Partea II

Transformări geometrice

CAPITOLUL 8

Transformări de coordonate

8.1 Introducere

Am văzut, în primul capitol, că a defini un sistem de coordonate este totuna cu a defini un reper afin, care constă dintr-un punct al spaţiului afin (de dimensiune 1, 2, sau 3, după cum studiem geometria pe dreaptă, în plan sau în spaţiu) şi o bază a spaţiului vectorial asociat spaţiului afin. Această bază e formată dintr-un vector nenul, în cazul dreptei, din doi vectori necoliniari în cazul planului şi din trei vectori necoplanari, în cazul spaţiului.

Prin urmare, a realiza o schimbare de coordonate înseamnă a realiza cel puţina una dintre următoarele operaţii:

- o schimbare a originii (adică înlocuirea originii cu un alt punct);
- schimbarea direcţiei axelor de coordonate (şi a sensului, eventual), ceea ce înseamnă înlocuirea bazei spaţiului vectorial asociat cu o altă bază.

Fiecare punct al spaţiului cu care lucrăm, într-un caz concret, are un set de coordonate relativ la reperul afin ales. Atunci când aplicăm o transformare de coordonate, trebuie să găsim legătura dintre coordonatele punctului relativ la reperul iniţial şi coordonatele sale relativ la reperul transformat. Analog stau lucrurile şi în cazul vectorilor, unde trebuie să găsim legătura dintre componentele vectorilor relativ la baza iniţială şi componentele lor relativ la baza transformată.

Există, în cazul graficii, cel puţin, mai multe motivaţii pentru care este important să fim în stare să trecem de la un sistem de coordonate la altul. Dăm, mai jos, câteva dintre ele.

8.2 Transformări de coordonate scrise în coordonate afine

8.2.1 Schimbarea originii

Considerăm un sistem de coordonate

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\big)$$

şi un sistem transformat, obţinut din acesta prin mutarea originii, fără a schimba direcţiile şi sensurile axelor de coordonate,

$$S' = \big(O'; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\big).$$

Presupunem că O' are, faţă de sistemul de coordonate vechi, coordonatele $(w_1, \ldots, w_n)$.

Fie, acum, P un punct oarecare, ce are, relativ la sistemul de coordonate vechi, coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$ şi, faţă de sistemul de coordonate nou, coordonatele $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Atunci, avem:

Teorema 8.1.

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + w_1, \\ \vdots \\ x_n = x'_n + w_n \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = X' + W,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Facem convenţia că vectorii (sau punctele) se reprezintă prin matricile *coloană* ale coordonatelor sau componentelor lor. Este una dintre cele două convenţii posibile care se utilizează în grafică. Cealaltă convenţie este că vectorii (sau punctele) se descriu prin matrici linie.

Demonstrația teoremei. Fie

$$O' = O + \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{e}_i .$$

În sistemul de coordonate noi, putem scrie

$$P = O' + \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^{n} (x_i' + w_i) \mathbf{e}_i . \quad (8.2.1)$$

Cum, pe de altă parte,

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i , \quad (8.2.2)$$

iar vectorii $\mathbf{e}_i$ sunt liniar independenți, din (8.2.1) și (8.2.2) rezultă relația cerută. □

Observație. Dacă se modifică doar originea sistemului de coordonate, atunci, în mod evident, componentele unui vector relativ la noul sistem de coordonate nu se modifică, deoarece baza în raport cu care se descompune vectorul rămâne aceeași.

8.2.2 Schimbarea axelor

De data asta, reperul vechi este același, adică

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\big),$$

dar reperul nou este de forma

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'\}\big),$$

adică originea rămâne aceeași, dar se schimbă baza de coordonate. Presupunem că

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \mathbf{e}_j , \quad 1 \le i \le n .$$

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Matricea A se numește *matrice de schimbare a bazei*. Numele e justificat de teorema de mai jos.

Observaţie. După cum se poate constata cu uşurinţă, elementele coloanelor matricei de schimbare a bazei sunt componentele elementelor noii baze faţă de vechea bază. Matricea de schimbare a bazei este, desigur, inversabilă, din moment ce coloanele sale sunt vectori liniar independenţi.

Teorema 8.2. *Fie P un punct oarecare. Atunci coordonatele sale relativ la cele două repere sunt legate prin relaţia*

$$X = A \cdot X'. \tag{8.2.3}$$

Observaţie. De remarcat că, dacă am fi utilizat cealaltă convenţie, relaţia (8.2.3) s-ar fi scris

$$X = X' \cdot A^t,$$

unde, de data aceasta, X şi X' sunt matrici linie, nu coloană.

Demonstraţia teoremei. Avem

$$P = O + \sum_{j=1}^{n} x_i \mathbf{e}_j = O + \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{e}_i',$$

prin urmare,

$$\sum_{j=1}^{n} x_i \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{e}_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i' \mathbf{e}_j \right).$$

De aici rezultă că

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i', \quad 1 \le j \le n,$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X'.$$

□

Este important să avem şi regula după care se schimbă componentele unui vector relativ la un sistem de coordonate atunci când se modifică direcţiile axelor. Avem următorul rezultat:

Teorema 8.3. *Fie* $\mathbf{v}$ *un vector care are componentele* $v_1, \ldots, v_n$ *relativ la vechiul sistem de coordonate şi componentele* $v'_1, \ldots, v'_n$ *relativ la noul sistem de coordonate. Atunci cele două seturi de componente sunt legate prin relaţia*

$$V' = A \cdot V, \tag{8.2.4}$$

unde A *este matricea de schimbare a bazei.*

Demonstraţie Avem

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v'_i a_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} v'_i \right) \mathbf{e}_j$$

□

8.2.3 Cazul general

Mai rămâne de discutat cazul în care se schimbă atât originea reperului, cât şi baza de coordonate. Este uşor de constatat că atunci are loc

Teorema 8.4. *Dacă se trece de la reperul*

$$S = \left(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\right)$$

la reperul

$$S' = \left(O'; \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}\right),$$

adică se schimbă atât originea, cât şi baza, atunci legătura între coordonatele unui punct în vechea bază şi coordonatele sale în noua bază sunt date de

$$X = A \cdot X' + W, \tag{8.2.5}$$

unde W *este vectorul de poziţie al noii origini relativ la originea vechiului sistem de coordonate, iar* A *este matricea schimbării de bază.*

Faptul că relaţia (8.2.5) nu se reduce la o simplă înmulţire de matrici complică destul de mult lucrurile dacă, aşa cum se întâmplă adesea, trebuie să facem mai multe schimbări de coordonate. Astfel, de exemplu, dacă, în (8.2.5)

$$X' = B \cdot X'' + W',$$

atunci relaţia citată se scrie

$$X = A \cdot \big(B \cdot X'' + W'\big) + W = (A \cdot B) \cdot X'' + A \cdot W' + W.$$

Este uşor de imaginat cât de tare se poate complica transformarea dacă trebuie să compunem mai multe transformări. Ideal ar fi dacă am avea $W = 0$, tot timpul. Desigur, aşa ceva nu este posibil, dar putem obţine ceva aproape la fel de bun utilizând aşa-numitele coordonate omogene, pe care le vom introduce ceva mai târziu.

8.3 Schimbări de coordonate ortogonale. Matrici ortogonale

De cele mai multe ori, în cadrul acestei cărţi, coordonatele pe care le vom folosi vor fi coordonate ortogonale, în care baza de coordonate este o bază ortonormată. De aceea, merită să ne ocupăm, în mod special, de acele schimbări de coordonate care păstrează caracterul ortonormat al bazei de coordonate. Este clar că schimbarea originii nu modifică nici într-un fel caracterul ortonormat al bazei, aşa că ne vom concentra, exclusiv, asupra schimbărilor care afectează axele de coordonate, prin modificarea bazei.

Dupăm cum am văzut, coloanele matricii de schimbare a coordonatelor nu sunt altceva decât componentele elementelor noii baze de coordonate relativ la vectorii vechii baze. Noi vrem ca vectorii din noua bază să continue să fie de lungime 1 şi să fie ortogonali, doi câte doi, ceea ce înseamnă că trebuie ca între vectorii din noua bază să existe relaţiile

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă; } i \neq j. \end{cases} \tag{8.3.1}$$

Ţinând cont de formula de schimbare a bazei, relaţia (8.3.1) se poate rescrie sub forma

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj}\mathbf{e}_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}.\end{aligned}$$

Dar $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ este elementul de pe poziţia (i, j) al matricii $A \cdot A^t$. Astfel, transformarea de coordonate de la coordonatele ortogonale $\big(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\big)$ conduce la un nou set de coordonate ortogonale $\left(O;\left\{\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'\right\}\right)$ dacă şi numai dacă matricea A de transformare a coordonatelor îndeplineşte condiţia

$$A \cdot A^t = I_n. \tag{8.3.2}$$

O matrice care îndeplineşte condiţia (8.3.2) se numeşte *matrice ortogonală*. Astfel, cum translaţia nu modifică baza de coordonate, putem spune că *o transformare de ortogonală este ortogonală dacă şi numai dacă matricea schimbării de bază este o matrice ortogonală*.

Din relaţia (8.3.2) mai rezultă că, pentru o matrice ortogonală avem

$$\det A = \pm 1. \tag{8.3.3}$$

Dacă $\det A = 1$, atunci schimbarea de coordonate păstrează orientarea bazei, în caz contrar – o inversează.

8.3.1 Transformări de coordonate ortogonale în plan

Translaţia axelor de coordonate

Schimbarea axelor de coordonate

Vrem să vedem cum arată o matrice ortogonală $2x2$.

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

o astfel de matrice. Atunci avem

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

Este uşor de constatat că matricele ale căror elemente verifică acest sistem şi au determinantul egal cu 1 sunt de forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

iar cele de determinant egal cu -1 sunt de forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

unde θ poate fi orice număr real. După cum ne vom convinge imediat, matricele din prima familie determină o rotaţie cu unghi θ a axelor de coordonate. Într-adevăr, fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ o bază ortonormată a planului. Imaginea sa printr-o transformare ortogonală de determinant 1 va fi formată din vectorii

$$\mathbf{i}' = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \quad \text{şi} \quad \mathbf{j}' = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}.$$

Atunci unghiul dintre $\mathbf{i}'$ şi $\mathbf{i}$ este dat de

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{i}'\| \cdot \|\mathbf{i}\|} = \cos\theta.$$

Unghiul pe care îl formează $\mathbf{j}'$ cu $\mathbf{i}$ este dat de

$$\cos\psi = \frac{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{j}'\| \cdot \|\mathbf{i}\|} = -\sin\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Astfel, baza formată din vectorii $\mathbf{i}'$ şi $\mathbf{j}'$ (în această ordine) este o bază orientată direct, deoarece ambii vectori sunt de lungime 1, iar cel de-al doilea se obţine prin rotirea primului, în sens pozitiv, cu un unghi de $\pi/2$.

Dacă mai adăugăm şi o translaţie de vector (x_0, y_0), cea mai generală transformare de coordonate ortogonale în plan, care nu schimbă orientarea spaţiului, este de forma

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + x_0, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta + y_0. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

Trecem acum la cel de-al doilea tip de transformare, care inversează orientarea planului. De data aceasta avem

$$\mathbf{i}' = \cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} \quad \text{şi} \quad \mathbf{j}' = \sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}.$$

8.4 Spaţiul proiectiv n-dimensional

Există o serie de probleme cărora geometria euclidiană nu le face faţă cu succes, dar care se pot descrie cu uşurinţă într-o geometrie mai generală, numită geometrie proiectivă. Un spaţiu proiectiv se obţine, până la urmă, din spaţiul afin de aceeaşi dimensiune, adăugând o serie de puncte numite *puncte de la infinit* sau *puncte ideale*. Adăugarea acestor puncte elimină, de multe ori, cazurile speciale care trebuie luate în considerare atunci când se face o discuţie. Astfel, de exemplu, în planul afin, două drepte distince pot să se intersecteze sau să fie paralele. În planul proiectiv, oricare două drepte se intersectează, dar unele dintre ele, care corespund dreptelor afine paralele, se intersectează într-un punct de la infinit.

Din punctul nostru de vedere, principalul avantaj al punctului de vedere proiectiv este că ne furnizează un sistem de coordonate foarte utile, *coordonatele omogene*, care permit descrierea foarte comodă atransformărilor geometrice.

Începem cu o definiţie.

Definiţia 8.1. Fie $u, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Spunem că punctele u şi v sunt echivalente şi scriem $x \sim y$ dacă există un număr real nenul t astfel încât $u = t \cdot v$. Este uşor de verificat că această relaţie este o relaţie de echivalenţă. Clasa de echivalenţă a lui u,

$$[u] = \{t \cdot u \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

este dreapta care trece prin origine şi punctul u, mai puţin originea, desigur. Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, adică *spaţiul factor* $\mathbb{RP}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, se numeşte *spaţiu proiectiv n-dimensional*. Dacă în $\mathbb{R}^{n+1}$ alegem un sistem de coordonate $OX_1 \dots X_{n+1}$, atunci, pentru $[u] = [X_1, \dots, X_{n+1}]$, spunem că numerele $X_1, \dots, X_{n+1}$ sunt *coordonatele omogene* ale punctului $[u]$. De remarcat că aceste coordonate nu sunt unice. Într-adevăr, dacă $(X_1, \dots, X_{n+1})$ sunt coordonate omogene ale lui $[u]$, atunci, pentru orice $t \neq 0$, $(tX_1, \dots, tX_{n+1})$ sunt, de asemenea, coordonate omogene ale aceluiaşi punct.

Pentru noi sunt importante cazurile $n = 2$ şi $n = 3$.

Începem cu $n = 2$. Spaţiul proiectiv $\mathbb{RP}^2$ se mai numeşte *plan proiectiv real*. Să presupunem că am ales, în $\mathbb{R}^3$, un sistem de coordonate $OXYZ$. Atunci un punct din planul proiectiv se scrie

$$[X, Y, Z] = \left\{t(X, Y, Z) \mid t \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

Să considerăm, mai întâi, cazul în care $Z \neq 0$. Un punct de acest tip are un reprezentant de forma $(x, y, 1)$, dacă alegem $t = 1/Z$ şi notăm $x = X/Z, y = Y/Z$.

De remarcat că reprezentantul $(x, y, 1)$ este intersecţia dintre dreapta care trece prin origine şi prin punctul (X, Y, Z) şi planul $Z = 1$. Dacă identificăm acest plan cu $\mathbb{R}^2$, concluzia este că există o bijecţie între punctele $[X, Y, Z]$, cu $Z \neq 0$, ale planului proiectiv şi punctele planului euclidian. Dacă (X, Y, Z) sunt coordonate omogene ale unui punct din planul proiectiv, cu $Z \neq 0$, vom spune că ele sunt coordonatele omogene ale punctului $(x = X/Z, y = Y/Z)$ din planul euclidian. Invers, dacă (x, y) este un punct din planul euclidian, coordonatele sale omogene sunt $(x, y, 1)$ şi orice triplet de numere reale obţinut din acestea prin înmulţirea cu un scalar nenul.

Să vedem, acum, ce se întâmplă cu punctele din planul proiectiv pentru care ultima coordonată este zero. Fie (x_0, y_0) un punct din plan, diferit de origine. Coordonatele punctului pot fi privite ca fiind componentele unui vector care, fiind nenul, poate fi vectorul director al unei drepte. Fie (a, b) un punct oarecare din plan şi dreapta

$$(x(t), y(t)) = (a + tx_0, b + ty_0)$$

de direcţie (x_0, y_0), care trece prin punctul (a, b). Pentru fiecare t real, punctului $(x(t), y(t))$ îi putem asocia coordonatele omogene $(x(t), y(t), 1) = (a + tx_0, b + ty_0, 1)$. Acelaşi punct, dacă $t \neq 0$, are şi coordonatele omogene $(a/t, x_0, b/t + y_0, 1/t)$. Dacă $t \to \infty$, atunci coordonatele omogene ale punctului considerat tind la $(x_0, y_0, 0)$. Interpretarea geometrică este că punctul de coordonate omogene $(x_0, y_0, 0)$ este punctul situat la infinit pe dreapta $(x(t), y(t))$. De remarcat că există *un singur* punct la infinit pe o dreaptă dată.

