KALKULUS

Bagian 4. Turunan dan Integral

Sesi Online 13

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

Integral TerTentu

- Integral tertentu adalah integral dari suatu fungsi yang nilai-nilai variabel bebasnya (memiliki batas-batas) tertentu.
- Jika fungsi terdefinisi pada interval tertutup [a,b] , maka integral tertentu dari a ke b dinyatakan oleh :
- Dimana :

$$\int_a^b f(x)dx$$

- f(x) : integran
  a : batas bawah
  b : batas atas

KAIDAH –KAIDAH INTEGRASI TERTENTU

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^5 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 = \frac{1}{5}[x^5]_2^5 = \frac{1}{5}(5^5 - 2^5)$$

$$= \frac{1}{5}(3125 - 32) = 618,6$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_2^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^2 = \frac{1}{5}[x^5]_2^2 = \frac{1}{5}(2^5 - 2^5)$$

$$= \frac{1}{5}(32 - 32) = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$-\int_5^2 x^4 dx = -\left[\frac{x^5}{5}\right]_5^2 = -\frac{1}{5}[x^5]_5^2 = -\frac{1}{5}(2^5 - 5^5)$$

$$= -\frac{1}{5}(32 - 3125) = 618,6$$

Universitas Siber Asia

KAIDAH – KAIDAH INTEGRASI TERTENTU

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_2^5 5x^4dx = 5\left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 = 5.\frac{1}{5}\left[x^5\right]_2^5$$

$$= 3125 - 32 = 3093$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

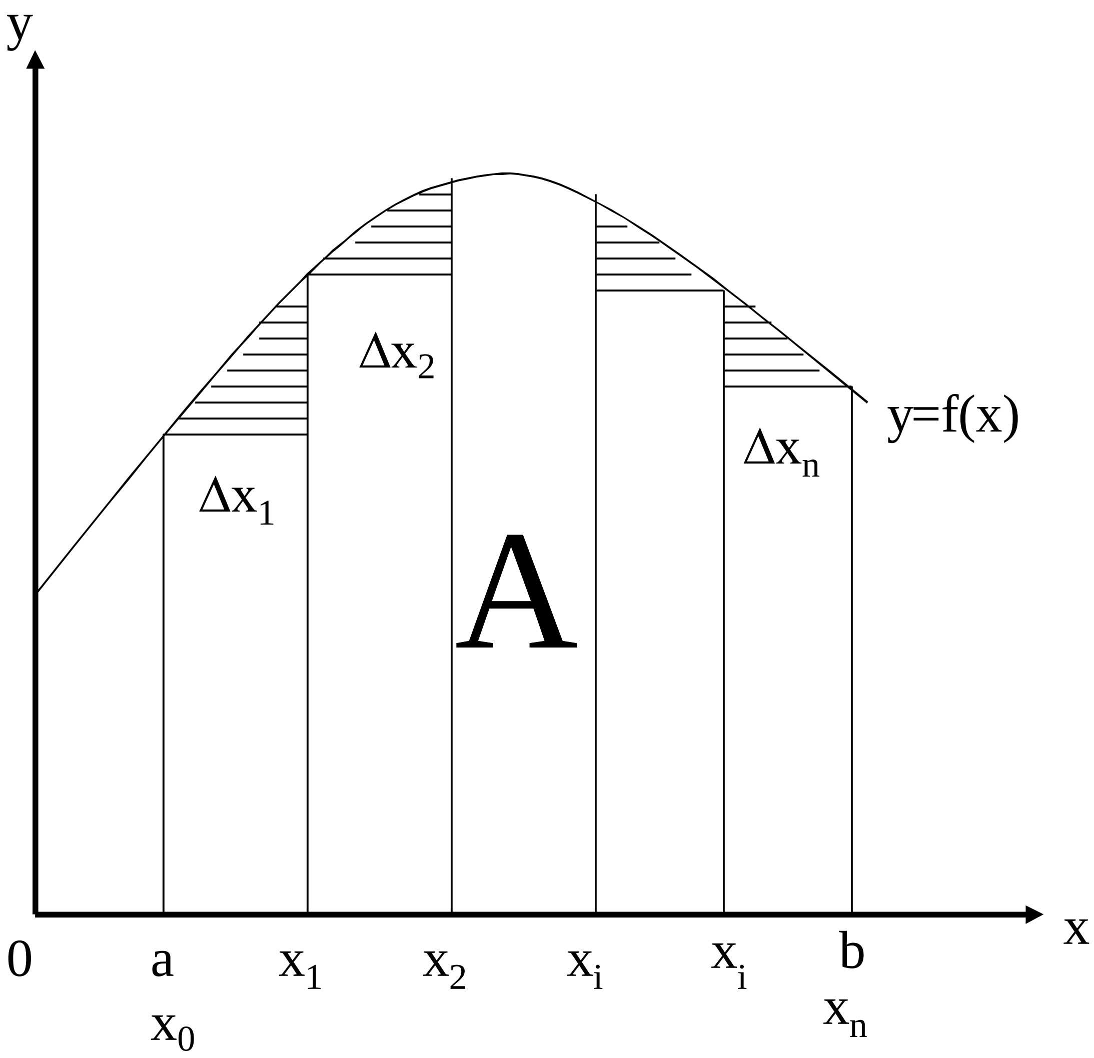
$$\int_2^5 \left(x^4 + 5x^4\right)dx = \int_2^5 x^4dx + \int_2^5 5x^4dx$$

