

# KALKULUS

Bagian 3. Fungsi dan Limit

Sesi Online 7

Limit Tak Hingga

PROGRAM STUDI INFORMATIKA  
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

## Limit Tak Hingga

Misal  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

(i)  $+\infty$ , jika  $L > 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah atas

(ii)  $-\infty$ , jika  $L > 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah bawah

(iii)  $+\infty$ , jika  $L < 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah bawah

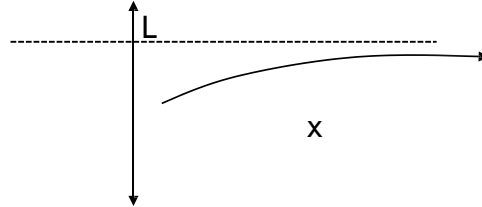
(iv)  $-\infty$ , jika  $L < 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah atas

**Ctt :**  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah atas maksudnya  $g(x)$  menuju 0 dari nilai  $g(x)$  positif.

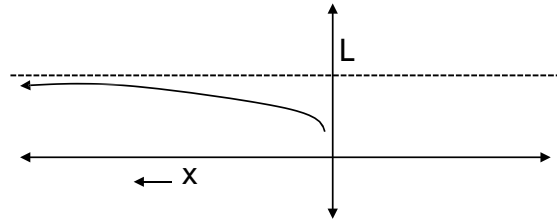
$g(x) \rightarrow 0$  dari arah bawah maksudnya  $g(x)$  menuju 0 dari nilai  $g(x)$  negatif.

# Limit di Tak Hingga

- a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  jika  $f(x)$  terdefinisikan untuk setiap nilai  $x$  cukup besar (arah positif) dan jika  $x$  menjadi besar tak terbatas (arah positif) maka  $f(x)$  mendekati  $L$ .



- b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  jika  $f(x)$  terdefinisikan untuk setiap nilai  $x$  cukup besar (arah negatif) dan jika  $x$  menjadi besar tak terbatas (arah negatif) maka  $f(x)$  mendekati  $L$ .



## Contoh

Hitunglah limit berikut ini!

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 2x + 2}$

e.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 3}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+1}{2x+10}$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2}{2x^2 + 3x}$

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{\infty} = 0$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+1}{2x+10} = \frac{\infty}{\infty}$  (tak tentu).

Untuk menyelesaikannya, kita bagi dengan pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebutnya, yaitu  $x$  sehingga diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{10}{x}} = \frac{6+0}{2+0} = 3$$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 2x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$  (tak tentu)

Untuk menyelesaikannya, kita bagi dengan pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebutnya, yaitu  $x^2$  sehingga diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{0}{1-0+0}}{1-0+0} = 0$$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2}{2x^2 + 3x} = \frac{\infty}{\infty}$  (bentuk tak tentu)

Untuk menyelesaikannya, kita bagi dengan pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebutnya, yaitu  $x^2$  sehingga diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-6}{2 + 0} = -3$$

e.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty}$  (tak tentu)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}} = \frac{1}{0 + 0} = \infty$$

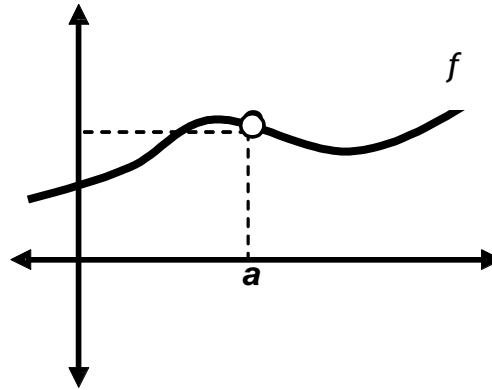
# Kekontinuan Fungsi

Fungsi  $f(x)$  dikatakan **kontinu** pada suatu titik  $x = a$  jika

- (i)  $f(a)$  terdefinisi
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika paling kurang salah satu syarat diatas tidak dipenuhi maka  $f$  dikatakan tidak kontinu di  $x=a$

