第五章 多元函数微分学及其应用

第一节 R^n中点集的初步知识

- n维欧氏空间R^n
- R^n 中点列的极限
- R^n 中的开集与闭集
- R^n 中的紧集与区域

作业：Page10,

(A) 4,5,6,7

一元函数微积分

数列极限
函数极限
函数连续
函数导数
函数积分

多元函数微积分

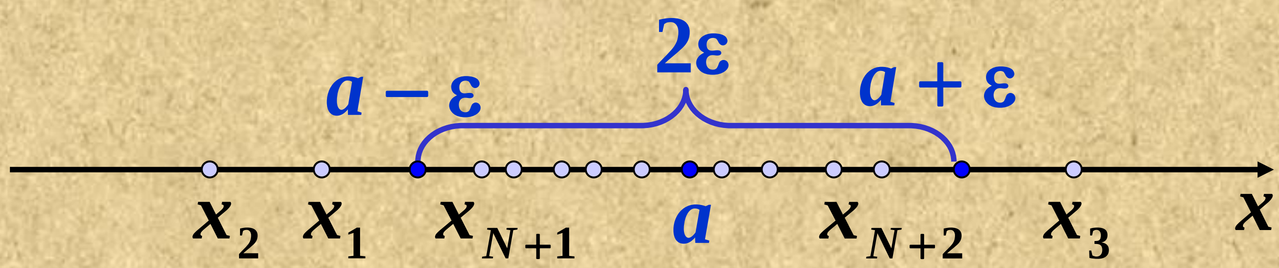
n维点列极限
多元函数极限
多元函数连续
多元函数导数
多元函数积分

$\varepsilon - N$定义：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使} n > N \text{时}, \text{恒有} |x_n - a| < \varepsilon.$$

其中 $\forall$: 每一个或任给的;　　$\exists$: 至少有一个或存在.

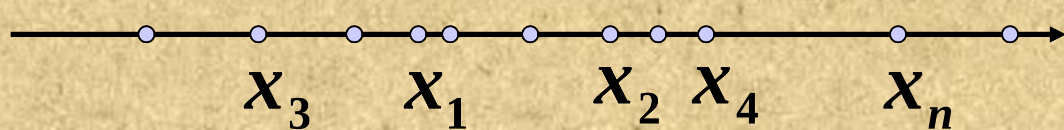
几何解释:



当$n > N$时, 所有的点x_n都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内,

只有有限个(至多只有N个)落在其外.

注意： 数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取　$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



线性空间的基本概念

定义 (线性空间) V是一个非空集合, 在V 中定义了加法和数乘两种运算， V 对加法和数乘是封闭的，而且加法和数乘运算满足以下8条运算规律:

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3)在V中存在一个元素,称为零元素,使得$\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V, \exists -\alpha\in V$, 使得$\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

（这里$-\alpha$称为α的负元素）

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3)在V中存在一个元素,称为零元素,使得$\alpha+0=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V,\exists-\alpha\in V$,使得$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

其中, α,β,γ是V中任意的元素，k,l是F中任意常数, 那么，我们称V为数域F上的线性空间(向量空间)

.

线性空间*V* = **非空集合*V*** + $\begin{cases}\text{封闭的加法}\\ \text{封闭的数乘}\\ \text{8条运算规律}\end{cases}$

注意:

(i) 向量空间的概念是集合与运算二者的结合.

一般地,同一个集合,若定义两种不同的线性运性算,

就构成不同的向量空间;

(ii) 若定义的运算不是线性运算, 就不能构成线性空间.

内积及Euclid空间

内积的定义 设V是一个实线性空间。如果对V中任意两个向量α,β，均有一个确定的实数与之对应，这个实数记为$\langle\alpha,\beta\rangle$并且满足下列条件：

(1) 对称性：$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$;

(2) 加性 $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$;

(3) 齐性 $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$;

(4)非负性$\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$,

而且$\langle\alpha,\alpha\rangle=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

k是任意实数，则称实数$\langle\alpha,\beta\rangle$为向量$\alpha$与$\beta$的内积，而这样的线性空间称为Euclid空间，简称欧氏空间.

第一部分　n维欧氏空间R^n

1.1.　n维Euclid空间R^n

一般地，称一个n元有序实数组为一个n维实向量.

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_i\in R,i=1,2,\cdots,n)$$

n维实向量的全体构成的集合记为:

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$$

R^n中向量的运算:

设 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n.\forall\alpha\in R.$

[1] 加法: $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$

[2]数乘: $\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$

全体n维实向量连同定义于其上的向量的加法和数乘构成了 n维向量空间R^n（ 或n维实线性空间）

设$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n, \boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)\in \boldsymbol{R}^n$.

