Dokumentacja
Zadanie 1.6

Ciesielski Mateusz
Kasztelan Damian
Matyjas Sebastian
Grupa 1

Treść:

$$x-4+\ln(x)=0$$

Zadanie:

- Napisać program realizujący metodę siecznych dla powyższego zadania. Uruchamiać program dla różnych punktów startowych metody.
- Przeanalizować metodę stycznych i metodę iteracji prostych dla tego równania i jeśli okaże się to możliwe, zaimplementować te metody. Program uruchamiać z różnymi punktami startowymi i po wykonaniu metody wyświetlać stosowne komunikaty dotyczące wyniku, tj, czy metoda jest zbieżna, czy rozbieżna dla danego warunku początkowego i z jakiego powodu.

Szukać miejsc zerowych układu równiania nieliniowego mozna na dwa sposoby:

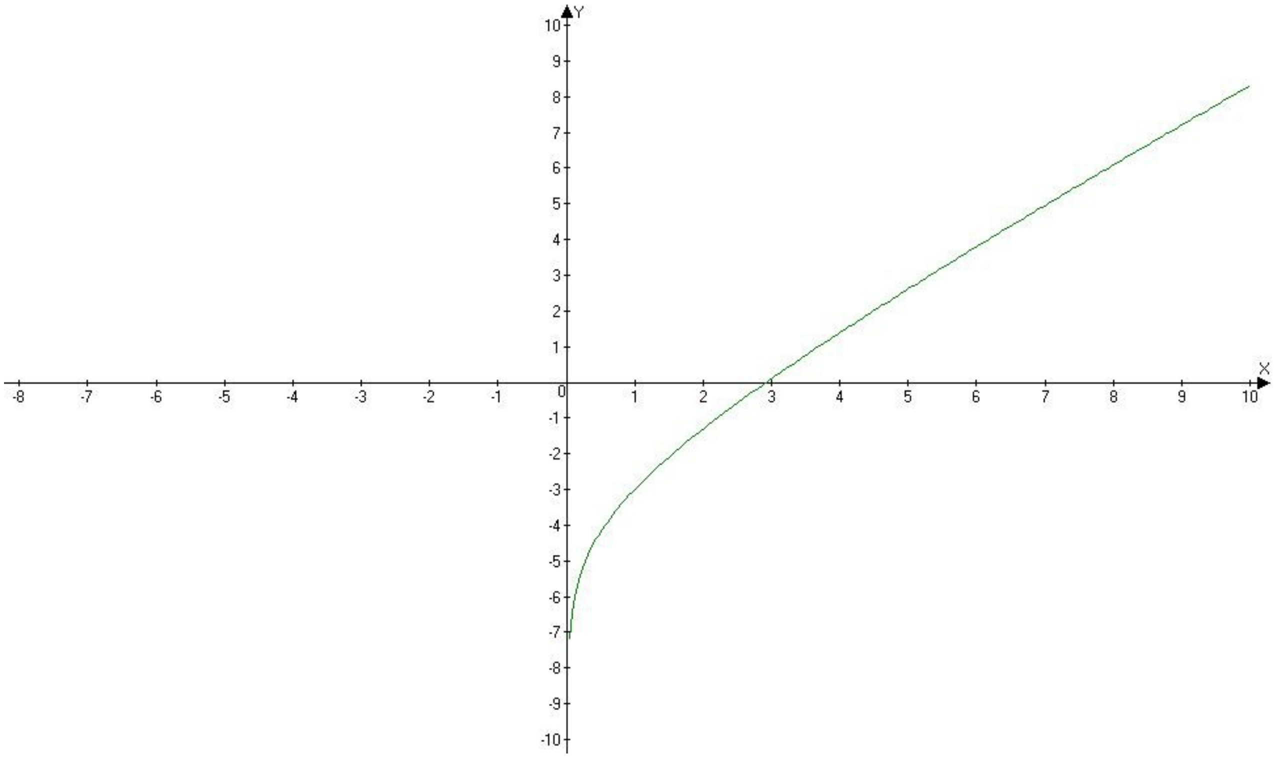
- wprost – metodą stycznych i siecznych
- sprowadzając do punktu stałego – metoda iteracji prostych

Metoda stycznych: równanie $f(x)=0$ z funkcją f klasy C^1 na $[a,b]$ i taką, że $f'(x)\neq 0$ na $[a,b]$, zamieniamy na następujące równanie punktu stałego $x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Ciąg iteracji prostych tego równania

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad , \quad k\geqslant 0$$

z ustalonym $x_0\in[a,b]$, nazywamy ciągiem Newtona dla równania $f(x)=0$.