## Contoh



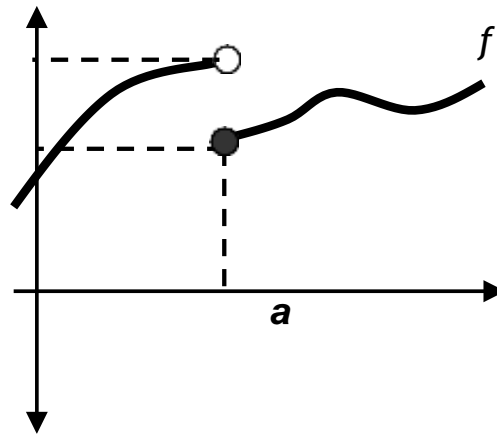
$f(a)$  tidak terdefinisi



$f(a)$  tidak kontinu di  $x = a$



## Contoh

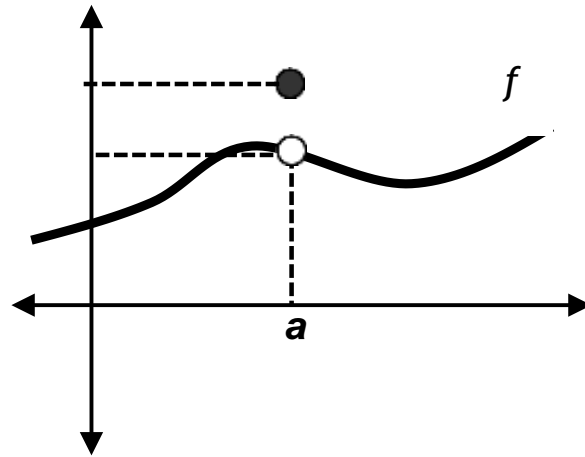


$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ tidak ada}$$



$f(x)$  tidak kontinu di  $x = a$

## Contoh

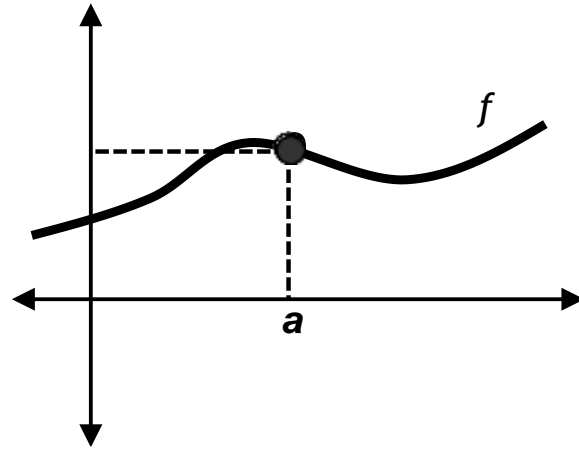


1.  $f(a)$  terdefinisi
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$



$f(x)$  tidak kontinu di  $x = a$

## Contoh



1.  $f(a)$  terdefinisi
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



$f(x)$  kontinu di  $x = a$

Periksa apakah fungsi berikut kontinu di  $x=2$ , jika tidak sebutkan alasannya

a.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$       b.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$       c.  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

Jawab :

a. Fungsi tidak terdefinisi di  $x=2$  (bentuk  $0/0$ )



$f(x)$  tidak kontinu di  $x=2$

b.  $f(2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$



Karena limit tidak sama dengan nilai fungsi, maka  $f(x)$  **tidak kontinu di  $x=2$**

c. 1  $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

2  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 1 = 3 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

3  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Karena semua syarat dipenuhi  $\rightarrow f(x)$  kontinu di  $x=2$

## Latihan Soal

- 1 Tentukan apakah  $f(x)$  kontinu di  $x = 1$  dan  $x = 3$  jika diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 1 \\ 5, & 1 < x \leq 3 \\ 3x^2 - 1, & x > 3 \end{cases}$$

- 2 Diketahui fungsi  $g(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & 1 < x \leq 3 \\ x^2 - 9, & x > 3 \end{cases}$ .

Selidiki apakah  $g(x)$  kontinu di

- a.  $x = 1$   
b.  $x = 3$