CAPITOLUL 1

Generarea suprafeţelor

1.1 Breviar teoretic

1.1.1 Suprafeţe cilindrice

O *suprafaţă cilindrică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte, numite *generatoare*, care se mişcă în spaţiu, paralel cu o dreaptă fixă, numită *directoare*, şi verifică o condiţie suplimentară. Condiţia suplimentară este, de regulă, ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, numită *curbă directoare*, dar se pot impune şi alte cerinţe, de exemplu aceea ca generatoarele să fie tangente la o suprafaţă dată.

Să presupunem că dreapta directoare este dată ca intersecţie de două plane, adică prin intermediul unui sistem de ecuaţii de forma

$$(\Delta)\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=0,\\ P_2(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

în timp ce curba directoare este dată ca intersecţie de două suprafeţe, adică tot de un sistem de ecuaţii

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Generatoarele fiind paralele cu dreapta directoare, ecuaţiile lor se pot scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda,\\ P_2(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, pe moment arbitrari. Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare ne conduce la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda,\\ P_2(x,y,z)=\mu,\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Acesta este un sistem de patru ecuaţii pentru necunoscutele x, y şi z. Cerinţa ca sistemul să fie compatibil implică existenţa unei dependenţe între parametrii λ şi μ,

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{1.1.5}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei cilindrice se scrie

$$\varphi\left(P_1(x,y,z),P_2(x,y,z)\right)=0. \tag{1.1.6}$$

1.1.2 Suprafeţe conice

O *suprafaţă conică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte mobile, numite *generatoare*, care trec printr-un punct fix, care se numeşte *vârful suprafeţei conice*, şi care verifică o condiţie suplimentară. Ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, de regulă condiţia ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, numită *curbă directoare* a suprafeţei conice, dar, din nou ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, poate lua şi alte forme, de exemplu cerinţa ca generatoarele să fie tangente unei suprafeţe date.

Să presupunem că vârful conului este dat ca o intersecţie de trei plane, deci ca unica soluţie a unui sistem liniar compatibil şi determinat

$$(V)\ \begin{cases}P_1(x,y,z)=0,\\P_2(x,y,z)=0,\\P_3(x,y,z)=0,\end{cases} \tag{1.1.7}$$

iar curba directoare este dată ca o intersecţie de două suprafeţe, deci sub forma unui sistem de două ecuaţii (în general, neliniare!)

$$(C)\ \begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{1.1.8}$$

O generatoare a suprafeţei conice (adică o dreaptă care trece prin vârf) se poate scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases}P_1(x,y,z)=\lambda P_3(x,y,z),\\P_2(x,y,z)=\mu P_3(x,y,z),\end{cases} \tag{1.1.9}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari.

Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare ne conduce la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}P_1(x,y,z)=\lambda P_3(x,y,z),\\P_2(x,y,z)=\mu P_3(x,y,z),\\F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{1.1.10}$$

Sistemul este compatibil doar dacă între cei doi parametri există o relaţie

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{1.1.11}$$

Ecuaţia suprafeţei conice este

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_3(x,y,z)},\frac{P_2(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}\right). \tag{1.1.12}$$

1.1.3 Suprafeţe conoide (conoizi cu plan director)

O *suprafaţă conoidă* sau un *conoid cu plan director* este o suprafaţă generată de o familie de drepte, numite *generatoare*, care intersectează o dreaptă dată, numită *dreaptă directoare* şi rămân paralele cu un plan dat, numit *plan director*, şi mai verifică o condiţie suplimentară, de regulă aceea de intersecţie cu o curbă dată, numită *curbă directoare*.

Dacă dreapta directoare este dată ca intersecţie de două plane:

$$(\Delta)\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=0,\\ P_2(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{1.1.13}$$

iar planul director are ecuaţia

$$(\Pi)\ P(x,y,z)=0, \tag{1.1.14}$$

atunci ecuaţiile generatoarelor se pot scrie

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda P_2(x,y,z),\\ P(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{1.1.15}$$

unde λ şi μ sunt parametri reali.

Să presupunem acum că curba directoare este dată de

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1.1.16}$$

Atunci condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda P_2(x,y,z),\\ P(x,y,z)=\mu,\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1.1.17}$$

Sistemul (1.1.17) este compatibil dacă şi numai dacă între parametri există o relaţie de compatibilitate

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{1.1.18}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei conoide căutate este

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_2(x,y,z)}, P(x,y,z)\right)=0. \tag{1.1.19}$$

1.1.4 Suprafeţe de rotaţie (sau de revoluţie)

O *suprafaţă de rotaţie* (numită şi *suprafaţă de revoluţie*) este o suprafaţă generată de o curbă (numită *curbă directoare*) care se roteşte, în spaţiu, în jurul unei drepte, numită *axă de rotaţie*.

Ideea de deducere a ecuaţiei unei suprafeţe de rotaţie este similară cu cea care se utilizează pentru deducerea ecuaţiilor celorlalte suprafeţe generate. Concret, considerăm o familie, biparametrică, de cercuri situate în plane perpendiculare pe axa de rotaţie şi cu centrul pe axă (*cercuri generatoare*). În continuare, algoritmul este perfect analog cu algoritmii utilizaţi pentru restul suprafeţelor:

- Se pune condiţia ca cercurile generatoare să intersecteze curba directoare.
- Se deduce condiţia de compatibilitate.
- Ecuaţia suprafeţei de rotaţie se obţine înlocuind în condiţia de compatibilitate parametrii care provin din ecuaţiile cercurilor generatoare.

Să presupunem că axa de rotaţie este dată prin ecuaţiile sale canonice,

$$(\Delta)\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1.1.20}$$

Atunci ecuaţiile cercurilor generatoare vor fi

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2,\\ lx+my+cz=\mu.\end{cases} \tag{1.1.21}$$

Dacă ecuaţiile curbei directoare sunt

$$(C)\ \begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases} \tag{1.1.22}$$

atunci condiţia ca cercurile generatoare să intersecteze curba directoare este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2,\\ lx+my+cz=\mu,\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{1.1.23}$$

Acest sistem este compatibil dacă şi numai dacă între cei doi parametri există o relaţie

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{1.1.24}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei de rotaţie căutate se scrie sub forma

$$\varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},lx+my+cz\right)=0. \tag{1.1.25}$$