第 10 卷 第 2 期 运 筹 与 管 理 Vol. 10, No. 2
2001 年 6 月 OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE Jun., 2001

矩形图元下料问题的优化模型

张 军[1], 金明爱[1], 王锡禄[2], 冯恩民[2]

(1. 延边大学师范学院数学系, 吉林 延吉 133002; 2. 大连理工大学应用数学系, 大连 116024)

摘 要: 本文对下料问题中的一刀切原则给出了一个数学描述, 从而给出了一个关于矩形料板约束二维一刀切下料问题的优化模型。

关键词: 一刀切; 矩形图元; 布局; 模型

中图分类号: O224 文献标识码: A 文章编号: 1007-3221(2001) 02-0149-05

An Optimization Model for Cutting Stock Problems within Rectangular Pieces

ZHANG Jun, JIN Ming-ai[1], WANG Xi-lu, FENG En-min[2]

(1. *Dept. of Math., Teachers College, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*;
2. *Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Dalian*, 116024, *China*)

Abstract: In this paper, a mathematical description is shown for guillotine priciple in cutting stock problems. And, an optimization model is constructed for two-dimensional guillotine cutting stock problems with constraints.

Key words: guillotine; rectangular element; layout; model

0 引言

切割问题(又称下料问题) 常与装填问题合称切割与装填问题, 它们在玻璃切割、纸张切割、服装制造、造船、运输等行业以及计算机、经济领域中都具有极广阔的应用背景。

对切割与装填问题的研究, 开始于四五十年代, 但其奠基性工作当属 Gilmore 与 Gomory 在 60 年代的工作, 此后对此问题的研究, 从一维发展到二、三、四维(引入时间维), 研究的重点则是建立特定问题的数学模型和寻求有效的求解途径, 由于切割与填装问题是 NP 困难的, 虽然在理论上构造了一些精确求解法, 但这些算法只能用于求解很小规模的问题; 对大规模问题, 一般是化这些精确法为启发式算法, 或直接构造启发式算法, 文献中的工作也多是对已有

收稿日期: 2001-01-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871009)
作者简介: 张军(1957-), 男, 吉林延吉人, 副教授, 主要从事布局优化等研究。

启发式算法计算量或内存占用量上的改进或纠正。

Gilmore 与 Gomory(1961, 1963, 1965) [1,2,3]用线性规划建立了一刀切问题的数学模型, 把线性规划的求解转化为一个背包子问题, 然后构造求解背包问题的有效方法。用的数学工具主要是线性规划、动态规划与背包函数, 算法可用于求解无阶段限制的无约束一二维切割问题。

对于无阶段限制的约束二维切断型切割问题, Christofides 与 Whitlock(1977) [4]用树搜索方法给出了一个精确算法, 对同一问题, Wang(1983) [5]提出了一个算法, 基本思想为用给定的矩形元构造新的较大的矩形元以生成废料最小的切割方案, Daza, Alvarenga 与 Diegom(1995) [6]对 Wang 算法做了进一步的改进, 算法用图来表示解空间, 并借助隐式搜索求解问题, Christofides 与 Hadjiconstantionou(1995) [7]利用动态规划给出了此问题的一个新的精确算法。

对无阶段限制的无约束的二维切断型切割问题的研究, Beasley(1985) [8]使用了线性规划与动态规划, 给出了求解大规模问题的一个启发式算法, Morabito 与 Arenales(1992) 则用与图、或图来表示其切割方案, 并构造了一个混合树搜索算法, Morabito 等(1996) [9]又推广此方法用于求解分阶段约束二维一刀切下料问题。

到目前为止, 对下料问题的研究主要是针对单料板约束或无约束切割问题, 而对实际中常遇到的多料板下料问题研究较少, 对多料板下料问题第一要解决的问题是选板, 第二是板已定的情况下如何下料, 此时对每张板要求下料最优已变成局部优化问题, 因而并不保证整个切割方案的最优, 文[10]给出了多张料板约束二维一刀切下料问题的数学模型, 构造了一个有效的启发式算法, 由算法研制的软件证明了算法的正确性与有效性, 在某开关厂的下料生产中, 利用率可达到 90%以上, 深受用户欢迎。