$$= 618{,}6 + 3093 = 3.7111{,}6$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_2^3 x^4dx + \int_3^5 x^4dx = \int_2^5 x^4dx = 618{,}6$$

Aplikasi Integral Tertentu Luas



Nilai atau harga masing-masing titik yang membatasi tiap sub-rentangan adalah :

$X_0 = a$

$X_1 = a + \Delta x$

$X_2 = a + 2\ (\Delta x)$

…………………

$X_n = a + n\ (\Delta x) = b$

Aplikasi Integral TerTentu

- L = f(x_1). Δx_1+f(x_2). Δx_2+f(x_3). Δx_3+……f(x_n). Δx_n

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

- Jika n bertambah, maka L akan lebih mendekati nilai A yang merupakan luas daerah yang sebenarnya
- Jika n menuju tak hingga , maka dapat dikatakan bahwa luas daerah A dapat dinyatakan oleh :

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

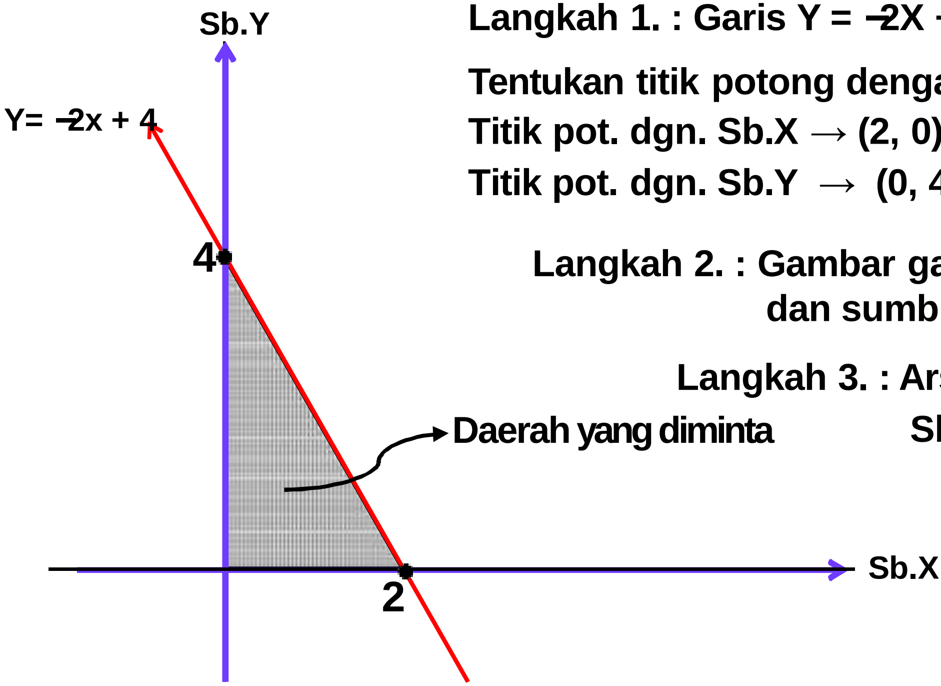
Langka-lhangkah
Menghitung Luas Daerah :

