第二章 一元函数微分学及其应用

第一节 导数的概念

- 导数的定义
- 导数的几何意义
- 可导与连续的关系
- 科学技术中的导数问题举例
- 小结

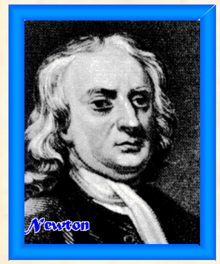
作业：P102 习题2.1
（A） 1.(2)(4)， 2， 4,8,,10， 11,12,18
（B）1,3,4

导数与微分

导数思想最早由法国数学家 Ferma 在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton



德国数学家 Leibniz

微分学

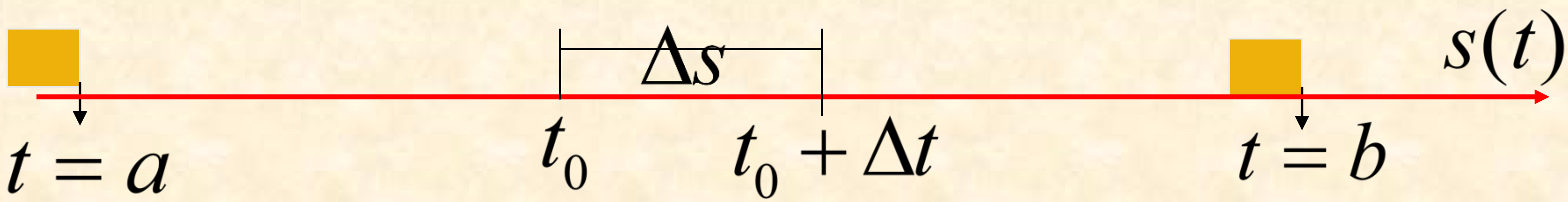
- 导数 —— 描述函数变化的“快慢”
- 微分 —— 描述函数变化的“程度”

都是描述物质运动的工具(从微观上研究函数)

1.1 导数的定义

1、非匀速直线运动的瞬时速度

设变速直线运动位移随时间的变化规律为 $s=s(t), t\in(a,b)$



平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

$|\Delta t|$ *很小时，* $v_0\approx\bar{v}$ *那么，如何求得* v_0?

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

2、导数的定义

设$y=f(x)$, $x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称$y=f(x)$在x_0点可导，并称该极限值为

$f(x)$在x_0处的导数，记作 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ $f'(x_0)$ $y'\big|_{x=x_0}$

导函数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $f'(x)$ y' 导数 $\begin{cases}\text{导数值}\\ \text{导函数}\end{cases}$

若记$x=x_0+\Delta x, \Delta y=f(x)-f(x_0)$,则:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

例1 设函数 $f(x)=\sin x$，求$(\sin x)'$及$(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

$$1.\ \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x \quad =2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$2.\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$3.\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x}\qquad \therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

★ 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

Th1

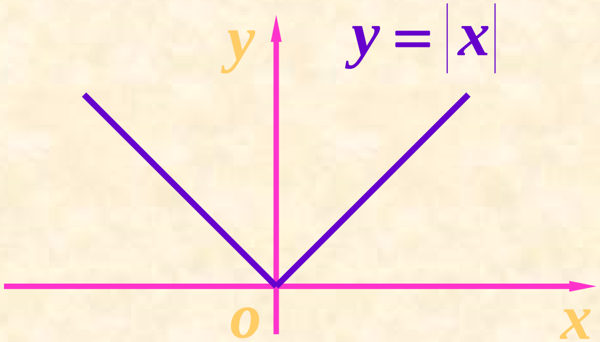
$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)}$$

例2 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h},$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$



即 $f'_+(0)\neq f'_-(0),$

$\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

1.2 导数的几何意义

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在图形上表示什么?

