第六章　多元函数积分学及其应用

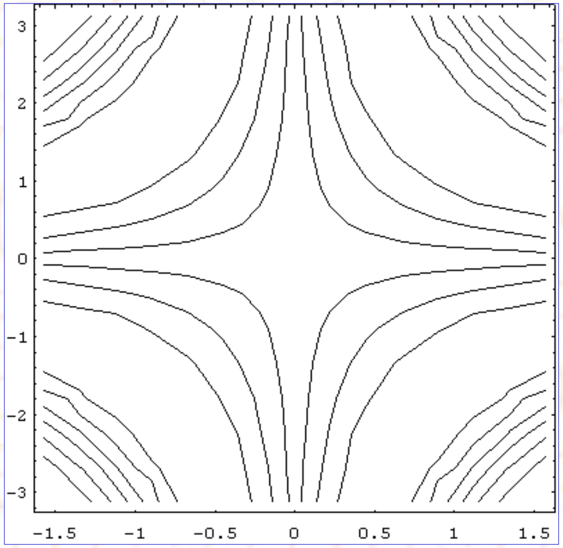
第六节　第二型线与面积分

- 场的概念
- 第二型线积分
- **Line Integrals of the Second Type**
- 第二型面积分
- **Surface Integrals of the Second Type**

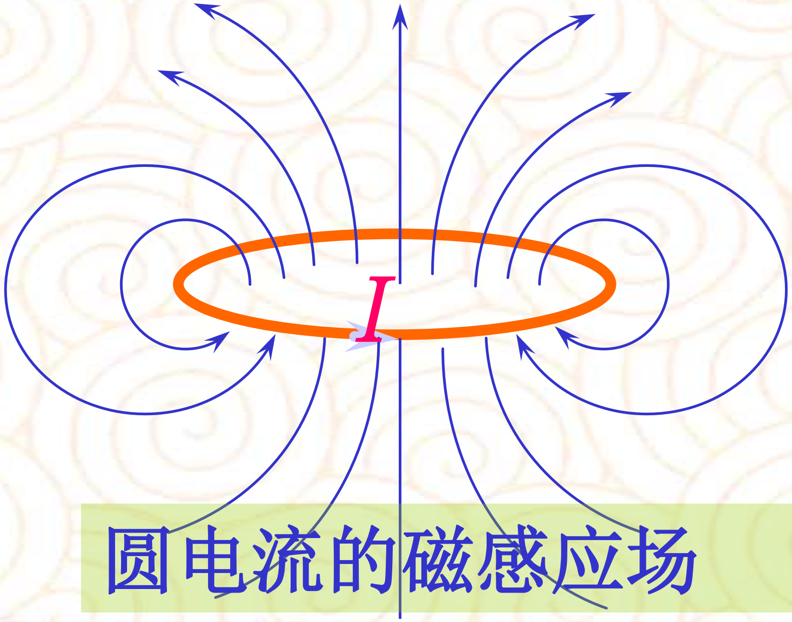
作业: 习题6.7　2, 5, 7, 10

场：一般地，我们把分布着某种物理量的平面或空间区域称为**场**。

数量场：如果场中的量可用数量值函数确切表示。如温度场，高度场，电位场等。用 $\mu(M),\left(M\in(G)\subseteq R^{3}\right)$ 表示。



曲面的等高线场



圆电流的磁感应场

向量场：如果场中的量可用向量值函数确切表示。如电磁场，引力场等。用 $\mathbf{A}(M),\left(M\in(G)\subseteq R^{3}\right)$ 表示。

分布着某种物理量的空间区域称为场

如果这个物理量能用数表示，称为**数量场**

如果这个物理量用向量表示，称为**向量场**

如果这个物理量与时间有关，称为**时变 场**

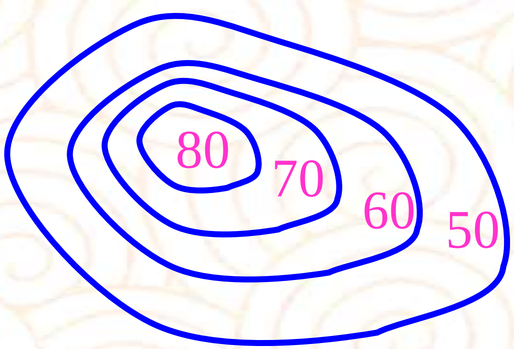
如果这个物理量与时间无关，称为**定常 场**

若在域Ω中，函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$连续，则称向量场$\vec{A}$或向量值函数$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$是连续的。

