O-Notation

$g(n) = O(f(n)) \Leftrightarrow \left(g(n)\frac{1}{f(n)}\right)$ ist beschraenkt (z.B. Konvergent)

Fester Wert => g =O(f(n)) UND f = O(g(n));

Logarithmen:

- $log(xy) = log(x) + log(y)$
- $log(x^c) = clog(x)$
- $e^{log(x)} = x$

Differenzengleichungen

1. Aus Angabe lesen:
   b: Für Eingabe=1, $x_n = a_n x_{n-1} + b_n$
2. $\pi_n = \prod_{i=2}^{n} a_i$
3. $x_n = \pi_n \left(b + \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i}{\pi_i}\right)$

Einfache Sonderfalle:

- $x_n = a_n x_{n-1} = \quad b\prod_{i=2}^{n} a_i$
- $x_n = x_{n-1} + b_n = \quad b + \sum_{i=2}^{n} b_i$

Nützliche Zahlen:

- $\sum_{i=1}^{i} \frac{1}{i} = H_n \quad Abschatzung : ln(n+1) \leq H_n \leq ln(n)+1$
  $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$
- $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + sth_n \Rightarrow x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} x_i + sth_{n-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-2} x_i = x_{n-1} - sth_{n-1}$
  $\Rightarrow x_n = 2x_{n-1} + sth_n - sth_{n-1}$
- $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
  $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
  $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} \lfloor log_2(i) \rfloor = (n+1)\lfloor log_2(n) \rfloor - 2\left(2^{\lfloor log_2(n) \rfloor} - 1\right)$
- $\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$
  $\sum_{i=0}^{n} ic^{i-1} = \frac{(n+1)c^n(c-1)-(c^{n+1}-1)}{(c-1)^2}$

rationale Summen:

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{sth}{polynom}$
2. $Partialbruchzerlegung : \frac{x_i}{polynom} = \frac{a}{1.NST} + \frac{b}{2.NST} \cdots$
   Bei Mehrfachen NST $(k.NST)^{Vielfachheit}$ statt k. NST
3. Koeffizientenvergleich;

m = Tabellenplätze, n=Anzahl der Datensätze, B=$\frac{n}{m}$

Hashfunktionen

Multiplikation: $h(s)\lfloor m\{sc\} \rfloor$ mit $\{sc\} = sc - \lfloor sc \rfloor$; optimal mit c = $0.5(1+\sqrt{5})$

Implementieren mit Shift-Operationen für $\mathbf{m = 2^p}$, p$\leq$ wortbreite

=> die p vordersten Bits des unteren Worts von $s \cdot c$ (low-Register)

Bsp: w=8, p=6, c=0.618=0.10011110, s = 4 = 100
$h(s)$: $10011110 * 100 = 10\underline{011110}00 => h(4) = 30$

Universelle Familien:

Funktionsfamilie ist universelle Familie, wenn Kollisionswahrscheinlichkeit = $\frac{1}{m}$

Bsp: Primzahl p, Tabellengröße

$m \leq p$; Wähle $a, b \in \mathbb{Z}_p$

$\boxed{h(x) = ((ax+b) \ mod \ p) \ mod \ m}$

Bsp: Primzahl p, $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}_p^r$, x als p-adische Entwicklung, $x \leq p^r - 1$

$h_a(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \Sigma_{i_1}^{r} a_i x_i \ mod \ p$

Verkettung mit Überlaufbereich

Hashfunktionen liefern Adressen im Primärbereich, Tabelleneinträge speichern zusätzlich Nachfolgeradresse im Überlaufbereich; Freie überlaufzellen zusätzliche verkettung

Zugriffe bei Erfolg: $< 1 + \frac{1}{2}B$, Zugriffe bei Misserfolg: $\leq 1 + B$

Wahrscheinlichkeit für i Kollisionen: $p_i = \binom{n}{i}\left(\frac{1}{m}\right)^i \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-i}$

=> Überlaufbereich = $n - m(1-p_0)$ = Kollisionen (m=Primärbereich)

Freie Plätze im Mittel:$|(n - m - \text{Überlauf})|$

Offene Adressierung

Bei Kollision wird anhand der Sondierfolge ein anderer Platz in der Tabelle gesucht

Einfügen: Suche erste freie/gelöschte Zelle in Sondierfolge, füge ein;

Suchen: Durchlaufe Sondierfolge, bis gefunden oder sicher nicht in Tabelle

Löschen: Suche und markiere als gelöscht

mittlere Länge Sondierfolge beim Suchen : $\frac{1}{B} ln\left(\frac{1}{1-B}\right)$ beim Einfügen: $1/1 - B$

