Universitas Siber Asia

KALKULUS

Bagian 4. Aplikasi Turunan dan Integral

Sesi Online 14

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

Sub Pokok Bahasan:

1. Menggambar Grafik Menggunakan Aplikasi Turunan.
2. Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi Beserta Aplikasinya
3. Teorema Rolle dan Nilai Rata-Rata

Sub CP-MK:

1. Mahasiswa mampu menentukan ekstrem relatif suatu fungsi menggunakan uji turunan pertama dan kedua
2. Mahasiswa mampu menerapkan konsep turunan untuk menggambar grafik.
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan aplikatif yang berkaitan dengan nilai maksimum dan minimum
4. Mahasiswa mampu menerapkan Teorema Rolle dan Nilai Rata-Rata

Grafik Polinomial dan Fungsi Rasional

- Metode untuk membuat grafik Polinomial $P(x)$

1. Hitung turunan pertama dan kedua dari $P(x)$, yaitu $P'(x)$ dan $P''(x)$
2. Dari $P'(x)$ tentukan titik stasioner dan selang dimana P naik dan turun
3. Dari $P''(x)$ tentukan titik belok dan selang dimana P cekung ke atas dan cekung ke bawah
4. Plot irisan dengan sumbu y, titik stasioner, titik belok dan jika mungkin, irisannya terhadap sumbu x. Akhirnya, plot titik-titik tambahan yang diperlukan untuk memperoleh akurasi yang diinginkan dalam grafik.

Contoh :

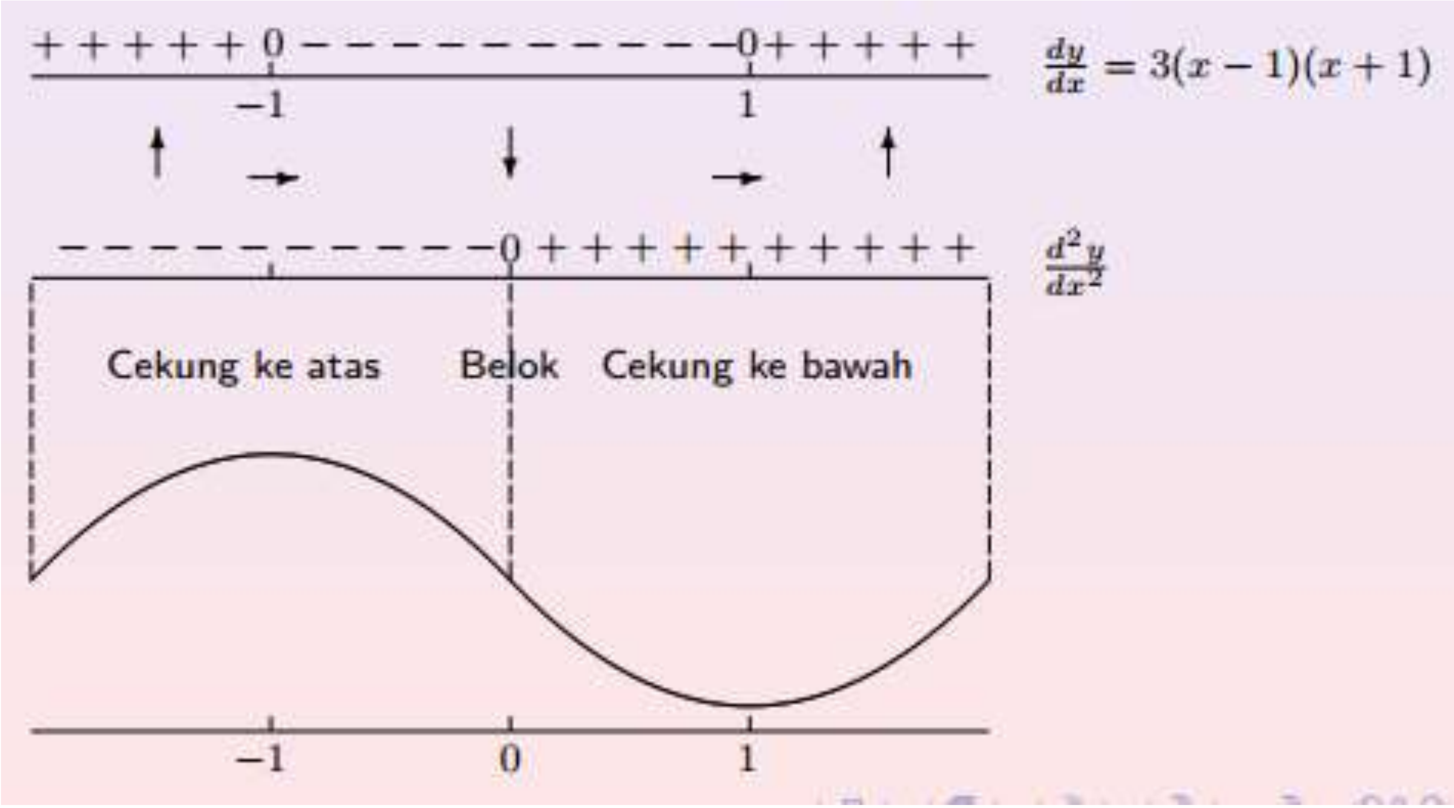
Buatlah sketsa grafik $y = x^3 - 3x + 2$

