

## O-Notation

$g(n) = O(f(n)) \Leftrightarrow \left(g(n) \frac{1}{f(n)}\right)$  ist beschränkt (z.B. Konvergent)

Fester Wert  $\Rightarrow g = O(f(n))$  UND  $f = O(g(n))$ ;

**Logarithmen:**

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(x^c) = c \log(x)$
- $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln(e^x) = x$

## Differenzengleichungen

1. Aus Angabe lesen:

**b:** Für Eingabe=1,  $x_n = a_n x_{n-1} + b_n$

2.  $\pi_n = \prod_{i=2}^n a_i$   
Hinweis:  $\prod_{i=2}^n 3 = 3^{n-1}$

Einfache Sonderfälle:

- $x_n = a_n x_{n-1} = b \prod_{i=2}^n a_i$
- $x_n = x_{n-1} + b_n = b + \sum_{i=2}^n b_i$

3.  $x_n = \pi_n \left( b + \sum_{i=2}^n \frac{b_i}{\pi_i} \right)$

## Nützliche Zahlen:

- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H_n$  *Abschätzung:  $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$*   
 $\sum_{i=1}^n H_i = (n+1)H_n - n$
- $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + sth_n \Rightarrow x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} x_i + sth_{n-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-2} x_i = x_{n-1} - sth_{n-1}$   
 $\Rightarrow x_n = 2x_{n-1} + sth_n - sth_{n-1}$
- $\sum_{i=1}^n c = nc$   
 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$   $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$   
 $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$   $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{i=1}^n \lfloor \log_2(i) \rfloor = (n+1) \lfloor \log_2(n) \rfloor - 2(2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} - 1)$
- $\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$   
 $\sum_{i=0}^n ic^{i-1} = \frac{(n+1)c^n(c-1) - (c^{n+1}-1)}{(c-1)^2}$

## rationale Summen:

- $\sum_{i=1}^n \frac{sth}{polynom}$
- Partialbruchzerlegung:*  $\frac{x_i}{polynom} = \frac{a}{1.NST} + \frac{b}{2.NST} \dots$   
Bei Mehrfachen NST ( $k.NST$ ) *Viel-fachheit* statt k. NST
- Koeffizientenvergleich;

**Indexverschiebung:**  $\sum_{i=1}^n i - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i$   
 $\sum_{i=2}^n i = \sum_{i=0}^n (i) - 1 - 0$

## Gleichung erstellen:

for i=1 to n-1 {

DoRec(i)  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_i$  // siehe Nützliche Zahlen (rot)

DoRec(n-1)  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1} = (n-1)x_{n-1}$

print("hallo")  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n-1$  }

**m** = Tabellenplätze, **n**=Anzahl der Datensätze, **B**= $\frac{n}{m}$

## Hashfunktionen

**Multiplikation:**  $h(s) \lfloor m \{sc\} \rfloor$  mit  $\{sc\} = sc - \lfloor sc \rfloor$ ; optimal mit  $c = 0.5(1 + \sqrt{5})$

Implementieren mit Shift-Operationen für **m** =  $2^p$ ,  $p \leq$  wortbreite

$\Rightarrow$  die p vordersten Bits des unteren Worts von  $s \cdot c$  (low-Register)

Bsp: w=8, p=6, c=0.618=0.10011110, s = 4 = 100

$h(s) : 10011110 * 100 = 1001111000 \Rightarrow h(4) = 30$

## Universelle Familien:

Funktionsfamilie ist universelle Familie, wenn Kollisionswahrscheinlichkeit =  $\frac{1}{m}$

Bsp: Primzahl p, Tabellengröße

$m \leq p$ ; Wähle  $a, b \in \mathbb{Z}_p$

$h(x) = ((ax + b) \bmod p) \bmod m$

Bsp: Primzahl p,  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}_p^r$ , x als p-adische Entwicklung,  $x \leq p^r - 1$

$h_a(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r a_i x_i \bmod p$

## Verkettung mit Überlaufbereich

Hashfunktionen liefern Adressen im Primärbereich, Tabelleneinträge speichern zusätzlich

Nachfolgeradresse im Überlaufbereich; *Freie überlaufzellen zusätzliche verkettung*

