数学物理方程

1 数学建模和基本原理介绍

张 丹 副教授/博导

能源与动力工程学院

数学与统计学院（兼）

动力工程多相流国家重点实验室

数学物理方程

1. 数学建模和基本原理介绍
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
7. Legendre多项式

- 1.1 数学模型的建立
  - 弦振动方程和定解条件
  - 热传导方程和定解条件
  - Poisson方程和定解条件
- 1.2 定解问题的适定性
- 1.3 叠加原理
- 1.4 齐次化原理
- 1.5 二阶线性方程的分类和化简

1.1 数学模型的建立

将物理/社会现象→凝练转化→可解的数学问题

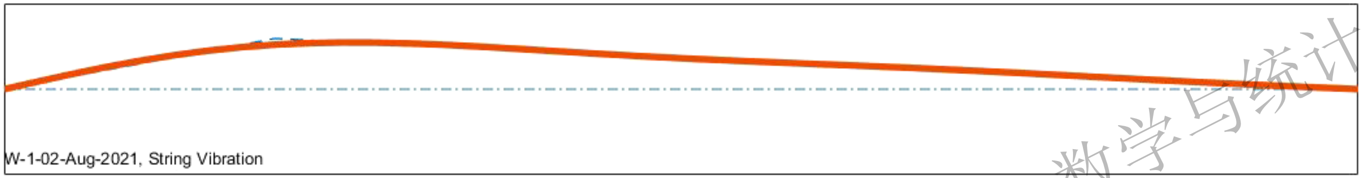
建模步骤

- ❶明确对象
  - 未知函数 以哪个变量为未知函数?→本课程仅研究1个未知函数
  - 自变量 时间/空间3维度→以哪些为自变量→PDE→自变量>=2个
- ❷ 简化假设
  - 现象 ……均匀/各向同性/忽略高阶小量……
  - 时 是否考虑未知函数随时间变化?
  - 空 空间维度是否可以降低?→尽可能用低维度解决
- ❸数理推导
  - 建立空间坐标系→几维?
    - 1维 线性/对数
    - 2维 直角/极坐标
    - 3维 笛卡尔系/柱系/球系
  - 明确研究区域/ 边界/ 选取微元
  - 选取基本物理定律→区域内部/边界 往往服从不同物理定律
  - 微元法→中值定理→PDE控制方程
- ❹定解条件
  - 绝大多数PDE难以求通解→PDE更关心特解
  - PDE仅描述区域内部的时空演化→匹配初始条件/边界条件→
  - 建立定解问题

1.1 数学模型的建立

弦振动方程

物理现象 细弦一根, 均匀/柔软/绷紧, 在垂直于弦的外力作用下做微小横振动, 求弦上任意点/任意时刻的位移



1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

1.明确对象 弦上任意点的横向位移(位置, 时间) $u(x,t)$

任意位置

任意时刻

2.简化假设

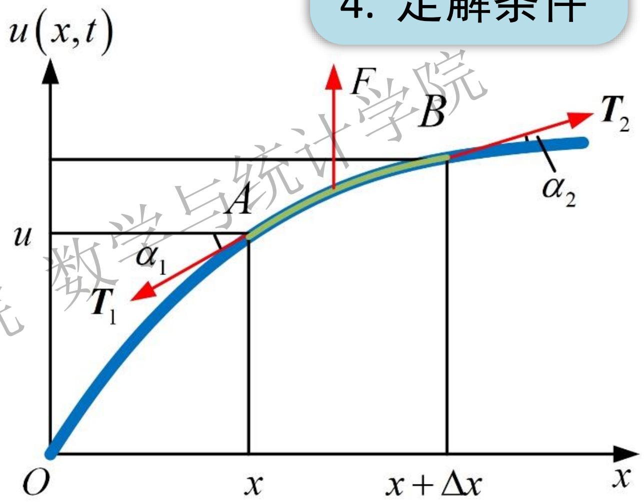
1. 细弦 忽略重力
2. 均匀 线密度一致
3. 柔软 张力只抗伸长/不抗弯曲→忽略弯曲力矩
4. 微小 忽略高阶小量
5. 横振动 位移与平衡位置垂直→振动在同一平面内

1.1 数学模型的建立

弦振动方程

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

1. 以弦线的平衡位置为x轴，垂直于弦线且通过弦线左端点的直线为u轴建立坐标
2. 微元法 任取一小段弦 $(x,x+\Delta x)$ 作为研究对象→质点→Newton第二定律→导出方程
3. 强调 微元不包含弦的两个端点 $x=0,\ x=l$ ，端点运动情况受控于边界条件→已知



弦振动受力分析

水平方向 张力的水平分量平衡 $-|\boldsymbol{T}_1|\cos\alpha_1+|\boldsymbol{T}_2|\cos\alpha_2=0$

强迫外力用力密度表示 $F=\int_x^{x+\Delta x} f_0(x,t)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx$ ⟵ $ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx$ 弧微分

单位弦长所受合外力 N·m^{-1}

竖直方向 Newton第二定律 $\sum F=m\frac{d^2u}{dt^2}$

$$\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$-|\boldsymbol{T}_1|\sin\alpha_1+|\boldsymbol{T}_2|\sin\alpha_2+\int_x^{x+\Delta x} f_0(x,t)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx=\rho\Delta s\frac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial t^2}$$

其中 $x_2\in[x,x+\Delta x]$

线密度 kg·m^{-1}

弦段平均加速度 = x_2 点加速度值

1.1 数学模型的建立

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

弦振动方程

原始控制方程 $$\begin{cases} -|\boldsymbol{T}_1|\cos\alpha_1+|\boldsymbol{T}_2|\cos\alpha_2=0 \\ -|\boldsymbol{T}_1|\sin\alpha_1+|\boldsymbol{T}_2|\sin\alpha_2+\int_x^{x+\Delta x} f_0(x,t)\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx=\rho\Delta s\dfrac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

水平方向的化简

根据假设 微小横振动

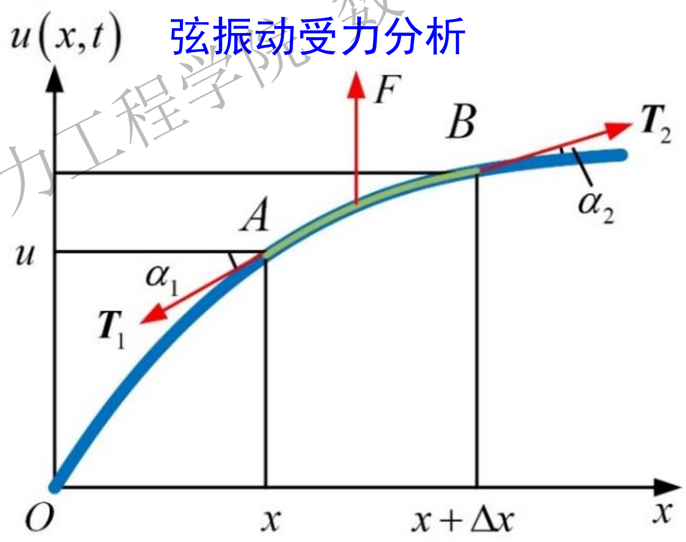
$$\alpha_1\approx\alpha_2\approx 0,$$

$$\cos\alpha_1\approx\cos\alpha_2\approx 1,$$

$$\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x,\ \sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx\Delta x$$

高阶小量


弦振动受力分析

水平方向 $-|\boldsymbol{T}_1|\cos\alpha_1+|\boldsymbol{T}_2|\cos\alpha_2=0\Rightarrow|\boldsymbol{T}_1|=|\boldsymbol{T}_2|=T_0$

各点张力大小相等

1.1 数学模型的建立

弦振动方程 竖直方向的化简

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 0,\ \cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1,\ \sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

微小横振动

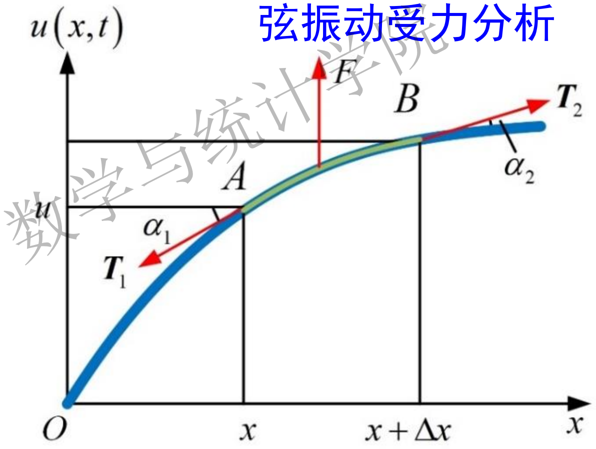
$$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x},\quad \Delta s = \int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \Delta x$$

$$-|\boldsymbol{T}_1|\sin\alpha_1 + |\boldsymbol{T}_2|\sin\alpha_2 + \int_x^{x+\Delta x} f_0(x,t)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx = \rho\Delta s\frac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial t^2}$$

根据张力大小相等 $|\boldsymbol{T}_1| = |\boldsymbol{T}_2| = T_0$，代入正弦近似值

$$-T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x + T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} f_0(x,t)\cdot 1\cdot dx = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial t^2}$$

弦振动受力分析



积分中值定理 $F = \int_x^{x+\Delta x} f_0(x,t)\,dx = f_0(x_1,t)\Delta x,\ x_1 \in [x, x+\Delta x]$

$$T_0\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right) + f_0(x_1,t)\Delta x = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial t^2}$$

$$T_0\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x}{\Delta x} + f_0(x_1,t) = \rho\frac{\partial^2 u(x_2,t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta x \to 0,\ x_1, x_2 \to x,\ T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

微元法

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f_0(x,t)}{\rho}$$

1747 一维弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

揭示了弦质点位移加速度与形变加速度的线性关系

J.R.D'Alembert
1717-1783
French Math.
Astronomer
Physical Scientist

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t\right)$$

弦振动方程

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

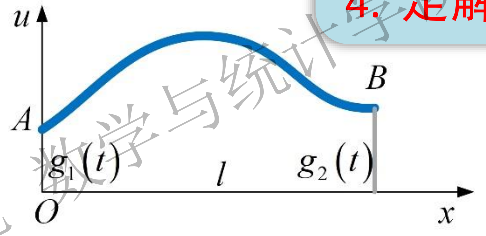
方程的推导仅针对弦内部, 具体运动规律还依赖于初始状态和边界约束

定解条件

- **初始条件**
  - 初始位移 $u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l$
  - 初始速度 $u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l$
- **边界条件**
  - 第一类边界,Dirichlet边界, 已知两端点位移

$$u\left(0,t\right)=g_1\left(t\right),\ u\left(l,t\right)=g_2\left(t\right),\ t\ge 0$$

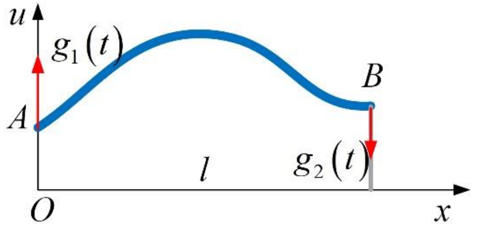
当 $g_1\left(0,t\right)=g_2\left(l,t\right)=C$时, 称弦有固定端



  - 第二类边界,Neumann边界, 已知端点垂直外力

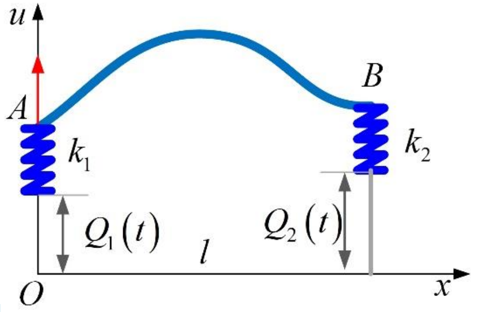
$$-T_0\frac{\partial u\left(0,t\right)}{\partial x}=g_1\left(t\right),\ T_0\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x}=g_2\left(t\right),\ t\ge 0$$

当 $g_1\left(0,t\right)=g_2\left(l,t\right)=0$时, 称弦有自由端



  - 第三类边界, Robin边界, 端点与弹性物体相连接

$$\frac{\partial u\left(0,t\right)}{\partial x}-\sigma_1 u\left(0,t\right)=g_1\left(t\right),\ \frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x}-\sigma_2 u\left(l,t\right)=g_2\left(t\right),\ \ t\ge 0$$