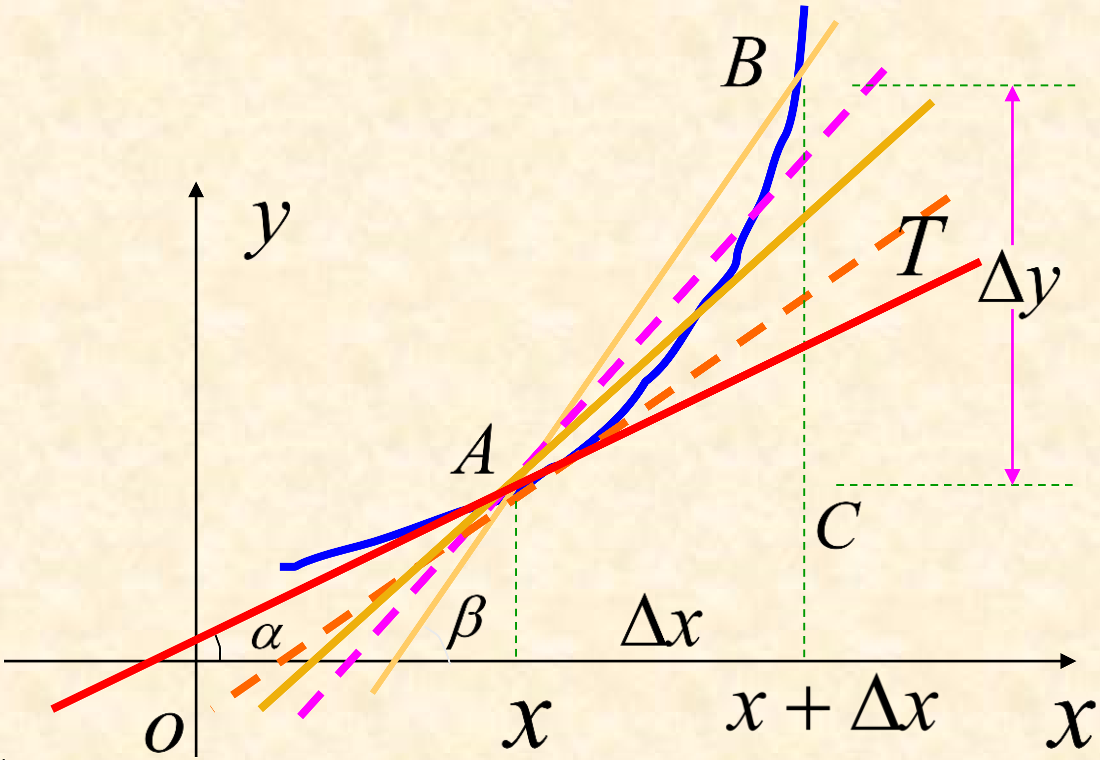
$A(x, y)$, $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = \tan\beta$$

$$\Delta x \to 0 (B \to A)$$

$$k = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \tan\alpha$$



结论：$f'(x)$ *就是曲线* $y = f(x)$*在对应点* $A(x, y)$ *处的切线的斜率*。

右侧切线斜率-------右导数

左侧切线斜率-------左导数

例3 求曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(1,1)$ 点的切线方程

解 $\Delta y=\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x^2}$

$$=\frac{x^2-(x+\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

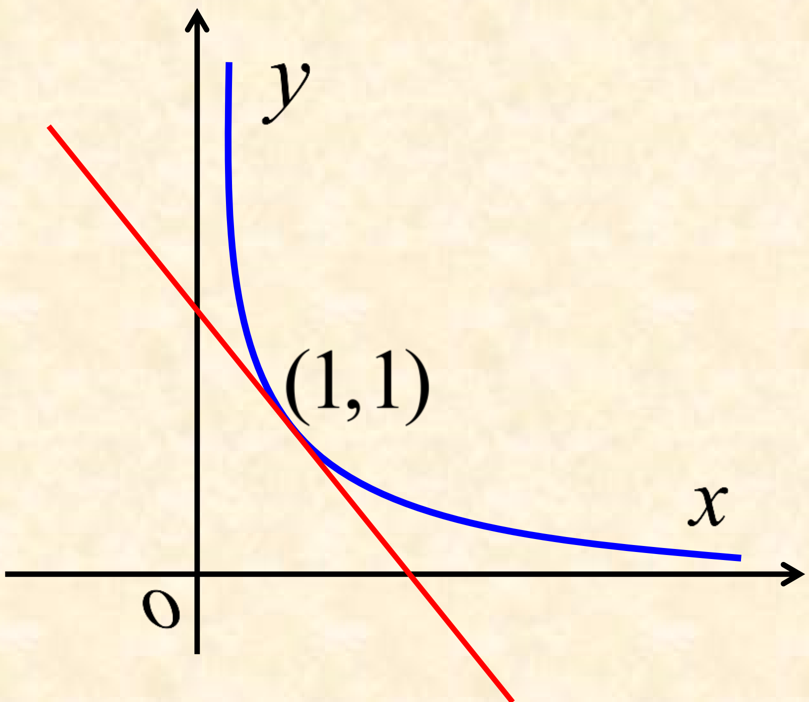
$$=\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^3}$$

