

KALKULUS

Bagian 2. Sistem Bilangan

Sesi Online 3

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

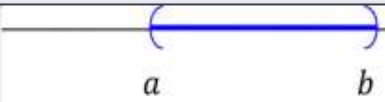
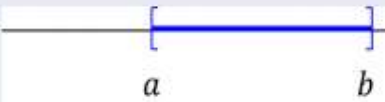
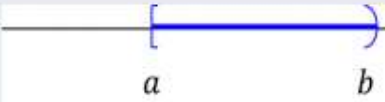
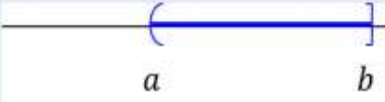
Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T






Interval

Definisi (Interval)

Interval adalah himpunan bilangan real yang didefinisikan dan dilambangkan sebagai berikut.

Penulisan Himpunan	Penulisan Interval	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	

Definisi (Interval)

Penulisan Himpunan	Penulisan Interval	Grafik
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	

Catatan: ∞ dan $-\infty$ bukan bilangan real.

Gabungan dan Irisan

Definisi

Misalkan A dan B merupakan interval.

- 1 $A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}.$
- 2 $A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}.$

Contoh

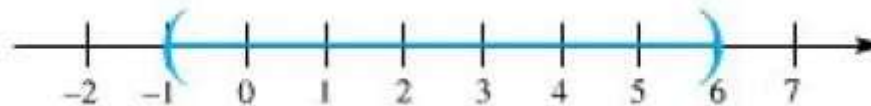
Diketahui $A = [2, \infty)$, $B = (-\infty, 3)$, $C = (-5, 1)$, dan $D = [0, 4]$.
Tentukan

- 1 $A \cup B$ dan $A \cap B$.
- 2 $A \cap C$ dan $B \cap C$.
- 3 $(C \cap D) \cup A$ dan $(A \cap D) \cup B$.
- 4 $B \cap (A \cup D)$.

Interval

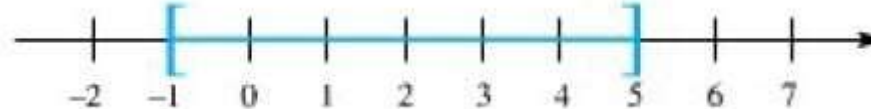
- ❑ Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan akan dapat dinyatakan dalam notasi himpunan maupun dalam bentuk interval.
- ❑ Himpunan penyelesaian $\{x \mid a < x < b\}$ dapat ditulis dengan (a, b)
 - ❑ yang menunjukkan **interval terbuka** yang terdiri semua bilangan real antara a dan b , tidak termasuk titik-titik ujung a dan b .

- ❑ Contoh: $(-1, 6) = \{x \mid -1 < x < 6\}$





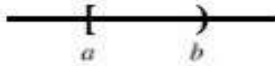






- ❑ Himpunan penyelesaian $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ dapat ditulis dengan $[a, b]$
 - ❑ yang menunjukkan **interval tertutup** yang terdiri semua bilangan real antara a dan b , termasuk titik-titik ujung a dan b .

- ❑ Contoh: $[-1, 5] = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$



Interval

Tabel berikut menunjukkan beberapa macam interval:

Notasi Himpunan	Notasi Selang	Grafik
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x \mid x > a\}$	(a, ∞)	
\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	

❓ Contoh pertidaksamaan sederhana:

(i) $3x - 18 > 9$

(iv) $x^2 - x - 6 \leq 0$

(ii) $-5 < 2x + 6 < 4$

(v) $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$

(iii) $3x + 7 > 5x - 9$

(vi) $\frac{x - 1}{x + 2} > 0$

❓ Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertidaksamaan itu berlaku. Berbeda dengan persamaan, yang himpunan pemecahannya umumnya terdiri dari satu bilangan atau mungkin sejumlah bilangan berhingga, himpunan pemecahan suatu pertidaksamaan biasanya terdiri dari suatu **interval** bilangan atau gabungan dari beberapa interval bilangan.

Pertidaksamaan

Definisi (Pertidaksamaan)

Pertidaksamaan adalah pernyataan matematik yang memuat salah satu relasi urutan $<$, $>$, \leq , atau \geq .