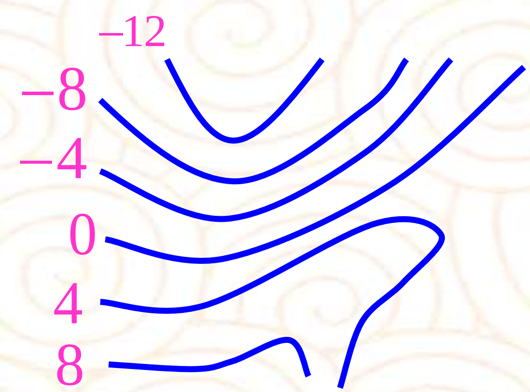
场的几何描述

数量场的等值面（或等值线）

数量场的常用直观表示法是等值面（或等值线）。例如：地形图上常用等高线表示地形高度。气象学中常用等温线表示温度场。



等高线



等温线

若平面数量场为$v=v(x,y)$，则$v(x,y)=C$ 称为**等值线**。

例如：　平面数量场$v=x^2+y^2$ 的等值线为$x^2+y^2=C$ ，这是一组同心圆。

若空间数量场为$u=u(x,y,z)$，则$u(x,y,z)=C$ 称为**等值面**。

例如：　空间数量场$u=x+y+z$ 的等值面为$x+y+z=C$ ，

这是一组平行平面。

向量场的向量线

通常用向量线直观地表示向量场。

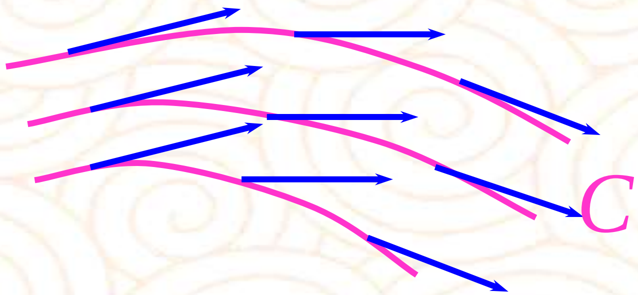
定义 若曲线C上 每一点处，向量场的向量都位于C在 该点

的切线上，则曲线C称 为这个向量场的**向量线**。

如静电场中的电力线，

磁场中的磁力线，流速场

中的流线都是向量线。



向量场的向量线

下面来导出向量线的方程。

设向量场为 $\vec{A}(M)=\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

$M(x,y,z)$ 为向量线 C 上的任一点，

则向量线 C 在点 M 的切线向量为 $\{dx,dy,dz\}$，

它必与在点 M 的向量场 $\vec{A}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 共线，

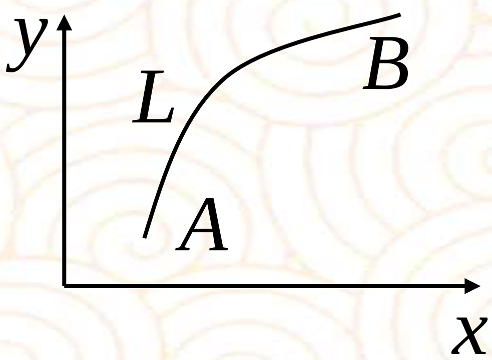
故有 $\dfrac{dx}{P(x,y,z)}=\dfrac{dy}{Q(x,y,z)}=\dfrac{dz}{R(x,y,z)}$，

解此微分方程组可得向量线的方程。

第二部分 第二型曲线积分

一、第二型曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

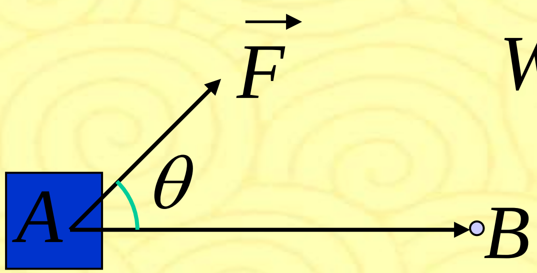


设一质点受力场中变力 **F** 作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

在 xoy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B,求移动过程中场力 **F** 所作的功W.

