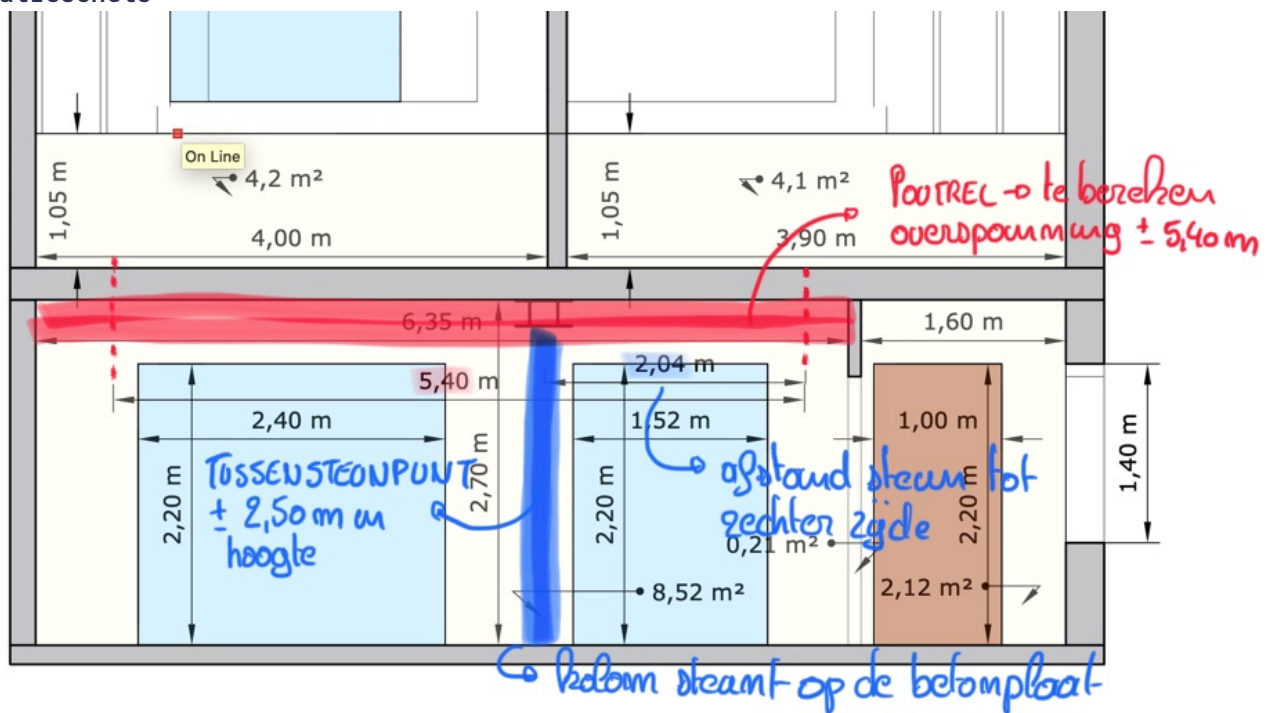


# Berekening Profiel 5 - HE 220 B

Berekening van **Profiel 5**, een **hyperstatische** ligger **onder muur 13 en 15**. Het profiel hoort in theorie de vloer van de badkamer en kamer 3 niet te ondersteunen, gezien deze afdraagt van respectievelijk muur 1 naar muur 4 en 5, van muur 4 en 6 naar muur 9. Veiligheidshalve rekenen we 20% mee van de last t.g.v. de vloer van de badkamer en kamer 3.

Lasten zijn afkomstig van het dak tot het eerste verdiep. Er wordt gerekend met een **nuttige belasting** van  $200\text{ kN/m}^2$  en een krachtsafdracht van de vloeroppervlaktes tussen de draagmuren (dus **krachtsafdracht in 1 richting**), tenzij hier uitdrukkelijk van afgeweken wordt.

situatieschets =



# Table of Contents

---

## Berekening Profiel 5 - HE 220 B

Indeling

Probleemstelling: Hyperstatische ligger met 1 tussensteunpunt

Controle

Beschrijving belastingsschema

Oplossing belastingsschema

## Achterliggende berekeningen

Dependencies en hulpfuncties

Interne krachtswerking

Steunpunten

Kinematische randvoorwaarden

Oplossing basisschema's

Schema 1. Verdeelde belasting  $p$  van  $a$  tot  $b$

Schema 2. Puntlast  $F$  ter hoogte van abscis  $a$

Schema 3. Variabele verdeelde belasting  $p_a$  van  $a$  tot  $p_b$  ter hoogte van  $b$