Penyelesaian:

Turunan pertama dan kedua dari y

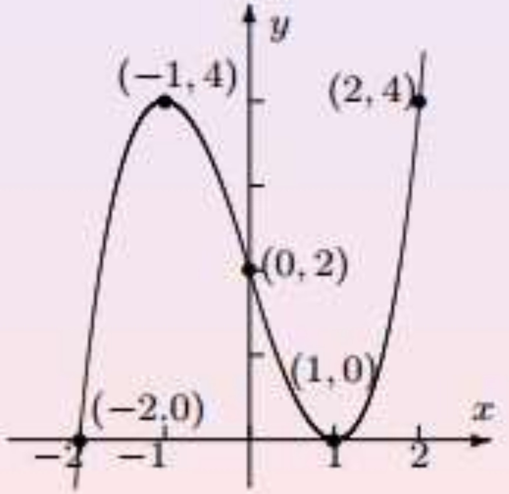
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

Turunan pertama untuk menentukan titik stasioner dan selang dimana P naik dan turun. Turunan kedua untuk menentukan titik belok dan selang dimana P cekung atas dan cekung bawah.


+ + + + + 0 − − − − − − − − − − − 0 + + + + +
−1
1
$\frac{dy}{dx} = 3(x-1)(x+1)$
− − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + +
$\frac{d^2y}{dx^2}$
Cekung ke atas
Belok
Cekung ke bawah
−1
0
1

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x+2) = +\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+2) = -\infty$$

x	$y = x^3 - 3x + 2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4



$y = x^3 - 3x + 2$

- Metode untuk membuat grafik fungsi rasional $f(x)$

Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ polinomial maka $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ disebut fungsi rasional dalam x. Pembuatan grafik fungsi rasional lebih sukar akibat adanya diskontinuitas yang terjadi pada titik-tiik dengan $Q(x) = 0$

Definisi :

Garis $x = x_0$ disebut asimtot tegak dari grafik suatu fungsi f jika x mendekati x_0 dari kanan atau kiri maka $f(x) \to +\infty$ atau $f(x) \to -\infty$.
Garis $y = y_0$ disebut asimtot datar dari f jika

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ atau } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

Universitas Siber Asia

Sifat-sifat yang Perlu Diperhatikan

Sifat – sifat yang menarik dari grafik fungsi rasional adalah:

1. Simetri
2. Perpotongan dengan sumbu x
3. Perpotongan dengan sumbu y
4. Asimtot
5. Selang naik dan selang turun
6. Titik stasioner
7. Kecekungan
8. Titik belok

Contoh :

Sketsa Grafik $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$

a. Simetri: penggantian x dengan $-x$ tidak mengubah persamaan, maka grafik simetri terhadap sumbu y

b. Perpotongan dengan sumbu x: Diambil $y = 0$ menghasilkan perpotongan dengan sumbu x di $x = -2$ dan $x = 2$

c. Perpotongan dengan sumbu y : Diambil $x = 0$ menghasilkan perpotongan dengan sumbu y di $y = \frac{1}{2}$

