

# 旋转机械传动系统连续扭振动力学建模与仿真

侯东晓 刘 彬 时培明  
燕山大学, 秦皇岛, 066004

**摘要:**在考虑传动系统连续分布质量的基础上,采用拉格朗日方程建立了旋转机械传动系统的连续动力学模型。通过传递函数法推导出任意轴上的扭振响应公式,并得到了存在间隙时传动系统的连续动力学模型。该连续模型能更精确地求解传动系统的固有频率,同时可有效减小传动系统自由度数量的变化对系统基频的影响。仿真结果表明,该连续模型能更丰富地反映出传动系统的扭振特性,为分析旋转机械传动系统扭振问题提供了一种新的途径。

**关键词:**旋转机械;传动系统;连续性;扭振;间隙  
**中图分类号:**TH113.1      **文章编号:**1004-132X(2010)01-0030-05

**Research on Continuous Torsional Vibration Modeling and Simulation of Rotary Machinery**  
Hou Dongxiao Liu Bin Shi Peiming  
Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei, 066004

**Abstract:**A novel continuous torsional vibration dynamics model of rotary machinery was established, which was based on the Lagrange equation. And arbitraty shaft's torsional formula of drive system was obtained by transfer function method. Then a nonlinear continuous dynamics model considering clearance of drive system was established. Compared to lumped mass model, the natural frequency of the continuous model is more accurate, and it can decrease the calculational errors which are caused by human factors. A numerical example indicates that the method can reflect more complex characteristics of the torsional vibration, and it provides a new method for analysing torsional vibrations.

**Key words:**rotary machinery; drive system; continuous; torsional vibration; clearance

## 0 引言

旋转机械是工业生产中的主要设备之一,其传动系统的运行稳定状态影响整个生产过程。随着生产速度和生产规模的逐步提高,传动系统中的扭振问题也日益突出。目前,对旋转机械传动系统的扭振研究一般集中在求解系统固有频率以及传动系统轴系的扭矩动态响应上。在传统动力学模型中,通常采用离散化方法将整个传动系统分割成由多个集中质量和弹簧连接而成的弹簧-质量系统<sup>[1-5]</sup>。这种集中质量模型虽然能够较准确地描述轴系的低阶、高阶扭振特性,但当传动系统中存在质量较大而刚度又较小的传动部件时,通过离散简化容易造成较大误差。文献[6]采用传递矩阵法建立了含连续质量的单轴动力学方程,得到了连续传动轴的频响函数。文献[7]采用拉格朗日方程建立了单个连续轴的动力学方程,并得到了该轴在各种外力作用下的响应曲线。

本文在考虑旋转机械传动系统的连续分布质量的基础上,将单个连续轴动力学方程进行拓展,

基于拉格朗日方程建立了旋转机械传动系统连续动力学模型。然后采用传递函数法推导出了传动系统中任意轴段上的扭振响应公式,同时研究了存在间隙时的传动系统连续动力学模型。最后以轧机传动系统为例,与离散模型进行了比较,表明了该连续模型能很好反映出传动系统的扭振特性,为分析旋转机械传动系统扭振提供了一种新的途径。

## 1 旋转机械传动系统连续动力学建模

为更精确地分析旋转机械传动系统的扭振特性,可将传动系统等效为由多个粗细不同的连续弹性转轴连接而成的系统。弹性转轴一般通过两个端面建立与其他零件的连接关系,因此当建立了单个弹性转轴的两端面动力学方程后,依次可将整个传动系统的动力学方程也建立起来。

### 1.1 单个弹性转轴连续动力学模型

设一均匀弹性转轴的长度为  $l$ , 轴的单位长度转动惯量为  $J_p$ , 某一截面  $p$  处的角位移为  $\theta_p$ , 则整个轴的动能为

$$E = \int_0^l \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_p^2 dx \tag{1}$$

收稿日期:2009-03-05

基金项目:河北省自然科学基金资助项目(F2008000882);河北省教育厅基金资助项目(ZH20071102,ZH2007496)

设轴的扭转变形沿轴向是线性变化的, 截面  $p$  处的变形为

$$\alpha_p = \frac{x}{l} \alpha$$
$$\alpha = \theta_2 - \theta_1$$

式中,  $x$  为截面  $p$  与轴端的距离;  $\theta_1$  和  $\theta_2$  为传动轴两端扭转角度。

则

$$\theta_p = \theta_1 + \alpha_p = \theta_1 + \frac{x}{l} (\theta_2 - \theta_1) \tag{3}$$