Voorbeelden

Theorie

Virtuele arbeid

Integralen en analogiën van Mohr

Stelling van Green

Doorbuiging door dwarskrachten

## Indeling

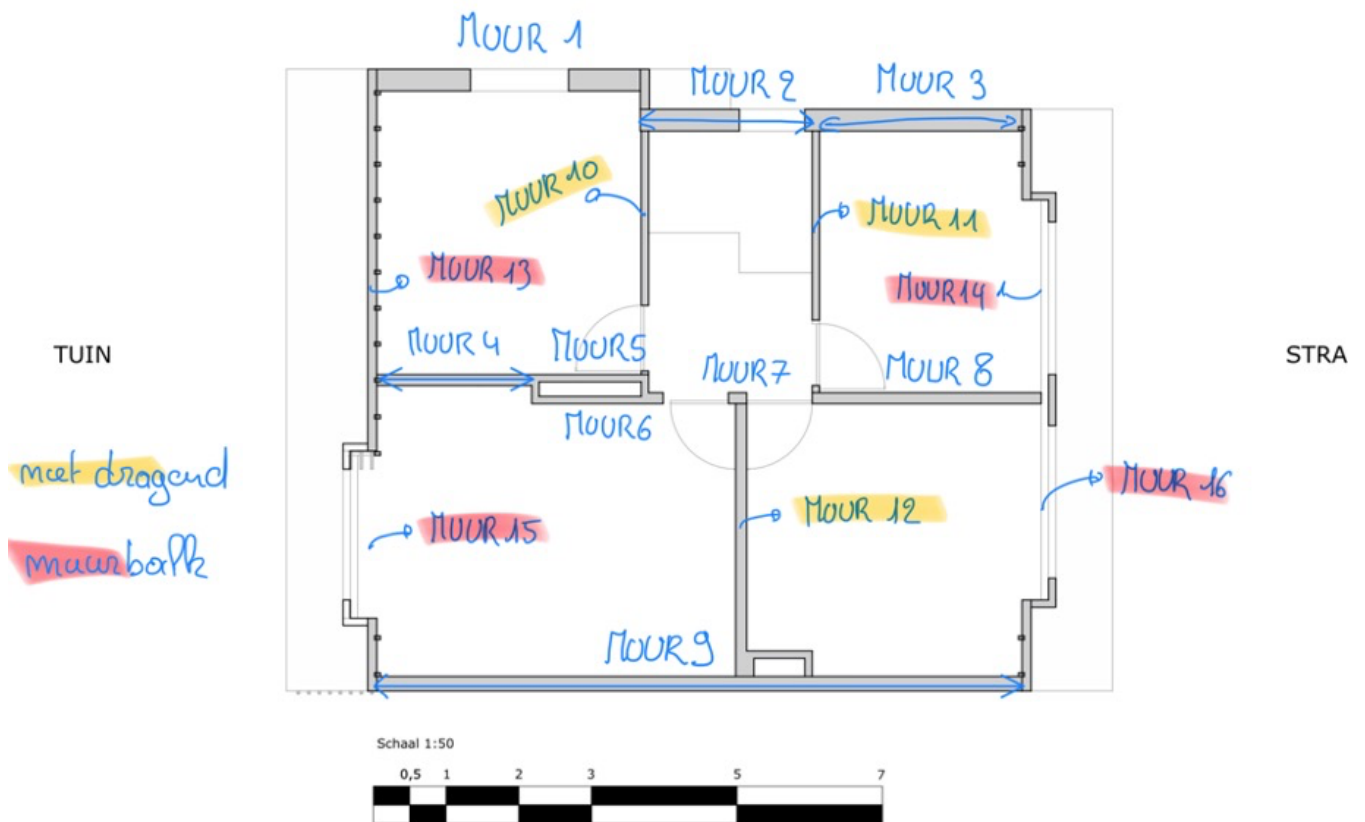
---

De krachtsafdracht is bepaald voor volgende indeling. In de lastendaling zijn de resulterende belasting begroot ter hoogte van de bovenzijde van de muren van het gelijkvloers. Op onderstaande figuur wordt een onderscheid gemaakt tussen muren met een **dragende functie (rood)** en deze met een **niet dragende functie (geel)**.

### Controleer de lastendaling

Alvorens het rekenblad verder aan te vullen, is het belangrijk dat met de correcte uitgangspunten gewerkt wordt. Controleer aldus je resulterende krachten. Bekijk in de lastendaling of de **nuttige last** van  $2\text{ kN/m}^2$  werd meegenomen, alsook de sneeuwlast en in welke situatie (*oud* of *nieuw*) de lasten zijn doorgerekend.

- md""
- !!! danger "Controleer de lastendaling"
- Alvorens het rekenblad verder aan te vullen, is het belangrijk dat met de correcte uitgangspunten gewerkt wordt. Controleer aldus je resulterende krachten. Bekijk in de lastendaling of de **\*\*nuttige last\*\*** van  $2\text{ kN/m}^2$  werd meegenomen, alsook de sneeuwlast en in welke situatie (*\*oud\** of *\*nieuw\**) de lasten zijn doorgerekend.
- ""



## Probleemstelling: Hyperstatische ligger met 1 tussensteunpunt

Hyperstatische ligger met 1 tussensteunpunt, 2 variabele lijnlasten en 1 puntlast. De puntbelasting is afkomstig van **profiel 1** en **profiel 2**, het samenstel uit hun reactiekrachten ter hoogte van dit steunpunt. Uit de berekening moet blijken dat de kracht direct wordt opgenomen door het steunpunt indien het zich  $\infty$  stijf gedraagt. In realiteit heeft het steunpunt een axiale stijfheid, deze wordt becijferd en meegenomen in de berekening.

### Veerstijfheid van het steunpunt

Om enige veiligheid in de berekening mee te nemen, wordt het tussensteunpunt als een veer gemodelleerd, hierbij is de volgende wet van kracht:  $F = k \cdot v$  waarbij  $k$  voor de veerconstante staat, die op zich gelijk is aan  $k = EA/L$ , de axiale stijfheid van de ondersteunende kolom. Een vork van stijfheden wordt toegepast in de berekening, waarbij de axiale stijfheid wordt vermenigvuldigd met  $[1/\sqrt{2}; 1; \infty]$ .

naam = "Profiel 5"

• naam = "Profiel 5"

Naam van het profiel; naam = Profiel 5

Lijst met beschikbare profielen: 

HE 220 B

 in kwaliteiten 

S235

Lijst met beschikbare kolommen: 

SHS 120/6.3

 in kwaliteiten 

S235

	name	G	b	h	tw	tf	Wely	ly
1	"IPE O 270"	42.3	136.0	274.0	7.5	12.2	507.0	6947.0
2	"IPE A 300"	36.5	150.0	297.0	6.1	9.2	483.0	7173.0
3	"HE 180 M"	88.9	186.0	200.0	14.5	24.0	748.3	7483.0
4	"HE 240 A"	60.3	240.0	230.0	7.5	12.0	675.0	7763.0
5	"HE 260 AA"	54.1	260.0	244.0	6.5	9.5	654.1	7980.0
6	"HD 260 x 54,1"	54.1	260.0	244.0	6.5	9.5	654.1	7980.0
7	"HE 200 C"	81.9	203.0	210.0	12.0	20.0	764.7	8029.0
8	"HE 220 B"	71.5	220.0	220.0	9.5	16.0	735.5	8090.0
9	"IPE 300"	42.2	150.0	300.0	7.1	10.7	557.0	8356.0
10	"IPE O 300"	49.3	152.0	304.0	8.0	12.7	657.5	9994.0

ligger = (naam = "HE 220 B", kwaliteit = "S235")

•

ligger = (

•

naam = "HE 220 B",

•

kwaliteit = "S235"

•

)

kolom = (naam = "SHS 120/6.3", kwaliteit = "S235")

•

kolom = (

•

naam = "SHS 120/6.3",

•

kwaliteit = "S235"

•

)

	check	L	V	M	a
1	:GGT	5.4	(-37.552, 32.218)	(-18.427, 17.915)	(-0.002, 0.001)
2	:GGT_K	5.4	(-43.091, 37.188)	(-21.237, 20.882)	(-0.002, 0.001)
3	:UGT	5.4	(-60.735, 51.469)	(-29.531, 28.847)	(-0.002, 0.002)

## Opmerking

Bij de controle in **UGT** wordt de momentweerstand niet verminderd in functie van de dwarskracht. Er wordt op toegezien dat de Check 4 de waarde van 0.50 niet overschrijdt. Indien de *Unity Check* groter is, dan grijpen we terug naar NBN EN 1993 om een aangepaste controle uit te voeren.

	check	R1_maximum	R2_maximum	R3_minimum
1	:GGT	24.111	24.47	-196.122
2	:GGT_K	27.972	28.199	-234.511
3	:UGT	38.653	40.133	-328.105

## Controle

Controle van de voorwaarden in **GGT** en **UGT**. Bepalend zijn in het desbetreffende geval de doorsnedecontroles in **GGT**. Geen stabiliteitscontrole (*Torsional Lateral Buckling, Web Crippling, ...*) zijn momenteel uitgevoerd.

