KALKULUS

Bagian 4. Turunan dan Integral

Sesi Online 12

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

Integral Tak Tentu

Integral merupakan operasi ***invers*** dari ***turunan***.
Jika turunan dari F(x) adalah F'(x) = ***f*(*x*),** maka
F(x) = ∫ ***f*(*x*) *dx*.**

∫ adalah lambang untuk notasi integral, ***dx*** adalah menyatakan fungsi bekerja dalam ***x***.

RUMUS DASAR :

$$\int a^n \, da = \frac{1}{n+1} a^{n+1} + c. \quad n \neq 1$$

Integral fungsi Aljabar

RUMUS DASAR :

$$\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c. \quad n \neq -1$$

Contoh :

1. $\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + c$
2. $\int 2x^2 \, dx = \frac{2}{3} x^3 + c$
3. $\int \frac{4}{5} x^3 dx = \frac{4}{5.4} x^4 + c = \frac{1}{5} x^4 + c.$

RUMUS PENGEMBANGAN :

1. $\int d(f(x)) = f(x) + c$

2. $\int k\, dx = kx + c$

3. $\int \frac{k}{x}\, dx = k \ln x + c$

4. $\int k.f(x)\, dx = k \int f(x) + c$

5. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

—

Integral fungsi Trigonometri

RUMUS DASAR :

$$\int \sin a \, da = -\cos a + c.$$
$$\int \cos a \, da = \sin a + c.$$

Contoh :

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
3. $\int \sin 2x \, dx = \int \sin 2x \, d(2x) . \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$
4. $\int \cos 5x \, dx = \int \cos 5x \, d(5x) . \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\sin 5x + c$

RUMUS-RUMUS PENGEMBANGAN :

$$1.\ \int \sin ax\ dx = -\tfrac{1}{a}\cos ax + c$$

$$2.\ \int \cos ax\ dx = \tfrac{1}{a}\sin ax + c$$

$$3.\ \int \tan x\ dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$$

$$4.\ \int \cot x\ dx = \ln\left|\sin x\right| + c$$

$$5.\ \int \sin ax\ dx = -\tfrac{1}{a}\cos ax + c.$$

$$6.\ \int \cos ax\ dx = \tfrac{1}{a}\sin x + c.$$

Universitas Siber Asia

RUMUS -RUMUS PENGEMBANGAN :

$$7. \int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + tg\ ax| + c$$

$$8. \int \operatorname{cos}ec\ ax dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{cos}ec ax - ctg\ ax| + c$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc \sin x + c$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2+1} = arc\ tgx + c$$

$$11. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc \sec x + c$$

METODE SUBTITUSI

Dalam menyelesaikan masalah integrasi pertama - tama kita mengusahakan mengubahnya menjadi bentuk rumus dasar

dengan menggunakan variabel lain (subtitusi)

Contoh :

$$1.\int 2x\,(x^2+4)^5\,dx = \ldots$$

Jawab :

$u = x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad du = 2x\,dx \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{du}{2x}$

$$\int u^5\, 2x \,\frac{du}{2x} = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}(x^2+4)^6 + c$$

$$2.\int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \ldots(\,buat\ latihan\,)$$

INTEGRAL PARSIAL

Misalkan u dan v fungsi yang differensiabel

terhadap x, maka :

$$d(u.v) = v.du + u.dv$$

$$u.dv = d(u.v) - v.du$$

$$\int u.dv = \int d(u.v) - \int v.du$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

yang perlu diperhatikan pada metode ini adalah :

(1). Bagian yang terpilih sebagai dv harus mudah diintegral.