对式(3) 求一阶时间导数, 得

$$\dot{\theta}_p = \dot{\theta}_1 + \frac{x}{l} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \tag{4}$$

将式(4) 代入式(1), 可得到轴的动能为

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l J_p \left[ \dot{\theta}_1 + \frac{x}{l} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \right]^2 dx = \frac{1}{2} J_p l \left[ \frac{1}{3} \ddot{\xi} + \frac{1}{3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{3} \ddot{\xi} \right] = \frac{1}{6} J (\ddot{\xi} + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \ddot{\xi}) \tag{5}$$

式中,  $J$  为整个弹性转轴的转动惯量。  
式(5) 即为单个连续弹性轴的能量方程。同时, 可得弹性转轴中的势能为

$$U = \frac{1}{2} K (\theta_2 - \theta_1)^2 \tag{6}$$

式中,  $K$  为弹性轴的扭转刚度。  
考虑传动系统中存在结构阻尼力矩

$$M^c = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{7}$$

式中,  $C$  为弹性轴的结构阻尼。  
则存在耗散阻尼的弹性轴两端面上的广义力矩分别为

$$Q_1 = T_1 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{8}$$

$$Q_2 = T_2 - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \tag{9}$$

式中,  $T_1$ 、 $T_2$  分别为轴两端受到的外部力矩。  
将式(5)、式(6)、式(8) 和式(9) 代入以下拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_r} - \frac{\partial E}{\partial \theta_r} + \frac{\partial U}{\partial \theta_r} = Q_r \quad r = 1, 2, \dots, k \tag{10}$$

得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} J \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6} J \ddot{\theta}_2 + C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) &= T_1 \\ \frac{1}{6} J \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} J \ddot{\theta}_2 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K(\theta_1 - \theta_2) &= T_2 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

式(11) 即为考虑连续分布质量的单个弹性轴连续动力学方程。

1.2 传动系统连续动力学模型

假设旋转机械传动系统由  $n$  个轴段组成(图1), 由式(5) 可得整个传动系统中的动能为  $n$  个轴的动能之和, 表示如下:

$$E = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n J_i (\ddot{\xi}_i + \dot{\theta}_i \dot{\theta}_{i+1} + \ddot{\xi}_{i+1}) \tag{12}$$

由式(6) 可知, 整个传动系统的势能为  $n$  个弹

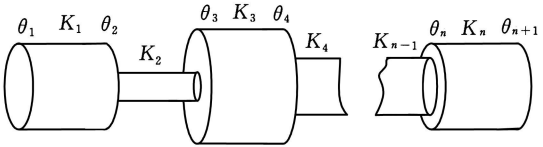


图1 旋转机械传动系统多轴段结构图

性轴的势能之和, 可表示为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_i (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \tag{13}$$

式中,  $K_i$  为第  $i$  个弹性轴的扭转刚度。  
由式(8)、式(9) 可知, 每个轴端面处的广义力矩为

$$Q_i = T_i + C_{i-1}(\dot{\theta}_{i-1} - \dot{\theta}_i) - C_{i+1}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i+1}) \tag{14}$$

将式(12)、式(13) 和式(14) 代入拉格朗日方程, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} J_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6} J_1 \ddot{\theta}_2 + C_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K_1(\theta_1 - \theta_2) &= T_1 \\ \frac{1}{6} J_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} (J_1 + J_2) \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{6} J_2 \ddot{\theta}_3 - C_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \\ &C_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) - K_1(\theta_1 - \theta_2) + K_2(\theta_2 - \theta_3) = T_2 \\ &\vdots \\ \frac{1}{6} J_{n-1} \ddot{\theta}_{n-1} + \frac{1}{3} (J_{n-1} + J_n) \ddot{\theta}_n + \frac{1}{6} J_n \ddot{\theta}_{n+1} - \\ &C_{n-1}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n) + C_n(\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{n+1}) - \\ &K_{n-1}(\theta_{n-1} - \theta_n) + K_n(\theta_n - \theta_{n+1}) = T_n \\ \frac{1}{6} J_n \ddot{\theta}_n + \frac{1}{3} J_n \ddot{\theta}_{n+1} - C_n(\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{n+1}) - \\ &K_n(\theta_n - \theta_{n+1}) = T_{n+1} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

