第五章 多元函数微分学及其应用

第二节 多元函数的极限与连续

- 多元函数的概念
- 多元函数的极限与连续性
- 有界闭区域上连续函数的性质
- 小结

作业：习题5.2 (A) 3,4,5,6,8,10 (B) 2

第一部分 多元函数的概念

定义1 **(n元数量值函数, 简称为n元函数)**

设点集$A \subseteq R^n$, $f: A \to R$的一个映射,则称f是定义于A上的一个n元数量值函数.记为

$$w = f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$称为自变量, w称为因变量.

$D(f) = A$称为f的定义域.

$R(f) = \{w \mid w = f(x), x \in A = D(f)\}$称为值域.

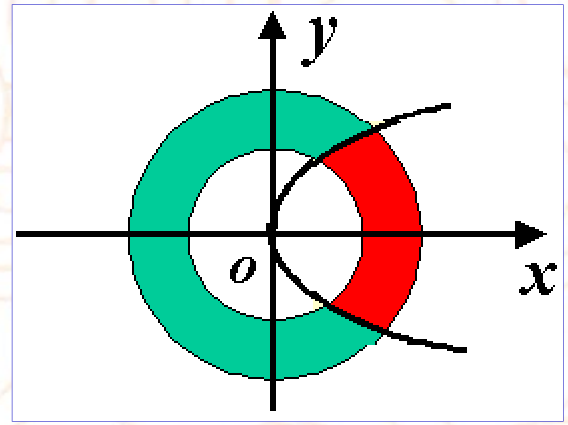
特别地,

当 **n = 2** 时, 有二元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2$

当 **n = 3** 时, 有三元函数$u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D \subset \mathrm{R}^3$

例1 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

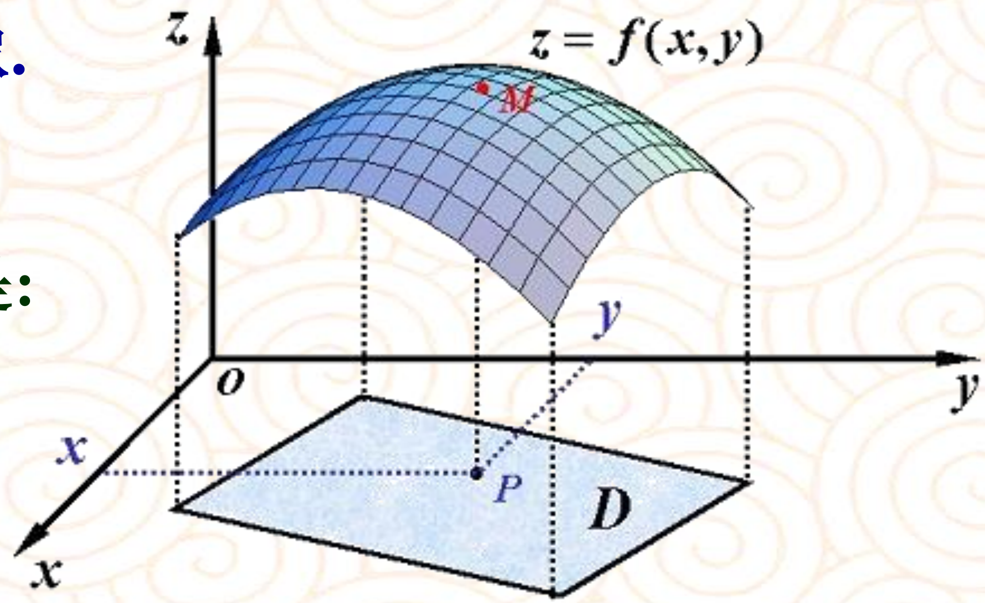
二元函数$z=f(x,y)$的图像

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的$(x,y)\in D$，对应的函数值为$z=f(x,y)$，这样，以x为横坐标、y为纵坐标、z为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$.