(2). $\int v\,du$ harus lebih mudah dari $\int u.dv$

Contoh :

$$\int \ln x \, dx$$

Jawab : $= \int u.dv$

$$u = \ln x$$

dv = dx $\qquad du = \frac{1}{x} dx$

v = x

Jadi :

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Sebuah polinom dalam x adalah sebuah fungsi berbentuk :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Fungsi H(x) disebut fungsi rasional jika :

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dimana P(x) dan Q(x) adalah polinom

Jika derajat P(x) lebih rendah dari derajat Q(x), maka H(x) disebut "Rasional Sejati"

Contoh :

$$H(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 - x + 2}$$

Sedangkan jika derajat P(x) lebih tinggi dari derajat Q(x), maka H(x) disebut “Rasional Tidak Sejati”

Contoh :

$$H(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

Untuk menyelesaikan integral dalam bentuk fungsi rasional, $\frac{P(x)}{Q(x)}$: ditulis sebagai jumlah dari bagian yang lebih sederhana dengan menguraikan Q(x) dalam hasil kali faktor-faktor linier atau kuadratis, yaitu :

1. Faktor Q(x) semua linier dan tak berulang,

$$Q(x) = (x + a_1)(x + a_2).....(x + a_n)$$

, maka :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x + a_1)} + \frac{A_2}{(x + a_2)} + ... + \frac{A_n}{(x + a_n)}$$

2. Faktor Q(x) semua linier berulang,

$$Q(x) = (x + a)^n$$

, maka :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x + a)} + \frac{A_2}{(x + a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x + a)^n}$$

3. Q(x) adalah kuadratis,

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f)$$

, maka :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{Cx + D}{(dx^2 + ex + f)}$$

contoh :

$$1.\int \frac{(x-1)}{x^2-x-2}dx = ...$$

jawab :

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

x = 2 $\rightarrow$ 2 – 1 = A(2+1)

1 = 3A $\rightarrow$ A = 1/3

x = -1 $\rightarrow$ -1 – 1 = B(-1-2)

-2= -3B $\rightarrow$ B = 2/3

Jadi,

$$\int \frac{(x-1)}{x^2-x-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + c$$

Universitas Siber Asia

$$2.\int \frac{(x+1)}{x^2-2x+1}\,dx = ...$$

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

x = 1 $\rightarrow$ 1 + 1 = B $\rightarrow$ B = 2

mis, x = 0 $\rightarrow$ 0 +1 = A(0 – 1) + B

1 = - A + 2 $\rightarrow$ A = 1

Jadi,

$$\int \frac{(x+1)}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)} + c$$

SUBTITUSI TRIGONOMETRI

,

Jika Integran mengandung salah satu dari bentuk :

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2},\ \sqrt{a^2 + b^2x^2}, atau\ \sqrt{b^2x^2 - a^2}$$

dan tidak memiliki faktor irrasional lainnya, maka dapat ditransformasikan ke dalam fungsi trigonometri dengan menggunakan variabel baru :

Bentuk	Subtitusi	Memperoleh
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\sin z$	$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = a\cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b} tg\ z$	$\sqrt{a^2 + b^2x^2} = a\sec z$
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b}\sec z$	$\sqrt{b^2x^2 - a^2} = a\, tg\ z$

Universitas Siber Asia

contoh :

$$1.\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx = ...$$

jawab :

$$x = \frac{3}{2}\sin z \quad \rightarrow \quad dx = \frac{3}{2}\cos z dz \qquad \sqrt{9-4x^2} = 3\cos z$$

,

Jadi,

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{3\cos z}{\frac{3}{2}\sin z}\left(\frac{3}{2}\cos z\,dz\right) = 3\int \frac{\cos^2 z}{\sin z}\,dz$$

$$3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z}dz = \quad 3\int \cos ec\, z\, dz - 3\int \sin z\, dz$$

= 3 ln |cosec z – ctg z| + 3 cos z + c

$$= 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + c$$

Universitas Siber Asia

$$2.\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = ...$$

jawab :

,

$$x = 2\,tg\;z \quad \rightarrow \quad dx = 2\sec^2 z dz \qquad \sqrt{4+x^2} = 2\sec z$$

Jadi,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 z}{(4tg^2 z)(2\sec z)}dz = \int \frac{\cos z}{4\sin^2 z}dz$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{d(\sin z)}{\sin^2 z} = -\frac{1}{4\sin z} + c = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$