第五章 多元函数微分学及其应用

第六节 多元函数微分学在几何中的应用

- 空间曲线的切线和法平面
- 弧长
- 空间曲面的切平面和法线

作业: 习题5.6 P114

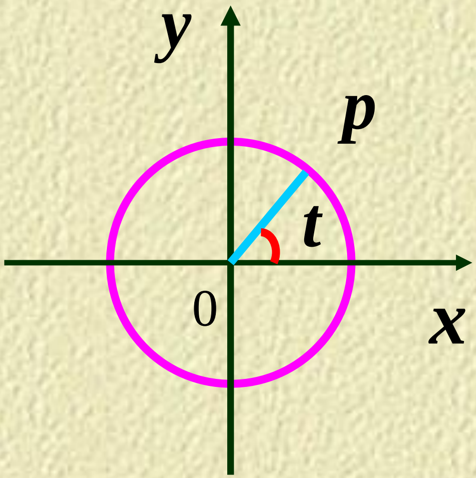
(A)1, 2, 4(1)(2)(3)(4)(6)(8) , 6,
7(2)(3),10,12,15,18,19

(B) 1

第一部分 空间曲线的切线和法平面

一、曲线的参数方程

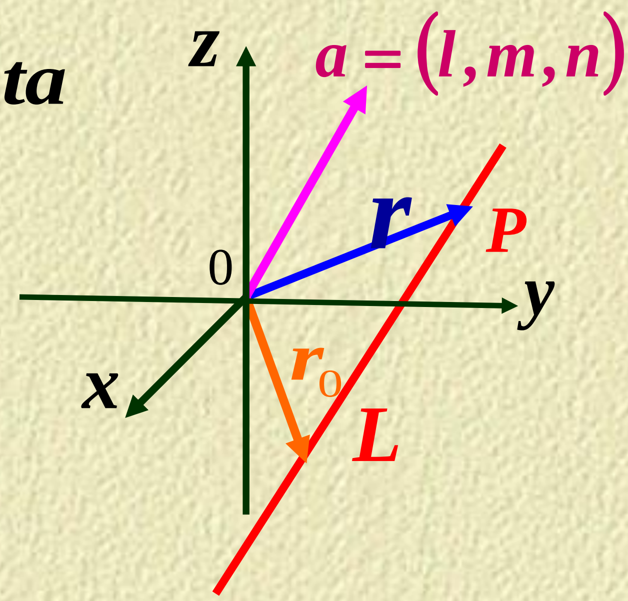
平面圆方程为: $x^2 + y^2 = R^2$



参数方程为: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

空间直线L的向量方程为: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$

$(-\infty < t < +\infty)$

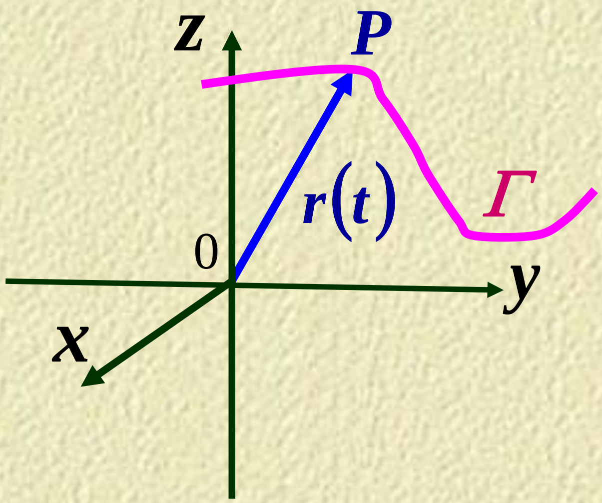


参数方程为: $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$

$(-\infty < t < +\infty)$

一般地,

空间曲线Γ 可以看作一个连续映射$r(t):t\in[\alpha,\beta]\to R^3$的像.



其向量方程为:

$$r(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \alpha\le t\le\beta.$$

其参数方程为:

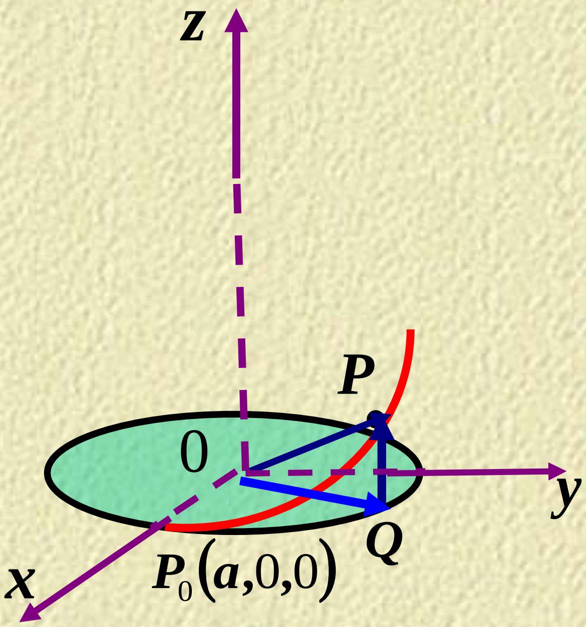
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta.$$

空间螺旋线的形成

空间动点P沿半径为a的圆周作匀速转动，与此同时，这圆周所在的平面又在空间作匀速直线运动，且移动的方向与圆周所在的平面垂直.

此时动点运动的轨迹称为螺旋线.

试求其方程.



解 建立直角坐标系如图所示.

设点P转动的角速度为ω，圆周沿z轴方向移动的速度为v，点P_0的坐标为$(a,0,0)$，经过时间t后，动点P沿圆周转动的角度为ωt，沿z轴方向上升的高度为vt，所以点P的坐标

向量形式：$r(t)=(a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt), 0\le t<+\infty.$

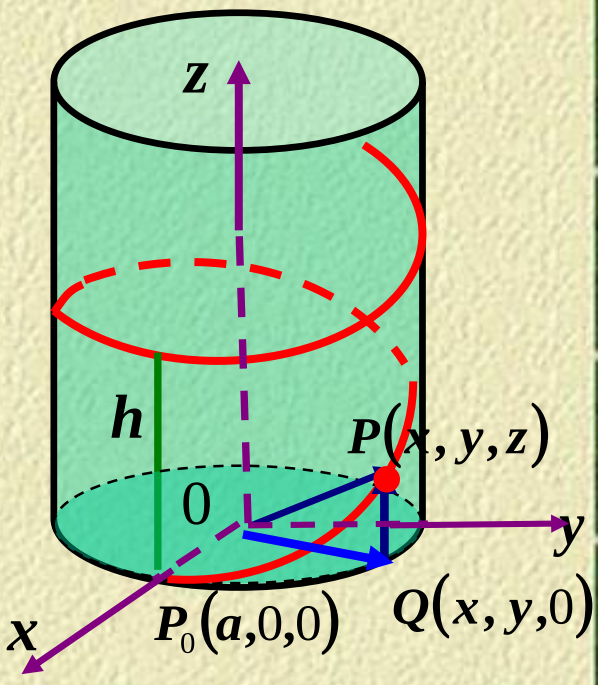
解 建立直角坐标系如图所示.

设点P转动的角速度为ω,圆周沿z轴方向移动的速度为v,点P_0的坐标为$(a,0,0)$,于是经过时间t后,动点P沿圆周转动的角度为ωt,沿z轴方向上升的高度为vt,所以点P的坐标为

向量形式:

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt) \quad t\in[0,+\infty).$$

参数形式:
$$\begin{cases} x(t)=a\cos\omega t, \\ y(t)=a\sin\omega t, \quad t\in[0,+\infty) \\ z(t)=vt; \end{cases}$$



动点P始终在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上.