Zugriffe bei Erfolg:  $< 1 + \frac{1}{2}B$ , Zugriffe bei Misserfolg:  $\leq 1 + B$

Wahrscheinlichkeit für i Kollisionen:  $p_i = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{m}\right)^i \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-i}$

$\Rightarrow$  Überlaufbereich =  $n - m(1 - p_0)$  = Kollisionen (m=Primärbereich)

Freie Plätze im Mittel:  $|(n - m - \text{Überlauf})|$

## Offene Adressierung

Bei Kollision wird anhand der Sondierfolge ein anderer Platz in der Tabelle gesucht

**Einfügen:** Suche erste freie/gelöschte Zelle in Sondierfolge, füge ein;

**Suchen:** Durchlaufe Sondierfolge, bis gefunden oder sicher nicht in Tabelle

**Löschen:** Suche und markiere als gelöscht

mittlere Länge Sondierfolge beim Suchen:  $\frac{1}{B} \ln \left( \frac{1}{1-B} \right)$  beim Einfügen:  $1/1 - B$

**Lineares Sondieren:** betrachte immer den nächsten eintrag bis Erfolg;  $(i(s))_j = h(s) + j \bmod m$

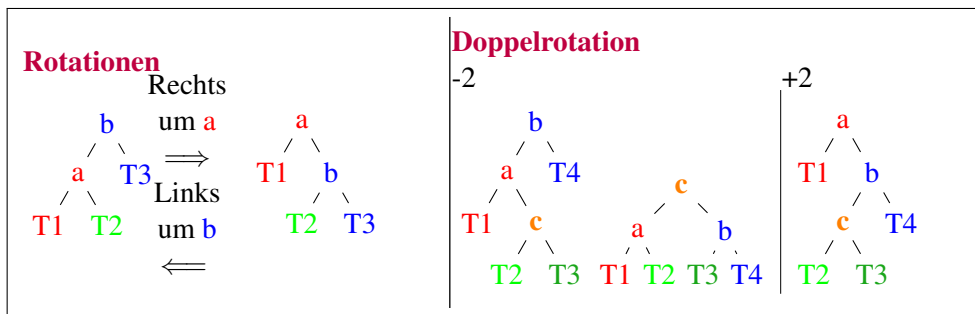
Nachteil: Sondierfolgen verketteten sich (Cluster)

mittlere Länge Sondierfolge beim Suchen:  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+B} \right)$  beim Einfügen:  $\frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{1-B} \right)^2 \right)$

**Quadratisches Sondieren:** m = Prim; **m**  $\equiv 3 \bmod 4$

$i(s)_j = h(s) \pm j^2 \bmod m$  (also 0,+1,-1,+4,-4,...)

**Doppelhashing:**  $i(s)_j = h(s) + jh^*(s) \bmod m$ ,  $h \neq h^*$ , m = prim



## Bäume

**Preorder::** [Knoten]-linkerBaum-rechterBaum // Wurzeln sind links

**Inorder::** linkerBaum-[Knoten]-rechterBaum

**Postorder::** linkerBaum-rechterBaum-[Knoten] // Wurzeln sind rechts

## Binärer Suchbaum

Knoten haben 2 Kinder, kleiner im Linken, größer im rechten Teilbaum

**Suche:** Starte bei Wurzel, rekursiv: wenn gesucht größer: rechts, wenn kleiner links

**Einfügen:** Suche im Baum; füge ein (achte auf links/rechts)

**Löschen:** Suche den Knoten; wenn:

- 1 Nachfolger: Referenz im Vorgänger auf nachfolger, lösche Knoten
- 2 Nachfolger: Tausche mit größtem Element im linken Teilbaum (symmetrischer Vorgänger), lösche Element

symmetrischer Vorgänger: einmal nach links, dann rechts solange möglich;

## AVL-Baum

Bedingung:  $|\text{Balancefaktor}| < 1$

Balancefaktor =  $\text{Höhe}_{\text{rechterTeilbaum}} - \text{Höhe}_{\text{linkerTeilbaum}}$

$h < 1.45 \log_2(n+2) - 1.33 \Rightarrow$  höhe max. 45 % schlechter als best-case