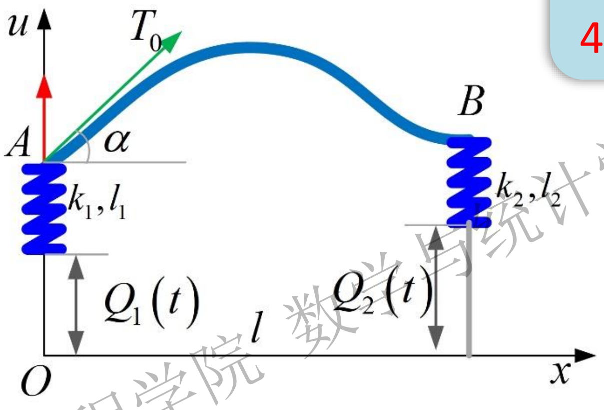


1.1 数学模型的建立

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

弦振动方程

第三类边界条件推导



第三类边界, Robin边界, 端点与弹性物体相连接

弹簧长度与劲度系数 $k_1,l_1,\ k_2,l_2$

弹簧安装位置 $Q_1(t),Q_2(t)$

左端点 竖直方向满足Newton第二定律

$$T_0\frac{\partial u(\Delta x,t)}{\partial x}-k_1\left[u(0,t)-l_1-Q_1(t)\right]+f_0(x_1,t)\Delta x=\rho\Delta x\frac{\partial u^2(x_2,t)}{\partial t^2}$$

其中 $x_1,x_2\in[0,0+\Delta x]$

张力竖直分量　弹簧弹力　强迫外力　位移加速度

令 $\Delta x\to 0$ $\quad T_0\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-k_1\left[u(0,t)-l_1-Q_1(t)\right]=0$

微元法

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\frac{k_1}{T_0}u(0,t)=-\frac{k_1}{T_0}\left[l_1-Q_1(t)\right]$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\sigma_1 u(0,t)=g_1(t),\quad t\ge 0$$

同理可得右端点的第三类边界条件

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\sigma_1 u(0,t)=g_1(t),\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}-\sigma_2 u(l,t)=g_2(t),\quad t\ge 0$$

第三类边界 规定了边界处未知函数值与未知函数空间变化率线性组合的函数关系

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

弦振动方程

定解问题

PDE+定解条件组成有唯一确定解的问题

混合问题 包含初始条件+边界条件

$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0$ PDE 不含端点/0时刻

$u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t),\ t\ge 0$ 边界条件 含0时刻, 两端可不同类型

$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l$ 初始条件 含端点

Cauchy问题 无界区域初值问题,仅有初始条件, 如无界弦振动

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),-\infty<x<\infty,t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty \end{cases}$$

A.L.Cauchy
1789-1857
French Math.
Physical Scientist

波动方程

弦振动方程→一维波动方程→杆的纵振动/高频传输线/波动光学

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

$f(x,t)=0$ 弦的自由振动/齐次一维波动方程

$f(x,t)\neq 0$ 弦的受迫振动/非齐次一维波动方程

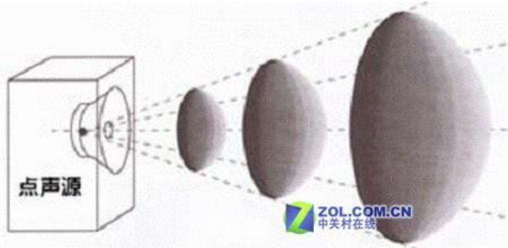
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,t)$$

Leonhard Euler
1707-1783
Swiss Math.
Physical Scientist

J.L.Lagrange
1736-1813
French Math.
Physical Scientist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

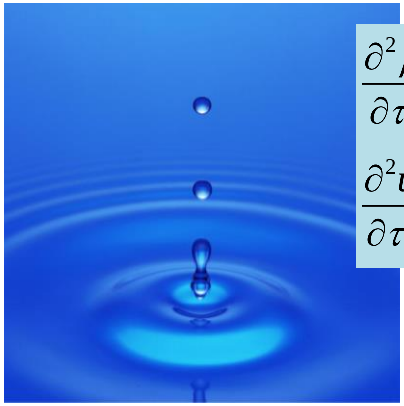


波动方程的应用

$$\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}$$

流体力学

1887 弱扰动/可压缩介质/传播



$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}$$

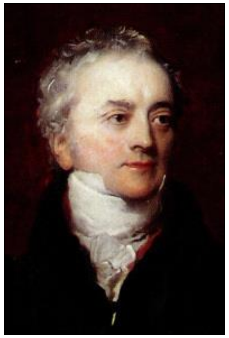
$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}$$

E.Mach
1838-1916
Austria
Aerodynamics

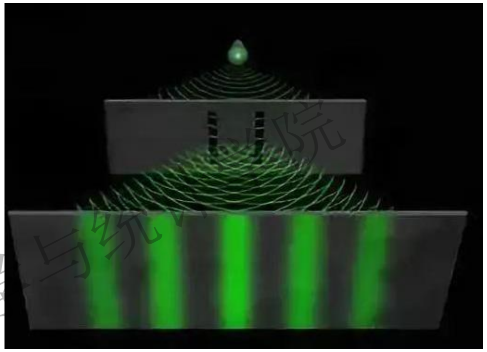
波动光学

1807 光路尺寸/波长/可比拟



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

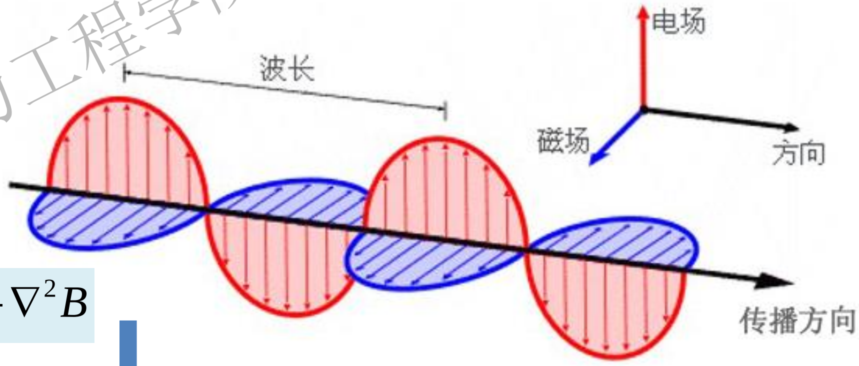
T.Young
1773-1829
British
Physics Scientist



电磁波

交变电/磁场时空演化遵守波动方程

→且能相互产生→预言电磁波



J.Maxwell
1831-1879
British Math.
Physics Scientist

1864
电磁场方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B$$

$$\nabla \cdot B = 0,\ \nabla \cdot E = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu\varepsilon} \Delta B = \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu\varepsilon} \Delta E = \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

1879 实验
证实电磁
波的存在

H.Hertz
1857-1894
German
Physics Scientist

先预言后证明的成功典范→展现了PDE的威力

1.1数学模型的建立

定解问题的表达

6要素

3组方程　　3组范围

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t) & t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

只有里子/没有面子

标时间范围的是边界条件

标空间范围的是初始条件

数学模型的建立

例1 若方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$ 描述弦振动, 请解释各项物理意义

a $$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}\right]}=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\right]}=\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$ 波速

$f(x,t)$ $$f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{\rho}=\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}\right]=\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right]$$ 单位质量所受外力

$u_{tt}=\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}$ 弦上任意点的位移加速度

$u(x,0)$ 初始位移/ 弦的初始形状

$u_t(x,0)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ 初始速度

$u(0,t),\ u(l,t)$ 左/右端点的位移

$u_x(0,t),\ u_x(l,t)$ 横位移在左/右端点的空间变化率

1.1 数学模型的建立

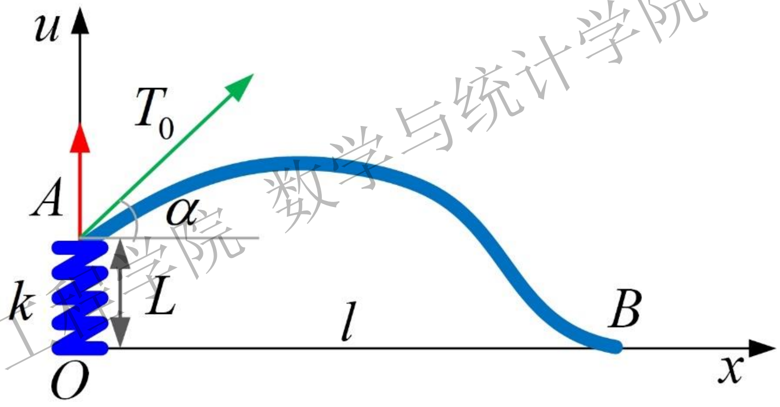
例2 一根长为 l 两端张紧的细弦;

弦左端系于本长为 L ，弹性系数为 k 的弹簧上, 弹簧下端固定在弦的平衡位置;

弦右端固定在平衡位置;

整根弦初始速度为0, 初始位移为 $\varphi(x)$;

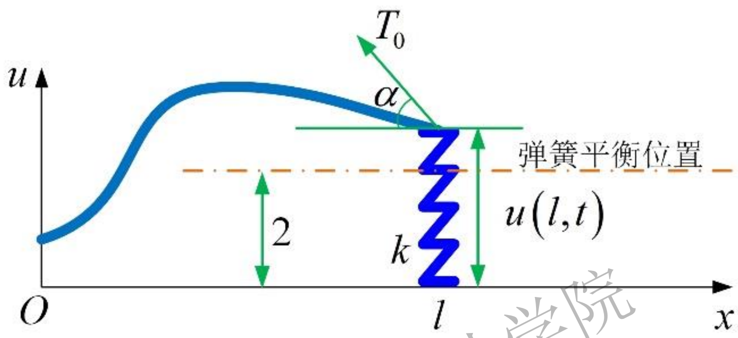
则描述该弦振动的定解问题可表示为



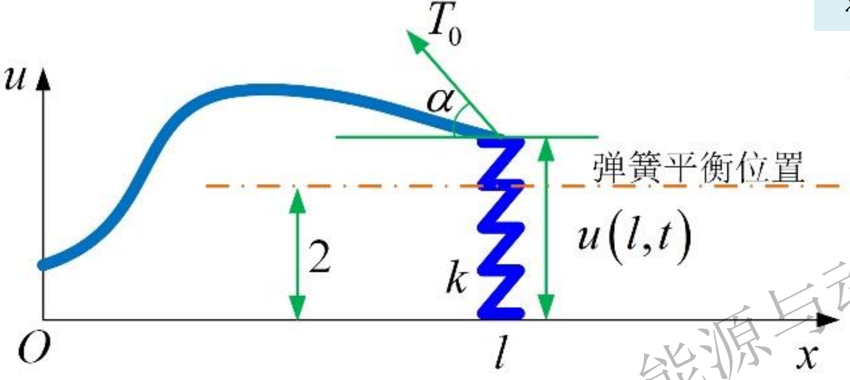
$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0 \\
u_x(0,t) = \dfrac{k}{T_0}\left[u(0,t) - L\right],\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0 \\
u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l
\end{cases}
$$

1.1 数学模型的建立

例3 一根长为 l 两端张紧的细弦,弦上张力为 T_0 左端 $x=0$ 为自由端; 右端 $x=l$ 系在本长为 2, 劲度系数为 k 的弹簧上, 弹簧另一端固定在平衡位置, 则边界条件可表示为



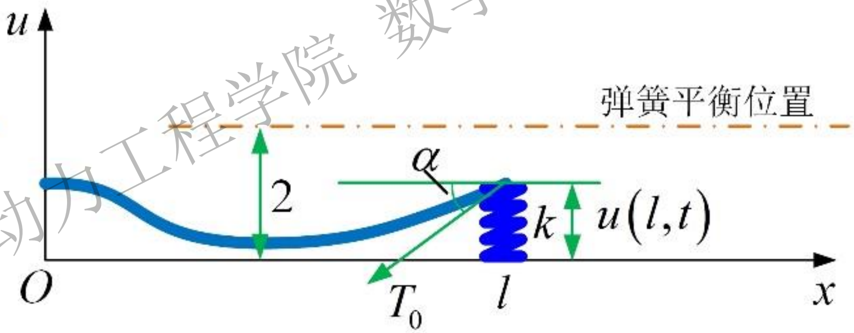
$$u_x(0,t)=0,\quad -T_0u_x(l,t)=k\left[u(l,t)-2\right],\ t\ge 0$$



右端张力竖直分量向上 $\sin\alpha=-u_x(l,t)$

弹簧拉伸 $+k\left[u(l,t)-2\right]$

$$T_0\cdot\left[-u_x(l,t)\right]=+k\left[u(l,t)-2\right]$$



右端张力竖直分量向下 $\sin\alpha=+u_x(l,t)$

弹簧压缩 $-k\left[u(l,t)-2\right]$

$$T_0\cdot\left[+u_x(l,t)\right]=-k\left[u(l,t)-2\right]$$

$$-T_0u_x(l,t)=k\left[u(l,t)-2\right]$$

微元段倾角 $\sin\alpha=\pm u_x(l,t)$ 需分类讨论

数学物理方程

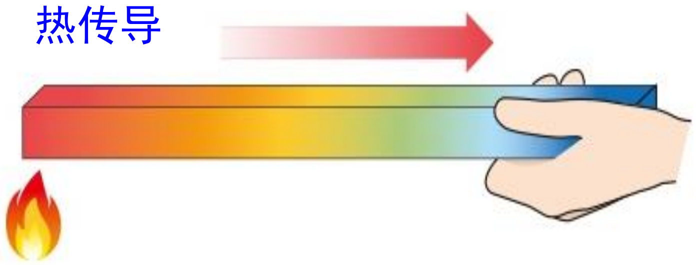
1. **数学建模和基本原理介绍**
   - 1.1 数学模型的建立
     - 弦振动方程和定解条件
     - 热传导方程和定解条件
     - Poisson方程和定解条件
   - 1.2 定解问题的适定性
   - 1.3 叠加原理
   - 1.4 齐次化原理
   - 1.5 二阶线性方程的分类和化简
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
7. Legendre多项式