8.5 Transformări de coordonate în scrise cu ajutorul matricelor extinse

Am văzut că o schimbare de coordonate oarecare în $\mathbb{R}^n$ este o combinaţie dintre o schimbare a axelor de coordonate care nu afectează originea şi o schimbare a originii, adică este de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Neajunsul acestei forme este acela că forma transformării devine foarte complicată dacă trebuie să aplicăm transformări de coordonate succesive. Principala problemă este legată de faptul că transformarea nu se reduce la înmulţiri de matrici.

Pentru a rezolva problema, procedăm în modul următor. Reprezentăm $\mathbb{R}^n$ ca fiind subspaţiul afin (hiperplanul afin) al lui $\mathbb{R}^{n+1}$, cu coordonatele $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, dat de ecuaţia $x_{n+1} = 1$. Avem, atunci, următorul rezultat:

Definim *matricea extinsă* sau *matricea omogenă* asociată acestei transformări prin

$$M_{A,W} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.5.1}$$

Dacă vectorul W se presupune subînţeles, vom nota $M_{A,W} \equiv \overline{A}$. Fie, acum, $\overline{X}$ şi $\overline{X}'$ vectorii coordonatelor omogene asociate lui X şi X', adică

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \overline{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci transformarea de coordonate se poate scrie

$$\overline{X} = \overline{A} \cdot \overline{X}' \tag{8.5.2}$$

sau, explicit,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.5.3}$$

Afirmaţia este uşor de demonstrat în cazul general, dar preferăm să o verificăm în cele două cazuri particulare care ne interesează pe noi, anume $n = 2$ şi $n = 3$.

În cazul $n = 2$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.5.4}$$

Dacă facem înmulţirea de matrici, obţinem

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + w_2 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul $n = 3$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.5.5}$$

de unde

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13x_3'} + w_1 \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + w_2 \\ x_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + w_3 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

8.5.1 Operaţii cu matrici extinse

Dacă privim matricile extinse ca fiind nişte matrici formate din blocuri, atunci ele se pot înmulţi, după cum se poate verifica uşor, considerând că blocurile sunt, de fapt, componentele matricii. Astfel, dacă înmulţim matricile $M_{A,W}$ şi $M_{B,V}$ obţinem

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot B & A \cdot V + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această relaţie demonstrează, în fapt, că $M_{A,W} \cdot M_{B,V}$ este matricea transformării compuse:

$$M_{A,W} \cdot M_{B,V} = M_{A \cdot B, A \cdot V + W},$$

după cum era de aşteptat.

Matricea extinsă asociată transformării identice este matricea identică:

$$M_{I_n,0} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Inversa matricei $M_{A,W}$ este

$$M_{A,W}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A^{-1} & A \cdot (-A^{-1} \cdot W) + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

iar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A & A^{-1} \cdot W - A^{-1} \cdot W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Să presupunem, acum, că avem o transformare de coordonate de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Vrem să exprimăm pe X' în funcţie de X. Un calcul simplu ne conduce la

$$X' = A^{-1} \cdot X - A^{-1} \cdot W$$

sau, în limbaj de matrici extinse,

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL 9

Transformări geometrice în plan

9.1 Generalităţi despre transformări afine

Fie $\mathbb{E}^n$ spaţiul afin n-dimensional. $\mathbb{E}^n$ este, ca mulţime, $\mathbb{R}^n$, privită ca mulţime de puncte. Pentru a fi un spaţiu afin, ea este însoţită de o aplicaţie care asociază fiecărei perechi de puncte vectorul care le uneşte, cu alte cuvinte,

$$\varphi : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}. \tag{9.1.1}$$

Aplicaţia φ se bucură de următoarele două proprietăţi:

1. $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$ (regula triunghiului);

2. pentru orice punct $P \in \mathbb{E}^n$ şi orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, există un singur punct $Q \in \mathbb{E}^n$ astfel încât $\varphi(A, B) = \mathbf{v}$.

O aplicaţie bijectivă $T : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ se numeşte *transformare afină* dacă există $O \in \mathbb{E}^n$, aplicaţia $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită, pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, prin

$$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{T(O)T(P)},$$

unde $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$, este liniară.

Se poate demonstra că, dacă în $\mathbb{E}^n$ s-a fixat un reper $(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\})$, o transformare afină se poate scrie

$$T(P) = A \cdot P + B,$$

unde A este matricea aplicaţiei liniare $\overrightarrow{T}$, iar $B = T(O)$. Pentru a simplifica notaţia, în cele ce urmează vom renunţa la săgeata care indică partea vectorială a transformării afine şi ne vom da seama după argument dacă este vorba despre partea punctuală sau cea vectorială a aplicaţiei afine. Astfel, dacă scriem

$$T(P + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{v}),$$

al doilea termen din membrul drept este, de fapt, partea vectorială (liniară) a transformării afine. Dacă folosim coordonate omogene, matricea corespunzătoare unei transformări afine se va scrie

$$T = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă $\mathbf{v}$ este un vector, atunci

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot v \\ 0 \end{pmatrix},$$

deci aplicaţia A e liniară pe vectori. Pe de altă parte

$$T(P) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot P + W \\ 1 \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează, ne vom concentra, exclusiv, pe cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ şi vom determina, pentru fiecare caz contra, matricea omogenă a transformării. Strategia va fi să determinăm, de fiecare dată, o formă vectorială a transformării, care să nu depindă de coordonate, şi abia apoi să determinăm matricea (omogenă) a transformării.

9.2 Transformări plane

9.2.1 Translaţia

Forma vectorială

Translaţia este o transformare care mută toate punctele planului cu un acelaşi vector, constant. Prin urmare, dacă privim planul ca fiind un spaţiu afin bidimensional, pe care îl vom nota cu $\mathbb{E}^2$, atunci translaţia este o aplicaţie $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$,

$$T(P) = P + \mathbf{w}, \tag{9.2.1}$$

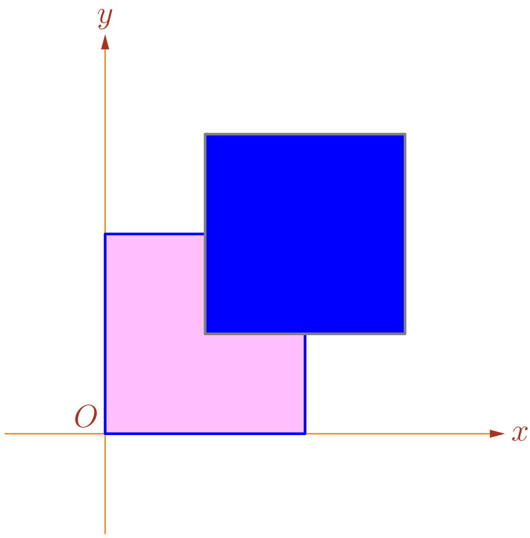

Figura 9.1: Translaţia aplicată unui păătrat

unde $\mathbf{w}$ este un vector constant din plan. Transformarea se mai scrie şi

$$P' = P + \mathbf{w}.$$

O tehnică generală, atunci când studiem transformările afine, ale planului sau ale spaţiului, fără a utiliza coordonate, este aceea de a determina, separat, modul în care transformarea acţionează pe puncte şi pe vectori. Să aplicăm această metodă în cazul translaţiei. Dacă Q este un al doilea punct, atunci

$$T(Q) = Q + \mathbf{w}. \tag{9.2.2}$$

Fie $\mathbf{v} = Q - P \left(\equiv \overrightarrow{PQ}\right)$. Atunci

$$T(\mathbf{v}) = T(Q - P) = T(Q) - T(P) = (P + \mathbf{v}) - P = (P - P) + \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

deci, când translaţia este aplicată unui vector, ea se reduce la aplicaţia identică.

Forma matricială

Cele două reguli de transformare, pentru vectori şi puncte, se scriu, sub forma matricială, ca

$$[v'] = [v] = I_2 \cdot [v], \tag{9.2.3}$$

$$[P'] = [P] + [w] = I_2 \cdot [P] + [w], \tag{9.2.4}$$

ceea ce înseamnă că, dacă utilizăm blocuri matriciale, matricea translaţiei se va scrie

$$[T_{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} I_2 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.2.5}$$

sau, în formă extinsă,

$$[T_{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.2.6}$$

Dacă aplicăm transformarea unui punct P, de coordonate (x_1, y_1), obţinem

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + w_1 \\ x_2 + w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.2.7}$$

ceea ce corespunde, după cum ne aşteptam, scrierii scalare

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + w_1, \\ x_2' = x_2 + w_2 \end{cases}. \tag{9.2.8}$$

9.2.2 Rotaţia în jurul unui punct

Forma vectorială

Aplicăm aceeaşi metodă şi în cazul rotaţiei în plan relativ la un punct. Începem prin a determina rotaţia unui vector **v** cu un unghi θ. Aceasta înseamnă să fixăm originea vectorului şi să rotim extremitatea vectorului cu unghiul θ faţă de originea vectorului. E uşor de verificat că operaţia nu depinde de alegerea originii.

Introducem operatorul care roteşte un vector, în sens direct, cu 90°. Pentru un vector **v**, vom nota imaginea sa prin acest operator cu $\mathbf{v}^{\perp}$ (se citeşte “perp de **v**”). Dacă am fixat un reper ortonormat direct în care $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, atunci $\mathbf{v}^{\perp} = (-v_2, v_1)$. Un raţionament simplu ne arată că putem scrie rotaţia de unghi θ aplicată

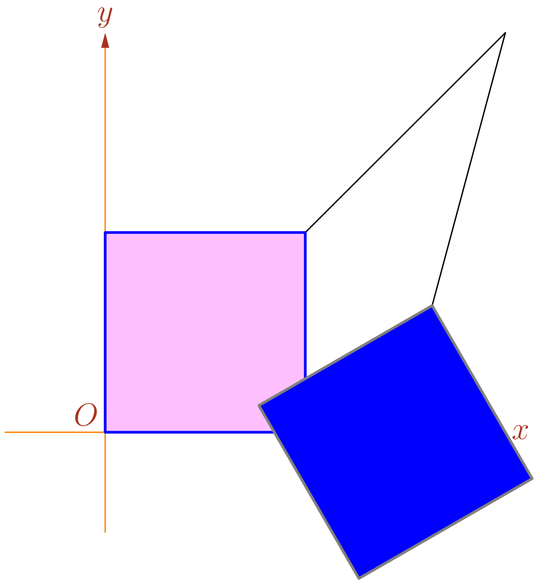

Figura 9.2: Rotaţia aplicată unui păătrat

vectorului sub forma:

$$\mathrm{Rot}(\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{v}^{\perp}\sin\theta. \tag{9.2.9}$$

Fie acum Q punctul fix în jurul căruia se face rotaţia şi P un punct oarecare din plan, pe care vrem să-l rotim cu unghiul θ în jurul lui Q. Pentru a stabili formula pentru rotaţia punctului P, remarcăm că putem scrie

$$P = Q + P - Q = Q + \overrightarrow{QP}.$$

Prin urmare, rotaţia fiind o transformare afină, avem:

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P) = \mathrm{Rot}(Q,\theta)(Q) + \mathrm{Rot}(Q,\theta)(\overrightarrow{QP}).$$

Cum Q este punctul în jurul căruia se face rotaţia, el este fix: $\mathrm{Rot}(Q,\theta)(Q) = Q$. Pe de altă parte, transformarea vectorului $P - Q$ este dată de formula (9.2.9), adică

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P-Q) = \overrightarrow{QP}\cos\theta + \overrightarrow{QP}^{\perp}\sin\theta,$$

deci, în final, pentru transformarea punctelor avem formula:

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP}\cos\theta + \overrightarrow{QP}^{\perp}\sin\theta. \tag{9.2.10}$$

Forma matricială

Dacă utilizăm componentele vectorilor, relaţia (9.2.9) se poate scrie

$$\begin{cases} v_1' = v_1 \cos\theta - v_2 \sin\theta, \\ v_2' = v_1 \sin\theta + v_1 \cos\theta. \end{cases} \tag{9.2.11}$$

Introducem matricea

$$\mathrm{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{9.2.12}$$

Atunci, relaţiile (9.2.11) capătă forma matricială

$$[v'] = \mathrm{Rot}(\theta) \cdot [v]. \tag{9.2.13}$$

Prin urmare, folosind relaţia (9.2.10), obţinem

$$[P'] = [Q] + \mathrm{Rot}(\theta) \cdot (P - Q) = \mathrm{Rot}(\theta) \cdot [P] + (I_2 - \mathrm{Rot}(\theta)) \cdot [Q]$$

Dacă trecem la coordonate omogene, găsim matricea rotaţiei de unghi θ în jurul lui Q sub forma

$$\mathrm{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\theta) & (I_2 - \mathrm{Rot}(\theta)) \cdot [Q] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.2.14}$$

Dacă explicităm, matricea de mai sus se scrie

$$\mathrm{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta) + q_2 \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1 \sin\theta + q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.2.15}$$

Exemplul 9.1. Rotaţia faţă de origine. De data asta, Q este originea, deci coordonatele sale sunt $(0,0)$. Aşadar, matricea rotaţiei de unghi θ relativ la origine este

$$\mathrm{Rot}(Origine, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.2.16}$$

Problema 9.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC, de vărfuri $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(4,4)$ printr-o rotaţie de unghi $30°$ în jurul originii. Desenaţi, pe acelaşi sistem de axe, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Soluţie Conform formulei (9.2.16), matricea omogenă a transformării este

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, avem:

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 2\sqrt{3}-2 \\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3}+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aşadar, punctele A', B', C' vor fi date de

$$A' = A'\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right), \quad B' = B'\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right), \quad C' = C'\left(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2\right)$$

□

Problema 9.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC, de vărfuri $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(4,4)$ printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul punctului $Q(1,3)$. Desenaţi, pe acelaşi sistem de axe, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

9.2.3 Scalarea simplă uniformă

Scalarea simplă este o transformare afină în care se scalează vectorii bazei, adică aceştia se înmulţesc cu un număr real diferit de zero. Dacă numărul este acelaşi, avem de-a face cu o scalare *uniformă* sau *izotropă*. Dacă factorii de scală nu sunt aceeaşi pentru toţi vectorii bazei, atunci spunem că scalarea este *neuniformă* sau *anizotropă*. Începem cu studiul scalării simple uniforme. Ea se mai numeşte şi *omotetie*.

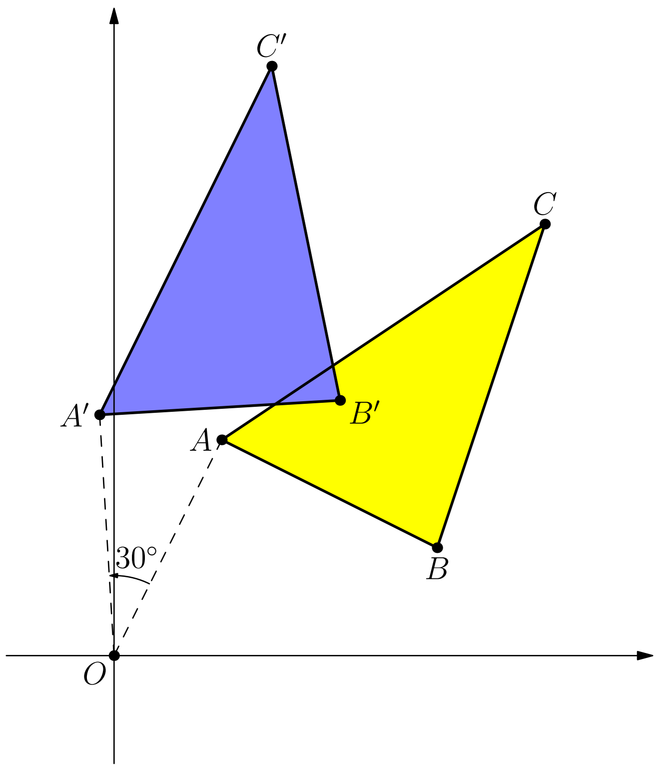

Figura 9.3:

Forma vectorială

Scalarea simplă omogenă de factor s, relativ la un punct Q din plan este transformarea geometrică ce asociază unui punct P din plan un punct P' astfel încât

$$\overrightarrow{QP'} = s\overrightarrow{QP}. \tag{9.2.17}$$

Este uşor de dedus forma transformării atunci când este aplicată vectorilor:

$$\text{Scale}(Q,s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \tag{9.2.18}$$

Această "parte" a scalării nu depinde de punctul Q, ci doar de factorul de scală, s.

