Introduction

Computational Mathematics

王怀瑾

School of Mathematical Science
Xiamen University, China

2022 年 10 月 17 日

1 分数 Fourier 变换
- 背景
- 离散计算
- 应用

1 分数 Fourier 变换
- 背景
- 离散计算
- 应用

背景

1980 年，Namiass[NV80] 对分数阶 Fourier 变换 (FRFT, Fractional Fourier Transformation) 给出了严格的数学定义. 他的基本想法是把经典 Fourier 算子的全部特征值进行幂次运算，将所得结果作为一个新算子的特征值并利用 Fourier 算子的特征函数二者合一，从而构造得到与前述幂次相同的分数阶 Fourier 算子.

p 阶 FRFT 表达式为

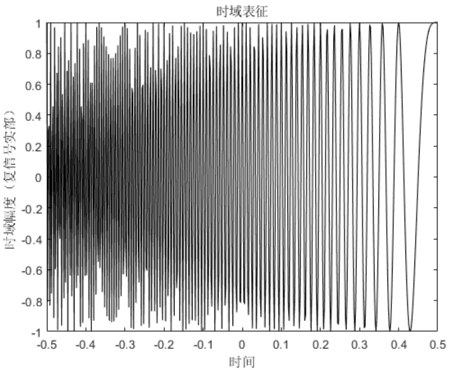
$$\mathscr{F}^p\{f(t)\} = A_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\alpha(t,u)\, dt \tag{1}$$

其中

$$A_\alpha = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}, \quad K_\alpha(t,u) = \exp\left(\frac{j\cot\alpha}{2}t^2 + \frac{j\cot\alpha}{2}u^2 - \frac{jtu}{\sin\alpha}\right)$$

这里 $\alpha = p\pi/2$ 表示分数 Fourier 变换对时频平面的旋转性质. 因此当 $p=1$, $\alpha=\pi/2$ 时，(1) 退化为 Fourier 变换.

设 Chirp 信号 $x(t)=\exp\left(-j200\pi t^2+j200\pi t\right)$, $-0.5s\le t\le 0.5s$. 以采样率 $f_s=500Hz$ 对信号进行采样.



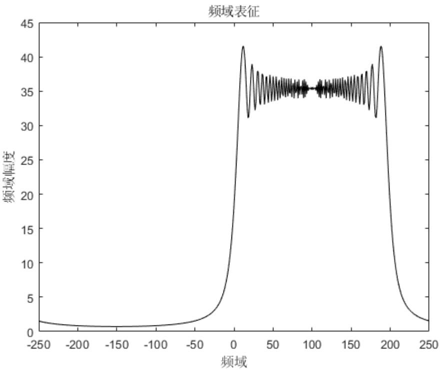


图 1: $x(t)$ 的时域和频域特征

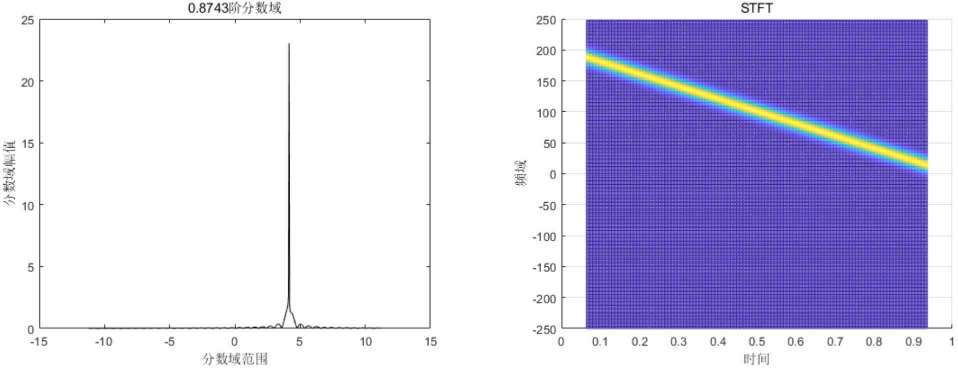


图 2: $x(t)$ 的时域和频域特征

分数 Fourier 变换的两个性质:
信号 $x(t)$ 的 Wigner-Ville Distribution (WVD)[TL16] 定义为

$$\overline{X}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau \tag{2}$$

设 $x(t)$ 的 p 阶分数 Fourier 变换为 $X_\alpha(u)=\mathscr{F}^p\{x(t)\}$, 根据 WVD 的定义 (2), 记 $\overline{X}_\alpha(u,v)$ 为 $X_\alpha(u)$ 的 WVD. 那么就有关系

$$\begin{cases} t=u\cos\alpha-v\sin\alpha \\ \omega=u\sin\alpha+v\cos\alpha \end{cases}$$