Lineares Sondieren: betrachte immer den nächsten eintrag bis Erfolg; $(i(s)_j = h(s) + j \ mod \ m)$

Nachteil: Sondierfolgen verketten sich (Cluster)

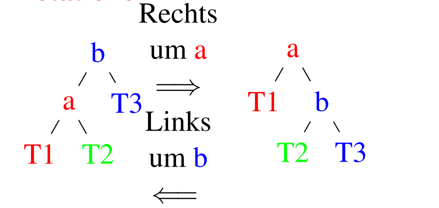
mittlere Länge Sondierfolge beim Suchen : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+B}\right)$ beim Einfügen: $\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{1-B}\right)^2\right)$

Quadratisches Sondieren: m = Prim; $\mathbf{m \equiv 3 \ mod 4}$

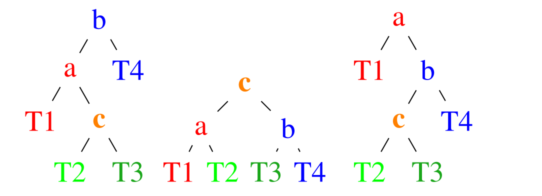
$i(s)_j = h(s) \pm j^2 \ mod \ m$ (also 0,+1,-1,+4,-4,...)

Doppelhashing: $i(s)_j = h(s) + jh^*(s) \ mod \ m$, h $\neq$ h* , m = prim

Rotationen



Doppelrotation



Bäume

Preorder:: $\boxed{\text{Knoten}}$-linkerBaum-rechterBaum // Wurzeln sind links

Inorder:: linkerBaum-$\boxed{\text{Knoten}}$-rechterBaum

Postorder:: linkerBaum-rechterBaum-$\boxed{\text{Knoten}}$// Wurzeln sind rechts

Binärer Suchbaum

Knoten haben 2 Kinder, kleiner im Linken, größer im rechten Teilbaum

Suche: Starte bei Wurzel,rekursiv: wenn gesucht größer: rechts, wenn kleiner links

Einfügen: Suche im Baum; füge ein (achte auf links/rechts)

Löschen: Suche den Knoten; wenn:

- 1 Nachfolger: Referenz im Vorgänger auf nachfolger, lösche Knoten
- 2 Nachfolger: Tausche mit größtem Element im linken Teilbaum (symmetrischer Vorgänger), lösche Element

symmetrischer Vorgänger: einmal nach links, dann rechts solange möglich;

AVL-Baum

Bedingung: |Balancefaktor| < 1

Balancefaktor = Höhe$_{rechterTeilbaum}$ − Höhe$_{linkerTeilbaum}$

$h < 1.45\log_2(n+2) - 1.33$ => höhe max. 45 % schlechter als best-case

Einfügen/Löschen: wie bei binär, anschließend Ausgleichen

Ausgleich nach einfügen: (Umgekehrt für +2)

Suche balancefaktor -2 am weitesten unten im Pfad zum eingefügten element

betrachte linken Nachfolger (b):

bei -1: Rechtsrotation um linken Nachfolger (a)

bei +1: Doppelrotation

Maximal einmal ausgleichen nötig

Ausgleich nach Löschen:: (Umgekehrt für +2)

Suche balancefaktor -2 am weitesten unten im Pfad zum gelöschten element;

betrachte linken Nachfolger (a):

bei -1,0: Rechtsrotation um linken Nachfolger (a)

bei +1: Doppelrotation

wenn linker Nachfolger +1 oder -1 war, dann für höhere knoten vllt. weiter ausgleichen.

Treap

jedem element wird zusätzlich eine zufällige Priorität zugewiesen

Heapbedingung: $Prio_{Vater} < Prio_{Kind}$ => Treap ist eindeutig bestimmt

Erwartungswert Pfadlänge: $2\frac{n+1}{n}H_n - 3$; Erwartungswert Rotationen: <2

Einfügen: Analog Binärer Baum; danach: Rotation(nach oben) bis heapbedingung erfüllt

Löschen: Suche knoten, rotiere mit kleinerem Nachfolger (Priorität) bis Blatt; lösche

B-Bäume

Entwickelt für Festplatten, minimieren zugriffe in datenbanken

Ordung d => Knoten hat $\lceil \frac{d}{2} \rceil$ bis d Nachfolger, zwischen $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ und d-1 Elemente,

Wurzel hat mind. 2 Nachfolger oder ist Blatt

alle Blätter sind immer auf einer Ebene => immer vollst. ausgeglichen

Baum mit höhe h hat mindestens $1+2\frac{\lceil \frac{d}{2} \rceil^h - 1}{\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1}$ und maximal $\frac{d^{h+1}-1}{d-1}$ Knoten