Definisi (Penyelesaian pertidaksamaan)

Penyelesaian pertidaksamaan adalah semua bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

Menyelesaikan pertidaksamaan:

dengan sifat urutan

dengan garis bilangan bertanda

Menyelesaikan Pertidaksamaan

- Prosedur menyelesaikan pertidaksamaan adalah mengubah pertidaksamaan satu langkah demi satu langkah hingga diperoleh himpunan penyelesaiannya jelas.
- Dapat dilakukan operasi-operasi tertentu (tambah, kurang, kali, bagi, akar, pangkat) pada kedua ruas pada suatu pertidaksamaan. Perlakuan pada kedua ruas harus sama.
 - *Ingat! Tidak ada operasi coret dalam operasi hitung. Itu hanya istilah teknik/cara saja*
- Contohnya:
- Kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan suatu bilangan
- Kedua ruas dikali atau dibagi dengan suatu bilangan positif
- Jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilangan negatif, tanda pertidaksamaan harus berbalik arah

Contoh 1 :

Selesaikan pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$ dan tunjukkan garis bilangan himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

$$2x - 7 < 4x - 2$$

$$2x < 4x - 2 + 7 \quad (\text{kedua ruas ditambah } 7)$$

$$2x - 4x < 5 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 4x \text{ atau ditambah } -4x)$$

$$-2x < 5$$

$$x > -5/2 \quad (\text{kedua ruas dibagi } -2 \text{ atau dikali } -1/2)$$

Himpunan penyelesaiannya = $\{x \mid x > -5/2\}$ atau

ditulis dalam bentuk interval $(-5/2, \infty)$ atau dapat juga ditunjukkan dengan garis bilangan



Contoh 2:

Selesaikan pertidaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$ dan tunjukkan garis bilangan himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian:

$$-5 \leq 2x + 6 < 4$$

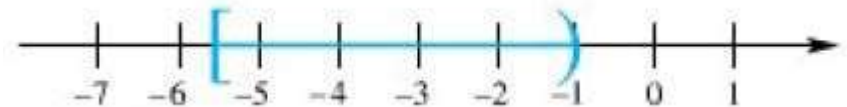
$$-5 - 6 \leq 2x < 4 - 6 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 6)$$

$$-11 \leq 2x < -2$$

$$-\frac{11}{2} \leq x < -2/2 \quad (\text{kedua ruas dibagi } -2 \text{ atau dikali } -1/2)$$

$$-\frac{11}{2} \leq x < -1$$

Himpunan penyelesaiannya = $\{x \mid -11/2 \leq x < -1\}$ atau



ditulis dalam bentuk interval $[-11/2, -1)$ atau dapat juga ditunjukkan dengan garis bilangan

Contoh 3 :

Selesaikan pertidaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$

Penyelesaian:

Pertama, pindahkan semua suku bukan nol ke salah satu ruas dan faktorkan.

$$x^2 - x < 6 \quad (\text{dikurangi } 6)$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad (\text{faktorkan})$$

$$(x + 2)(x - 3) < 0$$

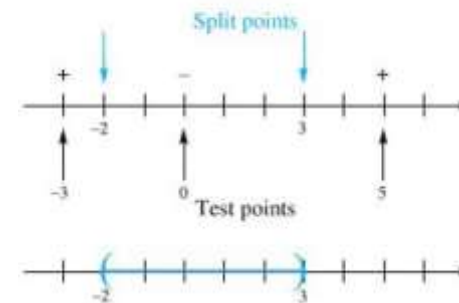
Ingat bahwa,

$x - a$ bernilai positif untuk $x > a$ dan bernilai negatif untuk $x < a$

Berdasarkan hasil uji titik tersebut, maka himpunan penyelesaiannya adalah

$\{x \mid -2 < x < 3\}$ atau ditulis $(-2, 3)$

Test Point	Sign of $(x - 3)$	Sign of $(x + 2)$	Sign of $(x - 3)(x + 2)$
-3	-	-	+
0	-	+	-
5	+	+	+



Contoh 4 :

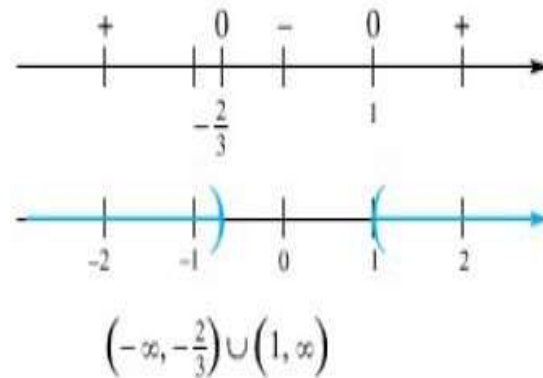
Selesaikan pertidaksamaan kuadrat $3x^2 - x - 2 > 0$

Penyelesaian:

Karena, $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2) = 3(x - 1)(x + 2/3)$ Jadi, titik pemisahnya adalah 1 dan $-2/3$

Bisa dipilih titik uji $x = -1$, $x = 0$, dan $x = 2$ Diperoleh informasi seperti

gambar di samping:



Berdasarkan hasil uji titik tersebut, maka

himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -2/3 \cup x > 1\}$ atau ditulis dalam interval $(-\infty, -2/3) \cup (1, \infty)$

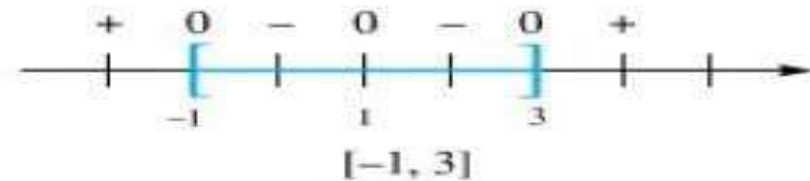
Contoh 5 :

Selesaikan pertidaksamaan $(x + 1) (x - 1)^2 (x - 3) \leq 0$

Penyelesaian:

Amati, hasil bagi tersebut berubah tanda pada $x = -1$, 1 , dan 3 Dapat diambil titik uji $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, dan $x = 4$.

