

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
МАИ

---

Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»  
Кафедра 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»

Курсовая работа на тему:  
«Метод наименьших квадратов»

по дисциплине  
Теория вероятностей и математическая статистика

Студент: Манташев А.У.  
Группа: М8О-305Б-20  
Преподаватель: Ибрагимов Д. Н.  
Дата:  
Оценка:

МОСКВА, 2022

### Описание модели

Модель полезного сигнала имеет вид:

$$y(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \dots + \theta_m x^m. \quad (1)$$

Рассматривается модель наблюдений:

$$y_k = \theta_0 + \theta_1 x_k + \dots + \theta_m x_k^m + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

где  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  – независимые и одинаково распределённые случайные величины.

### Моделирование данных

Смоделировать два набора наблюдений на основе модели (2) для следующих случаев:

1 случай	2 случай
$m = 3, \varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$	$m = 2, \varepsilon_k \sim \mathcal{R}(-3\sigma, 3\sigma)$
$x_k = -4 + k \cdot \frac{8}{n}, k = \overline{1, n}, n = 40.$	

Параметры задания определяются номером варианта

Вариант 12
$\theta_1 = 6, \theta_2 = 5, \theta_3 = -0.07, \sigma^2 = 2.4$

$\theta_0 = (-1)^N N$ , где  $N$  – номер варианта

### Задание

Для обоих случаев выполнить по очереди следующие задания.

1. Подобрать порядок многочлена  $\hat{m}$  в модели (1), используя критерий Фишера, и вычислить оценки неизвестных параметров  $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$  методом наименьших квадратов.
2. В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности  $\alpha_1 = 0.95$  и  $\alpha_2 = 0.99$  для параметров  $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$ .
3. В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности  $\alpha_1 = 0.95$  и  $\alpha_2 = 0.99$  для полезного сигнала (1).
4. Представить графически
  - истинный полезный сигнал,
  - набор наблюдений,
  - оценку полезного сигнала, полученную в шаге 1,
  - доверительные интервалы полезного сигнала, полученные в шаге 3.
5. По остаткам регрессии построить оценку плотности распределения случайной ошибки наблюдения в виде гистограммы.
6. Вычислить оценку дисперсии  $\sigma^2$  случайной ошибки.

7. По остаткам регрессии с помощью  $\chi^2$  - критерия Пирсона на уровне значимости 0.05 проверить гипотезу о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным.

### Случай 1

1. Был подобран  $m = 3$  и вычислены  $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$  методом наименьших квадратов

При  $m = 1$   $T(Z_n) = 3.794388135024862$

При  $m = 2$   $T(Z_n) = 82.55599646513845$

При  $m = 3$   $T(Z_n) = 5.007884644858172$

При  $m = 4$   $T(Z_n) = 0.146346674209974 < 2.02$

2. Доверительные интервалы уровней надёжности  $\alpha_1 = 0.95$  и  $\alpha_2 = 0.99$  для параметров  $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$ .

Для альфа = 0.95  $t_{0.975}(37) = 2.03$

Доверительный интервал для  $\theta_0$ : [ 11.82951; 13.17822]

Доверительный интервал для  $\theta_1$ : [ 5.90638; 6.8783]

Доверительный интервал для  $\theta_2$ : [ 4.87036; 5.06081]

Доверительный интервал для  $\theta_3$ : [ -0.16167; -0.06853]