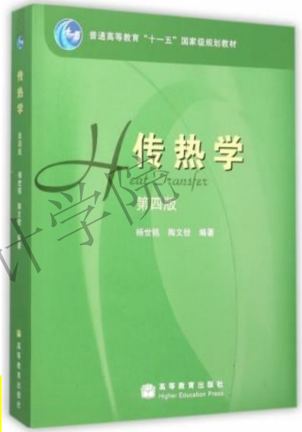
1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

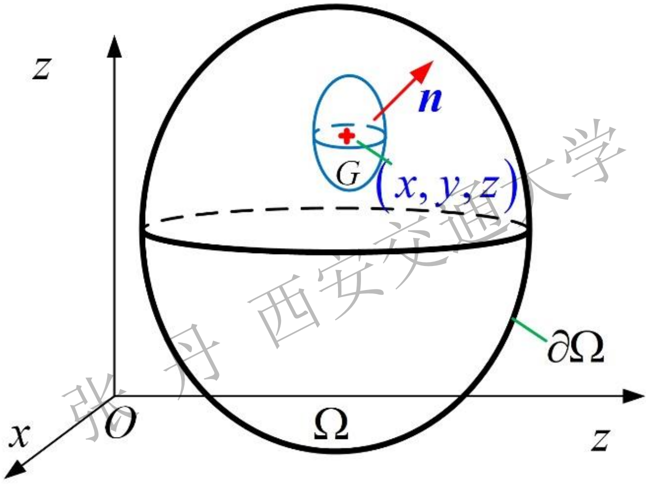
热传导方程

J.Fourier
1768-1830
French Math.
Physical Scientist





1. 热量如何传递 向哪里传? 传多快?
2. 传热过程中→导热体温度随时间/空间如何演化



导热体传热分析

物理现象

三维导热体,
均质/各向同性/
有内热源/
有外部热交换

求内部温度场随时间的变化

1.1 数学模型的建立

预备知识 梯度/方向导数/散度

Hamilton算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

W. Hamilton
1805-1865
Ireland Math.
Physical Scientist

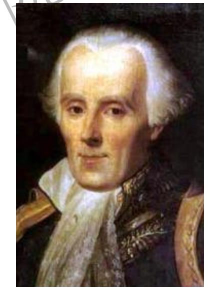
标量 f → ∇ →矢量→梯度

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

矢量 $\boldsymbol{u}$ → ∇ →标量→散度

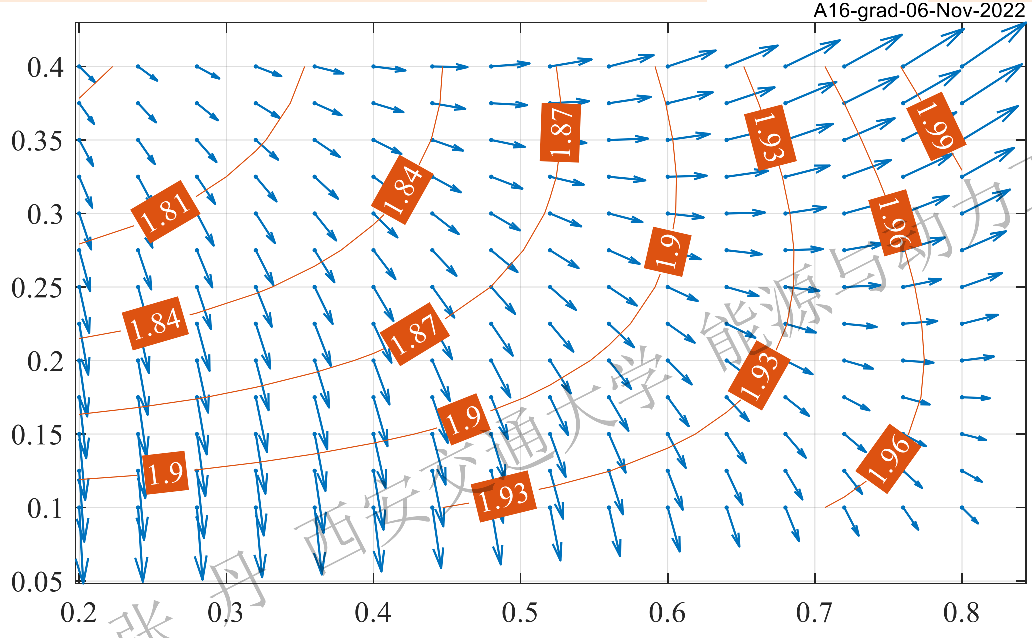
点积

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \left(u_x, u_y, u_z\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$



P.Laplace
1749-1827
French Math.
Physical Scientist

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$



	分量	合矢量
方向	标量沿各维增大的方向	等值面法线/ 变化率最大的方向
大小	标量沿各维变化率	标量最大变化率

方向导数 标量场沿给定方向变化率

$$\frac{df}{dn} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \left|\nabla f\right| \cdot \cos\theta$$

梯度方向是标量场增速最快方向

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

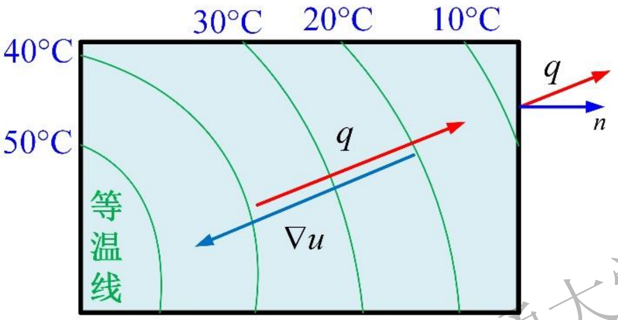
预备知识 传热基本定律

传热
- 方向: 热量由高温→低温
- 速率: 热流密度 $\boldsymbol{q},\ \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}}\right]=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$ →依赖传热形式

导热

1821 Fourier导热定律

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla u$$



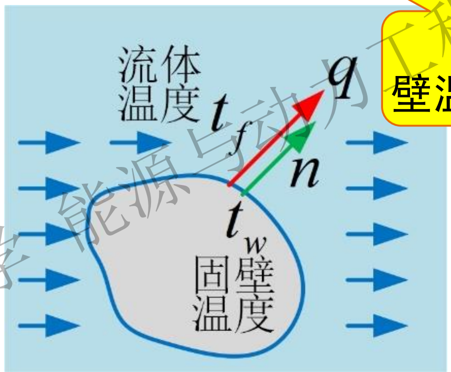
壁面法向 $\boldsymbol{q}_w=-k\nabla u\cdot\boldsymbol{n}=-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$

对流

1701 Newton冷却定律

$$\boldsymbol{q}=k\left(t_w-t_f\right)$$

必须 壁温-流体温度

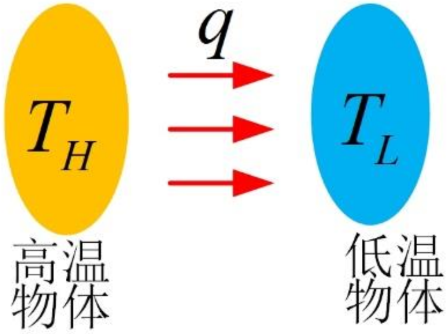


以边界外法线为参考方向

辐射

1879 Stefan-Boltzmann 定律

$$\boldsymbol{q}=k\left(T_H^4-T_L^4\right)$$



$$[k]=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}\right]$$

J.Fourier
1768-1830
French Math.
Physical Scientist

$$[k]=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}}\right]$$

I.Newton
1643-1727
British Physical
Scientist

J.Stefan
1835-1893
Austria Physical
Scientist

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f\left(x,y,z,t\right)$$

热传导方程

物理现象 三维导热体, 均质/各向同性/有内热源/有外部热交换, 求内部温度场随时间的变化

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

明确对象 温度场(位置, 时间) $u\left(x,y,z,t\right)$

任意点

任意时刻

简化假设

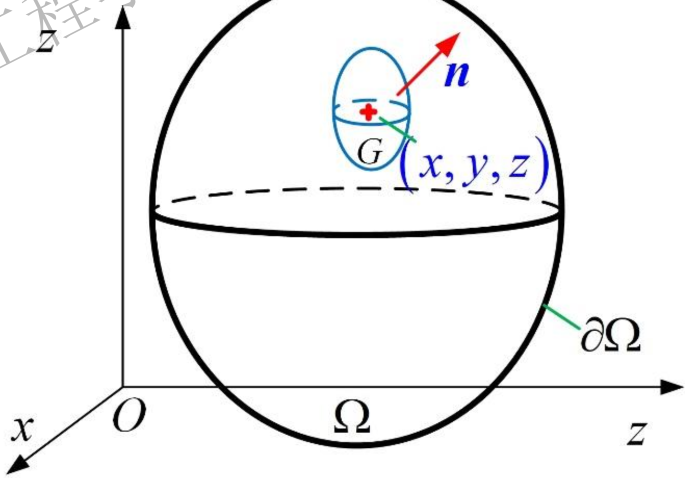
1. **均质** 体密度均匀
2. **各向同性** 导热系数为常数,不随方向变化
3. 内部 有内热源
4. 边界 有热交换

变量及单位

体密度 ρ, $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ 比热容 c, $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$

导热系数 k, $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}\right]$ 热流密度 q, $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$

内热源强度 $f_0\left(x,y,z,t\right)$, $\left[\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right]$



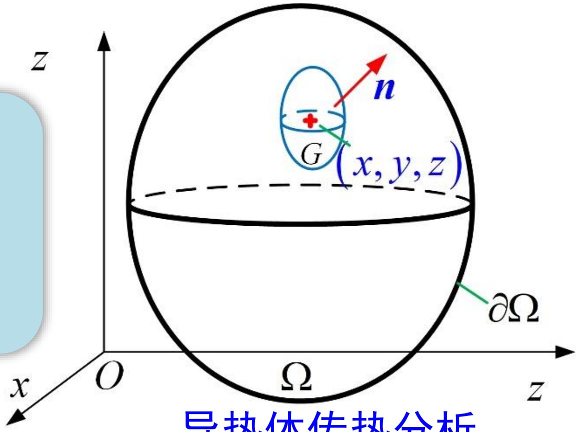
导热体传热分析

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

热传导方程

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件



导热体传热分析

变量及单位

体密度 ρ, $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ 比热容 c, $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$

导热系数 k, $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}\right]$ 热流密度 q, $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$

内热源强度 $f_0(x,y,z,t)$, $\left[\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right]$

西安交通大学 本科“十三五”规划教材

普通高等教育理学类“十三五”规划教材

数学物理方程（第2版）

申建中 刘峰 编著

西安交通大学出版社

1. 建立如图坐标系, 导热体占据的空间为**Ω**, 边界为∂**Ω**
2. 微元法：任取点(x, y, z)及充分小的邻域 $G\subset\Omega$ →能量守恒→导热方程
3. 强调 推导在内部空间**Ω**进行,不包括边界 $\partial\Omega$, 边界温度受控于边界条件

物理原理

纠正课本!!!