因此就有

$$\overline{X}(u\cos\alpha-v\sin\alpha, u\sin\alpha+v\cos\alpha)=\overline{X}_\alpha(u,v)$$

从而, $x(t)$ 的 WVD 经过逆时针旋转 α 之后与 $X_\alpha(u)$ 的 WVD 相同. 从这个角度可以说明, p 阶的分数 Fourier 变换相当于 α 角度的 WVD 时频平面的旋转.

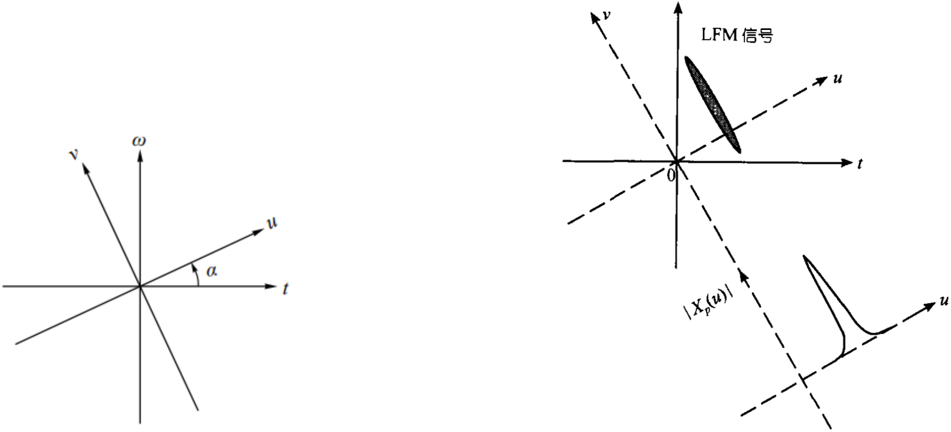


图 3: 时频平面的旋转

与 FT 的联系

不妨设 $0<\alpha<\pi$，令 $\omega_n=\frac{2\pi n\sin\alpha}{L}$，$n=-\infty,\cdots,+\infty$，$\Delta\omega=\omega_{n-1}-\omega_n=\frac{2\pi\sin\alpha}{L}$ 那么

$$\{K_{-\alpha}(t,\omega_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

构成 $L^2(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$ 的一组正交基. $\forall x(t)\in L^2(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$，则

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nK_{-\alpha}(t,\omega_n),\ \text{其中} a_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x(s)K_{-\alpha}^{*}(s,\omega_n)ds \tag{3}$$

当 $x(t)$ 的周期为 $\mathbb{R}$，此时令 $L\to\infty$，可以得到分数 Fourier 变换:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x(s)K_{-\alpha}^{*}(s,\omega_n)dsK_{-\alpha}(t,\omega_n)=\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x(s)K_{\alpha}(s,\omega_n)K_{-\alpha}(t,\omega_n)ds$$

$$=A_{\alpha}A_{-\alpha}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x(s)K_{\alpha}(s,\omega_n)K_{-\alpha}(t,\omega_n)ds\Delta\omega$$

$$\xrightarrow{L\to\infty}A_{\alpha}A_{-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(s)K_{\alpha}(s,u)K_{-\alpha}(t,u)dsdu=\mathscr{F}^{-p}\{\mathscr{F}^{p}\{x(t)\}\}$$

1 分数 Fourier 变换
- 背景
- 离散计算
- 应用

在计算 FRFT，由于 $\mathscr{F}^4$ 是一个恒等变换，那么只需要考虑 $p \in [0, 4)$ 的范围. 根据 (1)，可以知道当 p 靠近 0 或者 ± 2 时，积分核 K_α 会出现奇异. 为避免这个问题，可以把 FRFT 的变换阶次 p 限制到 $0.5 \leq p \leq 1.5$，然后对超过这个范围的 p 值进行变换操作