本文对文[10]的数学模型进行了改进, 给出了一个关于矩形料板约束二维一刀切下料问题的较理想的数学模型。

1 布局问题

多张料板的下料问题为: 给定 M_s 类料板 $\{(L_i, W_i, V_i, M_{si}): i = 1, 2, \cdots, M_s\}$ 和 N_r 类要切割的矩形工件(即图元) $\{(l_j, w_j, v_j, N_{rj}): j = 1, 2, \cdots, N_r\}$, 其中 L_j, W_j, 为第 i 类料板的长与宽, V_i 为料板的价值, M_{si} 为它的数量; 同样 l_j, w_j, v_j, N_{rj} 为第 j 类矩形图元的长, 宽, 价值和数量, 目的是要从这 $\sum_{i=1}^{M_s} M_{si}$ 个料板中切下给定的 $\sum_{j=1}^{N_r} N_{rj}$ 个矩形图元, 且使所耗费的料板总价值最小, 若假定: $V_i = L_i \cdot W_i$, 则问题即为求废料最小。

设要切割的所有矩形图元集为

$$X = \{\alpha_{jk} = (L_j, w_j) \in R_+^2 \quad k \in I_{N_{ri}}, j \in I_{N_r}\}.$$

并假定所有的切割均为正交切断型切割, 料板各向同性, 即矩形图元可在板上竖放(矩形图元长边平行料板的宽边) 或横放, 且只有这两种正交的放置方式。多类料板下料问题首先要解决的是料板的选择问题, 选择标准或目标并不唯一, 为简化问题, 现考虑一张料板, 定义 S 为矩形料板, 其长, 宽分别为 L, W, 选直角坐标系 $\{O, e_1, e_2\}$, 置料板 S 于第一象限, 且使它一个顶点与坐标原点重合, 即 $S = \{(\bar{x}, \bar{y}) \quad 0 \leq \bar{x} \leq L, 0 \leq \bar{y} \leq W\} \subset R_+^2$: 设 n_r 为 S 上矩形图元种类的数量, n_{rj} 为 S 上 j 类矩形图元的数量, 指标集 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, F_{jk} 为 S 上的第 k 个 j 类矩形图

元, (x_{jk}, y_{jk}) 为其左下角坐标, d_{jk} 为它的方向($d_{jk}=0$ 矩型竖放, $d_{jk}=1$ 横放), 则

$$
\begin{aligned}
F_{jk} &= F(x_{jk}, y_{jk}, d_{jk}, \alpha_{jk}) \\
&= \{(\bar{x}, \bar{y}) \quad x_{jk} \leq \bar{x} \leq x_{jk} + (1-d_{jk}) w_j + d_{jk} \\
&\quad \cdot l_j, y_{jk} \leq \bar{y} \leq y_{jk} + (1-d_{jk}) l_j + d_{jk} \cdot w_j\}
\end{aligned}
$$

其中 $(x_{jk}, y_{jk}) \in S, d_{jk} \in \{0, 1\}\ \alpha_{jk} \in X, k \in I_{n_{rj}}, j \in I_{n_r}, n_{rj} \leq N_{rj}, n_r \leq N_r,$

定义 1 [11] 设布局方案 $Y=\{F_{jk} \subset S: k \in I_{nr}, j \in I_{n_r}\}$. 若 Y 中各图元 F_{jk} 满足不干涉性, 即

$$\operatorname{int} F_{jk} \cap \operatorname{int} F_{jk'} = \Phi, F_{jk}, F_{jk'} \in Y, (k, j) \neq (k', j') \tag{2.1}$$