1. **Tentukan daerah yang diminta dengan menggambar daerahnya**
2. **Perhatikan daerah yang dimaksud untuk menentukan batas-batas integrasinya**
3. **Tentukan rumus luas yang lebih mudah digunakan (L = $\int$ y *dx* *atau L =* $\int$ *x dy)***
4. **Hitung nilai integral sebagai hasil luas daerah**

Menggambar Daerah

I. Garis dan sumbu-sumbu koordinat

a. Daerah yang dibatasi oleh garis $Y = -2x + 4$, sb.Y dan sb.X



Langkah 1. : Garis $Y = -2X + 4$,

Tentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat

Titik pot. dgn. Sb.X → (2, 0)

Titik pot. dgn. Sb.Y → (0, 4)

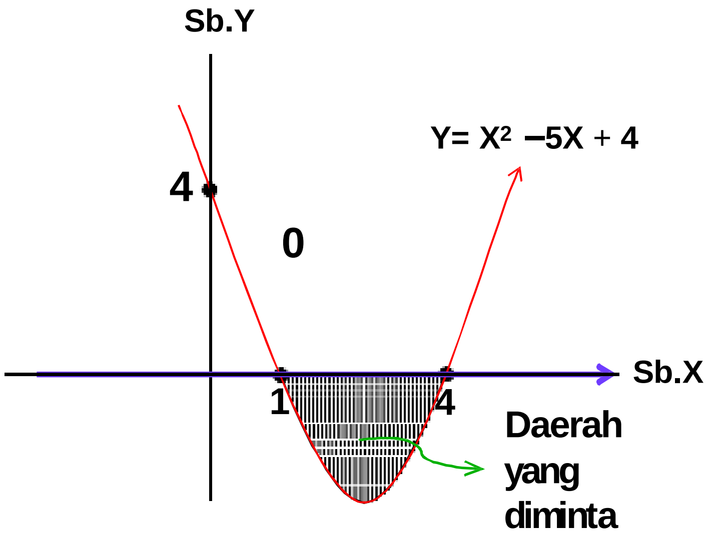
Langkah 2. : Gambar garis tersebut yang melalui titik pot. dan sumbu-sumbu koordinat

Langkah 3. : Arsir daerah yang ada diantara garis Sb.Y dan Sb.X

Menggambar Daerah

II. Kurva dan sumbu-sumbu koordinat

b. Daerah yang dibatasi oleh Kurva $Y = X^2 - 5X + 4$ dan sb.X



Langkah 1. : Garis $Y = X^2 - 5X + 4$,

Tentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat

Titik pot. dgn. Sb.X → (1, 0) & (4,0)

Titik pot. dgn. Sb.Y → (0, 4)

Langkah 2. : Gambar kurva tsb. yang melalui titik pot. dan sumbu *x*

Langkah 3. : Arsir daerah yang ada diantara kurva dan Sb.X

Catatan:

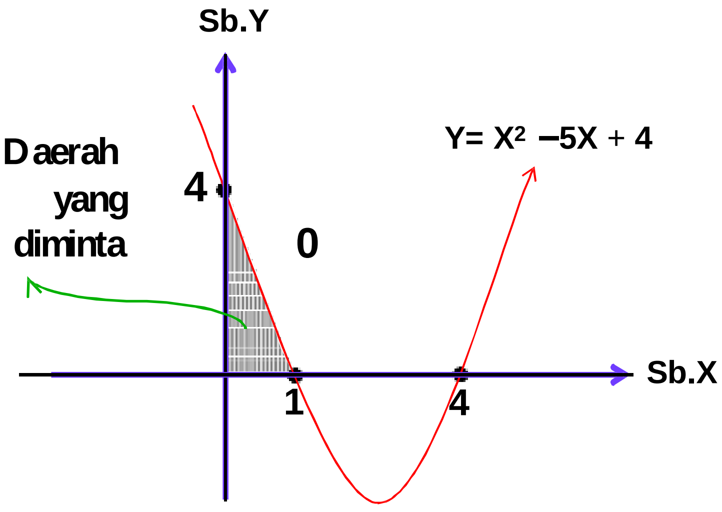
Untuk mencari titik potong dengan sumbu X, gunakan faktorisasi