d. Asimtot tegak: diambil $x^2 - 16 = 0$ maka asimtot tegak $x = -4$ dan $x = 4$

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$$

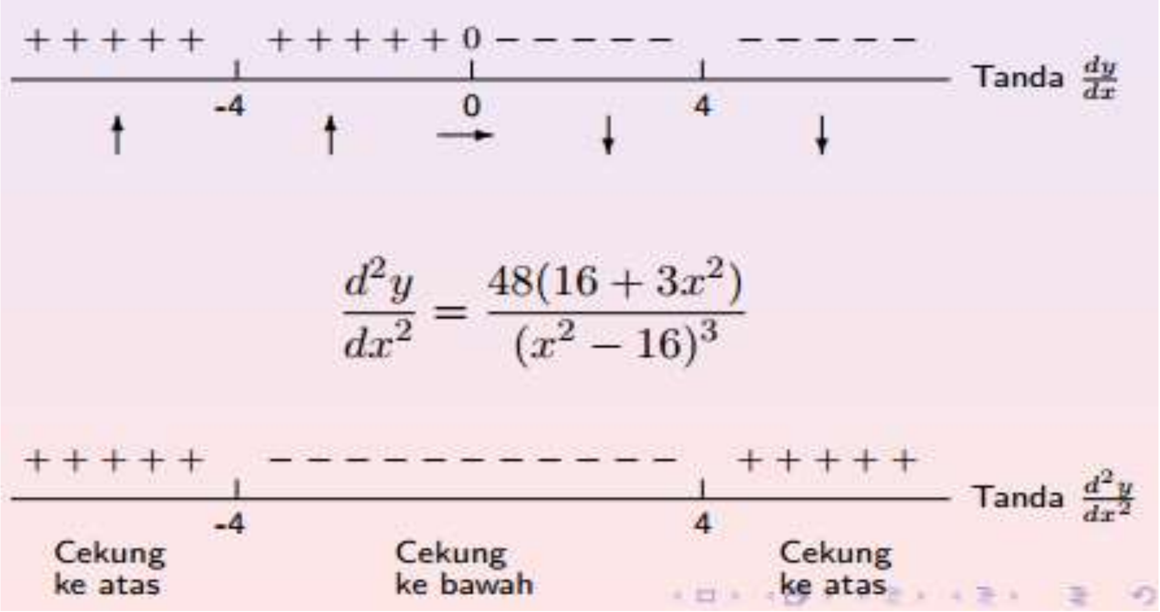
e. Asimtot datar: $y = 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = 2$$

Titik Uji

SELANG	TITIK UJI	$y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$	TANDA y
$(-\infty, -4)$	$x = -5$	$y = 14/3$	$+$
$(-4, -2)$	$x = -3$	$y = -10/7$	$-$
$(-2, 2)$	$x = 0$	$y = 1/2$	$+$
$(2, 4)$	$x = 3$	$y = -10/7$	$-$
$(4, +\infty)$	$x = 5$	$y = 14/3$	$+$

$$x^2 - 16 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\qquad)(4x) - (2x^2 - 8)(2x)}{(x^2 - 16)^2} = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2}$$