当ωt转过2π时,动点升高了$h=\dfrac{2\pi v}{\omega}$,称为螺距.

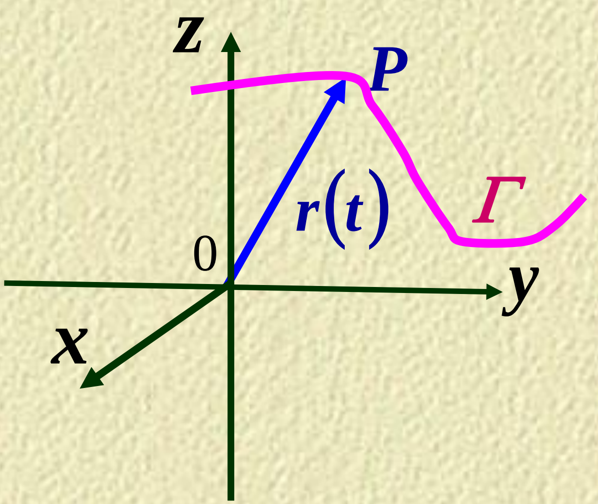
二、简单曲线

设空间曲线Γ的方程为$r=r(t),\ t\in[\alpha,\beta]$.

如果向量值函数$r(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续,则称Γ为**连续曲线**.

如果Γ为连续曲线,且当$t_1\neq t_2$时,均有$r_1(t)\neq r_2(t)$,

即在$[\alpha,\beta]$上$r(t)$为单射,称Γ为**简单曲线**.



如果Γ为简单曲线,且$r(\alpha)=r(\beta)$,

则称Γ为简单闭曲线。

正向, 负向, 有向曲线

三、空间曲线的切线与法平面

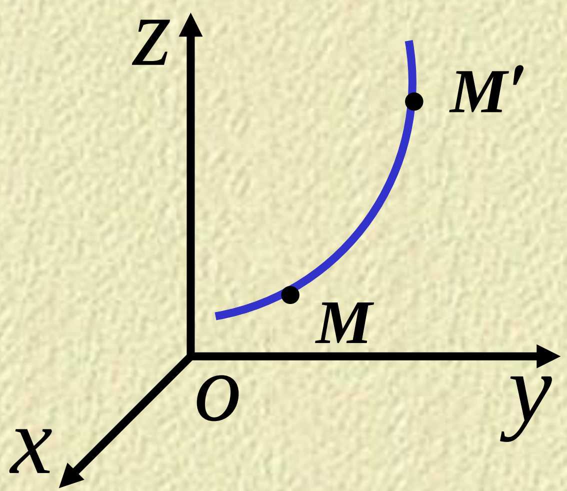
设空间曲线的方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta. \\ z = z(t) \end{cases}$

式中的三个函数均可导.

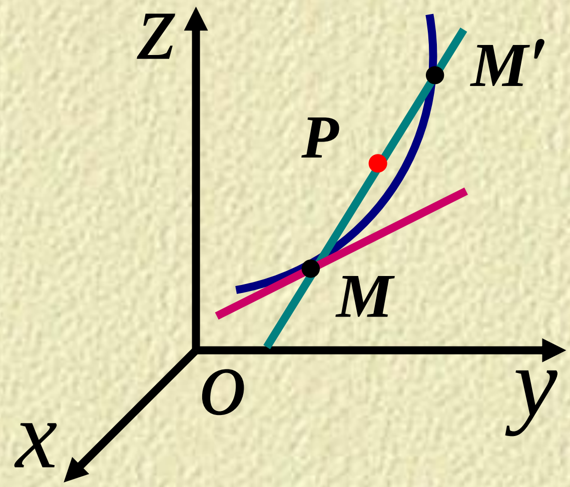
设 $M(x_0, y_0, z_0)$,对应于 $t = t_0$;

$M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

对应于 $t = t_0 + \Delta t$.



设空间曲线的方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta. \\ z = z(t) \end{cases}$



设 $P(X,Y,Z)$ 为割线 MM' 上任一点.

则割线 MM' 的方程为

$$\frac{X-x_0}{\Delta x}=\frac{Y-y_0}{\Delta y}=\frac{Z-z_0}{\Delta z}$$

考察割线趋近于极限位置——切线的过程

上式分母同除以 Δt, $\dfrac{X-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\dfrac{Y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\dfrac{Z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$, 当 $M'\to M$, 即 $\Delta t\to 0$ 时,

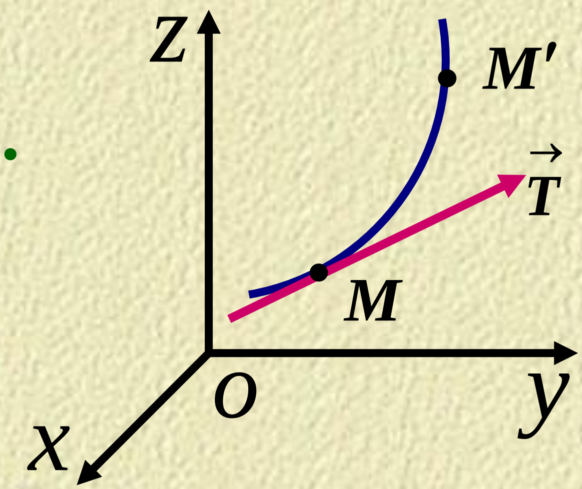
曲线在M处的切线方程: $\dfrac{X-x_0}{\dot{x}(t_0)}=\dfrac{Y-y_0}{\dot{y}(t_0)}=\dfrac{Z-z_0}{\dot{z}(t_0)}.$

割线 的方向向量变成切线的方向向量 $\dot{r}(t_0)=(\dot{x}(t_0)\,\dot{y}(t_0)\,\dot{z}(t_0))$

切向量:

切线的方向向量称为曲线的切向量.

$$\vec{T}=\left(\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0),\dot{z}(t_0)\right)$$

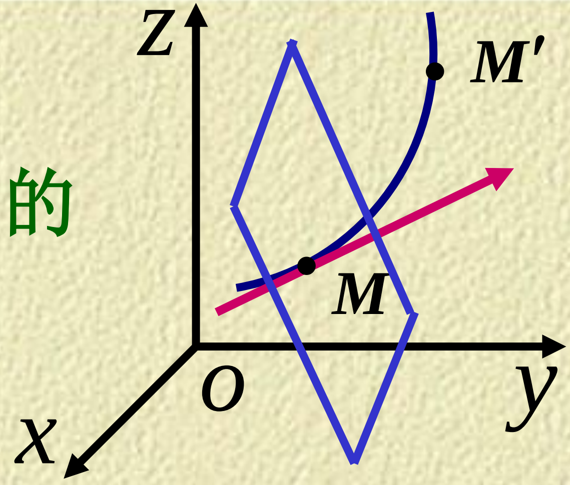


当向量$\left(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\dot{z}(t)\right)\neq 0,(\alpha\le t\le\beta)$时,曲线Γ上各点处都存在切线. 进一步，如果向量$\left(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\dot{z}(t)\right)$在$[\alpha,\ \beta]$上连续，则切线方向连续变化，这时，称曲线为**光滑曲线**.

