KALKULUS

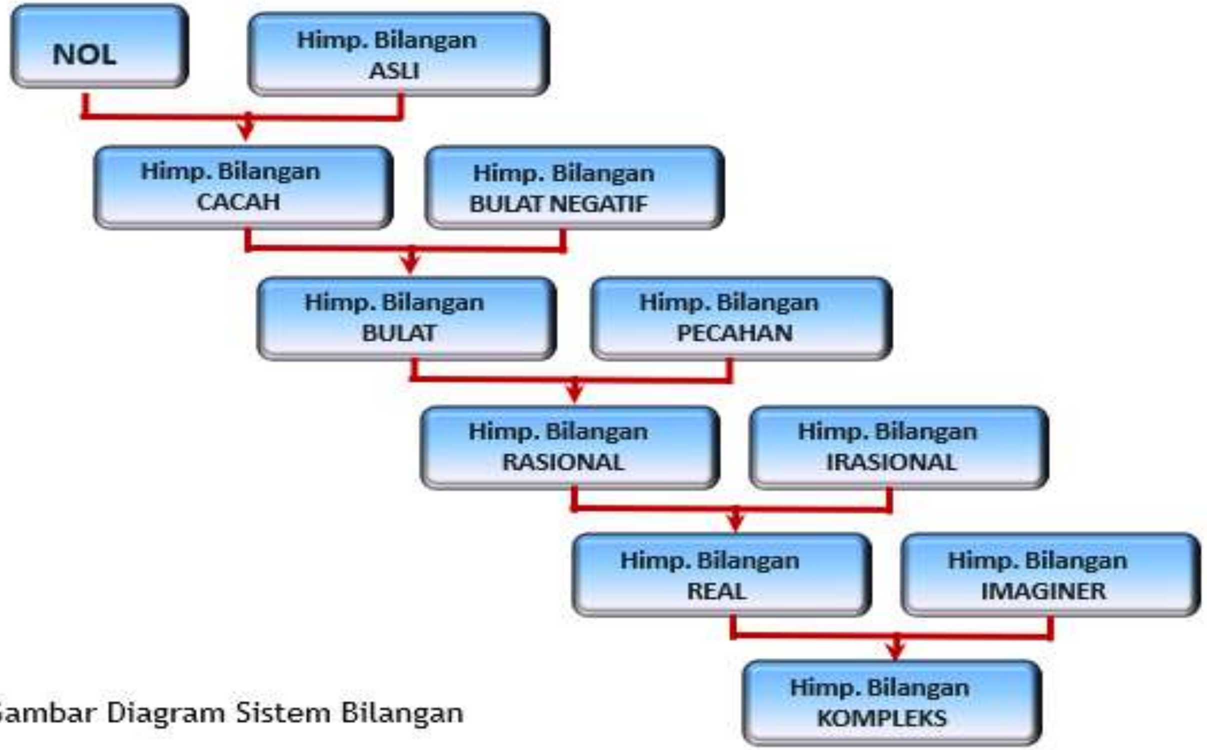
Bagian 2. Sistem Bilangan

Sesi Online 2

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T



Gambar Diagram Sistem Bilangan

Bilangan Asli dan Bilangan Bulat

- Sistem bilangan merupakan dasar kalkulus. Apakah itu bilangan real dan bagaimana sifat-sifatnya? Untuk memahami sistem bilangan real, kita akan memulai dengan beberapa sistem bilangan yang sederhana.
- Himpunan yang paling sederhana adalah *himpunan bilangan asli,* dinotasikan dengan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
- Dengan bilangan asli kita biasa menghitung banyaknya buku, kursi, permen, bolpoint, dan lain-lain.
- Dalam bilangan asli terdiri dari bilangan 1, bilangan prima dan bilangan komposit.
- Gabungan antara himpunan bilangan asli, nol, dan himpunan lawan dari bilangan asli disebut sebagai *himpunan bilangan bulat*, dinotasikan dengan $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Universitas Siber Asia

Bilangan Rasional dan Irasional

Untuk mengukur panjang, berat, atau besarnya arus listrik dan besaran lainnya, bilangan bulat saja tidaklah cukup. Seringkali kita jumpai bilangan 0,5; ¾; 15/4; -5,2; dan lain-lain.

Bilangan-bilangan tersebut dapat dinyatakan sebagai bentuk pecahan biasa dengan pembilang dan penyebutnya adalah bilangan bulat. Bilangan tersebut dinamakan bilangan rasional.