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=-2$$

$$y-1=-2(x-1)$$



1.3、可导与连续的关系

定理 **可导函数都是连续函数.**

可导必连续!

证 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\because \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \alpha(\Delta x) \to 0 \; (\Delta x \to 0)$$

$$\therefore \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x] = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续 .

注意: 该定理的逆定理不成立. 连续不一定可导!

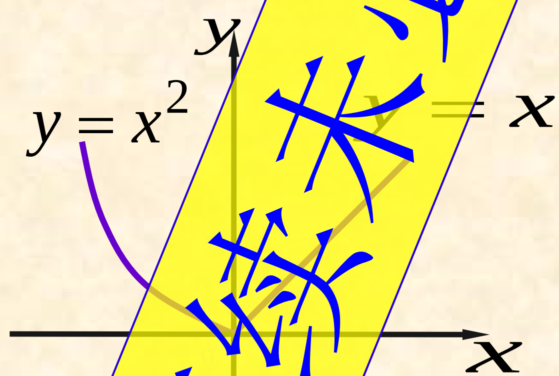
例 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.

★ 连续函数不存在导数举例

1. 函数 $f(x)$ 连续, 若 $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点, 函数在角点不可导.

例如,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases},$$



在 $x=0$ 处不可导, $x=0$ 为 $f(x)$ 的角点.

连续未必可导!

连续不一定可导！

2. 设函数 $f(x)$在点 x_0连续，但

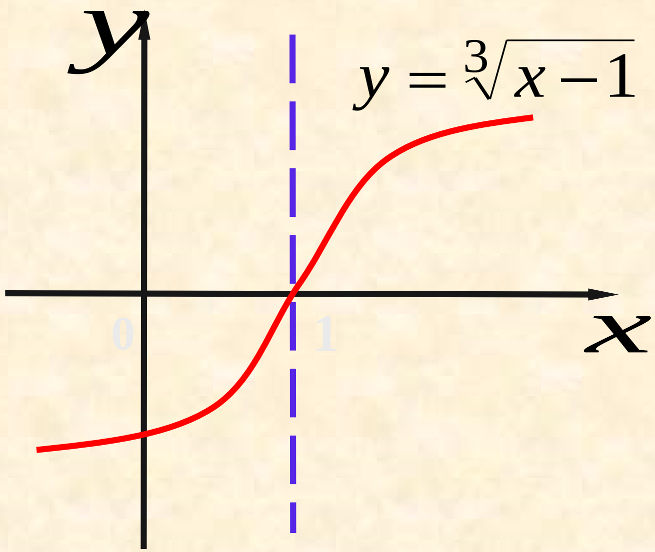
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

称函数 $f(x)$在点 x_0有无穷导数.(不可导)

例如,

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1},$$

在 $x = 1$处不可导.

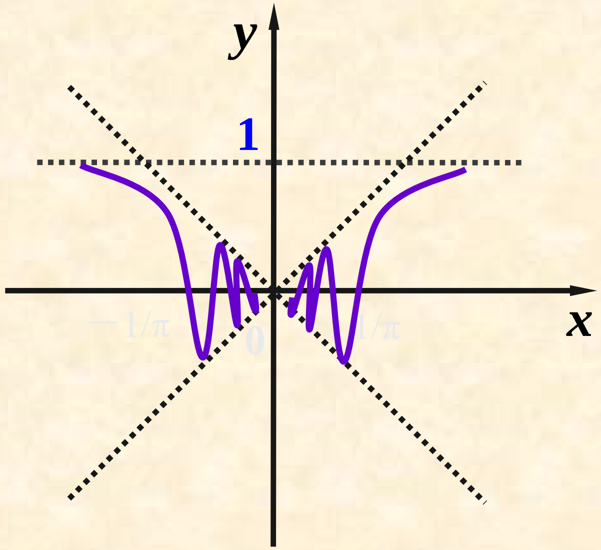


连续不一定可导！

3. 函数 $f(x)$在连续点的左右导数都不存在(指摆动不定)，则 x_0点不可导 .