如果向量曲线在$[\alpha,\ \beta]$不光滑，但将曲线分成若干段后，每段都是光滑的，则称曲线为**分段光滑曲线**.

法平面:

过M点且与切线垂直的所有法线决定的平面.



法平面方程为:

$$\dot{x}(t_0)(X-x_0)+\dot{y}(t_0)(Y-y_0)+\dot{z}(t_0)(Z-z_0)=0$$

判断: 曲线$\Gamma: x=\int_0^t e^u\cos u\,du$, $y=2\sin t+\cos t$,

$z=1+e^{3t}$在$t=0$处的切线为: $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{6}$,

法平面方程为: $x+2y+3z-8=0$.

(A).正确 (B). 错误

(C). 切线对,法平面错

(D). 切线错,法平面对

例1　求曲线$\Gamma: x=\int_0^t e^u \cos u du$，$y=2\sin t+\cos t, z=1+e^{3t}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

解　当$t=0$时，　$x=0, y=1, z=2,$

$$x'=e^t\cos t,\ y'=2\cos t-\sin t,\ z'=3e^{3t},$$

$$\Rightarrow\ x'(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad z'(0)=3,$$

切线方程为：$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3},$

法平面方程：$x+2(y-1)+3(z-2)=0,$

即 $x+2y+3z-8=0.$

上页　下页　返回

特殊情形:

1.空间曲线方程为 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$,

在$M(x_0, y_0, z_0)$处,

切线方程为: $$\frac{X - x_0}{1} = \frac{Y - y_0}{\dot{y}(x)} = \frac{Z - z_0}{\dot{z}(x)},$$

法平面方程为:

$$(X - x_0) + \dot{y}(x_0)(Y - y_0) + \dot{z}(x_0)(Z - z_0) = 0.$$

2.空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$, 且有

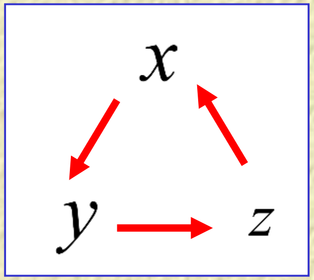
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$ 此处无负号

16

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\left(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\right)$$

$$=\left(1,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$



或 $$\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$

返回

或 $\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程:

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

也可表示为:

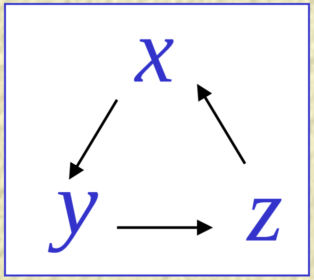
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z$, 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$



切向量: $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程: $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程:

即 $$T=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 **M (1,–2, 1)** 处的切线方程与法平面方程.

解法2 方程组两边对 **x** 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix}-x & z \\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z \\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix}y & -x \\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z \\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 **M(1,–2, 1)** 处有:

切向量 $T=\left(1,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right)=(1,0,-1)$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $T=\left(1,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right)=(1,0,-1)$

切线方程: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$ 即 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面方程: $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

第二部分　弧长

一、平面曲线弧长的概念

设 A, B 是曲线弧上的两个端点，在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取分点

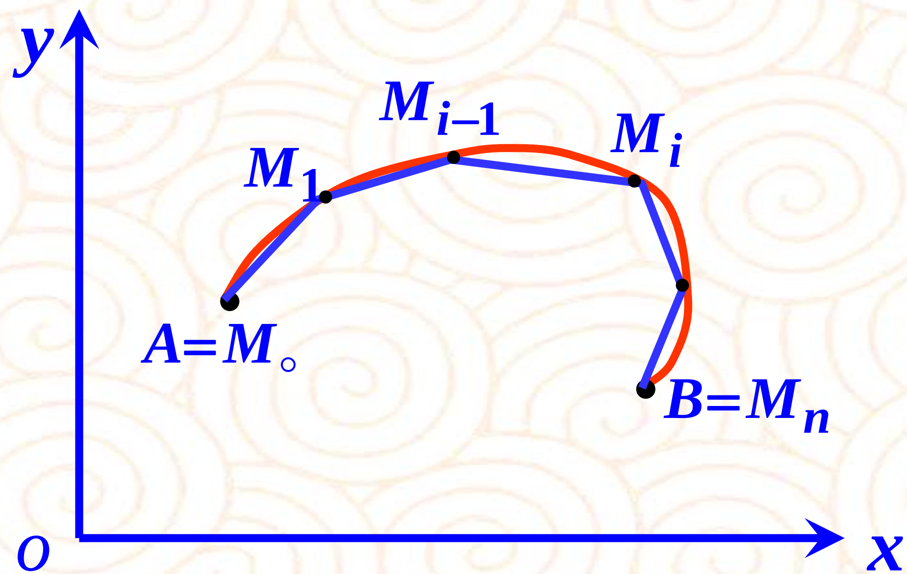
$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}, M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

并依次连接相邻的分点得一内接折线，此折线长为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i},$$

其中 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 表示

线段 $M_{i-1}M_i$ 的长。



如果上述折线，当分点无限增加且最大线段长趋于零时，折线长S_n有极限S，则称S为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长，

即：$S=\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}$

其中λ表示最大线段长，这时也称曲线弧$\overset{\frown}{AB}$是可求长的。

定理6.1（空间曲线的弧长）

设空间曲线方程为$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad (\alpha\le t\le\beta) \\ z=z(t) \end{cases}$

$x'(t),y'(t),z'(t)$连续且不同时为零，则该曲线是可求长的曲线，且长度 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$

定理6.1(空间曲线的弧长)

设空间曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$

$x'(t), y'(t), z'(t)$ 连续且不同时为零，则该曲线是可求长的曲线，且长度 $\boxed{s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.}$

推导:

在区间$[\alpha, \beta]$内插入若干个分点，$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$,

分点P_i对应于参数t_i, $\left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \left\|r(t_i) - r(t_{i-1})\right\| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$

$$= \sqrt{\left[x'(\xi_i)\right]^2 + \left[y'(\eta_i)\right]^2 + \left[z'(\zeta_i)\right]^2}\,\Delta t_i$$

$$\left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \sqrt{\left[x'(\xi_i)\right]^2 + \left[y'(\eta_i)\right]^2 + \left[z'(\zeta_i)\right]^2}\,\Delta t_i$$

$$= \sqrt{\left[x'(\xi_i)\right]^2 + \left[y'(\xi_i)\right]^2 + \left[z'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta t_i + R_i \Delta t_i$$

$$= \left\|r'(\xi_i)\right\| \Delta t_i + R_i \Delta t_i$$

$$R_i = \sqrt{\left[x'(\xi_i)\right]^2 + \left[y'(\eta_i)\right]^2 + \left[z'(\zeta_i)\right]^2} - \sqrt{\left[x'(\xi_i)\right]^2 + \left[x'(\xi_i)\right]^2 + \left[x'(\xi_i)\right]^2}$$

$$\sum \left\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right\| = \sum_{i=1}^{n} \left\|r'(\xi_i)\right\| \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta t_i$$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt \qquad\qquad 0$$

$$\therefore\ s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

定理6.1(空间曲线的弧长)

