思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 [1, 2] 上满足拉格朗日定理

条件, 则中值 $\xi=$ $\underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\frac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3$$

2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x)=0$

有 $\underline{\ 3\ }$ 个根, 它们分别在区间 $\underline{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)}$ 上.

2. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$, 且在 $(0,\pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

提示: 由结论可知, 只需证

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$$

即 $$\left[f(x)\sin x\right]'\Big|_{x=\xi}=0$$

设 $$F(x)=f(x)\sin x$$

验证 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理条件.

3. 若 $f(x)$ 可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

分析: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2,$

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$,验证 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理条件.

4. 试证至少存在一点 $\xi\in(1,e)$，使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

证: 法1 用柯西中值定理 . 令

$$f(x)=\sin\ln x,\quad F(x)=\ln x$$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[\,1\,,e\,]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此 $$\frac{f(e)-f(1)}{F(e)-F(1)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\quad \xi\in(1,e)$$

即 $$\sin 1=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi$$

分析: $(\,?\,)'=\cos\ln\xi$

$$\sin 1=\cos\ln\xi\iff\frac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}$$

4. 试证至少存在一点 $\xi \in (1,e)$ 使 $\sin 1 = \cos\ln\xi$.

$\left(\quad ? \quad\right)' = \cos\ln\xi - \sin 1$

$\sin\ln x \quad ? \Longrightarrow \frac{1}{x}\cos\ln x \Longrightarrow \frac{1}{x}\cos\ln x - \sin 1\cdot\frac{1}{x}$

$(\ ?\ )'$

法2 令 $f(x) = \sin\ln x - \sin 1\cdot\ln x$

则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1,e)$，使

$f'(\xi) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\cos\ln x - \sin 1\cdot\frac{1}{x}$

$\sin 1 = \cos\ln\xi$

4. 试证至少存在一点 $\xi\in(1,e)$ 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

法3

$$\sin 1=\cos\ln\xi=\sin(\frac{\pi}{2}-\ln\xi)$$

$$1=\frac{\pi}{2}-\ln\xi$$

$$\ln\xi=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\boxed{\xi=e^{\frac{\pi}{2}-1}\in(1,e)}$$

5. 设 $f(x)$在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$,

求证存在$\xi\in(0,1)$, 使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证：设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理条件,

因此至少存在$\xi\in(0,1)$, 使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即 $$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

6. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$ 证明对任意 $x_1>0, x_2>0$ 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

证: 不妨设 $0<x_1<x_2$

$$\because \quad f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)$$

$$=[f(x_1+x_2)-f(x_2)]-[f(x_1)-f(0)]$$

$$=f'(\xi_2)x_1-f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2<\xi_2<x_1+x_2, 0<\xi_1<x_1)$$

$$=x_1 f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0 \quad (\xi_1<\xi<\xi_2)$$

$$\therefore \quad f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

7、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内上连续，在 (a,b) 内可导，若 $0<a<b$，则在 (a,b) 内存在一点 ξ，使

$$af(b)-bf(a)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)](a-b).$$

分析：分子分母同时 $\div ab$

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{\dfrac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

$$h(x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(a)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

8. 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续在区间(0,1)内可导,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ f(0)=f(1)=0$$

证明: **(1)** $\exists\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, **使得** $f(\xi)=\xi$;

(2) **对** $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, **必** $\exists\eta\in(0,\xi)$: $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

证明: （1）作辅助函数 $F(x)=f(x)-x, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,

则 $F\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$, 且 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0$,

由连续函数介值定理知, $\exists\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $F(\xi)=0$,

即: $f(\xi)=\xi$.

8. 设函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在区间[0,1]上连续在区间(0,1)内可导,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ f(0)=f(1)=0$$

证明: **(1)** $\exists\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, **使得** $f(\xi)=\xi$;

(2) **对** $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, **必** $\exists\eta\in(0,\xi): f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1.$

证明: （2）作辅助函数 $G(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f(x)-x], x\in[0,\xi]$,

则由(1), 得 $G\in D\left[\frac{1}{2},1\right]$, 且 $G(0)=G(\xi)=0$,

由 Rolle 定理知, $\exists\eta\in(0,\xi)$, 使得 $G'(\eta)=0$,

整理后,即得: $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1.$

9. 设函数$f:[0,2]\to\mathbf{R}$在$[0,2]$上二阶可导,并且满足$|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1$, 证明: 在$[0,1]$上必有 $|f'(x)|\leqslant 2$.