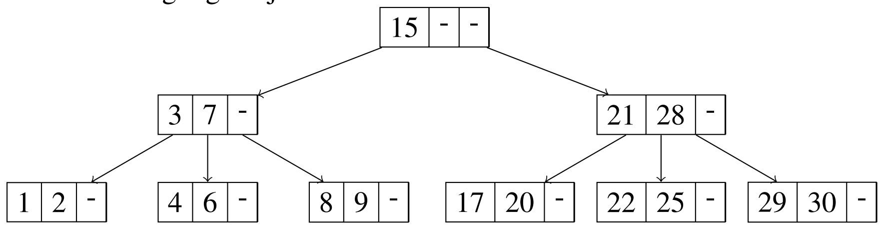
höhe ist $\mathbf{O}(\log_2(\mathbf{n}))$, genauer: zwischen $\log_d(n+1)-1$ und $\log_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$

Aufbau eines Knotens/Seite:

Adresse	Element	*Adresse*	...	*Adresse*

Es gilt binärbaum Bedingung für jedes Element mit seiner rechte/linke Adresse

Bsp: d = 4



Einfügen: Suche; füge ein (sortierung beachten)

Wenn das Blatt übervoll ist: (ggf. rekursiv)

1. Suche das mittlere Element M_{itte} des übervollen Blattes, die elemente rechts davon werden neues Blatt;
2. verschiebe die M_{itte} in den Vaterknoten, der rechte Verweis zeigt auf das neue Blatt;

Löschen:

1. Element nicht in einem Blatt => tausche es mit dem Nachfolger in Sortierreihenfolge (ist in einem Blatt); lösche;
2. ist Seite danach zu Klein ($< \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$) versuche Ausgleich mit direkten Nachbarblatt: dazwischenliegendes Element (M_{itte}) kommt vom Vaterknoten in den zu kleinen Knoten, der Nachfolger/Vorgänger aus dem anderen in den Vaterknoten
3. Ausgleich nicht möglich: Füge 2 benachbarte Knoten + M_{itte} aus Vaterknoten zu einem Zusammen. Wiederhole ggf. rekursiv.

B*-Baum: Beim Einfügen in volle Seite versuche ausgleich mit direkten Nachbarn => bessere Speicherausnutzung

Suche im Array

Sequentiell: gehe der reihe nach alle elemente durch bis das element gefunden **O(n)**

Binär: Sortiertes Array; betrachte mittleres Element;
<: Wiederhole im linken Teilarray, >: im rechten; worst-Case: $\mathbf{O}(\log_2 \mathbf{n})$

Quick-Select: Suche k. kleinstes element: Analog zu probab. Quicksort, betrachte nur das Teilarray, in dem der Index k liegt; durchschnitt **O(n)**

Selection-Sort

Suche Minimum; Tausche es mit dem ersten Element; Wiederhole im Array [2...n], $\mathbf{O}\{n^2\}$

Bubble-Sort

durchlaufe elemente, tausche mit nachfolger wenn dieser größer; wiederhole $\mathbf{O}\{n^2\}$

Quicksort

1. Wähle Pivot= letztes Element
2. lasse zeiger von beiden Enden des Restarrays nach innen laufen:
   wenn der rechte zeiger auf ein kleineres bzw. der linke auf ein größeres Element als das Pivot zeigt stoppe den zeiger; wenn beide gestoppt: tausche sie, wenn sich die Zeiger treffen tausche das Pivot nach innen
3. Wiederhole Quicksort im Rechten und linken Teilarray.

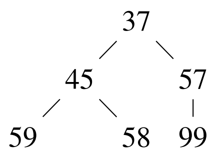
Laufzeit: best Case:$\mathbf{O}(\mathbf{n}\log_2 \mathbf{n})$, worst-Case $\mathbf{O}(\mathbf{n^2})$

probabilistisch:: start: wähle zufälliges Element als Pivot und tausche ans ende

Heapsort

Interpretation Array als binärer Heap;
a[2i] und a[2i+1] sind die Kinder von a[i];
Array durchläuft die Ebenen von oben nach unten, von links nach rechts
Heapbedingung: Vater $\leq$ Kinder

z.B. $[\underbrace{37},\underbrace{45,57},\underbrace{59,58,99}]=$



Heapsort: Erzeuge Heap; Tausche letztes Element mit Wurzel, DownHeap in [1...n-1] , wiederhole bis array leer; worst-case: $\mathbf{O}(\mathbf{n}\log_2 \mathbf{n})$