式(15) 即为考虑整个传动系统连续分布质量以及包含结构阻尼及外扰的传动系统连续动力学方程。

2 传动系统连续模型扭振求解

传动系统扭振响应影响着整个传动系统的运行性能和稳定性。因此求解传动系统扭振响应能更深入了解扭振对传动系统的影响。

为了分析传动系统中的扭振响应, 将式(15) 写为

$$J \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K \theta = T \tag{16}$$

式中,  $J$ 、 $C$ 、 $K$  分别为传动系统的转动惯量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

对式(16) 进行拉普拉斯变换得

$$J s^2 \theta(s) + C s \theta(s) + K \theta(s) = T(s) \tag{17}$$

可得

$$\theta(s) = (J s^2 + C s + K)^{-1} T(s) \tag{18}$$

令  $\varphi_1 = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\varphi_2 = \theta_2 - \theta_3$ , ...,  $\varphi_{n-1} = \theta_{n-1} - \theta_n$  其中,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , ...,  $\varphi_{n+1}$  依次为传动系统中轴端的扭转角度。

则式(18) 可转换为

$$\Phi(s) = s_1 \left( J s^2 + C s + K \right)^{-1} T(s) \tag{19}$$
$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n}$$

令

$$G(s) = s_1 \left( J s^2 + C s + K \right)^{-1} \tag{20}$$

显然

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{(n-1)1} & G_{(n-1)2} & \cdots & G_{(n-1)n} \end{bmatrix}_{(n-1) \times n}$$

$G(s)$  中的每一项  $G_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n-1; j = 1, 2, \cdots, n)$  可表示如下<sup>[8]</sup>:

$$G_{ij} = \frac{b_{2m-1}s^{2m-1} + b_{2m-2}s^{2m-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^{2m} + a_{2m-1}s^{2m-1} + \cdots + a_1s + a_0} \tag{21}$$

其中,  $a_0, a_1, \cdots, a_{2m-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{2m-1}$  是与系统结构有关的参数。

当第  $i$  个轴上的刚度为  $K_i$  时, 传动轴上的扭矩为  $K_i \varphi_i$ , 则式(19) 可写为

$$M(s) = K' G(s) T(s) \tag{22}$$
$$M(s) = [M_1(s) \quad M_2(s) \quad \cdots \quad M_n(s)]^T$$
$$K' = \text{diag}(K_1, K_2, \cdots, K_n)$$

式中,  $M_1(s), M_2(s), \cdots, M_n(s)$  依次为各个轴段上的扭矩。

由式(22) 可求得第  $i$  个传动轴段的扭矩为

$$M_i(s) = K_i \varphi_i = \sum_{k=1}^n G_{ik}(s) T_k(s) \tag{23}$$

式(23) 经拉普拉斯反变换后可表示为多个衰减的正弦项之和。由式(23) 可知, 每段转轴上的扭矩是多个输入力矩影响下动态扭矩的叠加响应。

3 含间隙时传动系统连续模型

传动系统中的间隙是不可避免的, 存在于传动系统的很多环节中。在连续模型中, 间隙存在于两转轴的连接处, 此时连接处的两个轴段将不再保持相同扭转角度, 由于间隙影响将出现不同的扭转角度。令两转轴连接处的扭转角度分别为  $\theta_i$  和  $\theta'_i$ , 设连接处的间隙最大值为  $2\Delta$ , 当第  $i$  个连接端面上存在间隙时, 式(15) 中第  $i$  个方程可写为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{6} J_{i-1} \ddot{\theta}_{i-1} + \frac{1}{3} J_{i-1} \ddot{\theta}_i - C_{i-1} (\dot{\theta}_{i-1} - \dot{\theta}_i) - K_i (\theta_{i-1} - \theta_i) = T'_i \\ & \frac{1}{3} J_i \ddot{\theta}'_i + \frac{1}{6} J_i \ddot{\theta}_{i+1} + C_i (\dot{\theta}'_i - \dot{\theta}_{i+1}) + K_i (\theta'_i - \theta_{i+1}) = T''_i \\ & \frac{1}{6} J_{i-1} \ddot{\theta}_{i-1} + \frac{1}{3} (J_{i-1} + J_i) \ddot{\theta} + \frac{1}{6} J_i \ddot{\theta}_{i+1} - C_{i-1} (\dot{\theta}_{i-1} - \dot{\theta}_i) + C_i (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i+1}) - K_{i-1} (\theta_{i-1} - \theta_i) + K_i (\theta_i - \theta_{i+1} - \Delta) = T_i \quad \theta_i - \theta'_i > \Delta \\ & \frac{1}{6} J_{i-1} \ddot{\theta}_{i-1} + \frac{1}{3} (J_{i-1} + J_i) \ddot{\theta} + \frac{1}{6} J_i \ddot{\theta}_{i+1} - C_{i-1} (\dot{\theta}_{i-1} - \dot{\theta}_i) + C_i (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i+1}) - K_{i-1} (\theta_{i-1} - \theta_i) + K_i (\theta_i - \theta_{i+1} + \Delta) = T_i \quad \theta_i - \theta'_i < -\Delta \end{aligned} \right\} - \Delta \leq \theta_i - \theta'_i \leq \Delta \tag{24}$$