证 任意给定$x\in[0,2]$, 将$f(2),f(0)$表示为x处的 Taylor 展开式:

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{1}{2}f''(t_1)(2-x)^2, t_1\in(x,2)$$

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(t_2)(-x)^2, t_2\in[0,x)$$

$$f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{1}{2}f''(t_1)(2-x)^2-\frac{1}{2}f''(t_2)x^2$$

由题设对任意的 $x\in[0,2], |f(x)|\leqslant 1, |f''(x)|\leqslant 1$

$$\therefore 2|f'(x)|\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(t_1)|(2-x)^2+\frac{1}{2}|f''(t_2)|x^2$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}\left[x^2+(2-x)^2\right]$$

9. 设函数$f:[0,2]\to\mathbf{R}$在$[0,2]$上二阶可导,并且满足$|f(x)|\leqslant 1$,
$|f''(x)|\leqslant 1$, 证明: 在$[0,1]$上必有 $|f'(x)|\leqslant 2$.

证: $f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{1}{2}f''(t_1)(2-x)^2-\frac{1}{2}f''(t_2)x^2$

由题设对任意的 $x\in[0,2],|f(x)|\leqslant 1,\left|f''(x)\right|\leqslant 1$

$$\therefore 2\left|f'(x)\right|\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}\left|f''\left(t_1\right)\right|(2-x)^2+\frac{1}{2}\left|f''\left(t_2\right)\right|x^2$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}\left[x^2+(2-x)^2\right]$$

因函数$g(x)=[x^2+(2-x)^2]=2[(x-1)^2+1]$

在$x=0$与$x=2$处达到最大值, 故 $2|f'(x)|\leqslant 4$,

即 $|f'(x)|\leqslant 2$.

10.设$f(x)$在[0,1]上具有二阶导数,且满足条件$|f(x)|\le a$,$|f''(x)|\le b$,其中a,b都是非负常数,c是(0,1)内任意一点,证明:$|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

泰勒公式:若$f(x)$在区间I中$n+1$阶可导,$x_0\in I$,则$\forall x\in I$,

至少存在一点ξ介于x与x_0之间,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

证明: $\forall x\in[0,1]$,由泰勒公式得:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

$$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-c)^2,0<\xi_1<c$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,c<\xi_2<1$$

10.设$f(x)$在[0,1]上具有二阶导数,且满足条件$|f(x)|\le a$,$|f''(x)|\le b$,其中a,b都是非负常数,c是(0,1)内任意一点,证明:$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$.

$$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-c)^2, 0<\xi_1<c$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, c<\xi_2<1$$

11. 设$f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且$f(1)=f(0)=0$，又$\min\limits_{x\in[0,1]}(x)=-1$.

证明：存在$c\in(0,1)$，使$|f''(c)|\geqslant 8$.

证明　设 $f(x_1)=\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1, x_1\in(0,1),\ \ f'(x_1)=0, f(x_1)=-1,$

$\because f(0)=0, f(1)=0.$ 由Taylor展开，有

$$f(0)=f(x_1)-f'(x_1)x_1+\frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,x_1)$$

$$f(1)=f(x_1)+f'(x_1)(1-x_1)+\frac{(1-x_1)^2}{2}f''(\xi_2), \xi_2\in(x_1,1)$$

$$\therefore \frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1)=1,\quad \xi_1\in(0,x_1)\qquad \frac{(1-x_1)^2}{2}f''(\xi_2)=1,\quad \xi_2\in(x_1,1)$$

由上面两式易得$f''(\xi_1)>0, f''(\xi_2)>0$

(i)若$0<x_1\leqslant\frac{1}{2}$，则由$\frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1)=1$，得

$$1=\frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1)\leqslant\frac{1}{8}f''(\xi_1),$$ 即存在ξ_1，使$f''(\xi_1)\geqslant 8$.

$$\therefore \frac{x_1^2}{2} f''(\xi_1) = 1, \quad \xi_1 \in (0, x_1) \qquad \frac{(1 - x_1)^2}{2} f''(\xi_2) = 1, \quad \xi_2 \in (x_1, 1)$$