设空间曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$

$x'(t), y'(t), z'(t)$ 连续且不同时为零，则该曲线是可

求长的曲线，且长度 $\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.}$

二、直角坐标情形

设曲线弧为 $y = f(x)(a \le x \le b)$，其中 $f(x)$在$[a,b]$上

有一阶连续导数，取积分变量为 x，在$[a,b]$ 上任取小

区间$[x, x+dx]$，以对应小切线段的长度代替小弧段的

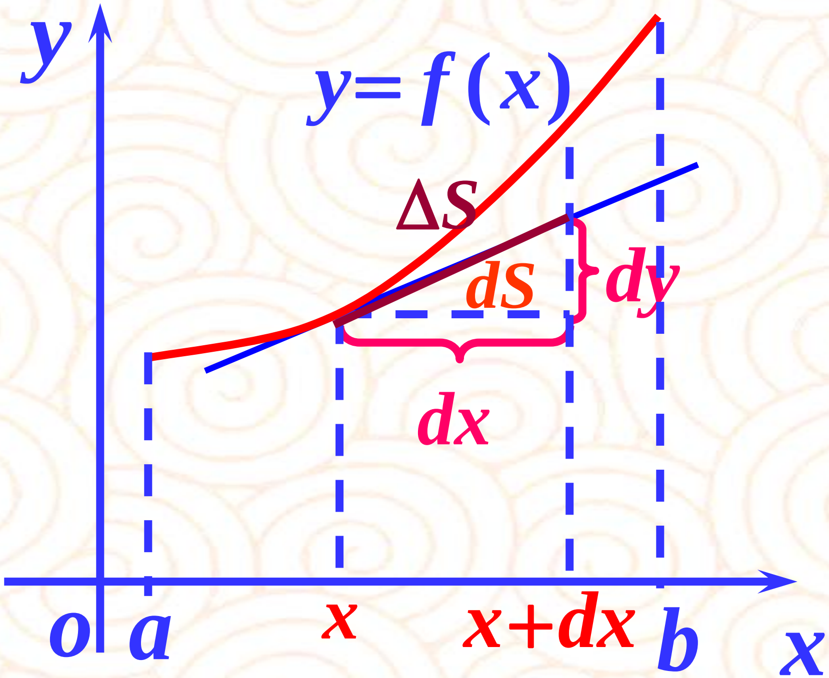
长度Δs，

小切线段的长度

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx\,,$$

弧长元素 $dS=\sqrt{1+y'^2}\,dx\,,$

弧长 $S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$。

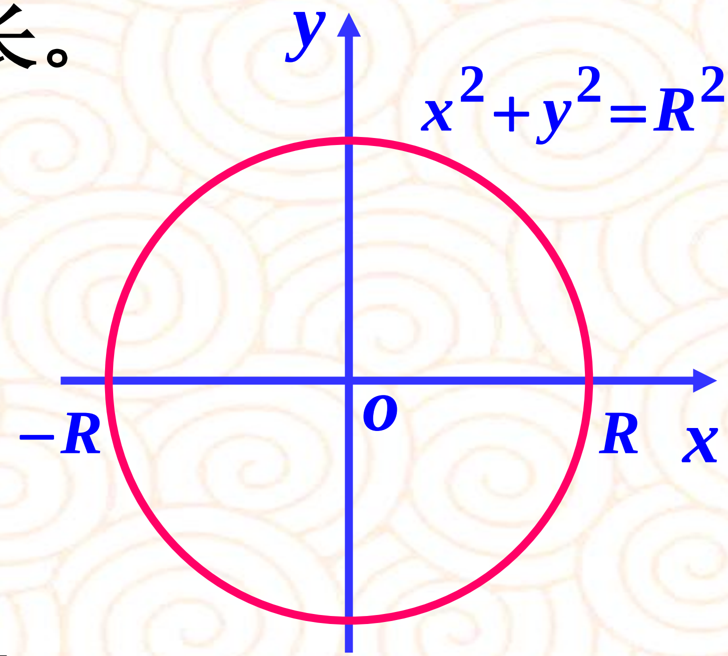


定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)$ 连续，

则在 $[a,b]$ 上的曲线 $y=f(x)$ 可求长，且弧长

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,。$$

例 1. 求圆 $x^2+y^2=R^2$ 的弧长。



解： $y=\sqrt{R^2-x^2}\,(x\geq 0, y\geq 0)$,

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx,$$

$$S=4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx \;=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R$$

$$=4R\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi R.$$

三、参数方程情形

若曲线参数方程为：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$(\alpha \le t \le \beta)$

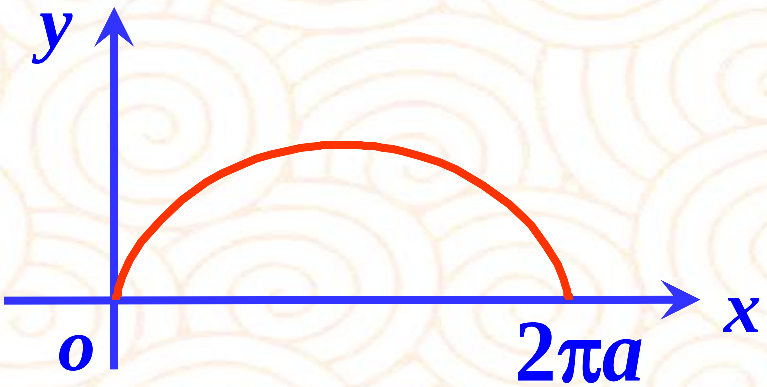
则弧长微元为：

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[x'(t)dt]^2 + [y'(t)dt]^2}$$

即 $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt}$$

例 2．计算摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一拱$0\le t\le 2\pi$ 的长度。



解：$x'(t)=a(1-\cos t)$，

$y'(t)=a\sin t$，

$$dS=\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2(2-2\cos t)}\,dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$\therefore S=\int_0^{2\pi}2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a\text{。}$$

四、极坐标方程情形

若曲线是由极坐标方程 $r=r(\theta)$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$ 表示，

$$\because \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta,$$

弧长微元 $$ds = \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\, d\theta$$

弧长 $$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\, d\theta$$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

例 3. 求极坐标系下曲线$r=a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^3$ $(a>0,\ 0\le\theta\le 3\pi)$ 的长。

解：$\because r'=3a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}=a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2\cdot\cos\frac{\theta}{3}$,

$$\therefore S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2(\sin\frac{\theta}{3})^6+a^2(\sin\frac{\theta}{3})^4(\cos\frac{\theta}{3})^2}d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}(\sin\frac{\theta}{3})^2d\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

弧微分

弧长 $s=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$

若把上式中的积分上限改为x，并固定弧的起点，

弧长s将随x的变化而变化，即是x的函数：

$$s(x)=\int_a^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt.$$

由于f(x)的导数是连续的，因此, 对上限x求导

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+f'(x)^2} \qquad ds=\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

称$s(x)$的微分ds为弧微分.

弧微分:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2} \qquad ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt$$

若曲线 Γ 参数方程为： $\vec{r}=\vec{r}(t)=\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right),(\alpha\le t\le\beta)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

设 $\dot{\vec{r}}(t)=\left(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)\right)$连续，且 $\dot{\vec{r}}(t)\neq\vec{0}$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt=\|\dot{r}(t)\|dt$$

弧长函数 $s=s(t)=\int_\alpha^t\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)}d\tau.$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}=\|\dot{r}(t)\|>0$$

弧长函数单调，存在反函数 $t=t(s)$

曲线Γ方程：$\vec{r}=\vec{r}(t(s))$， s 称为自然参数.

Γ 的自然参数方程为：$\vec{r}=\vec{r}(s)=\left(x(s),\ y(s),\ z(s)\right),(c\le s\le d)$

自然参数:以弧长为曲线方程的参数则称为自然参数，这时方程称为自然参数方程.