Definitie (zie ook NBN B03-003):

- $\delta_0$ : tegenpijl balk in onbelaste toestand
- $\delta_1$ : ogenblikkelijke verandering t.g.v. perm. belastingen
- $\delta_2$ : toename onder invloed van variabele belasting (kar. geval)
- $\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_0$

Controles in **GGT**

1. **Check 1**: Max 80% van  $f_{yd}$  in de meest getrokken/gedrukte vezel
2. **Check 2**: Vervormingen van de ligger beperkt tot  $L/500$  voor  $\delta_2$  en  $L/400$  voor  $\delta_{max}$ .
  - Toegelaten vervorming  $v_{lim}$  en optredende  $v_{max}$  in **GGT** Karakteristiek

Controles in **UGT**

3. **Check 3**: Doorsnedecontrole  $UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}$  met  $M_{Rd} = W_{el,y} f_{yd}$
4. **Check 4**: Dwarskrachtcontrole  $UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}}$  met  $V_{Rd} = A_V \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$

check1 = #1 (generic function with 1 method)

```
• check1 = (t, n) -> UC(md"$\frac{\sigma_{s}}{0.8 f_{yd}}$", t, n)
```

check2 = #3 (generic function with 1 method)

- check2 = (t, n) -> UC(md"\$\dfrac{v\_{\max}}{v\_{\lim}}\$", t, n)

check3 = #5 (generic function with 1 method)

- check3 = (t, n) -> UC(md"\$\dfrac{M\_{\text{Ed}}}{M\_{\text{Rd}}}\$", t, n)

check4 = #7 (generic function with 1 method)

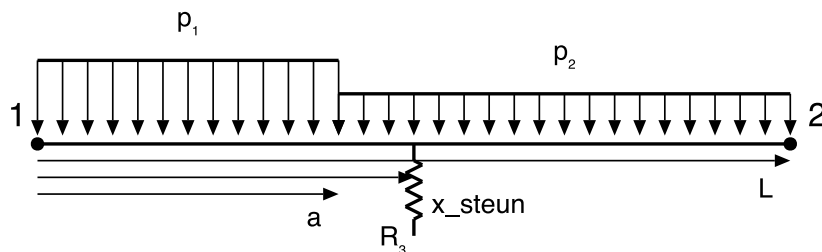
- check4 = (t, n) -> UC(md"\$\dfrac{V\_{\text{Ed}}}{V\_{\text{Rd}}}\$", t, n)

## Beschrijving belastingsschema

Definiër de randvoorwaarden of *Boundary Conditions* (BC). Voor een **verdeelde belasting** geef je de parameters  $a$ ,  $b$ ,  $L$  en  $p$  in waarbij een *positieve* waarde van  $p$  een neerwaartse belasting is. Voor een **puntbelasting** geef je de parameters  $a$ ,  $L$  en  $p$  in. Ook de stijfheid  $EI$ .

In het desbetreffende geval waarbij er **twee verdeelde belastingen** aangrijpen naast elkaar en een puntlast ter hoogte van het steunpunt, herleidt het aantal paramaters zich tot  $a$ ,  $x_{\text{steun}}$ ,  $L$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  en  $F$ . De ondersteuning ter hoogte van het tussensteunpunt wordt vervangen door een kracht  $R_3$ , een kracht die afhankelijk is van de vervorming ter hoogte van het steunpunt  $v_{x_{\text{steun}}}$ . Mits het opleggen van een bijkomende kinematische randvoorwaarde, dat de vervorming er ter hoogte van dit punt gelijk moet zijn aan de verhouding tussen de te berekenen kracht  $R_3$  en de axiale stijfheid, kan een oplossing bekomen worden voor het belastingsschema.

$$R_3 = \frac{EA}{L} v(x_{\text{steun}}) \longrightarrow v(x_{\text{steun}}) = \frac{L}{EA} R_3$$



### Te definiëren parameters

In de tabel met de **randvoorwaarden** (rvw) geef je de parameters  $a$ ,  $x_{\text{steun}}$ ,  $L$ ,  $p_1$  en  $p_2$  in, alsook de grenstoestand (:UGT of :GGT). De parameters die je moet invullen volgen uit de **generalisering** dat in een volgende paragraaf is opgesteld.

Definieer in onderstaande tabel de verschillende belastinggevallen

```
geom = (a = 3.46, x_steun = 3.36, L = 5.4)
```

```
• geom = (  
•   a = 5.40 - 1.94,  
•   x_steun = 5.40 - 2.04,  
•   L = 5.40  
• )
```

```
opp_badkamer = 15.209999999999999
```

```
• opp_badkamer = 3.9 * 3.9 # m2
```

```
opp_kamer3 = 20.8
```

```
• opp_kamer3 = 5.2 * 4 # m2
```

```
verh_m13_1 = 0.49743589743589745
```

```
• verh_m13_1 = (geom[:L] - geom[:a]) / 3.9 # Verhouding deel 1 t.o.v. muur 13
```

```
verh_m15_2 = 0.86500000000000001
```

```
• verh_m15_2 = geom[:a] / 4 # Verhouding deel 2 t.o.v. muur 15
```

```
belastingsgevallen =
```

	naam	waarde	beschrijving
1	"g1"	13.9958	"Perm. last - lastendaling"
2	"g2"	25.1465	"Perm. last - lastendaling"
3	"gp"	0.715	"Perm. last - profiel"
4	"q1_vloer"	3.0264	"Var. last - nuttige overlaster"
5	"q2_vloer"	6.47712	"Var. last - nuttige overlaster"
6	"q1_sneeuw"	1.99472	"Var. last - sneeuwlast"
7	"q2_sneeuw"	3.46865	"Var. last - sneeuwlast"
8	"p12ggf_f"	124.729	"GGT Frequent - Afdracht profiel 1 & 2"
9	"p12ggf_k"	152.358	"GGT Karakteristiek - Afdracht profiel"
10	"p12ugt"	213.312	"UGT - Afdracht profiel 1 & 2"

Definieer in onderstaande tabel de verschillende combinaties. Voor **GGT** wordt gerekend met het  $\psi_1$  gelijk aan 0.5 voor de **nuttige overlaster** in de *frequente* combinatie, dit volgens Categorie A volgens NBN EN 1990.

combinaties =

	check	naam	formule
1	:GGT	"p1"	"g1 + gp + 0.5 * q1_vloer"
2	:GGT_K	"p1"	"g1 + gp + q1_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"
3	:UGT	"p1"	"1.35 * (g1 + gp) + 1.5 * (q1_vloer +
4	:GGT	"p2"	"g2 + gp + 0.5 * q2_vloer"
5	:GGT_K	"p2"	"g2 + gp + q2_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"
6	:UGT	"p2"	"1.35 * (g2 + gp) + 1.5 * (q2_vloer +
7	:GGT	"F"	"p12ggt_f"
8	:GGT_K	"F"	"p12ggt_k"
9	:UGT	"F"	"p12ugt"

resultaatklasse =

	check	naam	formule	uitkomst
1	:GGT	"p1"	"g1 + gp + 0.5 * q1_vloer"	16.224
2	:GGT_K	"p1"	"g1 + gp + q1_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"	18.7346
3	:UGT	"p1"	"1.35 * (g1 + gp) + 1.5 * (q1_vloer +	25.8953
4	:GGT	"p2"	"g2 + gp + 0.5 * q2_vloer"	29.1
5	:GGT_K	"p2"	"g2 + gp + q2_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"	33.336
6	:UGT	"p2"	"1.35 * (g2 + gp) + 1.5 * (q2_vloer +	47.2302
7	:GGT	"F"	"p12ggt_f"	124.729
8	:GGT_K	"F"	"p12ggt_k"	152.358
9	:UGT	"F"	"p12ugt"	213.312

maatgevend =

	check	p1	p2	F
1	:GGT	16.224	29.1	124.729
2	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358
3	:UGT	25.8953	47.2302	213.312



rvw =

	check	p1	p2	F	a	x_steun	L
1	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4
2	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4
3	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4

Twee hulpvariabelen voor later...

```
isGGT = BitVector: [true, false, false]
```

```
isUGT = BitVector: [false, false, true]
```

Voor de vervorming en hoekverdraaiing moet de stijfheid in acht genomen worden

## Eigenschappen van het profiel

Eigenschappen van het gekozen profiel - type HE 220 B

Haal informatie van het profiel op en bewaar het in info

profiel =

	name	G	h	b	tw	tf	r	hi	mor
1	"HE 220 B"	71.5	220.0	220.0	9.5	16.0	18.0	188.0	

buigstijfheid = 16989.0

```
• buigstijfheid = 210000 * (profiel[!, "Iy"] |> first) / 10^5 # kNm2
```

f\_yd = 235.0

W\_el = 735.5

M\_Rd = 172.8425

```
• M_Rd = W_el * f_yd / 1000 # kNm
```

V\_Rd = 656.12000000000001

```
• V_Rd = (profiel[!, "Avz"] |> first) * f_yd / 10 # kN
```

## Keuze steun

De stijfheid is bepaald uit de materiaal karakteristieken van de de steun.