PRZYKŁAD:



$$\textit{Równanie}:$$

$$x + \log(x) - 4 = 0$$

$$\textit{obliczamy przy użyciu metody stycznych}:$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$f(x) = x + \log(x) - 4$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\textit{ustalamy } x_0 = 3$$

$$f(3) = 3 + \log(3) \cdot 4 = 0.0986122$$

$$f'(3) = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 3 - \frac{0.0986122}{1\frac{1}{3}} = 2.926048$$

Metoda siecznych: Jeśli zmodyfikujemy metodę stycznych przez przybliżanie $f'(x_k)$ ilorazem $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$, to otrzymamy metodę siecznych

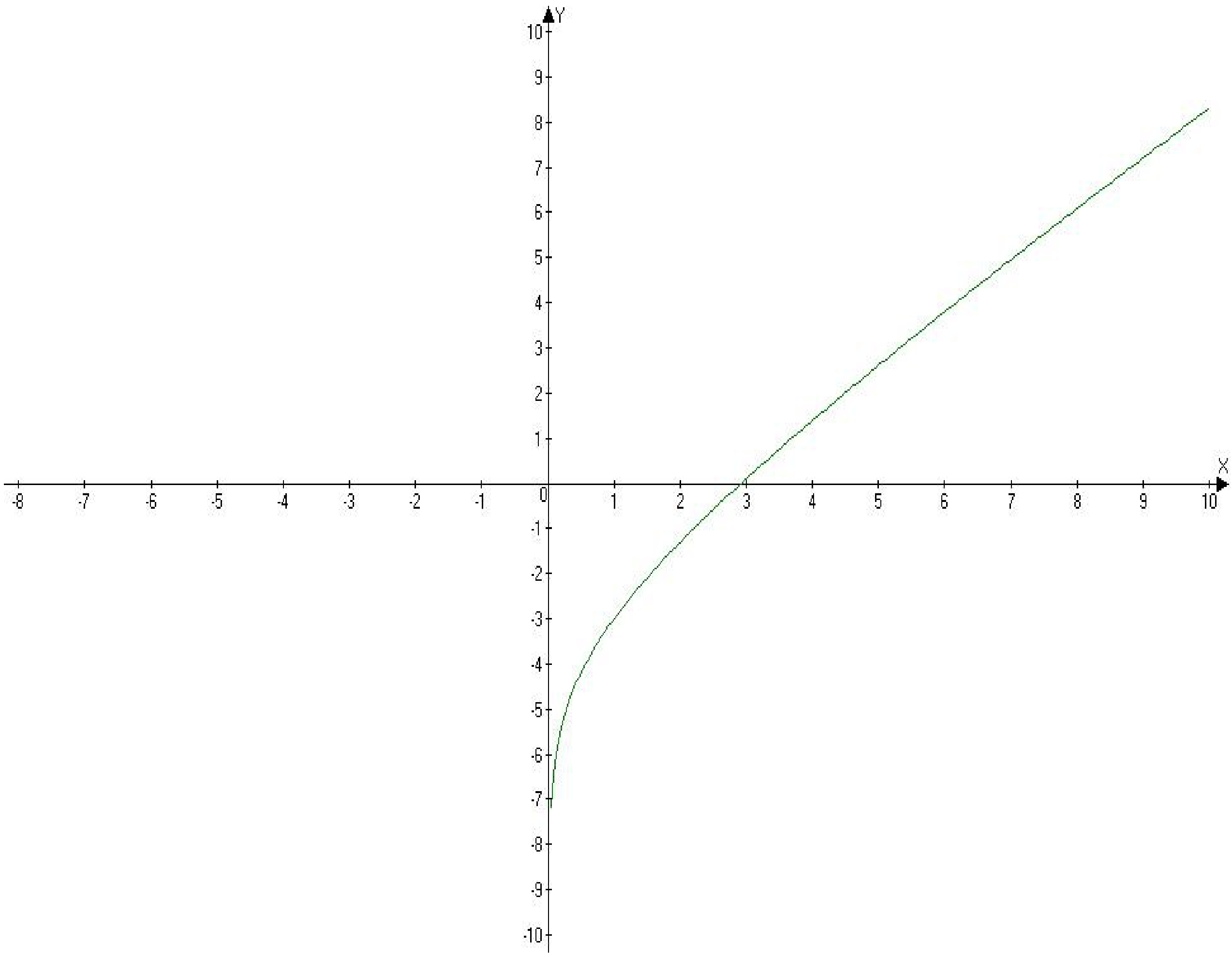
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad , \quad k \geqslant 1$$

