

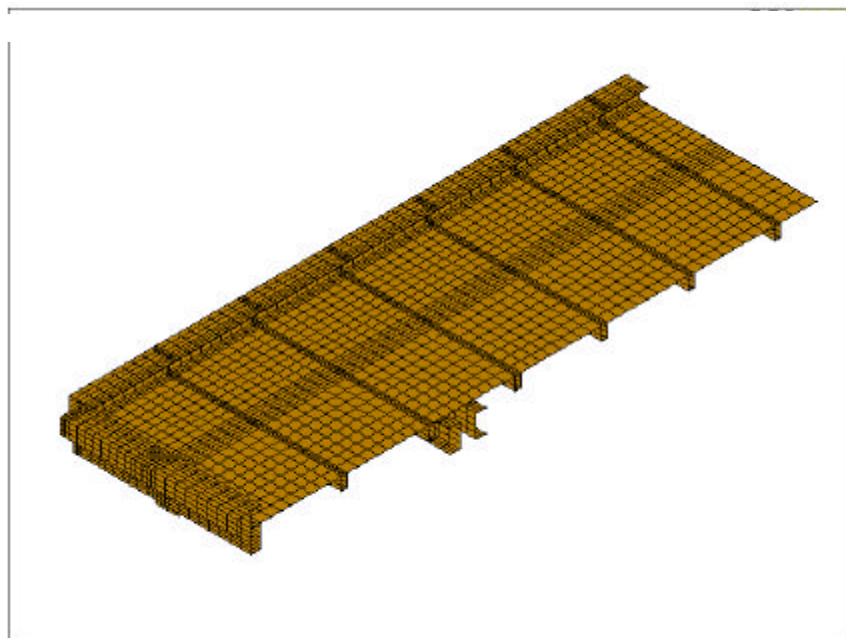
INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS

FINITOS

1.1 INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, etc., ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo.

El MEF permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el primero puede acercarse bastante más al diseño óptimo.



Discretización con elementos finitos

El método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nuevo; aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos. Han sido precisamente estos avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de

programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. Pero no hay que llevarse a engaño, el manejo correcto de este tipo de programas exige un profundo conocimiento no solo del material con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en este caso estaremos en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad.

1.2 BREVE HISTORIA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Aunque el nombre del MEF se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde antiguo. El concepto de ‘elementos finitos’ parte de esa idea.

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416.

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant¹ propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh-Ritz para aproximar soluciones.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp² quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

El trabajo de revisión de Oden³ presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki⁴ y de Zienkiewicz y Holister⁵ presentan

¹ “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bulletin of American Mathematical Society”, 49, 1-43. 1943.

² “Stiffness and deflection analysis of complex structures”. Journal of Aeronautical Sciences, 23, 805-824. 1956.

³ “Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements”. Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama Press, Huntsville. 1972.

el MEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de Zienkiewicz y Cheung⁶ o Zienkiewicz y Taylor⁷ presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los EF pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de EF, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación.

⁴ “Theory of Matrix Structural Analysis”, Mc Graw-Hill, New York. 1968.

⁵ “Stress Analysis”, John Wiley, London. 1966.

⁶ “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics”, Mc Graw-Hill, London. 1967.

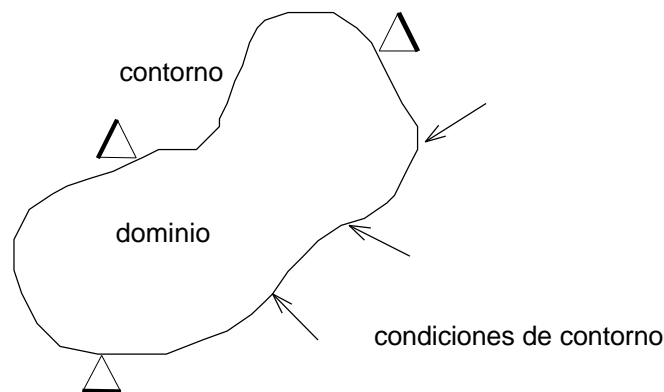
⁷ “El método de los Elementos Finitos”. Mc Graw-Hill. CIMNE. Barcelona .1994.