Keuze = SHS 120/6.3

steun =

	name	b	t	ro	ri	G	P	A	more
1	"SHS 120/6.3"	120	6.3	9.4	6.3	22.2	0.464	2823	

A = 2823

• `A = steun[!, :A] |> first # mm2`

E = 210000

• `E = 210_000 # N/mm2 of 106 N/m2`

L\_kolom = 2.8

• `L_kolom = 2.8 # m`

k = 211725.0

• `k = E * A / L_kolom / 1000 # kN/m`

## Oplossing belastingsschema

Met behulp van het **superpositiebeginsel** generaliseren we het probleem door een samenstel van de effecten,  $V$ ,  $M$ ,  $\alpha$  en  $v$ , door de afzonderlijke aangrijpende belastingen te nemen.

### Opgepast!

Bij het gebruiken van de syntax `R11(deel...)` moet je opletten hoe `deel` is opgebouwd, immers worden de substituties niet gelijktijdig uitgevoerd, maar één voor één, en telkens wordt de formule geëvalueerd en vereenvoudigd. Dus pas je  $a \Rightarrow b$  ( $a$  naar  $b$ ) aan en dan  $b \Rightarrow L$  ( $b$  naar  $L$ ), dan wordt de eerder omzetting dus ook verder doorgevoerd.

$(p_1, p_2, R_3, x_{steun})$

• `p1, p2, R3, x_steun = symbols("p_1 p_2 R_3 x_{steun}", real=true)`

`deel1 = ( a , b , p )`

$\Rightarrow 0$

$\Rightarrow a \Rightarrow p_1$

$$\text{deel2} = (b, p)$$

$$\Rightarrow L \Rightarrow p_2$$

$$\text{deel3} = (a, F)$$

$$\Rightarrow x_{\text{steun}} \Rightarrow F$$

Omdat de ligger **hyperstatisch** is, wordt er *gesneden* naar het steunpunt en wordt een fictieve kracht  $R_3$  in rekening gebracht, deze kracht wordt als een externe belasting ingerekend

$$\text{deel4} = (a, F)$$

$$\Rightarrow x_{\text{steun}} \Rightarrow R_3$$

## Reactiekrachten

### Opstellen vergelijkingen

Bij het opstellen van de vergelijkingen maak je gebruik van de functies  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $V_1$ ,  $M_1$ ,  $\alpha_1$  en  $v_1$  voor **gespreide lasten** en van de formules  $R_{21}$ ,  $R_{22}$ ,  $V_2$ ,  $M_2$ ,  $\alpha_2$  en  $v_2$  voor een **geconcentreerde last**

$$R_1 =$$

$$\frac{F(L - x_{\text{steun}})}{L} + \frac{R_3(L - x_{\text{steun}})}{L} - \frac{ap_1(-2L + a)}{2L} + \frac{p_2(-L + a)^2}{2L}$$

$$\bullet R_1 = R_{11}(\text{deel1}...) + R_{11}(\text{deel2}...) + R_{21}(\text{deel3}...) + R_{21}(\text{deel4}...)$$

$$R_2 =$$

$$\frac{Fx_{\text{steun}}}{L} + \frac{R_3x_{\text{steun}}}{L} + \frac{a^2p_1}{2L} + \frac{p_2(L^2 - a^2)}{2L}$$

$$\bullet R_2 = R_{12}(\text{deel1}...) + R_{12}(\text{deel2}...) + R_{22}(\text{deel3}...) + R_{22}(\text{deel4}...)$$

## Dwarskracht en momenten

Oplossing neerschrijven van de dwarskracht en het buigend moment

V =

$$-\frac{F(1 - \theta(t - x_{steun}))(L - x_{steun})}{L} + \left(F - \frac{F(L - x_{steun})}{L}\right)(-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun})) -$$

$$\bullet V = V1(deel1...) + V1(deel2...) + V2(deel3...) + V2(deel4...)$$

M =

$$\frac{Ft(1 - \theta(t - x_{steun}))(L - x_{steun})}{L} + \frac{Fx_{steun}(L - t)(-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun}))}{L} + \frac{R_3t(1 - \theta(t - x_{steun}))}{L}$$

$$\bullet M = M1(deel1...) + M1(deel2...) + M2(deel3...) + M2(deel4...)$$

## Hoekverdraaiing en doorbuiging

Oplossing neerschrijven van de hoekverdraaiing en de doorbuiging

$\alpha$  =

$$\frac{(1 - \theta(t - x_{steun}))\left(\frac{t^2(FL - Fx_{steun})}{2L} + \frac{-2FL^2x_{steun} + 3FLx_{steun}^2 - Fx_{steun}^3}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun}))}{EI}$$

$$\bullet \alpha = \alpha1(deel1...) + \alpha1(deel2...) + \alpha2(deel3...) + \alpha2(deel4...)$$

v =

$$\frac{(1 - \theta(t - x_{steun}))\left(\frac{t^3(FL - Fx_{steun})}{6L} + \frac{t(-2FL^2x_{steun} + 3FLx_{steun}^2 - Fx_{steun}^3)}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun}))}{EI}$$

$$\bullet v = v1(deel1...) + v1(deel2...) + v2(deel3...) + v2(deel4...)$$

## Maximale interne krachten

Maximale interne krachten en hun voorkomen ( $x$  abscis)

### lambdify

lambdify wordt gebruikt om de formules om te zetten van hun SymPy vorm naar een pure Julia vorm

Substitueer alle parameters en los op naar  $R_3$

R3\_opl =

$$-8FL^2x_{steun}^2\theta(-L + x_{steun}) + 8FL^2x_{steun}^2 + 16FLx_{steun}^3\theta(-L + x_{steun}) - 16FLx_{steun}^3 - 8L$$

vergelijking = #9 (generic function with 1 method)

```
• vergelijking = rvw -> Eq.(  
•   v(  
•     t=>x_steun, # Evalueer de vervorming ter hoogte van x_steun  
•     Dict(collect(keys(rvw)) .|> eval .=> collect(values(rvw)))...,  
•     EI=>buigstijfheid # Substitueer de buigstijfheid van de balk  
•   ),  
•   R3 ./ (k * [1/sqrt(2), 1, oo]) # De vervorming ter hoogte van de steun  
•   (t=x_steun) = R3 / k met k = EA/L  
• )
```

rvw\_volledig =

	check	p1	p2	F	a	x_steun	L	R3
1	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4	-188.737
2	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4	-190.842
3	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4	-196.122
4	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4	-225.68
5	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4	-228.197
6	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4	-234.511
7	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4	-315.75
8	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4	-319.272
9	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4	-328.105

fn (generic function with 1 method)

```
• #fn = r -> (i -> lambdify(i(mapping(r)...)))  
• function fn(r)  
•   sol = Dict(collect(keys(r)) .|> eval .=> collect(values(r)))  
•   return i -> lambdify(i(  
•     sol...,  
•     EI => buigstijfheid  
•   ))  
• end
```

rnd = #1 (generic function with 1 method)