则称 Y 为一个不干涉布局方案。

定义 2 设 Y 为不干涉布局方案, 若 Y 可由 $Y-1$ 个平行坐标轴的超平面(直线) 分成 Y 个单图元集, 则称 Y 为一刀切布局方案。

特别, $Y=1$ 时, 自然认为 Y 是一刀切布局方案

令

$$
\begin{aligned}
P(y) &= \{Y' \quad Y' \subseteq Y, Y' \neq \Phi\}, \bar{P}(Y) = P(Y) \setminus \{Y\}, \\
Q(Y) &= \{Y' \quad Y' \subseteq Y, \quad Y' = 1\}, \\
D(Y) &= P(Y) \setminus Q(Y) = \{Y' \quad Y' \subseteq Y, \quad Y' > 1\},
\end{aligned}
$$

定义 2 设 Y 为不干涉布局方案, 取 $Y_1 = Y$, 再取 $Y_h' \in \bar{P}(Y_h)$, 则

$$Y_h = Y_h' \cup (Y_h \setminus Y_h')$$

$$
\triangleq \begin{cases}
Y_{2h-h^*} \cup Y_{2h+1-h^*}, & Y_h', Y_h \setminus Y_h' \in D(Y_h) \\
Y_{2h-h^*} \cup Y^*_{h^*+1}, & Y_h' \in D(Y_h), Y_h \setminus Y_h' \in Q(Y_h) \ (Y_h' = Y_{2h-h^*}, Y_h \setminus Y_h' = Y^*_{h^*+1}) \\
 & \text{, 或 } Y_h \setminus Y_h' \in D(Y_h), Y_h' \in Q(Y_h) \ (Y_h \setminus Y_h' = Y_{2h-h^*}, Y_h' = Y^*_{h^*+1}) \\
Y^*_{h^*+1} \cup Y^*_{h^*+2}, & Y_h', Y_h \setminus Y_h' \in Q(Y_h)
\end{cases}
$$

其中 $h \in I_{Y-1}, 0 \leq h^* < h, \ h^* = \max\{j \quad Y_j^* \in \bigcup_{k=1}^{h-1} Q(Y_k)\}$, 则称序列 $\{Y_h\}$ 为 Y 的一组分枝,

例　设 $Y=\{F_i: i \in I_6\}$, 则 $D(Y) = \bigcap_{i=0}^{6} (2^Y \setminus \{F_i\})$, 其中 $\{F_0\} = \Phi, \ D(Y) = 57.$

取 $Y_1 = Y, \forall Y_1' \in \bar{P}(Y_1)$, 如取 $Y_1' = \{F_i: i \in I_5\}$, 则

$$Y_1 = Y_1' \cup (Y_1 \setminus Y_1') \triangleq Y_2 \cup Y_1^* \qquad (Y_1' \in D(Y_1), Y_1 \setminus Y_1' \in Q(Y_1)), \text{即}$$

$$Y_2 = Y_1' = \{F_i: i \in I_5\}, \qquad Y_1^* = Y_1 \setminus Y_1' = \{F_6\}.$$

$\forall Y_2' = \in \bar{P}(Y_2)$, 如取 $Y_2' = \{F_1, F_3, F_5\}$, 则

$$Y_2 = Y_2' \cup (Y_2 \setminus Y_2') \triangleq Y_{2\times2-1} \cup Y_{2\times2+1-1} \qquad (Y_2', Y_2 \setminus Y_2' \in D(Y_2)), \text{即}$$

$$Y_3 = Y_2' = \{F_1, F_3, F_5\} \qquad Y_4 = Y_2 \setminus Y_2' = \{F_2, F_4\}.$$

(当然也可令 $Y_3 = Y_2 \setminus Y_2', Y_4 = Y_2'$)

