KALKULUS

Bagian 4. Turunan dan Integral

Sesi Online 11

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

Universitas Siber Asia

Content:

- Aturan Rantai
- Turunan Tingkat Tinggi
- Diferensiasi Implisit

Universitas Siber Asia

Aturan Rantai

Perhatikan Contoh berikut:

Carilah turunan dari

1. $f(x) = (2x^2 - 4x + 10)^{60}$

   Maka,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 60(2x^2 - 4x + 10)^{60-1}(2 * 2x - 4) \\ &= 60(2x^2 - 4x + 10)^{59}(4x - 4) \end{aligned}$$

2. $f(x) = \cos 2x$

   Maka,

$$f'(x) = -2 \sin 2x$$

Universitas Siber Asia

Aturan Rantai

Teorema A Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensiasikan di x dan f terdiferensiasikan di $u = g(x)$, maka fungsi komposit $f \circ g$, yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, adalah terdiferensiasikan di x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Yakni

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Universitas Siber Asia

Penerapan Aturan Rantai

Contoh 1

Jika $y = (2x^2 - 4x + 10)^{60}, carilah\ D_x y!$

Misalkan $u = 2x^2 - 4x + 10$

Sehingga $y = u^{60}$

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u = (60\ u^{59})(4x - 4)$$
$$= (60\ 2x^2 - 4x + 10^{59})(4x - 4)$$

Contoh 2

Jika $y = 1/(2x^5 - 7)^3$, $carilah\ D_x y$!

Misalkan $u = 2x^5 - 7$

Sehingga $y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$

$$\begin{aligned} D_x y = D_u y \cdot D_x u &= (-3u^{-4})(10x^4) \\ &= (-3u^{-4})(10x^4) \\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4} \end{aligned}$$

- Contoh 3
- Jika $y = \sin(x^3 - 3x), carilah\ D_x y$!

Maka,

$$u = x^3 - 3x$$
$$y = \sin u$$

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$
$$= \cos u \cdot (3x^2 - 3)$$
$$= (3x^2 - 3)\cos(x^3 - 3x)$$

– Contoh 4:

Cari $D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13}$.

$$
\begin{aligned}
D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13} &= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4}\right)^{13-1} D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right) \\
&= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \frac{(t^4 + 3)(3t^2 - 2) - (t^3 - 2t + 1)(4t^3)}{(t^4 + 3)^2} \\
&= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \frac{-t^6 + 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 6}{(t^4 + 3)^2}
\end{aligned}
$$

– **Contoh 5:**

Cari $D_x \sin^3 (4x)$.

$$D_x \sin^3(4x) = D_x [\sin(4x)]^3 = 3[\sin(4x)]^{3-1} D_x [\sin(4x)]$$

$$\begin{aligned} D_x \sin^3(4x) &= 3[\sin(4x)]^{3-1} D_x \sin(4x) \\ &= 3[\sin(4x)]^2 \cos(4x) D_x(4x) \\ &= 3[\sin(4x)]^2 \cos(4x)(4) \\ &= 12 \cos(4x) \sin^2(4x) \end{aligned}$$

Universitas Siber Asia

Latihan 1

– Carilah turunan dari fungsi berikut ini:

1. $y = (x^2 - x + 1)^5$
2. $y = (2x + 3)^{-7}$
3. $y = sin(x^2 + x)$
4. $y = \frac{(x+1)^2}{3x-4}$
5. $D_t \left(\frac{3t-2}{t+5}\right)^3$
6. $D_t(\sin t \tan (t^2 + 1))$
7. $D_t(sin^4(x^2 + 3x))$
8. $f'(3)$ jika $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^3$
9. $f'(1)$ jika $f(t) = \sin(t^2 + 3t + 1)$

Turunan Tingkat Tinggi

Operasi diferensiasi mengambil sebuah fungsi f dan menghasilkan sebuah fungsi baru f'. Jika f' sekarang kita diferensiasikan, kita masih tetap menghasilkan fungsi lain, dinyatakan oleh f'' (dibaca "f dua aksen") dan disebut **turunan kedua** dari f. Pada gilirannya dia boleh didiferensiasikan lagi, dengan demikian menghasilkan f''', yang disebut **turunan ketiga** dari f. **Turunan keempat** dinyatakan $f^{(4)}$, **turunan kelima** dinyatakan $f^{(5)}$, dan seterusnya.

Jika, sebagai contoh,

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 8x + 7 \\ f''(x) &= 12x - 8 \\ f'''(x) &= 12 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

– Dari penjelasan sebelumnya, terdapat tiga cara penulisan turunan (sekarang disebut turunan pertama) dari $y = f(x)$, yaitu:

$$f'(x)\;;\; D_x y\;;\; \frac{dy}{dx}$$

Notasi Turunan

Notations for Derivatives of $y = f(x)$				
Derivative	f' Notation	y' Notation	D Notation	Leibniz Notation
First	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Second	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Third	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Fourth	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
nth	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Universitas Siber Asia

CONTOH 1 Jika $y = \sin 2x$, cari d^3y/dx^3, d^4y/dx^4, dan $d^{12}y/dx^{12}$.

PENYELESAIAN

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2^2 \sin 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2^3 \cos 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \sin 2x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2^5 \sin 2x$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 2^{12} \sin 2x$$

Universitas Siber Asia

Contoh 2

Sebuah benda bergerak di sepanjang garis koordinat sehingga posisinya s memenuhi $s = 2t^2 - 12t + 8$, dimana s diukur dalam sentimeter dan t dalam sekon dengan t≥0.