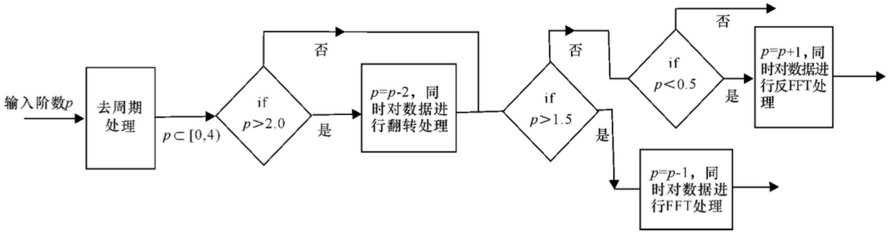


图 4: 分数阶次处理流程

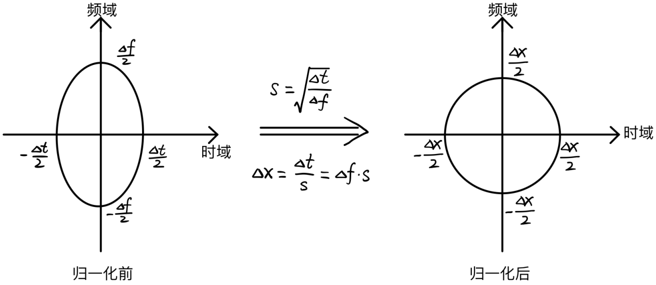
为了使得 $x(t)$ 的每一个分数域的支撑集都在相同的区间内，在进行分数 Fourier 变换之前，需要对 $x(t)$ 先进行量纲归一化. [OH96] [CHL07]

量纲归一化

设信号 $x(t)$ 的时域限制为 $[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}]$，频域限制于 $[-\frac{\Delta f}{2}, \frac{\Delta f}{2}]$. 这个假设说明在这区间内，集中了信号的大部分能量. 令 $s = \sqrt{\Delta t/\Delta f}$, 对时域和频域作变量变换

$$u_0 = \frac{t}{s}, \quad u_1 = fs \tag{4}$$

则在新坐标系下，u_0 和 u_1 轴的能量大部分集中在 $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$, 其中 $\Delta x = \sqrt{\Delta f \Delta t}$. 在新的坐标系下，信号可以取 $N = \Delta x^2$ 个采样点，以 Δx^{-1} 为间隔.[OH96]



离散 FRFT I

根据 [OH96] 提出的方法：首先，对 $x(t)$ 作用量纲归一化后，可以把 (1) 改写成

$$\mathscr{F}^{p}\{x(t)\} = A_\alpha e^{j\pi\theta u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\beta ut}\left[e^{j\pi\theta t^2} x(t)\right] dt \tag{5}$$

其中，$\alpha = \frac{\pi p}{2}$，$\theta = \cot\alpha$，$\beta = \csc\alpha$.
$x(t)$ 的时域支撑集为 $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$，对 $e^{j\pi\theta t^2} x(t)$ 进行 Shannon 插值得到

$$e^{j\pi\theta t^2} x(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{j\pi\theta\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2} x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \operatorname{sinc}\left(2\Delta x\left(t - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right) \tag{6}$$

将(6)代入(5)可以得到

$$X_\alpha(u) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^{N} \exp\left(j\pi\theta u^2 + j\pi\theta\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2 - j2\pi\beta u\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\right) x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \tag{7}$$

离散 FRFT II

对 u 离散化得

$$X_\alpha\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)=\frac{A_\alpha}{2\Delta x}\sum_{n=-N}^{N}\exp\left(j\pi\theta\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2+j\pi\theta\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2-j2\pi\beta\frac{mn}{(2\Delta x)^2}\right)x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\quad(8)$$

(8) 的直接计算需要 $\mathcal{O}(N^2)$ 的运算量. 利用 $mn=[m^2+n^2-(m-n)^2)]/2$ 改写 (8) 可以产生 $\mathcal{O}(N\log N)$ 的算法.

$$X_\alpha\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)=\frac{A_\alpha}{2\Delta x}\exp\left(j\pi(\theta-\beta)\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2\right)\sum_{n=-N}^{N}\exp\left(j\pi\beta\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2\right)\exp\left(j\pi(\theta-\beta)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right)x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\quad(9)$$

注: (9) 式可以通过 $\exp\left(j\pi\beta\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right)$ 和 $\exp\left(j\pi(\theta-\beta)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right)x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)$ 的卷积运算得到.