1. 能量守恒(热力学第一定律)

邻域内显热变化=边界净流入热量+内热源产热量

2. Fourier导热定律 热流密度大小正比于温度梯度,方向与梯度相反

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla u \qquad \boldsymbol{q}_w=-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$$

内部　　边界

J.Fourier
1768-1830
French Math.
Physical Scientist

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

热传导方程

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

以邻域G为控制体运用能量守恒

邻域内显热变化=内热源产热量+边界净流入热量

① ② ③

邻域G上, 充分小的时间段 $[t_1,t_2]$ 内, 显热的变化

①
$$Q_2-Q_2=\rho V_G c u(x_1,y_1,z_1,t_2)-\rho V_G c u(x_1,y_1,z_1,t_1)$$

$$[\mathrm{J}]=\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot\mathrm{K}\right]=[\mathrm{J}]$$

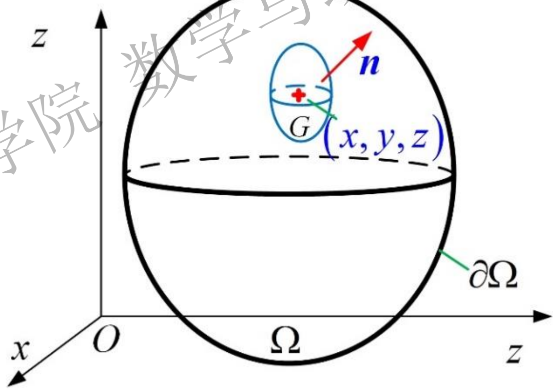
多变量推导
量纲验证

内热源的产热量

②
$$W=f_0(x_1,y_1,z_1,\bar{t}_1)\rho V_G(t_2-t_1)$$

其中 $(x_1,y_1,z_1)\in G,\ \ \bar{t}_1\in[t_1,t_2]$

$$[\mathrm{J}]=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}\right]=[\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}]=[\mathrm{J}]$$



导热体传热分析

变量及单位

体密度 ρ, $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$ 比热容 c, $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right]$

导热系数 k, $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}\right]$ 热流密度 q, $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$

内热源强度 $f_0(x,y,z,t)$, $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right]$

1.1 数学模型的建立

邻域内显热变化❶=内热源产热量❷+边界净流入热量❸

热传导方程

时间段$[t_1,t_2]$内
边界净流入热量 ❸

$$\Phi=\iint_{\partial G}\boldsymbol{q}\cdot(-\boldsymbol{n})ds\cdot(t_2-t_1)$$

流入方向与外法线相反

时间差

Fourier导热定律 $\boldsymbol{q}=-k\nabla u$

$$=\iint_{\partial G}-k\nabla u(x,y,z,\bar{t}_2)\cdot(-\boldsymbol{n})ds\cdot(t_2-t_1)$$

$$=k\iint_{\partial G}\nabla u(x,y,z,\bar{t}_2)\cdot\boldsymbol{n}\cdot ds\cdot(t_2-t_1)$$

Gauss公式

$$\iint_{\partial G}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iiint_G\nabla\cdot\boldsymbol{F}dV$$

规避矢量方向

$$=k\iiint_G\nabla\cdot\nabla u(x,y,z,\bar{t}_2)\cdot dV\cdot(t_2-t_1)$$

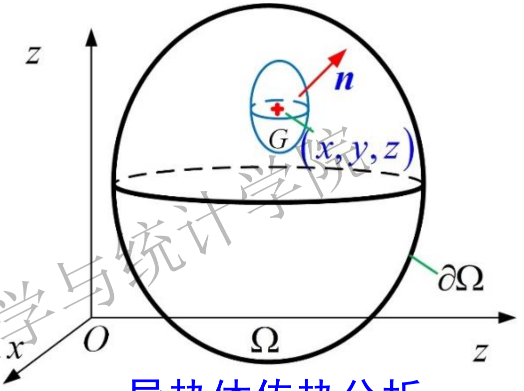
$$=k\iiint_G\Delta u(x,y,z,\bar{t}_2)dV\cdot(t_2-t_1)$$

积分中值定理

$$\iiint_G f(x,y,z)dV=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})V_G,\quad(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in G$$

$$=k\cdot\Delta u(x_2,y_2,z_2,\bar{t}_2)\cdot V_G(t_2-t_1)$$

$$[\mathrm{J}]=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}\cdot\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}^2}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}\right]=[\mathrm{J}]$$



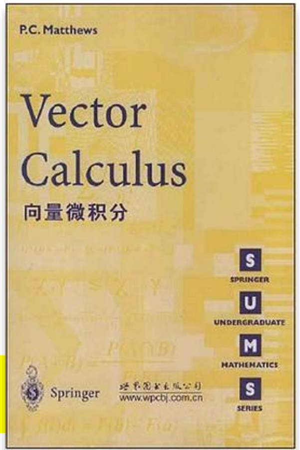
导热体传热分析

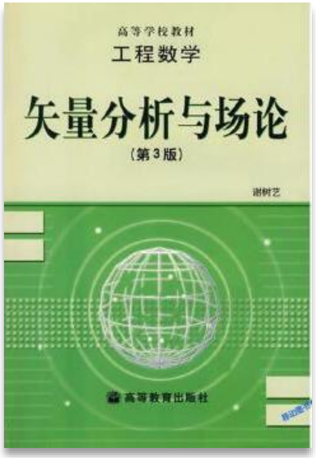
Hamilton算子

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\cdot\nabla u=\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

Laplace算子





矢量代数大大简化了推导

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

热传导方程

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

① ③ ②

邻域内显热变化=边界净流入热量+内热源产热量

$$Q_2-Q_2=\Phi+W$$

$$\rho V_G cu(x_1,y_1,z_1,t_2)-\rho V_G cu(x_1,y_1,z_1,t_1)=k\cdot\Delta u(x_2,y_2,z_2,\bar{t}_2)\cdot V_G(t_2-t_1)+f_0(x_1,y_1,z_1,\bar{t}_1)\rho V_G(t_2-t_1)$$

中值定理

$$\rho V_G c\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,y_1,z_1,\bar{t}_3)\cdot(t_2-t_1)=k\cdot\Delta u(x_2,y_2,z_2,\bar{t}_2)\cdot V_G(t_2-t_1)+f_0(x_1,y_1,z_1,\bar{t}_1)\rho V_G(t_2-t_1)$$

$$\cdot\frac{1}{V_G(t_2-t_1)}$$

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,y_1,z_1,\bar{t}_3)=k\cdot\Delta u(x_2,y_2,z_2,\bar{t}_2)+f_0(x_1,y_1,z_1,\bar{t}_1)\rho$$

微元法

令 $G\to(x,y,z),\ t_2\to t_1$

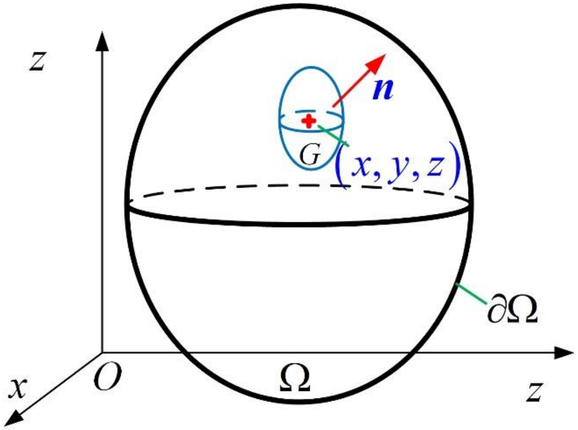
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t_1)=\frac{k}{\rho c}\cdot\Delta u(x,y,z,t_1)+\frac{f_0}{c}(x,y,z,t_1)$$

t_1 的任意性→此式对任意时间都成立

1822 三维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)=a^2\cdot\Delta u(x,y,z,t)+f$$

J.Fourier
1768-1830
French Math.
Physical Scientist



导热体传热分析

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

热传导方程 **关于a^2**

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\Delta u+f$$

$a^2\rightarrow a$

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{kg}}\right]}=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{kg\cdot m\cdot m}}{\mathrm{kg\cdot s^2}}\right]}=\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

波速

导热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\Delta u+f$$

$a^2\rightarrow a$ 无物理意义

$$a^2=\frac{k}{\rho c}=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}\cdot\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{\mathrm{kg\cdot K}}{\mathrm{J}}\right]$$

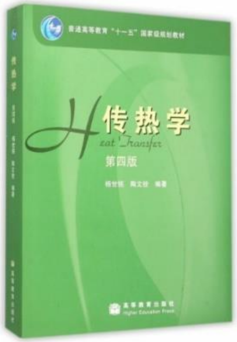
$$=\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cdot K\cdot s}}\cdot\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{\mathrm{kg\cdot K}}{\mathrm{J}}\right]=\left[\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}\right]$$

热扩散率

数学物理方程（第2版）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\Delta u+f$$

方便研究方程数学性质



传热学

Heat Transfer

第四版

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\cdot\Delta u+f$$

有明确物理意义

1.1 数学模型的建立

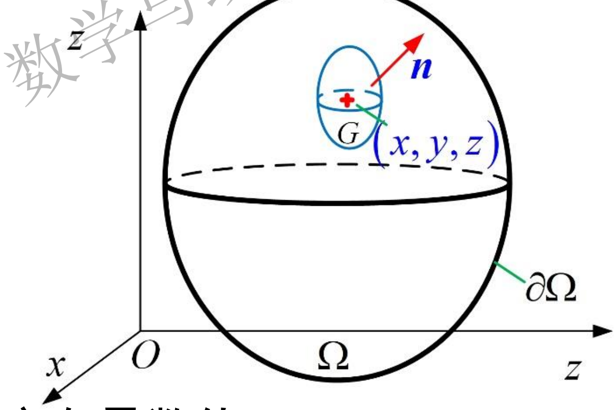
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

热传导方程

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

方程的推导仅针对导热体内部, 温度场演化依赖于初始状态和边界约束

导热体传热分析



定解条件

- **初始条件**
  - 初始温度分布 $u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in\partial\Omega$
- **边界条件**
  - 第一类边界,Dirichlet边界, 已知边界温度分布

    $u_{\partial\Omega}=g(x,y,z,t)$ 规定了变量在边界上的数值

    当 $g(x,y,z,t)=C$ 时, 恒温边界
  - 第二类边界,Neumann边界,已知边界的热流密度

    $q_{\partial\Omega}=-k\dfrac{\partial u}{\partial n}=g(x,y,z,t)$ 规定了变量沿边界外法线的方向导数值

    当 $g(x,y,z,t)=C$ 时, 恒热流密度边界, $g(x,y,z,t)=0$ 时, 绝热边界
  - 第三类边界, Robin边界, 对流边界, 导热体与外界对流传热

    $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=g(t)$ 规定了边界上的变量及其外法线方向导数线性组合的数值

1.1 数学模型的建立

热传导方程 **第三类边界条件推导**

内部 导热服从Fourier导热定律

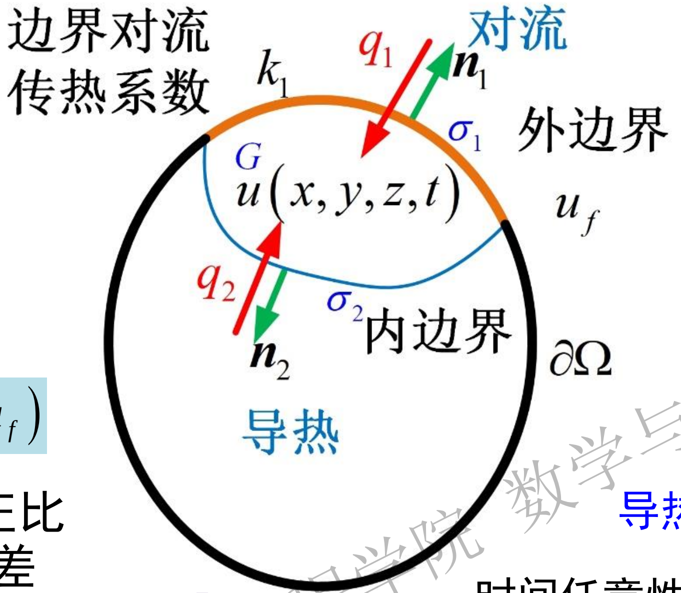
边界 对流传热服从Newton冷却定律

1701

Newton 冷却定律 $q_{\partial\Omega} = k\left(u - u_f\right)$

I.Newton
1643-1727
British Physical Scientist

对流热流密度正比于固壁/流体温差



导热体边界传热分析

1. 明确对象
2. 简化假设
3. 数理推导
4. 定解条件

①②③

邻域显热变化=边界净流入热量+内热源产热量

$$Q_2 - Q_2 = \Phi + W$$

$$\Phi = \iint_{\sigma_1} \boldsymbol{q}_1\left(-\boldsymbol{n}_1\right) ds \cdot \left(t_2 - t_1\right) + \iint_{\sigma_2} \boldsymbol{q}_2\left(-\boldsymbol{n}_2\right) ds \cdot \left(t_2 - t_1\right)$$

$$= -k_1 \iint_{\sigma_1} \left(u - u_f\right) ds \cdot \left(t_2 - t_1\right) + \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds \cdot \left(t_2 - t_1\right)$$

$$\rho V_G c \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_1, y_1, z_1, \overline{t_3}\right) \cdot \left(t_2 - t_1\right) = -k_1 \iint_{\sigma_1} \left(u - u_f\right) ds \cdot \left(t_2 - t_1\right)$$

$$+ \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds \cdot \left(t_2 - t_1\right) + f_0\left(x_1, y_1, z_1, \overline{t_1}\right) \rho V_G \left(t_2 - t_1\right)$$

时间任意性两边可约去

$$\rho V_G c \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_1, y_1, z_1, \overline{t_3}\right) = -k_1 \iint_{\sigma_1} \left(u - u_f\right) ds$$

$$+ \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds + f_0\left(x_1, y_1, z_1, \overline{t_1}\right) \rho V_G$$

微元法→令邻域趋于无穷小

$$V_G \to 0,\ \sigma_2 \to \sigma_1,\ \boldsymbol{n}_2 \to \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}$$

$$0 = -\iint_{\sigma_1} \left[k_1\left(u - u_1\right) + k \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$