例如,

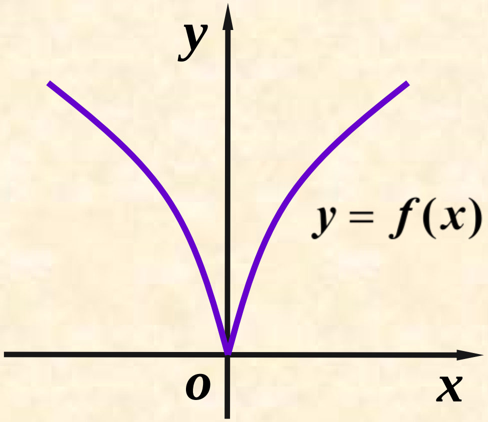
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$

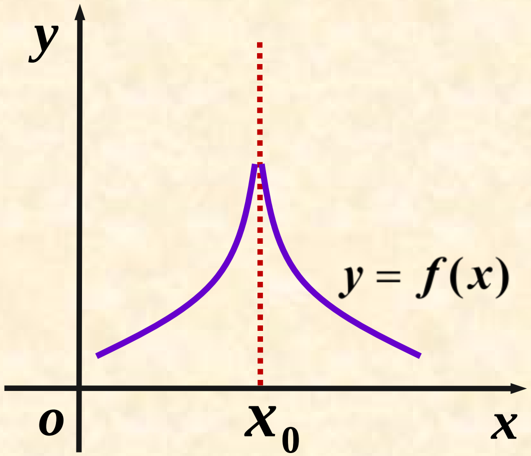


在$x=0$处不可导.

连续不一定可导！

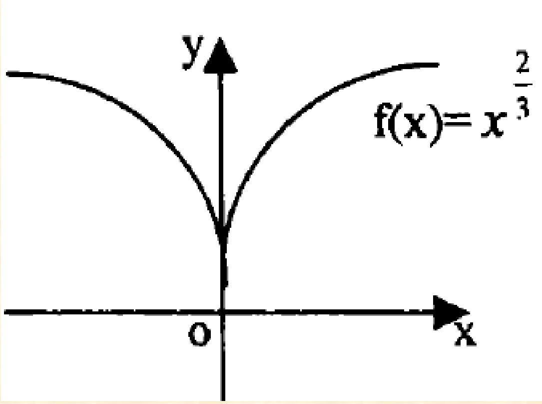
4. 若 $f'(x_0)=\infty$，且在点 x_0 的两个单侧导数符号相反，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的尖点(不可导点)．





例如，$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$，

在 $x=0$ 处不可导．



例4 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1, \end{cases}$ 为了使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应怎样选择系数 a,b?

解 首先，要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而有

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)= a+b$$

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1 \quad ,f(1)=1 \qquad \therefore \quad a+b=1$$

其次，根据左、右导数相等，有

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \qquad \therefore \quad a=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=a \qquad b=-1$$

1.4 由定义求导数

步骤:

(1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

即 $(C)' = 0.$

例 $y = x^n$，求y'

$$1.\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n$$

$$2.\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}$$

$$3.y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

例如，$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

例 $y = x^{\alpha}$，求y'

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha}\frac{\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}}{x^{\alpha}} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

令$(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha} - 1 = t$ 则 $\alpha\ln(1+\frac{\Delta x}{x}) = \ln(1+t)$. 且$\Delta x \to 0$时, $t \to 0$.

$$x^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\frac{t}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\frac{t}{\ln(1+t)}\frac{\ln(1+t)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= x^{\alpha-1}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\alpha\cdot\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$$

例 $y = x^{\alpha}$，求y'