Γ 的自然参数方程为: $\vec{r}=\vec{r}(s)=\big(x(s),\ y(s),\ z(s)\big),(c\le s\le d)$

注：s是自然参数的充分必要条件是 $|r'(s)|=\left|\dfrac{dr}{ds}\right|=1$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt$$

$$=\sqrt{(\dot{x}(t)dt)^2+(\dot{y}(t)dt)^2+(\dot{z}(t)dt)^2}=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

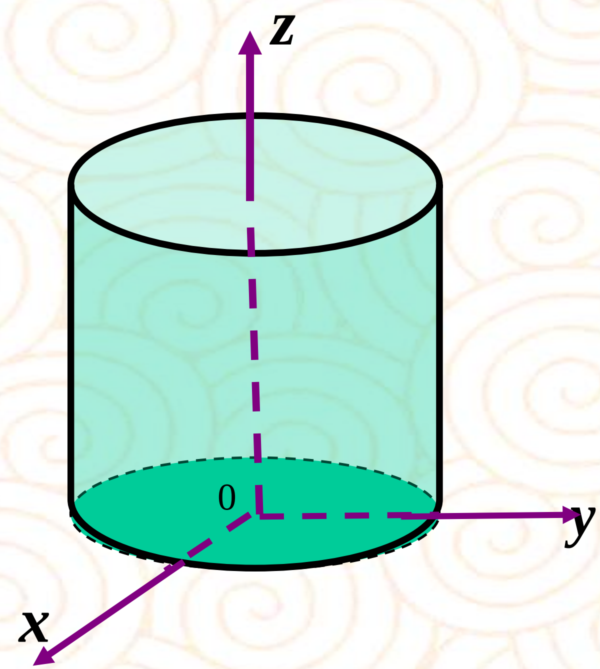
$\therefore(\dfrac{dx}{ds})^2+(\dfrac{dy}{ds})^2+(\dfrac{dz}{ds})^2=1\ \therefore\dfrac{dr}{ds}=(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dy}{ds},\dfrac{dz}{ds})$ 是一个单位切向量.

即 $\vec{r}'(s)=(x'(s),y'(s),z'(s))$ 是一个单位切向量.

$\dfrac{dr}{ds}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\alpha\ \beta\ \gamma$是切向量与三坐标轴正向的夹角

第三部分 曲面的切平面与法线

一、空间曲面的参数方程



空间圆柱面方程为：$x^2 + y^2 = R^2$

参数方程为：

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \\ z = z; \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ -\infty < z < +\infty. \end{array}$$

可以看出：圆柱面可以表示为含有两个参数的参数方程。

也可以看作是由下列2维平面区域到3维空间连续映射的像。

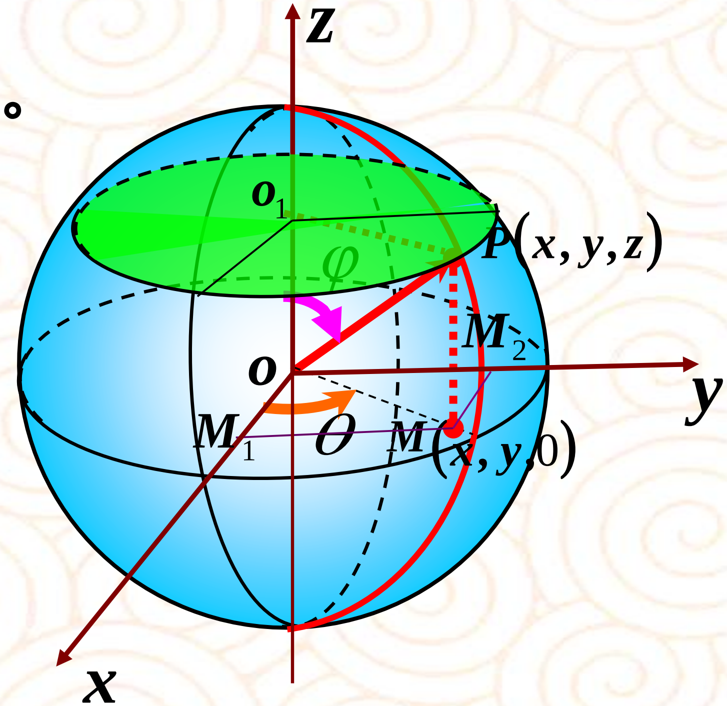
$$r : D = \{(\theta, z) | 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < +\infty\} \to R^3$$

$$r = r(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

一般地，空间曲面可以表示为含有两个参数的参数方程。

例10 建立半径为R的 球面的参数方程。

解 以球心为坐标原点建立直角坐标系如图。



设$P(x,y,z)$为球面上任意一点，

过P点做平行于xoy平面的平面交z轴于O_1，作垂直于xoy平面的垂线交xoy平面于M.

设从z轴正向到$\overrightarrow{OP}$向径的转角为φ,

从xoz坐标平面到由z轴和$\overrightarrow{OP}$所确定平面的转角为θ,

则参数φ和θ的取值范围为$(\varphi,\theta)\in D=\left\{(\varphi,\theta)\middle|0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le2\pi\right\}$

则

$$x=\left\|\overline{OM}\right\|\cos\theta=R\sin\varphi\cos\theta,$$

$$y=\left\|\overline{OM}\right\|\sin\theta=R\sin\varphi\ \sin\theta,$$

$$z=\left\|\overline{OP}\right\|\cos\varphi=R\cos\varphi;$$

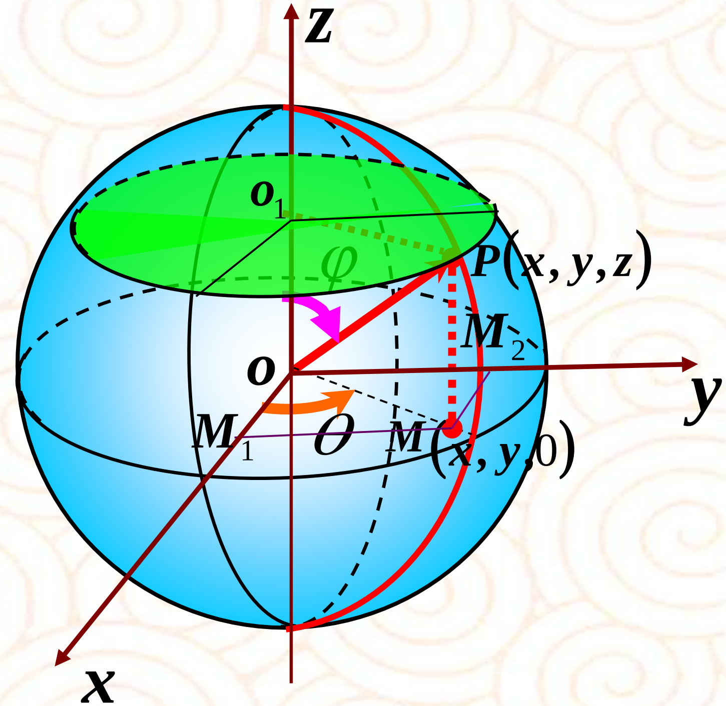
$$0\le\varphi\le\pi,$$

$$0\le\theta\le2\pi.$$

由此，球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= R\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= R\sin\varphi\,\sin\theta, \\ z &= R\cos\varphi; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &0\le\varphi\le\pi, \\ &0\le\theta\le 2\pi. \end{aligned}$$