$\forall Y_3' \in \bar{P}(Y_3)$, 如取 $Y_3' = \{F_1\}$, 则

$$Y_3 = Y_3' \cup (Y_3 \setminus Y_3') \triangleq Y_2^* \cup Y_{2\times3-1} \qquad (Y_3' \in Q(Y_3), Y_3 \setminus Y_3' \in D(Y_3)), \text{即}$$

$$Y_5 = Y_3 \setminus Y_3' = \{F_3, F_5\}, \qquad Y_2^* = Y_3' = \{F_1\}.$$

$\forall Y_4' \in P(Y_4)$, 如取 $Y_4' = \{F_2\}$, 则

$$Y_4 = Y_4' \cup (Y_4 \setminus Y_4') \triangleq Y^*_{2+1} \cup Y^*_{2+2} \qquad (Y_4', Y_4 \setminus Y_4' \in Q(Y_4)), \text{即}$$

$$Y_3^* = Y_4' = \{F_2\}, \quad Y_4^* = Y_4 \setminus Y_4' = \{F_4\}. \quad (\text{当然也可令 } Y_3^* = Y_4 \setminus Y_4', Y_4^* = Y_4')$$

关于 Y_5, 与 Y_4 同理可得 $Y_5^* = \{F_3\}, Y_6^* = \{F_5\}$.

总之得 Y 的一组分枝 $\{Y_h\}\ h \in I_5$, 其中 $Y_1 = \{F_i: i \in I_6\}, Y_2 = \{F_i: i \in I_5\},$

$Y_3=\{F_1,F_3,F_5\}$, $Y_4=\{F_2,F_4\}$, $Y_5=\{F_3,F_5\}$.

设 R^2 中平行于坐标轴的超平面(直线)为

$$H(x^*,\beta)=\{x\in R^2 \mid <x,x^*>=\beta\},$$

其中, $x^*\in\{\pm e_1,\pm e_2\}$, $\beta\in R$, 以 $H(x^*,\beta)$ 为边界的半空间分别为

$$H^-(x^*,\beta)=\{x\in R^2 \mid <x,x^*>\leq\beta\},$$

$$H^+(x^*,\beta)=\{x\in R^2 \mid <x,x^*>\geq\beta\},$$

由定义 2、定义 3 可得

性质 1 设 Y 为一不干涉布局方案, Y 为一刀切布局方案的充要条件是存在 Y 的一组分枝 $\{Y_h\}$ 使

$$Y_h\setminus Y'_h\subset H_h^-(x_h^*,\beta_h),\qquad Y'_h\subset H_h^+(x_h^*,\beta_h),$$

其中 $H_h^-(x_h^*,\beta_h)$ 与 $H_h^+(x_h^*,\beta_h)$ 为由超平面 $H_h(x_h^*,\beta_h)$ 所得半空间, $x_h^*\in\{\pm e_1\pm e_2\}$, $h\in I_{|Y|-1}$.

特别当 $Y'\in D(Y)$, $|Y'|\leq 3$ 时, 显然 $\exists\, H(x^*,\beta)$, $x^*\in\{\pm e_1,\pm e_2\}$, $\beta\in R$ 使 $Y\setminus Y^*\subset H^-(x^*,\beta)$, $Y^*\subset H^+(x^*,\beta)$ 成立, 其中 $Y^*\in\bar{P}(Y')$。所以在差别一个不干涉布局方案 Y 是否为一刀切布局时, 只要判别一组分枝 $\{Y_h\}h\in I_{|Y|-1}$ 中 $|Y_h|>3$ 的是否存在平行坐标轴的分离超平面 $H(x^*,\beta)$ 即可"

性质 2 设 Y 为一不干涉布局方案。Y 为一刀切布局方案的充要条件是 $\forall\, Y'\in D(Y)$, $\exists\, H(x^*,\beta)$, $x^*\in\{\pm e_1,\pm e_2\}$, $\beta\in R$, 使

$$Y'\setminus Y''\subset H^-(x^*,\beta),\ Y''\subset H^+(x^*,\beta),$$

成立, 其中 $Y''\in\bar{P}(Y')$。

证明(略)。

3 数学模型

设 $X_s=\{a_{jk}=(l_j,w_j)\in X \mid k\in I_{n_{rj}},\ j\in I_{n_r}\}$,

$$co(Y'):=co(\bigcup_{F_{ik}\in Y'}F_{ik}),$$

其中 $co(\bigcup_{F_{ik}\in Y}F_{ik})$ 表示集合 $\bigcup_{F_{ik}\in Y}F_{ik}$ 的凸包, 则矩形料板下料问题的数学模型为