Pentru a determina modul în care scalarea se aplică punctelor, procedăm ca şi în cazul rotaţiei, adică aplicăm scalarea vectorială vectorului $\overrightarrow{QP} \equiv P-Q$. Din (9.2.18)

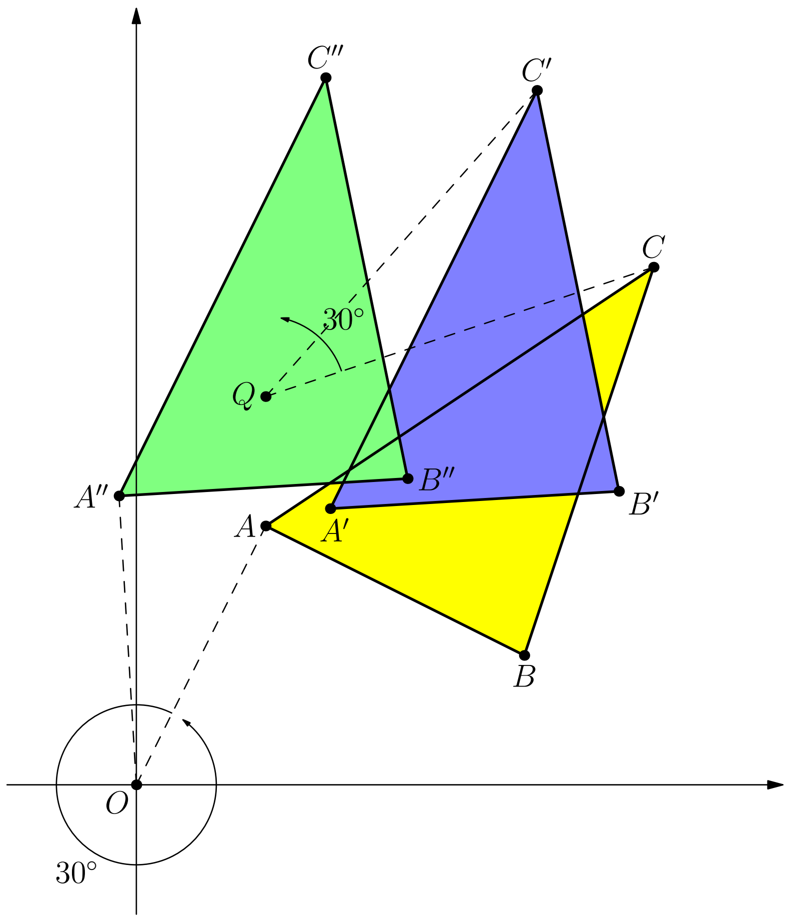

Figura 9.4:

rezultă

$$\mathrm{Scale}(Q,s)(P-Q)=\mathrm{Scale}(Q,s)(P)-\mathrm{Scale}(Q,s)(Q)=s\cdot(P-Q)$$

Cum Q este punct fix al transformării, relaţia de mai sus se poate scrie

$$\mathrm{Scale}(Q,s)(P)=Q+s\cdot\overrightarrow{QP}. \tag{9.2.19}$$

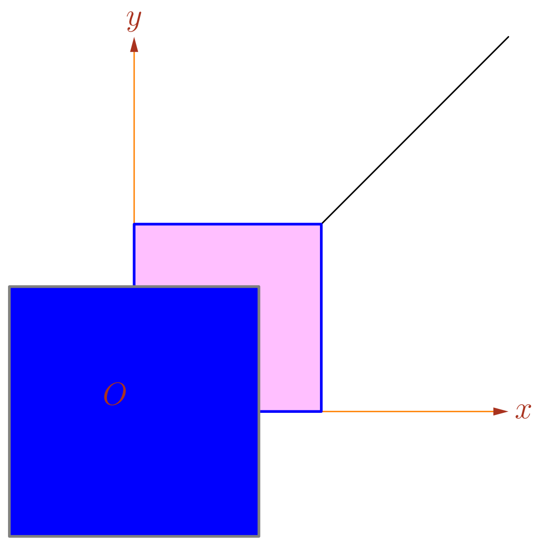

Figura 9.5: Rotaţia aplicată unui păătrat

Forma matricială

Relaţia (9.2.19) se poate scrie, matriceal

$\mathrm{Scale}(Q,s)(P) = [Q]+s\,(P-Q) = s[P]+(1-s)[Q] = (sI_2)\cdot][P]+(1-s)[Q].$

Prin urmare, matricea scalării uniforme relativ la Q este

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s\cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.2.20}$$

sau, explicit,

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.21}$$

9.2.4 Scalarea simplă neuniformă

Produsul tensorial

Avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operaţie cu vectori care se numeşte *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1,a_2)$ şi $\mathbf{b}(b_1,b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicaţia biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \tag{9.2.22}$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t .$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalităţi. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{9.2.23}$$

Remarcabil este, la relaţia de mai sus, că, atunci când **a** şi **b** sunt vectori constanţi, **t** este o aplicaţie liniară de **u**. Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \tag{9.2.24}$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (9.2.43) se transformă în formula (9.2.44).

Fie Q un punct din plan. O scalare simplă neuniformă a planului, relativ la punctul Q, este o transformare afină care asociază unui punct P, de vector de poziţie $\overrightarrow{QP}$, relativ la punctul Q, un punct P' astfel încât

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{i} = s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}), \\ \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{j} = s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}). \end{cases} \tag{9.2.25}$$

Forma vectorială

Fie **v** un vector din plan. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}, \quad \mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$. Atunci,

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = \mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_x) + \mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_y),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \tag{9.2.26}$$

Dacă P e un punct,

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = \mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \tag{9.2.27}$$

Forma matricială

Din (9.2.27), obţinem

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i})(P - Q) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})(P - Q)$$

sau

$$\begin{aligned} \mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = & \big(s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})\big) \cdot P + \\ & + \big(I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}\big) \cdot Q \end{aligned} \tag{9.2.28}$$

Matricea transformării este, deci

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) & \big(I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}\big) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.29}$$

Dar

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci matricea extinsă este

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1 - s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1 - s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.30}$$

9.2.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Scalarea neuniformă generală nu este tocmai o generalizare a scalării neuniforme obişnuite. Ea este, în acelaşi timp, mai generală şi mai particulară decât scalarea neuniformă simplă. Este mai particulară, deoarece avem un singur factor de scală, dar este mai generală pentru că vectorul **i** este înlocuit cu un versor oarecare. În rest, “filozofia” transformării este aceeaşi.

Mai precis, considerăm un număr real nenul s, versor $\mathbf{w}$ din plan şi un punct din plan. *Scalarea neuniformă generală* de-a lungul lui $\mathbf{w}$, relativ la Q, de factor de scală s, este singura transformare afină a planului care transformă vectorul $\mathbf{w}$ în vectorul $s\mathbf{w}$, vectorul $\mathbf{w}^\perp$ – în el însuşi şi lasă pe loc punctul Q.

Aşadar,

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s) = \begin{pmatrix} s\cdot\mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{9.2.31}$$

sau, extins,

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s) = \begin{pmatrix} s\cdot w_1 & -w_2 & q_1 \\ s\cdot w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1 \\ w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{9.2.32}$$

Cum

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1 \\ w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & -w_1q_1 - q_2w_2 \\ -w_2 & w_1 & w_2q_1 - w_1q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s) = \begin{pmatrix} 1+(s-1)w_1^2 & (s-1)w_1w_2 & -(s-1)(q_1w_1^2 + q_2w_1w_2) \\ (s-1)w_1w_2 & 1+(s-1)w_2^2 & -(s-1)(q_1w_1w_2 + q_2w^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.33}$$

O altă metodă

De data aceasta, vom deduce, mai întâi, formula pentru vectori. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. Vom descompune acest vector după două direcţii, una paralelă cu versorul $\mathbf{w}$ şi una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp. \tag{9.2.34}$$

Este uşor de constatat că

$$\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}, \tag{9.2.35}$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{9.2.36}$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \tag{9.2.37}$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul **w**, avem, evident

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) = s\mathbf{v}_{\parallel}. \tag{9.2.38}$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcţia perpendiculară la **w**, deci

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \tag{9.2.39}$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ţinem cont de definiţiile lui $\mathbf{v}_{\parallel}$ şi $\mathbf{v}_{\perp}$,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s-1)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{9.2.40}$$

Pentru a determina modul în care transformarea acţionează asupra unui punct P, remarcăm, mai întâi, că:

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(P-Q) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) - \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(Q) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) - Q,$$

de unde

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau, folosind (9.2.40),

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s-1)(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{9.2.41}$$

Forma matricială

Pentru a descrie matricial transformarea, avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operaţie cu vectori care se numeşte *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ şi $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicaţia biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{b}]\cdot[\mathbf{a}]^t. \tag{9.2.42}$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = (\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalităţi. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{9.2.43}$$

Remarcabil este, la relaţia de mai sus, că, atunci când **a** şi **b** sunt vectori constanţi, **t** este o aplicaţie liniară de **u**. Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \tag{9.2.44}$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (9.2.43) se transformă în formula (9.2.44).

Deducem că din formula (9.2.40) rezultă expresia matricială pentru scalarea neuniformă a vectorilor:

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)([\mathbf{v}]) = (I_2 + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{v}]. \tag{9.2.45}$$

Pentru a determina matricea omogenă a transformării pentru puncte, plecăm de la (9.2.41) şi obţinem

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + P - Q + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot (P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = (I_2 + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot P + (1-s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q. \tag{9.2.46}$$

Prin urmare, matricea omogenă a scalării generale neuniforme este

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_2 + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} & (1-s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.47}$$

Dacă facem calculele, ajungem, din nou, la formula (9.2.33).

9.2.6 Reflexia faţă de o dreaptă

Reflexia relativ la o dreaptă este transformarea care asociază unui punct simetricul punctului faţă de dreaptă.

Forma vectorială

Considerăm o dreaptă care trece printr-un punct Q şi are versorul director $\mathbf{w}$. Începem, ca de obicei, prin a determina imaginea unui vector prin reflexie. Evident, imaginea vectorului nu depinde de punctul Q. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. După cum am văzut, $\mathbf{v}$ se poate descompune ca o sumă dintr-un vector paralel cu vectorul $\mathbf{w}$ şi unul perpendicular pe acest vector,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}.$$

De data aceasta, însă, vom pune

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\|} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}, \\ \mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}. \end{cases}$$

Este clar că

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\|}) = \mathbf{v}_{\|}, \tag{9.2.48}$$

în timp ce

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\perp}) = -\mathbf{v}_{\perp}.$$

Aşadar,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\|} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}. \tag{9.2.49}$$

Ca să determinăm imaginea unui punct oarecare, P, din plan, ţinem cont de faptul că $P = Q + (P - Q)$ şi, Q fiind un punct fix al transformării, obţinem

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\overrightarrow{QP}),$$

deci

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{w}^{\perp}. \tag{9.2.50}$$

Forma matricială

Transcriem, mai întâi, matricial, formula de transformare pentru vectori (9.2.49), ţinând cont de faptul că

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp} = \left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{v}.$$

Obţinem, prin urmare,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{v}$$

sau

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \left(I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\right) \cdot \mathbf{v}. \tag{9.2.51}$$

Aşadar, matricea părţii liniare a reflexiei este

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w}) = I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right). \tag{9.2.52}$$

Pentru determinarea matricei omogene, plecăm de la (9.2.50) şi obţinem

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + P - Q - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)(P - Q),$$

adică

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = \left(I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\right) \cdot P + 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot Q, \tag{9.2.53}$$

ceea ce înseamnă că matricea omogenă a transformării este

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right) & 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.54}$$

Dacă ţinem cont că

$$\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp} = \begin{pmatrix} w_2^2 & -w_1 w_2 \\ -w_1 w_2 & w_1^2 \end{pmatrix},$$

matricea de mai sus se scrie, în mod explicit, ca

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 - 2w_2^2 & 2w_1 w_2 & 2(q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \\ 2w_1 w_2 & 1 - 2w_1^2 & 2(-q_1 w_1 w_2 + q_2 w_1^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.55}$$

Observaţii. (i) Dacă examinăm formulele (9.2.47) şi (9.2.55), ajungem imediat la concluzia că, de fapt, reflexia faţă de o dreaptă este o scalare generală neomogenă, de factor de scală -1, în direcţia perpendiculară pe dreaptă, deoarece avem

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}^{\perp}, -1).$$

(ii) Dacă Q este originea, iar reflexia se face faţă de Ox, atunci avem $\mathbf{w} = (1, 0)$, deci

$$\mathrm{Mirror}(Origine, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog, reflexia faţă de Oy este dată de matricea

$$\mathrm{Mirror}(Origine,\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Formula (9.2.55) a fost obţinută în ipoteza că dreapta este dată sub forma vectorială:

$$P(t) = Q + t\mathbf{w}.$$

Dacă dreapta este dată sub forma generală,

$$\Delta : ax + by + c = 0,$$

atunci ca versor al vectorului director se poate lua vectorul

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b, -a).$$

Dacă $a \neq 0$, putem lua $Q = (-c/a, 0)$. Dacă înlocuim în formula (9.2.55), obţinem

$$\mathrm{Mirror}(\Delta) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2 & -2bc \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}. \tag{9.2.56}$$

Aceeaşi formulă se obţine pentru orice alt punct al dreptei.

9.2.7 Forfecarea

Forfecarea este transformarea afină care transformă un pătrat unitate cu un vârf în punctul Q şi de laturi $\mathbf{w}$ şi $\mathbf{w}^\perp$ într-un paralelogram înclinând latura $\mathbf{w}^\perp$ şi transformând-o în $\mathbf{w}^\perp_{\text{new}}$, care face un unghi θ cu $\mathbf{w}^\perp$, fără să modifice punctul Q sau vectorul $\mathbf{w}$.