Metoda ta wymaga ustalania w przedziale $[a, b]$ dwóch punktów startowych x_0 i x_1, więc na każdym kroku x_{k+1} to miejsce zerowe siecznej wykresu $y = f(x)$ w punktach $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, oraz $(x_k, f(x_k))$, prostej o równaniu:

$$y = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

Jeśli x_0 jest wybrany tak, by $\mathbf{C}|\ \alpha - x_0\ | < \mathbf{1}$, czyli x_0 jest dostatecznie bliski α to metoda stycznych jest zbieżna. Zbieżność metody stycznych jest lokalna, ponieważ zależy od wyboru x_0 .

PRZYKŁAD:



$$Równanie:$$

$$x+\log(x)-4=0$$

$$obliczamy\ przy\ użyciu\ metody\ siecznych:$$

$$x_i=x_{i-1}-\frac{f(x_{i-1})(x_{i-1}-x_{i-2})}{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}$$

$$ustalamy\ przedział\ [x_{0,}x_1]=[2,3]$$

$$więc$$

$$x_{i-1}=3$$
$$x_{i-2}=2$$

$$f(x_{i-1})=f(3)=3+\log(3)-4=0.0986$$

$$f(x_{i-2})=f(2)=2+\log(2)-4=-1.3068$$

$$x_2=3-\frac{0.0986(3-2)}{0.0986-(-1.3068)}=2.929842$$

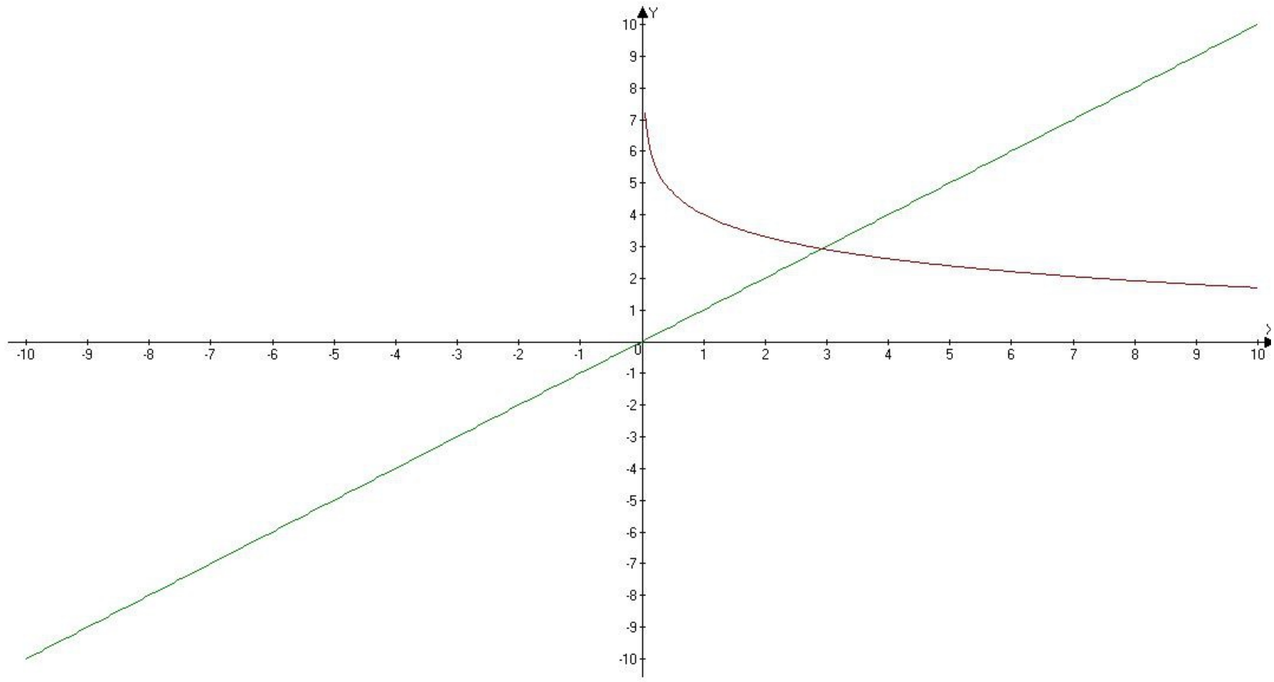
Metoda iteracji prostych: Równianie $f(x)=0$ przekształcamy do twierdzenia równania punktu stałego:

$$x=F(x)$$

Jeśli $F:[c,d]\rightarrow[c,d]$ to ustalamy $x_0\in[c,d]$ i definiujemy ciąg iteracji prostych

$$x_{k+1}=F(x_k)\,,\quad k\geqslant b$$

PRZYKŁAD:



$$\textit{Równanie}:$$

$$x + \log(x) - 4 = 0$$

$$\textit{obliczamy przy użyciu metody iteracji prostych}:$$

$$x = 4 - \log(x)$$

$$x = F(x)$$

$$\textit{ustalamy } x^{(0)} = 10$$