导热传至边界的热量以对流散出

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{k_1}{k} u = \frac{k_1}{k} u_f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$$

规定了边界上未知函数及其空间变化率组合的值

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f\left(x,y,z,t\right)$$

热传导方程

定解问题
微分方程+
定解条件组
成有唯一确
定解的问题

混合问题 包含初始条件+边界条件

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f\left(x,y,z,t\right), & 0<x<l,\ t>0 \\ u\left(x,y,z,t\right)=g\left(t\right), & \left(x,y,z\right)\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \\ u\left(x,y,z,0\right)=\varphi\left(x,y,z\right), & \left(x,y,z\right)\in\Omega\cup\partial\Omega \end{cases}$$

- **微分方程** 不含边界/0时刻
- **边界条件** 含0时刻,可不同类型
- **初始条件** 含边界

Cauchy问题 仅有初始条件, 如无界热传导→无界区域上的初值问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f\left(x,y,z,t\right),-\infty<\left(x,y,z\right)<\infty,t>0 \\ u\left(x,y,z,0\right)=\varphi\left(x\right),\quad -\infty<\left(x,y,z\right)<\infty \end{cases}$$

较波动方程
少1初始条件

导热方程的拓展

数学 物理

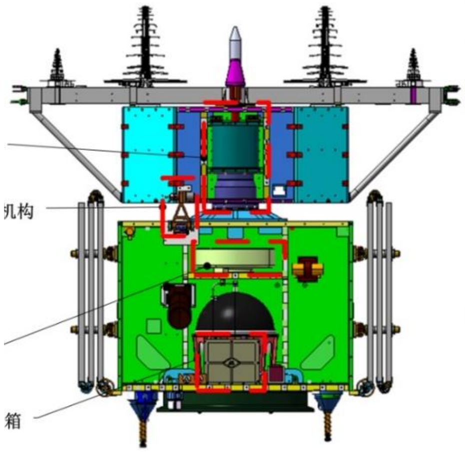
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$

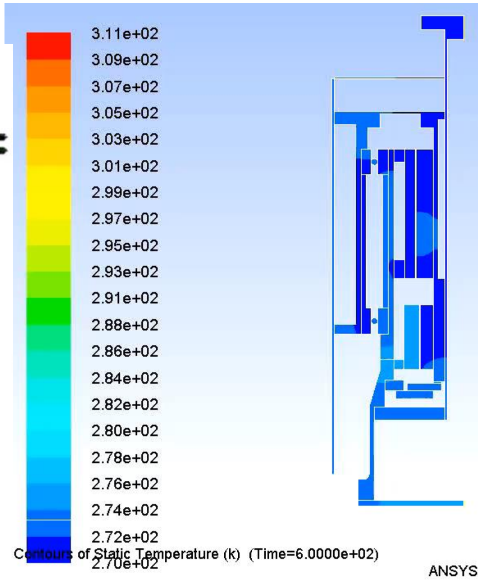
$$\begin{cases} f=0 \\ f\neq 0 \end{cases}$$

- $f=0$ 齐次方程/无内热源
- $f\neq 0$ 非齐次方程/有内热源

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t\right)$$ 一维, 细杆导热

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f\left(x,y,t\right)$$ 二维, 薄板导热

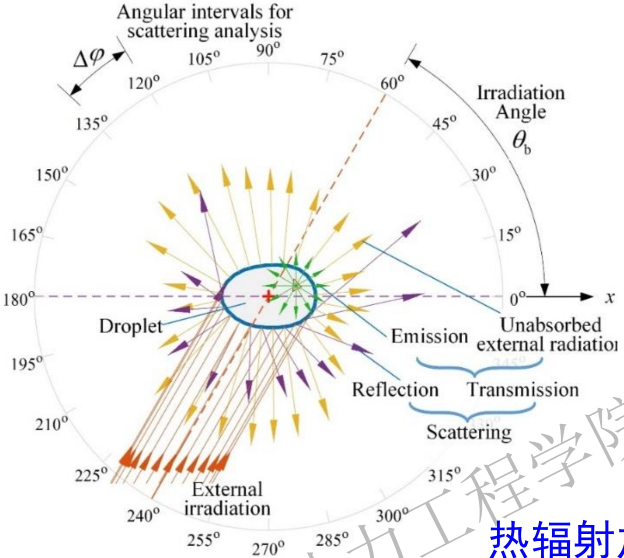


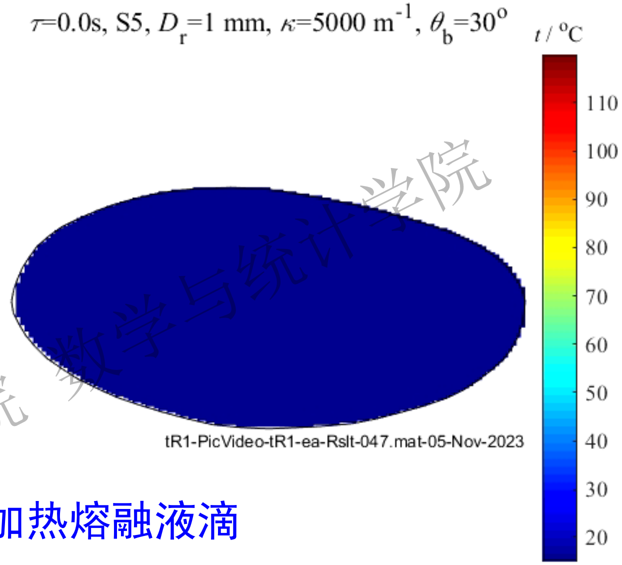


1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f\left(x,y,z,t\right)$$

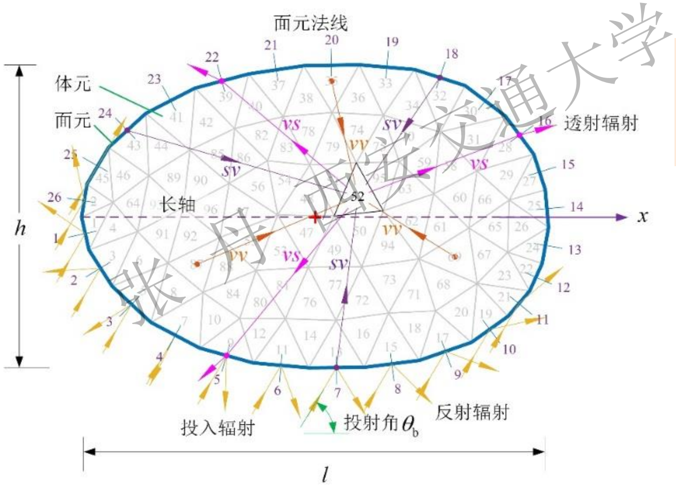
导热方程与新能源





热辐射加热熔融液滴

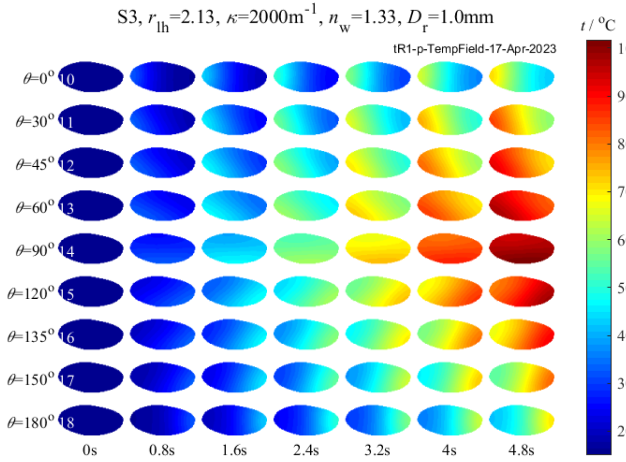
熔融液滴吸收太阳辐射→液滴温度场演化服从导热方程



Delaunay三角网格

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau}=\frac{k}{\rho_w c_p}\left(\nabla\cdot\nabla T\right)+\frac{S_R\left(i\right)}{\rho_w c_p\cdot dV_i}$$

$$S_R\left(i\right)=\sum_{j=1}^{n_s} sv\left(i,j\right)+\sum_{j=1}^{n_v} vv\left(i,j\right)-\sum_{j=1}^{n_s} vs\left(j,i\right)-\sum_{j=1}^{n_v} vv\left(j,i\right)$$



不同投射方向下液滴
温度场的时空演化

1.1 数学模型的建立

例1 导热方程 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)$ 描述一维杆热传导,解释各项物理意义

a^2 $$a^2=\frac{k}{\rho c}=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}\cdot\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{J}}\right]=\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}\cdot\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{J}}\right]=\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$$ 热扩散率

$f(x,t)$ $$f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{c}=\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{J}}\right]=\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{J}}\right]=\left[\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}\right]$$ 内热源导致的温升

$u_t=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ 杆上任意点的温度变化率

$u(x,0)$ 杆上初始温度分布

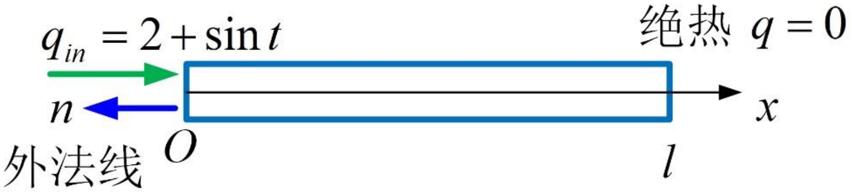
$u(0,t),\ u(l,t)$ 杆左/右端点的温度

$u_x(0,t)$ $$q=-k\frac{\partial u(0,t)}{\partial n}=k\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\ \Rightarrow\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{q}{k}$$ 表征左端点热流密度

$u_x(l,t)$ $$q=-k\frac{\partial u(l,t)}{\partial n}=-k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}\ \Rightarrow\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=-\frac{q}{k}$$ 表征右端点热流密度大小

1.1 数学模型的建立

例2 一维细杆导热系数为 k , 左侧 $x=0$ 处热流密度为 $2+\sin t,\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$ 的热量持续传入;右侧 $x=l$ 绝热, 则该一维杆的边界条件可表示为



$$-ku_x(0,t)=2+\sin t,\ u_x(l,t)=0,\quad t\ge 0$$

左端点 $$q=-(2+\sin t)=-k\frac{\partial u(0,t)}{\partial n}=-k\frac{\partial u(0,t)}{-\partial x}=k\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=ku_x(0,t)$$

1. 边界传热涉及3种方向: 热流方向 / 温度梯度方向 / 边界外法线方向
2. 边界为传入→热流方向与外法线方向相反

边界上热流密度的方向以外法线为参考

讨论 若该热流密度改为从右端点持续传入呢?

右端点 $$q=-(2+\sin t)=-k\frac{\partial u(l,t)}{\partial n}=-k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=-ku_x(l,t)$$ ➡ $$ku_x(l,t)=2+\sin t,\quad t\ge 0$$

1.1 数学模型的建立

例3 一个半径为R的铁球占据的空间为 $B(x,y,z)$，其外表面可表示为 $\partial B(x,y,z)$ ，铁球的导热系数为 k , 初始温度为 $200°\mathrm{C}$, 放在空气中自然冷却, 若空气的温度恒定为 $27°\mathrm{C}$， 铁球表面与空气的传热系数为 h , 则该铁球内温度分布 $u(x,y,z)$ 所满足的边界条件为

$$-k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}=h\left[u(x,y,z,t)-27\right],\ (x,y,z)\in\partial B,\ t\geq 0$$

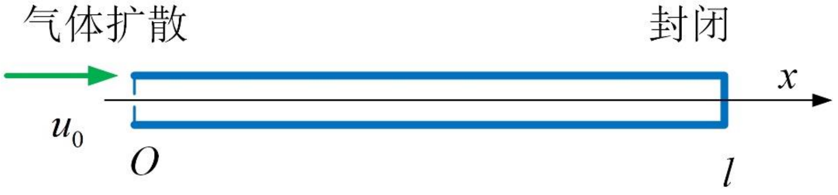
1.1 数学模型的建立

例4 一根长为 l 的细杆, 侧面与外界无热交换, 杆内热源为 $f(x,t)$, 初始温度为 $\varphi(x)$, 杆左端保持 0 ℃, 右端绝热, 则描述杆内温度演化的定解问题可表示为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u_x(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

1.1 数学模型的建立

例5 一根长为 l 的细管, 两端封闭. 管外大气含有某种浓度为 u_0 的气体. 0时刻打开左端, 气体向管内扩散, 右端保持封闭, 则描述管内气体浓度 $u(x,t)$ 所满足的定解问题可表示为



$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = u_0,\ u_x(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

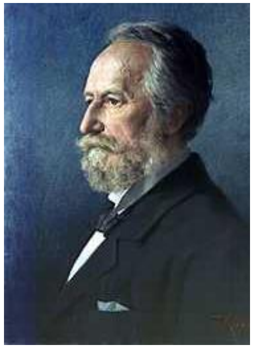
扩散现象亦服从导热方程

1855, 不可压缩/低浓度, Fick扩散定律

$$q = -k \cdot \nabla u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2 \Delta u$$