Erzeuge Heap: Führe Einsichern für alle knoten durch (ebenenweise von unten rechts zur wurzel); **O(n)**

DownHeap: Knoten > Kind: Tausche mit Kleinerem nachfolger; wiederhole rekursiv

Revisited: Bestimme Pfad der kleineren Nachfolger bis zum Blatt, speichere den index. => index des i. Knotens auf dem Pfad sind die vordersten i Bits des Blattindex

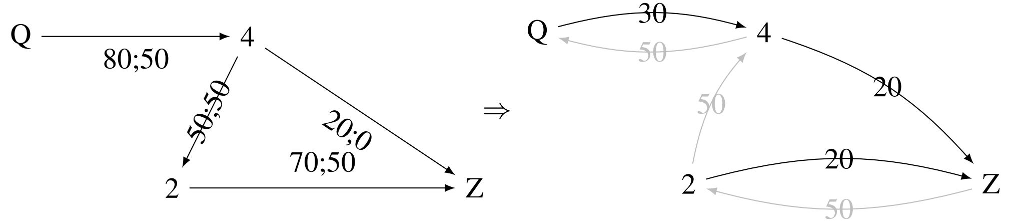
Lineare Suche:: Suche vom Pfadende aus die Einfügestelle, speichere Wurzel, alle Pfadelemente rücken eine Ebene nach oben, einfügen Wurzel

binärsuche:: analog dazu, suche Einfügestelle mit binärer Suche im Pfad

Netzwerk

Quelle **Q**, Ziel **Z**
Flusserhaltung: für alle außer Quelle/Ziel: IN = OUT
Totaler Fluss: output(quelle) - input(quelle)

Ford Fulkerson: Bilde Restgraph aus Netzwerk



Suche Pfad von Quelle -> Ziel, erhöhe fluss an diesem Pfad um dessen minimale Kante
Wiederhole solange ein Pfad Quelle -> Ziel existiert

Edmonds-Karp: wähle den Pfad im Restgraph mit wenigsten **Kanten** (durch Weitensuche von der Quelle aus) $\mathbf{O}(\mathbf{ke^2})$

Priority Queue

Speichert Elemente mit Prioritäten, entnahme des Elements mit kleinster Priorität;
Implementierung durch Heap und Positionsarray für die Elemente;
Wird durch UpHeap/DownHeap die Position verändert: anpassen des Positionsarrays

Einfügen: füge das Element am HeapEnde ein, Umgekehrtes DownHeap (UpHeap)

Löschen: Entnahme der Heapwurzel, ersetzen durch letztes Element; DownHeap

Union-Find

dynamische Partitionierung; parent array; Für Erweiterungen: array rank
Partition als Wurzelbaum => Elemente in einer Menge wenn gleiche Wurzel
Repräsentant ist Wurzel; Wurzeln haben parent[w] =0

Find(e): return Wurzel der Partition von e : durchlaufe parent-Beziehung bis Wurzel

Pfadkomprimierung:: setze gefundene Wurzel als parent aller Knoten auf diesem Pfad

Union(x,y): return true wenn in selber Partition, sonst false + vereinige diese Partitionen
i = Find(i); j = Find(j) if(i!=j) { parent[i] = Find(j)}

Höhen-Balancierung: rank[i] speichert rang von i; hänge bei Union die Kleinere Wurzel unter die größere, bei gleichheit steigt der rang der neuen Wurzel
worst-case Laufzeit für n-1 unions und m finds: $\mathbf{O}((\mathbf{m+n})\alpha(n))$; $\alpha(n) \leq 4$

Graphen

k = Anzahl Knoten, e = Anzahl Kanten

a adjazent zu b: es existiert die kante a->b, also $(a,b) \in E$

Umgebung:: alle zu einem knoten adjazenten knoten

$e \leq \binom{k}{2}$ (ungerichtet) bzw. $\leq k(k-1)$(gerichtet)

Teilgraph:: Knoten und Kanten sind Teilmenge des Originalgraphen

aufspannender Teilgraph:: alle Knoten und Teilmenge der Kanten des Originalgraphen

erzeugender Teilgraph:: Teilmenge der Knoten und alle Kanten zwischen diesen

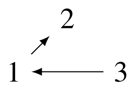
Pfad:: Folge von Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_n$, mit Kanten von $v_i- > v_{i+1}$

Zyklus:: geschlossener Pfad mit länge ≥ 3 (ungerichtet) bzw. ≥ 2 (gerichtet)

Zusammenhangskomponente:: alle gegenseitig erreichbaren knoten bilden Komponente

Baum:: zusammenhängend, azyklisch und e = k-1

Bipartiter Graph:: zwei Mengen von Knoten V_1, V_2, alle Kanten gehen von V_1 nach V_2

Adjazenzmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ => 

Adjazenzliste: 1: 2
 2:
 3: 1 .