1.3 CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

En cualquier sistema a analizar podemos distinguir entre:

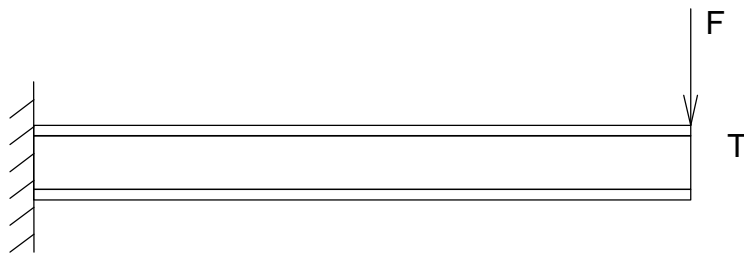
- Dominio. Espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de contorno. Variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, focos de calor,...
- Incógnitas. Variables del sistema que deseamos conocer después de que las condiciones de contorno han actuado sobre el sistema: desplazamientos, tensiones, temperaturas,...



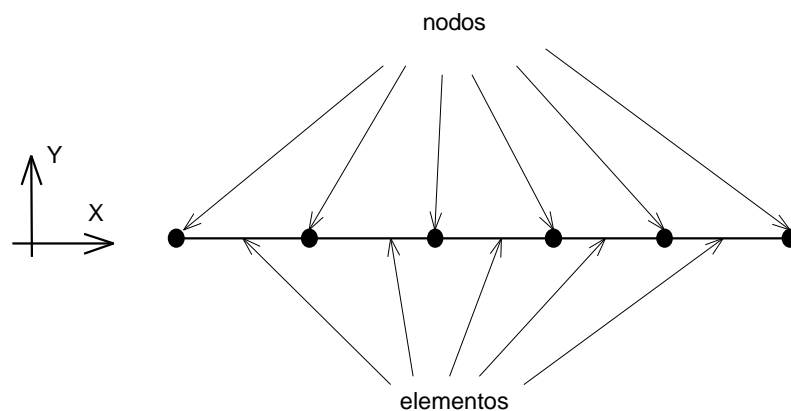
El método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o superficies (en el tridimensional) imaginarias, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de porciones (elementos) en que se subdivide. Los elementos se

definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que conectan entre si los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de elementos estructurales estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de éstos podemos calcular el resto de incógnitas que nos interesen: tensiones, deformaciones,... A estas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que nos determinan el estado y/o posición del nodo.

Por ejemplo si el sistema a estudiar es una viga en voladizo con una carga puntual en el extremo y una distribución de temperaturas tal y como muestra la figura,



el discretizado del dominio puede ser:



Los grados de libertad de cada nodo serán:

- Desplazamiento en dirección x
- Desplazamiento en dirección y
- Giro según z

- Temperatura

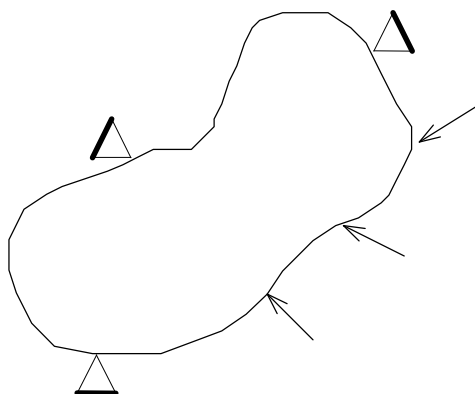
El sistema, debido a las condiciones de contorno: empotramiento, fuerza puntual y temperatura, evoluciona hasta un estado final. En este estado final, conocidos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema podemos determinar cualquier otra incógnita deseada: tensiones, deformaciones,... También sería posible obtener la evolución temporal de cualquiera de los grados de libertad.

Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento del continuo para el elemento, se llega a fórmulas que relacionan el comportamiento en el interior del mismo con el valor que tomen los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas de interpolación, ya que éstas ‘interpolan’ el valor de la variable nodal dentro del elemento.

El problema se formula en forma matricial debido a la facilidad de manipulación de las matrices mediante ordenador. Conocidas las matrices que definen el comportamiento del elemento (en el caso estructural serán las llamadas matrices de rigidez, amortiguamiento y masa, aunque esta terminología ha sido aceptada en otros campos de conocimiento) se ensamblan y se forma un conjunto de ecuaciones algebraicas, lineales o no, que resolviéndolas nos proporcionan los valores de los grados de libertad en los nodos del sistema.

A continuación se muestran algunas de las ideas básicas relacionadas con los fundamentos matemáticos del MEF aplicadas al caso estructural. En el siguiente capítulo se realiza un ejemplo con objeto de aclarar las ideas que se muestran en este capítulo.

Muchos problemas de medios continuos vienen expresados mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno sobre la función o funciones incógnita. Ante la dificultad, y en muchos casos la imposibilidad, de encontrar una solución cerrada, se opta por realizar una aproximación, siendo necesaria la expresión integral del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).


$$\{\mathbf{e}\} = \left\{ \mathbf{e}_{xx}, \mathbf{e}_{yy}, \mathbf{e}_{zz}, \mathbf{g}_{xy}, \mathbf{g}_{yz}, \mathbf{g}_{zx}, \right\}^T$$

A. Carnicero

$$\{\mathbf{s}\} = \left\{ \mathbf{s}_{xx}, \mathbf{s}_{yy}, \mathbf{s}_{zz}, \mathbf{t}_{xy}, \mathbf{t}_{yz}, \mathbf{t}_{zx} \right\}^T$$

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento diferencial de volumen pueden escribirse de la forma

$$\nabla\{\mathbf{s}\} + \{X\} = 0$$

donde el vector $\{X\}$ incluye de forma general las fuerzas de inercia $\{X\} = \{X\} - \mathbf{r}\ddot{u}$, es decir, consideramos las fuerzas de inercia como fuerzas por unidad de volumen. Multiplicando esta ecuación por una función de ponderación $\{\delta u\}$ e integrando

$$\int_v \{\mathbf{du}\}^T \nabla\{\mathbf{s}\} dv + \int_v \{\mathbf{du}\}^T \{X\} dv = 0$$

Utilizando la formula de Green⁸ se puede escribir

$$-\int_v \nabla\{\mathbf{du}\}^T \{\mathbf{s}\} dv + \int_s \{\mathbf{du}\}^T \{\mathbf{s}\} \bar{n} ds + \int_v \{\mathbf{du}\}^T \{X\} dv = 0 \quad (1.1)$$

Si se asocia la función de ponderación $\{\delta u\}$ con un desplazamiento virtual, el operador ∇ actuando sobre él será una deformación virtual

$$\{\mathbf{de}\} = \nabla\{\mathbf{du}\}$$

El equilibrio en el contorno exige que se cumpla la relación $\{\mathbf{s}\} \cdot \{n\} = \{t\}$ y sustituyendo en la expresión (1.1)

$$-\int_v \{\mathbf{de}\}^T \{\mathbf{s}\} dv + \int_s \{\mathbf{du}\}^T \{t\} ds + \int_v \{\mathbf{du}\}^T \{X\} dv = 0 \quad (1.2)$$

⁸ La formula de Green se obtiene a partir de la relación: $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$ y del teorema de la divergencia

($\int_v \nabla a dv = \int_s a \bar{n} ds$), que nos permite escribir: $\int_v a \nabla b = \int_s a b \bar{n} ds - \int_v b \nabla a dv$