Letak daerah ada di bawah sumbu, maka luasnya = –nilai integral

Menggambar Daerah

II. Kurva dan sumbu-sumbu koordinat

c. Daerah yang dibatasi oleh Kurva $Y = X^2 - 5X + 4$, sb.Y dan sb.X



Langkah 1. : Kurva $Y = X^2 - 5x + 4$,

Tentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat

Titik pot. dgn. Sb.X → (1, 0) & (4,0)

Titik pot. dgn. Sb.Y → (0, 4)

Langkah 2. : Gambar kurva tsb. yang melalui titik pot. dan sumbu-sumbu koordinat

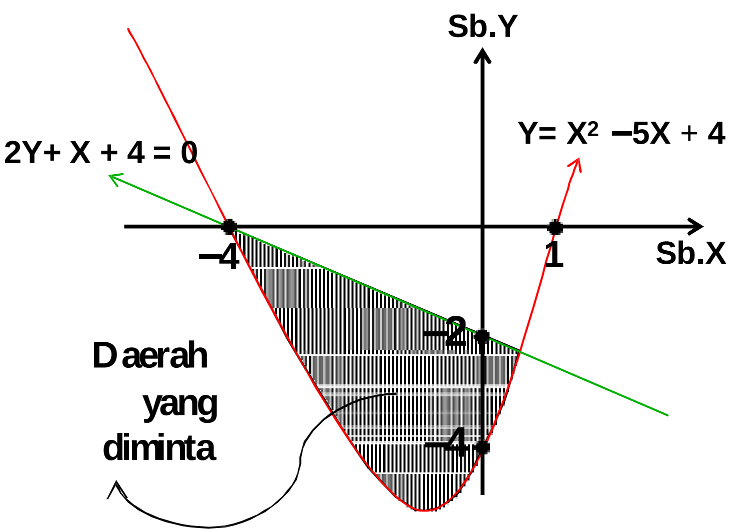
Langkah 3. : Arsir daerah yang ada diantara kurva Sb.Y dan Sb.X

Catatan: Untuk mencari titik potong dengan sumbu X, gunakan faktorisasi

Menggambar Daerah

III. Kurva dan garis

d. Daerah yang dibatasi oleh Kurva $Y = X^2 + 3X - 4$, dan $2Y + X - 4 = 0$



Langkah 1. : Garis $Y = X^2 + 3X - 4$,

Tentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat

Titik pot. dgn. Sb.X → (1, 0) & (-4,0)

Titik pot. dgn. Sb.Y → (0, -4)

Langkah 2. : Garis $2Y + X - 4 = 0$,

Tentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat

Titik pot. dgn. Sb.X → (-4, 0)

Titik Pot. Dgn. Sb.Y → (0, -2)

Langkah 3. : Gambar kurva tsb. yang melalui titik pot. dan Garisnya

Langkah 4. : Arsir daerah yang ada diantara kurva Sb.Y dan Sb.X

Catatan: Batas-batas daerah tersebut adalah kedua titik potong kurva dan garis

MENENTUKAN BATAS-BATAS INTEGRASI :

1. **Batas-batas integrasi merupakan nilai awal dan akhir pada sumbu koordinat dari suatu daerah yang akan dihitung.**
2. **Batas-batas integrasi tergantung pada arah integrasi yang dilakukan:**

$$\boxed{L = \int_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

a merupakan batas bawah (awal)
b merupakan batas atas (akhir)
a dan ***b*** terlat pada sumbu ***x***