[1] 加法：$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{y}_n)$

[2]数乘：$\alpha \boldsymbol{x}=(\alpha \boldsymbol{x}_1,\alpha \boldsymbol{x}_2,\cdots,\alpha \boldsymbol{x}_n)\quad \forall\alpha\in R.$

全体**n**维实向量连同定义于其上的向量的加法和数乘构成了 **n维向量空间R^n**（或**n**维实线性空间）

[3]内积：$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n$ **n维Euclid空间R^n.**

[4]长度(范数)：$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\cdots+\boldsymbol{x}_n^2}$

[5]距离：$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

距离概念有什么用处? $\begin{cases}\text{定义一个局部范围}\\ \text{衡量接近程度}\end{cases}$

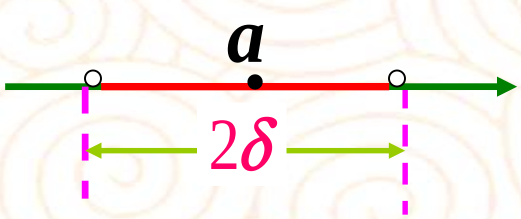
邻域 Neighbourhood

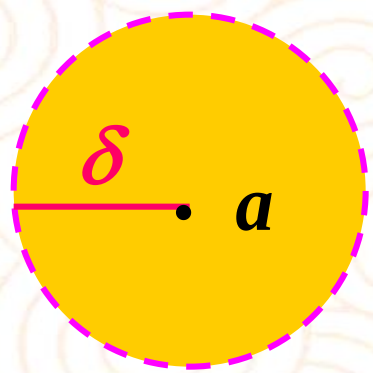
设点$a \in R^n$,常数$\delta > 0$,则称R^n 中与点a的距离小于δ的点x 的全体所构成的点集为点a 的δ 邻域,或:开球

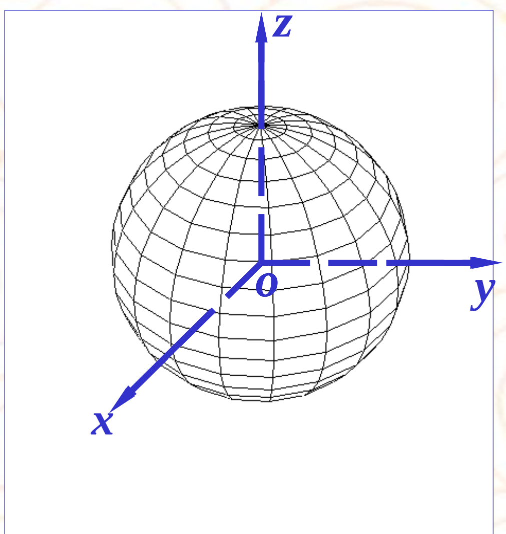
$$\text{记为}:U(a,\delta)=\left\{x \in R^n \,\middle|\, \|x-a\|<\delta\right\}$$

而将$U(a,\delta)$中去掉点a的部分称为点a的去心δ邻域,

记为:$\overset{o}{U}(a,\delta)=\left\{x \in R^n \,\middle|\, 0<\|x-a\|<\delta\right\}=U(a,\delta)\setminus\{a\}$







$$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\left(x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\right)$$

$$R^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\middle|x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\right\}$$

$\boldsymbol{R^n}$ 中 开区间

$$(a,b)=\left\{x\in R^n\,\middle|\,a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\right\}$$

$\boldsymbol{R^n}$ 中 闭区间

$$[a,b]=\left\{x\in R^n\,\middle|\,a_i\leq x_i\leq b_i,i=1,2,\cdots,n\right\}$$

1.2　R^n中点列的极限

ε–N定义：

若$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，点$a \in R^n$，其中，$x_k=(x_{k1}, x_{k2},\cdots, x_{kn}), a=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$

若当$k\to\infty$时，$\rho(x_k, a)\to 0$，则称该点列的极限存在.

即：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+$，$\forall k > N$，有$\|x_k - a\| < \varepsilon$

也称该点列收敛于a，记作：$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. 或 $x_k \to a\ (k\to\infty)$

邻域式定义：

若对于 a 的任意邻域 $U(a,\varepsilon)$，$\exists N \in N^+$，$\forall k > N$，有 $x_k \in U(a,\varepsilon)$. 则称该点列收敛于 a，记作$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

定理1.1　n维欧氏空间点列的收敛是按坐标收敛.

设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，点$a\in R^n$,则：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i, \forall i = 1,2,\ldots,n$$

其中，$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n}), a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \cdots, x_{1,n}),$$

$$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \cdots, x_{2,n}),$$

$$x_3 = (x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \cdots, x_{3,n}),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a = (a_1, \quad a_2, \quad a_3, \cdots, \quad a_n)$$

定理1.1　*n*维欧氏空间点列的收敛是按坐标收敛.