$$x^{(1)} = F(x^{(0)}) = 4 - \log(10) = 3$$

$$x^{(2)} = F(x^{(1)}) = 4 - \log(3) = 2.9013$$

$$x^{(3)} = F(x^{(2)}) = 4 - \log(2.9013) = 2.93481$$

$$x^{(4)} = F(x^{(3)}) = 4 - \log(2.93481) = 2.9233$$

$$x^{(5)} = F(x^{(4)}) = 4 - \log(2.9233) = 2.92726$$

itd.

Krótki opis najważniejszych struktur danych, oraz procedur i funkcji użytych w algorytmie realizującym metodę:

- **Function_value(x)** – Oblicza wartość funkcji $x + \log(x) - 4$. Zwraca NaN dla ujemnych argumentów, ponieważ logarytm liczby ujemnej nie jest liczbą rzeczywistą.

- **Derivative_function_value(x)** – Oblicza wartość pochodnej funkcji $x + \log(x) - 4$ dla podanej wartości x . Pochodna jest określona wzorem $1 + \frac{1}{x}$.

- **Simple_iteration(x)** – Oblicza wartość funkcji punktu stałego $(4 - \log(x))$. Zwraca NaN dla ujemnych argumentów, ponieważ logarytm liczby ujemnej nie jest liczbą rzeczywistą.

- **Calculate_simple_iterations(x, iterations_limit, precision)** – Wykonuje metodę iteracji prostych. Ilość iteracji jest określona przez argument iterations_limit a precyzja przez argument precision.

- **Secant_method(x0, x1)** – Wykonuje metodę siecznych dla podanych punktów początkowych x_0 i x_1 .

- **Calculate_secant_iterations(x0, x1, iterations_limit, precision)** – Wykonuje iterację metody siecznych. Ilość iteracji jest określona przez argument iterations_limit a precyzja przez argument precision. Argumenty x_0 i x_1 to punkty startowe metody.