En la relación anterior es posible introducir la ley de comportamiento de material mediante la matriz elástica con las propiedades de éste, $[C]$, de forma que

$$\{s\} = [C](\{e\} - \{e_0\}) + \{s_0\} \quad (1.3)$$

siendo los vectores $\{e_0\}^T$ y $\{s_0\}^T$ las deformaciones y las tensiones iniciales respectivamente. Introduciendo la expresión (1.3), suponiendo deformaciones y tensiones iniciales nulas, en la ecuación (1.2), obtenemos

$$\int_V \{de\}^T [C] \{e\} dv = \int_V \{du\}^T (\{X\} - r\{\ddot{u}\}) dv + \int_S \{du\}^T \{t\} ds \quad (1.4)$$

que constituye la formulación del PTV y relaciona el sistema de cargas real y esfuerzos con el virtual de desplazamientos.

1.4.2 Funciones de interpolación

Discretizado el continuo, la idea es tomar un conjunto de funciones (funciones de interpolación) que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nodos del mismo. Es decir

$$\{u(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{U\}$$

Siendo $\{U\}$ el vector con los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos se determinan las deformaciones

$$\{e\} = [D]\{u\}$$

donde $[D]$ es el operador diferencial que depende del problema en estudio

Sustituyendo el valor del desplazamiento tenemos que

$$\{e\} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\}$$

donde se obtiene el valor de las deformaciones en función de los desplazamientos nodales.

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión del PTV (1.4) tenemos

$$-\int_v [B]^T [C] [B] \{U\} dv + \int_v [N]^T \left(\{X\} - \mathbf{r}[N] \{\ddot{U}\} \right) dv + \int_s [N]^T \{t\} ds = 0$$

Reordenando esta ecuación podemos llegar a un sistema de la forma

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{P\}$$

donde se definen:

- Matriz de masa consistente

$$[M] = \int_v [N]^T \mathbf{r} [N] dv$$

- Matriz de rigidez

$$[K] = \int_v [B]^T [C] [B] dv$$

- Matriz de cargas nodales consistentes

$$\{P\} = \int_v [N]^T \{X\} dv + \int_s [N]^T \{t\} ds$$

La expresión anterior es general y permite determinar las matrices elementales para cualquier tipo de discretización.

1.4.3 Síntesis de las características globales

Las anteriores matrices se calculan para cada uno de los elementos. Realizando una transformación de coordenadas a las denominadas coordenadas unitarias del elemento, las matrices quedan en función de parámetros puramente geométricos y se facilita la integración numérica. Antes de proceder al ensamblaje de todas las ecuaciones hay que

realizar la transformación a coordenadas globales con el objeto de tener todas las matrices formuladas respecto al mismo sistema de coordenadas.

Una vez que se dispone de las matrices y vectores elementales en coordenadas globales su acoplamiento en el sistema puede realizarse según el llamado método directo, por el que sumamos en cada posición nodal la contribución realizada por los distintos elementos.

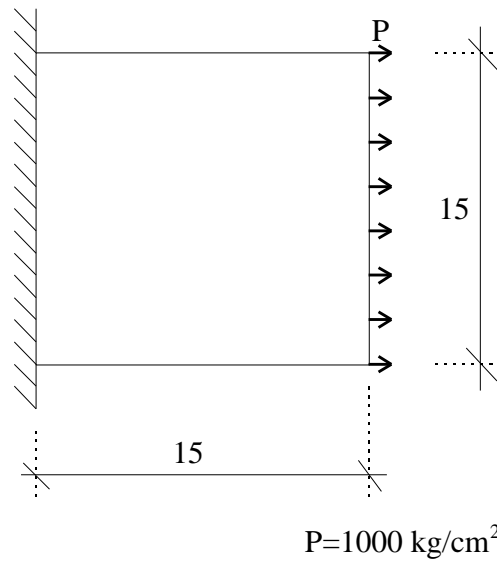
1.4.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución

Antes de obtener la solución al sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer las condiciones de desplazamientos nodales que sean conocidas. El sistema resultante se puede subdividir en dos términos: uno que contenga los desplazamientos impuestos y otro los incógnita. Resolviendo este sistema tendremos la solución.