由上面两式易得$f''(\xi_1) > 0,\ f''(\xi_2) > 0$

(i)若$0 < x_1 \leqslant \frac{1}{2}$,则由$\frac{x_1^2}{2} f''(\xi_1) = 1$,得

$$1 = \frac{x_1^2}{2} f''(\xi_1) \leqslant \frac{1}{8} f''(\xi_1),\ \text{即存在}\xi_1,\text{使}f''(\xi_1) \geqslant 8.$$

(ii)若$\frac{1}{2} \leqslant x_1 < 1$. 即$0 < 1 - x_1 \leqslant \frac{1}{2}$,则由$\frac{(1 - x_1)^2}{2} f''(\xi_2) = 1$,得

$$1 = \frac{(1 - x_1)^2}{2} f''(\xi_2) \leqslant \frac{1}{8} f''(\xi_2),\ \text{即存在}\xi_2,\text{使}f''(\xi_2) \geqslant 8.$$

总之,存在c(取ξ_1或ξ_2)$\in (0,1)$, 使$|f''(c)| \geqslant 8$.

练习

1. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$,求 y'.

2. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$, 求 y'.

3. $y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$, 求 y'.

4. 设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$, 求 y'.

例. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$,求 y'.

解: $\because\quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$\therefore\quad y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$, 求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

例. $y = e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y'．

解: $y' = (e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x) \arctan\sqrt{x^2-1}$

$$+ e^{\sin x^2} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x \right)$$

$$= 2x\cos x^2\, e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, e^{\sin x^2}$$

关键：搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

例. 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，求 y'.

解: $$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$$

$$\ln(\sqrt{1+x^2}+1)-\ln(\sqrt{1+x^2}-1)$$

例 设 $y=\dfrac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\cdot e^x}$， 求 y'.

解 等式两边取绝对值再取对数，得

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x,$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1,$$

$$\therefore\quad y'=\frac{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\cdot e^x}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right).$$

($D=(-\infty,-4)\cup(-4,+\infty)$，在 $(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$上导数存在；函数不恒正.)

例 求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数。

解 利用对数求导法

先取绝对值再取自然对数

$$\ln|y|=\frac{1}{3}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\cdot[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

解得

$$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

例 已知 $y=y(x)$ 由方程 $y^x=x^{\sin x}$ 确定， 求 y'.

解 利用对数求导法 取自然对数 ，得到

$$x\ln y=\sin x\ln x$$

再用隐函数求导法两边对 x 求导，得

$$\ln y+x\cdot\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

从而解得

$$y'=\frac{y}{x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}-\ln y)$$

例. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程组两边取微分，得

$$\begin{cases} dx = 2tdt + 2dt \\ 2tdt - dy + \varepsilon \cos y dy = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1-\varepsilon\cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}$$

例. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程组两边对 t 求导 ， 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{t} + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

例 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定了$y = f(x)$,求dy

解 $dx = 6tdt + 2dt \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{6t+2}dx = dt$

$$e^y \sin t dy + e^y \cos t dt - dy = 0 \therefore (1 - e^y \sin t) dy = e^y \cos t dt$$

$$dy = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} \cdot \frac{1}{6t+2} = \frac{e^y \cos t}{2 - y} \cdot \frac{1}{6t+2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} = \cdots = \frac{2e^2 - 3e}{4}$$

求极限有很多方法：

0、 极限的定义、有理运算法则

1、连续函数在连续的点处求极限，可将该点直接代入得极限值(连续函数的极限值就等于在该点的函数值)

2、利用恒等变形消去零因子（针对0/0型）。

3、利用无穷大与无穷小的关系求极限。

4、利用无穷小的性质求极限。

5、利用等价无穷小代换求极限。

6、利用单调有界准则求极限，也可考虑放大缩小，再用夹逼定理的方法求极限。

7、利用两个重要极限求极限。

8、利用左、右极限求极限（经常是一个间断点处求极限）。

9、利用洛必达法则求极限。

10、利用Taylor公式，Maclaurin公式求极限。

11、利用定积分概念、级数收敛的必要条件求极限。

12、…….