由式(24) 可知: 当有间隙产生时, 两个轴段的连接处脱落, 系统化为两个独立的连续传动系统, 见式(24) 的第一个子方程组, 此时,  $T_i = T'_i + T''_i$ ; 当间隙闭合时, 系统重新变为一个系统, 见式(24) 的第二个方程和第三个方程。

4 数值仿真

以某厂 1780 轧机 F1 机架传动系统为例, 采用本文的方法将传动系统中传动部件和传动轴都考虑为转动惯量和刚度并存的轴段进行数值仿真, 仿真模型由 17 根轴组成, 其计算参数和离散模型的计算参数见表 1。其中, 传动轴的阻尼系数为 0.008<sup>[9]</sup>。

表 1 连续质量模型和离散模型的计算参数表

离散模型参数		连续模型参数	
转动惯量 (kg · m <sup>2</sup> )	刚度 (N · m/rad)	转动惯量 (kg · m <sup>2</sup> )	刚度 (N · m/rad)
9895.55	6.9097 × 10 <sup>8</sup>	9849.7	1.332 × 10 <sup>10</sup>
1013.4	5.8221 × 10 <sup>8</sup>	91.7	8.293 × 10 <sup>8</sup>
1543.75	1.288 × 10 <sup>8</sup>	952.3	3.006 × 10 <sup>9</sup>
139.1	8.1755 × 10 <sup>8</sup>	30.5	6.516 × 10 <sup>8</sup>
136.7	6.0377 × 10 <sup>7</sup>	1524.9	3.017 × 10 <sup>10</sup>
87	1.1701 × 10 <sup>7</sup>	7.2	1.478 × 10 <sup>8</sup>
48.3	1.1832 × 10 <sup>7</sup>	82.7	5.120 × 10 <sup>8</sup>
39.8	4.1364 × 10 <sup>7</sup>	103.6	9.729 × 10 <sup>7</sup>
459.3		82.7	5.120 × 10 <sup>8</sup>
		4.4	8.173 × 10 <sup>7</sup>
		82.5	1.4922 × 10 <sup>8</sup>
		4.6	1.235 × 10 <sup>7</sup>
		38	4.392 × 10 <sup>8</sup>
		16	1.228 × 10 <sup>7</sup>
		25.2	2.574 × 10 <sup>8</sup>
		6.6	5.748 × 10 <sup>7</sup>
		456	2.068 × 10 <sup>8</sup>

可得如式(16) 所示的连续模型的动力学方程, 其中

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} J_1 & \frac{1}{6} J_1 & & & 0 \\ \frac{1}{6} J_1 & \frac{1}{3} (J_1 + J_2) & \frac{1}{6} J_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{6} J_{16} & \frac{1}{3} (J_{16} + J_{17}) & \frac{1}{6} J_{17} \\ 0 & & & \frac{1}{6} J_{17} & \frac{1}{3} J_{17} \end{bmatrix}_{18 \times 18}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & & & 0 \\ c_1 & c_1 + c_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{16} & c_{16} + c_{17} & c_{17} \\ 0 & & & c_{17} & c_{17} \end{bmatrix}_{18 \times 18}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & & & 0 \\ k_1 & k_1 + k_2 & k_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & k_{16} & k_{16} + k_{17} & k_{17} \\ 0 & & & k_{17} & k_{17} \end{bmatrix}_{18 \times 18}$$