特例: 常力沿直线所作的功



$$W = F\left|AB\right|\cos\theta$$

$$= \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

解决办法:

"大化小" —分

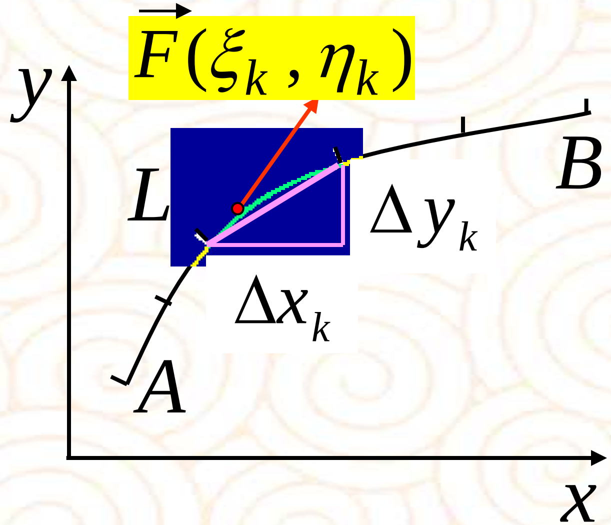
"常代变" —匀

"近似和" —合

"取极限" —精

1) “大化小” ——分

把L分成 n 个小弧段, $\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k, 则



$$W = \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k$$

2) “常代变” ——匀

有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = (\Delta x_k, \Delta y_k)$ 近似代替, 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k, η_k), 则有

$$\Delta W_k \approx \vec{F}(\xi_{\mathbf{k}}, \eta_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$= P(\xi_{\mathrm{k}}, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_{\mathrm{k}}, \eta_k)\Delta y_k$$

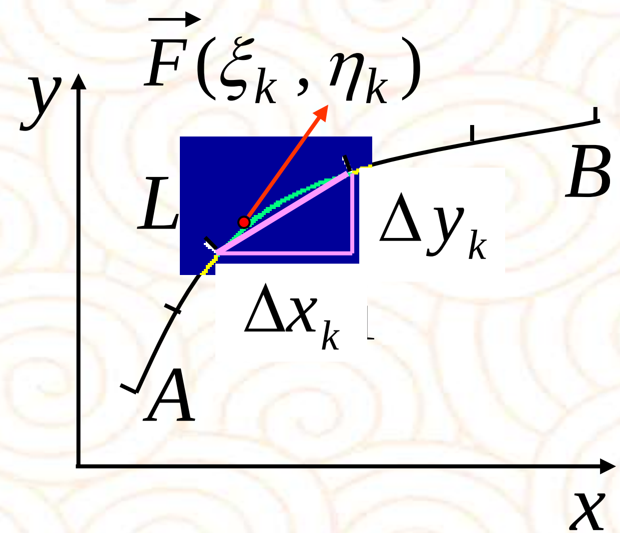
3) “近似和” ——合

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

4) “取极限” ——精

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

(其中λ为n个小弧段的最大长度)



将此和式极限抽象化，
即得第二类曲线积分的定义

2. 定义 设 L 为 xoy 平面内从 A 到 B 的一条有向光滑弧, 在 L 上定义了一个向量值函数

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

都为同一常数, 则称此极限为向量值函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标的曲线积分, 或第二型曲线积分.

记作

$$\boxed{\int_{(L)}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{(L)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y}$$

其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为被积函数, L 称为积分弧段或积分曲线. $\overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ $\quad\int_{(AB)}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$

$$\overrightarrow{F(x,y)}=\big(P(x,y),Q(x,y)\big) \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$

对坐标的曲线积分 (第二型曲线积分):

$$\boxed{\int_{(L)}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{(L)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y}$$

类似地， 若L为空间曲线弧 ， 记

$$\overrightarrow{F(x,y,z)}=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$$

$$\boxed{\int_{(L)}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{(L)}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z}$$

3.第二型曲线积分性质

(1) 若 (L) 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i=1,\cdots,k)$, 则

$$\int_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}\int_{(L_i)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

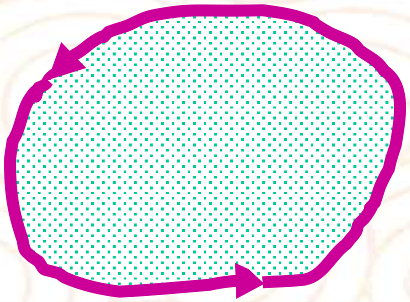
(2) 用$(-L)$ 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_{(-L)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

注意： 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向！

封闭曲线(L)的正向:

若人沿(L)环行时(L)围成的区域总在左手边，则称环行方向是**正向**，否则是**负向**.