$$\text{MSC}\quad \min LW-\bigcup_{j=1}^{n_r}n_{rj}\cdot l_j\cdot w_j$$

$$\text{s.t.}\quad \bigcup_{j=1}^{n_r}\bigcup_{k=1}^{n_{rj}}F_{ik}\subseteq S$$

$$\text{int}F_{jk}\cap\text{int}F_{j'k'}=\Phi,\ F_{jk},F_{j'k'}\in Y,\ (k,j)\neq(k',j').$$

$$\sup\{<\eta,x_h^*>\mid \eta\in co(Y_h\setminus Y'_h)\subset R^2\}\leq\inf\{<\eta,x_h^*>\mid \eta\in co(Y'_h)\subset R^2\}$$

$$\{Y_h\}\subset D(Y),\ Y'_h\in\bar{P}(Y_h),\ x_h^*\in\{\pm e_1,\pm e_2\},\ h\in I_{|Y|-1}.$$

$$X_s\subseteq X.$$

其中 $\{Y_h\}$ 为 Y 的一组分枝, $F_{jk}=F(x_{jk},y_{jk},d_{jk},a_{jk})$ 中 x_{jk},y_{jk},d_{jk}, $k\in I_{n_{rj}}$, $j\in I_{n_r}$ 为布局问题的优化变量。即模型为 $3.\sum_{j=1}^{n_r}n_{rj}$ 个优化变量的混合整数规划。

多张产板下料时, 可重复使用模型 MSC, 只是可选矩形图元集在缩小, 直到 $X \setminus \bigcup_{s \in \alpha} X_s = \Phi$ 为止, 其中 α 为 s 的指标集, 需要注意的是此时即使对每张料板 S 都使用精确方法求出 MSC 的最优解, 最后得到的也只是一个可行解, 并不能保证是全局最优解。这种方法在开始时能达到很高的材料利用率, 但到后来则效果很差, 这是因为可选矩形图元集逐渐变小的缘故。假若不使用精确算法求解 MSC, 而是按一定度量将矩形图元排序后再根据一定的启发式规则下料, 材料利用率也基本符合利用率先好后坏的规律。并在加快速度方面具有一定的最优性, 我们先按启发式得到那些材料利用率高的板, 当可选矩形图元集很小时, 再使用较精确的算法, 并引入一定的回退技巧对最后的一些板下料。计算表明这同样能够得到多料板下料问题的较好的解, 且具有较快的速度。

参考文献

[1] Gilmore P C, Gomory R E. A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part 1) [J]. Operations Research, 1961, 9, 849-859.

[2] Gilmore P C, Gomory R E. A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part 2) [J]. Operation Research, 1963, 11, 863-888.

[3] Gilmore P C, Gomory R E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions [J]. Operations Research, 1965, 13, 94-120.

[4] Christofides N, Whitlock C. An algorithm for two-dimensional cutting problems [J]. Operations Research, 1977, 25, 31-44.

[5] Wang P Y. Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems [J]. Operations Research, 1983, 31, 573-586.

[6] Daza V P, Alvarenga A G, Diegom J. Exact solutions for constrained two-dimensional cutting problems [J]. European Journal of Operational Research, 1995, 84, 633-644.

[7] Christofides N, Hadjiconstantinou E. An algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts [J]. European Journal of Operational Research, 1995, 83, 21-38.

[8] Beasley J E. Alogorithms for unconstrained two dimensional gullotine cutting [J]. Journal of the Operational Research Society, 1985, 4, 297-306.

[9] Morabito R N, Arenales M N, Arcoro V F. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach [J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94, 548-560.

[10] 王锡禄, 冯恩民. 矩形图元下料的优化模型、算法及应用[C]. 中国工业与应用数学学会第五次大会论文集[A], 北京: 清华大学出版社, 1998, 603-607.

[11] 冯恩民, 王锡禄, 王秀梅, 等. 带性能约束布局问题的全局优化算法[J]. 高校应用数学学报, 1999, 14A(1), 98-104.