Himpunan bilangan rasional didefinisikan dengan $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Bilangan bulat juga dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b, sehingga bilangan bulat merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan rasional.

Contohnya, 7 dapat dinyatakan dengan 7/1 atau 14/2 atau -35/-5 dan lain-lain.

Bilangan yang tidak bisa dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

dikategorikan dalam *himpunan bilangan irasional*.

Contohnya, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, π, dan lain-lain.

Setiap bilangan rasional dan irasional dapat dinyatakan sebagai desimal.

Sekarang gunakan kalkulator, hitunglah 3 dibagi 7 (pecahan 3/7), hitunglah 17 dibagi 11 (pecahan 17/11), atau coba dengan bilangan rasional yang lain.

Gunakan kalkulatormu untuk menghitung $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, atau bilangan irasional lainnya.

Bandingkan. Bagaimana perbedaan bentuk desimal dari bilangan rasional dan irasional?

Universitas Siber Asia

Pembagian dengan Nol

Perlu diingat bahwa dalam perhitungan pembagian bilangan real dengan nol tidak pernah diperkenankan karena hubungan dalam bentuk

$$y = \frac{p}{0} \quad \text{mengakibatkan} \quad 0.y = p$$

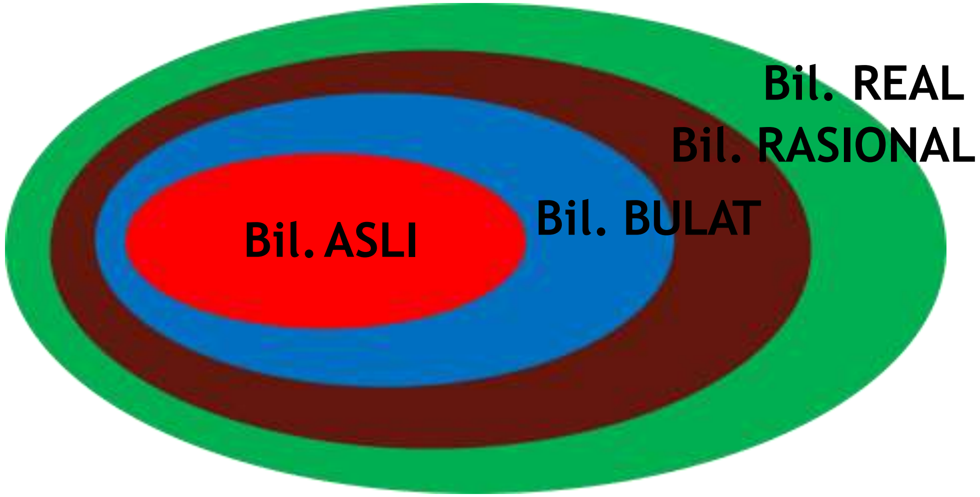
Jika $p \neq 0$, persamaan ini bertentangan dengan sifat perkalian dengan bilangan nol;

Jika $p = 0$, persamaan ini dipenuhi oleh sebarang bilangan y, maka pembagian nol dengan nol tidak mempunyai nilai tunggal. Ini merupakan suatu keadaan yang secara matematik tidak bermakna.

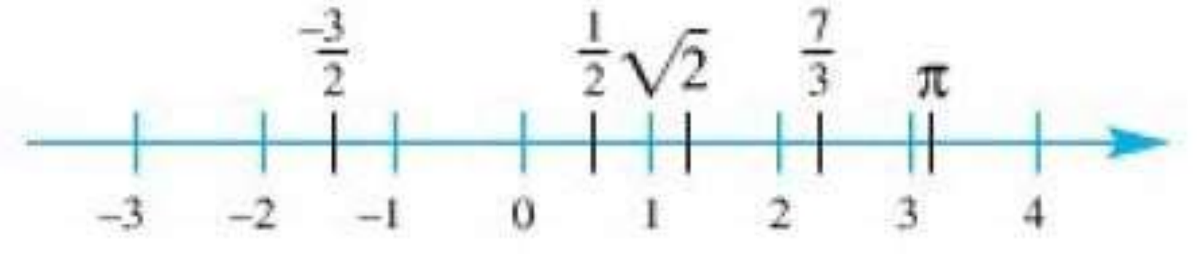
Sehingga, bentuk seperti $\frac{q}{0}$ dan $\frac{0}{0}$

tidak menyatakan suatu nilai dan dikatakan tak terdefinisi.