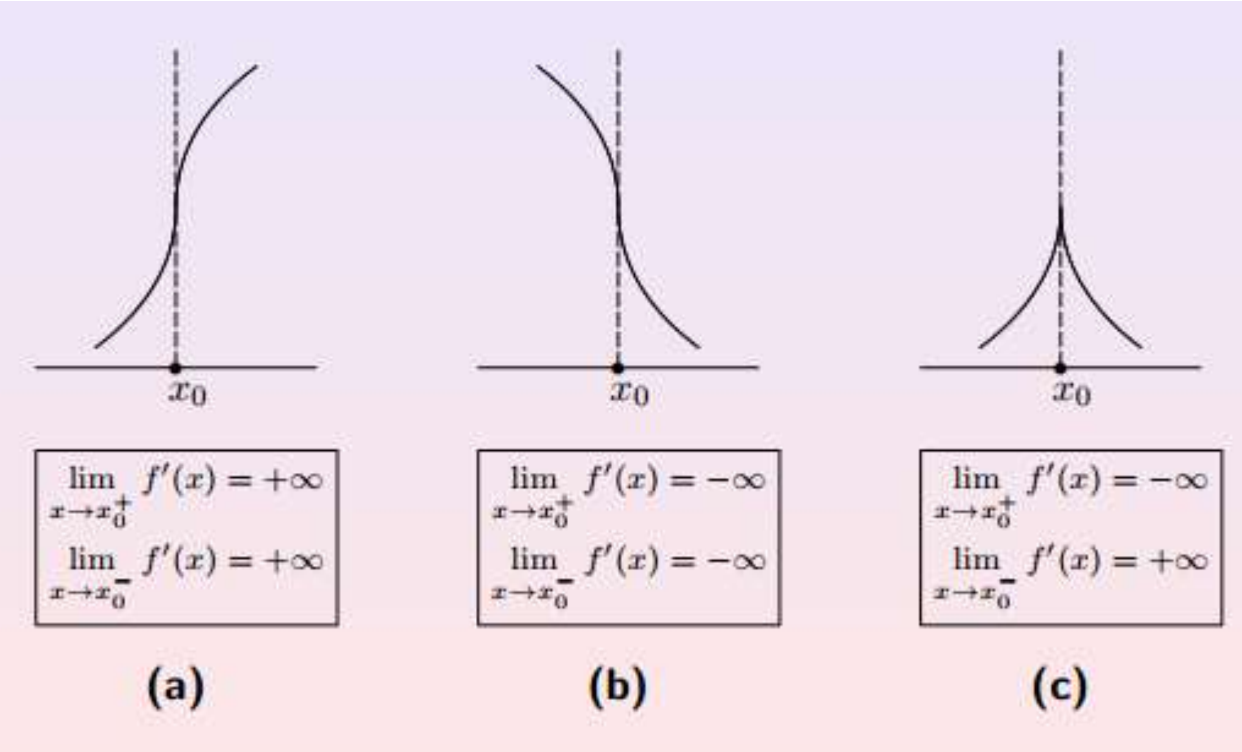
Definisi Garis Singgung Tegak dan Cusp

- Definisi Garis Singgung Tegak

Grafik suatu fungsi f dikatakan mempunyai garis singgung tegak di x_0 jika f kontinu di x_0 dan $|f'(x)|$ menuju $+\infty$ bila $x \to x_0$.

- Definisi:

Grafik fungsi f dikatakan mempunyai cusp di x_0 jika f kontinu dan $f'(x) \to +\infty$ untuk x mendekati x_0 dari suatu sisi dan $f'(x) \to -\infty$ bila x mendekati x_0 dari sisi yang lain.


x_0
x_0
x_0
$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$
$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$
$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$
$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$
$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$
$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$
(a)
(b)
(c)

Contoh: $y = (x-4)^{2/3}$

a. Simetri: tidak ada simetri terhadap sumbu koordinat atau titik asal.
b. Perpotongan dengan sumbu x: $y = 0$ menghasilkan perpotongan di $x = 4$
c. Perpotongan dengan sumbu y: $x = 0$ menghasilkan perpotongan di $y = \sqrt[3]{16}$
d. Asimtot tegak: tidak ada, karena $y = (x-4)^{2/3}$ fungsi kontinu
e. Asimtot datar: tidak ada, sebab

$$\lim_{x \to +\infty} (x-4)^{2/3} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x-4)^{2/3} = +\infty$$

Universitas Siber Asia

f. Turunan

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x-4)^{1/3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9(x-4)^{\frac{4}{3}}}$$

g. Garis singgung tegak: ada garis singgung tegak di $x = 4$ dikarenakan $f(x) = (x-4)^{2/3}$ kontinu di $x = 4$ dan

$$\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} = -\infty$$

h. Selang naik dan turun, kecekungan: Kombinasi informasi terdahulu dengan mengikuti analisa tanda turunan pertama dan kedua menghasilkan grafik. Titik-titik dalam tabel