Onderstaande tabel bevat de **gesubstitueerde** generieke oplossingen

opl =

	check	p1	p2	F	a	x_steun	L	R3	V	M
1	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4	-188.737	#101	#101
2	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4	-190.842	#101	#101
3	:GGT	16.224	29.1	124.729	3.46	3.36	5.4	-196.122	#101	#101
4	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4	-225.68	#101	#101
5	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4	-228.197	#101	#101
6	:GGT_K	18.7346	33.336	152.358	3.46	3.36	5.4	-234.511	#101	#101
7	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4	-315.75	#101	#101
8	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4	-319.272	#101	#101
9	:UGT	25.8953	47.2302	213.312	3.46	3.36	5.4	-328.105	#101	#101

Hieronder wordt een **overzicht tabel** weergegeven, waarbij de minimum en maximum waardes van de verschillende effecten, zijnde  $V$ ,  $M$ ,  $\alpha$  en  $v$  worden weergegeven

overzicht =

	check	L	V	M	$\alpha$	$v$
1	:GGT	5.4	(-37.552, 32.218)	(-18.427, 17.915)	(-0.002, 0.001)	(-0.002, 0.001)
2	:GGT_K	5.4	(-43.091, 37.188)	(-21.237, 20.882)	(-0.002, 0.001)	(-0.002, 0.001)
3	:UGT	5.4	(-60.735, 51.469)	(-29.531, 28.847)	(-0.002, 0.002)	(-0.002, 0.002)

## Maak grafieken aan

minmax (generic function with 1 method)

```
• grafieken = combine(  
•   groupby(opl, :check),  
•   AsTable([:V, :M, :α, :v]) => (  
•     r -> NamedTuple{(:V, :M, :α, :v)}(minmax.(collect(pairs(r))))  
•   ) => [:V, :M, :α, :v]  
• )
```

grafiek (generic function with 1 method)

# Controle

Aftoetsen van de interne krachten en vervormingen

## Controles

Maak gebruik van *enumerate* Check met waarde *false* of *true*.

Check(true) resulteert in de uitdraai: OK::Check = 1

Check(false) resulteert in de uitdraai: NOK::Check = 0

controle (generic function with 1 method)

```
• function controle(r::NamedTuple)
•   checks = Array{Union{Missing, UC}}(missing, 4)
•   if r.check == :GGT
•       # Check 1 - Controleer de spanning in het staal
•       M_ggt = maximum(r.M .|> (abs)) # kNm
•       σ_ggt = (M_ggt / W_el) * 1000 # MPa
•       checks[1] = check1(σ_ggt, 0.8 * f_yd)
•       # Check 2 - Controleer de doorbuiging van de balk
•       v_lim = r.L / 500 * 1000 # mm
•       v_max = maximum(r.v .|> (abs)) * 1000 # mm
•       checks[2] = check2(v_max, v_lim)
•   elseif r.check == :UGT
•       # Check 3 - Controle doorsnede
•       M_Ed = maximum(r.M .|> (abs))
•       checks[3] = check3(M_Ed, M_Rd)
•       # Check 3 - Controle doorsnede
•       V_Ed = maximum(r.V .|> (abs))
•       checks[4] = check4(V_Ed, V_Rd)
•   end
•   return checks
• end
```

# Achterliggende berekeningen

Hieronder wordt de algemene uitwerking van de balkentheorie behandeld.

## Dependencies en hulpfuncties

Hieronder worden de *dependencies* geladen en de hulpfuncties gedefinieerd

```
• using PlutoUI , ImageView , Images , Conda , PyCall , SymPy , Roots ,
  Plots , HTTP , JSON , Luxor , DotEnv , SQLite , DataFrames , UUIDs ,
  Underscores
```

Laad de *environment variables* met `DotEnv.config()`

```
db = SQLite.DB("assets/db/db.sqlite")
```

## Start de plotly backend

```
PlotlyBackend()
```

- `plotly()`

## Herschaal het font

- `begin`
- `Plots.scalefontsizes()` *# Reset the font*
- `Plots.scalefontsizes(2/3)` *# Make the font 2 times smaller*
- `end`

Symbolische notatie wordt gehanteerd om de basis op te stellen. Het opstellen van de vergelijken doen we via `SymPy`, bekend vanuit **Python**. Het pakket kun je aanroepen via `PyCall`, wat we ook zullen doen voor enkele functies, maar kan ook via `SymPy.jl` dat wat *Julia* specifieke syntax toevoegd om gebruik te maken van het pakket. Doordat in de *backend* verbinding wordt gelegd met een *Python* omgeving, is snelheid beperkt:

`SymPy` oproepen via `PyCall` doe je als volgt:

```
import Pkg; Pkg.add("Conda")
import Pkg; Pkg.add("PyCall")
# Install SymPy using Conda
using Conda, PyCall
Conda.add("sympy")
# PyCall uses the python interpreter included in the Conda.jl package
sympy = pyimport("sympy")
```

Naast bovenstaande roepen we ook `SymPy.jl` op om gebruik te maken van `SymPy` via *Julia* specifieke syntax:

```
import Pkg; Pkg.add("SymPy")
```

`_heaviside` (generic function with 1 method)

- `function _heaviside(t)`
- *# Bij t=0 is sign(t) = 0 of deze functie 0.5*
- `0.5 .* (sign.(t) .+ 1)`
- `end`

Ook `SymPy` heeft een methode `Heaviside` - functie te gebruiken via `PyCall`

```
heaviside = PyObject Heaviside
```

- *# Bij deze definitie is de waarde bij t=0 gelijk aan 'onbestaande'*
- `heaviside = sympy.functions.special.delta_functions.Heaviside`

`interval` (generic function with 1 method)

- `function interval(t, a, b)`
- *# Bij t=b wordt een waarde van 0.5 geretourneerd (limitatie)*
- `heaviside(t-a,0) .- heaviside(t-b,0)`
- `end`



Naast Heaviside is er ook een methode Piecewise via PyCall aan te roepen. Helaas ondersteunen deze functie wel geen Array calls, dus moet je de map functie in Julia gaan gebruiken om bijvoorbeeld te gaan plotten

```
piecewise = PyObject Piecewise
```

- *# Functie roep je aan met  $f(t) = \text{piecewise}((5, t < 2), (10, t \leq 4))$*
- `piecewise = sympy.functions.elementary.piecewise.Piecewise`

Eigen Check type met ook een eigen uitdraai

- `@enum Check OK=true NOK=false`

```
function Base.show(io::IO, mime::MIME"text/html", c::Check)
    id = UUIDs.uuid4().value
    color = (c == Check(false)) ? "crimson" : "yellowgreen"
    Base.write(io, """
    <style>
    .marked-$id {
        color: white;
        background-color: $(color);
        padding: 0 2px;
    }
    </style>
    <mark class="marked-$id">$(string(c))</mark>
    """)
end
```