Weitensuche

Besuche die Nachbarn des Startknotens, dann die Nachbarn des ersten Nachbarn usw.
$\Leftrightarrow$ gehe den entstehenden Baum Ebenenweise durch.

V_T : besuchte Knoten, V_{ad}: zum besuch Vorgemerkte Knoten als Queue, V_R: Rest

implementierung: int[k] where; // <0: in der Queue, 0: V_R, >0: besucht

Visit(Node k): füge k in die Queue;

durchlaufe die Queue, für jeden Knoten füge alle Nachbarn aus V_R in die Queue

Laufzeit: bei Liste: **O(e+k)**, bei Matrix: $\mathbf{O}(\mathbf{k^2})$

Erweiterung:: Test auf Zyklen $\Leftrightarrow$ Test ob Nachbar schon im Baum (und nicht parent)

Ermittlung des Abstands von der Wurzel des erzeugten Baums

Tiefensuche

Besuche den 1.Nachbarn des Startknotens, dann den 1.Nachbarn des 1.Nachbarn usw.
$\Leftrightarrow$ durchlaufe einen Pfad nach dem Anderen

Visit: durchlaufe die Adjazenzliste, für jeden nicht besuchten nachbarn rufe Visit auf

Laufzeit: **O(e+k)**

Erweiterung:: *Test auf Azyklität:* Kanten auf einen Vorgänger

bei Visit Start/Ende: A vorgänger von B wenn $[Start_B, End_B] \subset [Start_A, End_A]$

Topologisches Sortieren: Array der Länge k, fülle von hinten bei Visitende

Starke Zusammenhangskomponente::

1. Nummeriere in Terminierunsreihenfolge
2. Drehe alle Kanten um (Konstruiere den reversen Graph)
3. Tiefensuche von höchster Terminierungsnummer aus, alle Erreichbaren sind starke Zusammenhangskomp.
4. (wiederhole letzten Schritt bei bedarf)

Dijkstra/Prim (minimaler aufspannender Baum)

Start:: ({Startknoten}, $\emptyset$) // Startknoten, keine Kanten

Schritt:: füge die kleinste vom konstruierten Baum ausgehende Kante in den baum ein;

Priorität: bei Prim: Kantengewicht, bei Dijkstra Pfad zur Wurzel

Implementierung durch Priority Queue bei Adjazenzliste

Laufzeit: $\mathbf{O}(\mathbf{n^2})$ bei Matrix, **O((p+q)log(p))** bei liste

Kruskal (minimaler aufspannender Baum)

Start: T= (V,$\emptyset$) // alle Knoten, keine Kanten

Schritt: füge die kleinste Kante ein, die keinen Zyklus erzeugt

Implementierung: Knoten in Union-Find; Sortiere Kanten nach gewicht, durchlaufe die Kanten und führe für jede Kante Union(v_{Start}, v_{End}) aus; wenn false füge die Kante ein;

Laufzeit: **O(p+qlog(q))**

Boruvka (minimaler aufspannender Baum)

Min-Max-Ordnung: kante ist Kleiner falls gewicht kleiner bzw. kleinerer Knoten kleiner bzw. größerer Knoten kleiner

minimale indizente Kante: kleinste Kante an einem Knoten

Start:: Tree(V,$\emptyset$) Graph(V,E)

Schritt:: füge alle Minimal indizenten Kanten im Baum ein, Kontrahiere sie im Graph; wiederholen Laufzeit: **O((p+q)log(p))**

Warshall (transitiver Abschluss)

Erzeugt Graph, bei dem jede Kante einem Pfad in der Eingabe darstellt

Start:: a_0 = Adjazenzmatrix;

für k=1 bis p:

Schritt:: $a_k[i,j] = a_{k-1} or (a_{k-1}[i,k] and a_{k-1}[k,j])$ für implementierung: es wird nur speicher für eine Matrix benötigt, diese wird angepasst. 3 forschleifen (k,i,j) => $\mathbf{O}(\mathbf{p^3})$

Floyd (minimaler aufspannender Baum)

Adjazenzmatrix gewichteter Graph, gewicht= ∞ wenn keine Kante, 0 in Hauptdiagonale;

Start:: a_0 = Adjazenzmatrix;

für k=1 bis p:

Schritt:: Schritt: $a_k[i,j] = min a_{k-1}, a_{k-1}[i,k] + a_{k-1}[k,j]$

funktioniert auch mit negativen gewichten, wenn keine negativen Zyklen, implementierung analog zu Warshall