高等数学下册期中考试模拟题（一）答案

一．单选题（每小题 4 分，共 20 分）

1．曲面 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 上点 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$ 处法线与 z 轴夹角的正弦值为（ C ）.

A． $\frac{2\sqrt{26}}{13}$　　B． $\frac{3\sqrt{26}}{26}$　　C． $\frac{\sqrt{65}}{13}$　　D． $\frac{1}{\sqrt{26}}$

2． 设 D: $x^2+y^2\le r^2$，则 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=$（ C ）.

A． π　　B． $\frac{1}{\pi}$　　C． 1　　D． -1

3． 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成（ D ）.

A． $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$.　　B． $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

C． $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$.　　D． $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$.

4． 设 $f(x,y)=e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$，则在(0, 1)点处的两个偏导数 $f_x(0,1)$ 和 $f_y(0,1)$ 的情况为（ B ）.

A． $f_x(0,1)$ 不存在， $f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$　　B． $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$， $f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$.

B． $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$， $f_y(0,1)$ 不存在　　D． 两个偏导数均不存在 .

5． 在曲线 $x=t$， $y=-t^2$， $z=t^3$ 的所有切线中与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（ B ）.

A． 只有一条　　B． 只有 2 条　　C． 至少有 3 条　　D． 不存在

二．填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\,u\big|_M=\underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$.

2．设 $f(x,y)=\arctan\sqrt{x^y}$，则 $f_x(x,1)=\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\underline{-\frac{z^2}{(z+x)^3}}$.

4. 设 $u=2xy-z^2$，则 u 在点 $(2,-1,1)$ 处方向导数的最大值为 $\underline{2\sqrt{6}}$.

5. 设有椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$，则它在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 处切平面方程为 $\underline{x+2y-z=2}$.

三.（10 分）设 $z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}f_1+\frac{1}{y}f_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}f_1+e^{x+y}(e^{x+y}f_{11}-\frac{x}{y^2}f_{12})+\frac{1}{y}(e^{x+y}f_{21}-\frac{x}{y^2}f_{22})-\frac{1}{y^2}f_2$$

$$=e^{x+y}f_1+e^{2(x+y)}f_{11}-e^{x+y}\frac{x-y}{y^2}f_{12}-\frac{x}{y^3}f_{22}-\frac{1}{y^2}f_2.$$

四.（8 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax$ 及 $x=0$ 所围在第一象限的区域 $(a>0)$.

解：$$I=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge0,y\ge0}}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le ax\\ y\ge0}}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(1-\rho)\rho d\rho-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}(1-\rho)\rho d\rho=\frac{\pi}{8}a^2-(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9})a^3$$

五.（12 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问在原点(0, 0)处，

（1） 偏导数是否存在？（2） 偏导数是否连续 ？（3）函数是否可微?

均说明理由.

解：（1） $f_x(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$f_y(0,0)=0$，

所以函数在(0, 0)处的偏导数存在.

（2）$(x,y)\ne(0,0)$, $f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ 不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在(0, 0)处不连续，同理 $f_y(x,y)$ 在(0, 0)处不连续.

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

六.（10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2-3z=0$ 与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点 (1, 1, 1)处的切线与法平面方程.

解：分别对两个方程关于 x 求偏导得 $\begin{cases}2x+2yy'+2zz'-3z'=0\\2-3y'+5z'=0\end{cases}$，将点(1, 1, 1)代入得

$\begin{cases}2y'-z'=-2\\3y'-5z'=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}y'(1)=-\dfrac{12}{7}\\z'(1)=-\dfrac{10}{7}\end{cases}$，取切向量为 $(7,-12,-10)$，

可得切线方程：$\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-1}{-12}=\dfrac{z-1}{-10}$，

法平面方程：$7(x-1)-12(y-1)-10(z-1)=0$，即 $7x-12y-10z+15=0$.

七.（10 分）已知平面两定点 $A(1, 3)$, $B(4, 2)$, 试在方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x\ge 0, y\ge 0)$ 的椭圆上求一点 C, 使 ΔABC 的面积最大？

解：$AB=\sqrt{10}$, $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$，椭圆上一点 (x,y) 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{10}}|x+3y-10|$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|x+3y-10|$. 令 $L(x,y,\lambda)=(x+3y-10)^2+\lambda(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1)$，

$\begin{cases}L_x=2(x+3y-10)+\dfrac{2}{9}\lambda x=0\\L_y=6(x+3y-10)+\dfrac{1}{2}\lambda y=0\\L_\lambda=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0\end{cases}$，解得 $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt5}, y=\pm\dfrac{4}{\sqrt5}$，和点 $(3,0),(0,2)$ 比较，

ΔABC 的面积在 $(3,0)$ 处最大.

八.（10 分）设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy,$$

求 $f(t)$.

解：对后面的二重积分做极坐标变换，可得 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$.

两端同时关于 t 求导数，可得 $f'(t)=8\pi t\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi t f(t)$，且 $f(0)=1$. 这是一阶非齐次线性微分方程，用常数变易法求得 $f(t)=4\pi t^2\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+C\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}$，代入 $f(0)=1$ 得 $C=1$.

因此 $f(t)=\left(4\pi t^2+1\right)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$.