Definieer een nieuwe type getiteld *Unity Check* of UC

```
struct TwoColumn{L, R}
    left::L
    right::R
end
```

```
function Base.show(io, mime::MIME"text/html", tc::TwoColumn)
    write(io, """<div style="display: flex; align-items: center; justify-content:
center;"><div>""")
    show(io, mime, tc.left)
    write(io, """/div><div style="flex: 1; padding-left: 2px;">""")
    show(io, mime, tc.right)
    write(io, """/div></div>""")
end
```

```

• function Base.show(io::IO, mime::MIME"text/html", uc::UC)
•     afronden = t -> (d -> round(d, digits=t))
•     subs = Dict(
•         "beschrijving" => uc.beschrijving.content[1].formula,
•         "waarde" => uc.waarde |> afronden(1),
•         "limiet" => uc.limiet |> afronden(1),
•         "uc" => (uc.waarde / uc.limiet) |> afronden(2)
•     )
•     format = raw"\text{UC} = beschrijving = \dfrac{waarde}{limiet} =
uc\rightarrow$"
•
•     Base.write(io, ""<div style="display: flex; align-items: center; justify-
content: center;"><div>""")
•     Base.show(io, mime, Markdown.parse(replace(format,
r"beschrijving|waarde|limiet|uc" => s -> subs[s])))
•     Base.write(io, ""</div><div style="flex: 1; padding-left: 2px;">""")
•     Base.show(io, mime, uc.check)
•     Base.write(io, ""</div></div>""")
• end

```

```

• mutable struct UC
•     beschrijving::Markdown.MD
•     waarde::Float64 # teller
•     limiet::Float64 # noemer
•     check::Check
•     UC(beschrijving, waarde, limiet) = (uc = new(beschrijving, waarde, limiet);
uc.check = Check(waarde / limiet <= 1); uc)
• end

```

# Interne krachswerking

## Superpositiebeginsel

Wanneer een lichaam onderworpen is aan verschillende krachswerkingen ( $F$ ,  $M$ ,  $\Delta T$  ...) mag men het effect ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ...) van elk van die belastingen, waarbij ze afzonderlijk op het lichaam inwerken, optellen of superponeren indien een aantal geldigheidsvoorwaarden vervuld zijn:

- De (veralgemeende) verplaatsingen zijn klein
- De materialen zijn lineair elastisch en kunnen met andere woorden door de wetten van *Hooke* worden beschreven
- Er is **geen** energiedissipatie in de verbindingen door wrijving

Gebruik `@syms` om *SymPy symbols* te definiëren of gebruik de functie `symbols`. De laatste optie heeft het voordeel dat je nadien je invoergegevens nog kan wijzigen. Bij het gebruik van `@syms` kan je dit niet langer. Ook heb je flexibiliteit over de naam bij het gebruik van `symbols`

# Steunpunten

Bepaal de krachten in de steunpunten door het momentenevenwicht uit te schrijven in de steunpunten. Het moment ter hoogte van de steunpunten is 0, dus uit dit gegeven bereken je eenvoudig de krachten ter hoogte van de steunpunten. Bij een **statisch** bepaalde constructie bepaal je dus in 1 tijd je reactiekrachten.

Hyperstatische constructie?

Een **hyperstatische** constructie kun je oplossen door het *snijden* in de krachten en het te vervangen door onbekende krachten. Je gaat door met *snijden* tot je een statisch bepaalde constructie bekomt. Bij de oplossing leg je nadien bijkomende beperkingen op. Ter hoogte van het steunpunt zal bijvoorbeeld de vervorming er gelijk moeten zijn aan 0 of de rotatie 0 indien je *gesneden* hebt in een momentvaste verbinding

## Kinematische randvoorwaarden

Leg de kinematische randvoorwaarden op om de constantes te gaan bepalen. Deze voorwaarden bestaan onderander uit  $v(t \Rightarrow 0) = 0$  en  $v(t \Rightarrow L) = 0$ . De ligter heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

Hyperstatische constructie?

Bij een **hyperstatische** constructie worden extra randvoorwaarden opgelegd. Zo zal bijvoorbeeld naar de verticale kracht van een steunpunt *gesneden* zijn en dien nu opgelegd te worden dat de vervorming er gelijk is aan 0.

## Oplossing basisschema's

Bepaal de dwarskrachten  $V(t)$  en momenten  $M(t)$  voor een eenvoudig opgelegde ligter met twee verdeelde belastingen. Nadien bepalen we ook de hoekverdraaiing  $\alpha(t)$  en de doorbuiging  $v(t)$ .

## Dwarskracht $V$ en buigend moment $M$

Berekening van de interne krachten. Bij een **statisch** bepaalde constructie zijn deze niet afhankelijk van de *stijfheid*, bij een **hyperstatische** constructie wel en volgt het dwarskrachtverloop pas uit het oplossen van een stelsel

## Hoekverdraaiing $\alpha$ en doorbuiging $v$

Deze worden berekend uit de kromming  $\chi$ .

We wensen de **vervormingen**  $v(t)$  te kennen van de ligger, hiervoor grijpen we terug naar de volgende theorie. De kromming  $\chi$  is gelijk aan de verhouding tussen het moment en de buigstijfheid, dit bij kleine vervormingen.

$$\chi = \frac{M}{EI} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2}$$

Merk op dat we hier  $t$  hanteren als indicatie voor de positie op de ligger.

De ligger wordt opgeknipt in een aantal delen, een *piecewise* functie. Elk deel wordt geïntegreerd. Constantes komen op de proppen die nadien via een stelsel bepaald dienen te worden. Voor elk deel wordt een **unieke** constante gedefinieerd.

$t =$

$t$

$(a, b, p, p_a, p_b, F, L, EI)$

## Schema 1. Verdeelde belasting $p$ van $a$ tot $b$

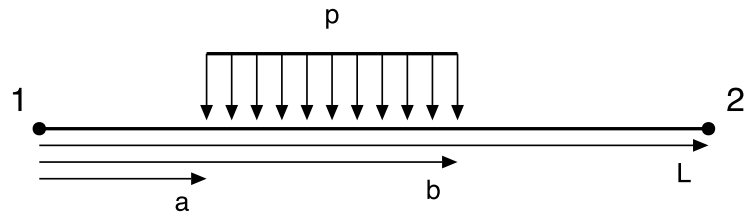
**Eenvoudig** opgelegde ligger, opwaartse kracht = positief (steunpunten). Aangrijpende kracht  $p$  is neerwaarts gericht.