**Einfügen/Löschen:** wie bei binär, anschließend Ausgleichen

**Ausgleich nach einfügen:** (Umgekehrt für +2)

Suche balancefaktor -2 am weitesten unten im Pfad zum eingefügten element

betrachte linken Nachfolger (b):

bei -1: Rechtsrotation um linken Nachfolger (a)

bei +1: Doppelrotation

Maximal einmal ausgleichen nötig

**Ausgleich nach Löschen:** (Umgekehrt für +2)

Suche balancefaktor -2 am weitesten unten im Pfad zum gelöschten element;

betrachte linken Nachfolger (a):

bei -1,0: Rechtsrotation um linken Nachfolger (a)

bei +1: Doppelrotation

wenn linker Nachfolger +1 oder -1 war, dann für höhere knoten vllt. weiter ausgleichen.

## Treap

jedem element wird zusätzlich eine zufällige Priorität zugewiesen

Heapbedingung:  $Prio_{Vater} < Prio_{Kind} \Rightarrow$  Treap ist eindeutig bestimmt

Erwartungswert Pfadlänge:  $2 \frac{n+1}{n} H_n - 3$ ; Erwartungswert Rotationen:  $< 2$

**Einfügen:** Analog Binärer Baum; danach: Rotation(nach oben) bis heapbedingung erfüllt

**Löschen:** Suche knoten, rotiere mit kleinerem Nachfolger (Priorität) bis Blatt; lösche

## B-Bäume

Entwickelt für Festplatten, minimieren zugriffe in datenbanken

Ordnung d  $\Rightarrow$  Knoten hat  $\lceil \frac{d}{2} \rceil$  bis d Nachfolger, zwischen  $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  und d-1 Elemente,

Wurzel hat mind. 2 Nachfolger oder ist Blatt

alle Blätter sind immer auf einer Ebene  $\Rightarrow$  immer vollst. ausgeglichen

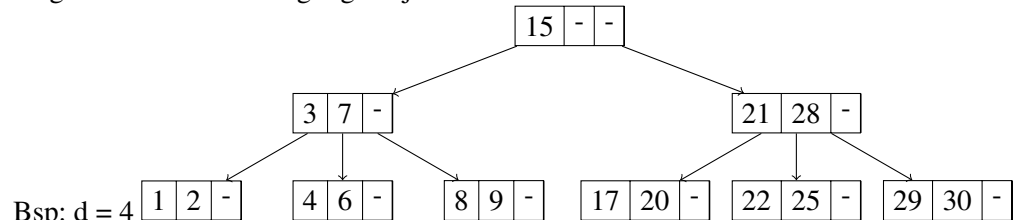
Baum mit höhe h hat mindestens  $1 + 2 \frac{\lceil \frac{d}{2} \rceil^h - 1}{\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1}$  und maximal  $\frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$  Knoten

höhe ist  $O(\log_2(n))$ , genauer: zwischen  $\log_d(n+1) - 1$  und  $\log_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1} \left( \frac{n+1}{2} \right)$

Aufbau eines Knotens/Seite: 

|         |         |         |     |         |
|---------|---------|---------|-----|---------|
| Adresse | Element | Adresse | ... | Adresse |
|---------|---------|---------|-----|---------|

Es gilt binärbaum Bedingung für jedes Element mit seiner rechte/linke Adresse



Bsp: d = 4

**Einfügen:** Suche; füge ein (sortierung beachten)

Wenn das Blatt übertoll ist: (ggf. rekursiv)

1. Suche das mittlere Element  $M_{itte}$  des übertollen Blattes, die elemente rechts davon werden neues Blatt;
2. verschiebe die  $M_{itte}$  in den Vaterknoten, der rechte Verweis zeigt auf das neue Blatt;

## Löschen:

1. Element nicht in einem Blatt  $\Rightarrow$  tausche es mit dem Nachfolger in Sortierreihenfolge (ist in einem Blatt); lösche;
2. ist Seite danach zu Klein ( $< \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ ) versuche Ausgleich mit direkten Nachbarblatt: dazwischenliegendes Element ( $M_{itte}$ ) kommt vom Vaterknoten in den zu kleinen Knoten, der Nachfolger/Vorgänger aus dem anderen in den Vaterknoten
3. Ausgleich nicht möglich: Füge 2 benachbarte Knoten +  $M_{itte}$  aus Vaterknoten zu einem zusammen. Wiederhole ggf. rekursiv.

