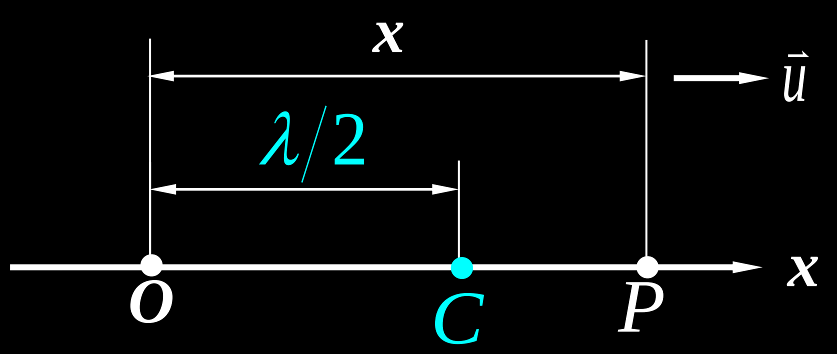
$$= A\cos\omega\left(t+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{u}\right) = A\cos(\omega t+\pi)$$

该平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos\left(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda}+\pi\right)$$

另一解法

已知C点振动方程为



$$y = A\cos\omega t$$

从时间上看， P点在t时刻位移是C点在 $t - \dfrac{x-(\lambda/2)}{u}$ 时刻的位移

P点处质点在t时刻的位移为

$$y = A\cos\omega[t - \frac{x-(\lambda/2)}{u}]$$

$$= A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda} + \pi)$$

该平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda} + \pi)$$

1. 要写出平面简谐波的波函数，须知：

1) 某参考点的振动方程(知 A, ω, ϕ)

2).波的传播方向

3).波长λ (或 u)

设已知参考点 a （坐标为d）的振动表达式为

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi_a)$$

任意的P点的振动： A和 ω均与a点的相同, 沿+ x 方向传播，
所以位相比a点落后 (2π/λ)(x - d). (对任意的 x 值都成立!)

∴P 点的振动表达式为

$$\boxed{y_p = A\cos[\omega t + \varphi_a - \frac{2\pi}{\lambda}(x-d)]}$$

称为沿+ x 方向的一维简谐波的波函数

2. 注意区别波形曲线和振动曲线

波形曲线 y—x ， 振动曲线 y—t

波形曲线上应标明 时刻 t 、传播方向u

振动曲线上应标明 哪个质元 x

3. 要求掌握

1) 由某时刻的波形曲线

→ 画出另一时刻的波形曲线

2) 由某时刻的波形曲线

→确定某些质元的振动趋势

→画出这些质元的振动曲线

3) 由某质元的振动曲线

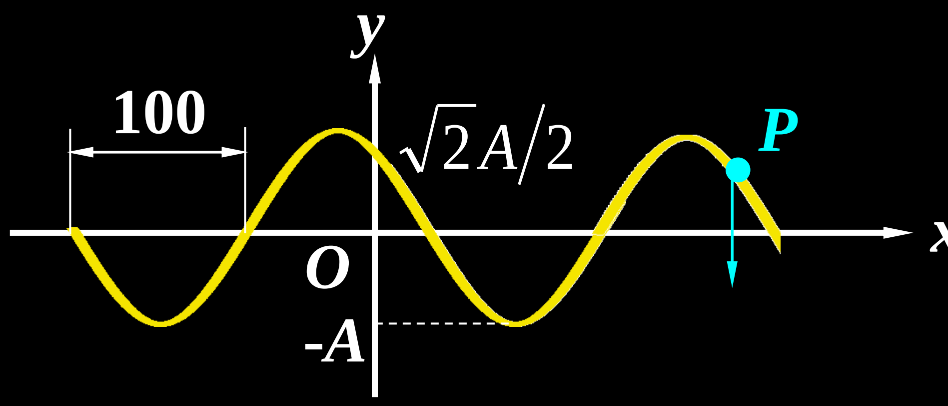
→画出某时刻的波形曲线

例 如图所示为一平面简谐波在$t=0$时刻的波形图，设此简谐波的频率为250Hz，且此时质点P的运动方向向下，

求 (1) 该波的波函数；

(2) 在距原点O为100米处质点的振动方程与振动速度表达式。

解 (1) P点振动方向向下，说明波沿$-x$ 轴传播.



$t=0 \quad x=0$

处的初相位为：$\dfrac{\pi}{4}$

O点的振动方程

$$y = A\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{4})$$

$$= A\cos(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

该坐标下的波函数

$$y = A\cos[500\pi(t + \frac{x}{5\times10^4}) + \frac{\pi}{4}]$$

(2) 在距原点O为**100**米处质点的振动方程

$$y = A\cos[500\pi(t + \frac{100}{5\times10^4}) + \frac{\pi}{4}]$$

$$= A\cos(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

$$= -A\cos(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

$$\boldsymbol{v} = 500\pi A\sin(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

五. 平面波的波动微分方程

由 $$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

知 $$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -A\frac{\omega^2}{u^2}\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]\end{aligned}\right\} \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

说明

(1) 上式是一切平面波所满足的微分方程（正、反传播）；

(2) 它的普遍意义在于：任何的物理量，不管是力学量，电学量或其它的量，只要它的时间和坐标关系满足该微分方程，则该物理量就按波的形式传播； 如：电磁波、热传导、化学中的扩散等过程。

(3) 若物理量是在三维空间中以波的形式传播，波动方程为右式 $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$