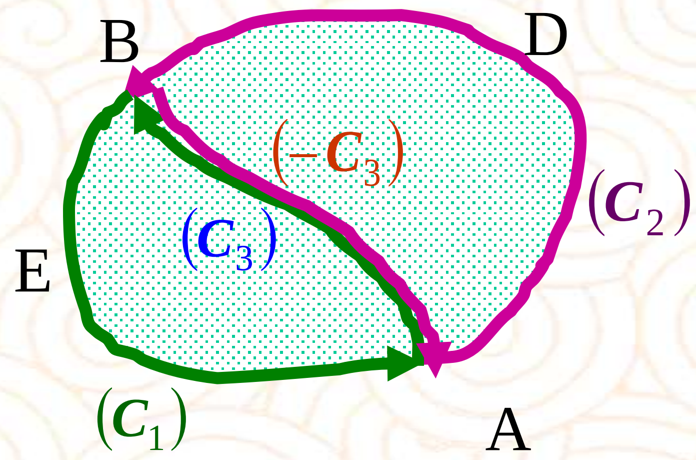


(L)

(4) 如果$(C)=(C_1)+(C_2)$为正向封闭曲线，

$(C_1)+(C_3)$和$(C_2)+(-C_3)$也为正向封闭曲线，

则$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{(C_1)+(C_3)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{(C_2)+(-C_3)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$



以上结论对封闭曲线都取负向也成立.

当$P(x,y),Q(x,y)$在有向光滑弧(L)上连续时，

第二型线积分必存在。(证明略)

二、第二型曲线积分的计算

定理: 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向光滑弧 (L) 上有定义且连续，(L) 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$,

则第二型曲线积分 $\int_{(L)} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ 存在, 且

$$\int_{(L)} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t) \} \mathrm{d}t$$

证明: 先证 $\int_{(L)} \boldsymbol{P(x,y)\mathrm{d}x} = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

由定义 $\int_{(L)} \boldsymbol{P(x,y)\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

(L)的方程:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

$t:\alpha\to\beta$

设分点 x_i 对应参数 t_i，点(ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，

由于 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为**(L)** 为光滑弧，所以$\varphi'(t)$连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i'),\psi(\tau_i')]\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

同理可证 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$

特殊情形

(1) $(L): y = y(x)$, a为x的起点,b为x的终点.

则 $\int_{(L)} Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx.$

(2) $(L): x = x(y)$, c为y的起点,d为y的终点.

则 $\int_{(L)} Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$

(3) 三维情形 $(L): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t) \end{cases}$ t起点α,终点β.

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \Big[P\big(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\big)\psi'(t)$$

$$+ R\big(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\big)\omega'(t)\Big]d\,t$$

例1 计算$\int_{(L)} xy\,dx$，其中L为抛物线 $y^2 = x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.

$$P(x,y) = xy,\ Q(x,y) = 0$$

$$\int_{(L)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(L)} xy\mathrm{d}x$$

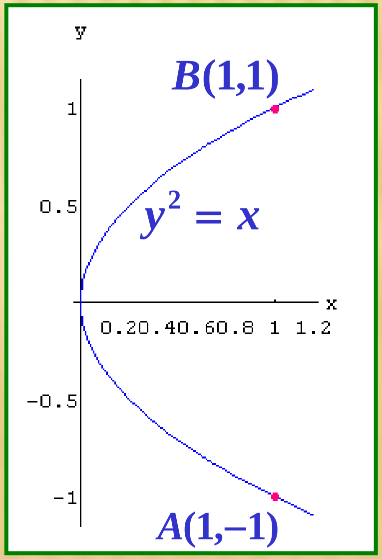
解法一:

(1) 化为对x的定积分，$y = \pm\sqrt{x}$.

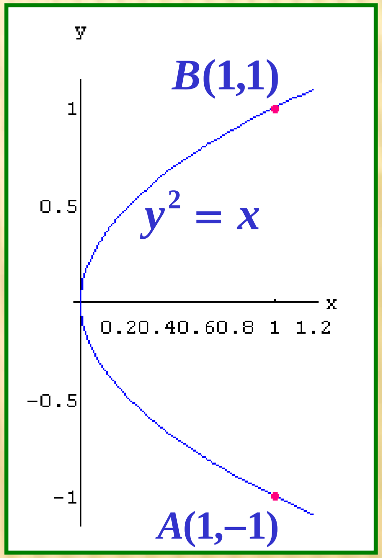
$$\int_L xy\mathrm{d}x = \int_{弧AO} xy\mathrm{d}x + \int_{弧OB} xy\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x\sqrt{x}dx$$

$$= 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}.$$



例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2 = x$上从 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



解法二:

(2) 化为对y的定积分, $x = y^2$, y从-1到1.

$$\int_L xydx = \int_A^B xydx = \int_{-1}^1 y^2 y(y^2)' dy$$

$$= 2\int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

---

(2) $(L): x = x(y)$, c为y的起点,d为y的终点.