当(x,y)取遍D上的一切点时，得一个空间点集

Grf=$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$

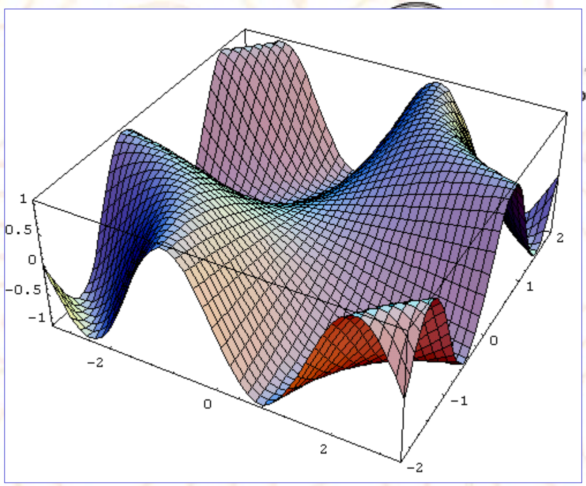
这个点集称为二元函数的图像.



二元函数的图像通常是:
3维空间的一张曲面.

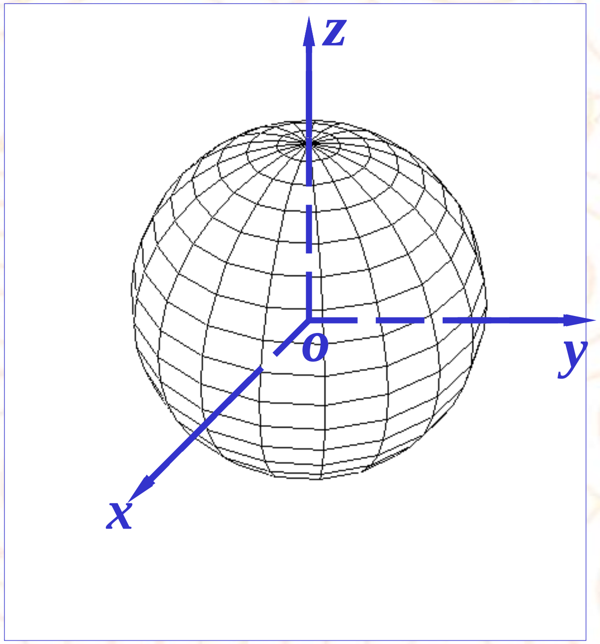
例如，$z=\sin xy$，$(x,y)\in \mathrm{R}^2$

图形如右图.



例如，$x^2+y^2+z^2=a^2$

是右图球面.



$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}.$$

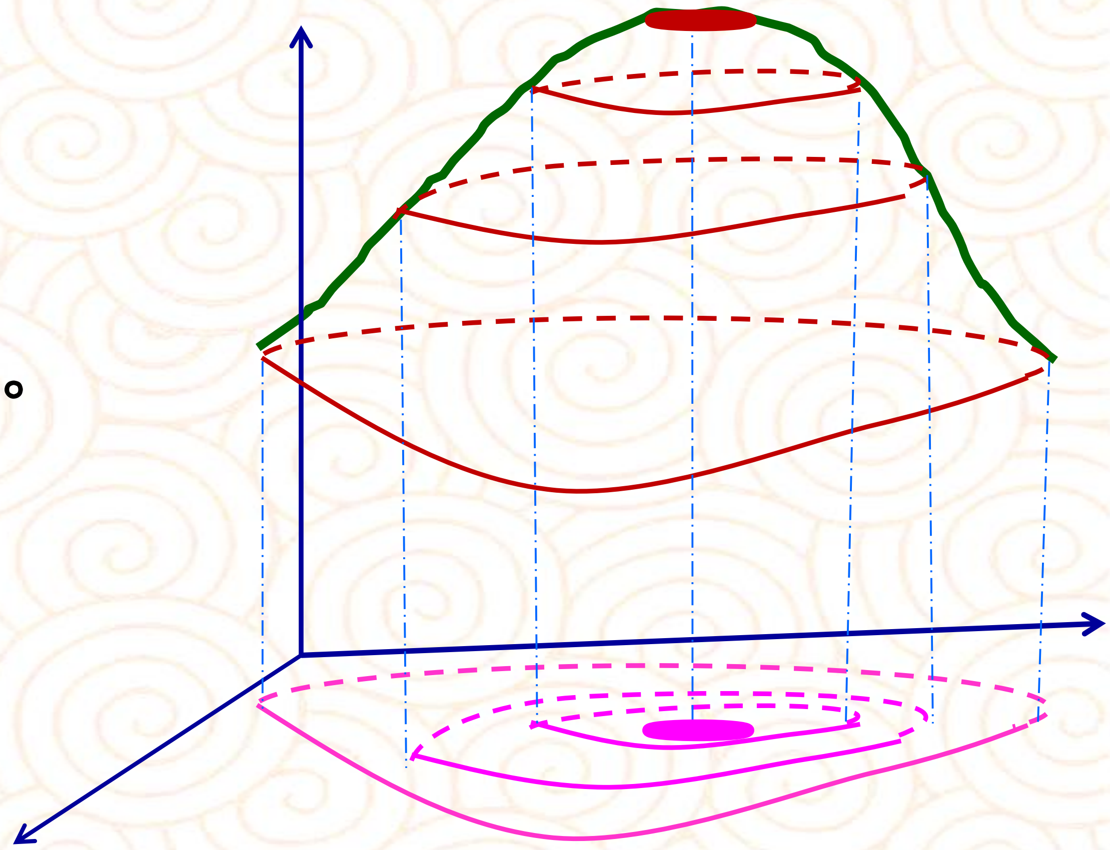
单值分支：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