### Toelichting

Dit is een speciaal geval van paragraaf §3 Variabele verdeelde belasting  $p_a$  van  $a$  tot  $p_b$  ter hoogte van  $b$ , waarbij  $p_a$  gelijk wordt gesteld aan  $p_b$ . De waarde van de verdeelde belasting wordt gelijk gesteld aan  $p$ . De *mapping* wordt vastgelegd in BC31, de *boundary condition* toegepast op §3 ter bekoming van de oplossing van §1

BC31 =  $( p_a , p_b )$

$\Rightarrow p \Rightarrow p$



Moment in de steunpunten = 0  $\rightarrow$  evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

**R11** =

$$\frac{p(a-b)(-2L+a+b)}{2L}$$

**R12** =

$$\frac{p(-a^2+b^2)}{2L}$$

## 1.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

**V1** =

$$\frac{p((a-b)(a+b)(\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) - (a-b)(\theta(-a+t) - 1)(2L-a-b) - (2L(b -$$

$$2L$$

## 1.2 Bepalen moment $M(t)$

**M1** =

$$\frac{p(t(a-b)(\theta(-a+t) - 1)(2L-a-b) + (L-t)(a-b)(a+b)(\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) -$$

$$2L$$

## 1.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

**$\alpha$ 1** =

$$\frac{p(-(a-b)((\theta(-L+t) - \theta(-b+t)))(4L^2a^2 - 4L^2b^2 - 12Lt(a^2 - b^2) + a^4 - b^4 + 6t^2(a^2 -$$

## 1.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

$v_1 =$

$$\frac{p(-(a-b)(t(\theta(-a+t))-1)(4L^2a^2-4L^2b^2-4La^3+4Lb^3+a^4-b^4+2t^2(-2La+2Lb$$

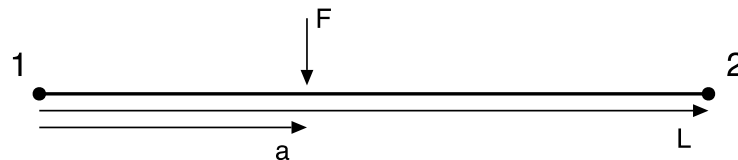
## 1.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

De kinematische randvoorwaarden hoeven echter niet meer opgelegd te worden, omdat de oplossing volgt uit de generieke situatie met een lineair variërende belasting  $p_a$  tot  $p_b$ .

## Schema 2. Puntlast $F$ ter hoogte van abscis $a$

**Eenvoudig** opgelegde ligger, reactiekracht opwaarts = positief, aangrijpende kracht neerwaarts = negatief



Moment in de steunpunten = 0  $\rightarrow$  evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

$R_{21} =$

$$\frac{F(L-a)}{L}$$

$R_{22} =$

$$\frac{Fa}{L}$$

## 2.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$-\frac{F(1-\theta(-a+t))(L-a)}{L} + \left(F - \frac{F(L-a)}{L}\right)(-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))$$

## 2.2 Bepalen moment $M(t)$

$$\frac{Fa(L-t)(-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))}{L} + \frac{Ft(1-\theta(-a+t))(L-a)}{L}$$

## 2.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

$$(C_1, C_2)$$

$$(1-\theta(-a+t))\left(C_1 + \frac{t^2(FL-Fa)}{2L}\right) + (-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))\left(C_2 + Fat - \frac{Fat^2}{2L}\right)$$

$$EI\alpha_2 =$$

$$(1-\theta(-a+t))\left(\frac{t^2(FL-Fa)}{2L} + \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}\right) + (-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))$$

$$\alpha_2 =$$

$$\frac{(1-\theta(-a+t))\left(\frac{t^2(FL-Fa)}{2L} + \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}\right) + (-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))\left(Fat - \frac{Fat^2}{2L}\right)}{EI}$$

## 2.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

$$(D_1, D_2)$$

$$(1-\theta(-a+t))\left(C_1t + D_1 + \frac{t^3(FL-Fa)}{6L}\right) + (-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))\left(C_2t + D_2 + \frac{F}{6L}\right)$$

$$EIv_2 =$$

$$(1-\theta(-a+t))\left(\frac{t^3(FL-Fa)}{6L} + \frac{t(-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3)}{6L}\right) + (-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))$$

$$v_2 =$$

$$\frac{(1-\theta(-a+t))\left(\frac{t^3(FL-Fa)}{6L} + \frac{t(-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3)}{6L}\right) + (-\theta(-L+t) + \theta(-a+t))\left(\frac{Fa^3}{6} + \frac{Fat^2}{2L}\right)}{EI}$$

## 2.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

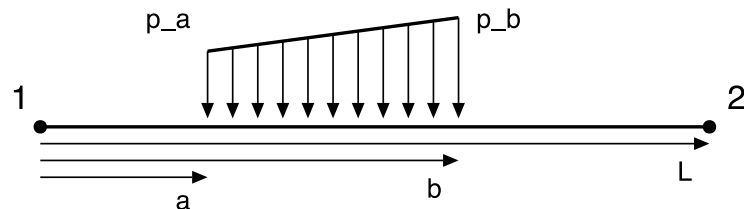
$$\mathbf{rvw2} = \left[ D_1, \frac{Ca - C_2a + D_2 - D_1}{L} + \frac{Fa^2}{2} + \frac{C_2Fa - Fa^2}{L}, C_2L + D_2 + \frac{FL^2a}{3}, C_1 - C_2 - Fa^2 + \frac{Fa^2}{2L} + \frac{a^2(FL - Fa)}{2L} \right]$$

$$\mathbf{opl2} = \text{Dict}( \quad D_2 \quad D_1 \quad C_1 \quad C_2 \quad )$$

$$\Rightarrow \frac{Fa^3}{6}, \Rightarrow 0, \Rightarrow \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}, \Rightarrow \frac{-2FL^2a - Fa^3}{6L}$$

## Schema 3. Variabele verdeelde belasting $p_a$ van $a$ tot $p_b$ ter hoogte van $b$

Eenvoudig opgelegde ligger, opwaartse kracht = positief (steunpunten). Aangrijpende kracht  $p_a$  en  $p_b$  is neerwaarts gericht.



Moment in de steunpunten = 0 → evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

R31 =

$$(-a + b) \left( \frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L}$$

R32 =

$$\frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L}$$

### 3.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( -(-a + b) \left( \frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) + \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) + (\theta(-a +$$

### 3.2 Bepalen moment $M(t)$



$$t(1 - \theta(-a + t)) \left( (-a + b) \left( \frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) + \left( t \left( (-a + b) \left( \frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) \right)$$

### 3.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

$$(C_1, C_2, C_3)$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( C_1 + \frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2a}{12L} \right)$$

$$EI\alpha^3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( \frac{t^2 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b +}{12L} \right.$$

$$\alpha_3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( \frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2p_a - 4b^2p_b)}{12L} + \frac{20L^2a^2p_a + 40L^2a^2p_b}{12L} \right)$$

### 3.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

$$(D_1, D_2, D_3)$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( C_1 t + D_1 + \frac{t^3(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2ab\eta)}{36L} \right)$$

**EIV3 =**

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b + 3Lap_a + 3Lap_b - 3Lbp_a - 3Lbp_b - a^2p_a - 2a^2p_b + 2abp_a + 2abp_b)}{36L} \right)$$

$$v_3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left( \frac{t^3(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2p_a - 4b^2p_b)}{36L} + \frac{t(20L^2a^2p_a + 40L^2a^2}{36L} \right.$$

### 3.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

$$rvw3 = [D_1, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad ]$$

$$opl3 =$$

$$Dict( \quad D_2 \quad C_3 \quad D_1 \quad D_3 \quad C_1 \quad C_2 \quad )$$

$$\Rightarrow \frac{-4a^5p_a - a^5p_b + 5a^4bp_a}{120a - 120b}, \Rightarrow \quad , \Rightarrow 0, \Rightarrow \quad , \Rightarrow \quad , \Rightarrow \quad$$