**B\*-Baum:** Beim Einfügen in volle Seite versuche ausgleich mit direkten Nachbarn  $\Rightarrow$  bessere Speicherausnutzung

## Suche im Array

**Sequentiell:** gehe der reihe nach alle elemente durch bis das element gefunden  $O(n)$

**Binär:** Sortiertes Array; betrachte mittleres Element;

<: Wiederhole im linken Teilarray, >: im rechten; worst-Case:  $O(\log_2 n)$

**Quick-Select:** Suche k. kleinstes element: Analog zu probab. Quicksort, betrachte nur das Teilarray, in dem der Index k liegt; durchschnitt  $O(n)$

## Selection-Sort

Suche Minimum; Tausche es mit dem ersten Element; Wiederhole im Array  $[2...n]$ ,  $O\{n^2\}$

## Bubble-Sort

durchlaufe elemente, tausche mit nachfolger wenn dieser kleiner; wiederhole  $O\{n^2\}$

## Quicksort

1. Wähle Pivot= letztes Element
2. lasse zeiger von beiden Enden des Restarrays nach innen laufen:  
wenn der rechte zeiger auf ein kleineres bzw. der linke auf ein größeres Element als das Pivot zeigt stoppe den zeiger; wenn beide gestoppt: tausche sie, wenn sich die Zeiger treffen tausche das Pivot nach innen
3. Wiederhole Quicksort im Rechten und linken Teilarray.

Laufzeit: best Case:  $O(n \log_2 n)$ , worst-Case  $O(n^2)$

Vergleiche(mittel):  $2(n+1)H_n - 4n$

Zuweisungen(mittel):  $\frac{1}{3}(n+1)H_n - \frac{1}{9}n - \frac{5}{18}$

**probabilistisch::** start: wähle zufälliges Element als Pivot und tausche ans ende

**Heapsort** z.B.  $[37, 45, 57, 59, 58, 99] =$

Interpretation Array als binärer Heap;

$a[2i]$  und  $a[2i+1]$  sind die Kinder von  $a[i]$ ;

Array durchläuft die Ebenen von oben nach unten, von links nach rechts

Heapbedingung: Vater  $\leq$  Kinder

**Heapsort:** Erzeuge Heap; Tausche letztes Element mit Wurzel, DownHeap in  $[1...n-1]$ , wiederhole bis array leer; worst-case:  $O(n \log_2 n)$

**Erzeuge Heap:** Führe DownHeap für alle knoten durch (ebenenweise von unten zur wurzel);  $O(n)$

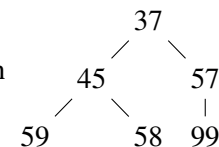
**DownHeap:** Knoten > Kind: Tausche mit Kleinerem nachfolger; wiederhole rekursiv

**Revisited:** Bestimme Pfad der kleineren Nachfolger bis zum Blatt, speichere den index.

=> index des i. Knotens auf dem Pfad sind die vordersten i Bits des Blattindex

**Lineare Suche::** Suche vom Pfadende aus die Einfügestelle, speichere Wurzel, alle Pfad-elemente rücken eine Ebene nach oben, einfügen Wurzel

**binärsuche::** analog dazu, suche Einfügestelle mit binärer Suche im Pfad



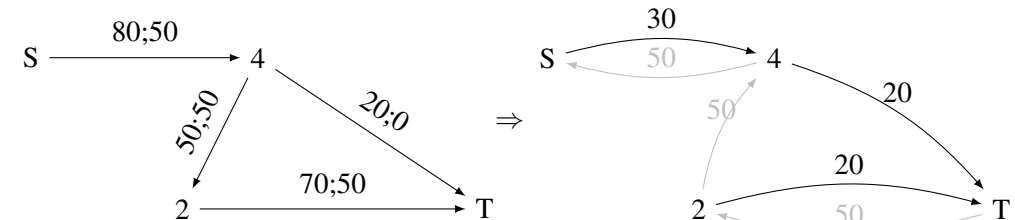
## Netzwerk

Quelle S, Ziel T

Flusserhaltung: für alle außer Quelle/Ziel: IN = OUT

Totaler Fluss: output(quelle) - input(quelle)