二元函数 $z = f(x,y)$ 的等值线

等值线 $f(x,y)=C$ 当常数 C 分别取不同值时，表示 xoy 平面上的曲线族 。每条曲线表示空间曲面 $z=f(x,y)$ 与空间曲线 $z=C$ 的交线在 xoy 平面上的**投影**。

例: 某一山包的等高线。



例 $z = f(x, y) = xy$ 表示什么曲面？

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

解 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}),$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

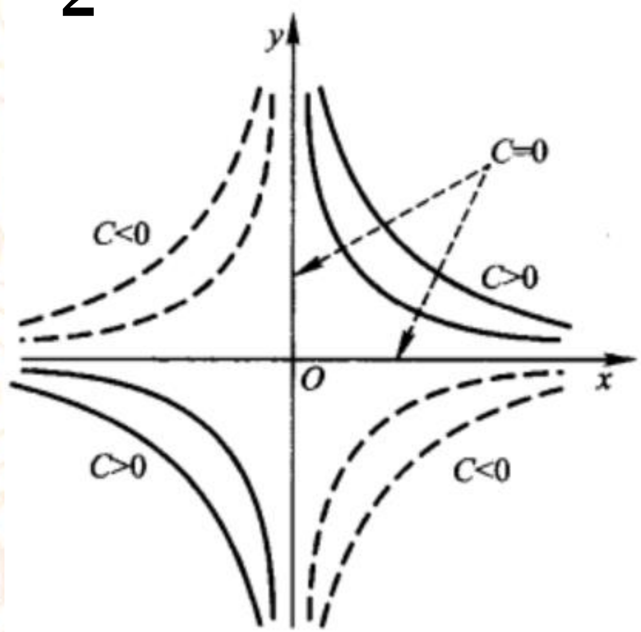
存在正交变换 $X = PY$ 使 $z = f = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$

$z = xy$ 为双曲抛物面（马鞍面）.

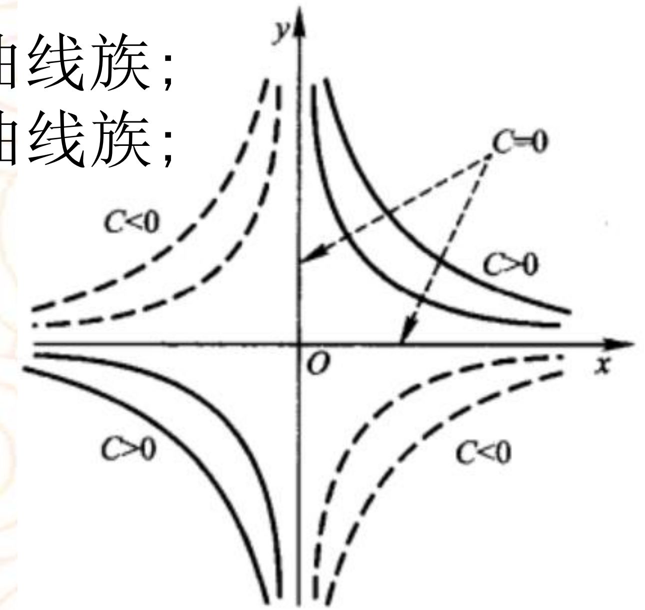
用等值线分析 $Z = xy$ 图形形态?

