KALKULUS

Bagian 4. Turunan dan Integral

Sesi Online 9

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

Universitas Siber Asia

Capaian Pembelajaran :

- Mahasiswa mampu menerapkan definisi turunan dalam menyelesaikan permasalahan diferensial

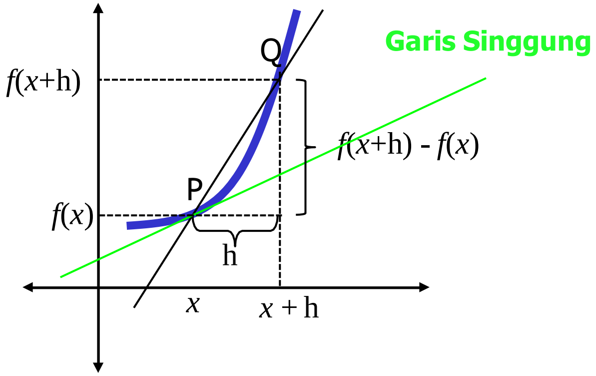
Pokok Bahasan :

Garis singgung dan Turunan Fungsi

Arti Geometris Dari Kemiringan Garis Singgung Pada Suatu Kurva

Kemiringan garis potong PQ
P {x, f(x)}
Q {(x+h), f(x+h)}

$$m_{PQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$



Jika $x+h \rightarrow x$, maka tali busur PQ akan berubah menjadi garis singgung di titik P dgn kemiringan

$$m = \lim_{x+h \to x} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan Fungsi

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Turunan pertama dari fungsi f di titik c ditulis $f'(c)$ didefinisikan sebagai:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limitnya ada.

Dengan penggantian $x = c + h$, jika $x \to c \Leftrightarrow h \to 0$ dan $x - c = h$, turunan fungsi f di c dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Contoh

Hitunglah $f'(2)$ jika $f(x) = 2x$

Jawab

$f(x) = 2x$

(i) $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 2(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} 2 = 2$$

(ii) $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h) - 2(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 2h - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$

CONTOH

Posisi partikel diberikan oleh persamaan gerak $f(t) = \frac{1}{1+t}$ dengan t diukur dalam detik dan f(t) dalam meter. Carilah :

a. Turunan f(t) terhadap t
b. Kemiringan garis singgung pada grafik dari $f(t) = \frac{1}{1+t}$ di t=2
c. Kecepatan partikel setelah 2 detik

Penyelesaian :

a.

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+(t+h)} - \frac{1}{1+t}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+t-(1+t+h)}{h(1+t+h)(1+t)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(1+t+h)(1+t)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(1+t+h)(1+t)} = \frac{-1}{(1+t)^2}
\end{aligned}
$$

Universitas Siber Asia

- Kemiringan garis singgung pada grafik dari $f(t)$ di t=2 adalah $f'(2)$

$$f'(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$$
$$f'(2) = \frac{-1}{(1+2)^2} = -\frac{1}{9}$$

- Kecepatan partikel setelah 2 detik adalah $f'(2)$ → sama dengan jawaban sebelumnya

Turunan Sepihak (Turunan kiri dan kanan)

- Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $(a, c]$. Turunan kiri dari fungsi f di c, ditulis $f'_{-}(c)$ didefinisikan sebagai:

$$f'_{-}(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ atau } f'_{-}(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

bila limitnya ada

- Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $(c, b]$. Turunan kanan dari fungsi f di c, ditulis $f'_{+}(c)$ didefinisikan sebagai:

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ atau } f'_{+}(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

bila limitnya ada

- Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat titik c. Fungsi f terdiferensialkan (mempunyai turunan) di titik c jika dan hanya jika $f'_{-}(c) = f'_{+}(c)$

Contoh

Selidiki apakah $f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ mempunyai turunan di $x = 0$!

Jawab

- Turunan kiri fungsi f di $x = 0$ adalah sebagai berikut:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

- Turunan kanan fungsi f di $x = 0$ adalah sebagai berikut:

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} (1) = 1$$

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0) \Rightarrow f(x) \text{ tidak mempunyai turunan di } x = 0$$

Keterdiferensialan dan Kekontinuan

- Jika f mempunyai turunan di c , maka f kontinu di c.
- Jika $f(x)$ tidak kontinu di c maka f tidak mempunyai turunan di c.
- Dengan kata lain kekontinuan adalah syarat perlu untuk keterdiferensialan.
- Artinya, Jika f kontinu di c, maka belum tentu f diferensiabel di c. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh

Tunjukkan bahwa $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$ kontinu di $x = 1$

tetapi tidak diferensiabel di $x = 1$

Jawab :

1. Akan ditunjukkan bahwa f kontinu di $x = 1$

- $f(1) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x+1) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$
- Jadi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$
- Jadi $f(x) = |x-1|$ kontinu di $x = 1$

Solusi

2. Selanjutnya selidiki apakah *f(x)* diferensiabel di $x = 1$ atau $f'_{-}(1) = f'_{+}(1)$?

- $$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1| - |0|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$
- $$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1| - |0|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Karena $f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$ maka $f(x) = |x-1|$ tidak diferensiabel di $x = 1$

Latihan Soal

Periksalah apakah fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan

a. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$ $;x = 1$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ \sin x + 1, & x \ge 0 \end{cases}$ $;x = 0$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jika } x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1 + x^2, & \text{jika } x \ge 1 \end{cases}$ $;x = 0 \text{ dan } x = 1$