Для альфа = 0.99  $t_{0.995}(37) = 2.72$

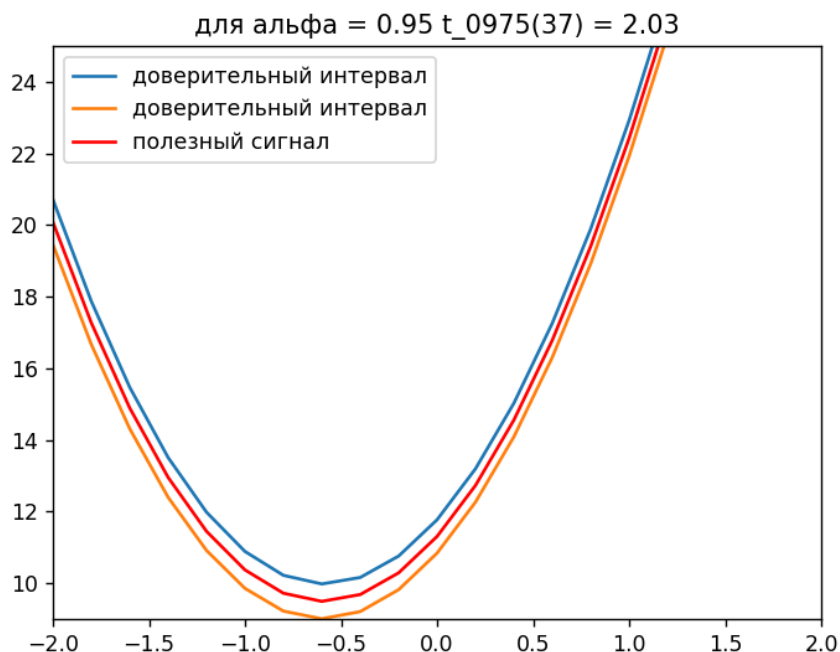
Доверительный интервал для  $\theta_0$ : [ 11.60013; 13.40761]

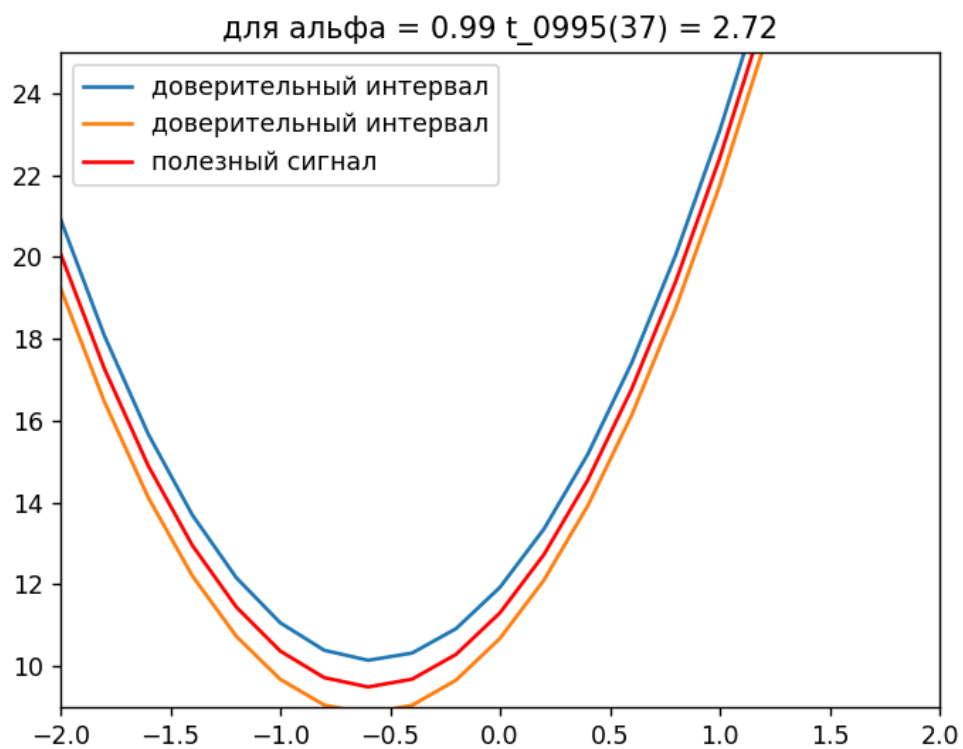
Доверительный интервал для  $\theta_1$ : [ 5.74107; 7.04361]

Доверительный интервал для  $\theta_2$ : [ 4.83797; 5.0932]