### Voorbeelden

### 3.4 Samenstel krachten

Samenstel van krachten uit **3.1**, **3.2** en **3.3**

# Theorie

---

## Virtuele arbeid

### Virtuele **rek**

Op een infinitesimaal deeltje van een staaf  $dx$  worden uitwendige normaalkrachten  $n$  opgelegd. Indien er geen samengang in het materiaal zou bestaan, dan wordt het mootje uiteengereten. Een virtuele, axiale verplaatsing  $\delta u$  wordt opgelegd, en een vervorming  $(\delta x)'$  of  $d\delta x/dx$  wat ook wel gelijk is aan  $\delta \varepsilon$  (virtuele **rek**) wordt aan de rechterzijde opgeteld bij de translatie.

$$-n \delta u + n (\delta u + \delta \varepsilon dx) + \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{u}_i = 0$$

### Virtuele **kromming**

Op een infinitesimaal deeltje van een staaf  $dx$  worden uitwendige krachtenkoppel  $m$  opgelegd. Indien er geen samengang in het materiaal zou bestaan, dan wordt het mootje uiteengereten. Een virtuele, axiale rotatie  $\delta \alpha$  wordt opgelegd, en een vervorming  $(\delta \alpha)'$  of  $d\delta \alpha/dx$  wat ook wel gelijk is aan  $\delta \chi$  (virtuele **kromming**) wordt aan de rechterzijde van de moot opgeteld bij de rotatie.

$$-m \delta \alpha + m (\delta \alpha + \delta \chi dx) + \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{u}_i = 0$$

Wens je bijvoorbeeld het moment te kennen ten gevolge van een last  $F$ , dan pas je het principe van virtuele arbeid toe waarbij je snijdt ter hoogte van het aangrijpingspunt van  $F$  en dit vervangt door een koppel met waarde  $M$  en een scharnier. De vervormingen zijn klein. De virtuele verplaatsing in  $C$  is gelijk aan  $x$ . Volgend evenwicht schrijven we uit.

$$F \cdot x = M \delta\theta_{AC} + M \delta\theta_{CB}$$

Omdat de vervormingen klein zijn, kunnen we volgende hanteren:

$$\delta\theta_{AC} = \arctan\left(\frac{x}{|AC|}\right) \stackrel{\text{kleine vervormingen}}{\approx} \frac{x}{|AC|}$$

Dus vergelijking kan omgevormd tot volgende oplossing:

$$F \cdot x = M \frac{x}{|AC|} + M \frac{x}{|CB|} = M \cdot x \left( \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|CB|} \right)$$

Vervang  $|AC|$  door  $a$  en  $|CB|$  door  $b$  en los op naar  $M$ :

$$M = F \cdot \frac{a b}{a + b}$$

Afhankelijk van het gegeven die je zoekt, ga je anders gaan snijden in je constructie

# Integralen en analogiën van Mohr

## Berekening volgens KOORDE

Bij de integralen van Mohr wordt de hoekverdraaiing en de vervorming berekend volgens een koorde tussen twee punten (dus onafh. van de elastica)

Berekenen **doorbuiging** ten opzichte van een koorde

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming:  $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Doorbuiging  $a$  in punt  $P$  t.o.v. koorde  $AB$
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde  $AB$ , eenvoudig opgelegd
4. Belast hulplichaam met kracht  $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken **moment** hulplichaam in  $P$

Definitie: De verticale verplaatsing van een punt  $P$ , gelegen tussen de punten  $A$  en  $B$  van een al dan niet doorgaande, al dan niet prismatische balk, en gemeten ten opzichte van de koorde  $AB$  in de belaste en dientengevolge vervormde stand, is gelijk aan het buigend moment in het punt  $P$  van een eenvoudig opgelegde hulpligger  $AB$ , die een fictieve, gespreide belasting draagt, waarvan de amplitude in ieder punt gelijk is aan het plaatselijke, gereduceerde moment in het oorspronkelijk gestel.

Berekenen **hoekverdraaiing** ten opzichte van een koorde

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming:  $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Hoekverdraaiing  $\alpha$  in punt  $P$  t.o.v. koorde  $AB$
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde  $AB$ , eenvoudig opgelegd
4. Belast hulplichaam met kracht  $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken **dwarskracht** hulplichaam in  $P$

Definitie: De wenteling van de raaklijn in een punt  $P$ , gelegen tussen de punten  $A$  en  $B$  van een al dan niet doorgaande, al dan niet prismatische balk, en gemeten ten opzichte van de koorde  $AB$  in de belaste en dientengevolge vervormde stand, is op het teken na gelijk aan de dwarskracht in het punt  $P$  van een eenvoudig opgelegde hulpligger  $AB$ , die een fictieve, gespreide belasting draagt, waarvan de amplitude in ieder punt gelijk is aan het plaatselijke, gereduceerde moment in het oorspronkelijke gestel.

# Stelling van Green

## Berekening volgens RAAKLIJN

Bij de stelling van *Green* wordt de hoekverdraaiing en de vervorming berekend volgens een raaklijn in een bepaald punt van de elastica

Elastische **verticale verplaatsing** van een doorsnede ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming:  $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Verplaatsing  $a$  in punt  $P$  t.o.v. doorsnede  $A$
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde  $AP$ , ingeklemd in  $A$
4. Belast hulplichaam met kracht  $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken het **moment** in  $A$  van het hulplichaam

Definitie: Om de elastische doorbuiging van een doorsnede  $P$  ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede  $A$  te bepalen, neemt men het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak tussen  $A$  en  $P$  om het punt waar men de verplaatsing wenst te kennen.

Elastische **draaiing** van een doorsnede ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming:  $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Draaiing  $\theta$  in punt  $P$  t.o.v. doorsnede  $A$
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde  $AP$ , ingeklemd in  $A$
4. Belast hulplichaam met kracht  $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken het **dwarskracht** in  $A$  van het hulplichaam / oppervlakte onder het gereduceerde momentenvlak

Definitie: De elastische draaiing van een doorsnede van een balk ten opzichte van een andere doorsnede wordt gegeven door de oppervlakte van het gereduceerde momentenvlak begrepen tussen beide doorsneden.

# Doorbuiging door dwarskrachten

## Bijkomende doorbuiging t.g.v. dwarskrachten

**Schuifspanningen**  $\tau_{xy}$  zijn vergezeld van glijdingen  $\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \rightarrow$  deze zijn **maximaal** t.h.v. de **staafas**, waarbij  $\tau_{max}$  gelijk is aan  $\frac{V_y S_{max}}{e_0 I_z}$  met  $S_{max}$  gelijk aan het statisch moment rond de staafas en  $e_0$  de breedte ter hoogte van de staafas.

Uitschrijven van bovenstaande vervorming waarbij de doorbuiging  $v_1$  een gevolg is van de dwarskracht  $V_y$

$$\frac{dv_1}{dx} = \gamma = \frac{\lambda V_y}{G A} = -\frac{\lambda}{G A} \cdot \frac{dM_z}{dx}$$

Bij een prismatische doorsnede resulteert dit in:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{\lambda p}{G A}$$

**Mohr en Greene:** analogieën van *Mohr* en stelling van *Greene* nog steeds toepasbaar, mits het gereduceerd moment wordt vervangen door bovenstaande formulering.