A.Fick
1829-1901
German
Physical
Scientist



数学物理方程

1. **数学建模和基本原理介绍**
   - 1.1 数学模型的建立
     - 弦振动方程和定解条件
     - 热传导方程和定解条件
     - Poisson方程和定解条件
   - 1.2 定解问题的适定性
   - 1.3 叠加原理
   - 1.4 齐次化原理
   - 1.5 二阶线性方程的分类和化简
2. **分离变量法**
3. **Bessel函数**
4. **积分变换法**
5. **Green函数法**
6. **特征线法**
7. **Legendre多项式**

1.1 数学模型的建立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f$$

Poisson方程/Laplace方程

变量：空间分布→时域演化的影响

波动方程 $$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$$

导热方程 $$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

若自由项f/边界条件均与时间t无关→当时间充分大时→u亦与时间无关

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

描述稳态时，变量各空间维度上变化率的关系

Poisson方程(位势方程)

$$f(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$f(x,y,z)=0$$

Laplace方程(调和方程)

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

S.Poisson
1781-1840
French Math.
Physical Scientist

P.Laplace
1749-1827
French Math.
Physical Scientist

$\Delta u = f$ 边界条件

第一类边界,Dirichlet边界

$$u_{\partial\Omega}=g,\ (x,y,z)\in\partial\Omega$$ 规定了变量在边界上的数值

第二类边界,Neumann边界

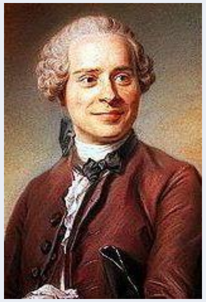
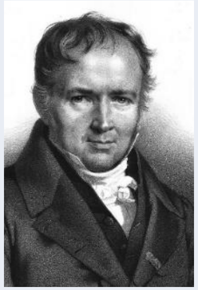
$$\frac{\partial u}{\partial n}=g,\ (x,y,z)\in\partial\Omega$$ 规定了变量在边界外法线方向导数值

第三类边界, Robin边界

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=g,\ (x,y,z)\in\partial\Omega$$

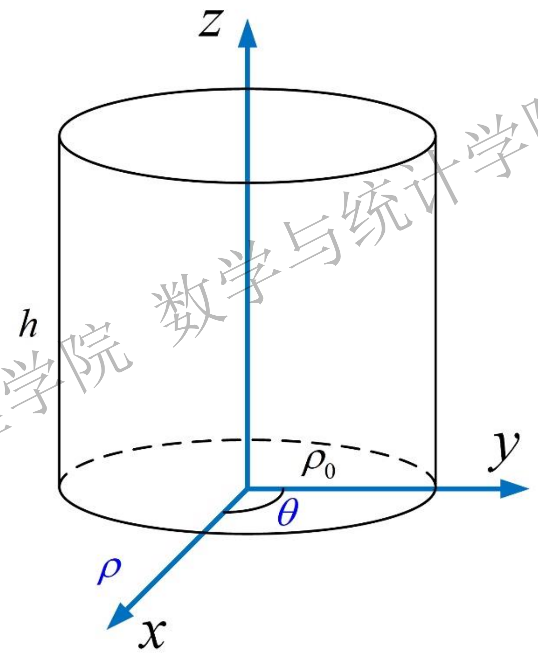
规定了边界上变量及其外法线方向导数线性组合的数值

1.1 数学模型的建立

	波动方程	导热方程	Poisson方程
PDE	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f$	$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u + f$	$0 = \Delta u + f$
发现	**1747**  **J.R.D'Alembert** **1717-1783** **French Math.** **Physical Scientist**	**1822**  **J.Fourier** **1768-1830** **French Math.** **Physical Scientist**	**1837**  **S.Poisson** **1781-1840** **French Math.** **Physical Scientist**
物理原理	Newton第二定律	能量守恒/Fourier导热定律	-
推导方法	微元法：微小弦段	微元法：微小邻域	导热充分发展
定解条件	初始条件: 未知函数/变化率的初始分布 边界条件: 3类	初始条件:未知函数初始分布 边界条件: 3类	初始条件: 无 边界条件: 3类
物理意义	变量变化加速度与变量二阶空间变化率的线性关系	变量变化速度与变量二阶空间变化率的线性关系	稳态时变量的空间分布

1.1 数学模型的建立

例1 导体内电位分布满足Laplace方程, 有圆柱体半径为 ρ_0 , 高为 h , 其下底面/侧面电位为0, 上底面电位分布为 x^2+y^2 , 则描述圆柱体内的电位分布的定解问题可表示为



$$\begin{cases} \Delta u = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho + u_{zz} = 0,\ 0 \le \rho < \rho_0,\ 0 < z < h \\ u(\rho,0) = 0,\ \rho \le \rho_0 & \text{下底面} \\ u(\rho,h) = \rho^2,\ \rho \le \rho_0 & \text{上底面} \\ u(\rho_0,z) = 0,\ 0 \le z < h & \text{侧面} \end{cases}$$

1. 数学建模和基本原理介绍
   - 1.1 数学模型的建立
   - 1.2 定解问题的适定性
     - 基本概念
     - 适定性
   - 1.3 叠加原理
   - 1.4 齐次化原理
   - 1.5 二阶线性方程的分类和化简
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
7. Legendre多项式

1.2 定解问题的适定性

基本概念

偏微分方程 PDE

含有未知函数+未知函数偏导数的等式

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f$ $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$ $\Delta u = f$

阶数 方程中未知函数导数的最高阶数

- **线性** 未知函数/各阶偏导数均为一次
- **非线性** 未知函数/各阶偏导数非一次

自由项 不含未知函数及其各阶导数的项

自由项
- =0 齐次PDE
- ≠0 非齐次PDE

- **古典解** 存在函数+各阶导数→PDE→恒等式
- **弱解** 一阶PDE/u微分不存在
- **通解** 解中含有与 PDE阶数相同个数的独立常数 的解

定解问题

PDE更关心特解→结合定解条件确定定解问题的性态

- PDE
- 边界条件BC
- 初始条件IC

阶数 PDE的阶数

- **线性** PDE/定解条件 均线性
- **非线性** PDE/定解条件 任意为非线性

定解问题 不提 齐次/非齐次

需分别指明 PDE/边界条件 是否齐次

解(特解)存在函数+各阶导数→PDE/定解条件→同时成为恒等式

本课程以线性定解问题为主

1.2 定解问题的适定性

例1 判断下列方程的类型

$x^2u_{xx}+y^2u_{yy}+\frac{1}{2}u_y=x^2y$	二阶线性非齐次
$\cos x\cdot u_{tt}-u_{xx}=0$	二阶线性齐次
$u_xu_y+2u=0$	一阶非线性齐次
$u_{xxx}+u_{yyy}+\cos u=u_x^2+xy$	三阶非线性非齐次
$u_{xx}+2u_{yy}+3u_{zz}=1$	二阶线性非齐次
$u_{xx}-2\cos xu_{xy}+3yu_y=y$	二阶线性非齐次

1.2 定解问题的适定性

例2 验证函数 $u=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)$ 是方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的古典解

解

$$u_t=-\omega A\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right),\quad u_{tt}=-\omega^2A\cos\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

$$u_x=\frac{\omega}{a}A\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right),\quad u_{xx}=-\frac{\omega^2}{a^2}A\cos\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

代入原方程

$$u_{tt}=-\omega^2A\cos\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)=a^2u_{xx}$$ 🟩

例3 验证函数 $u_1(x,t)=F(x+at),\ u_2(x,t)=G(x-at)$ 是方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的古典解

解

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=aF'(x+at),\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2F''(x+at)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=F'(x+at),\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=F''(x+at)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=-aG'(x-at),\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2G''(x-at)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=G'(x-at),\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=G''(x-at)$$ 🟩

1.u1, u2都是该方程古典解

2.F是左传波, G是右传波

3.u1, u2的线性组合也是波动方程的解→ D'Alembert公式

J.R.D'Alembert
1717-1783
French Math.
Astronomer
Physical Scientist

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+a\tau)+\varphi(x-a\tau)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-a\tau}^{x+a\tau}\psi(\xi)$$

1.2 定解问题的适定性

例4

验证函数$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$， $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 在 $\boldsymbol{R}^2\setminus\{(x_0,y_0)\}$ 上是方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的古典解

解

$$u_{xx}=\frac{(x-x_0)^2}{\pi r^4}-\frac{1}{2\pi r^2},\quad u_{yy}=\frac{(y-y_0)^2}{\pi r^4}-\frac{1}{2\pi r^2}$$

代入原方程得证

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{(x-x_0)^2}{\pi r^4}-\frac{1}{2\pi r^2}+\frac{(y-y_0)^2}{\pi r^4}-\frac{1}{2\pi r^2}=\frac{r^2}{\pi r^4}-\frac{1}{\pi r^2}=0$$ ■

Laplace方程在圆域/球域上的基本解

例5

验证函数 $u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r}$， $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 在 $\boldsymbol{R}^3\setminus\{(x_0,y_0,z_0)\}$ 上是方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$的古典解

解

$$\left.\begin{aligned}u_{xx}&=\frac{2(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2}{4\pi r^5}\\u_{yy}&=\frac{2(y-y_0)^2-(x-x_0)^2-(z-z_0)^2}{4\pi r^5}\\u_{zz}&=\frac{2(z-z_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{4\pi r^5}\end{aligned}\right\}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$ ■

G.Green
1793-1841
British Math.
Physical Scientist

以上例题验证的仅是PDE的解→如何找出定解问题的解是本课程核心内容

1.2 定解问题的适定性

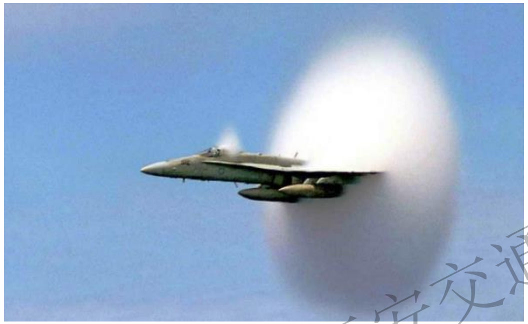
本课程默认定解问题都是适定的

适定性

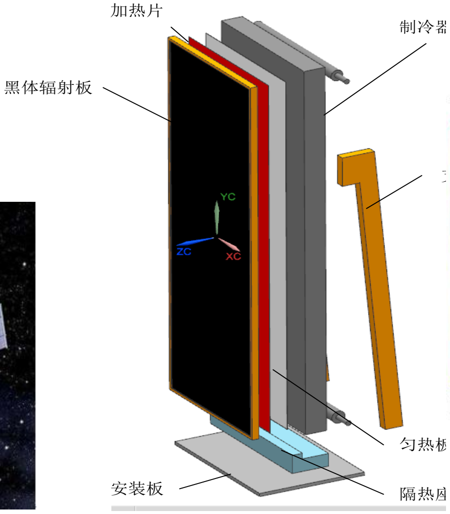
定解问题的适定性
- 存在性 定解问题的解是否存在?
- 唯一性 定解问题的解是否唯一?
- 稳定性 定解条件微小变动→解亦微小变动.