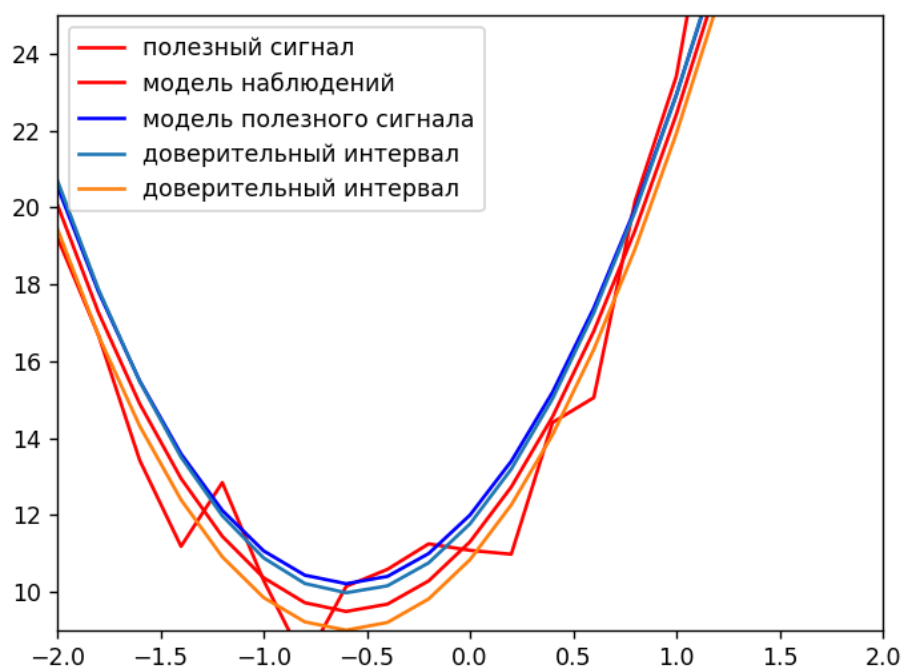
Доверительный интервал для  $\theta_3$ : [ -0.17751; -0.05269]

3. Построены доверительные интервалы уровней надёжности  $\alpha_1 = 0.95$  и  $\alpha_2 = 0.99$  для полезного сигнала (1).

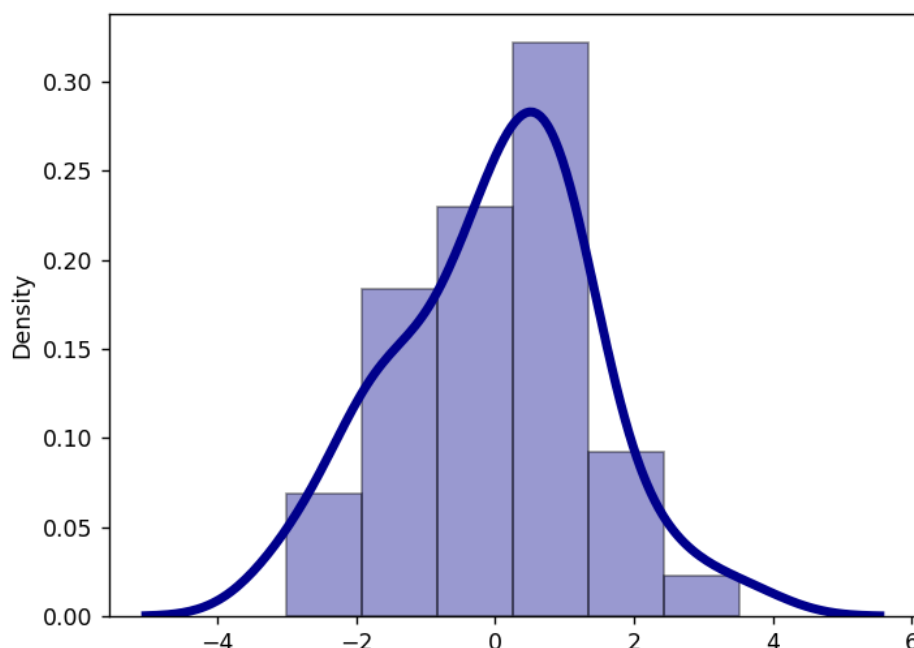




4.



5.



6.

$$\sigma^2 = 1.9445258065459896$$

7. Распределение является нормальным, так как с помощью  $\chi^2$  - критерия Пирсона на уровне значимости 0.05 проверена гипотеза о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным  $5.350987688619938 < 14.067$  гипотеза верна

### Случай 2

1. Был подобран  $m = 2$  и вычислены  $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$  методом наименьших квадратов
 

При $m = 1$	$T(Z_n) = 3.837504330324228$
При $m = 2$	$T(Z_n) = 97.41316117615246$
При $m = 3$	$T(Z_n) = 1.882595102361454 < 2.02$
2. Доверительные интервалы уровней надёжности  $\alpha_1 = 0.95$  и  $\alpha_2 = 0.99$  для параметров  $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$ .