- **Tangent_method(x) –** Wykonuje metodę stycznych dla podanego punktu początkowego x .

- **Calculate_tangent_iterations(x, iterations_limit, precision)** – Wykonuje iterację metody stycznych. Ilość iteracji jest określona przez argument iterations_limit a precyzja przez argument precision.

- **Parse_user_provided_float(label, check_x, check_iteration_condition) –** Funkcja ta sprawdza, czy podane przez użytkownika wartości precyzji, punktu startowego metody iteracji prostych, punktu startowego metody stycznych, oraz punktu startowego x_0 i punktu końcowego x_1 metody siecznych - są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

- **Parse_user_provided_int(label) –** Funkcja ta sprawdza, czy podana przez użytkownika wartość maksymalnej liczby iteracji jest liczbą całkowitą, większą od zera.

Opis wejścia – wyjśćia, czyli jakich danych potrzebuje program, oraz z jakimi komunikatami na nie oczekuje, a także co będzie wynikiem jego działania:

DANE WEJŚĆIOWE:

- Wartość żądanej precyzji
- Wartość maksymalnej liczby iteracji

  (Wszystkie dane są parsowane co zapobiega wprowadzaniu złych zmiennych takich jak litery zamiast liczb.)

Metoda iteracji prostych:

- Wartość punktu startowego x_0 metody iteracji prostych

  (Wartość ta musi spełniać warunek $\ln(x) < 4$. W przeciwnym wypadku otrzymamy komunikat: "Dla punktu startowego metody iteracji prostych musi być spełniony warunek: ln(x) < 4").

Metoda stycznych:

- Wartość punktu startowego metody stycznych

  (Po wprowadzeniu liczby mniejszej lub równej 0 jako punkt startowy metody stycznych, otrzymujemy komunikat: "Wartość punktu startowego metody stycznych musi być większa od 0, ponieważ funkcja x+log(x)-4=0 jest określona tylko dla liczb rzeczywistych większych od 0").

Metoda siecznych:

- Wartość punktu startowego x_0 metody siecznych
- Wartość punktu końcowego x_1 metody siecznych

  (Po wprowadzeniu punktu końcowego x_1 takiego samego jak punkt startowy x_0 otrzymujemy komunikat: "Wartość x0 i x1 dla metody siecznych nie mogą być równe").

DANE WYJŚCIOWE:

- Informacja po ilu iteracjach znaleziono rozwiązanie daną metodą

Metoda iteracji prostych:

- Wynik metody iteracji prostych

  (W przypadku, gdy wynik będzie liczbą ujemną otrzymamy komunikat "Metoda nie jest zbieżna dla danego punktu początkowego".)

- Błąd pomiędzy wynikiem metody a wartością alpha.

Metoda stycznych:

- Wynik metody stycznych

  (W przypadku, gdy wynik będzie liczbą ujemną otrzymamy komunikat "Metoda nie jest zbieżna dla danego punktu początkowego".)

Metoda siecznych:

