SEMINARUL 8

Secţiuni conice

Problema 8.1. Stabiliţi ecuaţia unei elipse ale cărei focare se află pe axa Oy şi sunt simetrice faţă de origine în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) semiaxele sunt egale, respectiv, cu 5 şi 3;

2) distanţa dintre focare este $2c = 6$, iar axa mare este egală cu 10;

3) axa mare este egală cu 26, iar excentricitatea este $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Problema 8.2. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$3x + 2y + 7 = 0.$$

Problema 8.3. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$x^2 + 4y^2 = 20$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$(d) : 2x - 2y - 13 = 0.$$

Problema 8.4. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$4x - 2y + 23 = 0$$

şi determinaţi distanţa dintre ele.

Problema 8.5. Din punctul $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Scrieţi ecuaţiile lor.

Problema 8.6. Din punctul $C\,(10,-8)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Determinaţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de contact.

Problema 8.7. O elipsă trece prin punctul $A(4,-1)$ şi este tangentă dreptei $x+4y-10=0$. Determinaţi ecuaţia elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Problema 8.8. Determinaţi ecuaţia unei elipse ale cărei axe coincid cu axele de coordonate şi care este tangentă dreptelor $3x-2y-20=0$ şi $x+6y-20=0$.

Problema 8.9. Stabiliţi ecuaţia unei hiperbole ale cărei focare sunt situate pe axa Ox, simetric faţă de origine şi care satisface unul dintre următoarele seturi de condiţii suplimentare:

1) axele sunt date de $2a=10$ şi $2b=8$;

2) distanţa dintre focare este $2c=6$, iar excentricitatea este $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

3) ecuaţiile asimptotelor sunt
$$y=\pm\frac{4}{3}x,$$
iar distanţa dintre focare este $2c=20$;

Problema 8.10. Se dă hiperbola $16x^2-9y^2=144$. Să se determine:

1) semiaxele;

2) focarele;

3) ecuaţiile asimptotelor;

Problema 8.11. Calculaţi aria triunghiului format de dreapta

$$9x+2y-24=0.$$

şi de tangentele la hiperbola
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$
în punctele de intersecţie cu dreapta.

Problema 8.12. Focarele unei hiperbole coincid cu cele ale elipsei

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că excentricitatea ei este egală cu 2.

Problema 8.13. Demonstraţi că produsul distanţelor de la orice punct de pe hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

până la asimptote este constant, egal cu $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Problema 8.14. Demonstraţi că aria paralelogramului format de asimptotele la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şi de dreptele duse prin orice punct al hiperbolei, paralele cu asimptotele, este constantă, egală cu $\frac{ab}{2}$.

Problema 8.15. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$4x + 3y - 7 = 0.$$

Problema 8.16. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$10x - 3y + 9 = 0.$$

Problema 8.17. O hiperbolă trece prin punctul $M(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $9x + 2y - 15 = 0$. Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Problema 8.18. Determinaţi ecuaţia unei parabole cu vârful în origine dacă axa parabolei este axa Ox şi parabola trece prin punctul $A(9, 6)$.

Problema 8.19. Să se afle locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la parabola $y^2 = 2px$.

Problema 8.20. Să se determine ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că ea este tangentă dreptei $3x - 2y + 4 = 0$ şi determinaţi punctul de tangenţă.

Problema 8.21. Determinaţi ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că tangenta paralelă cu dreapta $5x - 4y - 2 = 0$ trece prin punctul $A(4, 7)$.

Problema 8.22. Din punctul $A(5, 9)$ ducem tangente la parabola $y^2 = 5x$. Stabiliţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de tangenţă.

Problema 8.23. Determinaţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 20x$ care face un unghi de $45°$ cu direcţia pozitivă a axei Ox.

Problema 8.24. Scrieţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 4ax$ care taie pe axele de coordonate segmente de lungimi egale.