Geometrie pentru informaticieni
Seminar

Paul A. Blaga

Cuprins

SEMINARUL 11

Transformări geometrice în plan (Exemplu)

Problema 11.1. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ printr-o rotaţie de unghi 60° relativ la punctul $P(1,1)$, urmată de o scalare neuniformă, de factori $(1,2)$, relativ la punctul P. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Soluţie. Matricea de rotaţie se scrie, în forma generală, ca

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta+q_2(1-\cos\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret, avem

$$\mathrm{Rot}(1,1,60^\circ)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pe de altă parte, matricea unei scalări neuniforme, de factori de scală (s_x,s_y), relativ la punctul $Q(q_1,q_2)$ este

$$\mathrm{Scale}(Q,s_x,s_y)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & (1-s_x)q_1\\ 0 & s_y & (1-s_y)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

adică, în cazul nostru concret,

$$\mathrm{Scale}(1,1,1,2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor dreptunghiului dat este

$$[ABCD]=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Dacă aplicăm mai întâi rotaţia, urmată de scalare, obţinem transformarea de matrice

$$T_1 = \mathrm{Scale}(1,1,1,2)\cdot \mathrm{Rot}(1,1,60^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imaginea dreptunghiului prin această transformare este patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$, cu matricea coordona-

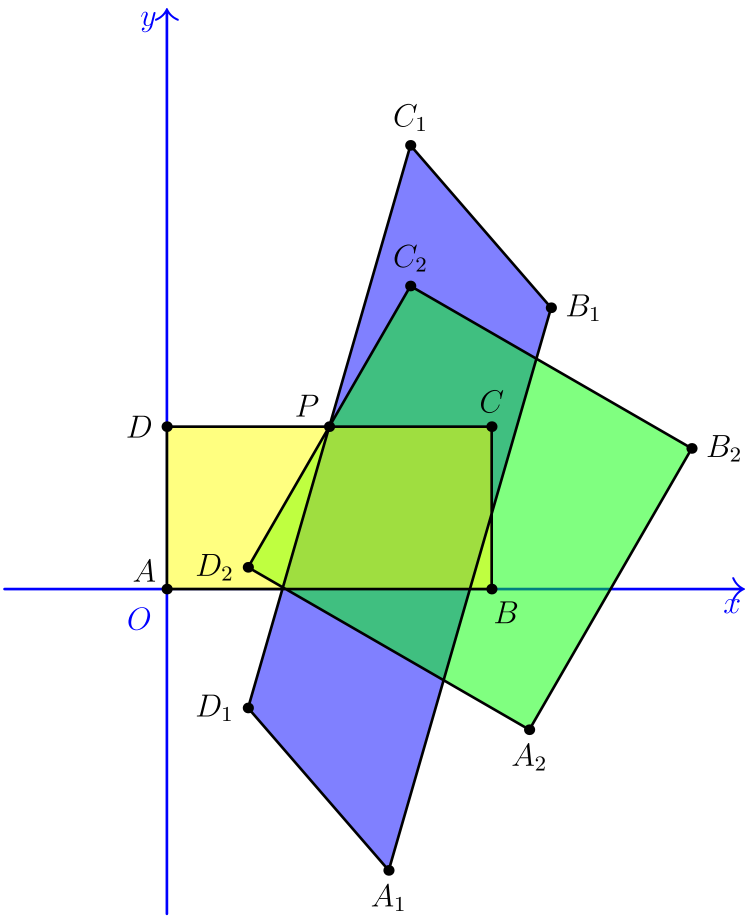

Figura 11.1: Dreptunghiul iniţial şi cele două imagini ale sale prin transformările indicate

telor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_1B_1C_1D_1] = T_1\cdot[ABCD] = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Prin urmare, vârfurile patrulaterului transformat vor fi $A_1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right)$, $B_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$, $C_1\left(\frac{3}{2}, 1+\sqrt{3}\right)$, $D_1\left(\frac{1}{2}, 1-\sqrt{3}\right)$.

Dacă, acum, aplicăm transformările în ordine inversă, matricea transformării compuse va fi

$$T_2 = \mathrm{Rot}(1,1,60^\circ)\cdot \mathrm{Scale}(1,1,1,2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3} & \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imaginea dreptunghiului prin această transformare este patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$, cu matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_2B_2C_2D_2] = T_2 \cdot [ABCD] = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{3}}{2} & \frac{3+2\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci vârfurile acestui patrulater sunt $A_2\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{3}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$, $D_2\left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

În figură este reprezentat dreptunghiul iniţial (cu galben), imaginea sa prin rotaţie urmată de scalare (albastru) şi imaginea sa prin scalare urmată de rotaţie (verde). În mod clar, cele două imagini nu coincid, deci ordinea în care se efectuează transformările este importantă. Se observă, de asemenea, că punctul P este, aşa cum ne aşteptam, un punct fix pentru ambele transformări. $\square$