CAPITOLUL 4

Conice pe ecuaţii reduse

4.1 Breviar teoretic

4.1.1 Elipsa

Ecuaţia canonică

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor la două puncte fixe din plan, F_1 şi F_2, numite *focare*, situate la distanţa $2c$ unul de altul, este o lungime constantă, egală cu $2a$. Dacă alegem sistemul de coordonate astfel încât axa Ox să treacă prin cele două focare, iar axa Oy să fie mediatoarea segmentului determinat de focare, atunci ecuaţia elipsei se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.1.1}$$

unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. a se numeşte *semiaxa mare* a elipsei, iar b – *semiaxa mică*. Lungimea $2c$ se numeşte *distanţă focală*.

Excentricitatea şi razele focale

Se numeşte *excentricitate* a elipsei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)}, \tag{4.1.2}$$

care măsoară abaterea formei elipsei de la cea a unui cerc.

Se numesc *raze focale* ale unui punct $M(x, y)$ de pe elipsă distanţele de la acest punct până la cele două focare ale elipsei. Ele se exprimă, în funcţie de semiaxa mare a elipsei şi excentricitatea sa, prin formulele

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Tangenta şi normala într-un punct al elipsei

Tangenta la o elipsă este o dreaptă care are un contact dublu cu elipsa (dreapta şi elipsa au două puncte confundate în comun). *Normala* la elipsă într-un punct este dreapta care trece prin acel punct şi este perpendiculată pe tangenta în acel punct.

Dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct de pe elipsă, atunci ecuaţia tangentei în M_0 se scrie

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.1.4}$$

Ecuaţia normalei este

$$a^2y_0x - b^2x_0y - (a^2 - b^2)x_0y_0 = 0. \tag{4.1.5}$$

Tangentele la elipsă paralele cu o direcţie dată

Dacă direcţia dată nu este verticală şi ea este identificată printr-o pantă k, atunci există două tangente cu această pantă, date de ecuaţiile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \tag{4.1.6}$$

Există două tangente verticale, date de ecuaţiile

$$x = \pm a. \tag{4.1.7}$$

Tangentele la o elipsă care trec printr-un punct exterior elipsei

Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct exterior elipsei. Dacă $x_1 \neq \pm a$ (adică punctul nu se află pe una dintre cele două tangente verticale), atunci prin M_1 trec două tangente la elipsă, care au pantele date de

$$k_{1,2} = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}. \tag{4.1.8}$$

Dacă M_1 are coordonatele de forma $(\pm a, y_1)$, atunci avem o tangentă verticală (fie $x = a$, fie $x = -a$, depinde de punct) şi o tangentă neverticală, de pantă

$$k = \pm\frac{y_1^2 - b^2}{2ay_1} \tag{4.1.9}$$

(y_1 nu se poate anula, deoarece punctul M_1 este exterior elipsei). Semnul este cel care corespunde punctului M_1 ales.

4.1.2 Hiperbola

Ecuaţia canonică

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenţei distanţelor la două puncte fixe din plan, F_1 şi F_2, numite *focare*, situate la distanţa $2c$ unul de altul, este o lungime constantă, egală cu $2a$. Dacă alegem sistemul de coordonate astfel încât axa Ox să treacă prin cele două focare, iar axa Oy să fie mediatoarea segmentului determinat de focare, atunci ecuaţia elipsei se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.1.10}$$

unde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. a şi b *semiaxe* ale hiperbolei. Lungimea $2c$ se numeşte *distanţă focală*.

Excentricitatea şi razele focale

Se numeşte *excentricitate* a hiperbolei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)}. \tag{4.1.11}$$

Spre deosebire de cazul elipsei, la hiperbolă excentricitatea este tot timpul mai mare decât 1. Se numesc *raze focale* ale unui punct $M(x, y)$ de pe hiperbolă distanţele de la acest punct până la cele două focare ale hiperbolei. Ele se exprimă, în funcţie de prima semiaxă a hiperbolei şi excentricitatea sa, prin formulele

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x. \end{cases} \tag{4.1.12}$$

Asimptotele hiperbolei

Spre deosebire de elipsă, hiperbola este o curbă nemărginită. Ea este alcătuită din două ramuri. Curba are două asimptote. Fiecare este asimptotă pentru ambele ramuri, pentru una dintre ele la $+\infty$, pentru cealaltă la $-\infty$. Ecuaţiile asimptotelor sunt

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{4.1.13}$$

Tangenta şi normala într-un punct al hiperbolei

Tangenta la o hiperbolă este o dreaptă care are un contact dublu cu hiperbola (dreapta şi hiperbola au două puncte confundate în comun). *Normala* la hiperbolă într-un punct este dreapta care trece prin acel punct şi este perpendiculată pe tangenta în acel punct.

Dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct de pe hiperbolă, atunci ecuaţia tangentei în M_0 se scrie

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.1.14}$$

Ecuaţia normalei este

$$a^2y_0x + b^2x_0y - (a^2 + b^2)x_0y_0 = 0. \tag{4.1.15}$$

Tangentele la hiperbolă paralele cu o direcţie dată

Dacă direcţia dată nu este verticală şi ea este identificată printr-o pantă k, atunci există două tangente cu această pantă, date de ecuaţiile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}. \tag{4.1.16}$$

Există două tangente verticale, date de ecuaţiile

$$x = \pm a. \tag{4.1.17}$$

Spre deosebire de elipsă, la hiperbolă nu există tangente de orice pantă. Panta unei hiperbole trebuie să verifice condiţia

$$k^2 > \frac{b^2}{a^2}.$$

Tangentele la hiperbolă care trec printr-un punct exterior ei

Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct din plan exterior hiperbolei, deci coordonatele sale verifică inegalitatea

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1. \tag{4.1.18}$$

Atunci din M_1 se pot duce două tangente la hiperbolă. Dacă x_1 nu este egal cu $\pm a$, atunci ambele tangente sunt neverticale, iar pantele lor sunt date de

$$k_{1,2} = \frac{x_1y_1 \pm \sqrt{a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}. \tag{4.1.19}$$

Dacă M_1 are coordonatele de forma $(\pm a, y_1)$, atunci avem o tangentă verticală (fie $x = a$, fie $x = -a$, depinde de punct) şi o tangentă neverticală, de pantă

$$k = \pm\frac{y_1^2 + b^2}{2ay_1} \tag{4.1.20}$$

(y_1 nu se poate anula, deoarece punctul M_1 este exterior hiperbolei). Semnul este cel care corespunde punctului M_1 ales.

4.1.3 Parabola

Definiţia şi ecuaţia canonică

Parabola este locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de o dreaptă fixă Δ, numită *directoare* şi de un punct fix F, numit *focar*. Distanţa dintre punctul fix şi dreapta fixă se notează cu p şi se numeşte *parametrul parabolei*.

Dacă alegem în calitate de axă Ox perpendiculara pe directoare care trece prin focar, orientată dinspre directoare către focar, iar în calitate de axă Oy – mediatoarea segmentului de pe axa Ox cuprins între mediatoare şi focar, orientată astfel încât să obţinem un reper orientat direct, atunci ecuaţia *canonică* a parabolei se va scrie sub forma

$$y^2 = 2px. \tag{4.1.21}$$

Axa Ox este singura axă de simetrie a curbei. Parabola intersectează axa de simetrie într-un singur punct (*vârful parabolei*), care, în cazul sistemului de coordonate considerat, coincide cu originea.

Tangenta într-un punct al parabolei

Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct al parabolei dată prin ecuaţia canonică (4.1.21), atunci ecuaţia tangentei la parabolă în punctul M_0 se obţine prin *dedublare*, adică are forma

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{4.1.22}$$

Tangenta la parabolă de pantă dată

Pentru orice pantă k, nenulă, există o singură tangentă la parabolă de pantă k. Ecuaţia acestei tangente este

$$y = kx + \frac{p}{2k}. \tag{4.1.23}$$

Observaţie. Nu există nici o tangentă la parabolă care să aibă panta $k = 0$ (adică să fie orizontală sau, ceea ce este acelaşi lucru, paralelă cu axa de simetrie a parabolei).

Tangentele la parabolă dintr-un punct exterior parabolei

Considerăm un punct $M_1(x_1, y_1)$ din planul parabolei (4.1.21), exterior parabolei, adică astfel încât coordonatele sale să verifice inegalitatea

$$y_1^2 > 2px_1. \tag{4.1.24}$$

Din M_1 se pot duce întotdeauna două tangente distincte la parabolă. Avem două situaţii de considerat:

1. Dacă punctul M_1 se află pe axa Oy (adică are coordonatele de forma $(0, y_1)$), atunci una dintre tangente este verticală (este tocmai axa Oy), iar cealaltă tangentă are ecuaţia

$$y - y_1 = \frac{p}{2y_1}. \tag{4.1.25}$$

2. Dacă punctul nu se află pe axa Oy, atunci avem două tangente oblice, cu ecuaţii de forma

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{4.1.26}$$

unde panta k a tangentei este una dintre cele două rădăcini (distincte!) ale ecuaţiei

$$2x_1 k^2 - 2y_1 k + p = 0. \tag{4.1.27}$$