

## KALKULUS

Bagian 3. Fungsi dan Limit

Sesi Online 6

PROGRAM STUDI INFORMATIKA  
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

## Limit Sepihak (Limit Kiri dan Limit Kanan)

---

$$x \rightarrow c$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

Jika  $x$  menuju  $c$  dari arah kiri  
(dari arah bilangan yang lebih kecil dari  $c$ )  
limit disebut limit kiri,

---

$$c \leftarrow x$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Jika  $x$  menuju  $c$  dari arah kanan  
(dari arah bilangan yang lebih besar dari  $c$ )  
limit disebut limit kanan,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Jika  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  Maka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  tidak ada

## Contoh

Diketahui fungsi berikut:  $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \leq -1 \\ x^2 & ; -1 < x < 2 \\ -x+3 & ; -x \geq 2 \end{cases}$ . Tentukanlah:

a.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**Jawab**

- a. Perhatikan untuk  $x$  menuju  $-1$  dari kiri aturan fungsi yang digunakan adalah  $x+2$  sedangkan untuk  $x$  menuju  $-1$  dari kanan aturan fungsi yang digunakan adalah  $x^2$ . Oleh karena itu, untuk mencari  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  digunakan limit sepihak (limit kiri dan limit kanan)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+2) = -1+2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

## Solusi

- b. Perhatikan untuk  $x$  menuju 2 dari kiri aturan fungsi yang digunakan adalah  $x^2$  sedangkan untuk  $x$  menuju 2 dari kanan aturan fungsi yang digunakan adalah  $-x + 3$ . Oleh karena itu, untuk mencari  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  digunakan limit sepihak

(limit kiri dan limit kanan)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 3) = -2 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ tidak ada}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \leq -1 \\ x^2 & ; -1 < x < 2 \\ -x+3 & ; -x \geq 2 \end{cases}$$

## Contoh

Diketahui:  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

- a. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
b. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
c. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- } Jika ada

**Jawab**

- a. Karena aturan fungsi berubah di  $x=1$ , maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di  $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

## Solusi

b ● Karena aturan fungsi berubah di  $x=1$ , maka perlu dicari limit

kiri dan limit kanan di  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 + x^2 = 3$$

Karena  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  maka

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  Tidak ada

c. Karena aturan fungsi **tidak berubah** di  $x=2$ , maka **tidak perlu** dicari limit kiri dan limit kanan di  $x=2$

## Latihan Soal

1. Diketahui:  $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ , tentukan apakah  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(jika ada)!

2. Diketahui:  $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 + x^2 & x > 1 \end{cases}$ , tentukan apakah

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  dan  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (jika ada)!

3. Diketahui:  $f(x) = \begin{cases} -x - 2; & x < -1 \\ -x^2; & -1 \leq x < 1 \\ 1 + x^2; & x \geq 1 \end{cases}$ , tentukan apakah

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  dan  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (jika ada)!

## Latihan Soal

4. Diketahui:  $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \leq 1 \\ 5, & 1 < x \leq 3 \\ 3x^2 - 1, & x > 3 \end{cases}$ , tentukan apakah  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  dan

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  (jika ada)!

5. Diketahui:  $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \leq 1 \\ 5, & 1 < x \leq 3 \\ x^2 - 1, & x > 3 \end{cases}$ , tentukan apakah  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

dan  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  (jika ada)!