Forma vectorială

Începem, ca de obicei, prin a determina forfecarea aplicată unui vector. Fie, prin urmare, $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. Tot ca de obicei, îl descompunem în două componente, una paralelă cu vectorul $\mathbf{w}$ şi una perpendiculară pe el sau, mai degrabă, una paralelă cu vectorul $\mathbf{w}^{\perp}$. Atunci, vom avea

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde

$$\mathbf{v}_{\perp} = \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot \mathbf{w}^{\perp} \text{ şi } \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp}.$$

Este clar că $\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}_{\parallel}) = \mathbf{v}_{\parallel}$, în timp ce

$$\begin{aligned}\text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) &= \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)\left(\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) = \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)(\mathbf{w}^{\perp}) = \\ &= \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right)\left(\operatorname{tg}\theta \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}\right).\end{aligned}$$

Aşadar,

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} + \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right)\left(\operatorname{tg}\theta \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}\right) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot \mathbf{w}$$

adică

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta \cdot \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot \mathbf{w}. \tag{9.2.57}$$

Pentru a determina imaginea prin forfecare a unui punct P, folosim, din nou, relaţia $P = Q + P - Q \equiv Q + \overrightarrow{QP}$ şi obţinem, folosind (9.2.57) şi faptul că punctul Q este fix,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = Q + \overrightarrow{QP} + \operatorname{tg}\theta\left(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot \mathbf{w}. \tag{9.2.58}$$

Forma matricială

Pentru a determina matricea transformării, mai întâi determinăm forma matricială a transformării vectorilor. Plecăm de la formula (9.2.57) şi obţinem

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right) \cdot \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \left(I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right)\right) \cdot \mathbf{v}, \tag{9.2.59}$$

ceea ce înseamnă că matricea părţii vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta) = I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right). \tag{9.2.60}$$

Pentru a obţine matricea omogenă a transformării pentru puncte, combinăm (9.2.58) şi (9.2.60) şi obţinem

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right) & -\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.61}$$

Pentru a obţine forma explicită a acestei matrici, remarcăm, înainte de toate, că

$$\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1 w_2 & w_1^2 \\ -w_2^2 & w_1 w_2 \end{pmatrix},$$

prin urmare,

$$I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \operatorname{tg}\theta & w_1^2 \operatorname{tg}\theta \\ -w_2^2 \operatorname{tg}\theta & 1 + w_1 w_2 \operatorname{tg}\theta \end{pmatrix},$$

iar

$$-\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right) \cdot Q = \begin{pmatrix} \left(q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2\right) \operatorname{tg}\theta \\ \left(q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2\right) \operatorname{tg}\theta \end{pmatrix}.$$

Aşadar, în final,

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \operatorname{tg}\theta & w_1^2 \operatorname{tg}\theta & \left(q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2\right) \operatorname{tg}\theta \\ -w_2^2 \operatorname{tg}\theta & 1 + w_1 w_2 \operatorname{tg}\theta & \left(q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2\right) \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.62}$$

Exemple

- Dacă punem $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0)$, matricea forfecării devine:

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\theta & -q_2 \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  În particular, forfecarea în direcţia axei Ox relativ la origine este

$$\operatorname{Shear}(Origine, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Forfecarea în direcţia axei Oy este, în schimb,

$$\mathrm{Shear}(Q, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{tg}\theta & 1 & q_1 \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 9.2. Vrem să rotim pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ cu $60°$ în jurul lui C. Plecând de la formula vectorială, avem

$$\mathrm{Rot}(C, 60°)(P) = C + \overrightarrow{CP} \cdot \frac{1}{2} + \overrightarrow{CP}^{\perp} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sau

$$\{x', y'\} = (x_C, y_C) + \frac{1}{2}\{x - x_C, y - y_C\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\{-y + y_C, x - x_C\}$$

sau, încă,

$$\{x', y'\} = \left\{ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C \right\}.$$

Dacă scriem transformarea pe componente, obţinem

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C. \end{cases}$$

Asta e formula pentru o rotaţie de $60°$ în jurul unui punct oarecare. În cazul nostru concret, obţinem:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Se constată imediat că originea se duce în $A'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, B se duce în $B'\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C' = C$, iar D se duce în $D'\left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

9.3 Grupurile de transformări fundamentale ale planului

Dacă notăm cu $\mathcal{A}$ mulţimea tuturor transformărilor afine ale planului, este uşor de verificat că această mulţime, împreună cu compunerea aplicaţiilor, formează un grup (necomutativ). Nu acelaşi lucru se poate spune în ceea ce priveşte mulţimile de transformări fundamentale pe care le-am studiat (translaţii, rotaţii, scalâri, etc.), cu excepţia translaţiilor. Compunerea a două rotaţii faţă de puncte diferite continuă să fie o transfornmare a planului, dar *nu este o rotaţie*. Vom vdea, însă, că dacă impunem nişte restricţii, obţinem grupuri de transformări interesante.

9.3.1 Grupul translaţiilor

Teorema 9.1. *Mulţimea $\mathcal{T}$ a tuturor translaţiilor planului formează un grup comutativ, care este un subgrup al grupului $\mathcal{A}$ al tuturor transformărilor planului.*

Demonstraţie Vom verifica, mai întâi, că $\mathcal{T}$ este parte stabilă în raport cu compunerea aplicaţiilor. După cum şim, în cazul aplicaţiilor liniare, matricea aplicaţiei compuse este produsul matricilor celor două aplicaţii. Fie T matricea aplicaţiei obţinute prin compunerea unei translaţii de vector $\mathbf{v}$ cu o translaţie de vector $\mathbf{w}$. Atunci avem

$$T = \mathrm{Trans}_{\mathbf{w}} \cdot \mathrm{Trans}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 + v_1 \\ 0 & 1 & w_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 + w_1 \\ 0 & 1 & v_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Trans}_{\mathbf{w}+\mathbf{v}} = \mathrm{Trans}_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = \mathrm{Trans}_{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{Trans}_{\mathbf{w}},$$

aşadar $\mathcal{T}$ este parte stabilă în raport cu compunerea translaţiilor (i.e. compunerea a două translaţii este tot o translaţie), iar operaţia internă este comutativă.

Operaţia este asociativă, întrucât, în general, compunerea aplicaţiilor este comutativă.

Elementul neutru este aplicaţia identică a planului, care este translaţia de vector $\mathbf{0}$. Mai rămâne să verificăm că orice element admite un invers. Compunerea fiind comutativă, este suficient să verificăm existenţa unei inverrse la stânga care va fi, în mod automat, şi inversă la dreapta.

Afirmăm că inversa translaţiei de vector $\mathbf{w}$ este translaţia de vector $-\mathbf{w}$. Într-adevăr, avem

$$\mathrm{Trans}_{(-w_1,-w_2)}\cdot \mathrm{Trans}_{(w_1,w_2)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -w_1\\ 0 & 1 & -w_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & w_1\\ 0 & 1 & w_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

ceea ce înseamnă că translaţia de vector **w** are o inversă, care este tot o translaţie, de vector $-\mathbf{w}$:

$$(\mathrm{Trans}_{\mathbf{w}})^{-1} = \mathrm{Trans}_{-\mathbf{w}}\,.$$

□

Observaţie. Fie **w** un vector şi n un număr natural nenul. Atunci, după cum se poate constata cu uşurinţă,

$$(\mathrm{Trans}_{\mathbf{w}})^{n} = \mathrm{Trans}_{n\mathbf{w}}\,.$$

9.3.2 Grupul scalărilor uniforme

Spre deosebire de translaţii, toate celelalte transformări fundamentale ale planului se fac *relativ* la un punct sau la o direcţie. Vom studia, prin urmare, scalările uniforme, de diferiţi factori de scală, dar relativ la acelaşi punct. Punctul cu pricina este un punct fix al transformării (singurul punct fix).

Teorema 9.2. *Fie Q un punct dat din plan. Mulţimea $\mathcal{S}_Q$ a tuturor scalărilor uniforme* Scale(Q,s)*, când s parcurge $\mathbb{R}^*$, împreună cu operaţia de compunere a aplicaţiilor, formează un grup comutativ.*

Demonstraţie Demonstrăm, mai întâi, că $\mathcal{S}_Q$ este o parte stabilă a grupului tuturor transformărilor planului, în raport cu operaţia de compunere a aplicaţiilor, cu alte cuvinte demonstrăm că rezultatul compunerii a două scalări relativ la Q este, de asemenea, o scalare relativ la Q. Într-adevăr, fie T transformarea care se obţine compunând două scalări uniforme relativ la Q, de factori de scară s, respectiv t. Atunci avem

$$T = \mathrm{Scale}(Q,t)\cdot \mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix}t & 0 & (1-t)q_1\\ 0 & t & (1-t)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s & 0 & (1-s)q_1\\ 0 & s & (1-s)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}ts & 0 & t(1-s)q_1+(1-t)q_1\\ 0 & ts & t(1-s)q_2+(1-t)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ts & 0 & (1-ts)q_1\\ 0 & ts & (1-ts)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Scale}(Q,ts) = \mathrm{Scale}(Q,st) = \mathrm{Scale}(Q,s)\cdot \mathrm{Scale}(Q,t).$$

Am demonstrat, altfel, nu doar că mulţimea scalărilor uniforme faţă de Q este parte stabilă, dar şi că operaţia de compunere, restrânsă la scalări uniforme, este comutativă.

Asociativitatea compunerii este o proprietate ereditară, aplicaţia identică este o scalare (de factor de scală 1) şi joacă rolul elementului neutru şi vom demonstra că orice scalare relativ la Q, de factor nenul s, este inversabilă, iar inversa este scalarea de factor $1/s$. Într-adevăr, la nivel matricial avem

$$\mathrm{Scale}(Q,s)\cdot\mathrm{Scale}(Q,1/s)=\begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1\\ 0 & s & (1-s)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \left(1-\frac{1}{s}\right)q_1\\ 0 & \frac{1}{s} & \left(1-\frac{1}{s}\right)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & s\left(1-\frac{1}{s}\right)q_1+(1-s)q_1\\ 0 & 1 & s\left(1-\frac{1}{s}\right)q_2+(1-s)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

□

Observaţie. Şi de data aceasta putem calcula cu uşurinţă puterile transformării: dacă n este un număr natural nenul, atunci avem

$$(\mathrm{Scale}(Q,s))^n=\mathrm{Scale}(Q,s^n).$$

9.3.3 Grupul scalărilor neuniforme

Teorema 9.3. *Fie Q un punct din plan. Atunci mulţimea $\mathcal{S}'_Q$ tuturor scalărilor neuniforme relativ la Q, de factori de scală $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^*$ formează un grup comutativ, în raport cu compunerea aplicaţiilor.*

Demonstraţie Verificăm, întâi, că este parte stabilă şi că operaţia este comutativă.

Avem:

$$\mathrm{Scale}(Q,t_1,t_2)\cdot \mathrm{Scale}(Q,s_1,s_2)=\begin{pmatrix} t_1 & 0 & (1-t_1)q_1\\ 0 & t_2 & (1-t_2)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s_1 & 0 & (1-s_1)q_1\\ 0 & s_2 & (1-s_2)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} t_1s_1 & 0 & (1-t_1s_1)q_1\\ 0 & t_2s_2 & (1-t_2s_2)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{Scale}(Q,t_1s_1,t_2s_2)=\mathrm{Scale}(Q,s_1t_1,s_2t_2)=$$

$$=\mathrm{Scale}(Q,s_1,s_2)\cdot \mathrm{Scale}(Q,t_1,t_2).$$

Ca şi mai sus, asociativitatea este ereditară, iar elementul neutru este aplicaţia identică, adică scalarea de factori de scală $(1,1)$.

Inversa scalării de factori (s_1,s_2) este scalarea de factori $(1/s_1,1/s_2)$. Într-adevăr,

$$\mathrm{Scale}(Q,s_1,s_2)\cdot \mathrm{Scale}(Q,1/s_1,1/s_2)=\begin{pmatrix} s_1 & 0 & (1-s_1)q_1\\ 0 & s_2 & (1-s_2)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & \left(1-\frac{1}{s_1}\right)q_1\\ 0 & \frac{1}{s_2} & \left(1-\frac{1}{s_2}\right)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1\left(1-\frac{1}{s_1}\right)q_1+(1-s_1)q_1\\ 0 & 1 & s_2\left(1-\frac{1}{s_2}\right)q_2+(1-s_2)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

□

Probleme

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$. Reprezentaţi, de fiecare dată, pe aceeaşi figură, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Problema 9.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 9.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$.

Problema 9.3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2, 1, 2)$, relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 9.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, de factor de scală 2, relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, 2)$.

Problema 9.5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi $45°$, relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(2, 1)$.

Problema 9.6. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x + 3y - 5 = 0$.

Problema 9.7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB.

Problema 9.8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC, urmată de o forfecare, de unghi $60°$, relativ la punctul A, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, 1)$.

Problema 9.9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin rotaţia cu $90°$ în jurul punctului C, urmată de reflexia relativ la dreapta AB.

Problema 9.10. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1, 2, 1)$ relativ la punctul B, urmată de o rotaţie de $30°$ în jurul punctului $Q(1, 1)$.

CAPITOLUL 10

Transformări geometrice (afine) în spaţiu

În acest capitol ne vom ocupa de variantele tridimensionale ale transformărilor afine descrise în capitolul precedent. Filozofia va fi, în esenţă, aceeaşi: vom stabilim mai întâi, în limba vectorial, regula de transformare a vectorilor, apoi, în acelaşi limbaj, regula de transformare a punctelor, apoi vom deduce matricea transformării. Matricele (omogene) ale transformărilor spaţiului sunt matrici de tip 4×4.

10.1 Translaţia

Din punct de vedere vectorial, dacă nu folosim coordonate, nu există nici o diferenţă între translaţia în spaţiu şi translaţia în plan. De aceea, nu vom mai repeta raţionamentul din cazul plan, atunci când vorbim despre forma vectorială a transformării.

10.1.1 Forma vectorială

Fie **w** un vector constant. Atunci translaţia de vector **w** acţionează pe vectori astfel:

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \tag{10.1.1}$$

adică se reduce la transformarea identică. În cazul punctelor, avem

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(P) = P + \mathbf{w}. \tag{10.1.2}$$

10.1.2 Forma matricială

Ecuaţia (10.1.2) se transcrie matricial ca

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(P) = I_3 \cdot P + \mathbf{w},$$

de unde rezultă matricea omogenă a transformării:

$$\text{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.1.3}$$

sau, în forma extinsă,

$$\text{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.1.4}$$

10.2 Rotaţia în jurul unei axe

Fie Q un punct din spaţiu şi $\mathbf{u}$ un versor. Vrem să determinăm expresia pentru rotaţia de unghi θ unui punct oarecare în jurul axei Δ determinate de punctul Q şi versorul $\mathbf{u}$.

10.2.1 Forma vectorială

Ca de obicei, vom stabili mai întâi formula de transformare pentru vectori. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare. Folosind o tehnică ce am mai utilizat-o, descompunem vectorul ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \tag{10.2.1}$$

unde $\mathbf{v}_{\parallel}$ este componenta lui $\mathbf{v}$ paralelă cu $\mathbf{u}$, în timp ce $\mathbf{v}_{\perp}$ este componenta perpendiculară pe $\mathbf{u}$.

Dacă aplicăm rotaţia vectorului $\mathbf{v}$, componenta $\mathbf{v}_{\parallel}$ rămâne nemodificată, deci putem să ne concentrăm asupra componente $\mathbf{v}_{\perp}$. Această componentă poate fi fixată într-un plan perpendicular pe $\mathbf{u}$, iar prin rotaţie, ea rămâne în acest plan. Prin urmare, rotaţia 3D a vectorului $\mathbf{v}$ în jurul axei Δ se reduce la o rotaţie plană a vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$.

Ne aducem aminte de formula pentru rotaţia de unghi θ a unui vector $\mathbf{w}$ situat într-un plan:

$$\mathbf{w}' = \cos\theta\,\mathbf{w} + \sin\theta\,\mathbf{w}^{\perp}.$$

Vectorul $\mathbf{w}^{\perp}$ este rotitul cu 90° al vectorului $\mathbf{w}$. E suficient, prin urmare, să identificăm rotitul cu 90° al vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$, în planul perpendicular pe $\mathbf{u}$ pe care l-am considerat. E uşor de constatat că acest vector este $\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp}$. Într-adevăr, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp}$ este perpendicular atât pe $\mathbf{u}$, cât şi pe $\mathbf{v}_{\perp}$, deci e situat în planul corespunzător. Cum $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}_{\perp}$ sunt perpendiculari, unghiul dintre ei este 90°, iar, $\mathbf{u}$ fiind un versor, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp}\| = \|\mathbf{v}_{\perp}\|$, ceea ce înseamnă că $\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp}$ este, într-adevăr, rotitul cu 90° al lui $\mathbf{v}_{\perp}$.