- Gabungan himpunan bilangan rasional dan irasional adalah *himpunan bilangan real*, dinotasikan R.
- Berikut ilustrasi hubungan himpunan-himpunan bilangan tersebut.



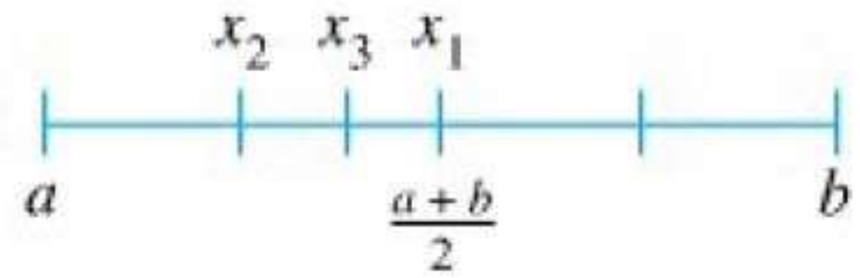
Gambar Hubungan Himpunan Bilangan



Gambar Garis Bilangan

Bilangan Real

- Antara dua bilangan real sebarang a dan b, berapapun jaraknya, terdapat suatu bilang real lain, misalnya $x_1 = (a + b)/2$ adalah bilangan real di tengah-tengah a dan b.
- Demikian halnya, terdapat bilangan real lain misal x_2 yang terletak di antara a dan x_1
- Terdapat pula bilangan real lain x_3 yang terletak di antara x_1 dan x_2
- Hal ini dapat terus berulang tanpa ada habisnya. Sehingga dapat disimpulkan bahwa antara sebarang dua bil real a dan b terdapat takterhingga banyaknya bilangan real



Universitas Siber Asia

Bilangan Kompleks

- Sistem bilangan real dapat diperluas lagi menjadi sistem bilangan komples. Bentuk umum bilangan kompleks berbentuk $a + bi$ dengan a dan b adalah bilangan real dan $i = \sqrt{-1}$.
- Sistem bilangan kompleks akan dibahas lebih jauh dalam mata kuliah lain seperti Analisis kompleks atau Fungsi Peubah Kompleks dan yang berkaitanq.
- Dalam Kalkulus domain pembahasannya hanya dalam lingkup sistem bilangan real.

Kalkulator dan Komputer

- Saat ini banyak jenis kalkulator yang sudah mampu melakukan perhitungan operasi dengan angka (numerik), grafik, dan simbol, bahkan sudah mampu mengurai/memfaktorkan bentuk aljabar seperti $(x - 3y)^{12}$ atau memecahkan akar-akar dari persamaan polinomial seperti $x^3 - 2x^2 + x = 0$.
- Software komputer seperti *Mathlab*, *Mathematica*, *Maple* dan lainnya dapat melakukan bahkan lebih jauh dari contoh di atas.
- Dalam penggunaan kalkulator perlu diketahui kapan kalkulator dan komputer memberikan solusi eksak dan kapan solusi hampiran/pendekatan/perkiraan/aproksimasi.

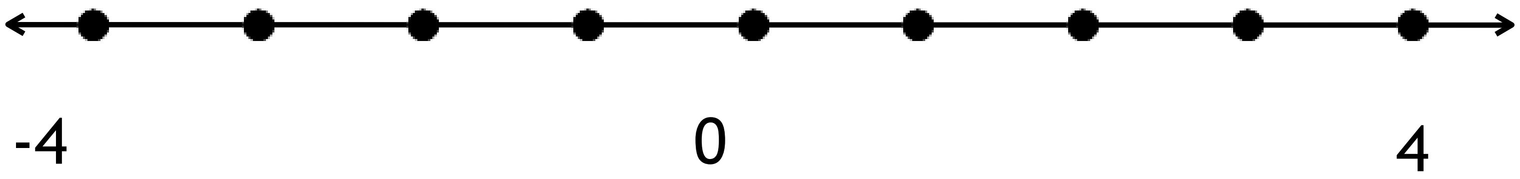
Aproksimasi/Perkiraan/Hampiran

- Seringkali dalam permasalahan sehari-hari, penyelesaiannya berupa penyelesaian aproksimasi/hampiran. Tidak semuanya masalah mempunyai penyelesaian eksak.
- Dalam bentuk desimal, bilangan irasional tidak dapat disajikan dengan ketepatan yang sempurna, tetapi berupa nilai hampiran.
- Contohnya: π yang sering digunakan dengan nilai hampirannya 3,14. Padahal, berapapun banyaknya tempat desimal yang digunakan untuk menghampiri nilai π, bahkan jika ditulis sampai 2000 tempat desimal, itu pun masih merupakan nilai hampiran dari π, bukan nilai sebenarnya. Oleh karena itu π termasuk bilangan irasional
- Namun, semakin banyak tempat desimal yang disediakan untuk menulis bilangan irasional, akan semakin mendekati nilai sebenarnya.