Tentukan kecepatan benda ketika t = 6 dan kapan kecepatannya 0 ?

Jawab:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$
$$v(6) = 4 * 6 - 12 = 12\ cm/s$$

Kecepatan bernilai 0 ketika

$$4t - 12 = 0\ sehingga\ t = 3$$

Jika kecepatan $v(t) = \frac{ds}{dt}$, maka percepatan $a(t) = \frac{dv}{dt}$

Dari contoh 2 dapat dicari besar percepatan

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$$

Cobalah soal berikut ini:

CONTOH 4 Dari puncak sebuah gedung setinggi 160 feet, sebuah bola dilempar ke atas dengan kecepatan awal 64 feet per detik.

(a) Kapan bola mencapai ketinggian maksimum?

(b) Berapa ketinggian maksimumnya?

(c) Kapan bola membentur tanah?

(d) Dengan laju berapa bola membentur tanah?

(e) Berapa percepatannya pada $t = 2$?

Universitas Siber Asia

PENYELESAIAN Misalkan $t = 0$ berkorespondensi dengan saat pada waktu bola dilempar. Maka $s_0 = 160$ dan $v_0 = 64$ (v_0 positif karena bola dilempar *ke atas*). Jadi

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

(a) Bola mencapai ketinggian maksimum pada waktu kecepatannya 0, yakni ketika $-32t + 64 = 0$ atau ketika $t = 2$ detik.

(b) Pada $t = 2$, $s = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224$ feet.

(c) Bola membentur tanah pada waktu $s = 0$, yakni ketika

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Pembagian oleh -16 memberikan

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

Maka rumus *abc* menghasilkan

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Hanya jawaban positif yang masuk akal. Jadi bola membentur tanah pada $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5{,}74$ detik.

(d) Pada $t = 2 + \sqrt{14}$, $v = -32(2 + \sqrt{14}) + 64 \approx -119{,}73$. Jadi bola membentur tanah pada laju 119,73 feet per detik.

(e) Percepatan selalu -32 feet per detik per detik. Ini adalah percepatan gravitasi di dekat permukaan laut. ■

Universitas Siber Asia

Latihan II

Dalam Soal-soal 1–8, cari d^3y/dt^3.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$
2. $y = x^5 + x^4$
3. $y = (3x + 5)^3$
4. $y = (3 - 5x)^5$
5. $y = \sin(7x)$
6. $y = \sin(x^3)$
7. $y = \dfrac{1}{x - 1}$
8. $y = \dfrac{3x}{1 - x}$

29. Jika $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$ cari kecepatan benda bergerak tersebut ketika percepatannya nol.

30. Jika $s = \frac{1}{10}(t^4 - 14t^3 + 60t^2)$ cari kecepatan benda bergerak tersebut ketika percepatannya nol.

31. Dua benda bergerak di sepanjang suatu garis koordinat. Setelah t detik jarak-jarak berarahnya dari titik-asal, masing-masing diberikan oleh $s_1 = 4t - 3t^2$ dan $s_2 = t^2 - 2t$.

(a) Kapan mereka mempunyai kecepatan sama?

(b) Kapan mereka mempunyai laju sama?

(c) Kapan mereka mempunyai posisi sama?

Diferensiasi Implisit

– Perhatikan fungsi $y^3 + 7y = x^3$. Carilah $\frac{dy}{dx}$!

– Persamaan di atas mendefinisikan y sebagai **fungsi implisit** dari x.

Teknik diferensiasi yang dapat digunakan yaitu:

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) = \frac{d}{dx}x^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

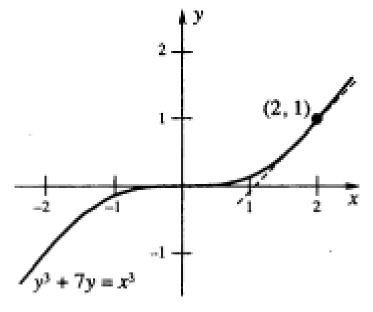
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2+7}$$

- $\frac{dy}{dx}$ pada (2,1)

$$\frac{32^2}{31^2+7} = \frac{6}{5}$$

Plot dari fungsi tersebut dapat dilihat pada gambar di samping.

Kemiringan garis singgungnya adalah $\frac{6}{5}$.



Gambar 1

– Contoh 1:

– Carilah $\frac{dy}{dx}$ jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$

PENYELESAIAN

Metode 1 Kita dapat menyelesaikan persamaan yang diberikan untuk y secara gamblang sebagai berikut:

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Metode 2 Diferensiasi implisit Kita samakan turunan-turunan kedua ruas dari

$$\frac{d}{dx}(4x^2y - 3y) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

Setelah menggunakan Aturan Hasil Kali pada suku pertama, kita peroleh

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Dengan mensubtitusi kembali nilai $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$ maka dapat diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\,\dfrac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

CONTOH 2 Cari dy/dx jika $x^2 + 5y^3 = x + 9$.

PENYELESAIAN

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = d/dx(x + 9)$$

$$2x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

Carilah diferensiasi implisit dari fungsi berikut:

1. $y^2 - x^2 = 1$
2. $9x^2 + 4y^2 = 36$
3. $x^2 + 2x^2y + 3xy = 0$
4. $xy + \sin(xy) = 1$

Nothing Worth Having Comes Easy.

There is no elevator to success.
You have to take the stairs.