Prin urmare,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \cos\theta\cdot\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp}),$$

iar

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\|} + \cos\theta\cdot\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp}),$$

Pe de altă parte,

$$\begin{cases}\mathbf{v}_{\|} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u},\\ \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}.\end{cases}$$

Aşadar,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \cos\theta\cdot(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u})]$$

sau

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \cos\theta\cdot\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}), \tag{10.2.2}$$

unde am folosit faptul că $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = 0$.

Fie, acum, P un punct oarecare din spaţiu. Ca de obicei, scriem $P = Q + (P - Q) = Q + \overrightarrow{QP}$. Atunci

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\overrightarrow{QP}), \tag{10.2.3}$$

de unde, folosind (10.2.2), obţinem

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \cos\theta\cdot\overrightarrow{QP} + (1-\cos\theta)\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times\overrightarrow{QP}). \tag{10.2.4}$$

Formula (10.2.4) se numeşte *formula lui Rodrigues*, după numele matematicianului francez care a descoperit-o.

10.2.2 Forma matricială

Plecăm de la formula (10.2.2), pe care vrem să o scriem matricial. Singura parte care ne poate crea probleme este produsul vectorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Pentru un vector $\mathbf{u}$ fixat, definim operatorul liniar de matrice

$$\mathbf{u}\times - = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.2.5}$$

Un calcul simplu ne arată acum că

$$(\mathbf{u}\times -)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}. \tag{10.2.6}$$

Cu acest artificiu, obţinem

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = [\cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -)]\cdot\mathbf{v},$$

de unde rezultă că matricea rotaţiei vectorilor este

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -). \tag{10.2.7}$$

Din formula (10.2.3) rezultă acum că

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P) = \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)\cdot\mathbf{P} + (I_3 - \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q}. \tag{10.2.8}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei este

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & (I_3 - \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.2.9}$$

Exemple. 1) O rotaţie relativ la origine va avea matricea

$$\mathrm{Rot}(Origine,\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Rotaţia relativ la origine în jurul axei Ox este similară cu ceea ce se întîmplă în plan. Mai precis, în acest caz avem, înainte de toate,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{i}\times -). \tag{10.2.10}$$

Dar

$$\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{i}\times - =\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

deci formula (10.2.10) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta)=\cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Ox este:

$$\mathrm{Rot}(Origine,\mathbf{i},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta)&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta&0\\0&\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{10.2.11}$$

3) **Rotaţia relativ la origine în jurul axei Oy.** Avem, mai întâi,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta)=\cos\theta\cdot I_3+(1-\cos\theta)(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j})+\sin\theta\cdot(\mathbf{j}\times -). \tag{10.2.12}$$

Dar

$$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{j}\times - =\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

deci formula (10.2.12) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) = \cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oy este:

$$\mathrm{Rot}(Origine,\mathbf{j},\theta) = \begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta)&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta&0\\0&1&0&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{10.2.13}$$

4) **Rotaţia relativ la origine în jurul axei Oz.** Avem, mai întâi,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{k},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{k}\times -). \tag{10.2.14}$$

Dar

$$\mathbf{k}\otimes\mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{k}\times - = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

deci formula (10.2.14) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) = \cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oz este:

$$\operatorname{Rot}(Origine, \mathbf{k}, \theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{Rot}(\mathbf{k}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.2.15}$$

10.3 Scalarea simplă uniformă

Ne interesează scalarea de factor s, relativ la punctul Q.

10.3.1 Forma vectorială

Scalarea vectorilor se face foarte simplu:

$$\operatorname{Scale}(s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \tag{10.3.1}$$

Cum, dacă P este un punct arbitrar din spaţiu, $P = Q + (Q - P) = Q + \overrightarrow{QP}$, avem

$$\operatorname{Scale}(Q, s)(P) = Q + \operatorname{Scale}(s)(\overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\operatorname{Scale}(Q, s) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \tag{10.3.2}$$

10.3.2 Forma matricială

Determinăm, mai întâi, ca de obicei, forma matricială a scalării vectrilor şi obţinem, din (10.3.1),

$$\operatorname{Scale}(s)(v) = s \cdot I_3 \cdot \mathbf{v}.$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme a vectorilor, de factor s, este

$$\operatorname{Scale}(s) = s \cdot I_3. \tag{10.3.3}$$

Prin urmare,

$$\operatorname{Scale}(Q, s)(P) = Q + \operatorname{Scale}(s) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q,s)(P) = \text{Scale}(s)\cdot P + (I_3 - \text{Scale}(s))\cdot Q = s\cdot I_3\cdot P + (1-s)\cdot I_3\cdot Q. \tag{10.3.4}$$

Aşadar, matricea omogenă a scalării simple uniforme relativ la punctul Q, de factor s, este

$$\text{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s\cdot I_3 & (1-s)\cdot I_3\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.3.5}$$

sau, explicit,

$$\text{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & (1-s)\cdot q_x \\ 0 & s & 0 & (1-s)\cdot q_y \\ 0 & 0 & s & (1-s)\cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.3.6}$$

10.4 Scalarea simplă neuniformă

Considerăm o scalare de factori s_x, s_y, s_z de-a lungul axelor de coordonate, relativ la un punct Q.

10.4.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector din spaţiu. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\cdot\mathbf{i},\ \mathbf{v}_y = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})\cdot\mathbf{j},\ \mathbf{v}_z = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}$. Atunci,

$$\text{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}_x)+\text{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}_y)+\text{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}_z),$$

adică

$$\text{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}) = s_x\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\cdot\mathbf{i} + s_y\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})\cdot\mathbf{j} + s_z\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}. \tag{10.4.1}$$

Dacă P e un punct,

$$\text{Scale}(Q,s_x,s_y,s_z)(P) = \text{Scale}(Q,s_x,s_y,s_z)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q,s_x,s_y,s_z)(P) = Q+s_x\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{i})\cdot\mathbf{i}+s_y\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{j})\cdot\mathbf{j}+s_z\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}. \tag{10.4.2}$$

Forma matricială

Din (10.4.1) obţinem forma matricială a transformării vectorilor

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x\,(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v} + s_y\,(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} + s_z\,(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă matricea transformării:

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) = s_x\,(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y\,(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) + s_z\,(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k})\,. \tag{10.4.3}$$

După cum am văzut mai devreme,

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci formula (10.4.3) se poate rescrie ca

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}. \tag{10.4.4}$$

Ca să găsim matricea transformării punctelor, scriem $P = Q + (P - Q)$, deci

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P) = Q + \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) \cdot P + \big(I_3 - \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)\big) \cdot Q, \tag{10.4.5}$$

prin urmare, matricea transformării va fi

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) & \big(I_3 - \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)\big) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.4.6}$$

sau, în forma completă,

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x) \cdot q_x \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y) \cdot q_y \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z) \cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.4.7}$$

10.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Suntem interesaţi de scalarea generală de factor s, în direcţia versorului $\mathbf{w}$, relativ la punctul Q.

10.5.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din spaţiu. Vom descompune acest vector după două direcţii, una paralelă cu versorul $\mathbf{w}$ şi una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}. \tag{10.5.1}$$

Este uşor de constatat că

$$\mathbf{v}_{\|} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}, \tag{10.5.2}$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{10.5.3}$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\|}) + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \tag{10.5.4}$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul $\mathbf{w}$, avem, evident

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\|}) = s\mathbf{v}_{\|}. \tag{10.5.5}$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcţia perpendiculară la $\mathbf{w}$, deci

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \tag{10.5.6}$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ţinem cont de definiţiile lui $\mathbf{v}_{\|}$ şi $\mathbf{v}_{\perp}$,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{10.5.7}$$

Pentru a determina imaginea unui punct P, ţinem cont de faptul că $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s - 1)(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{10.5.8}$$

10.5.2 Forma matricială

Începem prin a determina forma matricială a transformării pentru vectori. Avem

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s-1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v},$$

deci matricea pentru transformarea vectorilor este

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s) = I_3 + (s-1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}). \tag{10.5.9}$$

Pe de altă parte, cum $P = Q + (P - Q)$,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot (P - Q) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(\mathbf{w}, s)) \cdot Q$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (1-s)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot Q. \tag{10.5.10}$$

Prin urmare, matricea omogenă a transformării este

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_3 + (s-1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) & (1-s)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.5.11}$$

sau, în formă extinsă,

$$\begin{aligned} &\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \\ &= \begin{pmatrix} 1+(s-1)w_1^2 & (s-1)w_1w_2 & (s-1)w_1w_3 & (1-s)(q_1w_1^2 + q_2w_1w_2 + q_3w_1w_3) \\ (s-1)w_1w_2 & 1+(s-1)w_2^2 & (s-1)w_2w_3 & (1-s)(q_1w_1w_2 + q_2w_2^2 + q_3w_2w_3) \\ (s-1)w_1w_3 & (s-1)w_2w_3 & 1+(s-1)w_3^2 & (1-s)(q_1w_1w_3 + q_2w_2w_3 + q_3w_3^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.5.12}$$

Exemplul 10.1. Dacă Q este originea, iar $\mathbf{w} = \mathbf{i}$, adică scalarea generală se face de-a lungul axei Ox, atunci matricea de transformare se transformă în

$$\text{Scale}(Origine, \mathbf{i}, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Scale}(Origine, s, 1, 1),$$

adică scalarea se reduce la o scalare simplă neomogenă, de-a lungul axei Ox.

10.6 Reflexia faţă de un plan

Reflexia faţă de un plan, în spaţiu, este perfect analogă cu reflexia faţă de o dreaptă în plan şi modalitateatea de a obţine expresia ei este similară. De data asta datele sunt: un punct Q şi un plan Π care trece prin el, descris prin intermediul versorului planului normal, **n**.

10.6.1 Forma vectorială

Fie **v** un vector oarecare din spaţiu. Descompunem vectorul

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \tag{10.6.1}$$

unde $\mathbf{v}_{\parallel}$ este un vector paralel vectorul **n** (adică perpendicular pe planul Π), în timp ce vectorul $\mathbf{v}_{\perp}$ este perpendicular pe vectorul **n** (adică este paralel cu planul Π).

Reflexia faţă de planul Π a vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$ coincide, evident, cu vectorul însuşi:

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}.$$

Prin urmare, trebuie să de preocupăm doar de cealaltă componentă, perpendiculară pe plan. Dar, iarăşi în mode evident,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\parallel}) = -\mathbf{v}_{\parallel}.$$

Ca urmare,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\parallel}.$$

Dar

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n},\ \ \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel},$$

deci, în final,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}. \tag{10.6.2}$$

Fie, acum, P un punct din spaţiu. Atunci $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{n})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{n})\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

sau

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{n})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{n}. \tag{10.6.3}$$

10.6.2 Forma matricială

Scriem, mai întâi, matricial transformarea pentru vectori. Relaţia (10.6.2) se transformă, după cum se poate constata uşor, în

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v},$$

prin urmare, matricea transformării vectorilor este

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n}) = I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \tag{10.6.4}$$

Pentru a găsi matricea omogenă a transformării pentru puncte, scriem $P = Q + (P - Q)$ şi obţinem

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + (P - Q) - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = (I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot P + 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q.$$

Aşadar, matricea omogenă a reflexiei faţă de planul Π este:

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) & 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.6.5}$$

sau, în forma extinsă,

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 2(n_1n_3q_3 + n_1n_2q_2 + n_1^2q_1) \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 & 2(n_2n_3q_3 + n_2^2q_2 + n_1n_2q_1) \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 & 2(n_3^2q_3 + n_2n_3q_2 + n_1n_3q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.6.6}$$

Exemple. 1. **Simetria faţă de planul xOy.** În acest caz, $Q = O(0,0,0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ şi obţinem:

$$R_{xy} = \mathrm{Mirror}(O, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.6.7}$$

2. **Simetria faţă de planul xOz.** De data aceasta, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{j}$ şi obţinem:

$$R_{xz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.6.8}$$

3. **Simetria faţă de planul yOz.** Acum, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{i}$ şi obţinem:

$$R_{yz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.6.9}$$

10.6.3 Cazul în care planul este dat sub forma generală

Să presupunem că ecuaţia planului este

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a \neq 0$. Atunci planul Π este planul care are ca vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c),$$

şi putem lua

$$Q = (-d/a, 0, 0).$$

Dacă înlocuim în formula (10.6.6), obţinem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 + c^2 & -2ab & -2ac & -2ad \\ -2ab & a^2 - b^2 + c^2 & -2bc & -2bd \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 & -2cd \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} \tag{10.6.10}$$

10.7 Forfecarea în spaţiu

Fie Π un plan în spaţiu, $Q \in \Pi$ un punct dat, $\mathbf{u}$ – un versor paralel cu planul Π şi θ un unghi. Dacă P este un punct oarecare din spaţiu, îl proiectăm ortogonal pe planul Π într-un punct $P' \in S$. Acum mutăm punctul P paralel cu vectorul $\mathbf{u}$ într-un punct P^{new}, astfel încât $\angle P^{\text{new}} P' P = \theta$. Vom spune că punctul P^{new} a fost obţinut din punctul P printr-o *forfecare paralelă cu planul* Π*, relativ la punctul* Q*, în direcţia versorului* $\mathbf{u}$*, de unghi* θ. Vom scrie

$$P^{\text{new}} = \text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P),$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normal la planul Π (prin urmare, Q şi $\mathbf{n}$ determină în mod unic planul Π).

10.7.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din $\mathbb{R}^3$. Îl descompunem ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde $\mathbf{v}_{\parallel}$ este un vector paralel cu $\mathbf{u}$, în timp ce $\mathbf{v}_{\perp}$ este un vector perpendicular pe $\mathbf{u}$, adică un vector paralel cu vectorul normal $\mathbf{n}$. Atunci

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\parallel} + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}).$$

Un raţionament simplu ne arată că

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)\left((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)\,(\mathbf{n}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\,(\mathbf{n} + \operatorname{tg}\theta \cdot \mathbf{u}).$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Prin urmare,

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \tag{10.7.1}$$

Dacă vrem să determinăm forma transformării pentru un punct P, scriem

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + \operatorname{tg}\theta \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \tag{10.7.2}$$

10.7.2 Forma matricială

Pentru forma matricială a transformării pe vectori deducem imediat, cum am mai făcut-o înainte, că

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$$

sau

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = (I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}))\cdot\mathbf{v}, \tag{10.7.3}$$

ceea ce înseamnă că matricea părţii vectoriale a forfecării este

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}). \tag{10.7.4}$$

Pentru a determina matricea omogenă de transformare a punctelor, plecăm de la relaţia

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = Q+\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\cdot(P-Q) = \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\cdot P+(I_3-\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta))\cdot Q$$

sau, dacă explicităm,

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = (I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}))\cdot P - \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q. \tag{10.7.5}$$

De aici deducem că matricea omogenă a forfecării este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}) & -\operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.7.6}$$

Matricea extinsă este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+n_1u_1\operatorname{tg}\theta & n_2u_1\operatorname{tg}\theta & n_3u_1\operatorname{tg}\theta & -\operatorname{tg}\theta(n_3u_1q_3+n_2u_1q_2+n_1u_1q_1) \\ n_1u_2\operatorname{tg}\theta & 1+n_2u_2\operatorname{tg}\theta & n_3u_2\operatorname{tg}\theta & -\operatorname{tg}\theta(n_3u_2q_3+n_2u_2q_2+n_1u_2q_1) \\ n_1u_3\operatorname{tg}\theta & n_2u_3\operatorname{tg}\theta & 1+n_3u_3\operatorname{tg}\theta & -\operatorname{tg}\theta(n_3u_3q_3+n_2u_3q_2+n_1u_3q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.7.7}$$

În particular, forfecarea de-a lungul axei Ox, paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\mathrm{Shear}(O,\mathbf{k},\mathbf{i},\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \operatorname{tg}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forfecarea de-a lungul axei Oy, paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\mathrm{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \operatorname{tg}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probleme

În această secţiune, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1, 2, 2)$, $B(2, 4, 3)$, $C(4, 3, 2)$.