- 许多物理问题以适定的定解问题圆满解决使人们认为不适定数学物理问题无意义
- 实际问题中经常遇到不适定的问题
- 现不适定问题已成为PDE重要研究方向

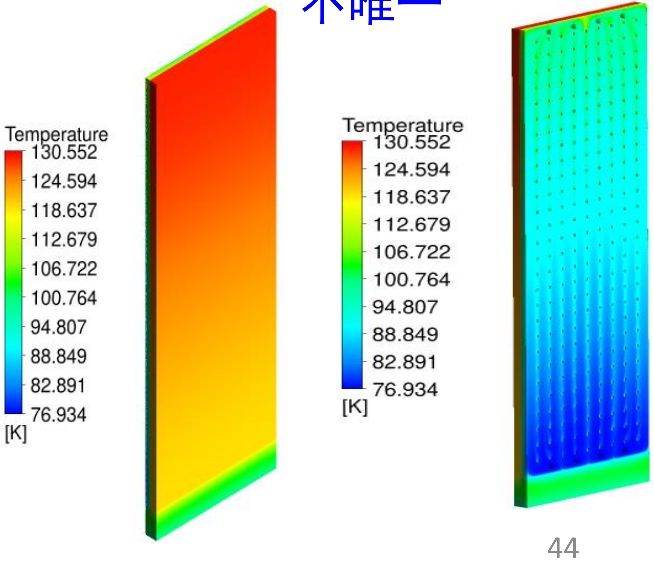
例如，卫星观测CCD的地面标定→构造均匀稳定的面温度场→已知终了条件→反推初始条件→数学物理问题的反问题



不稳定



不唯一

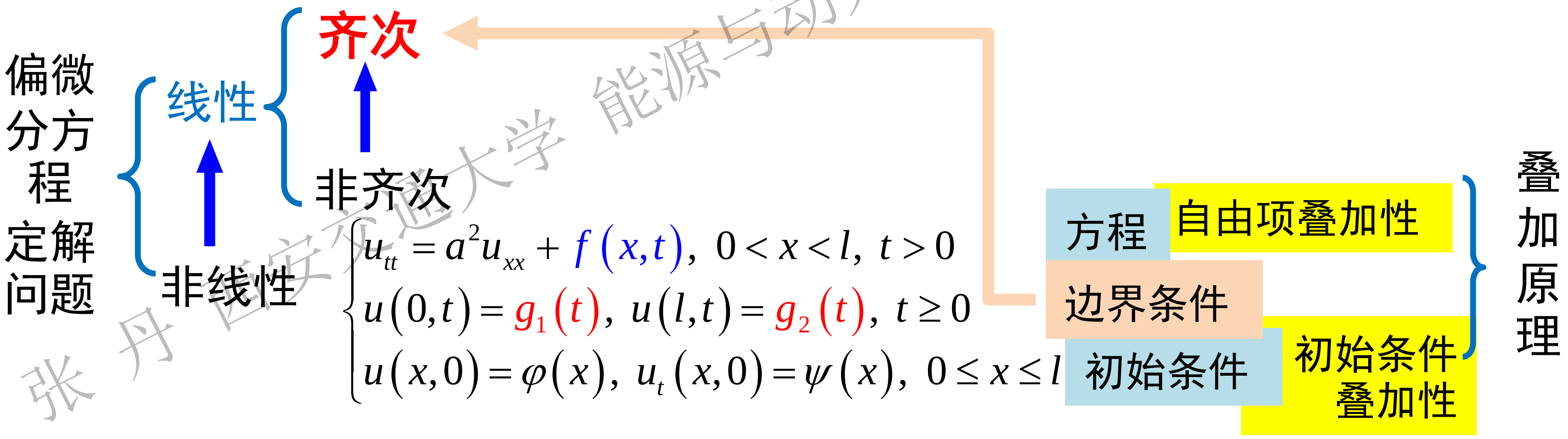


1. 数学建模和基本原理介绍
   - 1.1 数学模型的建立
   - 1.2 定解问题的适定性
   - 1.3 叠加原理
     - 二阶线性PDE解的叠加原理
     - ODE的齐次化原理
     - PDE的齐次化原理
   - 1.4 齐次化原理
   - 1.5 二阶线性方程的分类和化简
2. 分离变量法
3. Bessel函数
4. 积分变换法
5. Green函数法
6. 特征线法
7. Legendre多项式

1.3 叠加原理

叠加原理的意义

1. 叠加原理 多种不同外因共同作用结果=各外因单独作用结果之和
2. 线性问题的解满足叠加原理，而非线性问题一般不满足
3. 叠加→线性偏微分方程求解便利性→尽可能将非线性问题转换为线性问题
4. 非齐次混合问题, 非齐次PDE/非齐次边界条件→叠加原理→ 在更大范围内寻找满足定解条件的解→边界齐次化



偏微分方程

定解问题

线性

非线性

齐次

非齐次

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t) = g_1(t),\ u(l,t) = g_2(t), & t \ge 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

方程 自由项叠加性

边界条件

初始条件 初始条件叠加性

叠加原理

1.3 叠加原理

二阶偏微分算子 叠加性适于所有线性PDE→为简化理论表达→引入二阶微分算子*L*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f$$

波算子 $\Box = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 热算子 $H = \frac{\partial}{\partial \tau} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ Laplace算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

二阶线性PDE一般形式 $a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$

二阶线性偏微分算子 $\boxed{L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c}$

设 α, β 是任意常数, $u_1(x,y), u_2(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 则有

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L u_1 + \beta L u_2$$

函数线性组合的偏微分运算=函数偏微分运算的线性组合

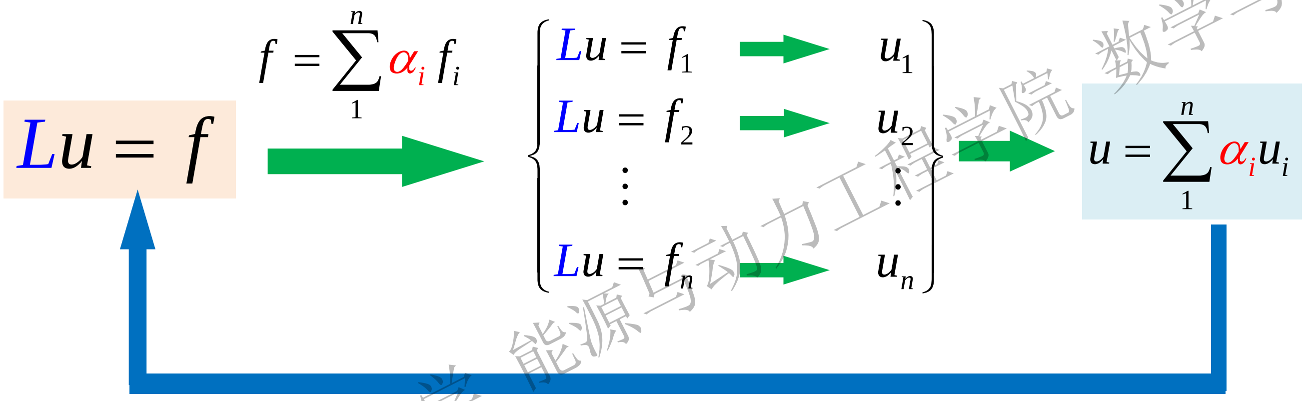
1.3 叠加原理

$$L=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+c$$

叠加原理1 PDE自由项拆分为有限和

若α_i为n个任意常数, $f_i(x,y)$ 为平面区域Ω内的n个已知函数, 且 $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x,y)$ **有限和**

若 $u_i(x,y)$为方程 $Lu=f_i$ 在区域Ω内的解, 则$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x,y)$ 必是方程 $Lu=f=\sum_{i=1}^{n}f_i(x,y)$的解



$$Lu=f \qquad f=\sum_{1}^{n}\alpha_i f_i$$

$$\left\{\begin{matrix} Lu=f_1 & \rightarrow & u_1\\ Lu=f_2 & \rightarrow & u_2\\ \vdots & & \vdots\\ Lu=f_n & \rightarrow & u_n\end{matrix}\right\} \rightarrow u=\sum_{1}^{n}\alpha_i u_i$$

例1 分解方程 化繁为简$Lu=2f_1-3f_2$ $\left\{\begin{matrix} Lu=f_1, & \Rightarrow u_1\\ Lu=f_2, & \Rightarrow u_2\end{matrix}\right\}$ $u=2u_1-3u_2$ ■

1. 本原理仅讨论了PDE的叠加性, 而非定解问题
2. PDE的可叠加性由自由项的可拆分体现
3. 本原理仅将自由项拆分为有限和

1.3 叠加原理

叠加原理2 PDE自由项拆分为无穷级数

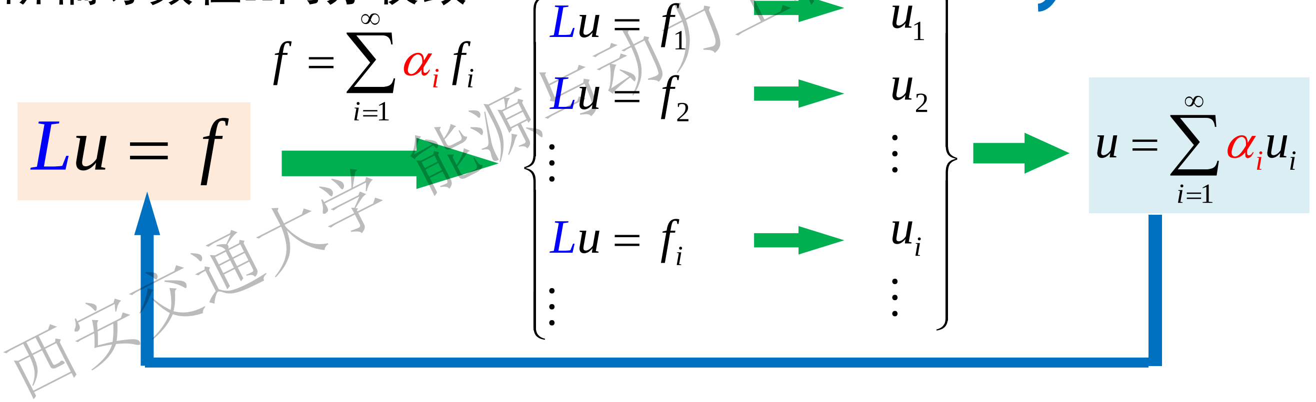
推广 将自由项拆分为→无穷级数 $f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x,y)$ 需满足

❶ 可展开 自由项 $f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i$

❷ 能收敛 在区域Ω内收敛

❸ 可求导 解的和函数 $u=\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 可逐项求一阶/二阶偏导, 且各阶偏导数在Ω内亦收敛

本课后续涉及自由项无穷级数分解默认均成立



$$Lu=f \longrightarrow f=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Lu=f_1 & \longrightarrow & u_1 \\ Lu=f_2 & \longrightarrow & u_2 \\ \vdots & & \vdots \\ Lu=f_i & \longrightarrow & u_i \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \longrightarrow u=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u_i$$

1. 通过一组解线性组合→在更大范围内寻找解/表示解→对求解定解问题十分有利
2. 叠加原理1 对三元函数 $u(x,y,z)$ 也成立, 此时算子为

$$L=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2a_{13}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+2a_{23}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}+a_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}+c$$

1.3 叠加原理

叠加原理3 定解问题的拆分

❶ 边界齐次

自由项/初始条件

❷ 可展开 为无穷级数

❸ 能收敛

❹ 可求导 可逐项求二阶偏导

PDE自由项/初始条件 可拆分为无穷级数/有限和 →分而解之

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x,t),$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x),$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x),$$

拆分自由项/初始条件

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_1, \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \ u_t(x,0) = \psi_1(x), \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_2, \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi_2(x), \ u_t(x,0) = \psi_2(x), \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_i, \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi_i(x), \ u_t(x,0) = \psi_i(x), \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\vdots$$

若每个子定解问题存在解 $u_i(x,t)$

解的合并

则原定解问题的解 $u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t)$

1.3 叠加原理

叠加原理3 定解问题的拆分

例2

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l \end{cases}$$

拆分自由项

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l \end{cases}$$

拆分初始条件

1.3 叠加原理

例3

若 u_1, u_2 是方程 $u_{xx}+u_{yy}=xy$ 的两个解，λ 是任意常数，β 是 x, y 的任意函数 $\beta=\beta(x,y)$，则下列(　　　　)组合也一定是该方程的解

$\lambda u_1+\beta u_2$

$\beta u_1+\lambda u_2$

$\beta(u_1-u_2)+u_1$

$\lambda(u_1-u_2)+u_2$

1.3 叠加原理

边界条件的齐次化

目的 简化后续特征值问题的求解

定解问题的预处理

齐次化

非齐次边界 $g_{1,2}(t)\neq 0$

↓

齐次边界 $g_{1,2}(t)=0$

边界条件②

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t),\ t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\leq x\leq l \end{cases}$$

① PDE自由项

③ 初始条件

满足叠加原理
化繁为简

齐次化原理/步骤

1. 构造辅助函数 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$
2. 辅助函数/原函数满足同样的边界条件 $w(0,t)=g_1(t),\ w(l,t)=g_2(t)$
3. 原以 $u(x,t)$ 为未知函数的定解问题转化为以 $v(x,t)$ 为未知函数的定解问题

线性二阶PDE
边界条件

- 第一类边界 规定函数边界值 $u(0,t)=g(t),\ u(l,t)=g(t)$
- 第二类边界 规定函数边界导数值 $u_x(0,t)=g(t),\ u_x(l,t)=g(t)$
- 第三类边界 规定边界处函数+导数值

1. 两端边界条件类型可不同, 有4种组合方式需分类讨论
2. 函数代换后原PDE自由项/初始条件均变化

1.3 叠加原理

边界条件的齐次化 [1,1]

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f\left(x,t\right),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u\left(0,t\right) = g_1\left(t\right),\ u\left(l,t\right) = g_2\left(t\right),\ t\geq 0 \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right),\ 0\leq x\leq l \end{cases}$$