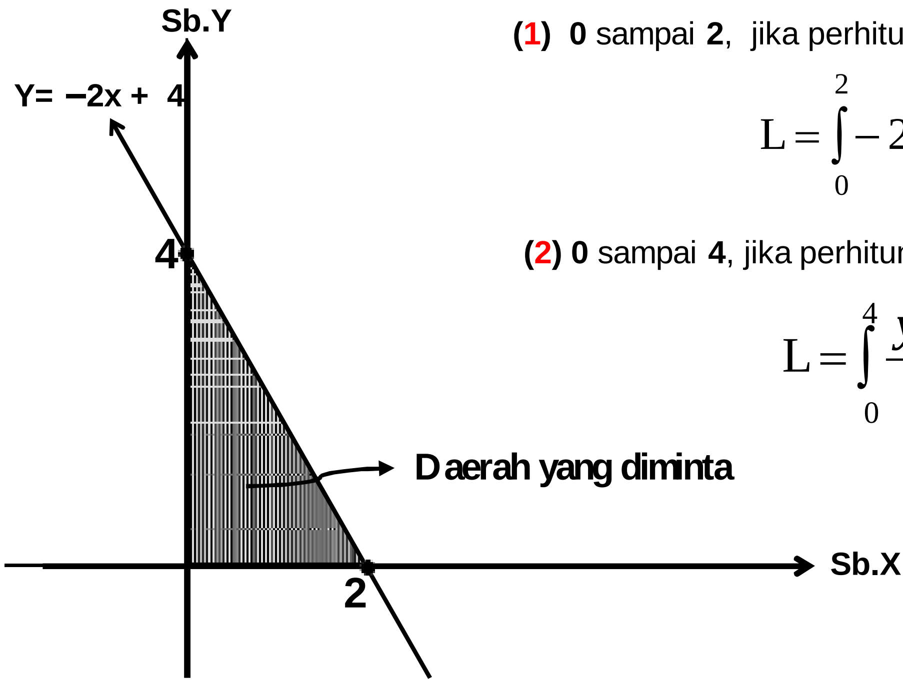
$$\boxed{L = \int_{c}^{d} f(y)\,dy}$$

c merupakan batas bawah (awal)
d merupakan batas atas (akhir)
c dan ***d*** terletat pada sumbu ***y***

Menentukan Batas-batas

I. Garis dan sumbu-sumbu koordinat

a. Daerah yang dibatasi oleh garis Y= –2x + 4, sb.Y dan sb.X



Batas-batas integrasi ada dua, yaitu:

(1) 0 sampai **2**, jika perhitungan integral berbasis (ke arah) Sb. ***X***

$$L = \int_0^2 -2\boldsymbol{x} + 4\ \boldsymbol{dx}$$

(2) 0 sampai **4**, jika perhitungan integral berbasis (ke arah) Sb. ***Y***

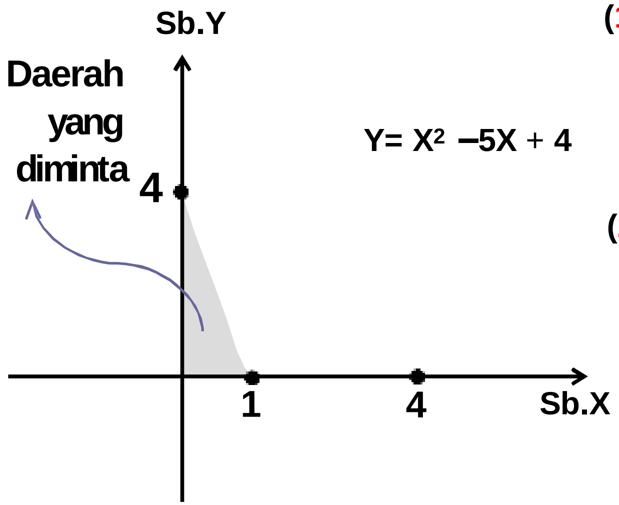
$$L = \int_0^4 \frac{\boldsymbol{y} - 4}{2}\ \boldsymbol{dy}$$

Menentukan Batas-batas

II. Kurva dan sumbu koordinat

b. Daerah yang dibatasi oleh Kurva Y= X² –5X + 4, sb.Y dan sb.X

Batas-batas integrasi ada dua, yaitu:



(1) 0 sampai **1**, jika perhitungan integral berbasis (ke arah) Sb. ***X***

$$\boxed{L = \int_{0}^{1} x^2 - 5x + 4 \, dx}$$

(2) 0 sampai **4**, jika perhitungan integral berbasis (ke arah) Sb. ***Y***
Karena basis yang kita gunakan adalah Sb.y, maka
Persamaan kurva $f(x)$ diubah menjadi $f(y)$.

$$y = x^2 - 5x + 4$$

$$y = (x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} + 4 = (x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{9}{4}$$