Ekstrim Absolut

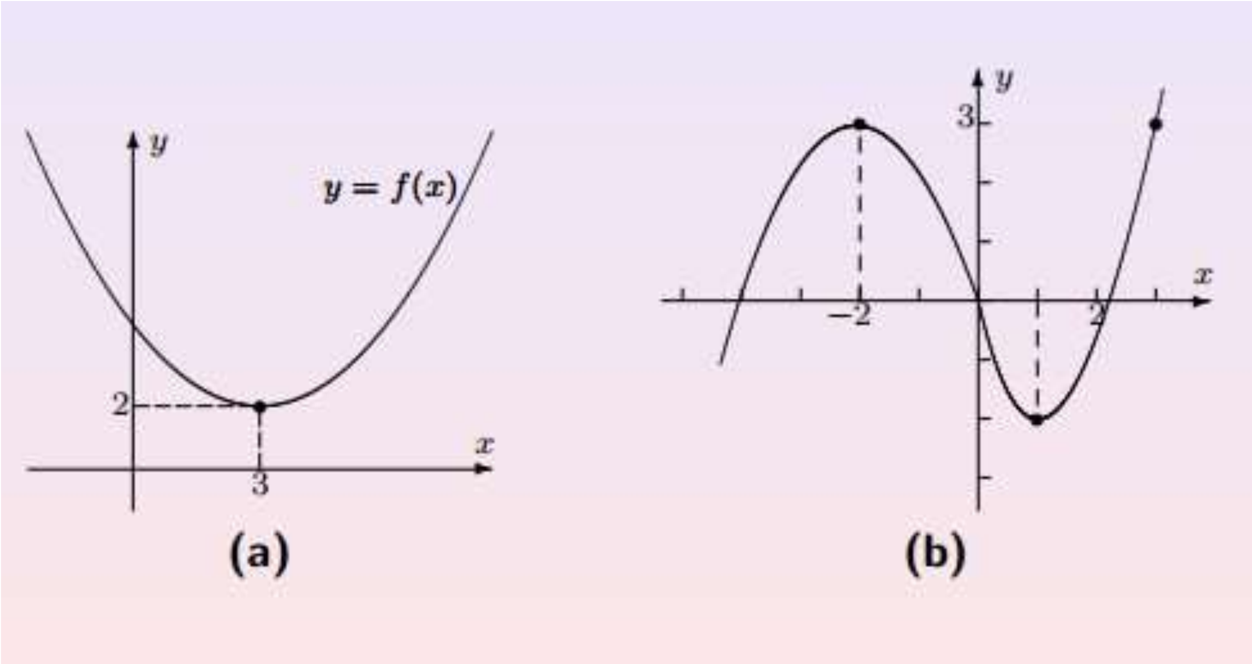
Definisi

- Jika $f(x_0) \geq f(x)$ untuk setiap x dalam domain f, maka $f(x_0)$ disebut nilai maksimum absolut atau nilai maksimum f.

- Jika $f(x_0) \leq f(x)$ untuk setiap x dalam domain f, maka $f(x_0)$ disebut nilai minimum absolut atau nilai minimum f.

- Nilai maksimum dan minimum fungsi f disebut nilai ekstrim absolut atau nilai ekstrim. Istilah ekstrim absolut kadang-kadang cukup disebut ekstrim saja.

Contoh



Teorema

Teorema Nilai Ekstrim

Jika suatu fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ maka f mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[a,b]$

Teorema

Jika suatu fungsi mempunyai nilai ekstrim maksimum atau minimum pada selang terbuka (a, b) maka nilai ekstrim terjadi di titik kritis.

Langkah-Langkah Mendapatkan Nilai Ekstrim Fungsi Kontinu f pada Selang Tertutup $[a,b]$

1. Tentukan titik kritis f dalam (a,b)
2. Evaluasi f di setiap titik kritis dan di titik ujung a dan b
3. Nilai terbesar pada Langkha kedua adalah nilai maksimum f pada $[a,b]$ dan nilai terkecil adalah nilai minimumnya.

Contoh:

Tentukan Nilai maksimum dan minimum dari

$$y = \frac{1}{x^2 - x}$$

pada selang $(0,1)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

$$f'(x) = -\frac{2x - 1}{(x^2 - x)^2}$$

Jika $f'(x) = 0$ maka $x = \frac{1}{2}$. Nilai maksimum f pada $(0,1)$ terjadi di $x = \frac{1}{2}$ dengan f maksimum

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}} = -4$$

Aplikasi Masalah Maksimum dan Minimum

- Klasifikasi masalah optimasi

Aplikasi masalah – masalah optimasi yang dibahas dalam subbab ini dikelompokkan ke dalam dua kategori

a. Masalah – masalah yang tereduksi menjadi maksimum atau minimum suatu fungsi kontinu pada selang tertutup berhingga.
b. Masalah – masalah yang tereduksi menjadi maksimum atau minimum suatu fungsi kontinu pada selang tak berhingga atau selang berhingga yang tidak tertutup (yaitu terbuka atau setengah tertutup)