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha}\frac{\dfrac{(x+\Delta x)^{\alpha}}{x^{\alpha}} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\frac{(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\alpha} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

令$(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\alpha} - 1 = t$ 则 $\alpha\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x}) = \ln(1+t)$. 且$\Delta x \to 0$时, $t \to 0$.

$$x^{\alpha-1}\frac{(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\alpha} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\alpha\cdot\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

$$\therefore (x^{\alpha})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

例 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

$$(e^x)'=e^x.$$

例 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}\quad=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.\qquad \boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$$

1.5　导数在科学技术中的含义—变化率

函数 $y = f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$上平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

函数在点 x_0 处的变化率

—通过平均变化率的极限来实现，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

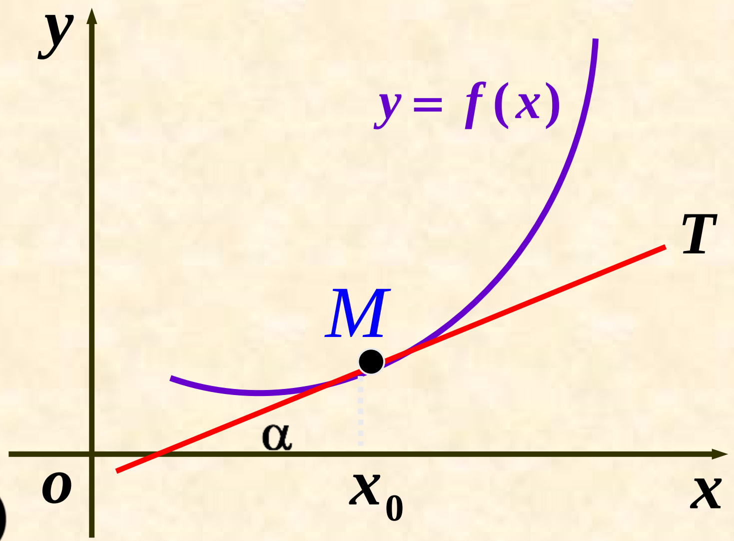
因此，物理中的***电流***、***比热***、***密度***和***功率***等都归结为相关函数的变化率问题，也就是函数在某一点的导数问题

导数相关问题举例

1.切线和法线

$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$ 在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

2.物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

（1）变速直线运动: 路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

（2）交流电路: 电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

（3）非均匀的物体: 质量对长度(面积,体积)的导数为物体在一点处的线(面,体)密度.

（4）生物种群的增长率：生物种群的数量关于时间的导数。

$$N'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}.$$

（5）经济学中的边际成本：产品的总成本关于产品数量的导数。

$$P'(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}.$$

导数的经济意义

Def　设经济函数$y=f(x)$，$x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，

则称$y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$为$f(x)$在$x=x_0$处的边际函数

边际函数　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$　$f'(x)$　y'