等值线为:xy=C

它是xOy平面上的等轴双曲线族



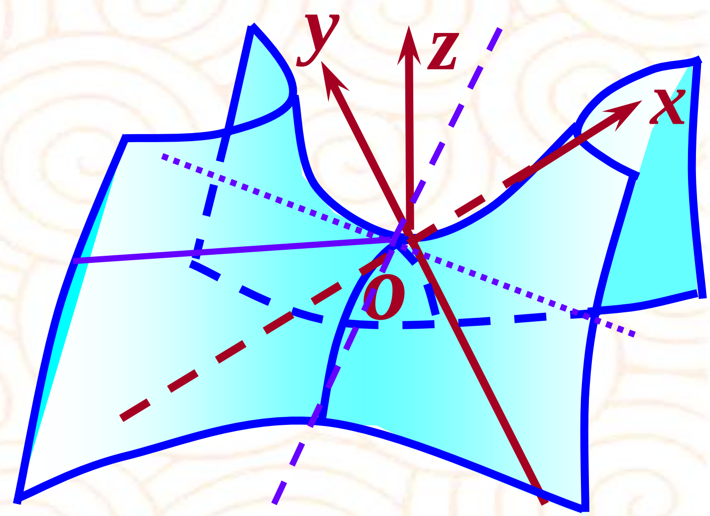
当C>0时，等值线是位于第一与第三象限的双曲线族；
当C<0时，等值线是位于第二与第四象限的双曲线族；
当C=0时，等值线是直线x=0与y=0.



此等值线所表示的曲面$z=xy$特点：

从两坐标轴在第一与第三象限逐渐向上升起并逐渐向外扩大；
同时由两坐标轴在第二和第四象限逐渐向下向外延伸.

原点O(0 ,0)称为此曲面的鞍点



三元函数的等值面

三元函数$u=f(x,y,z)$ 的图像不能在四维空间中直观呈现，但可在三维空间Oxyz中用曲面$f(x,y,z)=C$来显示某些特征. $f(x,y,z)=C$称为函数$u=f(x,y,z)$的等值面，其中C为常数.

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

定义域为单位闭球$\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$

图像为 R^4空间中的超曲面.

n元函数 $w=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的图像

$$\mathrm{Gr}f=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,w)\,|\,w=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in D\}$$

是R^{n+1}中的点集.

$w=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n$的图像称为$R^{n+1}$中的超平面.

回顾一元函数极限定义：

定义 2　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那末常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当 x \to x_0)$$

$\boxed{"\varepsilon - \delta"定义}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

第二部分 多元函数的极限与连续性

2.2. 二元函数的极限

定义2 设函数$z = f(x,y)$的定义域为 $\overset{o}{U}(P_0)$，点$P_0(x_0, y_0)$
A 是常数，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，
使得对于适合不等式
$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$的一切点$P(x,y)$，
都有$|f(x,y) - A| < \varepsilon$成立，则称 A 为
函数$z = f(x,y)$当$x \to x_0$，$y \to y_0$时的极限，
记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

（或$f(x,y) \to A \quad (\rho \to 0)$这里$\rho = |PP_0|$）.