设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，点$a\in R^n$,则：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i, \forall i = 1,2,\ldots,n$$

其中，$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n}), a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

必要性

定理1.1　n维欧氏空间点列的收敛是按坐标收敛.

设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，点$a\in R^n$,则：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i, \forall i = 1,2,\ldots,n$$

其中，$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n}), a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

充分性

选择题:

设有点列：$x^{(k)}=\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}=\left((1+\frac{1}{k})^k,\frac{\sin k}{k},k(e^{\frac{1}{k}}-1)\right)^T$

则：$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=($ $\qquad\qquad$ $)$

A. $(0,0,1)^T$

B. $(e,1,1)^T$

C. $(e,0,1)^T$

D. 不会，我再想想.

解:

$$x^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{pmatrix}=\left((1+\frac{1}{k})^k,\frac{\sin k}{k},k(e^{\frac{1}{k}}-1)\right)^T$$

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{k\to\infty}x_1^{(k)}\\\lim\limits_{k\to\infty}x_2^{(k)}\\\lim\limits_{k\to\infty}x_3^{(k)}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k,\lim_{k\to\infty}\frac{\sin k}{k},\lim_{k\to\infty}k(e^{\frac{1}{k}}-1)\right)^T$$

$$=(e,0,1)^T$$

定理1.2

1. 收敛点列的极限是唯一的；

2. 收敛点列必为有界点集

设$\{x_k\}$是收敛点列，

则 $\exists M>0, M\in R, \forall k\in N_+,\ \|x_k\|\le M$

3. 点列的收敛满足线性性质；

若 $x_k\to a, y_k\to b$,则：

$$x_k\pm y_k\to a\pm b,$$
$$\lambda x_k\to\lambda a,\ \lambda\in R$$
$$\langle x_k, y_k\rangle\to\langle a,b\rangle.$$

4. 若$\{x_k\}$收敛于 a, 则它的任意子列也收敛于 a.

定理1.3 Bolzano-Weierstrass定理

n维欧氏空间的有界点列必有收敛的子（点）列.

若A为R^n中的紧集(有界闭集), 则A中任意点列都有收敛的子列，且子列的极限仍属于A

波尔查诺 (Bolzano) 捷克哲学家、数学家. 1796年入布拉格大学哲学院攻读哲学、物理学和数学，1800年又入神学院，1805年任该校宗教哲学教授。1815年成为波希米亚皇家学会的会员，1818年任该校哲学院院长。

波尔查诺的主要数学成就涉及分析学的基础问题。在1834年撰写但未完成的著作《函数论》中，他正确地理解了连续性和可微性之间的区别，在数学史上首次给出了在任何点都没有有限导数的连续函数的例子（皮亚诺曲线，没有解析表达式）。波尔查诺对建立无穷集合理论也有重要见解,在《无穷的悖论》(1851)中,他坚持了实无穷集合的存在性，强调了两个集合的等价概念（即两集合元素间存在一一对应），注意到无穷集合的真子集可以同整个集合等价。

Cauchy点列（基本点列）

定义 对n维欧氏空间中的点列$\{x_k\}$，若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \text{使得} \forall k > N \text{及} \forall p \in \mathrm{N}_+, \left\| x_{k+p} - x_k \right\| < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$是Cauchy点列（基本点列）

$\{x_k\}$是Cauchy点列 $\Leftrightarrow$ $\{x_{k,i}\}$是Cauchy数列

定理1.1 n维欧氏空间点列的收敛是按坐标收敛.

设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为 n 维向量空间 R^n 中一个点列，

点$a \in R^n$,则：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i, \forall i = 1,2,\ldots,n$$

其中，$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n}), a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

R^n的完备性:

R^n中的点列收敛于 R^n 中的点

$\{x_k\}$是$Cauchy$点列 $\Leftrightarrow$ $\{x_{k,i}\}$是$Cauchy$数列

定理1.4 （Cauchy收敛原理）

n维欧氏空间R^n中的点列收敛于R^n中的点

$\Longleftrightarrow$ 该点列为R^n 中Cauchy点列

1.3 n维空间中点集的概念

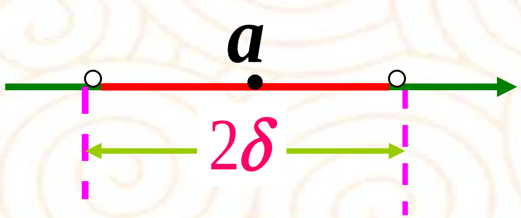
（1）邻域 Neighbourhood

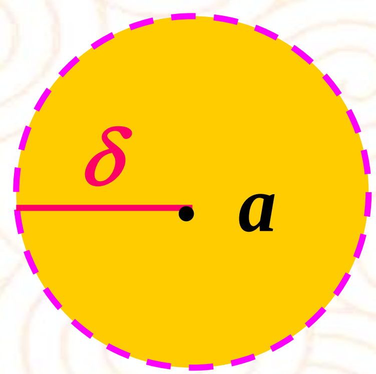
设点$a \in R^n$,常数$\delta > 0$,则称R^n中与点a的距离小于δ的点x的全体所构成的点集为点a的δ邻域,或:开球

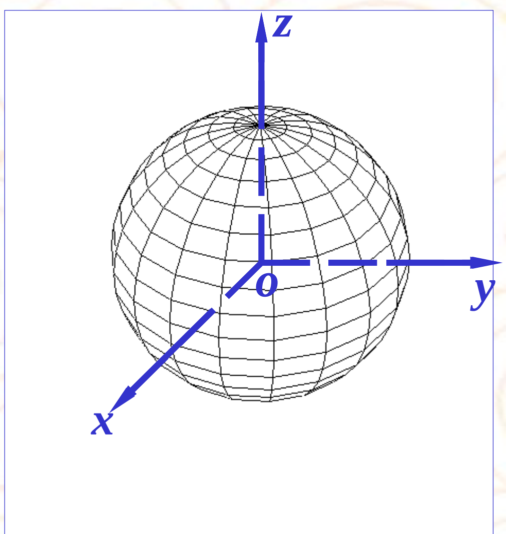
记为:$U(a,\delta)=\left\{x \in R^n \,\middle|\, \|x-a\| < \delta\right\}$

而将$U(a,\delta)$中去掉点a的部分称为点a的去心δ邻域,记为

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\left\{x \in R^n \,\middle|\, 0<\|x-a\|<\delta\right\}=U(a,\delta)\setminus\{a\}$$



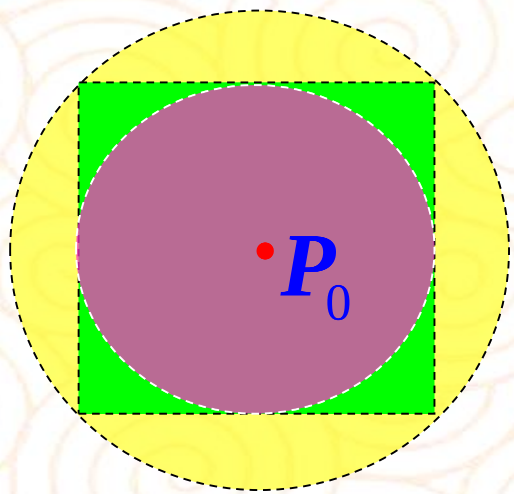




有时也可使用方邻域, 方邻域与圆邻域可以互相包含.

平面上的方邻域为:

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\delta})=\{\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid |x-x_0|<\delta\;,\;|y-y_0|<\delta\,\}$$



说明: 若不需要强调邻域半径δ ,也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{\,P\mid 0<\|\boldsymbol{PP_0}\|<\delta\,\}$

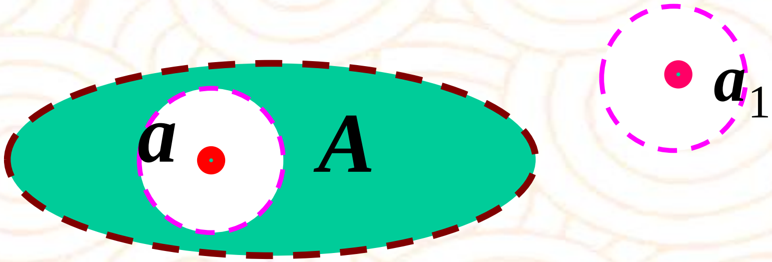
设$A\subset R^n, P_0\in R^n$.则 P_0 与 A 有三种可能的关系:

（1）在 P_0 的附近没有 A 的点.

（2）P_0 的附近全是 A 的点.

（3）P_0 的附近既有 A 的点，又有不属于 A 的点.

(2)内点 外点 边界点 聚点 孤立点



- 设 A 是R^n的一个点集，点$a \in A$．如果存在点a 的一个邻域$U(a,\delta)$，使得$U(a,\delta) \subset A$，则称a为A的一个内点

集合A的内点的全体所构成的集合称为集合A的内部.