Problema 10.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $45°$ în jurul dreptei care trece prin punctele $P(2, 2, 1)$ şi $Q(1, 1, 1)$.

Problema 10.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $30°$ în jurul dreptei

$$(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{2}.$$

Problema 10.3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $60°$ în jurul dreptei

$$(\Delta) : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Problema 10.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factori de scală $(2, 1, 3)$.

Problema 10.5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factor de scală $s = 1$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, 3, 2)$.

Problema 10.6. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia faţă de planul $x - y + 2z - 1 = 0$.

Problema 10.7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia faţă de planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$.

Problema 10.8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi $30°$, relativ la planul $x - y - z - 1 = 0$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, 1, 0)$.

Problema 10.9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi $30°$, relativ la planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, -1, 0)$.

CAPITOLUL 11

Proiecţii

11.1 Geometrie analitică plană în coordonate omogene

Fie $P(x, y)$ un punct din plan, dat prin coordonatele sale carteziene (x, y). Acestor coordonate li se asociază coordonatele sale omogene (X, Y, W) astfel încât $x = X/W$ şi $y = Y/W$. Presupunem că $W \neq 0$. Vom nota cu $\mathbf{P}(X, Y, W)$ punctul, dat prin coordonatele sale omogene. Coordonatele omogene nu sunt unice, ele sunt definite doar până la un factor nenul. În cele ce urmează, când va fi util, îl vom privi pe **P** ca fiind un vector 3D. Din nou, este un vector *omogen*, de componente (X, Y, W), care sunt unice până la un factor nenul. Dacă adăugăm punctelor obişnuite ale planului punctele care au coordonatele omogene $(X, Y, 0)$ (punctele "de la infinit") obţinem *planul proiectiv*.

Dacă punctul $P(x, y)$ aparţine dreptei de ecuaţie

$$ax + by + c = 0,$$

atunci ecuaţiile sale verifică ecuaţia

$$aX + bY + cW = 0. \tag{11.1.1}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia omogenă a dreptei*.

Dreapta noastră unic determinată de coeficienţii a, b, c. Reciproca este adevărată în sensul că fiecărei drepte i se pot asocia coeficienţii săi, care sunt unici până la un factor numeric nenul. Vom considera că (a, b, c) sunt coordonatele dreptei şi introducem vectorul (omogen)

$$\ell = (a, b, c),$$

pe care îl vom numi *vectorul dreptei*.

Cu noile notaţii, ecuaţia dreptei (11.1.1) se poate scrie, cu ajutorul produsului scalar din $\mathbb{R}^3$, sub forma:

$$\ell \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cW = 0. \tag{11.1.2}$$

Relaţia (11.1.2) se poate utiliza pentru a rezolva două probleme importante care leagă punctele şi dreptele din plan:

(i) determinarea ecuaţiei dreptei care trece prin două puncte date;

(ii) determinarea punctului de intersecţie a două drepte date.

Determinarea ecuaţiei dreptei. Considerăm două@= puncte, date prin coordonatele lor omogene, $\mathbf{P}_1$ şi $\mathbf{P}_2$. Notăm cu $\ell(a, b, c)$ vectorul dreptei care trece prin ele. Atunci avem relaţiile

$$\ell \cdot \mathbf{P}_1 = 0 \quad \text{şi} \quad \ell \cdot \mathbf{P}_2 = 0.$$

Din punct de vedere geometric, aceste ecuaţii înseamnă că vectorul dreptei este perpendicular pe ambele puncte (privite ca vectori, desigur). Dar noi ştim că asta înseamnă că putem pune

$$\ell = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2.$$

Ca exemplu, vom determina ecuaţia dreptei care trece prin punctele $(1, 1)$ şi $(2, 3)$. Avem, astfel, $\mathbf{P}_1(1, 1, 1)$ şi $\mathbf{P}_2(2, 3, 1)$. Atunci vectorul dreptei va fi

$$\ell = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1),$$

adică ecuaţia dreptei se poate scrie:

$$-2x + y + 1 = 0.$$

Determinarea punctului de intersecţie a două drepte. Presupunem că se dau două drepte (distincte!), prin vectorii lor $\ell_1(a_1, b_1, c_1)$ şi $\ell_2(a_2, b_2, c_2)$. Punctul lor de intersecţie verifică sistemul de ecuaţii

$$\ell_1 \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \text{şi} \quad \ell_2 \cdot \mathbf{P} = 0.$$

Din aceleaşi motive ca mai sus, soluţia evidentă este

$$\mathbf{P} = \ell_1 \times \ell_2.$$

Considerăm, de exemplu, dreptele $3x + 2y - 5 = 0$ şi $4x + 7y - 1 = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (4, 7, -1).$$

Atunci

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = (33, -17, 13),$$

adică obţinem punctul de coordonate carteziene $(33/13, -17/13)$. Considerăm, ca al doilea exemplu, dreptele (paralele!) $3x + 2y - 5 = 0$ şi $3x + 2y = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (3, 2, 0).$$

Atunci punctul de "intersecţie" este dat de

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (10, 15, 0)$$

sau $\mathbf{P}(2, 3, 0)$. Faptul că punctul de intersecţie omogen are zero ca ultimă coordonată, înseamnă că este punctul de la infinit corespunzător direcţiei celor două drepte paralele.

11.2 Geometrie analitică în spaţiu în coordonate omogene

Lucrurile în spaţiu stau analog cu ceea ce se întâmplă în plan. Unui punct $P(x, y, z)$ i se asociază $\mathbf{P}(X, Y, Z, W)$, cu $x = X/W, y = Y/W, z = Z/W$. şi aici, dacă adăugăm punctele ce au ultima coordonată omogenă zero (punctele de la infinit), obţinem *spaţiul proiectiv*. Două drepte paralele se intersectează într-un punct de la infinit, iar două plane paralele se intersectează după o dreaptă, formată din puncte de la infinit. Studiul dreptelor şi planelor paralele se poate face şi în coordonate omogene, dar nu ne interesează aici. Un plan de ecuaţie

$$ax + by + cz + d = 0$$

se poate scrie în coordonate omogene sub forma

$$aX + bY + cZ + dW = 0. \tag{11.2.1}$$

Dacă introducem vectorul omogen 4-dimensional

$$\mathbf{n} = (a, b, c, d)$$

şi îl numim *vectorul planului*, atunci ecuaţia (11.2.1) se poate rescrie, folosind produsul scalar euclidian 4-dimensional, sub forma

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cZ + dW = 0. \tag{11.2.2}$$

Cu ajutorul relaţiei (11.2.1) putem rezolva două probleme importante:

(a) determinarea planului care trece prin trei puncte;

(b) determinarea punctului de intersecţie a trei plane.

Determinarea ecuaţiei planului care trece prin trei puncte.

Considerăm trei puncte, date prin coordonatele lor omogene, $\mathbf{P}_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1)$, $\mathbf{P}_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2)$ şi $\mathbf{P}_3(X_3, Y_3, Z_3, W_3)$ şi fie $\mathbf{n}$ vectorul omogen al planului care trece prin cele trei puncte. Atunci avem

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1 = 0, \ \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 = 0, \ \ \text{şi } \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3 = 0,$$

adică $\mathbf{n}$ este ortogonal la cele trei puncte. Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\mathbf{n} = \operatorname{orth}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & W_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & W_3 \end{vmatrix}. \tag{11.2.3}$$

Determinarea punctului de intersecţie a trei plane.

De data aceasta se consideră trei plane, date prin vectorii lor, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ şio trebuie să determinăm punctul lor de intersecţie, $\mathbf{P}$. Întrucât punctul apaţine tuturor celor trei plane, el trebuie să verifice egalităţile

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P} = 0, \ \ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P} = 0, \ \ \text{şi } \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{P} = 0,$$

adică punctul trebuie să fie ortogonal celor trei plane, deci

$$\mathbf{P} = \operatorname{orth}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{11.2.4}$$

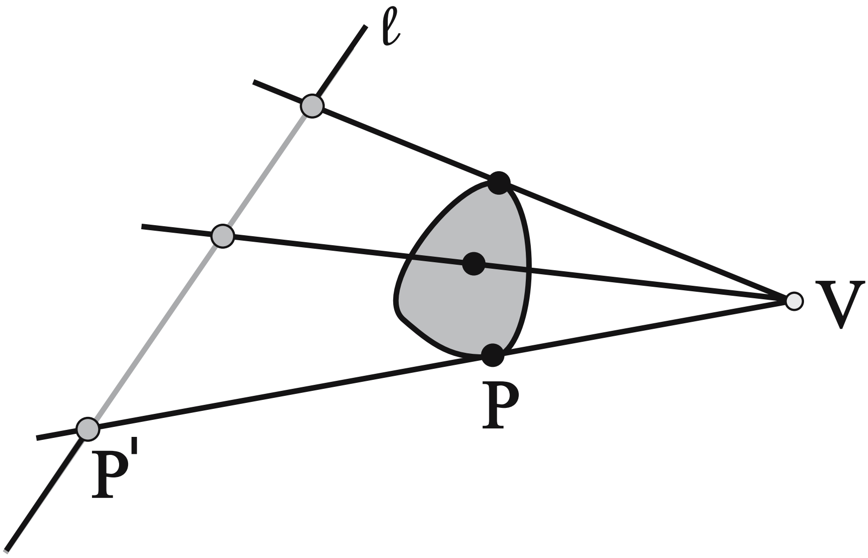

Figura 11.1: Proiecţia perspectivă în plan

11.3 Proiecţii

11.3.1 Proiecţia pe o dreaptă

Fie **V** un punct din plan şi ℓ o dreaptă care nu trece prin V. Se numeşte *proiecţie centrală* sau *proiecţie perspectivă* vin **V** pe ℓ aplicaţia care asociază fiecărui punct **P** din plan, diferit de **V**, punctul $\mathbf{P}'$ obţinut intersectând dreapta **VP** cu dreapta ℓ. Punctul **V** se numeşte *centru de perspectivă* sau *punct de vedere*, iar dreapta ℓ se numeşte *linie de vedere* sau *linie de proiecţie*. Liniile prin **V** se numesc *proiectori*. Dacă punctul de vedere $\mathbf{V}(v_1, v_2, 0)$ este situat la infinit, atunci proiectorii sunt drepte paralele de vector director (v_1, v_2). În acest caz, proiecţia se numeşte *paralelă*.

Teorema 11.1. *Matricea proiecţiei perspective dintr-un punct* **V** *(exprimat în coor-*

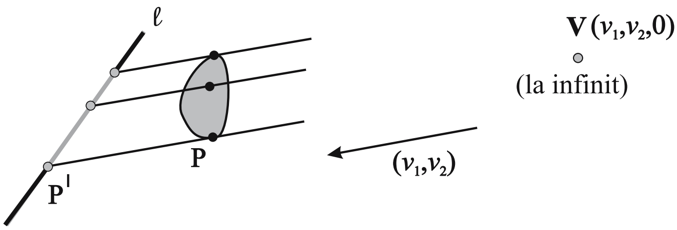

Figura 11.2: Proiecţia paralelă în plan

donate omogene) pe o dreaptă de vector ℓ este dată de

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{V}\ell^t - (\ell\cdot\mathbf{V})I_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} - (\ell\cdot\mathbf{V})I_3 = \\ &= \begin{pmatrix} -v_2a_2 - v_3a_3 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 - v_3a_3 & v_2a_3 \\ v_3a_1 & v_3a_2 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

Observaţie. Pentru proiecţia paralelă, $v_3 = 0$ şi atunci formula din teoremă se reduce la

$$M = \begin{pmatrix} -v_2a_2 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 & v_2a_3 \\ 0 & 0 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix} \tag{11.3.2}$$

Demonstraţia teoremei Imaginea $\mathbf{P}'$ a punctului $\mathbf{P}$ este obţinută intersectând dreapta de proiecţie ℓ cu dreapta care trece prin $\mathbf{V}$ şi $\mathbf{P}$. Această dreaptă are vectorul omogen $\mathbf{V}\times\mathbf{P}$ şi, de aceea, intersectează ℓ în punctul de coordonate omogene $\ell\times(\mathbf{V}\times\mathbf{P})$.

După cum se ştie din algebra vectorială , dacă $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sunt trei vectori din $\mathbb{R}^3$, atunci

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C},$$

de aceea,

$$\mathbf{P}' = \ell\times(\mathbf{V}\times\mathbf{P}) = (\mathbf{P}\cdot\ell)\mathbf{V} - (\ell\cdot\mathbf{V})\mathbf{P}.$$

Dacă înlocuim vectorii cu matrici coloană şi produsul scalar cu înmulţirea matricilor, obţinem:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{V}\ell^t\mathbf{P} - (\ell\cdot\mathbf{V})I_3\mathbf{P} = (\mathbf{V}\ell^t - (\ell\cdot\mathbf{V})I_3)\mathbf{P} = M\cdot\mathbf{P}.$$

□

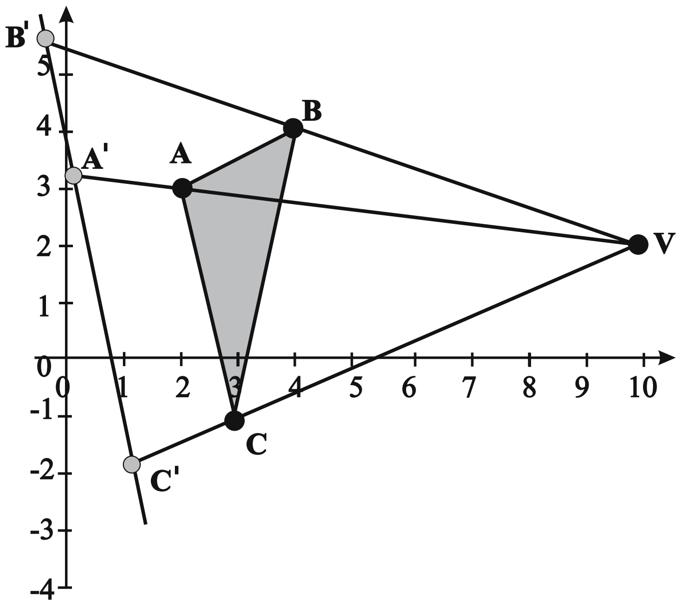

Figura 11.3: Proiecţia perspectivă în plan

Exemplul 11.1. Vrem să proiectăm triunghiul de vârfuri $A(2,3)$, $B(4,4)$ şi $C(3,-1)$ pe dreapta $5x + y - 4 = 0$, din punctul de coordonate $(10,2)$. Avem $\mathbf{V}(10,2,1)$, $\ell(5,1,-4)$, iar $\ell \cdot \mathbf{V} = 48$. Astfel, matricea de transformare este

$$M = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} - 48 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix}.$$

Vom avea, prin urmare,

$$\begin{pmatrix} A' & B' & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 8 & -44 \\ -126 & -152 & 68 \\ -39 & -28 & -38 \end{pmatrix}.$$

11.3.2 Proiecţia pe un plan

Proiecţia pe un plan este analoagă proiecţiei pe o dreaptă. Astfel, se alege un punct **V**, *centrul de proiecţie sau de perspectivă sau punctul de vedere*, precum şi un plan de vector omogen **n**, care nu trece prin **V**, *planul de vedere sau de proiecţie*. Proiecţia perspectivă a unui punct **P**, diferit de centrul de proiecţie, pe planul de proiecţie este punctul **P′** în care acest plan se intersectează cu dreapta **VP**. La fel ca în cazul plan, se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 11.2. *Matricea proiecţiei perspective dintr-un punct* **V** *(exprimat în coordonate omogene) pe un plan de vector* **n** *este dată de*

$$M = \mathbf{V}\mathbf{n}^t - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})I_4 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})I_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} -n_2v_2- & n_2v_1 & n_3v_1 & n_4v_1 \\ -n_3v_3 - n_4v_4 & & & \\ n_1v_2 & -n_1v_1- & n_3v_2 & n_4v_2 \\ & -n_3v_3 - n_4v_4 & & \\ n_1v_3 & n_2v_3 & -n_1v_1- & n_4v_3 \\ & & -n_2v_2 - n_4v_4 & \\ n_1v_4 & n_2v_4 & n_3v_4 & -n_1v_1 \\ & & & -n_2v_2 - n_3v_3 \end{pmatrix}. \tag{11.3.3}$$

Exemplul 11.2. Considerăm poliedrul $ABCDEF$, cu $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,3,0)$, $D(0,3,0)$, $E(1,2,1)$ şi $F(1,1,1)$.