Universitas Siber Asia

Langkah - Langkah

Prosedur lima langkah berikut yang dapat dipakai untuk menyelesaikan beberapa aplikasi masalah maksimum dan minimum:

1. Buatlah gambar yang sesuai dan berikan nama dari sifat-sifat yang terkait dengan permasalahan.
2. Tentukan sebuah rumusan yang memenuhi untuk dimaksimumkan atau diminimumkan.
3. Gunakan syarat-syarat yang ada untuk mengeliminasi peubah-peubah, kemudian tuliskan rumusan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan sebagai fungsi satu peubah.
4. Tentukan selang dari nilai-nilai yang mungkin untuk peubah tersebut berdasarkan pembatasan fisik masalah.
5. Jika mungkin, gunakan cara-cara dari subbab terdahulu untuk memperoleh nilai maksimum atau minimum.

a. Masalah – masalah yang terkait dengan selang tertutup berhingga

Contoh :

Tentukan ukuran dari empat persegi panjang yang mempunyai keliling $100\ m$ agar luasnya sebesar mungkin.

Penyelesaian :

x = panjang empat persegi panjang (meter)

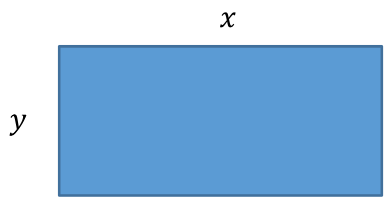
y = lebar empat persegi panjang (meter)

L = luas empat persegi panjang (meter persegi)

maka,

$$L = xy \qquad (1)$$

Karena keliling empat persegi panjang $100\ m$, peubah x dan y dapat dinyatakan sebagai berikut:



$$2x + 2y = 100$$
$$x + y = 50$$
$$y = 50 - x \qquad (2)$$

Subtitusi persamaan (2) ke persamaan (1)

$$L = xy$$
$$L = x(50 - x) = 50x - x^2 \qquad (3)$$

Karena x merupakan panjang yang tidak negatif dan karena jumlah dua sisi yang panjangnya x tidak dapat melebihi total keliling $100m$, peubah x harus memenuhi

$$0 \leq x \leq 50 \qquad (4)$$

Dari persamaan (3) diperoleh turunan pertama dari $L(x)$ adalah

$$\frac{dL}{dx} = 50 - 2x$$

Dan dengan mengambil $\frac{dL}{dx} = 0$ diperoleh

$$50 - 2x = 0$$
$$2x = 50$$
$$x = 25$$

Jadi maksimum terjadi di salah satu titik $x = 0$, $x = 25$ dan $x = 50$

x	**0**	**25**	**50**
L	0	625	0

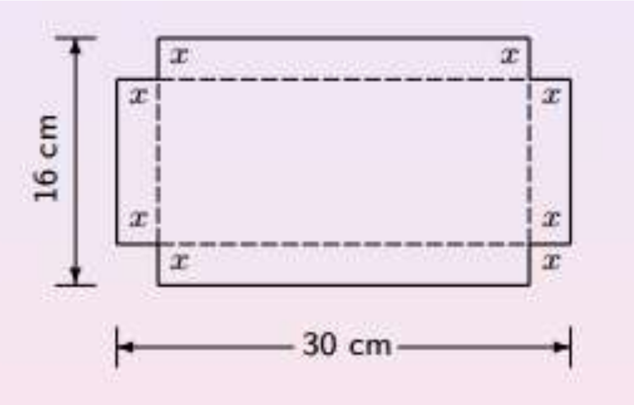
Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa luas maksimum $625 m^2$ terjadi di $x = 25$, sehingga didapatkan nilai $y = 50 - x = 50 - 25 = 25$. Jadi empat persegi panjang dengan keliling $100\ m$ dan luas terbesar adalah bujur sangkar dengan panjang sisinya $25\ m$.

Kotak terbuka dibuat dari lembaran karton berukuran $16\ cm$ x $30\ cm$ dengan menggunting ke-empat sudutnya berbentuk bujur sangkar yang berukuran sama dan melipatnya ke sisi bagian atas. Berapa ukuran bujur sangkar agar diperoleh kotak dengan isi terbesar?