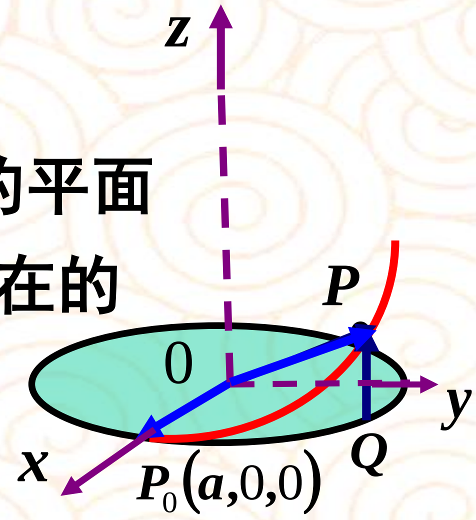
可以看作是由下列2维平面区域到3维空间连续映射的像。

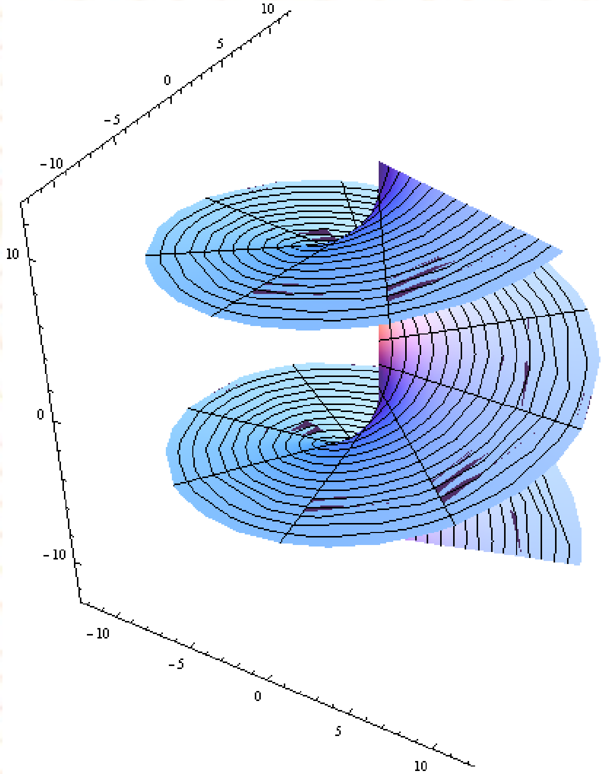
$$r:D=\left\{(\varphi,\theta)\middle|0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\right\}\to R^3$$

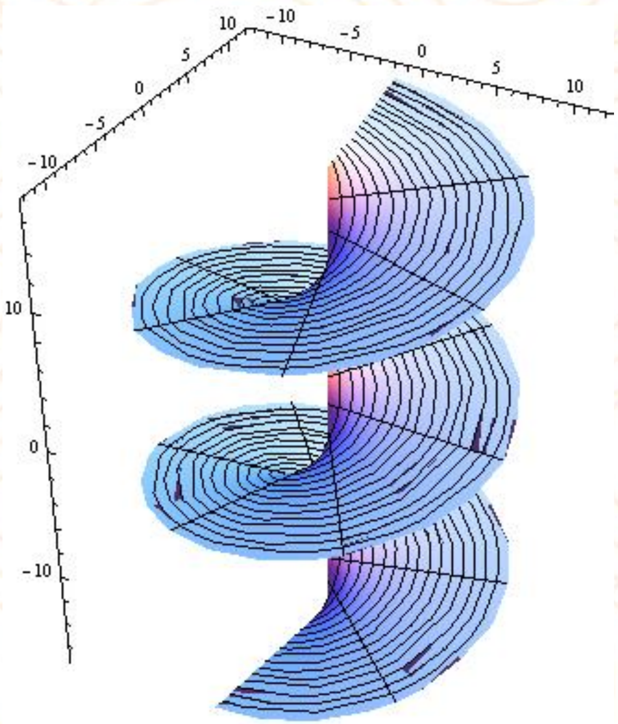
$$r=r(\varphi,\theta)=(R\sin\varphi\cos\theta,R\sin\varphi\sin\theta,R\cos\varphi)$$

正螺面

空间动直线段作匀速圆周运动, 同时, 这圆周所在的平面又在空间作匀速直线运动, 且移动的方向与圆周所在的平面垂直. 此时直线段所生成的曲面为正螺面.







向量形式: $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, av)$,

$0\le u< l, -\infty< v< +\infty$. $a>0$ 为常数

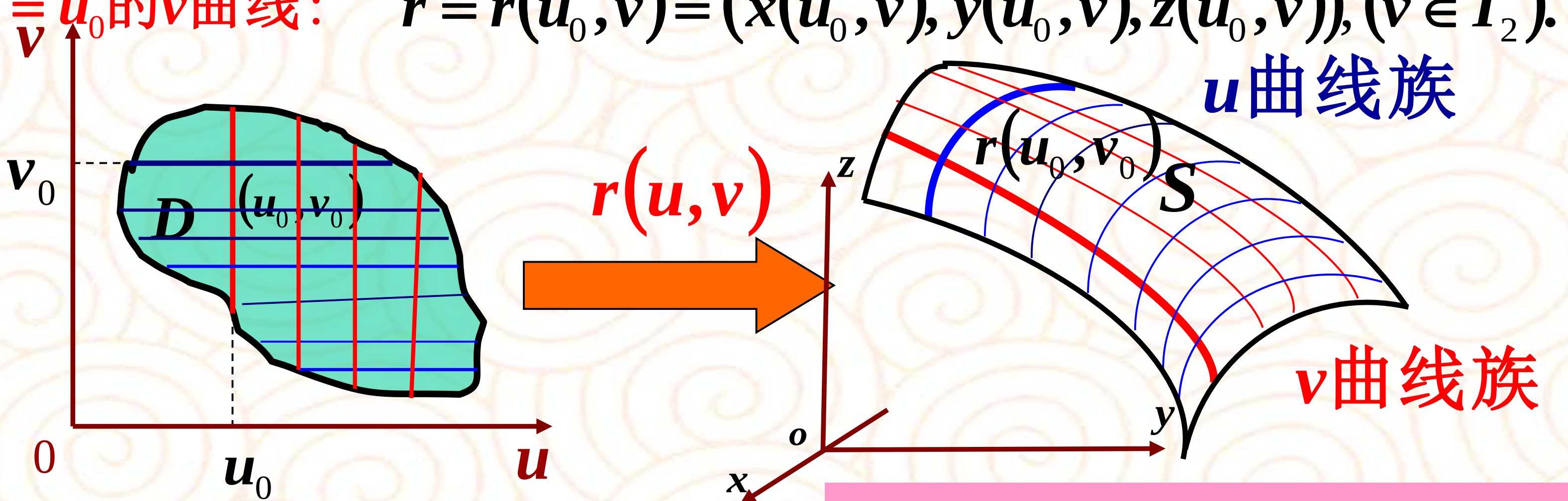
一般地，空间曲面可以看作是由2维平面区域D到3维Euclidean空间连续映射的像。

参数方程为 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D. \\ z = z(u,v); \end{cases}$

向量方程为 $r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), ((u,v) \in D).$

$v = v_0$的u曲线： $r = r(u,v_0) = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)), (u \in I_1).$

$u = u_0$的v曲线： $r = r(u_0,v) = (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v)), (v \in I_2).$

