

פרויקט גמר בקורס אלגוריתמים:

ניתוח יעילות:

Ford – Fulkerson using BFS:

1. יצירת גרף שיוורי ביעילות $O(|V|^2)$.
2. לולאה ראשית - כל איטרציה מכילה:
 - הרצה של *BFS* ביעילות $O(|V|^2 + |E|)$.
 - לולאה העוברת על המסלול שנמצא למציאת הקיבול המינימאלי ביעילות $O(|V|)$.
 - לולאה העוברת לעדכן את ערכי הקיבול במסלול ביעילות $O(|V|)$.
- הלולאה זקוקה ל- $O(|V||E|)$ איטרציות לפי אלגוריתם *Edmonds – Karp*.
- הסבר בקצרה: ישנם $O(|V||E|)$ מסלולים (איטרציות) לכל היותר, כיוון שבכל מסלול קשת אחת לפחות הופכת רוויה (ונעלמת) וכאשר מופיעה שוב היא מתרחקת מ- s . מרחקה אינו יכול לעלות על $O(|V|)$ ולכן נקבל $O(|V||E|)$ מסלולים לכל היותר.
3. הרצה של *MinCut* ביעילות $O(|V|^2 + |E|)$.
4. כל שאר הפעולות בפונקציה הן בסדר גודל של $O(1)$.

סה"כ:

$$\begin{aligned} & O(|V|^2) + O(|V||E|) \cdot O(|V|^2 + |E| + |V| + |V|) + O(|V|^2 + |E|) \\ &= O(|V|^2) + O(|V||E| \cdot (|V|^2 + |E|)) + O(|V|^2 + |E|) \\ &= O(|V||E|(|V|^2 + |E|)) \end{aligned}$$

Ford – Fulkerson using Dijkstra:

1. יצירת גרף שיוורי ביעילות $O(|V|^2)$.
2. לולאה ראשית - כל איטרציה מכילה:
 - הרצה של *Dijkstra* ביעילות $O(|V|^2 + |E| \log |V|)$.
 - לולאה העוברת לעדכן את ערכי הקיבול במסלול ביעילות $O(|V|)$.
- הלולאה זקוקה ל- $O(|E| \log C_{max})$ איטרציות מהטענה: כאשר בוחרים מסלול משפר בעל קיבול שיוורי מקסימלי, מספר האיטרציות לא יעלה על $2|E| \log C_{max}$ כאשר C_{max} הוא הקיבול המקסימלי בגרף.
3. הרצה של *MinCut* ביעילות $O(|V|^2 + |E|)$.
4. כל שאר הפעולות בפונקציה הן בסדר גודל של $O(1)$.

סה"כ:

$$\begin{aligned} & O(|V|^2) + O(|E| \log C_{max}) \cdot O(|V|^2 + |E| \log |V| + |V|) + O(|V|^2 + |E|) \\ &= O(|V|^2) + O(|E| \log C_{max} \cdot (|V|^2 + |E| \log |V|)) + O(|V|^2 + |E|) \\ &= O(|E|(|V|^2 + |E| \log |V|) \log C_{max}) \end{aligned}$$

BFS:

1. לולאת אתחול $O(|V|)$.
 2. לולאה ראשית אשר בכל פעם מוציאה קודקוד מהתור ומייצרת עבורו רשימה מקושרת של השכנים ביעילות $O(V)$. לאחר מכן, עוברת על השכנים של הקודקוד שיצא מהתור ומכניסה קודקודים שעדיין לא טופלו אל התור.
הלולאה עוברת לכל היותר פעם אחת על כל הקודקודים וכל הצלעות שקיימים בגרף.
 3. כל שאר הפעולות בפונקציה הן בסדר גודל של $O(1)$.
- סה"כ:

$$O(|V|^2 + |E|)$$

Dijkstra:

1. לולאת אתחול $O(|V|)$.
 2. לולאה ראשית אשר בכל פעם מוציאה קודקוד מהערימת מקסימום ומייצרת עבורו רשימה מקושרת של השכנים ביעילות $O(V)$. לאחר מכן, עוברת על השכנים של הקודקוד שיצא מהתור ומגדילה את המפתח של קודקודים בערימת המקסימום שקיבולם גדל באיטרציה זו (ביעילות $O(\log|V|)$).
הלולאה עוברת לכל היותר פעם אחת על כל הקודקודים וכל הצלעות שקיימים בגרף.
 3. כל שאר הפעולות בפונקציה הן בסדר גודל של $O(1)$.
- סה"כ:

$$O(|V|^2 + |E| \log|V|)$$

MinCut:

1. הרצה של BFS ביעילות $O(|V|^2 + |E|)$.
 2. מעבר על כל הקודקודים והוספה שלהם לחתך המתאים בהתאם לתוצאות ההרצה ביעילות $O(|V|)$.
 3. כל שאר הפעולות בפונקציה הן בסדר גודל של $O(1)$.
- סה"כ:

$$O(|V|^2 + |E|)$$

	<i>Number of iterations by BFS</i>	<i>Number of iterations by Dijkstra (Greedy)</i>
<i>input 1</i>	3	3
<i>input 2</i>	5	4
<i>input 3</i>	4	4
<i>input 4</i>	5	4
<i>input 5</i>	6	6

הערות בנוגע לקלט תקין:

הקלט שהתוכנה מחשיבה כגרף תקין הינו:

1. גרף פשוט - ללא לולאות או קשתות מקבילות.
2. $|V|$ ו- $|E|$ חיוביים.
3. מקור ובור השונים זה מזה ושייכים לטווח 1 עד $|V|$.
4. בדיוק $|E|$ שלשות של מספרים, כאשר:
 - אין חשיבות למספר הרווחים, טאבים או שורות המפרידים ביניהם.
 - המספרים המייצגים קודקודים שייכים לטווח 1 עד $|V|$.
 - המספר המייצג את הקיבול יהיה חיובי ממש.