Penyelesaian:

x= panjang sisi bujur sangkar yang digunting (cm)

V = isi kotak yang dihasilkan (cm^3)



$$V = (16 - 2x)(30 - 2x)x$$

$$= 480x - 92x^2 + 4x^3$$

dan

$$0 \le x \le 8$$

diperoleh :

$$\frac{dV}{dx} = 480 - 184x + 12x^2 = 4(120 - 46x + 3x^2)$$

atau

$$120 - 46x + 3x^2 = 0$$

sehingga

$$x = \frac{10}{3} \text{ dan } x = 12$$

Karena $x = 12$ berada di luar selang $[0, 8]$ nilai maksimum V terjadi di $x = 0$, $x = \frac{10}{3}$ atau $x = 8$

x	0	$\frac{10}{3}$	8
V	0	$\frac{19600}{27}$	0

b. Masalah – masalah yang terkait dengan selang yang tidak berhingga atau berhingga yang tidak tertutup

Contoh :

Kaleng tertutup dapat diisi 1 l $(1000\ cm^3)$ cairan. Berapa tinggi dan jari-jari yang dipilih untuk meminimumkan banyaknya bahan yang diperlukan untuk pembuatannya.

Penyelesaian :

h = tinggi kaleng (cm)

r = jari-jari kaleng (cm)

S = luas permukaan kaleng (cm^3)

Luas permukaan :

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (1)$$

Eliminasi salah satu peubah di atas sehingga S akan dinyatakan sebagai fungsi satu peubah. Karena isi kaleng $1000\ cm^3$, dengan rumus $V = \pi r^2 h$ untuk isi tabung diperoleh:

$$1000 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (2)$$

Subtitusi persamaan (2) ke persamaan (1) diperoleh

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (3)$$

r = jari-jari sehingga harus bernilai positif

Dengan menentukan nilai r pada $(0, +\infty)$ yang menyebabkan persamaan (3) minimum. Oleh karena S fungsi kontinu dari r pada $(0, +\infty)$ dengan

$$\lim_{r \to 0^+} \left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = +\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{r \to +\infty} \left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = +\infty$$

Sehingga persamaan (3) mempunyai minimum, tetapi bukan maksimum pada $(0, +\infty)$. Minimum harus terjadi di titik kritis dengan menghitung turunan pertamanya

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

Ambil $\frac{dS}{dr} = 0$ diperoleh

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \text{ atau } r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Karena $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ satu-satunya titik kritis pada selang $(0, +\infty)$, nilai r menghasilkan nilai minimum S, sehingga

$$h = \frac{1000}{\pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2\pi$$

Aplikasi Untuk Ekonomi

Tiga fungsi penting dalam ekonomi adalah:

$C(x)$ = total biaya produksi x unit produk selama periode waktu tertentu.

$R(x)$ = total hasil penjualan x unit produk selama periode waktu tertentu.

$P(x)$ = total keuntungan penjualan x unit selama periode waktu tertentu.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Total biaya $C(x)$ untuk produksi x unit dapat dinyatakan sebagai penjumlahan

$$C(x) = a + M(x)$$

Dengan a konstanta disebut *overhead* dan $M(x)$ adalah fungsi biaya pembuatan.

Biaya pembuatan $M(x)$ tergantung pada jumlah item pembuatan, biaya material dan buruh. Ini menunjukkan dalam ilmu ekonomi penyerdehanaan asumsi yang tepat $M(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M(x) = bx + cx^2$$

Dengan b dan c konstanta, sehingga

$$C(x) = a + bx + cx^2$$

Jika perusahaan dapat menjual semua item dengan p rupiah per biji, maka total pendapatan menjadi

$$R(x) = px$$

Dan total keuntungan menjadi

$$P(x) = [\text{total penghasilan}] - [\text{total biaya}] = [R(x)] - [C(x)]$$

Jadi, $P(x) = px - (a + bx + cx^2), \qquad 0 \le x \le l$

Contoh :

Pinicilin berbentuk cair dibuat oleh perusahaan farmasi dan dijual borongan dengan harga $Rp\ 200$ per unit. Jika total biaya produksi untuk x unit adalah

$$C(x) = 5.000.000 + 80x + 0,003\,x^2$$

Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 30.000 unit dalam waktu tertentu. Berapa banyak unit-unit pinicilin harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum?