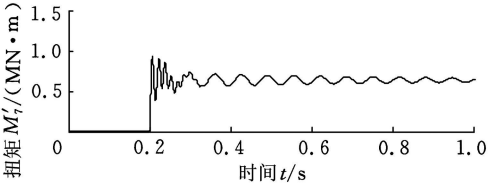
可见,连续模型考虑了传动部件和传动轴的刚度和惯量,因此比离散模型的自由度要高。通过 MATLAB 编制相应的计算程序,可得传动系统的固有频率(表 2)。由表 2 可看出,采用离散模型由于忽略系统中一些质量较大而刚度较小的部件,简化造成较大误差,因而计算出的系统固有频率较高。而采用了连续模型,充分考虑了系统的连续质量和刚度,因而计算结果较准确。同时,采用本文连续模型计算出的低阶固有频率不会随着系统中轴的数目的增多(即系统的自由度)而发生明显变化。可见采用连续模型计算可有效减小人为划分系统自由度对系统低阶固有频率的影响。

表 2 连续质量模型和离散模型的  
低阶频率分布比较 Hz

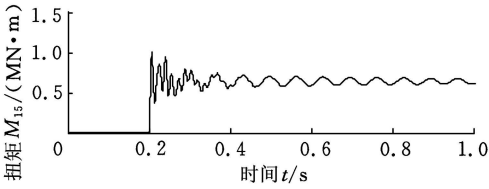
离散模型	连续模型		
	<i>n</i> =17	<i>n</i> =18	<i>n</i> =20
15.35	15.09	15.08	15.07
64.41	61.71	61.69	61.67
91.10	84.93	84.90	84.86
115.28	113.69	113.58	113.58
172.78	182.28	182.26	182.25

因轧机传动系统接轴最为薄弱,因此本文对接轴在不同轧制工况下的扭矩响应进行研究。这里离散模型中的接轴为第 7 根轴,其扭矩用  $M_7'$  表示,连续模型中接轴为第 15 根轴,其扭矩用  $M_{15}$  表示。图 2 所示为模拟轧机启动时,离散模型和本文连续模型的扭振响应比较曲线。图 3 所示为

模拟轧机咬钢时的轧机传动系统上扭振响应曲线比较。可以看出,采用连续模型与离散模型的模拟曲线有着相同的响应趋势,这说明本文连续模型是有效的。同时还可看出,采用连续轴段模型的响应曲线的扭振信息更丰富,能反映出系统中较高频率的扭振特性。

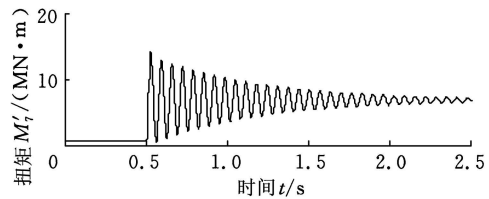


(a)离散质量模型

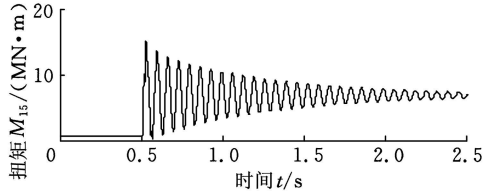


(b)连续质量模型

图 2 轧机启动时扭振曲线比较



(a)离散质量模型



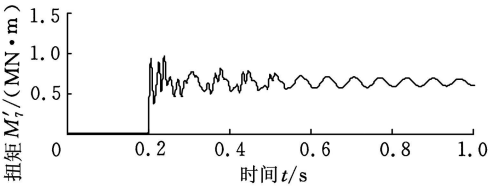
(b)连续质量模型

图 3 轧机咬钢时扭振曲线比较

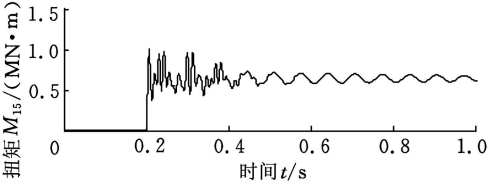
取传动系统接轴间隙值为 0.4mm, 可得传动系统含间隙时扭振响应曲线(图 4、图 5)。其中, 图 4 所示为模拟轧机启动时传动系统扭矩响应曲线比较, 图 5 所示为模拟轧机咬钢时模拟曲线。由图 4 可知, 间隙的存在使系统中扭振波动加剧, 使得系统的扭振变得比较复杂。而咬钢状态下(图 5), 由于加载力矩较大, 而间隙较小, 间隙对传动系统扭振的影响不太明显。

