CAPITOLUL 1

Cuadrice pe ecuaţii reduse

1.1 Breviar teoretic

Cuadricele sunt suprafeţe din spaţiu ale căror coordonate afine verifică o ecuaţie de gradul al doilea de forma

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ &+ a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Există doar câteva clase de astfel de suprafeţe. Printr-o transformare de coordonate, ecuaţia oricăreia dintre ele poate fi adusă la o aşa-numită *formă canonică*, ce nu conţine termeni de gradul al doilea micşti şi, cu câteva excepţii, nu conţine termeni de gradul întâi. Vom studia, în exclusivitate, aceste cuadrice, folosind ecuaţia canonică.

1.1.1 Elipsoidul

Se numeşte *elipsoid* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate (x, y, z) verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1.1.2}$$

unde a, b şi c sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *semiaxele* elipsoidului.

Planele de coordonate sunt *plane de simetrie* ale elipsoidului, în timp ce axele de coordonate sunt *axe de simetrie*.

Punctele în care elipsoidul intersectează axele de simetrie (în număr de şase) se numesc *vârfuri* ale elipsoidului. Ele au coordonatele $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0)$, respectiv $(0, 0, \pm c)$.

Elipsoidul este o figură mărginită. El este inclus în paralelipipedul

$$[-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c].$$

Elipsoidul de rotaţie

Dacă în ecuaţia (6.1.2) două dintre semiaxele corespunzătoare la două axe de coordonate sunt egale, atunci elipsoidul se numeşte *elipsoid de rotaţie*, pentru că el este, în fapt, o suprafaţă de rotaţie în jurul celei de-a treia axe. Astfel, de exemplu, un elipsoid de rotaţie în jurul axei Oz are ecuaţia

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.1.3}$$

Evident, dacă toate trei semiaxele sunt egale, se obţine sfera de rază a, cu centrul în origine.

Planul tangent la elipsoid

Dacă (x_0, y_0, z_0) este un punct de pe elipsoidul dat de ecuaţia (6.1.2), atunci ecuaţia planului tangent la elipsoid în acest punct se obţine prin dedublare, adică se scrie sub forma

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1. \tag{1.1.4}$$

1.1.2 Conul de gradul al doilea

Conul de gradul al doilea sau *conul eliptic* este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{1.1.5}$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive.

Conul de gradul al doilea este un caz particular de *suprafaţă conică*, având vârful în origine, în timp ce generatoarele intersectează elipsa

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

În continuare, vom folosi termenul de *generatoare* a conului printr-un punct al său pentru dreapta care trece prin origine şi prin punct (şi care, în mod evident, este conţinută în întregime în con).

Ca şi elipsoidul, conul de gradul al doilea are planele de coordonate ca *plane de simetrie*, axele de coordonate ca *axe de simetrie* şi originea ca *centru de simetrie*. Toate cele trei axe ale conului intersectează suprafaţa într-un singur punct, acelaşi pentru toate axele (originea), deci conul are un singur *vârf*, care este vârful conului, privit ca suprafaţă conică.

Intersecţiile cu planele de coordonate

Intersecţia conului cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, se reduce la origine, dacă $h = 0$ (adică planul coincide cu planul xOy) sau, în cazul în care $h \neq 0$, este elipsa

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \dfrac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1 \\ z = h \end{cases},$$

de semiaxe $a|h|/c$, respectiv $b|h|/c$.

Intersecţia cu plane paralele cu planul xOz, de ecuaţie $y = h$ se reduce la perechea de drepte

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

dacă $h = 0$ sau la hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \dfrac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1 \\ y = h \end{cases},$$

de semiaxe $c|h|/b$, respectiv $a|h|/b$, în cazul în care $h \neq 0$.

Intersecţia cu plane paralele cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$ se reduce la perechea de drepte

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} \pm \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

dacă $h = 0$ sau la hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2h^2/a^2} - \dfrac{z^2}{c^2h^2/a^2} = 1 \\ x = h \end{cases} ,$$

de semiaxe $b|h|/a$, respectiv $c|h|/a$, în cazul în care $h \neq 0$.

Planul tangent la con

Planul tangent la conul de ecuaţia (6.1.5), într-un punct al său, diferit de vârful conului, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine, ca şi în cazul elipsodului, prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0. \tag{1.1.7}$$

Planul tangent într-un punct la un con este acelaşi în toate punctele generatoarei care trece prin punctul respectiv.

Conul de rotaţie

Dacă în ecuaţia (6.1.5) punem $a = b$, suprafaţa conică ce se obţine, de ecuaţie

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{1.1.8}$$

se numeşte *con de rotaţie*. Această suprafaţă este, în acelaşi timp, o suprafaţă conică şi o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz.