- Wynik metody siecznych

Wyniki przykładowych "uruchomień" programu, ilustrujących różne sytuacje:

```
Podaj wartość zadanej precyzji:0.0001
Podaj wartość maksymalnej liczby iteracji:10
Podaj wartość punktu startowego metody iteracji prostych:2
Rozwiazanie dla metody iteracji prostych znaleziono po 9 iteracjach.
Wynik metody iteracji prostych 2.926338671394288
Podaj wartość punktu startowego metody stycznych:2
Rozwiazanie dla metody stycznych znaleziono po 3 iteracjach.
Wynik metody stycznych: 2.9262710616557825
Podaj wartość punktu startowego x0 dla metody siecznych:1
Podaj wartość punktu startowego x1 dla metody siecznych:4
Rozwiazanie dla metody siecznych znaleziono po 3 iteracjach.
Wynik metody siecznych 2.9262967935424054
```

```
Podaj wartość zadanej precyzji:0.01
Podaj wartość maksymalnej liczby iteracji:10
Podaj wartość punktu startowego metody iteracji prostych:2
Rozwiazanie dla metody iteracji prostych znaleziono po 5 iteracjach.
Wynik metody iteracji prostych 2.931231646517502
Podaj wartość punktu startowego metody stycznych:2
Rozwiazanie dla metody stycznych znaleziono po 2 iteracjach.
Wynik metody stycznych: 2.9261365268681585
Podaj wartość punktu startowego x0 dla metody siecznych:1
Podaj wartość punktu startowego x1 dla metody siecznych:4
Rozwiazanie dla metody siecznych znaleziono po 2 iteracjach.
Wynik metody siecznych 2.9214583603468896
```

```
Podaj wartość zadanej precyzji:0.0000001
Podaj wartość maksymalnej liczby iteracji:10
Podaj wartość punktu startowego metody iteracji prostych:5
Rozwiazanie dla metody iteracji prostych znaleziono po 10 iteracjach.
Wynik metody iteracji prostych 2.9263077408926224
Podaj wartość punktu startowego metody stycznych:0
Wartość punktu startowego metody stycznych musi być większa od zera, ponieważ fu
nkcja:
 x + log(x) - 4 = 0
 jest określona tylko dla liczb rzeczywistych większych od 0.
Podaj wartość punktu startowego metody stycznych:1
Rozwiazanie dla metody stycznych znaleziono po 4 iteracjach.
Wynik metody stycznych: 2.9262710624428703
Podaj wartość punktu startowego x0 dla metody siecznych:1
Podaj wartość punktu startowego x1 dla metody siecznych:1
Wartości x0 i x1 dla metody siecznych nie mogą być równe.
Podaj wartość punktu startowego x1 dla metody siecznych:3
Wartości x0 i x1 dla metody siecznych nie mogą być równe.
Rozwiazanie dla metody siecznych znaleziono po 3 iteracjach.
Wynik metody siecznych 2.9262710763885456
```

```
Podaj wartość zadanej precyzji:0
Podaj wartość maksymalnej liczby iteracji:10
Podaj wartość punktu startowego metody iteracji prostych:2
Rozwiazanie dla metody iteracji prostych znaleziono po 10 iteracjach.
Wynik metody iteracji prostych 2.9262479585791175
Podaj wartość punktu startowego metody stycznych:3
Rozwiazanie dla metody stycznych znaleziono po 10 iteracjach.
Wynik metody stycznych: 2.926271062443501
Podaj wartość punktu startowego x0 dla metody siecznych:0
Wartość punktu startowego x0 dla metody siecznych musi być większa od zera, poni
eważ funkcja:
 x + log(x) - 4 = 0
 jest określona tylko dla liczb rzeczywistych większych od 0.
Podaj wartość punktu startowego x0 dla metody siecznych:1
Podaj wartość punktu startowego x1 dla metody siecznych:3
Wartości x0 i x1 dla metody siecznych nie mogą być równe.
Rozwiazanie dla metody siecznych znaleziono po 7 iteracjach.
Wynik metody siecznych 2.926271062443501
```