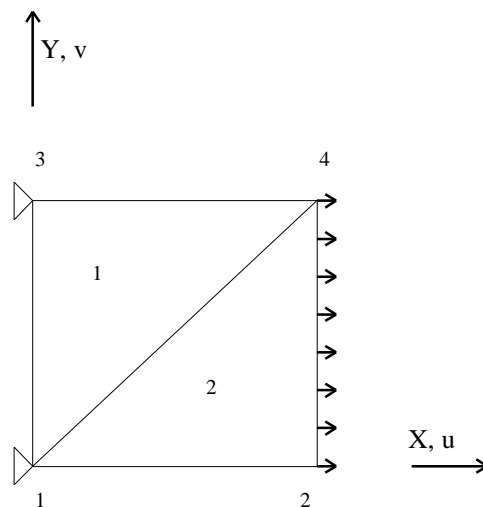
Una vez conocidos los desplazamientos nodales es posible calcular otro tipo de magnitudes (deformaciones, tensiones,...).

1.5 Ejemplo de aplicación

Con objeto de clarificar las ideas del apartado anterior aplicaremos los conceptos allí expuestos a la resolución de un caso. Se trata de obtener las ecuaciones (matriz de rigidez y vectores de cargas y desplazamientos) para resolver el problema elástico en una placa como la de la figura inferior.

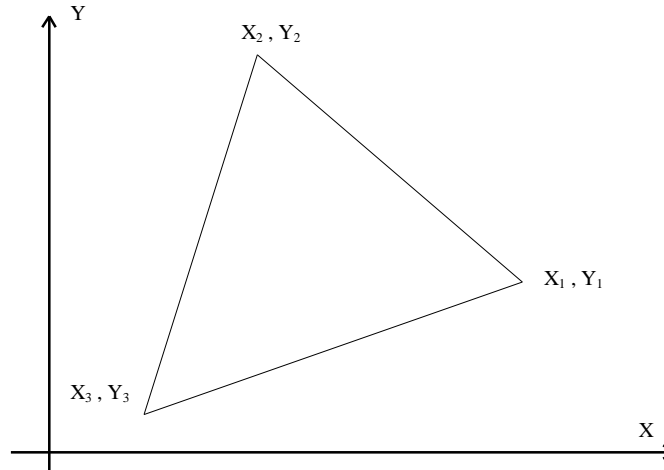


Para ello consideraremos un caso de tensión plana y emplearemos un modelo de tan solo dos elementos, de esta forma la complejidad matemática se reduce y es más claro el proceso a seguir.



1.5.1 Solución teórica

En primer lugar trataremos de obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento de un elemento triangular como el de la figura inferior.



Las funciones de interpolación de los desplazamientos dentro del elemento se consideran lineales. Es decir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathbf{a} + \mathbf{a}_1 x + \mathbf{a}_2 y \\ v(x, y) &= \mathbf{b} + \mathbf{b}_1 x + \mathbf{b}_2 y \end{aligned}$$

donde u y v son los desplazamientos horizontal y vertical respectivamente. La ecuación anterior puede ser escrita en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix}$$

Particularizando las coordenadas y los desplazamientos para cada nodo obtenemos la expresión matricial

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix}$$

Esta expresión nos permite obtener los parámetros de las funciones de interpolación en función de los desplazamientos nodales sin más que invertir una matriz. Reordenando los distintos términos podemos escribir

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [A]^{-1} & [0] \\ [0] & [A]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Luego ya conocemos la matriz $[N]$ que nos relaciona el campo de desplazamientos en el elemento con los desplazamientos en los nodos

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [A]^{-1} & [0] \\ [0] & [A]^{-1} \end{bmatrix}$$

Realizando la inversa de la matriz A , podemos reescribir la matriz N en función de las características geométricas del elemento

$$[N] = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

donde los valores de N_i vienen dados por

$$\begin{aligned} N_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) \\ N_2 &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) \\ N_3 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

La matriz $[D]$ que relaciona deformaciones y desplazamientos es

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Y podemos construir la matriz $[B]$ que nos relaciona las deformaciones con los desplazamientos en los nodos.

$$\{\mathbf{e}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\}$$

Sustituyendo los valores de las distintas matrices

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

dado que los valores de las funciones N_i son conocidos en función de las coordenadas nodales, es posible determinar la matriz $[B]$ a partir de datos puramente geométricos

$$[B] = \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

siendo Ω el área del triángulo.