边界条件

$g_{1,2}\left(t\right)=0$ 齐次边界

齐次化

$g_{1,2}\left(t\right)\neq 0$ 非齐次边界

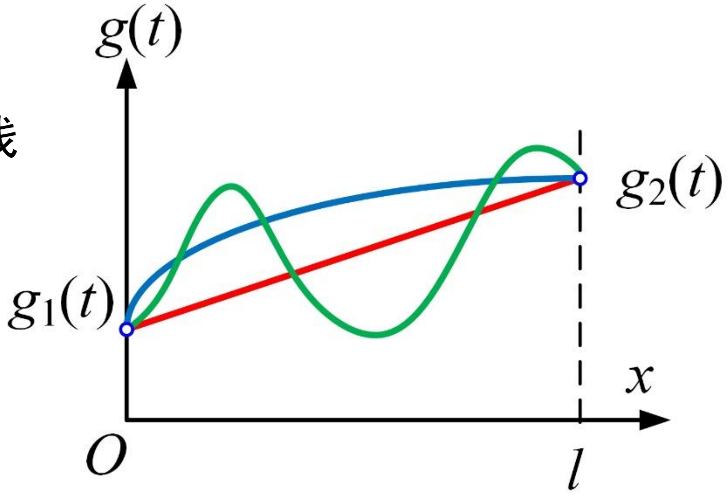
Step1 构造辅助函数 $u\left(x,t\right)=v\left(x,t\right)+w\left(x,t\right)$

将以 u 为未知函数的非齐次定解问题→以 v 为未知函数的齐次定解问题→原非齐次边界由 w 承担

$$w\left(0,t\right)=g_1\left(t\right),\ w\left(l,t\right)=g_2\left(t\right)$$

满足此条件的辅助函数多样, 最简单的是直线

$$w\left(x,t\right)=\frac{g_2\left(t\right)-g_1\left(t\right)}{l}x+g_1\left(t\right)$$



1.3 叠加原理

边界条件的齐次化 [1,1]

Step2 函数变换

边界条件齐次化的同时→PDE/初始条件也发生了变化

自由项变化

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$$

$$v_{tt}+w_{tt}=a^2\left(v_{xx}+w_{xx}\right)+f(x,t)$$

尽量简单

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+f(x,t)-w_{tt}$$

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+f_1(x,t)$$

变量初始分布变化

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

$$v(x,0)+w(x,0)=\varphi(x)$$

$$v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0)$$

$$v(x,0)=\varphi_1(x)$$

变量初始变化率分布变化

$$u_t(x,0)=\psi(x)$$

$$v_t(x,0)+w_t(x,0)=\psi(x)$$

$$v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0)$$

$$v_t(x,0)=\psi_1(x)$$

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t),\ t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\leq x\leq l \end{cases}$$

$$w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$$

齐次化

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}+f_1(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=0,\ t\geq 0 \\ v(x,0)=\varphi_1(x),\ v_t(x,0)=\psi_1(x),\ 0\leq x\leq l \end{cases}$$

求解后回代

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

原定解问题得解

1.3 叠加原理

边界条件的齐次化

核心是构造辅助函数 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

视为参变量

[2, 1]

$u_x(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)$

直线可以满足 $w_x(0,t)=g_1(t),\ w(l,t)=g_2(t)$

令 $w(x,t)=C_1x+C_2$

$$\begin{cases} w_x(0,t)=C_1=g_1(t) \\ w(l,t)=C_1l+C_2=g_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=g_1(t) \\ C_2=g_2(t)-g_1(t)l \end{cases}$$

辅助函数为 $w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$

[1, 2]

$u(0,t)=g_1(t),\ u_x(l,t)=g_2(t)$

直线可以满足 $w(0,t)=g_1(t),\ w_x(l,t)=g_2(t)$

令 $w(x,t)=C_1x+C_2$

$$\begin{cases} w(0,t)=C_2=g_1(t) \\ w_x(l,t)=C_1=g_2(t) \end{cases}$$

辅助函数为 $w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$

[2, 2]

$u_x(0,t)=g_1(t),\ u_x(l,t)=g_2(t)$

直线无法满足 $w_x(0,t)=g_1(t),\ w_x(l,t)=g_2(t)$

令辅助函数为二次函数

$$w(x,t)=C_1x^2+C_2x+0$$

$$w_x(x,t)=2C_1x+C_2$$

$$\begin{cases} w_x(0,t)=C_2=g_1(t) \\ w_x(l,t)=2C_1l+C_2=g_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{2l} \\ C_2=g_1(t) \end{cases}$$

辅助函数为

$$w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2+g_1(t)x$$

1.3 叠加原理

边界条件的齐次化

目的 简化特征值问题的求解

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t),\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l \end{cases}$$

边界条件 $\begin{cases} g_{1,2}(t)=0 & \text{齐次边界} \\ g_{1,2}(t)\neq 0 & \text{非齐次边界} \end{cases}$

非齐次边界 ↑ 齐次边界：齐次化

边界条件齐次化常用辅助函数 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

边界类型	边界条件	辅助函数
[1,1]	$u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$
[2,1]	$u_x(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$
[1,2]	$u(0,t)=g_1(t),\ u_x(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$
[2,2]	$u_x(0,t)=g_1(t),\ u_x(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2+g_1(t)x$

1.3 叠加原理

例1

若定解问题的边界条件为 $u(0,t)=g_1(t)$，$u_x(l,t)=g_2(t)$ ，则选择如下辅助函数(　　)可实现边界条件齐次化

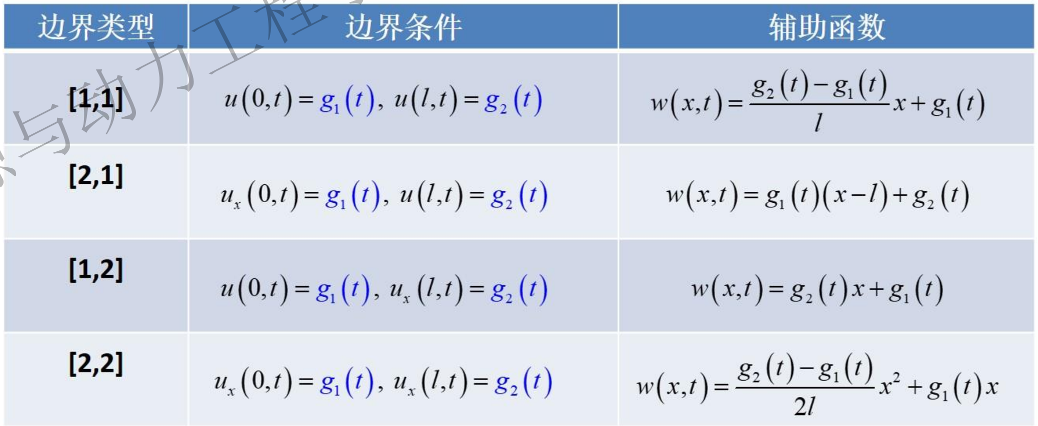
$$w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$$

$$w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$$

$$w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$$

$$w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2+g_1(t)x$$

边界条件齐次化常用辅助函数 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$



边界类型	边界条件	辅助函数
[1,1]	$u(0,t)=g_1(t)$, $u(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$
[2,1]	$u_x(0,t)=g_1(t)$, $u(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$
[1,2]	$u(0,t)=g_1(t)$, $u_x(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$
[2,2]	$u_x(0,t)=g_1(t)$, $u_x(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2+g_1(t)x$

1.3 叠加原理

例2 将如下定解问题的非齐次边界齐次化

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \\ u_x(0,t)=\cos t,\ u(l,t)=3t,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l \end{cases}$$

边界条件齐次化常用辅助函数 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

边界类型	边界条件	辅助函数
[1,1]	$u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$
[2,1]	$u_x(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$
[1,2]	$u(0,t)=g_1(t),\ u_x(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$
[2,2]	$u_x(0,t)=g_1(t),\ u_x(l,t)=g_2(t)$	$w(x,t)=\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2+g_1(t)x$

解 构造辅助函数 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

查表速得
$$\begin{aligned} w(x,t)&=g_1(t)(x-l)+g_2(t)\\ &=(x-l)\cos t+3t \end{aligned}$$

各阶偏导
$$w_t=-(x-l)\sin t+3 \qquad w_x=\cos t$$
$$w_{tt}=-(x-l)\cos t \qquad w_{xx}=0$$

$$\begin{aligned} u_{tt}&=a^2u_{xx}+f(x,t)\\ v_{tt}+w_{tt}&=a^2(v_{xx}+w_{xx})+f(x,t)\\ v_{tt}-(x-l)\cos t&=a^2(v_{xx}+0)+f(x,t)\\ v_{tt}&=a^2v_{xx}+f(x,t)+(x-l)\cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x)\\ v(x,0)+w(x,0)&=\varphi(x)\\ v(x,0)+(x-l)&=\varphi(x)\\ v(x,0)&=\varphi(x)-(x-l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(x,0)&=\psi(x)\\ v_t(x,0)+w_t(x,0)&=\psi(x)\\ v_t(x,0)+3&=\psi(x)\\ v_t(x,0)&=\psi(x)-3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}+f(x,t)+(x-l)\cos t,\ 0<x<l,\ t>0 \\ v_x(0,t)=0,\ v(l,t)=0,\ t\ge 0 \\ v(x,0)=\varphi(x)-(x-l),\ v_t(x,0)=\psi(x)-3,\ 0\le x\le l \end{cases}$$

1.3 叠加原理

例3 求方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \sin x + 4xy - 8x^2$ 的一个任意解

解

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin x + 4xy - 8x^2 \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x \\ u_{xx} + u_{yy} = xy \\ u_{xx} + u_{yy} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1(x,y) = -\sin x \\ u_2(x,y) = \dfrac{1}{6}xy^3 \\ u_3(x,y) = \dfrac{1}{12}x^4 \end{array}\right\} \quad u(x,y) = -\sin x + \frac{2}{3}xy^3 - \frac{2}{3}x^4$$

例4 将定解问题中的方程齐次化

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \sin x + 4xy - 8x^2,\ x^2 + y^2 < R^2 \\ u = xy,\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

解

令 $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} + w_{xx} + w_{yy} = \sin x + 4xy - 8x^2$$

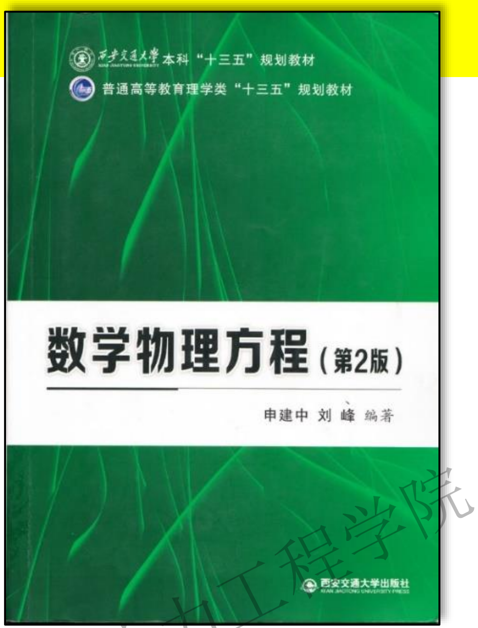
欲使方程齐次化 $v_{xx} + v_{yy} = 0$ ，$w(x,y)$ 取方程的解即可, 根据上例辅助函数取

$$w(x,y) = -\sin x + \frac{2}{3}xy^3 - \frac{2}{3}x^4$$

$$\begin{cases} \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0,\ x^2 + y^2 < R^2 \\ v = xy + \sin x - \dfrac{2}{3}xy^3 + \dfrac{2}{3}x^4,\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

1. 本例要求方程齐次化→而非边界齐次化→允许非齐次边界
2. Poisson方程的Dirichlet问题→Laplace方程的Dirichlet问题
3. 定解问题PDE方程齐次化亦是求解手段, 但通用性远远不如边界齐次化

本章作业

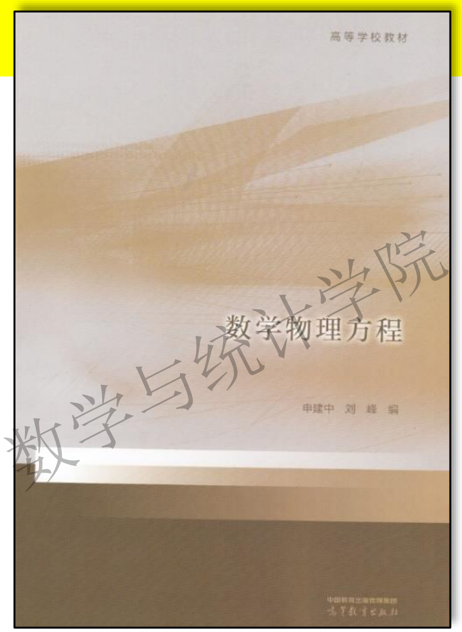

西安交通大学本科"十三五"规划教材

普通高等教育理学类"十三五"规划教材

数学物理方程（第2版）

申建中 刘峰 编著

西安交通大学出版社


高等学校教材

数学物理方程

申建中 刘 峰 编

高等教育出版社

习题1

❶ **2**

❷ **3**

❸ **14 (1)(2)(3)**

❹ 补充题 将如下定解问题的非齐次边界齐次化

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = u_0,\ u_x(l,t) = \sin \omega t,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0,\ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$