Для альфа = 0.95  $t_{0.975}(37) = 2.03$

Доверительный интервал для  $\theta_0$ : [ 11.28418; 12.77372]

Доверительный интервал для  $\theta_1$ : [ 5.16196; 5.59415]

Доверительный интервал для  $\theta_2$ : [ 4.84437; 5.05289]

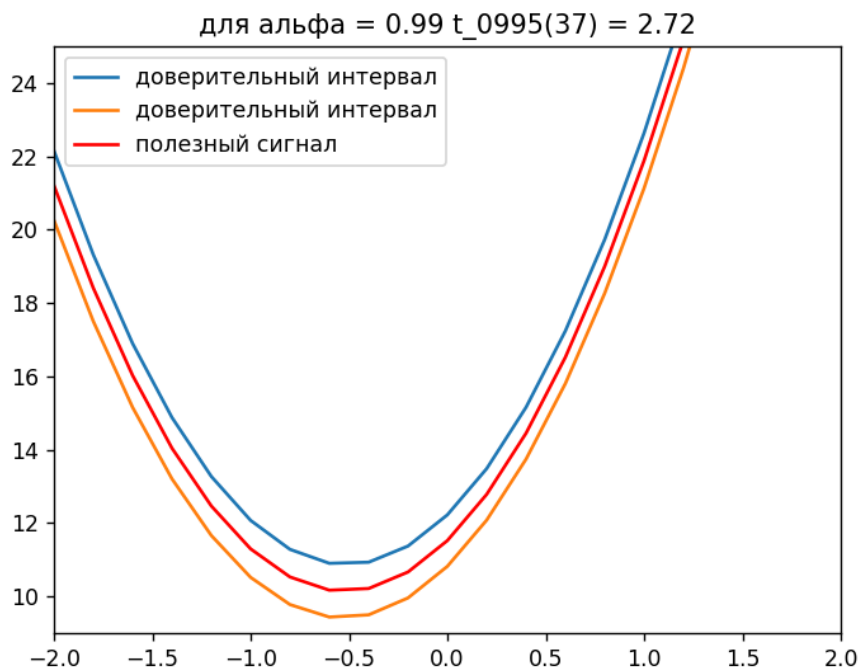
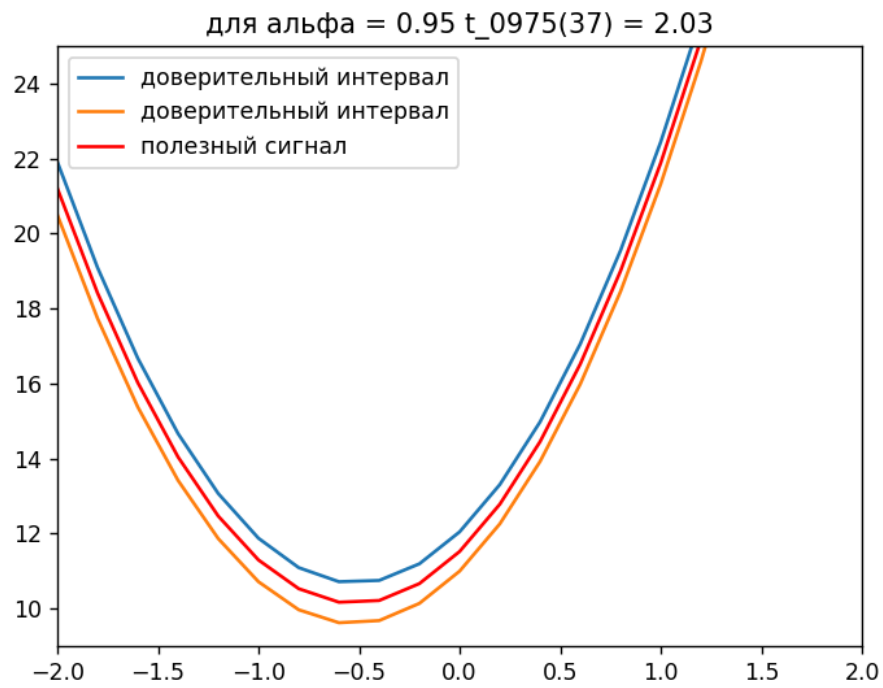
Для альфа = 0.99  $t_{0.995}(37) = 2.72$