La matriz de comportamiento $[C]$ que relaciona deformaciones y tensiones, para el caso de tensión plana, viene dada por la relación

$$[C] = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}$$

donde E es el módulo de elasticidad y μ el coeficiente de Poisson. Con las matrices definidas o calculadas hasta el momento ya es posible determinar las matrices de rigidez y el vector de cargas de cada uno de los dos elementos del modelo que hemos realizado

$$[K] = \int_v [B]^T [C] [B] dv$$

y dado que las matrices están en función de las coordenadas nodales es posible escribir

$$[K] = [B]^T [C] [B] \Omega t$$

siendo t el espesor de la placa.

En la discretización que hemos realizado tenemos dos elementos con las siguientes coordenadas

Elemento	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
1	(0,0)	(0,15)	(15,15)
2	(0,0)	(15,0)	(15,15)

Luego tenemos que la matriz de rigidez del primer elemento es

$$K_1^e = \frac{E}{(1-\nu^2)2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 15 & 0 & -15 \\ -15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 15 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -15 & 0 \\ 15 & -15 & 0 & 0 & 15 & -15 \end{bmatrix}$$

$$K_1^e = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0.35 & -0.35 & 0 & 0 & 0.35 & -0.35 \\ & 1.35 & -1 & 0.3 & -0.65 & 0.35 \\ & & 1 & -0.3 & 0.3 & 0 \\ & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & 1.35 & -0.35 \\ & & & & & 0.35 \end{bmatrix}$$

De la misma forma, la matriz de rigidez de elemento 2, vendrá dada por

$$K_2^e = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & -15 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2^e = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0.3 & -0.3 \\ & 1.35 & -0.35 & 0.35 & -0.65 & 0.3 \\ & & 0.35 & -0.35 & 0.35 & 0 \\ & & & 0.35 & -0.35 & 0 \\ & & & & 1.35 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Para realizar la superposición de las matrices de rigidez debemos tener en cuenta a qué nodo pertenece cada término. Para ello hay que ver qué nodos son los que definen cada elemento. La siguiente tabla nos indica la relación que existe entre la numeración 'local' de cada elemento y la global de la estructura

Elemento	Num. Local	Num. Global
1	1	1
	2	3
	3	4
	1	1

2	2	2
	3	4

y los vectores de desplazamientos nodales para cada uno de los elementos son

$$\{U\}_1^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \{U\}_2^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Sumando los términos de las dos matrices que rigidez correspondientes a los mismos grados de libertad, tenemos que la matriz de rigidez global es

$$[K] = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1.35 & -1 & -0.35 & 0 & 0 & 0.3 & 0.35 & -0.65 \\ & 1.35 & 0 & -0.35 & 0.35 & -0.65 & 0 & 0.3 \\ & & 1.35 & -1 & 0.3 & 0 & -0.65 & 0.35 \\ & & & 1.35 & -0.65 & 0.35 & 0.3 & 0 \\ & & & & 1.35 & -0.35 & -1 & 0 \\ & & & & & 1.35 & 0 & -1 \\ & & & & & & 1.35 & -0.35 \\ & & & & & & & 1.35 \end{bmatrix}$$