Universitas Siber Asia

Contoh 1:

Pada gambar garis bilangan di bawah ini, berikan tanda tempat titik-titik 2; -3; -1/2; -2; π; -1,75; dan $\sqrt{2}$.

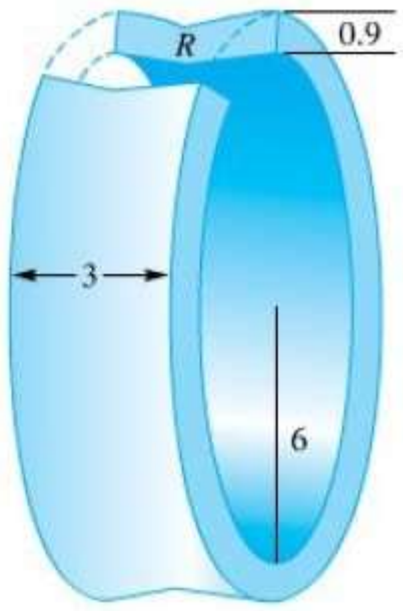


Saat menentukan di mana letak titik π dan $\sqrt{2}$, perlu adanya perkiraan/hampiran desimalnya.

Universitas Siber Asia

Contoh 2:

Misalkan daerah arsiran (region) R pada gambar di samping diputar terhadap sumbu horizontal. Perkirakan volume cincin padat yang dihasilkan. (tidak perlu nilai eksaknya)



- **Penyelesaian:**

  Daerah R panjangnya 3 satuan dan tingginya 0,9 satuan. Sehingga, diperkirakan luasnya 3 (0,9) ≈ 3 satuan persegi. Bayangkan cincin padat yang terbentuk itu di belah dan diletakkan mendatar, akan membentuk sebuah balok sepanjang kira-kira
  $2\pi r \approx 2(3)(6) = 36$ satuan. Volume balok adalah luas penampang dikali tinggi. Jadi, kira-kira volume cincin padat itu adalah 3(36) = 108.

Jika hasil perkiraan Anda jauh dari 108, teliti kembali jawaban Anda.

Universitas Siber Asia

Contoh 3

Calculate $\left(\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}\right)/2.75$.

SOLUTION A wise student approximated this as $(20 + 72 + 2)/3$ and said that the answer should be in the neighborhood of 30. Thus, when her calculator gave 93.448 for an answer, she was suspicious (she had actually calculated $\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}/2.75$).

On recalculating, she got the correct answer: 34.434. ■

Contoh 3

Which of the following statements are true?

(a) For all x, $x^2 > 0$.
(b) For all x, $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
(c) For every x, there exists a y such that $y > x$.
(d) There exists a y such that, for all x, $y > x$.

SOLUTION

(a) False. If we choose $x = 0$, then it is not true that $x^2 > 0$.
(b) True. If x is negative, then x^2 will be positive.
(c) True. This statement contains two quantifiers, "for every" and "there exists." To read the statement correctly, we must apply them in the right order. The statement begins "for every," so if the statement is true, then what follows must be true for every value of x that we choose. If you are not sure whether the whole statement is true, try a few values of x and see whether the second part of the statement is true or false. For example, we might choose $x = 100$; given this choice, does there exist a y that is greater than x? In other words, is there a number greater than 100? Yes, of course. The number 101 would do. Next choose another value for x, say $x = 1{,}000{,}000$. Does there exist a y that is greater than this value of x? Again, yes; in this case the number 1,000,001 would do. Now, ask yourself: "If I let x be any real number, will I be able to find a y that is larger than x?" The answer is yes. Just choose y to be $x + 1$.
(d) False. This statement says that there is a real number that is larger than every other real number. In other words, there is a largest real number. This is false; here is a proof by contradiction. Suppose that there exists a largest real number y. Let $x = y + 1$. Then $x > y$, which is contrary to the assumption that y is the largest real number. ■