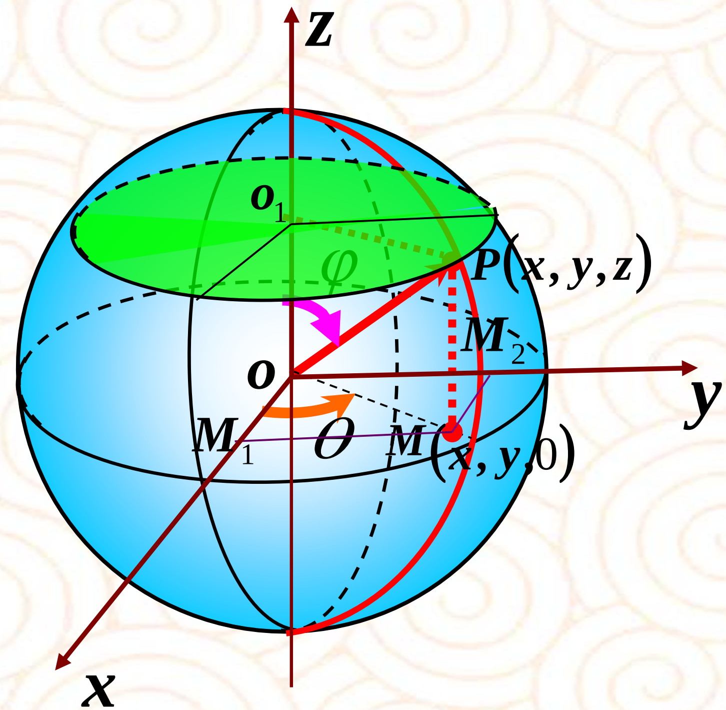


平面区域D的坐标网 ⟷ 空间曲面S的参数曲线网

区域D内一曲线 ⟷ 曲面S上的一曲线

譬如，球面参数方程为：

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\,\sin\theta, \\ z = R\cos\varphi; \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{array}$$



$\theta = \theta_0$的φ曲线：

$$x = R\sin\varphi\cos\theta_0, \quad y = R\sin\varphi\,\sin\theta_0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \quad z = R\cos\varphi;$$

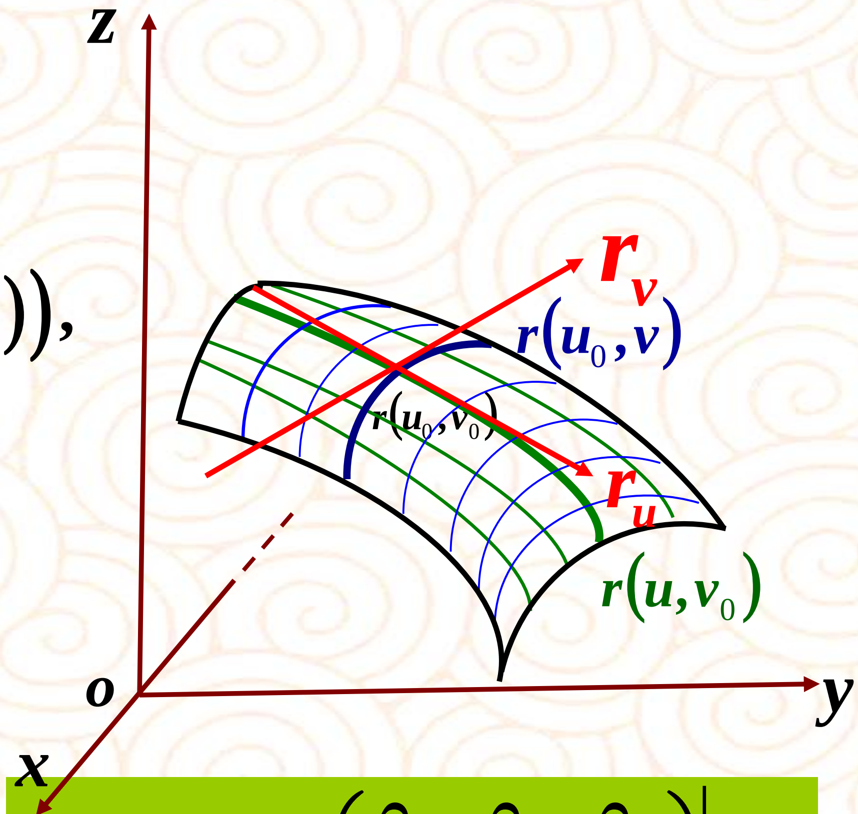
为球面的经线。

$\varphi = \varphi_0$的θ曲线：

$$x = R\sin\varphi_0\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi_0\,\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi. \quad z = R\cos\varphi_0;$$

为球面的纬线。

二、曲面的切平面与法线方程



设曲面S的参数方程为:

$$r=r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),$$
$$\big((u,v)\in D\big).$$

其中$r=r(u,v)$在区域D连续,

在点(u_0,v_0)可微,其偏导数

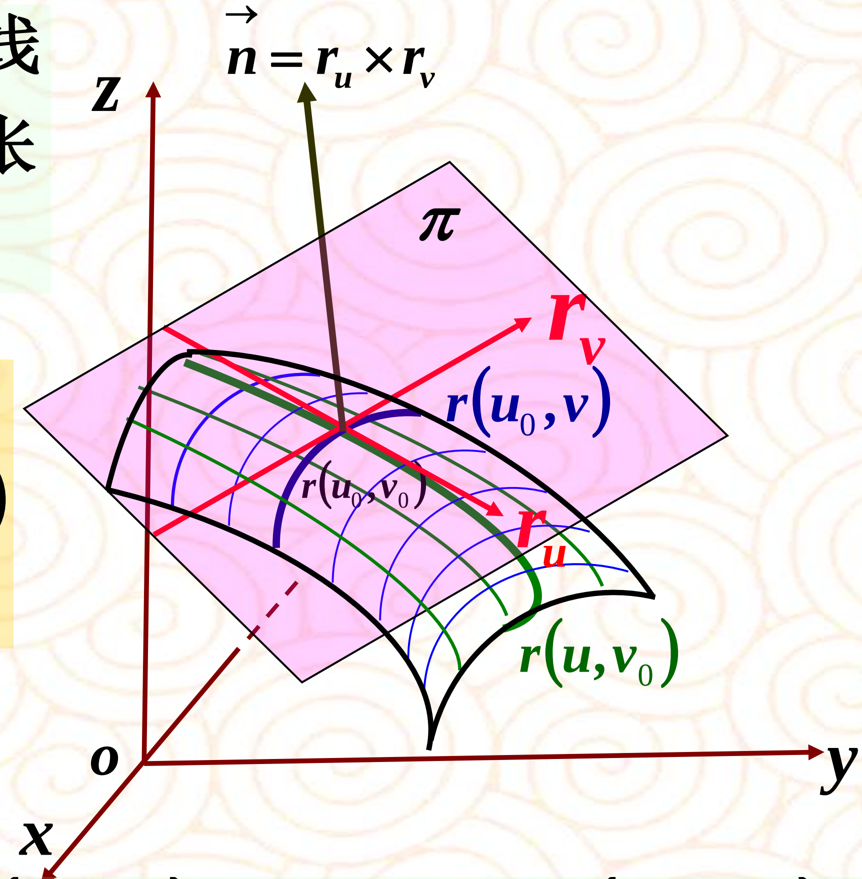
$$r_u(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)\bigg|_{(u_0,v_0)},\quad r_v(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\bigg|_{(u_0,v_0)}$$

存在且 $r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)\neq 0$ 此时称(u_0,v_0)为曲面S的正则点。

正则表明$r(u,v_0)$在点$r(u_0,v_0)$存在切向量$r_u(u_0,v_0)$,
$r(u_0,v)$在点$r(u_0,v_0)$存在切向量$r_v(u_0,v_0)$,且r_u与r_v不平行.