则 $\int_{(L)} Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$

(4) 两类曲线积分之间的联系：

设有向平面曲线弧 (L), 其参数方程为： $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

(L)上点(x, y)处的切向量的方向角为α, β,

$$\vec{F}=(P,Q),\ d\vec{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\parallel d\vec{e}_\tau, \qquad \vec{e}_\tau=(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$\vec{e}_\tau$:与有向路径 L 的方向一致的单位切向量.

$$d\vec{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\vec{e}_\tau\ ds=(\cos\alpha,\cos\beta)ds$$

$$\left\|\overrightarrow{ds}\right\|=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt=ds$$

$$\int_{(L)}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{(L)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(L)}\vec{F}\cdot\vec{e}_\tau\ ds=\int_{(L)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$, $\cos\beta=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$,

推广到空间曲线L:

设 L 上点(x, y, z)处的切线向量的方向角为α, β, γ,

$$\text{则}\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

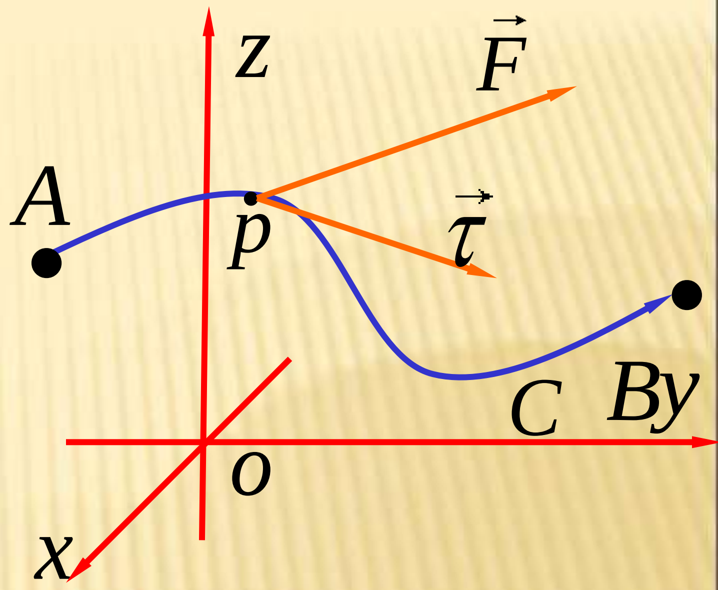
可用向量表示

$$= \int_L \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{e_\tau} ds$$

其中 $\overrightarrow{F} = \{P, Q, R\}$, $\overrightarrow{e_\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

点(x, y, z)处与L方向一致的单位切向量

两类曲线积分的异同



（1）第一型线积分无方向，
第二型线积分有方向。

（2）第一型线积分是对弧长的积分，
第二型线积分是对坐标的积分

（3）第一型线积分对应参数的下限小，上限大，
第二型线积分对应参数的下限为起点，上限为终点

（4）第一型线积分用于求质量、质心、转动惯量等，
第二型线积分用于求变力作功、引力场作功等。

（5）两类线积分的被积函数都在曲线上有定义。

（6）两类线积分的计算都是化为定积分计算的。

例2 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

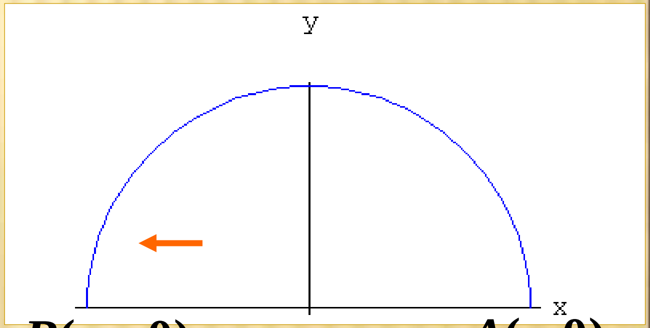
(1) 半径为a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点$A(a,0)$沿x轴到点$B(-a,0)$的直线段.