Vrem să proiectăm această prismă pe planul xOy, paralel cu axa Oz. Asta înseamnă că centrul de proiecţie este punctul la infinit de-a lungul axei Oz, adică $\mathbf{V}(0,0,1,0)$, iar vectorul planului este $\mathbf{n}(0,0,1,0)$. Matricea de proiecţie este, atunci,

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea coordonatelor omogene ale proiecţiei vârfurilor poliedrului va fi

$$\begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' & E' & F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Astfel, în coordonate carteziene, imaginile vor fi $A'(0,0,0)$, $B'(2,0,0)$, $C'(2,3,0)$, $D'(0,3,0)$, $E'(1,2,0)$ şi $F'(1,1,0)$.

Proiectăm, din nou, acelaşi poliedru, dar, de data aceasta, facem o proiecţie centrală, din punctul de coordonate carteziene $(1,5,3)$, pe acelaşi plan xOy. Acum, în coordonate omogene, centrul de proiecţie este punctul $\mathbf{V}(1,5,3,1)$, în timp ce vectorul omogen asociat planului de proiecţie este, în continuare, $\mathbf{n}(0,0,1,0)$.

Matricea de proiecţie este, acum,

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Astfel, matricea coordonatelor omogene vârfurilor proiecţiei poliedrului va fi

$$\begin{pmatrix} A'' & B'' & C'' & D'' & E'' & F'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

În coordonate carteziene, coordonatele v ârfurilor sunt: $A''(0,0,0)$, $B''(2,0,0)$, $C''(2,3,0)$, $D''(0,3,0)$, $E''(1,0.5,0)$ şi $F''(1,-1,0)$.

11.4 Clasificarea proiecţiilor paralele

11.4.1 Proiecţii ortografice

O *proiecţie ortografică* (sau ortogonală) este o proiecţie paralelă în care planul de proiecţie este perpendicular pe direcţia de proiuecţie. Dacă vectorul omogen al planului este $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$, atunci direcţia de proiuecţie este descrisă de punctul de la infinit $\mathbf{V}(-n_1, -n_2, -n_3, 0)$. Înlocuind în formula generală pentru proiecţia paralelă, obţinem matricea unei proiecţii ortografice sub forma

$$M = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 & -n_4 n_1 \\ -n_1 n_2 & n_1^2 + n_3^2 & -n_2 n_3 & -n_2 n_4 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & n_1^2 + n_2^2 & -n_4 n_3 \\ 0 & 0 & 0 & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{pmatrix}. \tag{11.4.1}$$

În particular, matricea proiecţiei pe planul xOy este dată de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Să presupunem că se alege $\mathbf{n}$ astfel încât să avem $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ (adică astfel încît vectorul normal la planul de proiecţie să fie un versor). Se numeşte *factor de contracţie al proiecţiei în direcţia uneia dintre axele de coordonate* raportul dintre lungimea proiecţiei unui segment paralel cu acea axă şi lungimea reală a segmentului. Se poate arăta că factorii de contracţie în direcţiile axelor Ox, Oy şi Oz sunt egali cu $\sqrt{n_2^2 + n_3^2}$, $\sqrt{n_1^2 + n_3^2}$, respectiv $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Mai mult, doi factori de contracţie sunt egali dacă şi numai dacă componentele lui $\mathbf{n}$ pe axele respective sunt egale în modul.

Proiecţii ortografice multiple (multiview)

Proiecţiile multiple (multiview) se folosesc în inginerie pentru a reprezenta obiecte alcătuite din faţete poligonale. De regulă, o reprezentare multiview a unui obiect include 6 proiecţii ortogonale pe planele de coordonate: din faţă, din spate, din stânga, din dreapta, de sus şi de jos. Consider ăm, de exemplu, poliedrul din figura 11.4

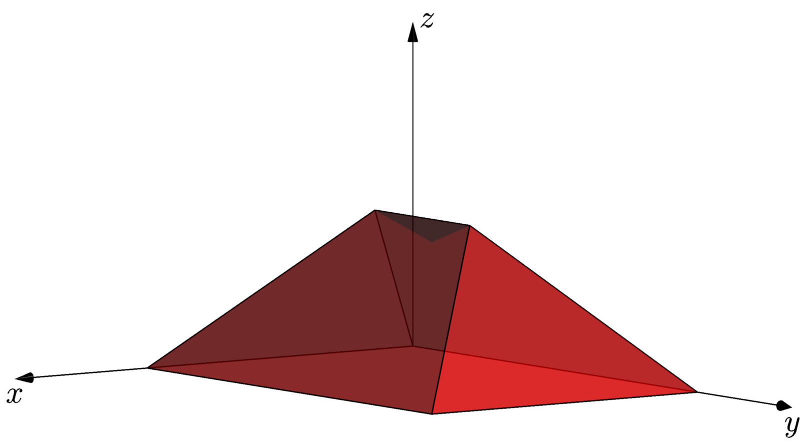

Figura 11.4: Exemplu de figură poliedrală

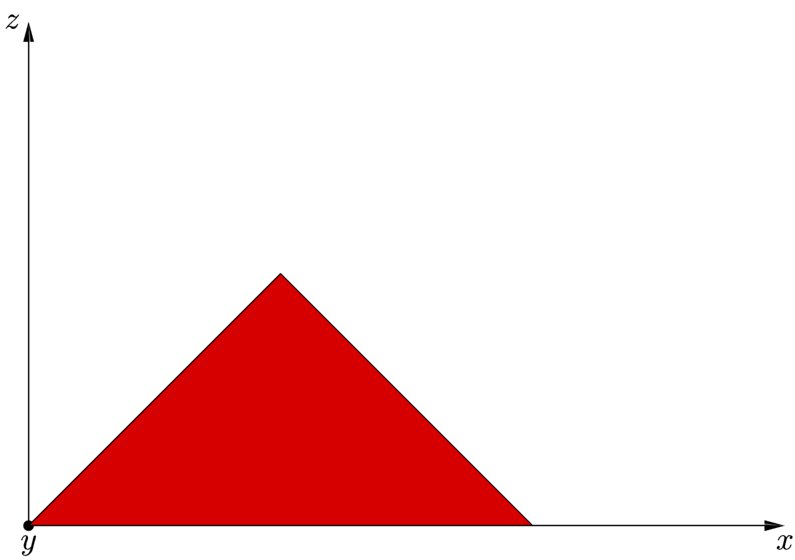

Figura 11.5: Vedere din faţă

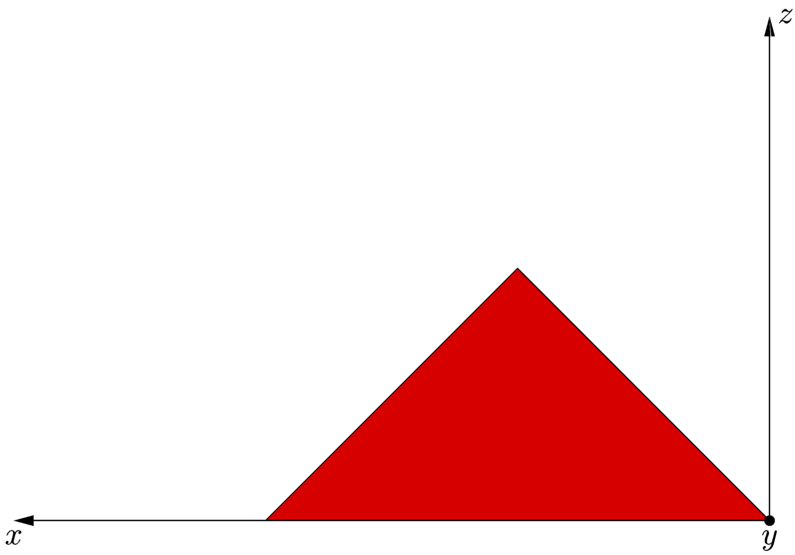

Figura 11.6: Vedere din spate

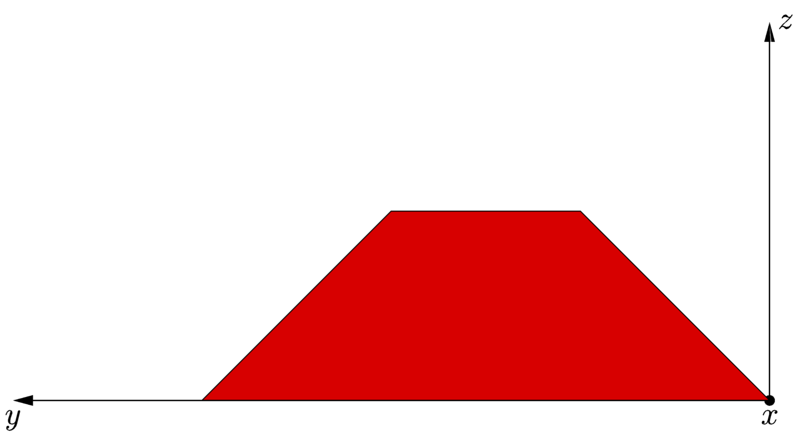

Figura 11.7: Vedere din stânga

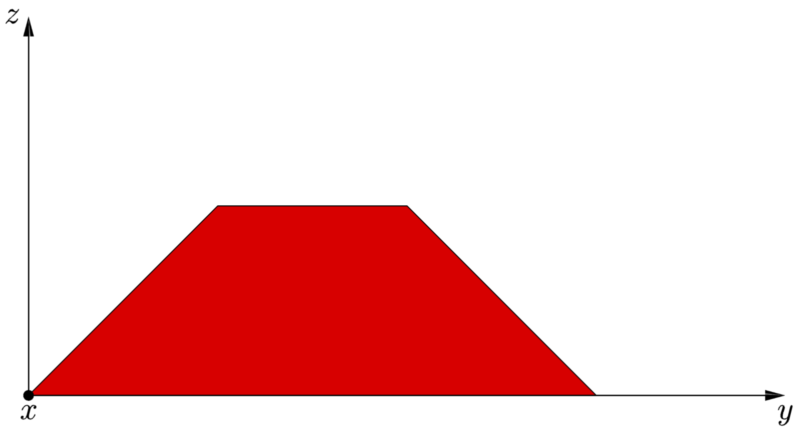

Figura 11.8: Vedere din dreapta

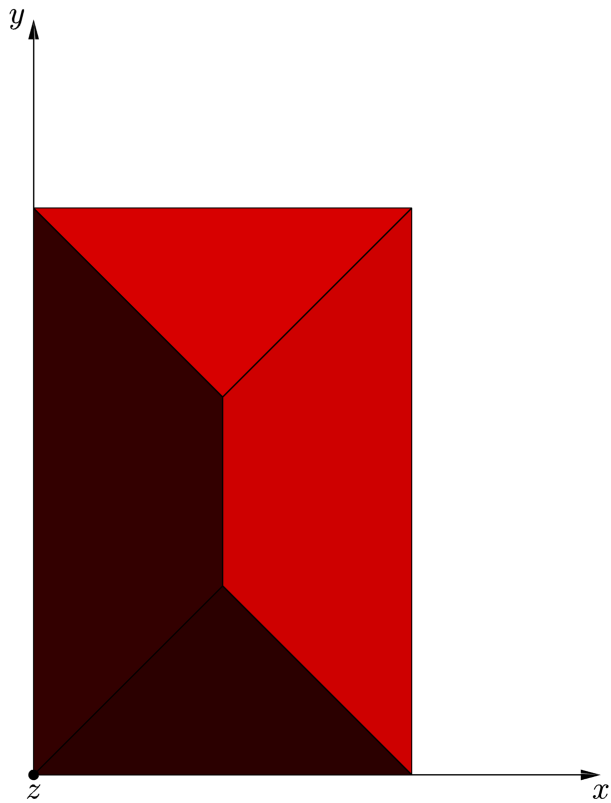

Figura 11.9: Vedere de sus

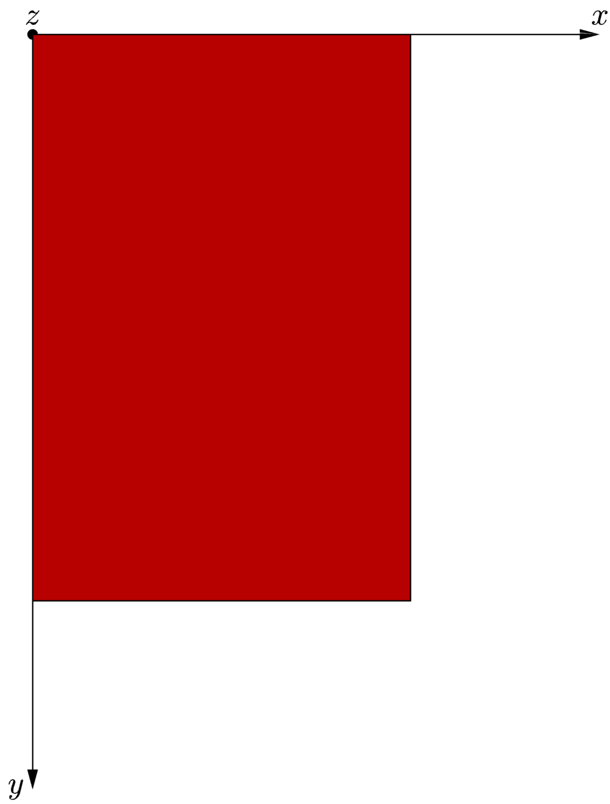

Figura 11.10: Vedere de jos

Proiecţii axonometrice

Spre deosebite de proiecţiile multiple, care captează aspectul câte unei faţete plane a obiectului, proiecţiile axonometrice au scopul de a oferi într-o singură reprezentare o imagine cât mai sugestivă a obiectului tridimensional. O proiecţie axonometrică este, în esenţa ei, o proiecţie ortogonală după o direcţie care nu coincide cu direcţia nici uneia dintre axe.

Proiecţiile axonometrice se clasifică după factorii de contracţie de-a lungul axelor. Astfel, avem:

- *proiecţii trimetrice*, dacă toţi cei trei factori de contracţie sunt diferiţi, ceea ce înseamnă că $|n_1|$, $|n_2|$ şi $|n_3|$ sunt trei numere diferite două câte două.