1.1.3 Hiperboloidul cu o pânză

Se numeşte *hiperboloid cu o pânză* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate, relativ la un sistem de coordonate ortonormat, verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1.1.9}$$

unde a, b, c sunt trei numere reale strict pozitive, numite *semiaxe* ale hiperboloidului.

Punctele în care axele Ox şi Oy intersectează suprafaţa, adică punctele de coordonate $(\pm a, 0, 0)$ şi $(0, \pm b, 0)$, se numesc *vârfurile* hiperboloidului.

Hiperboloidul cu o pânză are planele de coordonate ca plane de simetrie, axele de coordonate ca axe de simetrie şi originea – ca centru de simetrie.

Intersecţiile hiperboloidului cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia dintre hiperboloid şi un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este o elipsă

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}+1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}+1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

cu axele paralele cu axele Ox şi Oy şi de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$. Pentru $h=0$ se obţine elipsa de semiaxe minime, care se numeşte *elipsă de stricţiune*.

Intersecţia dintre hiperboloid şi un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x=h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x=h, \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}. \end{cases}$$

Sunt posibile trei cazuri:

(a) Dacă $|h|<|a|$, atunci avem hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} x=h, \\ \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}-\dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1. \end{cases}$$

(b) Dacă $|h|=|a|$, obţinem perechea de drepte concurente

$$\begin{cases} x=h, \\ \dfrac{y}{b}\pm\dfrac{z}{c}=0. \end{cases}$$

(c) Dacă $|h|>|a|$, atunci intersecţia este hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} x=h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}=1. \end{cases}$$

Intersecţiile dintre planele paralele cu planul xOz şi hiperboloid se tratează complet analog cu intersecţiile dintre planele paralele cu planul yOz şi hiperboloid.

Planul tangent la hiperboloidul cu o pânză

Dacă (x_0,y_0,z_0) este un punct al hiperboloidului cu o pânză, atunci ecuaţia planului tangent la hiperboloid în acest punct se scrie prin dedublare, adică ea este

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1. \tag{1.1.10}$$

Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

Pe hiperboloidul cu o pânză se află două familii de drepte, care se numesc *generatoare rectilinii* ale hiperboloidului. Ecuaţiile generatoarelor din prima familie sunt

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{1.1.11}$$

unde λ şi μ sunt două numere reale care nu se anulează simultan, în timp ce ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie sunt

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{1.1.12}$$

unde α şi β sunt, din nou, parametri reali care nu se anulează simultan.

Generatoarele rectilinii se bucură de o serie de proprietăţi remarcabile, dintre care enumerăm:

- Prin fiecare punct al hiperboloidului trec exact două generatoare, câte una din fiecare familie,
- Oricare două generatoare din aceeaşi familie sunt necoplanare.
- Fiecare generatoare dintr-una dintre familii intersectează toate generatoarele din cealaltă familie.
- Toate generatoarele (din ambele familii) intersectează elipsa de stricţiune a hiperboloidului.
- Cele două generatoare care trec printr-un punct al hiperboloidului sunt conţinute în planul tangent la hiperboloid în acel punct.

Hiperboloidul cu o pânză de rotaţie

Dacă primele două semiaxe ale hiperboloidului sunt egale: $a = b$, atunci obţinem aşa-numitul *hiperboloid cu o pânză de rotaţie*, de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.1.13}$$

Acesta este o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz. Intersecţiile dintre hiperboloidul de rotaţie şi plane paralele cu planul xOy sunt cercuri.

1.1.4 Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{1.1.14}$$

unde a, b, c sunt constante reale strict pozitive, numite *semiaxe* ale hiperboloidului.

Hiperboloidul cu două pânze este alcătuit din două submulţimi disjuncte, numite *pânze*, care corespund cazurilor $z > 0$ şi $z < 0$.

Axa Oz intersectează suprafaţa în două puncte, numite *vârfuri* ale hiperboloidului cu două pânze.

Hiperboloidul cu două pânze are planele de coordonate ca plane de simetrie, axele de coordonate ca axe de simetrie şi originea ca centru de simetrie.

Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia suprafeţei cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$ este descrisă de ecuaţiile

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases}$$

Aceasta poate fi:

(a) mulţmea vidă, dacă $|h| < |c|$;

(b) un punct, dacă $h = \pm c$;

(c) elipsa

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, dacă $|h| > |c|$.

Intersecţia hiperboloidului cu două pânze cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{a^2} + 1. \end{cases}$$

Această intersecţie, indiferent de valoarea lui h, este o hiperbolă, de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}$.

Intersecţiile cu plane paralele cu planul zOx sunt similare cu cele obţinute prin plane paralele cu planul yOz.

Hiperboloidul cu două pânze de rotaţie

Dacă primele două semiaxe ale hiperboloidului sunt egale, obţinem un *hiperboloid cu două pânze de rotaţie*, de ecuaţie

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Acesta este o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz.