Sólo falta determinar el vector de cargas para los elementos y componer el mismo. El vector de cargas se determina mediante la expresión

$$[P] = \int_A [N]^T \{t\} da$$

En este caso sólo tenemos cargas sobre el elemento número 2, y el vector de cargas es

$$[P]_2^e = \int \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{15}x & 0 \\ \frac{1}{15}(x-y) & 0 \\ \frac{1}{15}y & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{15}x \\ 0 & \frac{1}{15}(x-y) \\ 0 & \frac{1}{15}y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix} da = \begin{bmatrix} 0 \\ 3750 \\ 3750 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas global, en el que introducimos las reacciones de los apoyos quedará

$$\{P\} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{3x} \\ P_{4x} \\ P_{1y} \\ P_{2y} \\ P_{3y} \\ P_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ 0 \\ R_{3x} \\ 0 \\ R_{1y} \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3750 \\ 0 \\ 3750 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ 3750 \\ R_{3x} \\ 3750 \\ R_{1y} \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinado el vector de cargas ya conocemos las matrices que permiten resolver el sistema

$$[K]\{U\} = \{P\}$$

Siendo $\{U\}$ el vector de desplazamientos, en el que hemos introducido los que son conocidos (condiciones de contorno), es decir

$$\{U\} = \{0 \quad u_2 \quad 0 \quad u_4 \quad 0 \quad v_2 \quad 0 \quad v_4\}^T$$

Para la resolución del sistema de ecuaciones se puede emplear cualquiera de los métodos numéricos existentes. Además es posible realizar un desacoplamiento de las ecuaciones de forma que obtengamos primero los desplazamientos desconocidos y posteriormente, a partir de éstos, las reacciones. Para el caso que nos ocupa la descomposición de dichos sistemas es

$$\begin{Bmatrix} 3750 \\ 3750 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1.35 & -0.35 & -0.65 & 0.3 \\ & 1.35 & 0.35 & 0 \\ & & 1.35 & -1 \\ & & & 1.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ v_2 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{3x} \\ R_{1y} \\ R_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.3 & -0.65 \\ 0 & -1 & 0 & 0.35 \\ 0.35 & -0.65 & -0.35 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & -0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ v_2 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo los sistemas anteriores obtenemos como solución

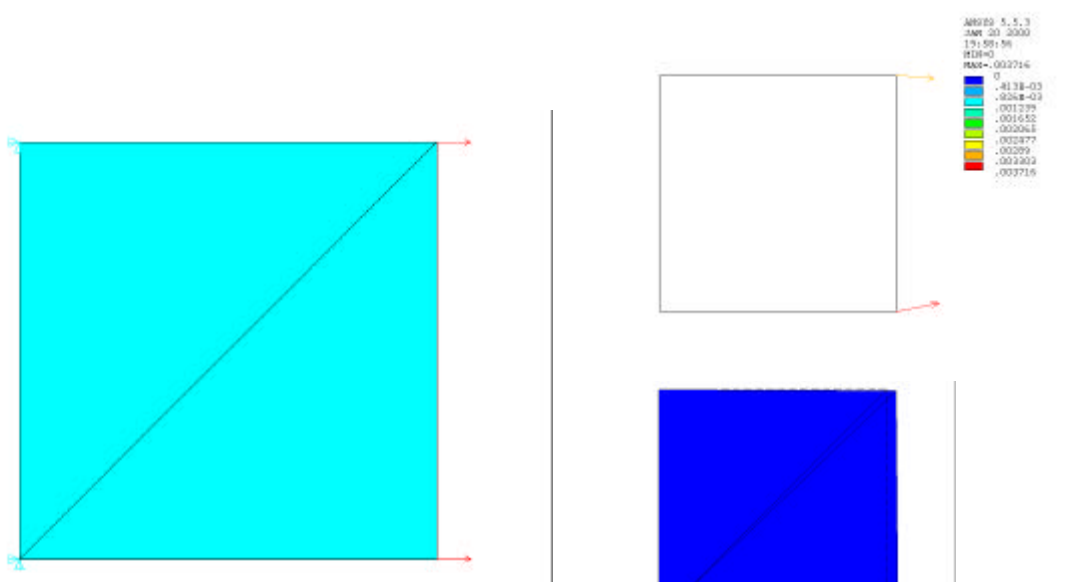
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ v_2 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.364 \cdot 10^{-2} \\ 0.316 \cdot 10^{-2} \\ 0.742 \cdot 10^{-3} \\ -0.259 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{3x} \\ R_{1y} \\ R_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3750 \\ -3750 \\ -1198.4 \\ 1198.4 \end{Bmatrix}$$