记为：A^{o} 或 int A. interior points

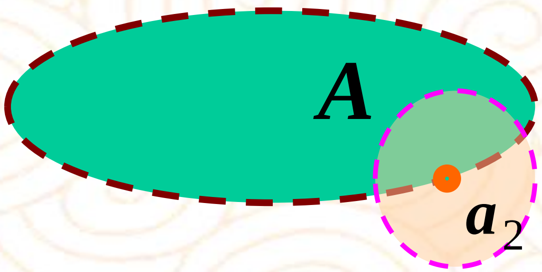
- 设 $a_1 \in R^n$．如果存在点a_1 的一个邻域$U(a_1,\delta_1)$使得$U(a_1,\delta_1)$的点都不是A的点，即$U(a_1,\delta_1) \subset A^c$，则称$a_1$为$A$的一个外点

集合A的外点的全体所构成的集合称为集合A的外部.

记为：ext$A$. exterior points

设 $a_2 \in R^n$. 如果点 a_2 的任意一个邻域 $U(a_2,\delta_2)$ 中既含有集合 A 的点,又含有 A^c 的点,则称 a_2 为 A 的一个边界点.

集合A的边界点的全体所构成的集合称为集合A的边界.



记为: ∂A. *boundary* points

例1　设 $A=\{(x,y)\in R^2 \mid x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 4\}$.

求: A的内部,外部以及边界.

点集A的内点、外点、边界点与 A的关系？

A 的内点必属于 A,

A 的外点必不属于A,

A 的边界点可能属于A, 也可能不属于A .

R^n中的任一点是且仅是A 的内点, 外点, 边界点中的一种

$$R^n = \mathrm{int}A \cup \mathrm{ext}A \cup \partial A.$$

$$R^n = A^\circ \cup \mathrm{ext}A \cup \partial A.$$

设 A 是R^n的一个点集，点$a \in R^n$.

如果存在A中的点列$\{x_k\}, x_k \neq a\ (k=1,2,\cdots)$,

使得$x_k \to a(k \to \infty)$,则称a为A的一个**聚点**.

- A的**全体聚点**所成的集合，称为A的**导集**，记作 A'
- A与A的导集的并集，称为A的**闭包**，记作 $\overline{A} = A \cup A'$
- $a \in A$,但$a \notin A'$ 则称a为A的**孤立点**。

  或：a附近除a外没有A的点，即存在a的邻域$U(a)$,

  $U(a) \cap A = \{a\}$

- 若$A' \subseteq A$, 则称A为**闭集**。(闭集对极限运算是封闭的)

聚点的充要条件

设 A 是R^n的一个点集，点$a\in R^n$.

$$a\in A' \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing.$$

a为A的**聚点** $\Leftrightarrow$ a的任意去心邻域$\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$中都含有$A$中的点

证明： 必要性: $\Rightarrow$ 将极限用邻域表示即可

充分性: $\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0, \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing.$

取$\varepsilon=\dfrac{1}{k}, \exists\, x_k\in\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\cap A.$

$$0<\|x_1-a\|<1$$

$$0<\|x_2-a\|<\frac{1}{2}.$$

$$0<\|x_3-a\|<\frac{1}{3}.$$

$$0<\|x_k-a\|<\frac{1}{k}.$$

两边夹，$\rho(x_k,a)=\|x_k-a\|\to 0,$

$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$ 故$a\in A'$

聚点的说明　accumulation points

设点集$A\subseteq R^n$，$a\in R^n$，如果a的任意去心邻域中总含有A的点，则称a为点集A的聚点.

说明：
- 内点一定是聚点；
- 有限点集没有聚点；
- 点集A的聚点可以属于A，也可以不属于A；
- 边界点可能是聚点,也可能不是聚点.

例　$A=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$

(0,0)既是边界点也是聚点,但(0,0) 不属于集合A.

而边界的一部分 $\partial A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

上的点都是聚点也都属于集合.

⏲边界点可能是聚点,也可能不是聚点.

例:

$\{(x,y)|0<x^2+y^2\le 1\}$,(0,0)既是边界点也是聚点.

$\{(x,y)|x^2+y^2=0$或$x^2+y^2\ge 1\}$, (0,0)是边界点,但不是聚点.

边界点不一定是聚点?

设集合$A=\{(x,y)|(1,1),x^2+y^2\le 1/2\}$

点(1,1)为A的边界点，但存在(1,1)的去心邻域，其内没有属于A的点，故(1,1)不是A的聚点。
而(1,1)属于集合A，故(1,1)为孤立点。
(1,1)为A的边界点，也为A的孤立点

设 A 是R^n的一个点集，点$a \in R^n$.

如果存在A中的点列$\{x_k\}$, $x_k \neq a\ (k=1,2,\cdots)$,

使得$x_k \to a(k \to \infty)$,则称a为A的一个**聚点**.