**Ford Fulkerson (maximaler Fluss/Schnitt minimaler Kapazität):** Bilde Restgraph aus Netzwerk



Suche Pfad von Quelle -> Ziel, erhöhe fluss an diesem Pfad um dessen minimale Kante Wiederhole solange ein Pfad Quelle -> Ziel existiert

**Edmonds-Karp:** wähle den Pfad im Restgraph mit wenigsten **Kanten** (durch Weitensuche von der Quelle aus)  $O(ke^2)$

**Schnitt minimaler Kapazität:** : Zusammenhangskomponente von S im Restgraph nach Ford-Fulkerson)

## Priority Queue

Speichert Elemente mit Prioritäten, entnahme des Elements mit kleinster Priorität;

Implementierung durch Heap und Positionsarray für die Elemente;

Wird durch UpHeap/DownHeap die Position verändert: anpassen des Positionsarrays

**Einfügen:** füge das Element am HeapEnde ein, Umgekehrtes DownHeap (UpHeap)

**Löschen:** Entnahme der Heapwurzel, ersetzen durch letztes Element; DownHeap

## Union-Find

dynamische Partitionierung; parent array; Für Erweiterungen: array rank

Partition als Wurzelbaum => Elemente in einer Menge wenn gleiche Wurzel

Repräsentant ist Wurzel; Wurzeln haben  $parent[w] = 0$

**Find(e):** return Wurzel der Partition von e : durchlaufe parent-Beziehung bis Wurzel

**Pfadkomprimierung::** setze gefundene Wurzel als parent aller Knoten auf diesem Pfad

**Union(x,y):** return true wenn in selber Partition, sonst false + vereinige diese Partitionen  
 $i = Find(i); j = Find(j)$  if  $(i \neq j)$  {  $parent[i] = Find(j)$  }

**Höhen-Balancierung:**  $rank[i]$  speichert rang von i; hänge bei Union die Kleinere Wurzel unter die größere, bei gleichheit steigt der rang der neuen Wurzel

worst-case Laufzeit für n-1 unions und m finds:  $O((m+n)\alpha(n))$ ;  $\alpha(n) \leq 4$

## Graphen

**k = Anzahl Knoten, e = Anzahl Kanten**

a adjazent zu b: es existiert die kante  $a \rightarrow b$ , also  $(a, b) \in E$

**Umgebung::** alle zu einem knoten adjazenten knoten

$$e \leq \binom{k}{2} \text{ (ungerichtet) bzw. } \leq k(k-1) \text{ (gerichtet)}$$

**Teilgraph::** Knoten und Kanten sind Teilmenge des Originalgraphen

**aufspannender Teilgraph::** alle Knoten und Teilmenge der Kanten des Originalgraphen

**erzeugender Teilgraph::** Teilmenge der Knoten und alle Kanten zwischen diesen

**Pfad::** Folge von Knoten  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , mit Kanten von  $v_i \rightarrow v_{i+1}$

**Zyklus::** geschlossener Pfad mit länge  $\geq 3$  (ungerichtet) bzw.  $\geq 2$  (gerichtet)

**Zusammenhangskomponente::** alle gegenseitig erreichbaren knoten bilden Komponente

**Baum::** zusammenhängend, azyklisch und  $e = k-1$

**Bipartiter Graph::** zwei Mengen von Knoten  $V_1, V_2$ , alle Kanten gehen von  $V_1$  nach  $V_2$

$$\text{Adjazenzmatrix: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & \nearrow & \\ 1 & \longleftarrow & 3 \end{array} \quad \text{Adjazenzliste: } \begin{array}{l} 1: 2 \\ 2: \\ 3: 1 \end{array}$$

## Weitensuche

Besuche die Nachbarn des Startknotens, dann die Nachbarn des ersten Nachbarn usw.

$\Leftrightarrow$  gehe den entstehenden Baum Ebenenweise durch.

