
Cuadrice pe ecuația redusă

Problema 9.1. Să se determine punctele de intersecție ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu dreapta

$$x = 4 + 2t, \quad y = -6 - 3t, \quad z = -2 - 2t.$$

Problema 9.2. Să se scrie ecuația planului tangent la hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$$

în punctul $M(2, 3, 1)$. Să se arate că acest plan tangent taie suprafața după două drepte reale și să se calculeze unghiul format de cele două drepte.

Problema 9.3. Să se scrie ecuațiile planelor tangente în punctele de intersecție ale dreptei $x = y = z$ cu:

a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 9z$;

b) paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 9z$.

Problema 9.4. Să se scrie ecuația planelor tangente la:

a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$;

b) paraboloidul hiperbolic $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$,

paralele cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Problema 9.5. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2 - 9y^2 = 36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Problema 9.6. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Problema 9.7. Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeței

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

care sunt paralele cu planul

$$x + y + z = 0.$$

Problema 9.8. Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Problema 9.9. Să se găsească punctele de pe elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

în care normalele intersectează axa Oz .

Problema 9.10. Ce condiții trebuie să îndeplinească semiaxeale unui elipsoid astfel încât normalele sale să treacă prin centrul său?

Problema 9.11. Să se găsească locul geometric al punctelor de pe quadrica

$$y^2 - z^2 = 2x$$

prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

Problema 9.12. Să se găsească ecuația proiecției pe planul xOy a curbei de intersecție a elipsoidului

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu planul

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Problema 9.13. Să se găsească locul geometric al punctelor M de pe suprafața $x^2 - y^2 = z$ pentru care normala în M la suprafață formează un unghi constant cu axa Oz . Să se arate că proiecția acestui loc geometric pe planul xOy este un cerc a cărui ecuație se cere.

Problema 9.14. Să se determine ecuația hiperboloidului cu o pânză care are ca axe de simetrie axele de coordonate, este tangent la planul

$$6x - 3y + 2z - 6 = 0$$

și pentru care dreapta

$$\begin{cases} 4x - z - 5 = 0, \\ 6x + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

este o generatoare rectilinie.

Problema 9.15. Să se scrie ecuația normalei în punctul $P(-2, 2, -1)$ la cuadrica

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0.$$

Să se determine coordonatele punctului în care normala întâlnește a doua oară suprafața.

Problema 9.16. Să se determine planele care conțin dreapta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$$

și sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Problema 9.17. Să se afle distanța cea mai scurtă dintre paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$$

și planul

$$x - y - 2z = 0.$$

Problema 9.18. Să se arate că dreapta

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-6}{2}$$

este tangentă elipsoidului

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$$

și să se determine coordonatele punctului de tangență.