- A的**全体聚点**所成的集合，称为A的**导集**，记作 A'
- A与A的导集的并集，称为A的**闭包**，记作 $\overline{A}=A\bigcup A'$
- $a \in A$,但$a \notin A'$ 则称a为A的**孤立点**。

或：a附近除a外没有A的点，即存在a的邻域$U(a)$，

$$U(a)\bigcap A=\{a\}$$

- 若$A' \subseteq A$, 则称A为**闭集**。（闭集对极限运算是封闭的）

聚点的等价定义

关于聚点，下面四条是等价的：

(1) a是A的聚点；

(2) a的任意邻域内,至少含有一个属于A而异于a的点；

(3) 存在A中互异的点所成的点列$\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(4) a的任何邻域内都有集合 A 中的无穷多个点

(1)与(2)等价

(4)=> (2)是显然的，

(3)=>(4)也不难得到；

现证(2)=>(3)

(2) a的任意邻域内,至少含有一个属于A而异于a的点;

(3)存在A中互异的点所成的点列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

由(2)知, a为A的聚点，则对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $x \in \overset{o}{U}(a,\varepsilon) \cap A$

令$\varepsilon_1 = 1$,则存在$x_1 \in \overset{o}{U}(a,\varepsilon_1) \cap A$

$\varepsilon_2 = \min\left(\frac{1}{2}, |a - x_1|\right)$,则存在$x_2 \in \overset{o}{U}(a,\varepsilon_2) \cap A$,且显然$x_2 \neq x_1$

$\varepsilon_n = \min\left(\frac{1}{n}, |a - x_{n-1}|\right)$,则存在$x_n \in \overset{o}{U}(a,\varepsilon_n) \cap A$,且$x_n$与$x_1,\cdots,x_{n-1}$互异

无限重复，即可得到 A 中各项互异点列$\{x_n\}$,$\|a - x_n\| < \varepsilon_n \le \frac{1}{n}$

易见$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

（3）开集,闭集,线段,连通集

设集合$A \subseteq R^n$，如果A中的点都是内点，即$\operatorname{int} A = A$,则称集合A是R^n的开集. 如果A的余集A^c是开集,则称A为闭集.

例：$E_1 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 是开集.

开集的性质：

a. 空集，R^n为开集;

b. 任意多个开集之并仍为开集;

c. 有限个开集之交仍为开集。

注：无限多个开集的交不一定为开集，如：

$E_n=(0,1+1/n)$，$(0,1]$,1含于内

R^n中只有空集和R^n既开又闭，

存在大量既不开又不闭的集合，如：$E=[0,1)$

设 A 是R^n的一个点集，点$a\in R^n$.

如果存在A中的点列$\{x_k\}$, $x_k\neq a\ (k=1,2,\cdots)$,

使得$x_k\to a(k\to\infty)$,则称a为A的一个**聚点**.

- A的**全体聚点**所成的集合，称为A的**导集**，记作 A'
- 若$A'\subseteq A$, 则称A为**闭集**。(闭集对极限运算是封闭的)

$A\subseteq R^n$，若A中的点都是内点$(\operatorname{int}A=A)$,则A是开集.

$A\subseteq R^n$，A是开集$\Leftrightarrow A^c$是闭集.

单点集和有限点集都是闭集（其导集为空集必包含于A）

$\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$是闭集（导集中只有0，是其子集）

去掉端点的线段既不是开集也不是闭集？

- 若$A' \subseteq A$, 则称A为**闭集**。(闭集对极限运算是封闭的)

单点集和有限点都是闭集（其导集为空集必包含于A）

$\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$是闭集

去掉端点的线段既不是开集也不是闭集?

没去掉端点的线段AB，其导集是自己，为自身的子集，故AB是闭集;

去掉端点的线段AB，A,B两点仍在导集中，但导集不再是自身的子集，故不是闭集;

平面R^2上去掉端点的线段AB，其上任一点作出的邻域不是自身的子集，故不是开集;

$\overline{A} = A \cup A'$

集合A的内部是**A的最大开子集**,

包含A的最小闭集就是A的闭包(closure)并用cl(A)或 $\overline{A}$ 表示。

a.空集，R^n为闭集；

闭集的性质： b.任意多个闭集之交仍为闭集；

c.有限个闭集之并仍为闭集。

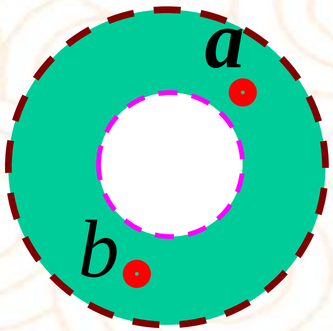
注：无限多个闭集的并不一定为闭集，如：

$E_n=[0,1-1/n]$， $[0,1)$,1不含于内

- 设 a,b是R^n中两个不同的点 称点集

$$L=\left\{x \mid x=ta+(1-t)b, t\in R, 0\le t\le 1\right\}$$

为R^n中联结点a与点b的线段.