编程实现步骤 I

设信号 $x(t)$ 满足

$$x(t) = 0,\ \ if\ |t| > \frac{\Delta t}{2}$$

以采样率 f_s (需要满足 $f_s > \Delta f$) 进行采样得到 $N = \Delta t f_s$ 个采样点 (总可选取适当大的数使得 $\Delta t f_s$ 为平方数). 则作量纲归一化后 $\Delta x = \sqrt{\Delta t f_s}$，时域支撑集变为 $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$, 此时 $N = \Delta x^2$. (为了叙述方便，不妨假设 N 为奇数，当 Δx^2 为偶数时 $N = \Delta x^2 + 1$; 当 Δx^2 为奇数时，$N = \Delta x^2$). 采样点为:

$$x(t_n),\ \text{其中}\ t_n = \frac{n}{\Delta x},\ \ n = -\frac{N-1}{2}, \cdots, \frac{N-1}{2} \tag{10}$$

这相当于我们是对量纲归一化后的信号进行以 Δx 的采样率进行采样的. 这是满足采样定理的. 低通采样定理中的 $\Omega_p = \pi\Delta x$，从而最低采样角频率 $\omega_s = \frac{2\pi\Delta x}{\sin\alpha}$. 当考虑 $0.5 < \alpha < 1.5$ 时，可以知道

$$0.3\Delta x \cdot 2\pi < \frac{2\pi\Delta x}{\sin\alpha} < 0.6\Delta x \cdot 2\pi$$

编程实现步骤 II

下面阐述对 (9) 进行实现的步骤.
由于 (9) 中信号的采样率为 $2\Delta x$, 而我们已知的是采样率为 Δx 的信号. 因此需要获得信号的双倍采样点.

$$x\left(\frac{n}{\Delta x}\right) \Rightarrow x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)$$

其次，获取双倍采样后的信号的时域支撑集仍为 $[-\Delta x, \Delta x]$，而频域支撑集从 $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ 延拓到 $[-\Delta x, \Delta x]$，因此需要把信号的时域支撑集也延拓到 $[-\Delta x, \Delta x]$. 这么做是为了保证计算出来的分数域支撑集也包含于 $[-\Delta x, \Delta x]$. 因此需要对获取双倍采样率后的信号进行量纲归一化.
结合 (9) 可以得到基本的计算流程如下:

1. 获取双倍采样点
2. 量纲归一化
3. 与 Chirp 点乘
4. 与 Chirp 卷积
5. 与 Chirp 点乘

获取双倍采样信号 I

从采样率为 Δx 的采样信号 $x(n/\Delta x)$ 来获取采样率为 $2\Delta x$ 的采样信号

$$x\left(\frac{n}{\Delta x}\right) \Rightarrow x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)$$

这里采用的办法是对 $x(n/\Delta x)$ 进行 Shannon 插值然后按 $2\Delta x$ 的间隔取点. 因此从原来的 N 采样点扩充到 $2N-1$ 个采样点.
对 (10) 中的 N 个点进行 Shannon 插值得到:

$$Q(t) = \sum_{n} x(t_n)\mathrm{sinc}(\Delta x t - n) \tag{11}$$

$Q(t)$ 满足 $Q(t_n) = x(t_n)$. 令 $u_m = \frac{m}{2\Delta x}, m = -(N-1), \cdots, (N-1)$, 我们的目标是获得所有的 $Q(u_m)$. 因此通过 (11) 可以直接计算得到，但是这样的复杂度是 $O(N^2)$.
借助卷积的快速运算可以求得 $Q(u_m)$，可以用 $O(N\log N)$ 的复杂度实现. 先作移位变换，令 $i = \frac{N+1}{2} + n, \quad j = m + N$, 以及

获取双倍采样信号 II

$$\mathbf{p}[i]=x\left(\frac{1}{\Delta x}\left(i-\frac{N+1}{2}\right)\right),\quad \mathbf{q}[j]=Q(\frac{j-N}{2\Delta x}),\quad i=1,\cdots,N,\ j=1,\cdots,2N-1.$$

我们的目标变为获得所有的 $\mathbf{q}[j]$. 而且

$$\mathbf{q}[j]=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}[i]\mathrm{sinc}\left(\frac{j+1}{2}-i\right),\ j=1,\cdots,2N-1.$$

注意，上式不是一个卷积形式. 通过" 间隔补零" 的方式可以把它化为卷积形式，令

$$\mathbf{z}[k]=\begin{cases}\mathbf{p}\left[\dfrac{k+1}{2}\right], & k \text{ odd}\\ 0, & k \text{ even}\end{cases}\qquad \text{for } k=1,2,\cdots,2N-1$$