边际函数 $\begin{cases}\text{边际值}\\ \text{边际函数}\end{cases}$

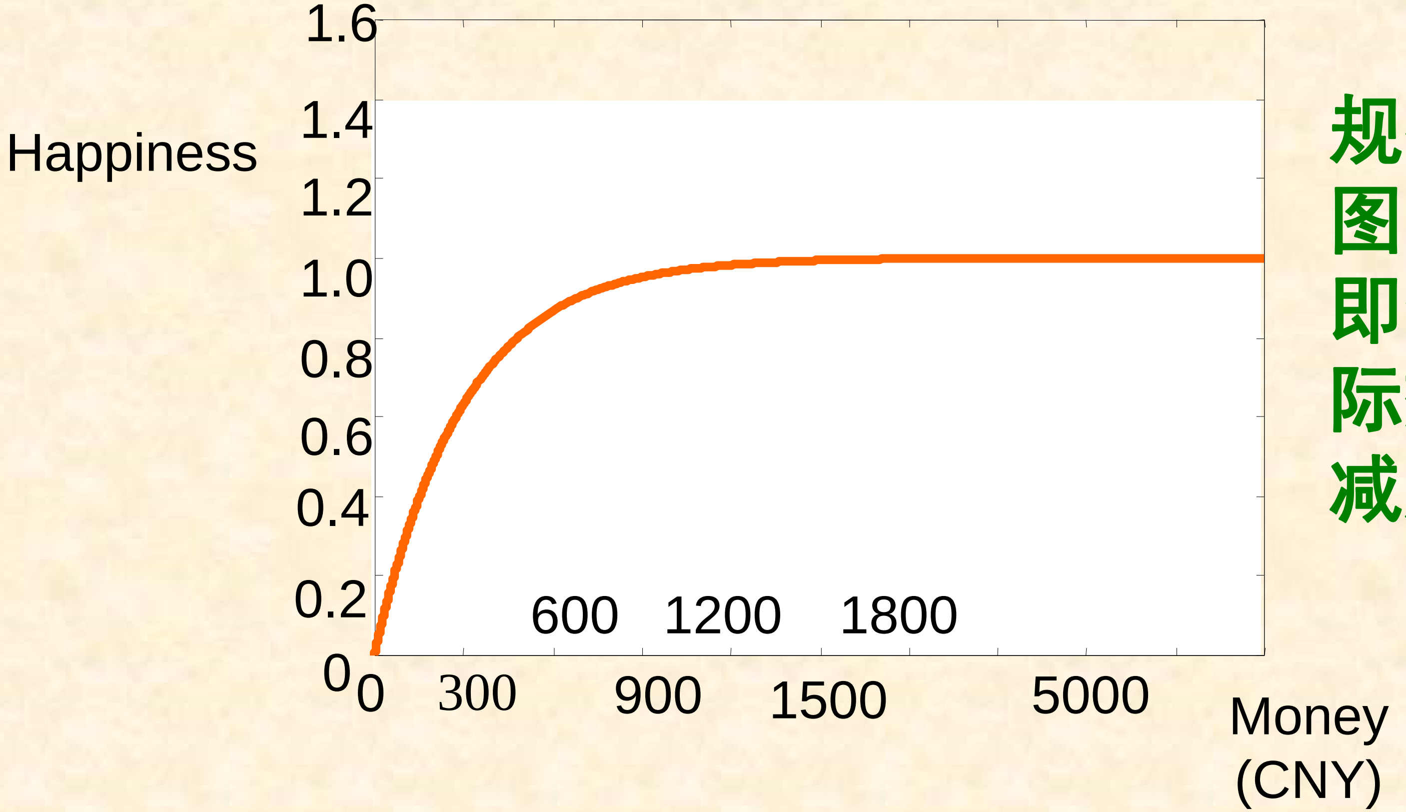
边际成本

边际利润

边际收入

（6）幸福关于金钱的边际效应：

弗恩海姆与阿盖尔合著的《金钱心理学》中说： 许多学者对金钱与幸福的关系进行了研究，他们无一例外地提出：金钱与幸福的相关性约为0. 25.



规律如左图所示，即金钱边际效应递减规律。

思考题1 下列说法可否作为$f(x)$在x_0可导的定义?

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$存在;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0+\beta h)}{h}$存在($\alpha,\beta$为常数);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)]$存在($n$为正整数);

(4) 任意$x_n\to 0, x_n\neq 0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}[f(x_0+x_n)-f(x_0)]$存在;

(5) $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$和$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$存在且相等;

思考题2 下列说法是否正确?

(1) 若$f(x)$在x_0可导,则在x_0的某邻域有界;

(2)若$f(x)$在x_0可导,则在x_0的某邻域连续;

(3)若$f(x)$在x_0右(左)可导,则在x_0右(左)连续;

思考题3 由下列条件能分别推出 $f'(a)$ 存在吗?

(1) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$在$x=a$连续;

(2) $f(x)=|x-a|\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$在$x=a$连续;

(3)$\exists\delta>0$,使$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$,$|f(x)|\leqslant L\cdot|x-a|^{\alpha}$,

L,α为正的常数.

练习1 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\le 1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$ 求常数a,b使$f(x)$处处可导.

2 设$\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\varphi'(1)=1$，又 $f(x)=\varphi(1+2x)-\varphi(1-3x)$ ，试求 $f'(0)$.

3 设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续，试讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处是否可导.

4 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 求 $f'(0)$

5 设 $f'(x)$存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，求 $f'(1)$.