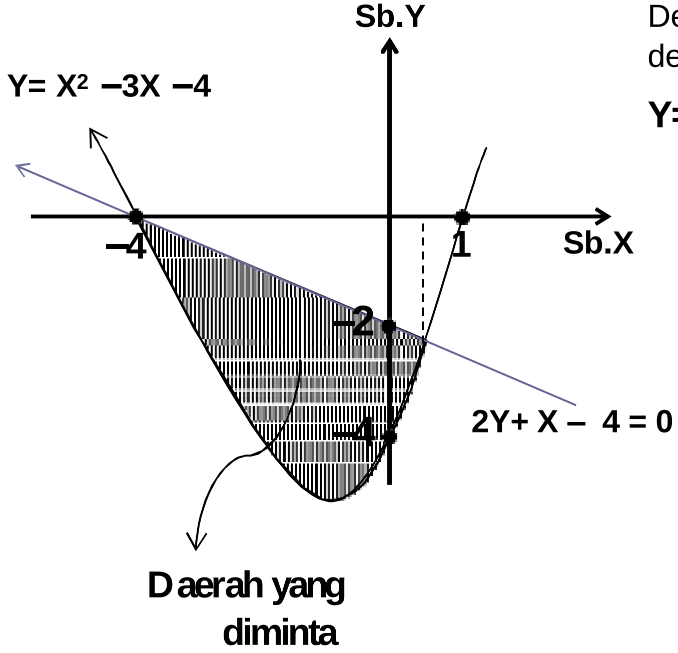
$$x = \sqrt{y + \tfrac{9}{4}} + \tfrac{5}{2}$$

$$L = \int_{0}^{4} \sqrt{y + \tfrac{9}{4}} + \tfrac{5}{2} \, dy$$

Menentukan Batas-batas

III. Kurva dan garis

b. Daerah yang dibatasi oleh Kurva Y= X² + 3X –4, dan 2Y+X + 4 = 0



Batas- batas integrasi (berbasis Sb.*x*)

Dengan memperhatikan gambar, maka batas-batas diperoleh dengan cara mencari titik-titik potong kurva dan garis, yaitu

Y= X² + 3X –4, disubtitusikan ke 2Y+X –4 = 0

$$2(x^2 + 3x - 4) + x + 4 = 0$$

$$2x^2 + 6x - 8 + x + 4 = 0$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

$$(2x + 8)(2x - 1) = 0$$

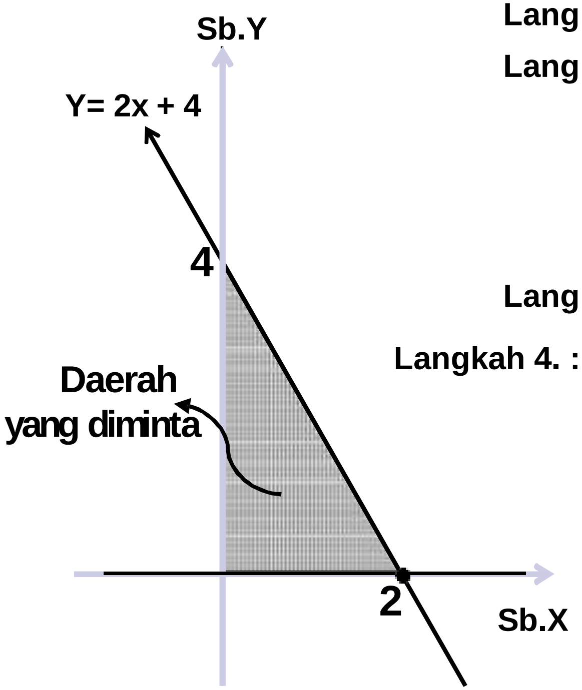
$$x_1 = -4 \text{ dan } x_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathrm{L} = \int_{-4}^{\frac{1}{2}} (x^2 + 3x - 4) - \left(\frac{4 - x}{2}\right) dx$$

Contoh Soal 1

I. Garis dan sumbu-sumbu koordinat

a. Daerah yang dibatasi oleh garis Y= -2x + 4**, sb.Y dan sb.X**



Langkah 1. : Gambar daerah yang dimaksud

Langkah 2. : Tentukan basis yang akan di gunakan

$$\boxed{\mathrm{L} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

Langkah 3. : Tentukan batas-batasnya (0 dan 2)

Langkah 4. : Hitung luas daerah dengan Menentukan nilai integralnya.