获取双倍采样信号 III

$$\Rightarrow \mathbf{q}[j] = \sum_{s=1}^{2N-1} \mathbf{z}[s]\mathrm{sinc}\left(\frac{j-s}{2}\right) \tag{12}$$

利用以下结论可以快速求解 (12):
设 $\mathbf{z}[n],\ n = 1, \cdots, N$ 是一组离散的向量，$f(n)$ 是连续函数 $f(t)$ 在 n 处的离散点值. 那么可以快速求解

$$\mathbf{q}[m] = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{z}[n] f(m-n), \quad m = 1, \cdots, N.$$

令 $\mathbf{y}[n] = f(n-N),\ n = 1, \cdots, 2N-1$, 则 $\mathbf{q} = (\mathbf{z} * \mathbf{y})(N : 2N-1)$, 利用 FFT 可以得到

$$\mathbf{q} = \mathrm{FFT}^{-1}\left[\mathrm{FFT}(\mathbf{z})\mathrm{FFT}(\mathbf{y})\right](N : 2N-1)$$

为延拓时域，只需要在双倍采样后的信号前后补 $N-1$ 个零.

$$\mathbf{q} \leftarrow [zeros(1, N-1),\ \mathbf{q},\ zeros(1, N-1)]$$

```
function xint=interpolation(x)
% sinc interpolation
    N = length(x);
    y = zeros(2*N-1,1);
    y(1:2:2*N-1) = x;
    xint = fconv(y(1:2*N-1), sinc([-(2*N-3):(2*N-3)]'/2));
    xint = xint(2*N-2:end-2*N+3);

function z = fconv(x,y)
% convolution by fft
    N = length([x(:);y(:)])-1;
    P = 2^nextpow2(N);
    z = ifft( fft(x,P) .* fft(y,P));
    z = z(1:N);
```

```
x = [zeros(N-1,1) ; interpolation(x) ; zeros(N-1,1)];
```

Chirp 信号的参数估计 I

设 Chirp 信号: $x(t) = a\exp(j\pi K t^2 + j2\pi f_d t + j\phi)$, 按照 (4) 对其进行量纲归一化得到 (自变量仍记为 t)

$$x(t) = a\exp\left(j\pi K s^2 t^2 + j2\pi f_d s t + j\phi\right) \tag{13}$$

此时 $x(t)$ 的各分数域的支撑集都为 $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$. 根据 (5)

$$X_\alpha(u) = A_\alpha \exp[j\pi(\cot\alpha)u^2] \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp\left[j\pi(\cot\alpha)t^2\right]\exp\left[-j2\pi(\csc\alpha)tu\right]dt \tag{14}$$

FRFT 可以看成是对信号的"旋转",选择合适的旋转角度对信号进行分数阶 Fouirer 变换, 可使信号在某一特定的分数阶 Fouirer 域上呈现出能量的聚集, 其幅度出现明显的峰值. 利用这一特性, 我们对 (α, u) 平面上进行二维搜索得到

$$\{\hat{\alpha},\ \hat{u}\} = \arg\max_{\alpha, u} |X_\alpha(u)|^2 \tag{15}$$

Chirp 信号的参数估计 II

根据 (14) 式, 以及信号 (13) 式可以知道当

$$Ks^2 + \cot\hat{\alpha} = 0, \quad f_d s - \hat{u}\csc\hat{\alpha} = 0 \tag{16}$$

时， $|X_\alpha(u)|$ 取到最大值，此时

$$X_{\hat{\alpha}}(\hat{u}) = A_{\hat{\alpha}} \exp[j\pi \cot\hat{\alpha}\,\hat{u}^2]\, a \exp(j\phi)\Delta x \tag{17}$$

利用 (16) 和 (17) 式可以得到 Chirp 信号 $x(t)$ 的各参数估计值 [QT03]

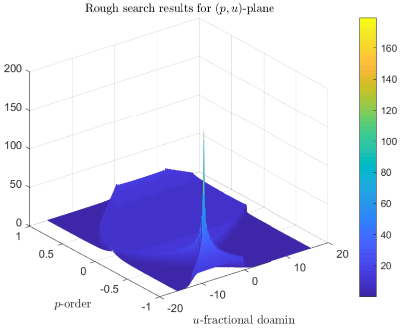
$$\begin{cases} \hat{K} = -\dfrac{\cot\hat{\alpha}}{s^2} \\ \hat{f}_d = \dfrac{\hat{u}\csc\hat{\alpha}}{s} \\ \hat{\phi} = \arg\left[\dfrac{X_{\hat{\alpha}}(\hat{u})}{A_{\hat{\alpha}}\exp(j\pi\cot\hat{\alpha}\,\hat{u}^2)}\right] \\ \hat{a} = \dfrac{|X_{\hat{\alpha}(\hat{u})}|}{\Delta x |A_{\hat{\alpha}}|} \end{cases} \tag{18}$$

