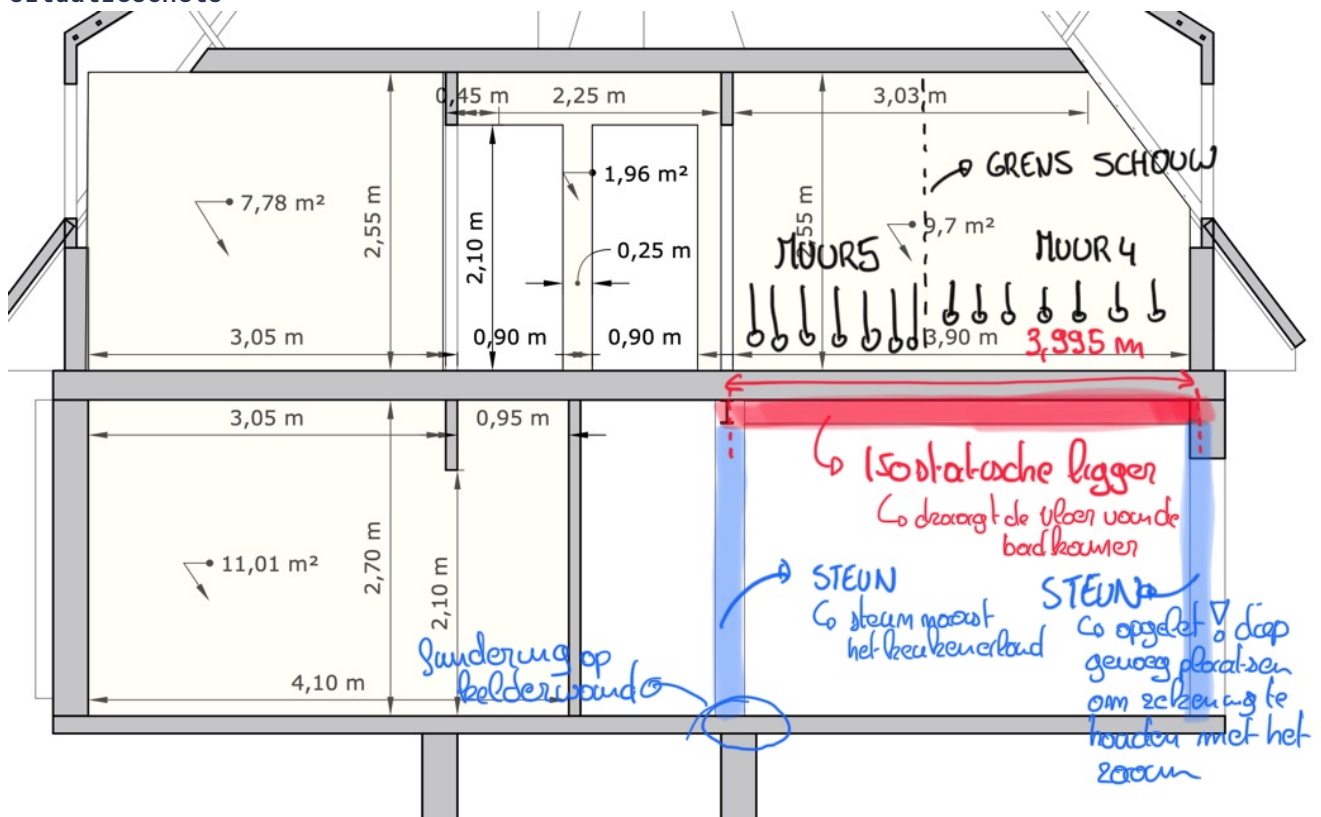


Berekening Profiel 1 - HE 220 B

Berekening van **Profiel 1**, een eenvoudig opgelegde ligger boven het keukeneiland. Het profiel ondersteunt de vloer van de badkamer en een deel van de dragende wand. Lasten zijn afkomstig van het dak tot het eerste verdiep, meer specifiek **muur 4** en **muur 5**. Er wordt gerekend met een **nuttige belasting** van 200kN/m^2 en een krachtsafdracht van de vloeroppervlaktes tussen de draagmuren (dus **krachtsafdracht** in **1 richting**)