Доверительный интервал для  $\theta_0$ : [ 11.03138; 13.02653]

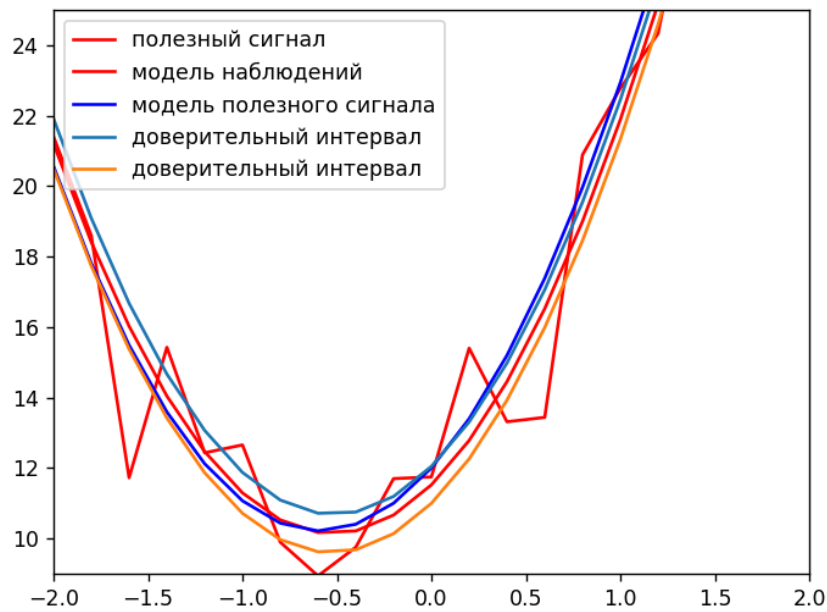
Доверительный интервал для  $\theta_1$ : [ 5.08861; 5.6675]

Доверительный интервал для  $\theta_2$ : [ 4.80898; 5.08828]

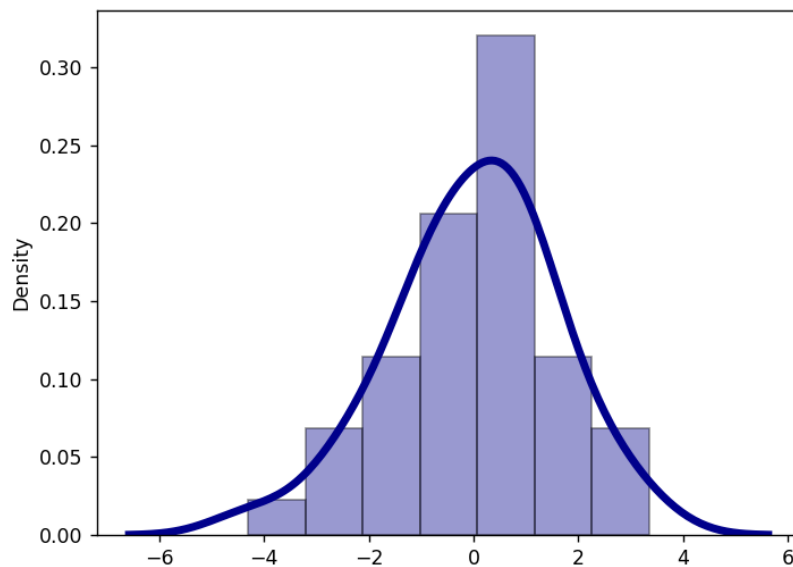
3. Построены доверительные интервалы уровней надёжности  $\alpha_1 = 0.95$  и  $\alpha_2 = 0.99$  для полезного сигнала (1).



4.



5.



6.

$$\sigma^2 = 2.4597280768259853$$

7. Распределение является нормальным, так как с помощью  $\chi^2$  - критерия Пирсона на уровне значимости 0.05 проверена гипотеза о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным  $9.416620830232995 < 14.067$  гипотеза верна