数值结果

下面对 Chirp 信号

$$x(t) = a\exp\left(j\pi K t^2 + j2\pi f_d t + j\phi\right)$$

进行实验. 取 $K = 400$, $f_d = 200$, $\phi = 1$, $a = 10$, 时长 $\Delta t = 1\mathrm{s}$, 采样率 $f_s = 1000\mathrm{Hz}$.



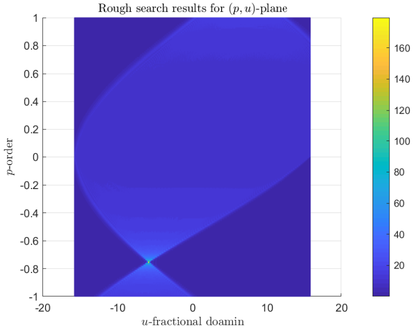


图 5: Chirp 信号 $x(t)$ 的搜索结果

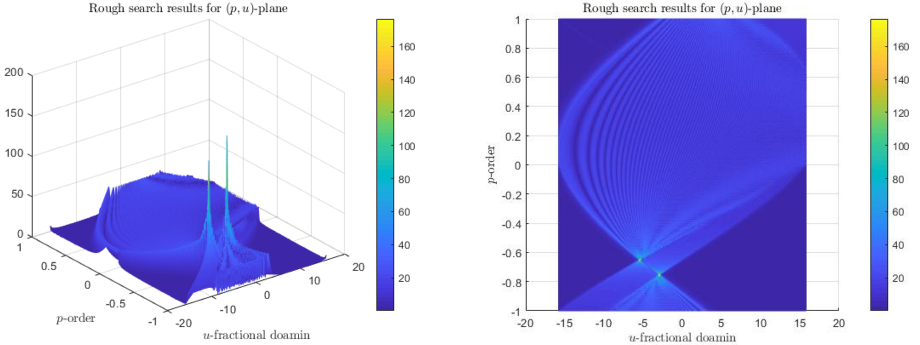


图 6: 能量相同的两个 Chirp 信号叠加的粗搜结果

设发射信号是一个二次调频信号

$$x(t) = \exp\left[j2\pi\left(\frac{A}{6}t^2 + \frac{B}{2}t + D\right)t\right] \tag{19}$$

经过延迟时间 τ 返回的是

$$x(t) = \exp\left[j2\pi\left(\frac{A}{6}(t-\tau)^3 + \frac{B}{2}(t-\tau)^2 + D(t-\tau)\right)\right] \tag{20}$$

两者混频之后形成中频信号

$$\exp\left[j\pi A\tau t^2 + j2\pi\left(B\tau - \frac{A\tau^2}{2}\right)t - j2\pi\left(\frac{A}{6}\tau^3 + \frac{B}{2}\tau^2 + D\tau\right)\right] \tag{21}$$

距离分辨率估计:

$$\Delta d = \frac{\csc^2\left[\mathrm{acot}\left(\frac{AT}{f_s}\frac{2d}{c}\right)\right]\pi}{\frac{2AT}{f_s c}}|\Delta p| \tag{22}$$

参考文献 I

[NV80] NAMIAS and VICTOR. "The Fractional Order Fourier Transform and its Application to Quantum Mechanics". In: *Geoderma* 25.3 (1980), pp. 241–265.

[OH96] Ozaktas and Haldun. "Digital computation of the fractional Fourier transform.". In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 44.9 (1996), pp. 2141–2141.

[QT03] Lin Qi and Ran Tao. "基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计". In: 中国科学 *E* 辑 33.8 (2003), pp. 749–749.

[CHL07] Peng Chen, Zhaohuan Hou, and Yihui Liang. "离散分数阶傅里叶变换快速算法的DSP 详细实现". PhD thesis. 2007.

[TL16] Xianghong Tang and Qiliang Li. 时频分析与小波变换. 科学出版社, 2016.