在点$r(u_0,v_0)$处$r(u,v_0)$的切线和$r(u_0,v)$的切线确定了一张平面π.

可以证明,曲面上任意一过点(u_0,v_0)的曲线在点(u_0,v_0)处的切线均位于平面π上.



曲面的切平面和法线:

在点$r(u_0,v_0)$处的u曲线$r(u,v_0)$的切向量$r_u(u_0,v_0)$和v曲线$r(u_0,v)$的切向量$r_v(u_0,v_0)$所张成的平面π称为曲面S在点r_0的**切平面**.

过点r_0且垂直于切平面π的直线称为曲面S在r_0处的**法线**.法线的方向向量称为法向量.

法向量为:

$$\vec{n}=r_u\times r_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\stackrel{\Delta}{=}(A,B,C)$$

则切平面方程为: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法线方程为: $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$

光滑曲面S:

若 $r_u(u,v)=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $r_v(u,v)=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$

在区域D内连续,则称曲面S是一光滑曲面.

(有连续转动的切平面)

情形2 曲面直角坐标方程为 $F(x,y,z)=0$

设F具有对各个变量的连续偏导数且 $\{F_x,F_y,F_z\}\neq 0$（不妨令$F_z\neq 0$）

则 $F(x,y,z)=0 \Rightarrow z=z(x,y)$

曲面参数方程为：$r(x,y)=(x,y,z(x,y))$

$$r_x=(1,0,z_x)=\left(1,0,-\frac{F_x}{F_z}\right),\quad \vec{n}=r_x\times r_y=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -\dfrac{F_x}{F_z}\\ 0 & 1 & -\dfrac{F_y}{F_z}\end{vmatrix}$$

$$r_y=(0,1,z_y)=\left(0,1,-\frac{F_y}{F_z}\right).$$

$$=\left(\frac{F_x}{F_z},\frac{F_y}{F_z},1\right)\parallel \boxed{(F_x,F_y,F_z)}$$

切平面方程为：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

情形3 曲面方程为 $z=f(x,y)$

法向量为 $\vec{n}=\left(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\right)$

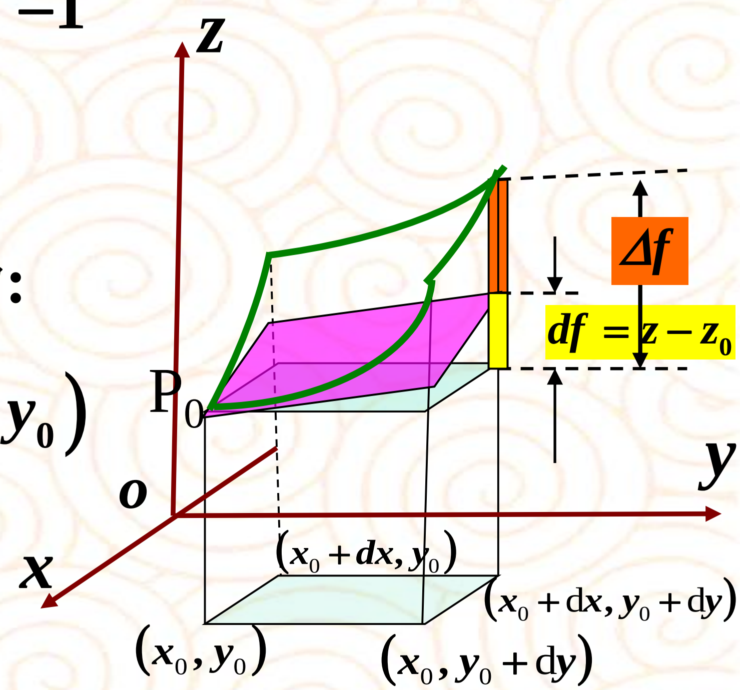
切平面方程为 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

全微分的几何意义

曲面 $z=f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **处切平面方程为:**

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$



表明切平面上竖坐标的增量就是函数在切点处的全微分。

以切平面代替曲面--局部线性化思想

例11 求球面 $\begin{cases} x = 3\cos\theta\cos\phi, \\ y = 3\cos\theta\sin\phi, \\ z = 3\sin\theta; \end{cases}$ 在 $(\theta_0, \phi_0) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面和法线方程.

$$r_\theta(\theta_0, \phi_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\Bigg|_{(\theta_0, \phi_0)},$$

$$r_\phi(\theta_0, \phi_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi}\right)\Bigg|_{(\theta_0, \phi_0)},$$

$$n = r_\theta(\theta_0, \phi_0) \times r_\phi(\theta_0, \phi_0) \neq 0$$

则切平面方程为:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

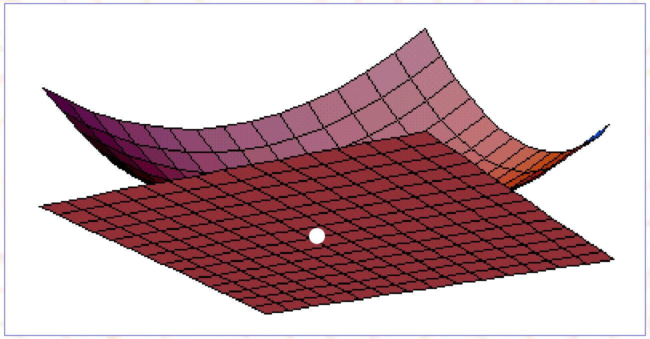
法线方程为:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

法向量为:

$$\vec{n} = r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \stackrel{\Delta}{=} (A, B, C)$$

例12 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.



解 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 - z$

$$\vec{n}\big|_{(2,1,4)} = \{2x, 2y, -1\}\big|_{(2,1,4)} = \{4, 2, -1\},$$

切平面方程为 $4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0,$

$$\Rightarrow \quad 4x + 2y - z - 6 = 0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}.$

例13 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z+2003=0$ 的各切平面方程，并求曲面上距离平面最近和最远的点。

解 （1） 设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上的切点,

切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

依题意，切平面方程平行于已知平面，得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}, \Rightarrow 2x_0=y_0=z_0.$$

因为 (x_0,y_0,z_0) 是曲面上的切点,

应满足方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$ $\boxed{\therefore\ x_0=\pm 1,}$

所求切点为 $(1,2,2)$, $(-1,-2,-2)$,

例13 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面方程，并求曲面上距离平面最近和最远的点。

解（1）所求切点为: $(1,2,2),(-1,-2,-2),$

切平面方程(1): $2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=21$$

切平面方程(2): $-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=-21$$

例13（2）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上距离平面

$x+4y+6z+2003=0$ 最近和最远的点。

解（2）一法：切点 (1,2,2)，(−1,−2,−2)，即分别为所求.

二法：Lagrange乘数法 $d=\dfrac{|x+4y+6z+2003|}{\sqrt{53}}$

Lagrange函数

$$L(x,y,z,\lambda)=(x+4y+6z+2003)^2+\lambda(x^2+2y^2+3z^2-21)$$

令 $\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases}$ 解得两个驻点: (1,2,2)，(−1,−2,−2)，

实际最值距离必存在，此二点即为所求点