1.5.2 Solución con el programa ANSYS

Resuelto este mismo ejercicio con ANSYS obtenemos los siguientes resultados:

NODE	UX	UY
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.36413E-02	0.74187E-03
3	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.31591E-02	-0.25965E-03

NODE	FX	FY
1	-3750.0	-1198.4
3	-3750.0	1198.4



Izq.- Modelo y condiciones de contorno. Der.- Desplazamiento global

1.6 ANTES DE REALIZAR UN CÁLCULO POR EL MEF

Antes de comenzar a resolver un problema mediante cualquier programa de Elementos Finitos conviene reflexionar sobre una serie de puntos.

¿Qué se pretende con el análisis?

Determinar tensiones, obtener distribuciones de temperatura, ver cómo evoluciona el sistema, calcular frecuencias y modos propios, ... Esta pregunta nos determinará el tipo de análisis ha realizar.

¿Cómo va a ser la geometría que vamos a analizar?

Seguramente conocemos la geometría real del problema, pero a la hora de realizar su análisis deberemos simplificarla al máximo en función del objetivo del análisis, ya que la mayoría de los detalles son superfluos y lo único que conllevan es un consumo excesivo de tiempo de cálculo y de espacio de almacenamiento. Para ello deberemos buscar posibles simetrías, antisimetrías, axisimetrías del problema, problemas de tensión o deformación planas, eliminación de detalles superfluos: radios de acuerdo, entallas,... Una vez estudiada la geometría podremos decidir el o los tipos de elementos a utilizar, las características de los mismos, así como las propiedades de el o los materiales (módulo de elasticidad, conductividad,...) a emplear.

¿Qué condiciones de contorno imponemos sobre el sistema a estudiar?

También serán conocidas, pero deberemos estudiar si son o no importantes o influyentes en el tipo de análisis que vamos a realizar (puede darse el caso, por ejemplo, de que nuestro sistema esté sometido a un cambio brusco de temperatura, pero que deseemos realizar un análisis modal para conocer sus frecuencias naturales, en cuyo caso el resultado es independiente de esta condición). Una vez decididas las condiciones de contorno hemos de estudiar la forma de aplicarlas, si representan las condiciones reales del problema, si existe equilibrio (en el caso de que sea un análisis estático),... La imposición de condiciones de contorno apropiadas es una de las decisiones más complejas a la hora de realizar un análisis por elementos finitos.

¿Qué resultados esperamos obtener?

Para poder saber si hemos realizado correctamente el análisis o si representa bien la realidad, deberemos tener una idea de cómo va a responder. Por ejemplo, si estamos analizando una tubería sometida a presión interior y los resultados nos indican que disminuye el radio deberemos pensar que hemos modelado mal el sistema, bien en la aplicación de las cargas, en el mallado, etc.

Una vez estudiados estos puntos estamos en disposición de realizar un Análisis por Elementos Finitos, después de este análisis y a la vista de los resultados conviene repasar los puntos que se han remarcado.

1.7 ÍNDICE

1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 BREVE HISTORIA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	3
1.3 CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO.....	5
1.4 Principios generales aplicados a un continuo elástico	8
1.4.1 Ecuaciones de equilibrio. Principio de los Trabajos Virtuales	8
1.4.2 Funciones de interpolación	10
1.4.3 Síntesis de las características globales.....	11
1.4.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución	12
1.5 Ejemplo de aplicación	13
1.5.1 Solución teórica	14
1.5.2 Solución con el programa ANSYS	21
1.6 ANTES DE REALIZAR UN CÁLCULO POR EL MEF	23
1.7 ÍNDICE.....	25