去心邻域：定义一个局部范围
去心邻域中的每一点宽松化：聚点

定义3(聚点定义)二元数量值函数的极限

设二元函数 $f(P), P\in D\subset \mathbf{R}^2$， P_0 是 D 的聚点

若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数 δ，对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$ (也称为二重极限)

n =2，记 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限也可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A \quad = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

等价表达:

$$P(x,y)$$

$$P_0(x_0,y_0)$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$P \in \overset{\circ}{U}(P_0,\delta) \cap D \iff 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta$

$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$

且$(x,y) \in D$

说明:

（1）定义中$P \to P_0$的方式是任意的;

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

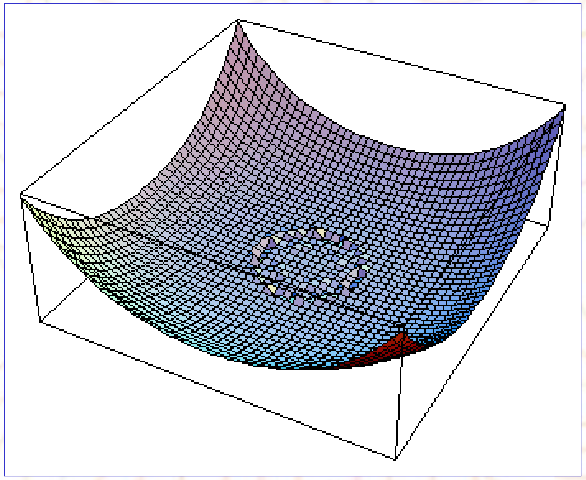
例 用定义证明下列极限:

(1) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2=2;$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(3,2)}(3x-4y)=1.$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\frac{1}{2}.$$

例　求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$



证： $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$

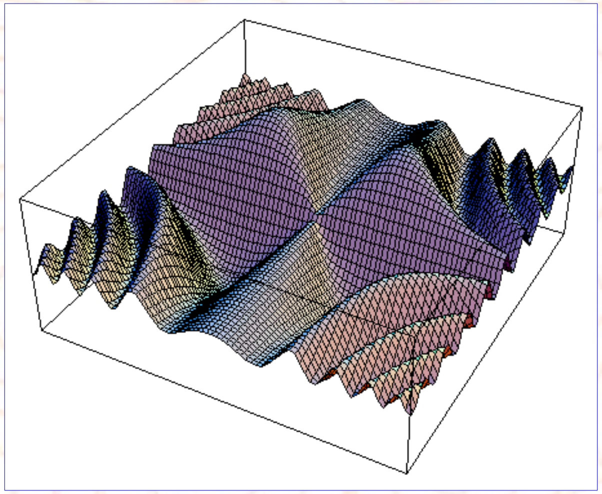
$\le x^2+y^2$

因此 $\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta=\sqrt{\varepsilon},$

当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,

$\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$　即原结论成立.

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.



解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y}\cdot\frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \overset{u=x^2y}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1,$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0, \quad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$$

例 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$不存在.

证 取 $y=kx^3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}}\dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k的不同而变化,故极限不存在.

确定极限不存在的方法:

（1） 令$P(x,y)$沿$y=kx$趋向于$P_0(x_0,y_0)$,若极限值与k有关，则可断言极限不存在;

（2） 找两种不同趋近方式，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=(\quad)$$ A. 0 B. 1 C. 不存在

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=(\quad)$$ A. 0 B. 1 C. 不存在

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^4+y^4)}{x^3+y^3}=(\quad)$$ A. 0 B. 1 C. 不存在

西安交通大學 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$

$$0 \le \left|\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\right| = \left|\frac{x^4}{x^3+y^3}\right| + \left|\frac{y^4}{x^3+y^3}\right| \le \cancel{\left|\frac{x^4}{x^3}\right| + \left|\frac{y^4}{y^3}\right| = |x|+|y|}$$

当(x,y)沿着x轴趋于原点时，极限是0.

当(x,y)沿着 $y=x^2-x$ 趋于原点时，极限是2/3，从而原式极限不存在!

$$\because \lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}} \frac{x^4+(x^2-x)^4}{x^3+(x^2-x)^3}$$

$$= \lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}} \frac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+2x^4}{x^6-3x^5+3x^4}$$

$$= \lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}} \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+2}{x^2-3x+3} = \frac{2}{3}$$

C_n^k

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

回顾一元函数连续的定义:

定义 2 设函数 $f(x)$在$U(x_0)$内有定义, 如果函数 $f(x)$当$x \to x_0$时的极限存在, 且等于它在点x_0处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数 $f(x)$在点x_0连续.

"$\varepsilon - \delta$"定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当$|x - x_0| < \delta$时,

恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

二元连续函数

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

设二元函数 $f(P)$ 的定义域为 $U(P_0)$，$P_0(x_0,y_0)$，如果 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ 则称二元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处**连续**.