图 6 所示为传动系统中的间隙取较大值 1mm 时接轴中的扭振响应曲线。可见, 间隙的增大使系统的扭振响应变得剧烈起来。

由上述几组曲线可以看出, 本文所提出的连续模型, 无论是对无间隙还是有间隙的传动系统,

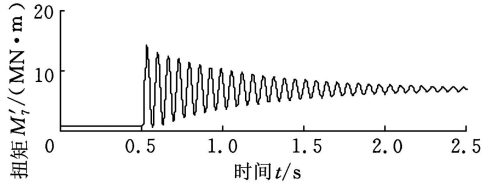


(a)离散质量模型

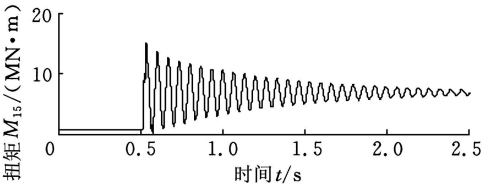


(b)连续质量模型

图 4 含间隙时轧机启动模拟曲线比较

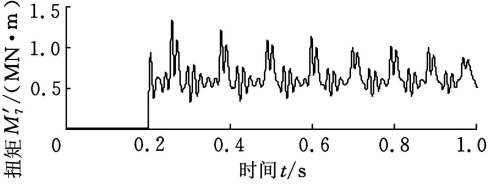


(a)离散质量模型

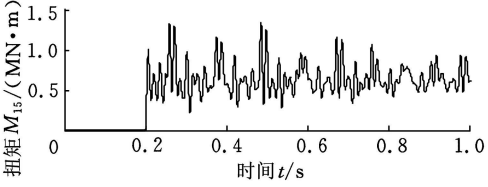


(b)连续质量模型

图 5 含间隙轧机咬钢模拟曲线比较



(a)离散质量模型



(b)连续质量模型

图 6 间隙较大时离散模型与连续模型曲线比较

都可以很好地模拟系统中的扭振响应,与离散模型取得了很好的一致性。与集中质量法相比,两者的计算时间相差不大,但本文连续模型计算结果有较高精度。同时还可看出,采用连续轴段模型的扭振振幅响应更丰富,能够反映出传动系统中较高频率的振幅特性,更真实地反映出传动系统中的振动变化特性。

5 结束语

考虑旋转机械传动系统的连续分布质量,本文提出了旋转机械传动系统连续扭振动力学模型。该模型能有效地计算出系统的固有频率,并能够减小建模过程中人为划分自由度对系统基频的影响,减小了计算误差。同时对无间隙和有间隙的连续动力学模型进行了仿真研究,与传统离散方法比较,该连续模型能够有效地反映传动轴上的扭振响应,与离散模型保持很好的一致性,而且表现的扭振形态更丰富,为更准确地分析旋转机械传动系统的扭振特性提供了一种新的参考途径。

参考文献:

[1] Mourelatos Z P. An Efficient Crankshaft Dynamic Analysis Using Substructuring with Ritzs Vectors [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 238 (3):495-527.

[2] Koser K, Pansin F. Torsional Vibration of the Drive Shafts of Mechanisms [J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 199(4):559-565.

[3] Wu J S, Yang I H. Computer Method for Torsional and Flexure Coupled Forced Vibration of Shafting System with Damping [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 180(3):417-435.

[4] Norman L K. Spindle Involvement in Rolling Mill Vibration [J]. Iron and Steel Engineer, 1992(8):79-84.

[5] 诸德超,邢誉峰.工程振动基础[M].北京:北京航空航天大学出版社,2004.

[6] 毛海军,孙庆鸿,陈南,等.基于分布质量的 Riccati 传递矩阵法模型与轴系频响函数计算方法研究 [J].东南大学学报(自然科学版),2000,30(6):34-38.

[7] 董全林,刘彬.在伽利略坐标变换下的二端面弹性转轴的相似动力学方程 [J].物理学报,2002,51 (10):2191-2196.

[8] 鄢景华.自动控制原理[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996.

[9] 徐灏.机械设计手册[M].北京:机械工业出版社,2003.

(编辑 郭伟)

作者简介:侯东晓,男,1982 年生。燕山大学电气工程学院博士研究生。主要研究方向为轧机扭振机理及抑制。刘彬,男,1953 年生。燕山大学副校长、教授、博士研究生导师。时培明,男,1979 年生。燕山大学电气工程学院讲师、博士。