- 若对于R^n中的点集A内任何两点，都可用有限条线段连结起来，且该线段上的点都属于A，则称A 是 连通集.

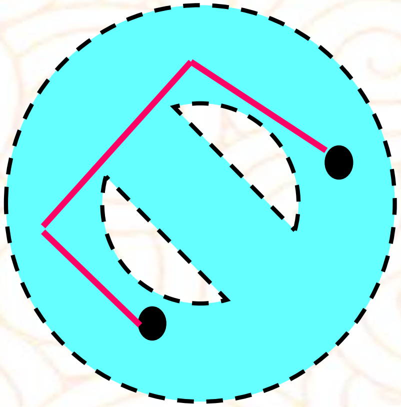
Connected set

（3）开集,闭集,线段,连通集

- 若对于R^n中的点集A内任何两点,都可用有限条线段连结起来，且该线段上的点都属于A,则称A 是 连通集.

Connected set

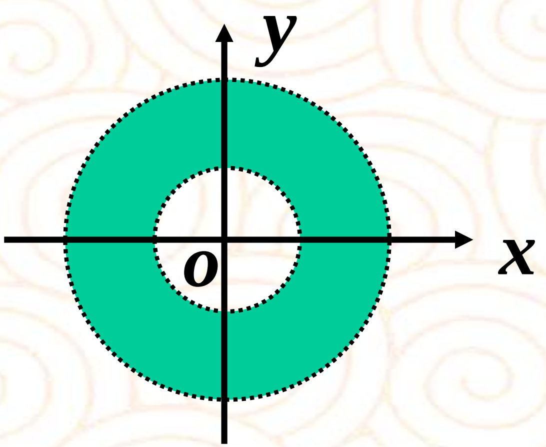
- 设 A 是开集. 如果对于 A 内任何两点都可用有限条线段连结起来,且该线段上的点都属于 A,则称 A 是连通的开集.



（4）区域 Regions

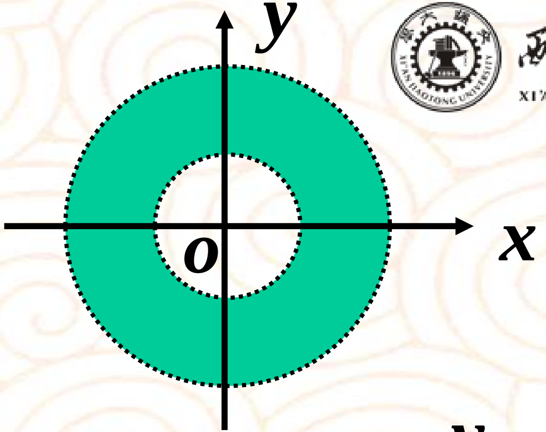
连通的开集称为区域或开区域.

例如， $\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}.$



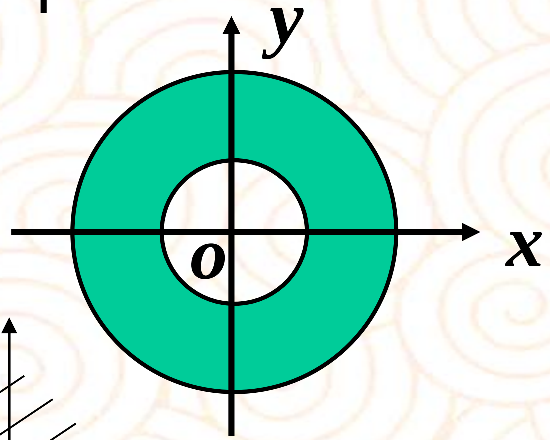
（4）区域 Regions

连通的开集称为区域或开区域.



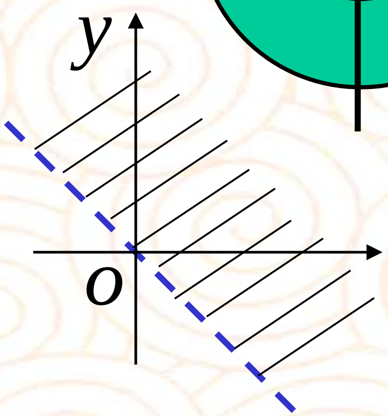
♣ 例如, $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

开区域连同它的边界一起称为闭区域.