Tekst kodu źródłowego ostatecznej, poprawnej wersji programu:

```
import
numpy
ALPHA = 2.926271062443501

def function_value(x):

return x + numpy.log(x) - 4

def derivative_function_value(x):

return 1 + (1/x)

def simple_iteration(x):

return 4 - numpy.log(x)

def calculate_simple_iterations(x, iterations_limit=10, precision=0.0):

start_point = x
result = None
i = 0
for i in range(0, iterations_limit):
result = simple_iteration(start_point)
if result < 0:
print("Metoda nie jest zbieżna dla danego punktu początkowego.")
return None
elif numpy.fabs(result - ALPHA) < precision:
break
start_point = result
print("Rozwiazanie dla metody iteracji prostych znaleziono po {0} iteracjach.".format(i+1))
print("Błąd metody: {0}".format(numpy.fabs(result-ALPHA)))
return result

def secant_method(x0, x1):

return x1 - ((function_value(x1) * (x1 - x0)) / (function_value(x1) - function_value(x0)))

def calculate_secant_iterations(x0, x1, iterations_limit=10, precision=0.0):

result = None
x_k_min_1 = x0
x_k = x1
i = 0
for i in range(0, iterations_limit):
result = secant_method(x_k_min_1, x_k)
x_k_min_1 = x_k
x_k = result
if x_k == x_k_min_1:
break
elif numpy.fabs(result - ALPHA) < precision:
break
print("Rozwiazanie dla metody siecznych znaleziono po {0} iteracjach.".format(i+1))
print("Błąd metody: {0}".format(numpy.fabs(result-ALPHA)))
```

```python
return result

def tangent_method(x):

return x - (function_value(x) / derivative_function_value(x))

def calculate_tangent_iterations(x, iterations_limit=10, precision=0.0):

start_point = x
result = None
i = 0
for i in range(0, iterations_limit):
result = tangent_method(start_point)
start_point = result
if result < 0:
print("Metoda nie jest zbieżna dla danego punktu początkowego.\n"
" W iteracji nr {0} x_i przyjmuję wartość {1},"
"dla której równanie x-(f(x)/f'(x)) przyjmuję wartość ujemną({2}),\n"
" więc wynik następnej iteracji będzie nieokreślony\n"
" w zbiorze liczb rzeczywistych".format(i+1, start_point, result))
return None
elif numpy.fabs(result - ALPHA) < precision:
break
print("Rozwiazanie dla metody stycznych znaleziono po {0} iteracjach.".format(i+1))
print("Błąd metody: {0}".format(numpy.fabs(result-ALPHA)))
return result

def parse_user_provided_float(label, check_x_condition=True, check_iteration_condition=False):

val = None
while True:
try:
val = float(input("Podaj wartość {0}:".format(label)))
valid = True
if check_x_condition and val <= 0:
print("Wartość {0} musi być większa od zera,"
" ponieważ funkcja:\n x + log(x) - 4 = 0\n"
" jest określona tylko dla liczb rzeczywistych"
" większych od 0.".format(label))
valid = False
if check_iteration_condition and numpy.log(val) >= 4:
print("Dla punktu startowego metody iteracji prostych musi byc spełniony warunek"
"ln(x) < 4".format(label))
valid = False
if not valid:
continue
except ValueError:
print("Wpisz poprawną wartość {0}.".format(label))
continue
else:
break
return val

def parse_user_provided_int(label):
```

```
val = None
while True:
try:
val = int(input("Podaj wartość {0}:".format(label)))
if val <= 0:
print("Wartość {0} musi bc większa od zera.".format(label))
continue
except ValueError:
print("Wpisz poprawną wartość {0}.".format(label))
continue
else:
break
return val
if __name__ == '__main__':
PRECISION = parse_user_provided_float("zadanej precyzji (np. 0.001, 1e-05)",
check_x_condition=False)
ITERATIONS_LIMIT = parse_user_provided_int("maksymalnej liczby iteracji")
X_SIMPLE_ITERATIONS = parse_user_provided_float("punktu startowego metody iteracji prostych",
check_iteration_condition=True)
print("Wynik metody iteracji prostych {0}".format(calculate_simple_iterations(X_SIMPLE_ITERATIONS,
ITERATIONS_LIMIT,
PRECISION)))
X_TANGENT = parse_user_provided_float("punktu startowego metody stycznych")
print("Wynik metody stycznych: {0}".format(calculate_tangent_iterations(X_TANGENT,
ITERATIONS_LIMIT, PRECISION)))
X0_SECANT = parse_user_provided_float("punktu startowego x0 dla metody siecznych")
X1_SECANT = X0_SECANT
while X1_SECANT == X0_SECANT:
X1_SECANT = parse_user_provided_float("punktu startowego x1 dla metody siecznych")
if X1_SECANT == X0_SECANT:
print("Wartości x0 i x1 dla metody siecznych nie mogą być równe.")
print("Wynik metody siecznych {0}".format(calculate_secant_iterations(X0_SECANT, X1_SECANT,
ITERATIONS_LIMIT, PRECISION)))
```