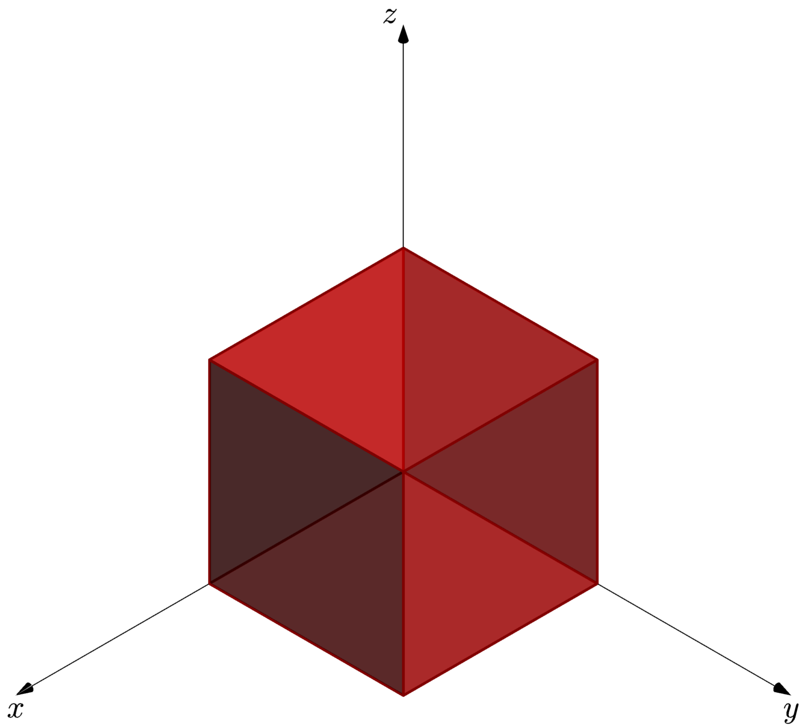

Figura 11.11: Proiecţie izometrică a cubului unitate

- *proiecţii dimetrice* dacă doar una dintre egalităţile $|n_1| = |n_2|$, $|n_2| = |n_3|$ şi $|n_1| = |n_3|$ are loc.
- *proiecţii izometrice*, dacă toţi cei trei factori de contracţie sunt egali: $|n_1| = |n_2| = |n_3|$.

11.4.2 Proiecţii oblice

Proiecţiile oblice sunt acele proiecţii pentru care direcţia de proiecţie nu este perpendiculară pe planul de proiecţie. Avantajul acestui tip de proiecţii este acela că reuşeşte mai bine să redea impresia de adâncime a obiectului. În cazul acestor proiecţii, segmentele paralele cu planul de proiecţie îşi păstrează lungimea nemodificată. Printre proiecţiile oblice sunt două care sunt foarte des utilizate şi de care ne vom ocupa în continuare.

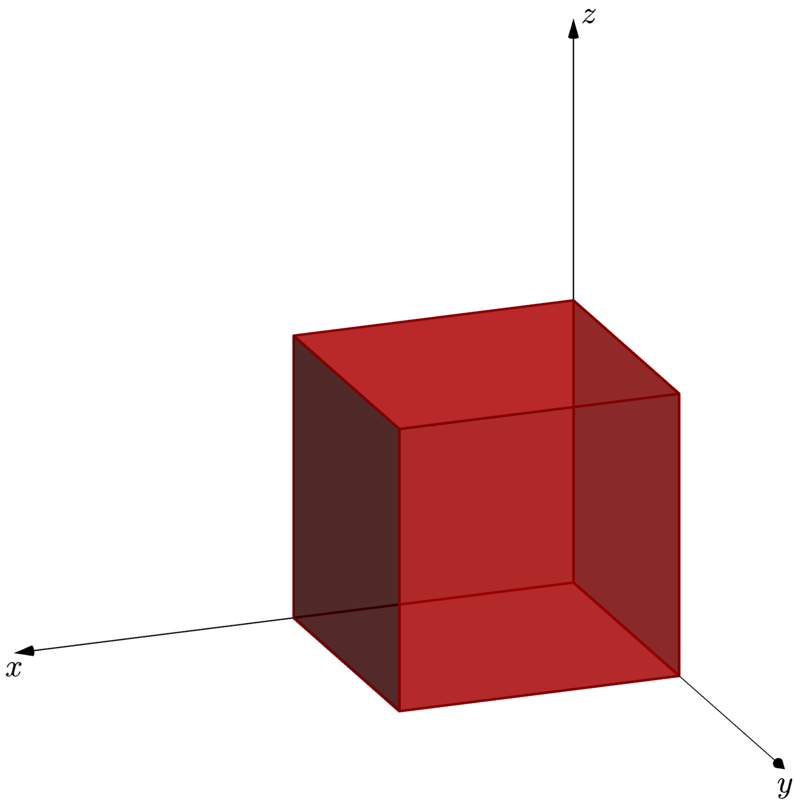

Figura 11.12: Proiecţie dimetrică a cubului unitate

Proiecţia cavaler (cavalier)

În cazul acestei proiecţii, folosită, iniţial, la fortificaţiile militare, unghiul format de direcţia de proiecţie şi planul de proiecţie este egal cu $\pi/4$. Aici şi segmentele perpendiculare pe planul de proiecţie îşi păstrează lungimea, ceea ce face ca obiectul să pară mai gros decât este în realitate.

Unghiul dintre vectorul director al direcţiei de proiecţie, (v_1, v_2, v_3) şi vectorul normal la plan este egal tot cu $\pi/4$. Pe de altă parte, acest unghi θ satisface relaţia

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}\cos\theta,$$

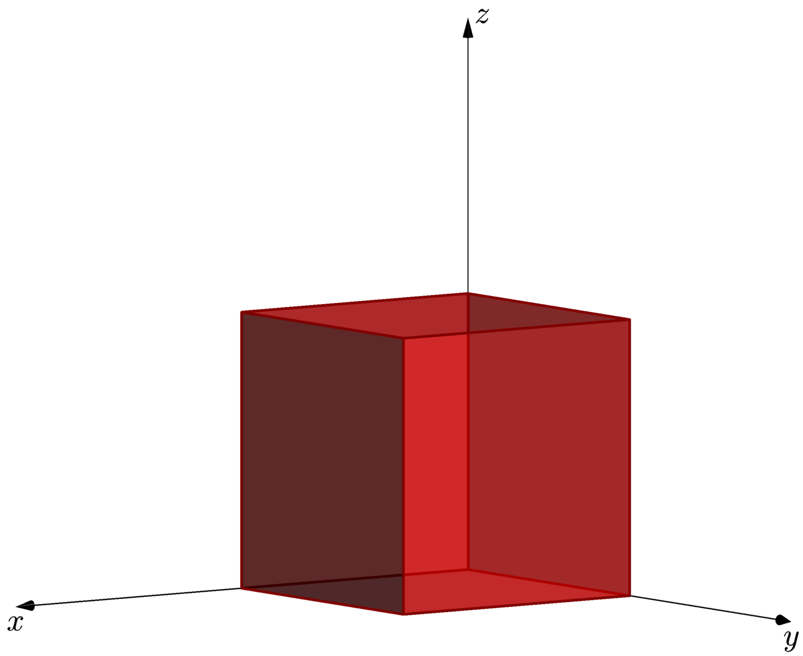

Figura 11.13: Proiecţie trimetrică a cubului unitate

deci, în cazul prouiecţiei cavaler, avem

$$v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \tag{11.4.2}$$

Exemplul 11.3. Considerăm un exemplu de proiecţie cavaler pe planul xOy. Vectorul omogen asociat planului este $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$, ceea ce înseamnă că relaţia (11.4.2) se reduce la

$$v_3^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

E uşor să găsim un triplet de numere care verifică această ecuaţie, de exemplu $(3, 4, 5)$. Atunci matricea transformării va fi

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

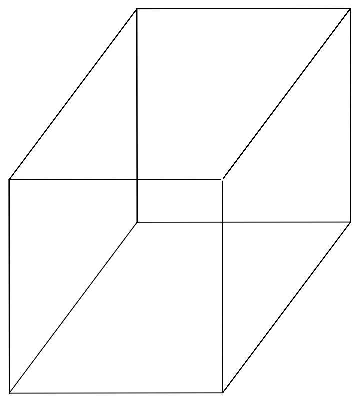

Figura 11.14: Proiecţie cavalier

Proiecţia cabinet

După cum am spus, prouecţia cavaler are neajunsul că măreşte prea tare grosimea. O soluţie mai bună, din anumite puncte de vedere, este *proiecţia cabinet*, folosit ă destul de mult în industria mobilei (de unde numele). Această proiecţie oblică este aleasă astfel înc ât factorul de contracţie pentru segmentele perpendiculare pe planul de proiecţie să fie egal cu $1/2$. Prin urmare, tangenta unghiului format de direcţia de proiecţe cu planul de proiecţie trebuie să fie $\operatorname{tg}\phi = 2$, prin urmare

$$\sin\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Unghiul dintre direcţia de proiecţie şi normala la planul de proiecţie este

$$\theta = \frac{\pi}{2} \mp \phi,$$

deci

$$\cos\theta = \pm\sin\phi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Un calcul similar cu cel din cazul proiecţiei cavaler ne conduce la condiţia

$$v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \qquad (11.4.3)$$

Exemplul 11.4. Vom determina, şi de aceast ă dată, matricea proiecţiei cabinet pe planul xOy. Ecuaţia (11.15) devine $v_3^2 = 4(v_1^2 + v_2^2)$ şi se observ ă că o soluţie este $(3, 4, 10)$. Atunci matricea proiecţiei va fi

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

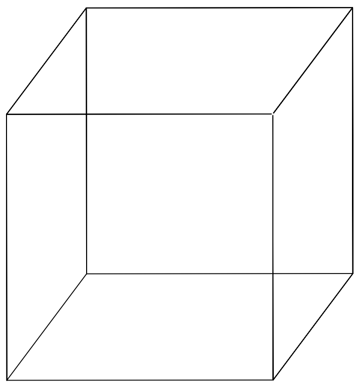

Figura 11.15: Proiecţie cabinet

11.4.3 Clasificarea proiecţiilor perspective

Proiecţiile perspective se deosebesc prin numărul *punctelor de fugă (vanishing points)* în care se întâlnesc, în planul de proiecţie, imagini ale unor drepte care sunt paralele în obiectul tridimensional care se proiectează. Această clasificare se bazează pe următoarea teoremă:

Teorema 11.3.

1. *Proiecţiile paralele aplică drepte paralele în spaţiu în drepte paralele în planul de proiecţie.*

2. *Proiecţiile perspective aplică linii paralele în spaţiu în linii paralele în planul de proiecţie dacă şi numai dacă liniile paralele din spaţiu sun paralele cu planul de proiecţie.*

3. *O proiecţie care aplică puncte de la infinit în trei sau mai multe direcţii liniar independente în puncte de la infinit este o proiecţie paralelă.*

Consecinţa 11.1. *Considerăm o proiecţie perspectivă pe un plan de vector omogen* $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$. *Atunci vectorul normal la planul de proiecţie,* (n_1, n_2, n_3) *poate*

1. *să nu fie perpendicular pe nici o axă de coordonate. Atunci fiecare dintre familiile de drepte paralele cu una dintre axele de coordonate se transformă într-o familie de drepte neparalele (*perspectivă din trei puncte*).*

2. *să fie perpendicular pe doar una dintre axe. Atunci dreptele paralele cu acea axă se transformă în drepte paralele, în timp ce dreptele paralele cu celelalte două axe se transformă în două familii de drepte neparalele (*perspectivă din două puncte*).*

3. *să fie perpendicular pe două dintre axele de coordonate. Atunci dreptele paralele cu aceste două axe se transformă în drepte paralele, iar dreptele paralele cu axa rămasă se transformă în drepte neparalele (*perspectivă dintr-un punct*).*

Observaţii. 1) Remarcăm că o familie de drepte paralele se intersectează, de fapt, într-un punct de la infinit. Prin urmare, imaginile lor printr-o proiecţie se intersectează, de asemenea, într-un punct situat la infinit, dacă imaginile sunt paralele, sau un punct obişnuit, dacă imaginile nu sunt paralele. Astfel, pentru fiecare dintre cele trei tipuri de proiecţii avem fie trei puncte de intersecţie, fie două, fie unul. Acest puncte de intersecţie a imaginilor dreptelor paralele se numesc *puncte de fugă*.

2) Vectorul normal la planul de proiecţie este perpendifular pe o axă de coordonate dacă şi numai dacă planul este paralel cu axa de coordonate respectivă. Atunci dreptele paralele cu acea axă rămân paralele prin proiecţie. Dacă vectorul normal la planul de proiecţie este perpendicular pe două axe de coordonate, el este, de fapt, paralel cu planul de coordonate care conţine cele două axe, iar dreptele paralele cu cele două axe rămân paralele prin proiecţie.

3) Punctele de fugă determinate de dreptele paralele cu axele de coordonate se numesc *puncte de fugă principale*. Pot exista şi alte puncte de fugă, detreminate de familii de drepte paralele care nu sunt paralele cu una dintre axele de coordonate.

4) Punctele de fugă determinate de dreptele paralele cu o anumită direcţie se obţin, pur şi simplu, aplicând proiecţia punctului de la infinit de-a lungul acelei familii de puncte paralele. Dacă ceea ce se obţine este tot un punct de la infinit (cu zero pe ultima coordonată) atunci dreptele nu determină un punct de fugă (adică ele rămân paralele prin proiecţie). Dacă imaginea punctului este un punct ordinar (ultima

coordonată nu este zero), atunci coordonatele carteziene se obţin împărţind primele trei coordonate la cea de-a patra.

Exemplul 11.5. Considerăm un exemplu de proiecţie cu un punct de fugă. Planul de proiecţie este planul xOy, iar centrul de proiecţie are coordonatele $(-1, 0, 2)$. Atunci avem $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$ şi $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$. Atunci matricea de proiecţie este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecţie se poate vedea în figura 11.16.

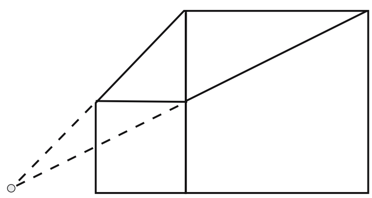

Figura 11.16: Proiecţie perspectivă cu un punct de fugă

Punctul de la infinit este punctul de coordonate $(-1, 0, 0)$

Exemplul 11.6. Dăm acum un exemplu de proiecţie perspectivă cu două puncte de fugă. Centrul de proiecţie este acelaşi punct de coordonate $(-1, 0, 2)$, dar planul de proiecţie este planul $x - z = 0$. Atunci avem $\mathbf{n}(1, 0, -1, 0)$ şi $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$, deci matricea de proiecţie este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecţie se poate vedea în figura 11.17. Punctele de fugă sunt punctele $(2, 0, 2)$ şi $(-1, 0, -1)$.

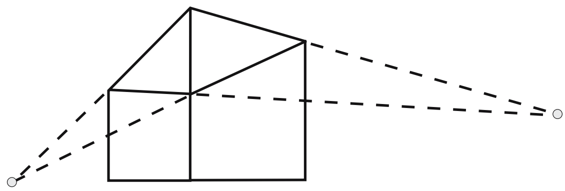

Figura 11.17: Proiecţie perspectivă cu două puncte de fugă

Exemplul 11.7. Acesta este un ultim exemplu, de data asta e vorba de o proiecţie cu trei puncte de fugă. Centrul de proiecţie este acelaşi, dar planul este planul de ecuaţie $x+2y-z-3=0$. Prin urmare, avem $\mathbf{n}(1,2,-1,-3)$ şi $\mathbf{V}(-1,0,2,1)$, deci matricea de proiecţie este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecţie se poate vedea în figura 11.18. Punctele de fugă sunt punctele $(5,0,2)$, $(-1,3,2)$ şi $(-1,0,-4)$.

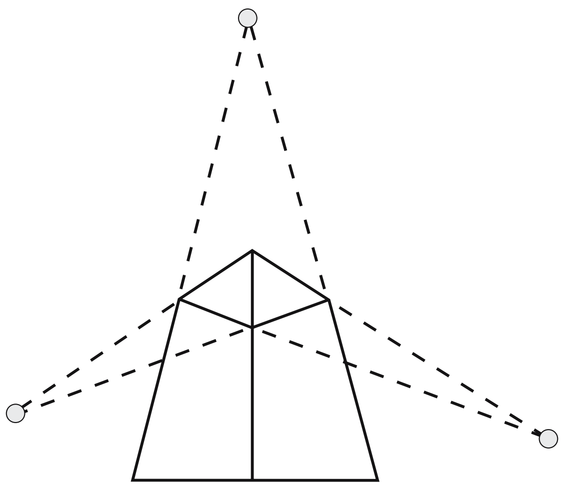

Figura 11.18: Proiecţie perspectivă cu trei puncte de fugă