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta),$$
$$\text{恒有}\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon.$$

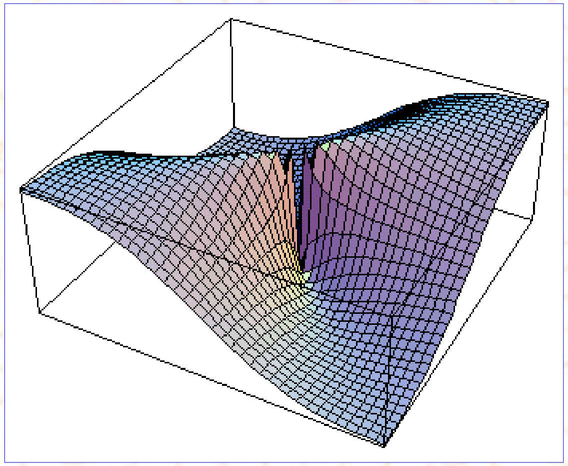
若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 中的每一点处连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续。

如果 $f(P)$ 在点 P_0 处不连续，则称 P_0 是函数 $f(P)$ 的**间断点**.

二元连续函数的**和差积、商**(分母不为0)与**复合函数**仍为连续函数.

例8　讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$



在(0,0)的连续性.

解　取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随k的不同而变化，　极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

二元函数的间断

例 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断. 间断线

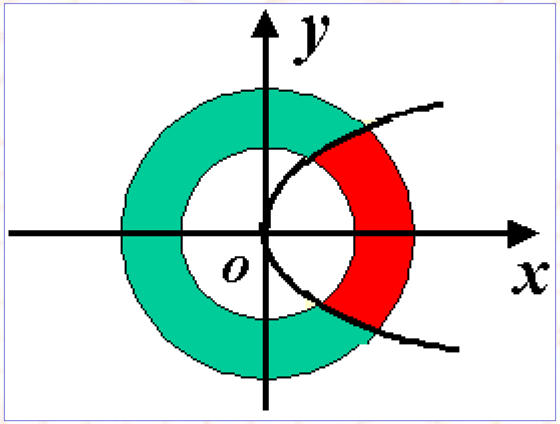
二元初等函数在定义区域内连续.

二元初等函数在定义区域内连续.

例. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} |3-x^2-y^2| \le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x > y^2 \end{cases}$



n元数量值函数的极限与连续

定义 设$A \subseteq R^n$是一点集, $f: A \to R$是一个n元数量值函数,

$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$, x_0 是A 的一个聚点,若存在实数a 满足:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \cap A,$$

恒有$|f(x) - a| < \varepsilon$, 则称 a 为 $x \to x_0$ 时$f(x)$的**极限**.

n元函数的极限也叫**n重极限**

记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. 或:

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(x_{01},\cdots,x_{0n})} f(x_1,\cdots,x_n) = \lim_{\substack{x_1 \to x_{01} \\ x_2 \to x_{02} \\ \vdots \\ x_n \to x_{0n}}} f(x_1,\cdots,x_n) = a$$

n元数量值函数的连续

设n元函数 $f(P)$的定义域为 $U(P_0)$, $P_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$

如果 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称$n$元函数$f(P)$在$P_0$处连续.

如果 $f(P)$在点P_0处不连续，则称P_0是函数 $f(P)$的间断点.

多元初等函数：由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫多元初等函数

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

多元向量值函数

神州号宇宙飞船在太空飞行时的位置是由多元变量所表示的向量确定，每一分量是时间t的函数。如何刻画每一时刻飞船的飞行速度向量，加速度向量？

归结为向量值函数的导数与微分问题。

一元向量值函数

映射f：$U(x_0)\subseteq R\to R^m$为一个一元向量值函数。

$$f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

其中　$x\in U(x_0)\subseteq R$，　$f_i(x)$为一元数量值函数。

n元向量值函数

一般地，称映射 f：$A\subseteq R^n \to R^m$为一个n元向量值函数。

即：
$$f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{bmatrix}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in A\subseteq R^n$，