$$\mathrm{L} = \int_{0}^{2} -2x + 4\,dx = -x^2 + 4x \Big|_{0}^{2}$$

$$\mathrm{L} = (-2^2 + 4.2) = 4 \text{ satuan luas}$$

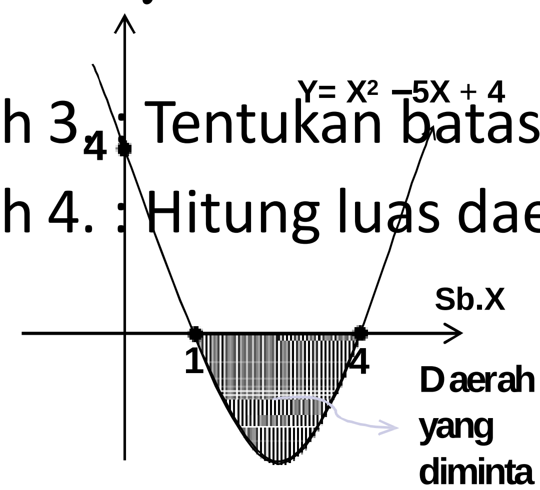
Contoh Soal 2

II. Kurva dan sumbu-sumbu koordinat

b. Daerah yang dibatasi oleh Kurva Y= X² −5X + 4 dan sb.X

Langkah 1. : Gambar daerah yang dimaksud

- Langkah 2. : Tentukan basis yang akan di gunakan
  - $L = \int_a^b f(x)\,dx$



- Langkah 3. : Tentukan batas-batasnya (1 dan 4)
- Langkah 4. : Hitung luas daerah dengan menentukan nilai integralnya.

$$L = -\int_1^4 x^2 - 5x + 4\,dx = -\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_1^4$$

$$L = -\left(\tfrac{1}{3}4^3 - \tfrac{5}{2}4^2 + 4.4\right) + \left(\tfrac{1}{3}1^3 - \tfrac{5}{2}1^2 + 4.1\right)$$

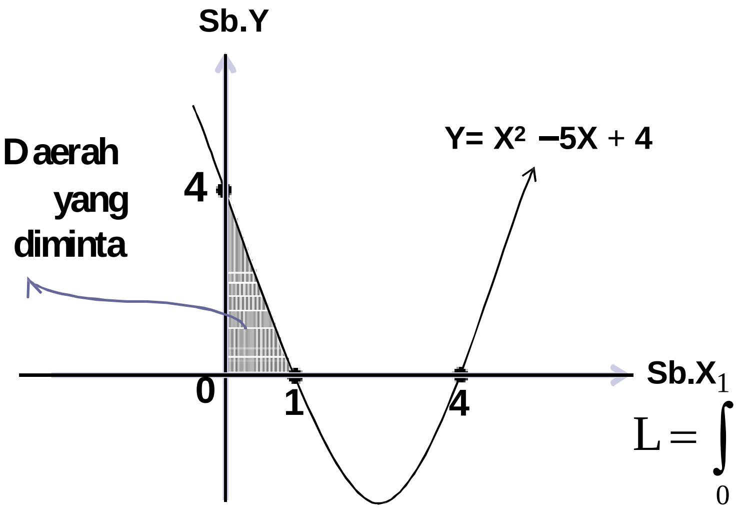
$$L = -\left(\tfrac{64}{3} - \tfrac{80}{2} + 16\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{2} + 4\right)$$

$$L = -\left(-\tfrac{16}{6}\right) + \left(\tfrac{11}{6}\right) = 4.5 \text{ satuan luas}$$

Contoh Soal 3

II. Kurva dan sumbu-sumbu koordinat

c. Daerah yang dibatasi oleh Kurva Y= X² – 5X + 4, sb.Y dan sb.X



Langkah 1. : Gambarkan daerah yang dimaksud

Langkah 2. : Tentukan basis yang akan di gunakan

$$\boxed{L = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Langkah 3. : Tentukan batas-batasnya (0 dan 4)

Langkah 4. : Hitung luas daerah dengan menentukan nilai integralnya.

$$L = \int_0^1 x^2 - 5x + 4\,dx = \left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_0^4$$

$$L = \left(\tfrac{1}{3}1^3 - \tfrac{5}{2}1^2 + 4.1\right) - \left(\tfrac{1}{3}0^3 - \tfrac{5}{2}0^2 + 4.0\right)$$