situatieschets =



• situatieschets = `load("./assets/img/profiel_1.jpg")`

Berekening Profiel 1

Berekening Profiel 1 - HE 220 B

Indeling

Probleemstelling: Eenvoudig opgelegde ligger met uitkraging

Controle

Beschrijving belastingsschema

Eigenschappen van het profiel

Oplossing belastingsschema

Reactiekrachten

Dwarskracht en momenten

Hoekverdraaiing en doorbuiging

Maximale interne krachten

Maak grafieken aan

Controle

Achterliggende berekeningen

Dependencies en hulpfuncties

Interne krachtswerking

Steunpunten

Kinematische randvoorwaarden

Oplossing basisschema's

Dwarskracht V en buigend moment M

Hoekverdraaiing α en doorbuiging v

Schema 1. Verdeelde belasting p van a tot b

1.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

1.2 Bepalen moment $M(t)$

1.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

1.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

1.5 Kinematische randvoorwaarden

Schema 2. Puntlast F ter hoogte van abscis a

2.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

2.2 Bepalen moment $M(t)$

2.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

2.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

2.5 Kinematische randvoorwaarden

Schema 3. Variabele verdeelde belasting p_a van a tot p_b ter hoogte van b

3.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

3.2 Bepalen moment $M(t)$

3.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

3.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

3.5 Kinematische randvoorwaarden

Voorbeelden

Vb. Schema 1 - Verdeelde belasting p

Vb. Schema 2 - Puntbelasting F

Vb. Schema 3 - Lineair variërende lijnbelasting p_a tot p_b

3.4 Samenstel krachten

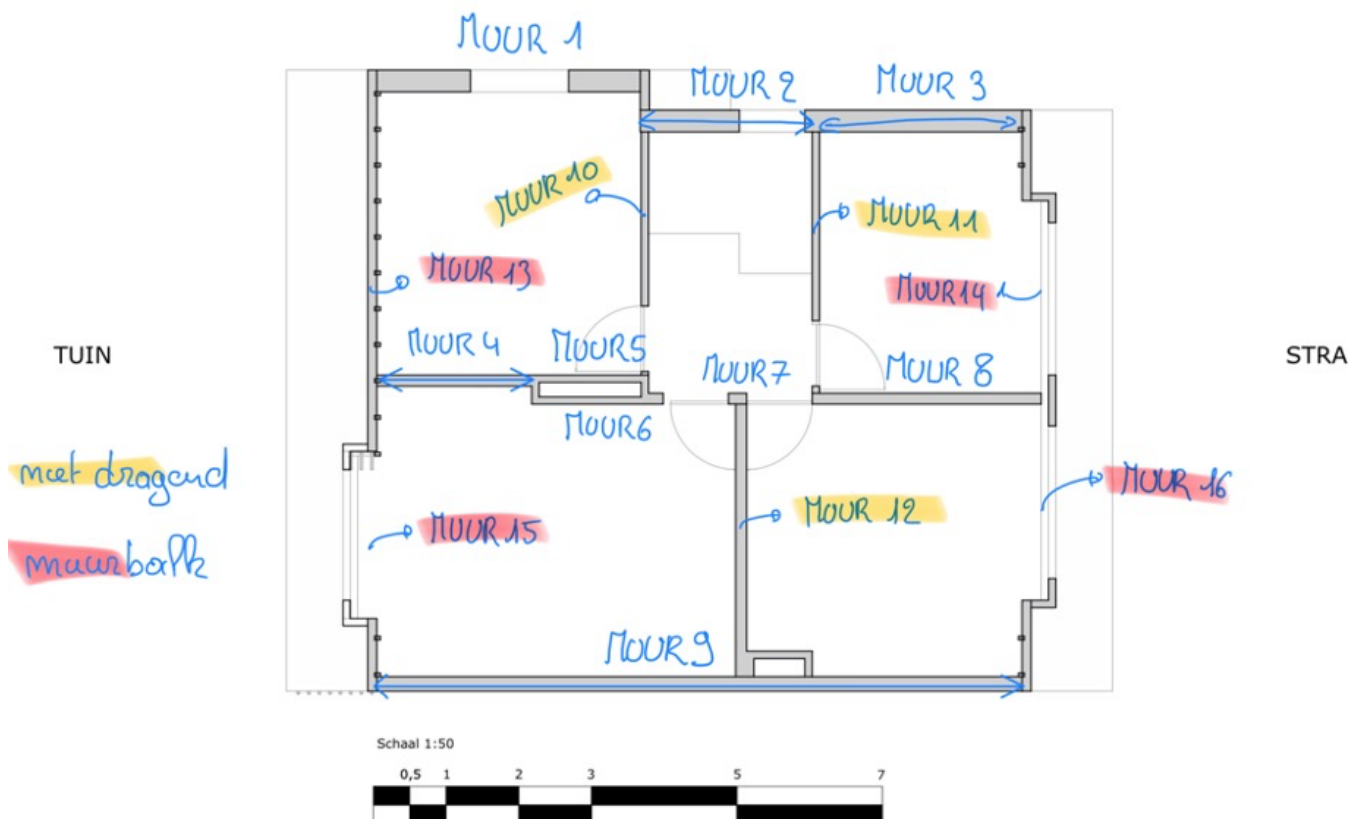
Theorie

Indeling

De krachtsafdracht is bepaald voor volgende indeling. In de lastendaling zijn de resulterende belasting begroot ter hoogte van de bovenzijde van de muren van het gelijkvloers. Op onderstaande figuur wordt een onderscheid gemaakt tussen muren met een dragende functie en deze met een niet dragende functie.

Controleer de lastendaling

Alvorens het rekenblad verder aan te vullen, is het belangrijk dat met de correcte uitgangspunten gewerkt wordt. Controleer aldus je resulterende krachten. Bekijk in de lastendaling of de **nuttige last** van $2kN/m^2$ werd meegenomen, alsook de sneeuwlast en in welke situatie (*oud* of *nieuw*) de lasten zijn doorgerekend.



Probleemstelling: Eenvoudig opgelegde ligger met uitkraging

Eenvoudig opgelegde ligger met een gedeeltelijke uitkraging en 3 verdeelde belastingen

naam = "Profiel 1"

- naam = "Profiel 1"

Naam van het profiel; naam = Profiel 1

Lijst met beschikbare profielen:

HE 220 B

Lijst met staalkwaliteiten:

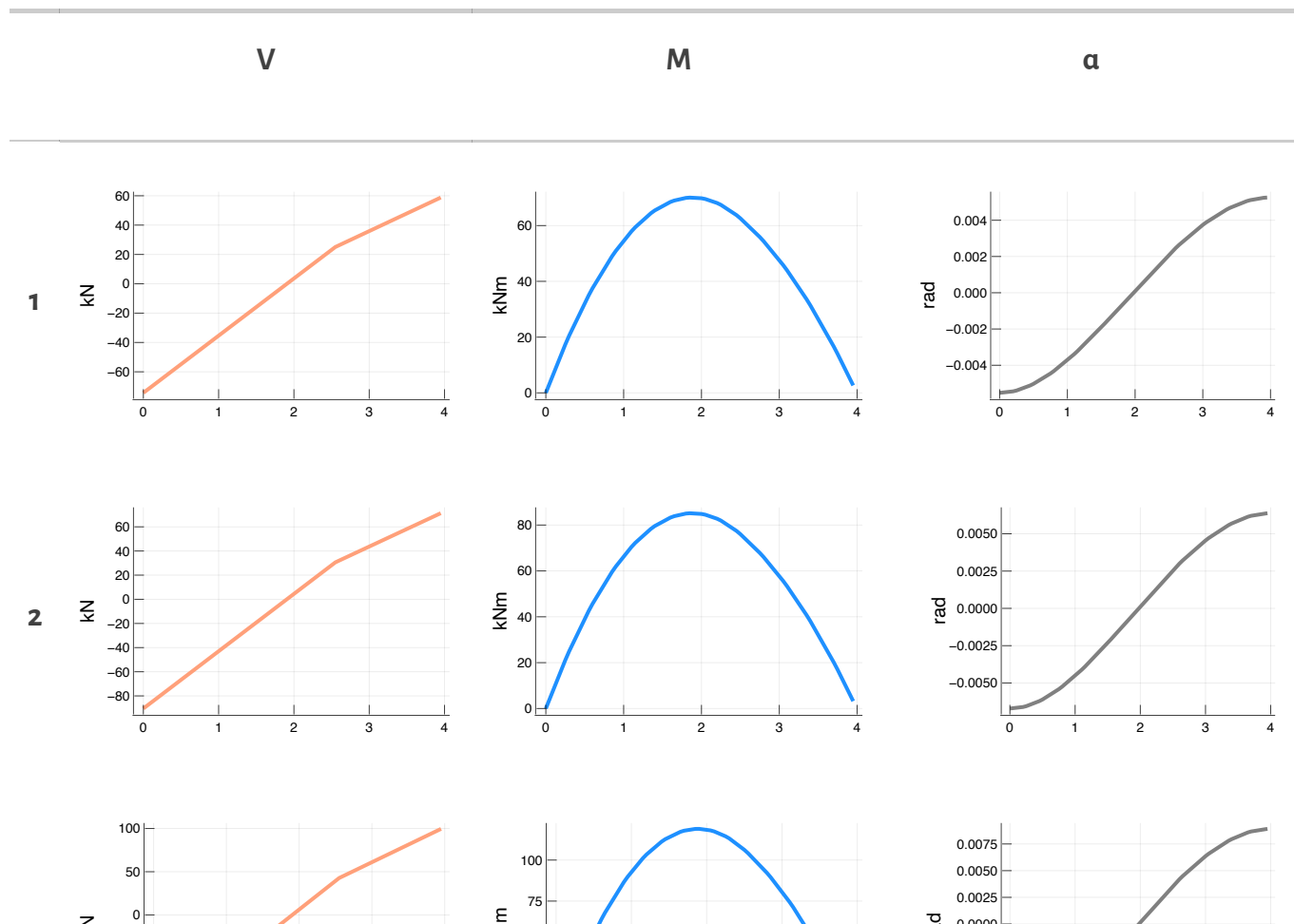
S235

	name	G	b	h	tw	tf	W _{ely}	I _y
1	"IPE 0 270"	42.3	136.0	274.0	7.5	12.2	507.0	6947.0
2	"IPE A 300"	36.5	150.0	297.0	6.1	9.2	483.0	7173.0
3	"HE 180 M"	88.9	186.0	200.0	14.5	24.0	748.3	7483.0
4	"HE 240 A"	60.3	240.0	230.0	7.5	12.0	675.0	7763.0
5	"HE 260 AA"	54.1	260.0	244.0	6.5	9.5	654.1	7980.0
6	"HD 260 x 54,1"	54.1	260.0	244.0	6.5	9.5	654.1	7980.0
7	"HE 200 C"	81.9	203.0	210.0	12.0	20.0	764.7	8029.0
8	"HE 220 B"	71.5	220.0	220.0	9.5	16.0	735.5	8090.0
9	"IPE 300"	42.2	150.0	300.0	7.1	10.7	557.0	8356.0
10	"IPE 0 300"	49.3	152.0	304.0	8.0	12.7	657.5	9994.0

ligger = (naam = "HE 220 B", kwaliteit = "S235")

- ligger = (
 - naam = "HE 220 B",
 - kwaliteit = "S235")

	check	L	V	M	α	v
1	:GGT	3.995	(-74.355, 57.586)	(0.0, 70.059)	(-0.006, 0.005)	(-0.007
2	:GGT_K	3.995	(-90.454, 69.833)	(0.0, 85.16)	(-0.007, 0.006)	(-0.008
3	:UGT	3.995	(-126.405, 97.554)	(0.0, 118.996)	(-0.009, 0.009)	(-0.011



check	nummer	unity check
1	:GGT "Check 1"	$UC = \frac{\sigma_s}{0.8 f_{yd}} = \frac{95.3}{188.0} = 0.51 \rightarrow OK$
2	:GGT "Check 2"	$UC = \frac{v_{max}}{v_{lim}} = \frac{7.0}{8.0} = 0.88 \rightarrow OK$
3	:UGT "Check 3"	$UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{119.0}{172.8} = 0.69 \rightarrow OK$
4	:UGT "Check 4"	$UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{126.4}{656.1} = 0.19 \rightarrow OK$

Opmerking

Bij de controle in **UGT** wordt de momentweerstand niet verminderd in functie van de dwarskracht. Er wordt op toegezien dat de Check 4 de waarde van 0.50 niet overschrijdt. Indien de *Unity Check* groter is, dan grijpen we terug naar NBN EN 1993 om een aangepaste controle uit te voeren.