Planul tangent la un hiperboloid cu două pânze

Ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu două pânze, într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = -1,$$

1.1.5 Paraboloidul eliptic

Se numeşte *paraboloid eliptic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{1.1.15}$$

unde p şi q sunt două numere reale strict pozitive, *parametrii paraboloidului*.

Paraboloidul eliptic are două plane de simetrie, planele de coordonate xOz şi yOz şi o axă de simetrie, axa Oz. Nu are centru de simetrie.

Axa Oz intersectează paraboloidul într-un singur punct, originea, care se numeşte *vârful* paraboloidului eliptic.

Intersecţiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia paraboloidului eliptic cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$ este descrisă de ecuaţiile

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases}$$

Această intersecţie poate fi:

(a) mulţimea vidă, dacă $h < 0$;

(b) un punct (originea) dacă $h = 0$;

(c) elipsa de ecuaţii

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $\sqrt{2ph}$ şi $\sqrt{2qh}$, dacă $h > 0$.

Intersecţia paraboloidului cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2qz - \dfrac{qh^2}{p}. \end{cases}$$

Aceasta este o parabolă, pentru orice valoare a lui h.

Intersecţiile paraboloidului cu plane paralele cu planul zOx sunt, de asemenea, parabole şi se obţin în acelaşi mod ca şi în cazul intersecţiilor cu plane paralele cu planul yOz.

Paraboloidul eliptic de rotaţie

Dacă cei doi parametri ai paraboloidului sunt egali: $p = q$, obţinem ceea ce se numeşte *paraboloidul eliptic de rotaţie*, de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{1.1.16}$$

În cazul acestui paraboloid (care este, într-adevăr, o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz), intersecţiile cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri (eventual degenerate la un punct sau imaginare).

Planul tangent într-un punct la paraboloidul eliptic

Planul tangent la paraboloidul eliptic într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0) se obţine din ecuaţia paraboloidului, prin dedublare:

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} = p(z + z_0). \tag{1.1.17}$$

De remarcat că aici dedublarea se produce ca şi în cazul ecuaţiei tangentei la parabolă, adică z (care este la puterea întâi în ecuaţia paraboloidului) se înlocuieşte cu $(z + z_0)/2$.

1.1.6 Paraboloidul hiperbolic

Paraboloidul hiperbolic este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonare relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{1.1.18}$$

Aici p şi q sunt două numere reale strict pozitive care se numesc *parametrii paraboloidului hiperbolic*.

Paraboloidul hiperbolic are două plane de simetrie (planele de coordonate yOz şi zOx) şi o axă de simetrie (axa Oz). Suprafaţa nu are un centru de simetrie.

Axa Oz înţeapă suprafaţa în origine (*vârful* paraboloidului hiperbolic).

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$ este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases}$$

Această intersecţie este:

(a) hiperbola

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{y^2}{-2qh} - \dfrac{x^2}{-2ph} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $\sqrt{-2qh}$, respectiv $\sqrt{-2ph}$, dacă $h < 0$;

(b) perechea de drepte

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} \pm \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \end{cases}$$

dacă $h = 0$;

(c) hiperbola

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $\sqrt{2ph}$, respectiv $\sqrt{2qh}$. dacă $h > 0$.

Intersecţia paraboloidului cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + \dfrac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care este o parabolă, pentru orice valoare a lui h.

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu planul zOx sunt, de asemenea, parabole şi se obţin în acelaşi mod ca şi în cazul intersecţiilor cu plane paralele cu planul yOz.

Planul tangent într-un punct la paraboloidul hiperbolic

Planul tangent la paraboloidul hiperbolic, într-un punct al său de coordonate (x_0, y_0, z_0) se obţine prin dedublarea ecuaţiei paraboloidului, adică ecuaţia sa este

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \tag{1.1.19}$$

Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

Ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză, pe paraboloidul hiperbolic se află două familii de drepte, numite *generatoare rectilinii*.

Ecuaţiile generatoarelor din prima familie sunt:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu z, \\ \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda, \end{cases} \tag{1.1.20}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali care nu se anulează simultan.

Ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie sunt:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha, \end{cases} \tag{1.1.21}$$

unde α şi β sunt, de asemenea, doi parametri reali, care nu se anulează simultan.

Ca şi generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză, generatoarele paraboloidului hiperbolic se bucură de o serie întreagă de proprietăţi. Menţionăm câteva dintre ele.

- Prin fiecare punct al suprafeţei trec exact două generatoare rectilinii, câte una din fiecare familie.
- Generatoarele rectilinii care trec printr-un punct al hiperboloidului sunt conţinute în planul tangent în acel punct.
- Oricare două generatoare rectilinii din aceeaşi familie sunt necoplanare.
- Fiecare generatoare rectilinie dintr-o familie intersectează toate generatoarele din cealaltă familie.