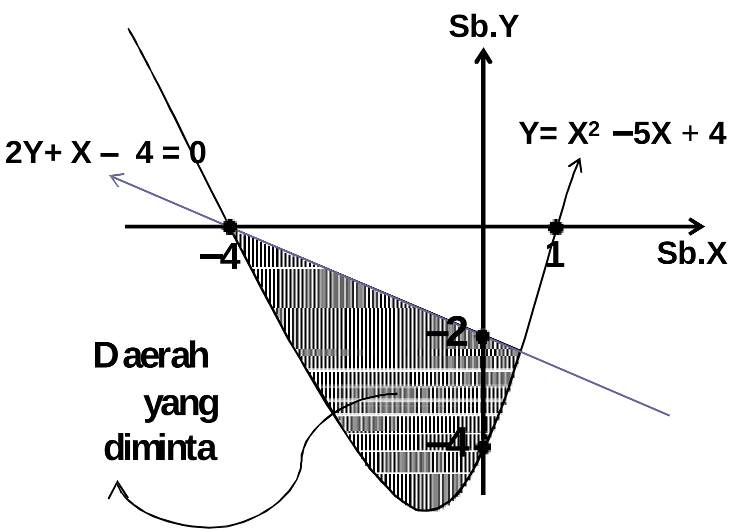
$$L = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{2} + 4\right) - (0 - 0 + 0)$$

$$L = \left(\tfrac{10}{6}\right) - 0 = 1.667 \text{ satuan luas}$$

Contoh Soal 3

III. Kurva dan garis

d. Daerah yang dibatasi oleh Kurva $2Y+X-4=0$ dan $Y=X^2+3X-4$



Langkah 1. : Gambarkan daerah yang dimaksud

Langkah 2. : Tentukan basis yang akan di gunakan

$$\boxed{L=-\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx}$$

Langkah 3. : Tentukan batas-batasnya (-4 dan 1)

Langkah 4. : Hitung luas daerah dengan menentukan nilai integralnya.

$$L=-\int_{-4}^{1}\left(\tfrac{-x+4}{2}\right)-\left(x^2+3x-4\right)dx=\int_{-4}^{1}\left(x^2+\tfrac{5}{2}x-6\right)dx$$

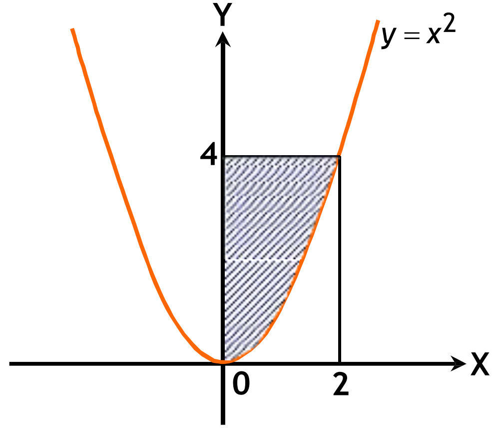
$$L=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{5}{4}x^2-6x\Big|_{-4}^{1}$$

$$L=\ldots.$$

$$L=\ldots.\text{ satuan luas}$$

Soal 1.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai ....



A. $\int_0^2 x^2\,dx$

B. $\int_0^4 y\,dy$

C. $\int_0^4 x^2\,dx$

D. $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

E. $\int_0^4 (4 - x^2)\,dx$

Soal 1.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai ....

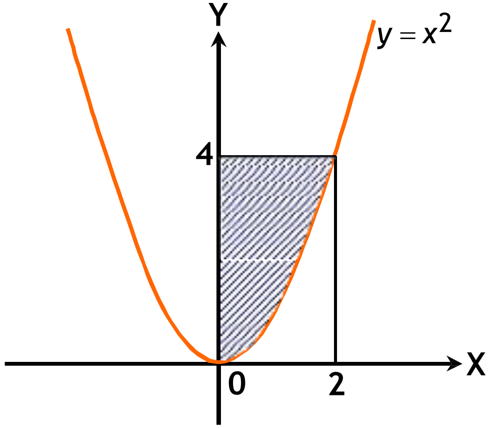
A. $\int_0^2 x^2\,dx$

B. $\int_0^4 y\,dy$

C. $\int_0^4 x^2\,dx$

D. $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

E. $\int_0^4 (4 - x^2)\,dx$



Jawaban anda benar

$\Delta L \approx (4 - x^2)\,\Delta x$

$L \approx \sum (4 - x^2)\,\Delta x$

$L = \lim \sum (4 - x^2)\,\Delta x$

$L = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$ (Jawaban D)