KALKULUS

Bagian 3. Fungsi dan Limit

Sesi Online 5

Limit

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS SIBER ASIA

Oleh :

Ambros Magnus Rudolf Mekeng,S.T,M.T

Outline

1. Pengertian limit
2. Teorema limit

Pengertian Limit

Pengertian limit secara intuisi

Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

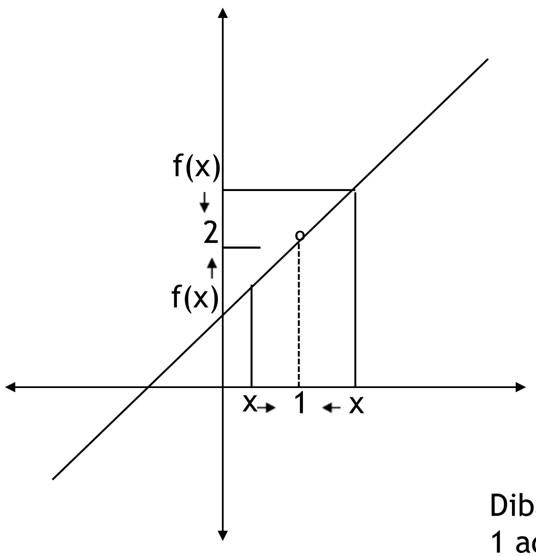
Fungsi diatas tidak terdefinisi di x=1, karena di titik tersebut f(x) berbentuk 0/0. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai f(x) jika x mendekati 1

Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai f(x) bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\rightarrow$? $\leftarrow$	2.0001	2.001	2.01	2.1

Universitas Siber Asia

Grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa f(x) mendekati 2 jika x mendekati 1

Secara matematis dapat dituliskan Sebagai berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca " limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 2

Definisi (limit secara intuisi). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$

berarti bahwa bilamana x dekat, tetapi berlainan dengan c, maka f(x) dekat ke L

Teorema Limit

Sifat-sifat dasar limit yang dinyatakan dalam beberapa teorema berikut ini sangat diperlukan dalam hitung limit.

1. $\lim\limits_{x \to c} A = A \ , \quad A, c \in R$

2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ keduanya ada dan $k \in R$ maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

1 $\lim\limits_{x \to c} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$

2 $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

3 $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) . \lim\limits_{x \to c} g(x)$

4 $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}, \textit{asalkan} \ \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

Teorema (Sifat Limit)

1. $\lim_{x \to c} k = k$;
2. $\lim_{x \to c} x = c$;
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;
7. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, provided $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, provided $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ when n is even.

Pemecahan Soal Limit

Untuk menyelesaikan soal limit dapat dilakukan dengan beberapa cara.

1. Substitusi langsung
2. Dengan menyederhanakan (Pemfaktoran, Perasionalan akar)
3. Dengan prinsip limit sepihak (kiri dan kanan)

Contoh

Hitunglah nilai limit berikut ini! (Subtitusi Langsung)

a. $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 5)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 7x + 6)$

c. $\lim\limits_{x \to 1} 7x\sqrt{2x - 1}$

d. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x + 3}{5x + 2}$

Solusi

a. $\lim_{x \to 2} (3x-5) = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1$

b. $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 7x + 6) = 2(2)^2 - 7(2) + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$

c. $\lim_{x \to 1} 7x\sqrt{2x-1} = 7(1)\sqrt{2(1)-1} = 7\sqrt{1} = 7$

d. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x+3}{5x+2} = \dfrac{2(-1)+3}{5(-1)+2} = \dfrac{-2+3}{-5+2} = -\dfrac{1}{3}$

Contoh

Hitunglah nilai limit berikut ini!(Pemfaktoran)

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Jawab

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{4 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) . Untuk menyelesaikannya maka digunakan cara pemfaktoran sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Solusi

b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 3(2) + 2}{2^2 - 4} = \frac{4 - 6 + 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) . Untuk menyelesaikannya maka digunakan cara pemfaktoran sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Contoh

Hitunglah nilai limit berikut ini! (Perasionalan)

Akar)

a. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

b. $\lim_{x \to -1} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x^2}$

Solusi:

a. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{0}{0}$(tidak terdefinisi)

Universitas Siber Asia

Solusi

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Solusi

b. $$\lim_{x\to -1}\frac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x^2}=\frac{2-\sqrt{(-1)^2+3}}{1-(-1)^2}=\frac{2-\sqrt{4}}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x^2}\cdot\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2^2-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}{\left(1-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{4-\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{1-x^2}}{\cancel{\left(1-x^2\right)}\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{2+\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{(-1)^2+3}}=\frac{1}{2+\sqrt{4}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$