$f_i(x)$为n元数量值函数。

n元向量值函数的极限

定义 设$A \subseteq R^n$是一点集，$f: A \to R^m$ 是一个n元向量值函数，

$$f=(f_1, f_2, \cdots, f_m)^T, \quad x_0=(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}),$$

x_0 是A 的一个聚点，实常向量 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_m) \in R^m$

若$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \cap A$,

恒有$\|f(x)-a\|<\varepsilon$，则称向量 a 为 $x \to x_0$ 时$f(x)$的极限。

记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=a.$

$$\|f(x)-a\|=\sqrt{\left(f_1(x)-a_1\right)^2+\left(f_2(x)-a_2\right)^2+\cdots+\left(f_m(x)-a_m\right)^2}$$

n元向量值函数的连续性:

若n元向量值函数$f(x)$在$U(x_0)$有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

则称$f(x)$ 在点x_0处连续。

(等价命题)

极限存在 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$, $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in R^m$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_i(x)=a_i \quad (i=1,2,\cdots,m)}$$

连续性:

$$\boxed{f(x)\text{在}x_0\text{连续} \Leftrightarrow f_i(x)\text{在}x_0\text{连续} \quad (i=1,2,\cdots,m)}$$

第三部分 有界闭区域上连续函数的性质

有界闭域上多元连续函数具有与一元函数类似的性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists\, M > 0$, 使 $|f(P)| \le M$, $P \in D$; (有界性定理)

(反证，波尔查诺，f连续的性质)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ; (最值定理)

(确界原理，确界定义，波尔查诺，f连续的性质)

(3) 对任意 $\mu \in [m, M]$, $\exists\, x_0 \in D$, 使 $f(x_0) = \mu$; (介值定理)

(证明略)

(4) $f(P)$ 必在D 上一致连续 . (一致连续性定理) (证明略)

求极限的代入法

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，

且 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

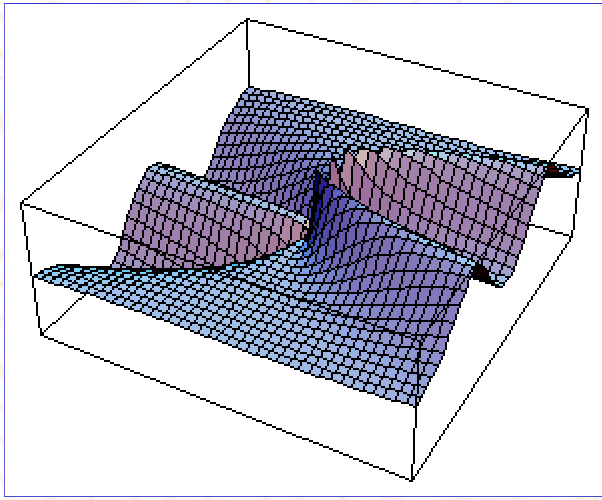
例9 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在

思考题 若点(x,y)沿着无数多条平面曲线趋向

点(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$都趋向于A，能否

断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$？



练 习 题

一、填空题:

1、若 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$, 则 $f(tx,ty)=$_____.

2、若 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$, 则 $f(2,-3)=$____________;

$f(1,\dfrac{y}{x})=$____________________.

3、若 $f(\dfrac{y}{x})=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\ (y>0)$, 则 $f(x)=$__________.

4、若 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$, 则 $f(x,y)=$___________.

函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是____________.

6、函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域是________________.

7、函数$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$的定义域是________________.

8、函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$的间断点是________________.

二、 求下列各极限:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　　2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

三、证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

四、证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$不存在 .

练习题答案

一、 1、 $t^2 f(x,y)$； 2、$-\dfrac{13}{12}$， $f(x,y)$；

3、 $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$； 4、 $x^2\dfrac{1-y}{1+y}$；

5、$\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1, y^2\le 4x\}$；

6、$\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, x^2\ge y\}$；

7、$\{(x,y)\,|\,x>0, -x\le y\le x\}$

$\cup\{(x,y)\,|\,x<0, x\le y\le -x\}$；

8、$\{(x,y)\,|\,y^2-2x=0\}$.

二、1、$-\dfrac{1}{4}$； 2、0； 3、$+\infty$.