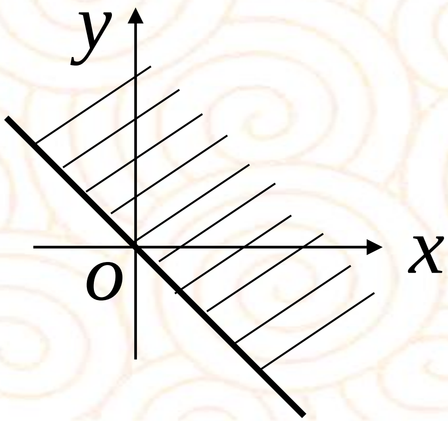
♣ 例：$\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

♣ 例：在平面上 $\left\{ (x,y) \middle| \; x + y > 0 \right\}$



开区域

♣ $\left\{ (x,y) \middle| \; x + y \ge 0 \right\}$



闭区域

♣ 判断1：区域一定是开集，开集一定是区域 （　） A.正确 B.错误

$$\{(x,y) \mid x^2 - y^2 > 1\}.$$

平面上两个不相交的开圆是开集但不是连通的。

♣ 判断2：连通集一定是开集，开集一定是连通集(　)

A.对　B.错

连通集和开集没有任何关联！ 开集可以是不连通的，

平面上的闭圆是闭集不是开集，但却是连通的.

♣ 判断3：区域一定是连通集，连通集不一定是区域（　）

A.对　B.错

区域一定是连通集（由定义），但是连通集不一定是区域。如闭圆

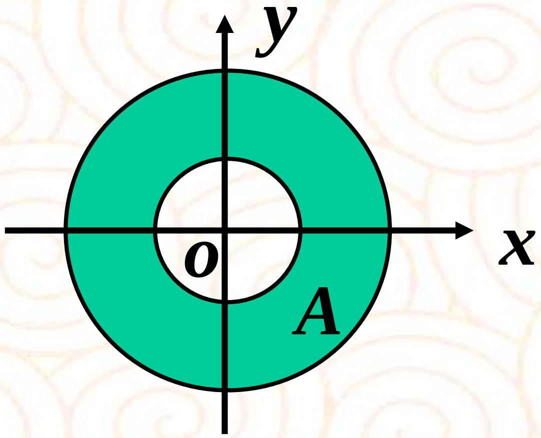
♣ 空集和R^n 是开集，也是闭集.

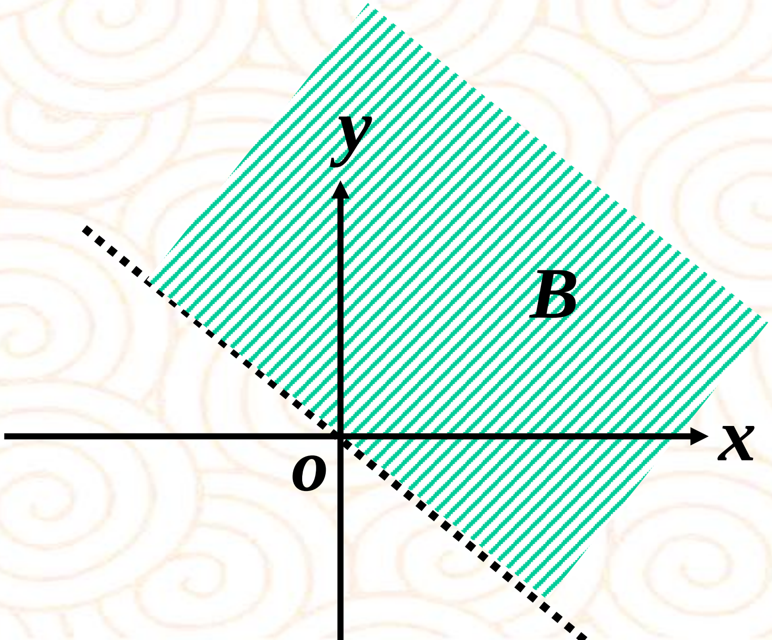
（5）有界集与无界集

点集 $A \subseteq R^n$,若存在正数 M，使得$\forall x \in A$,都有 $\|x\| \le M$，则称 A 为有界集，否则称为无界集.

例：$A = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ 是有界闭区域；

$B = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$ 是无界开区域.





(6) 紧集 凸集

- R^n中的**有界闭集**A, 称为**紧集**A

- 如集合A 中任意两点的连线上的点都属于A，则称A 为R^n中的凸集。

即：设X,Y $\in$ A,则对任意 t($0\leqq t\leqq 1$),
均有$tX+(1-t)Y \in A$

凸集必是连通集➔凸开集必是区域