$V_T$ : besuchte Knoten,  $V_{ad}$ : zum besuch Vorgemerke Knoten als Queue,  $V_R$ : Rest

implementierung:  $\text{int}[k]$  where; //  $<0$ : in der Queue, 0:  $V_R$ ,  $>0$ : besucht

Visit(Node k): füge k in die Queue;

durchlaufe die Queue, für jeden Knoten füge alle Nachbarn aus  $V_R$  in die Queue

Laufzeit: bei Liste:  $O(e+k)$ , bei Matrix:  $O(k^2)$

**Erweiterung::** Test auf Zyklen  $\Leftrightarrow$  Test ob Nachbar schon im Baum (und nicht parent)

Ermittlung des Abstands von der Wurzel des erzeugten Baums

## Tiefensuche

Besuche den 1.Nachbarn des Startknotens, dann den 1.Nachbarn des 1.Nachbarn usw.

$\Leftrightarrow$  durchlaufe einen Pfad nach dem Anderen

Visit: durchlaufe die Adjazenzliste, für jeden nicht besuchten Nachbarn rufe Visit auf

Laufzeit:  $O(e+k)$

**Erweiterung:: Test auf Azyklität:** Kanten auf einen Vorgänger

bei Visit Start/Ende: A vorgänger von B wenn  $[Start_B, End_B] \subset [Start_A, End_A]$

**Topologisches Sortieren:** Array der Länge k, fülle von hinten bei Visitende

## Starke Zusammenhangskomponente::

1. Nummeriere in Terminierungsreihenfolge

2. Drehe alle Kanten um (Konstruiere den reversen Graph)

3. Tiefensuche von höchster Terminierungsnummer aus, alle Erreichbaren sind starke Zusammenhangskomp.

4. (wiederhole letzten Schritt bei bedarf)

## Dijkstra/Prim (minimaler aufspannender Baum)

**Start::** ( $\{\text{Startknoten}\}, \emptyset$ ) // Startknoten, keine Kanten

**Schritt::** füge die kleinste vom konstruierten Baum ausgehende Kante in den baum ein;

Priorität: bei Prim: Kantengewicht, bei Dijkstra Pfad zur Wurzel

Implementierung durch Priority Queue bei Adjazenzliste

Laufzeit:  $O(n^2)$  bei Matrix,  $O((p+q)\log(p))$  bei liste

## Kruskal (minimaler aufspannender Baum)

**Start:**  $T = (V, \emptyset)$  // alle Knoten, keine Kanten

**Schritt:** füge die kleinste Kante ein, die keinen Zyklus erzeugt

Implementierung: Knoten in Union-Find; Sortiere Kanten nach gewicht, durchlaufe die

Kanten und führe für jede Kante  $\text{Union}(v_{\text{Start}}, v_{\text{End}})$  aus; wenn false füge die Kante ein;

Laufzeit:  $O(p+q\log(q))$

## Boruvka (minimaler aufspannender Baum)

minimale indizente Kante: kleinste Kante an einem Knoten

**Start::**  $\text{Tree}(V, \emptyset)$   $\text{Graph}(V, E)$

**Schritt::** füge alle Minimal indizenten Kanten im Baum ein, Kontrahiere sie im Graph;

wiederholen Laufzeit:  $O((p+q)\log(p))$  Gewicht nicht eindeutig  $\Rightarrow$  Min-Max-Ordnung;

kante ist Kleiner falls gewicht kleiner bzw. kleinerer Knoten kleiner bzw. größerer Knoten

## Warshall (transitiver Abschluss)

Erzeugt Graph, bei dem jede Kante einem Pfad in der Eingabe darstellt

**Start::**  $a_0 = \text{Adjazenzmatrix};$

für  $k=1$  bis  $p$ :

**Schritt::**  $a_k[i, j] = a_{k-1}[i, j] \text{ or } (a_{k-1}[i, k] \text{ and } a_{k-1}[k, j])$  für implementierung: es wird nur speicher für eine Matrix benötigt, diese wird angepasst. 3 forschleifen  $(k, i, j) \Rightarrow O(p^3)$

## Floyd (minimaler aufspannender Baum)

Adjazenzmatrix gewichteter Graph, gewicht =  $\infty$  wenn keine Kante, 0 in Hauptdiagonale;

**Start::**  $a_0 = \text{Adjazenzmatrix};$

für  $k=1$  bis  $p$ :

**Schritt::** Schritt:  $a_k[i, j] = \min(a_{k-1}[i, j], a_{k-1}[i, k] + a_{k-1}[k, j])$

funktioniert auch mit negativen gewichten, wenn keine negativen Zyklen, implementierung analog zu Warshall