Universitas Siber Asia

Penyelesaian :

Total penghasilan untuk penjualan x unit adalah $R(x) = 200x$ keuntungan $P(x)$ pada x unit menjadi:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (5.000.000 + 80x + 0{,}003x^2)$$

Karena kapasitas produksi terbesar 30.000 unit, berarti x harus terdapat pada selang $[0, 30000]$, turunan pertama dari $P(x)$

$$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0{,}006x) = 120 - 0{,}006x$$

Ambil $\frac{dP}{dx} = 0$

$$120 - 0{,}006x = 0$$

$$x = 20000$$

Karena titik kritis ini terdapat pada selang [0 , 30000], keuntungan maksimum harus terjadi di salah satu titik

$x = 0$, $x = 20000$, atau $x = 30000$

x	0	20000	30000
$P(x)$	−500000	700000	400000

Jadi keuntungan maksimum $P = Rp700.000$ terjadi pada saat $x = 20.000$ unit

Teorema Rolle; Teorema Nilai Rata-rata

Teorema Rolle : Diasumsikan f terdiferensial pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$. Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka terdapatlah sedikitnya satu titik c dalam (a, b) dimana $f'(c) = 0$.

Contoh :

Fungsi $f(x) = \sin x$ adalah kontinu dan terdiferensial di setiap titik, oleh karena itu kontinu pada $[0, 2\pi]$. Selanjutnya

$f(0) = \sin 0 = 0$ dan $f(2\pi) = \sin \pi = 0$

Sedemikian hingga f memenuhi hipotesa Teorema Rolle pada selang $[0, 2\pi]$. Karena $f'(c) = \cos c$, Teorema Rolle menjamin bahwa terdapat sedikitnya satu titik c pada $(0, 2\pi)$ sedemikian hingga $\cos c = 0$ menghasilkan dua nilai untuk c, yaitu $c_1 = \frac{\pi}{2}$ dan $c_2 = \frac{3\pi}{2}$

Teorema Nilai Rata – Rata : Jika f dapat diturunkan pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$, maka terdapat sedikitnya satu titik c dalam (a, b)

sehingga $f' = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Contoh :

Diberikan $f(x) = x^3 + 1$ tunjukkan bahwa f memenuhi hipotesa Teorema Nilai Rata – Rata pada selang $[1, 2]$ dan tentukan semua nilai c pada selang yang titik ekstrimnya dijamin oleh teorema.

Penyelesaian :

Karena f polinomial, maka f kontinu dan terdiferenrial dimana-mana. Oleh karena itu f kontinu pada $[1, 2]$ dan terdiferensial pada $(1, 2)$ sehingga hipotesa Teorema Nilai Rata-rata dipenuhi oleh $a = 1$ dan $b = 2$

$f(a) = f(1) = 2$ $\quad$ $f(b) = f(2) = 9$

$f'(x) = 3x^2$ $\quad$ $f'(c) = 3c^2$

Sehingga dari teorema rata-rata

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$3c^2 = \frac{9 - 2}{2 - 1}$$

$$3c^2 = 7$$

$$c = \sqrt{7/3} \text{ dan } c = -\sqrt{7/3}$$

Karena $c = \sqrt{7/3}$ berada dalam selang $(1, 2)$ maka $c = \sqrt{7/3}$ adalah bilangan yang eksistensinya dijamin oleh Teorema Nilai Rata-Rata.

Akibat Teorema Nilai Rata-Rata

Diberikan fungsi kontinu f pada selang tertutup $[a,b]$ dan terdiferensial pada selang terbuka (a,b).

a. Jika $f'(\ )$

b. Jika $f'(\ )$ [ ]

c. Jika $f'(\ ) = 0$ untuk setiap x pada (a,b) maka f konstan pada $[a,b]$

- x > 0 untuk setiap x pada (a,b) maka f naik pada $[a,b]$
- x < 0 untuk setiap x pada (a,b) maka f turun pada a,b
- x

Teorema : Jika f dan g kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan jika $f'(x) = g'(x)$ untuk semua x dalam selang terbuka (a,b), maka f dan g dibedakan oleh konstanta pada $[a,b]$ artinya terdapat konstanta k sedemikian hingga $f(x) - g(x) = k$ untuk semua x dalam $[a,b]$