1.1.7 Cilindrul eliptic

Se numeşte *cilindru eliptic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.1.22}$$

unde a şi b sunt două numere reale, care se numesc *semiaxele* cilindrului eliptic.

Planele de simetrie ale cilindrului eliptic sunt: planul yOz, planul xOz şi orice plan paralel cu planul xOy. Ca urmare, el are o infinitate de *axe de simetrie*: axa Oz şi orice dreaptă paralelă cu celalte două axe şi care interesectează axa Oz, precum şi o infinitate de *centre de simetrie*: toate punctele de pe axa Oz.

Intersecţiile cilindrului eliptic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia dintre cilindrul eliptic şi un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este, pentru orice valoare a lui h, o elipsă de semiaxe a şi b, de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Intersecţia dintre cilindru şi un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Intersecţia este:

- o pereche de drepte paralele cu axa Oz, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}}, \\ x = h, \end{cases}$$
dacă $|h| < |a|$;
- o singură dreaptă, paralelă cu Oz, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = 0, \\ x = h, \end{cases}$$
dacă $|h| = |a|$;
- mulţimea vidă, dacă $|h| > |a|$.

Intersecţiile cilindrului eliptic cu plane paralele cu planul xOz sunt similare cu cele obţinute cu plane paralele cu planul yOz.

Planul tangent într-un punct al cilindrului eliptic

Ecuaţia planului tangent la cilindrul eliptic într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine prin dedublare. Ea este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{1.1.23}$$

Cilindrul eliptic de rotaţie

Dacă cele două semiaxe ale cilindrului eliptic sunt egale: $a = b$, atunci cilindrul se numeşte *cilindru de rotaţie* sau *cilindru circular*. El are ecuaţia

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1.1.24}$$

1.1.8 Cilindrul hiperbolic

Se numeşte *cilindru hiperbolic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.1.25}$$

unde a şi b sunt două numere reale, care se numesc *semiaxele* cilindrului hiperbolic.

Simetriile cilindrului hiperbolic sunt aceleaşi cu simetriile cilindrului eliptic.

Intersecţiile cilindrului hiperbolic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia dintre cilindrul hiperbolic şi un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este, pentru orice valoare a lui h, o hiperbolă de semiaxe a şi b, de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Intersecţia dintre cilindru şi un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - 1, \\ x = h. \end{cases}$$

Această intersecţie este:

- mulţimea vidă, dacă $|h| < a$;
- o dreaptă paralelă cu axa Oz, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = 0, \\ z = h, \end{cases}$$
dacă $|h| = a$;
- o pereche de drepte paralele cu Oz, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = \pm b\sqrt{\dfrac{h^2}{a^2} - 1}, \\ x = h, \end{cases}$$
dacă $|h| > a$.

Intersecţia dintre cilindrul hiperbolic şi un plan paralel cu planul zOx, de ecuaţie $y = h$ este, pentru orice valoare a lui h, o pereche de drepte paralele cu Oz, de ecuaţii

$$\begin{cases} x = \pm a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2} + 1}, \\ y = h. \end{cases}$$

Planul tangent într-un punct al cilindrului hiperbolic

Ca în cazul tuturor cuadricelor, ecuaţia planului tangent la cilindrul hiperbolic, într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0) se scrie prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{1.1.26}$$

1.1.9 Cilindrul parabolic

Se numeşte *cilindru parabolic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonare relativ la un sistem de coordonate ortonormat verifică ecuaţia

$$y^2 = 2px, \tag{1.1.27}$$

unde p este un număr real strict pozitiv, numit *parametrul* cilindrului.

Cilindrul parametric are un singur plan de simetrie, planul xOz şi o infinitate de axe de simetrie: toate dreptele care sunt paralele cu axa Ox şi intersectează axa Oz. Cilindrul nu are centre de simetrie.

Intersecţiile cilindrului parabolic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia cilindrului parabolic cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este, pentru orice valoare a lui h, o parabolă de parametru p, de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = h. \end{cases}$$

Intersecţia cilindrului cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = 2ph, \\ x = h. \end{cases}$$

Această intersecţie este:

- mulţimea vidă, dacă $h < 0$;
- axa Oz, dacă $h = 0$;
- o pereche de drepte paralele cu axa Oz, de ecuaţii

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{2ph}, \\ x = h, \end{cases}$$

  dacă $h > 0$.

În sfârşit, intersecţia cilindrului parabolic cu un plan paralel cu planul zOx, de ecuaţie $y = h$ este, pentru orice valoare reală a lui h, o dreaptă paralelă cu axa Oz, de ecuaţii

$$\begin{cases} x = \dfrac{h^2}{2p}, \\ y = h. \end{cases}$$