例: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$u\to 0$时
$\ln(1+u)\sim u$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)\ (\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan^2 x}{x^2\cdot\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan^2 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{2x-2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{4x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{4x^3}-\frac{2\tan x\,\frac{1}{\cos^2 x}}{4x^3}\right)\neq\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\,\frac{1}{\cos^2 x}}{4x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)\ (\infty-\infty)$$

$$\frac{x^2\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-1}{x^2}$$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2\cot^2 x-1}{x^2}\right)$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\frac{\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cot^2 x+x^2\cdot 2\cot x\cdot(-\csc^2 x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-x\cot x\csc^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos x\sin x-x}{x^3}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{-2}{3}$$

解法二

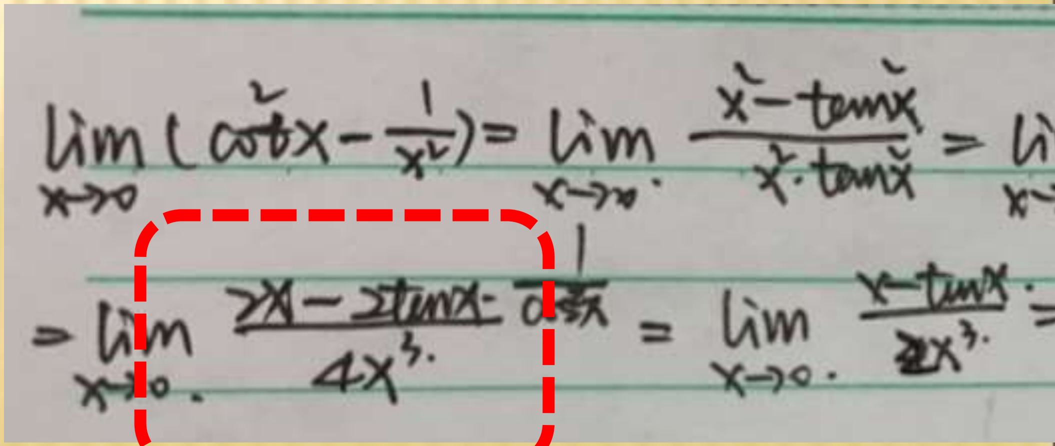
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\tan x)(x-\tan x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3\cdot\dfrac{x}{x+\tan x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\tan x)}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}\overset{(洛)}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}$$

$$=-\frac{2}{3}$$



解法三 $\lim\limits_{x\to0}(\cot^2 x-\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to0}(\frac{x^2-\tan^2 x}{x^2\tan^2 x})$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\tan^2 x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{x\cos^2 x-\tan x}{x^3}$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{x\cos^2 x-\tan x}{x^3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-x\sin^2 x-\tan x}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\tan x}{x^3}-\frac{x\sin^2 x}{x^3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3}-1)=-\frac{2}{3}$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

解法四 设法化为 $\frac{0}{0}$ 型

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-cot^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

$$=(1+1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{3}$$

练 习 题 1

1、证明等式 $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\pi}{2}$

（$x\in(0,1)$）．

2、设 $a>b>0$，$n>1$，证明

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)\ .$$

3、证明下列不等式：

(1)、 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$；

(2)、当 $x>1$ 时，$e^x>ex$ ．

4、证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根 ．

练 习 题 2

一.用洛必达法则求下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

2、$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$；

3、$\lim\limits_{x\to0} x\cot 2x$；

4、$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$；

5、$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$

6、$\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}$

7、$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^x$

二. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & 当x>0 \\ e^{-\frac{1}{2}}, & 当x\le 0\end{cases}$

在点$x=0$处的连续性.

练习题答案

一、1、$-\dfrac{1}{8}$；　2、-1；　3、$\dfrac{1}{2}$；　4、$-\dfrac{1}{2}$；　5、1；

6、1；　7、$e^{-\frac{2}{\pi}}$.

二、连续.

$f(x)$在x_0处可导 $\Longrightarrow$ $\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处连续} \\ f'(x)\text{在}x_0\text{处连续} \quad ? \\ \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\text{存在} \quad ? \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$x=0$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$; $f(x)$在$x=0$处可导.

$x\neq 0$时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$ 极限不存在

$f'(x)$在$x=0$处不连续.