Berdasarkan hasil uji titik tersebut diperoleh



Berdasarkan hasil uji titik tersebut diperoleh himpunan penyelesaian = $[-1, 1] \cup [1, 3] = [-1, 3]$

Contoh 6 :

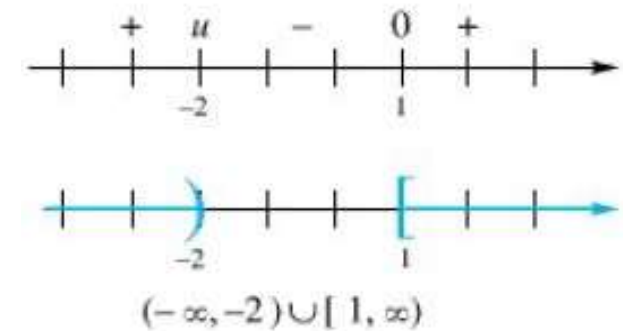
Selesaikan pertidaksamaan

Penyelesaian:

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

Hati-hati. Jangan langsung kalikan kedua ruas dengan $(x+2)$ karena $(x+2)$ mungkin bernilai positif atau negatif, sehingga harus mempertimbangkan apakah tanda pertidaksamaan perlu dibalik atau tidak. Sehingga harus mengurai dua permasalahan. Lebih mudah jika mengamati hasil bagi tersebut berubah tanda pada $x = 1$ dan $x = -2$. Dapat diambil titik uji $x = -3$, $x = 0$, dan $x = 2$.

Pada $x = 2$, nilai $\frac{x-1}{x+2}$ menjadi tak terdefinisi. Jadi, $x = 2$ tidak masuk dalam himpunan penyelesaian. Berdasarkan hasil uji titik tersebut diperoleh himpunan penyelesaian $= (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$



Nilai Mutlak

Definisi (Nilai mutlak)

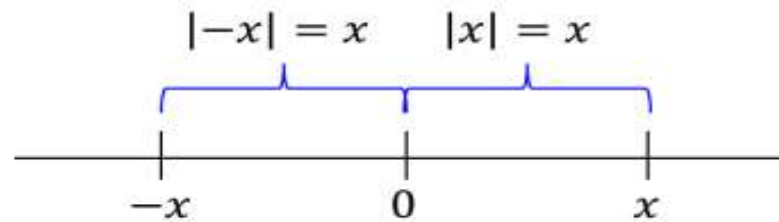
Nilai mutlak suatu bilangan real x , dinyatakan oleh $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

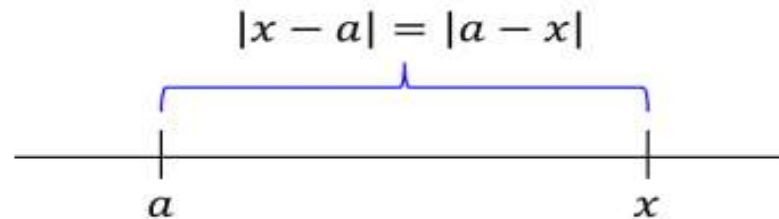
Nilai Mutlak

■ Catatan:

- $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik-asal.



- $|x - a|$ adalah jarak antara x dengan a .



Sifat – Sifat Nilai Mutlak

- Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}$, maka

1 $|ab| = |a| |b|$

2 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, jika $b \neq 0$

3 $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Pertidaksamaan segitiga)

4 $|a - b| \geq ||a| - |b||$

- Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $a > 0$, maka

1 $|x| = a$ jika dan hanya jika $x = \pm a$

2 $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$

3 $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$

4 $|x| > a$ jika dan hanya jika $x < -a$ atau $x > a$

5 $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \leq -a$ atau $x \geq a$

- Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}$, maka

1 $|x|^2 = x^2$ dan $|x| = \sqrt{x^2}$

2 $|x|^n = |x^n|$

3 $|x| < |y|$ jika dan hanya jika $x^2 < y^2$

Contoh

Tentukan penyelesaian persamaan dan pertaksamaan berikut.

1 $|3x - 7| = 4$

2 $|x| = -x$

3 $|6x - 5| < 7$

4 $|x^2 - 6| \leq 3$

5 $5 \leq |4x + 3| < 10$

6 $|x| < |3 - 2x|$

7 $\frac{(|x| - 1)x}{2|x| - 1} > 0$

8 $|2x - 4| - |x| \leq 3$