解 (1) $\because \quad L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$, θ从0变到π,

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = -\frac{4}{3}a^3.$$



$B(-a,0)$ $A(a,0)$

(2) $\because \quad L: y=0$, x从a变到$-a$, 原式$=\int_a^{-a} 0dx = 0.$

注意：被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同积分结果不同.

例3 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)$ $(1,0),(1,1)$.

以上三题的答案分别是：（　　）

(A) 1,0,1;

(B) 1,0,2;

(C) 1,1,1;

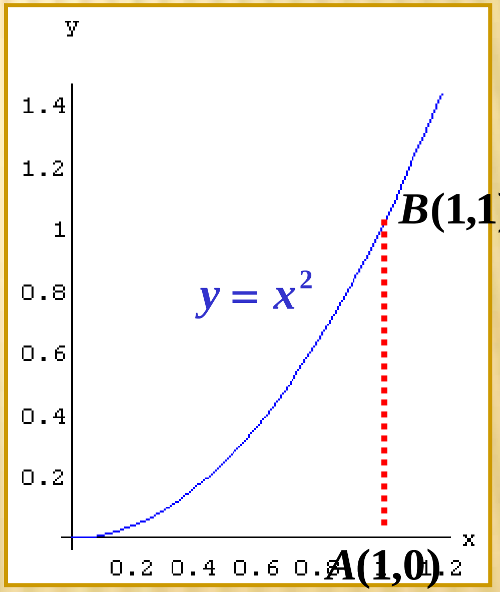
(D) 1,1,2;

例3 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)$
$(1,0),(1,1)$.



解 (1) 化为对 x 的积分.

$L: y = x^2$, x从0变到1,

$$原式 = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx$$

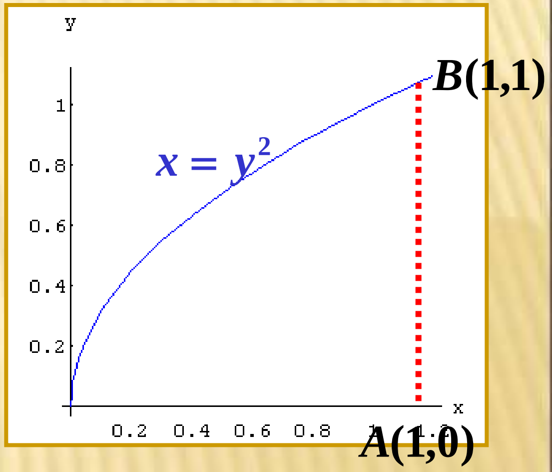
$$= 4\int_0^1 x^3 dx = 1.$$

计算$\int_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$,

(2) 化为对 y 的积分.

$L: x = y^2$, y从 0 变到 1 ,

$$\text{原式} = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4)dy = 5\int_0^1 y^4 dx \;= 1.$$



(3) $\text{原式} = \int_{OA} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{AB} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$

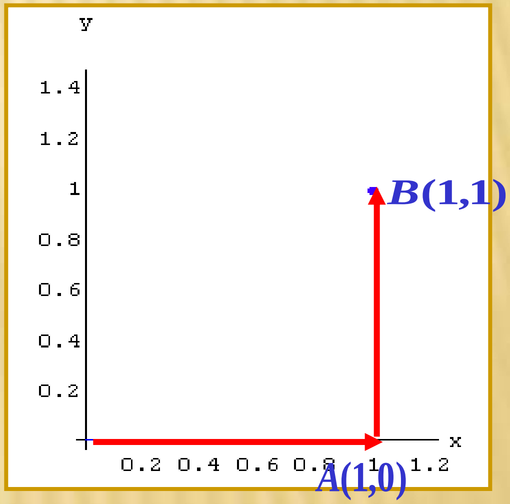
在 OA 上, $y = 0$, x从 0 变到 1 ,

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2x \cdot 0 \cdot dx + x^2 \cdot d0 \;= 0.$$

在 AB 上, $x = 1$, y 从 0 变到 1 ,

$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2 \cdot 1 \cdot yd1 + 1^2 dy \;= 1.$$

$\therefore$ 原式 $= 0 + 1 \;= 1.$



注意：被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同而积分结果相同.

思考

当曲线L的参数方程与参数的变化范围给定之后（例如L：$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$t \in [0, 2\pi]$，a是正常数），试问如何表示L的方向（如L表示为顺时针方向、逆时针方向）？

答 曲线方向由参数的变化方向而定.

例如L：$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$t \in [0, 2\pi]$中

当t从 0 变到2π时，L 取逆时针方向;

反之当t从2π变到 0 时，L 取顺时针方向.