Resulterende krachten ter hoogte van de steunpunten voor afdracht naar het profiel 5

	check	p1	p2	a	L	R1	R2
1	:GGT	39.455	24.085	2.473	3.995	74.355	59.874
2	:GGT_K	48.035	29.08	2.473	3.995	90.454	72.596
3	:UGT	67.1318	40.6043	2.473	3.995	126.405	101.412

Controle

Controle van de voorwaarden in **GGT** en **UGT**. Bepalend zijn in het desbetreffende geval de doorsnedecontroles in **GGT**. Geen stabiliteitscontrole (*Torsional Lateral Buckling*, *Web Crippling*, ...) zijn momenteel uitgevoerd.

Definitie (zie ook NBN B03-003):

- δ_0 : tegenpijl balk in onbelaste toestand
- δ_1 : ogenblikkelijke verandering t.g.v. perm. belastingen
- δ_2 : toename onder invloed van variabele belasting (kar. geval)
- $\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_0$

Controles in **GGT**

1. **Check 1**: Max 80% van f_{yd} in de meest getrokken/gedrukte vezel
2. **Check 2**: Vervormingen van de ligger beperkt tot $L/500$ voor δ_2 en $L/400$ voor δ_{max} .
 - Toegelaten vervorming v_{lim} en optredende v_{max} in **GGT** Karakteristiek

Controles in **UGT**

3. **Check 3**: Doorsnedecontrole $UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}$ met $M_{Rd} = W_{el,y} f_{yd}$
4. **Check 4**: Dwarskrachtcontrole $UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}}$ met $V_{Rd} = A_V \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$

check1 = #1 (generic function with 1 method)

- `check1 = (t, n) -> UC(md"$\frac{\sigma_{s}}{0.8 f_{yd}}$", t, n)`

```
check2 = #3 (generic function with 1 method)
```

```
• check2 = (t, n) -> UC(md"$\dfrac{v_{\max}}{v_{\lim}}$", t, n)
```

```
check3 = #5 (generic function with 1 method)
```

```
• check3 = (t, n) -> UC(md"$\dfrac{M_{Ed}}{M_{Rd}}$", t, n)
```

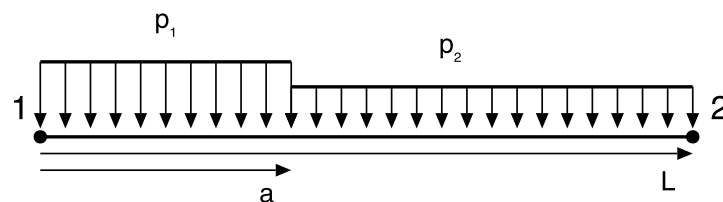
```
check4 = #7 (generic function with 1 method)
```

```
• check4 = (t, n) -> UC(md"$\dfrac{V_{Ed}}{V_{Rd}}$", t, n)
```

Beschrijving belastingsschema

Definiëer de randvoorwaarden of *Boundary Conditions* (BC). Voor een **verdeelde belasting** geef je de parameters a , b , L en p in waarbij een *positieve* waarde van p een neerwaartse belasting is. Voor een **puntbelasting** geef je de parameters a , L en p in. Ook de stijfheid EI .

In het desbetreffende geval waarbij er **twee verdeelde belastingen** aangrijpen naast elkaar, herleidt het aantal paramaters zich tot a , L , p_1 en p_2 .



Te definiëren parameters

In de tabel met de **randvoorwaarden** (rvw) geef je de parameters a , L , p_1 en p_2 in, alsook de grenstoestand (:UGT of :GGT). De parameters die je moet invullen volgen uit de **generalisering** dat in een volgende paragraaf is opgesteld.

Definieer in onderstaande tabel de verschillende belastingsgevallen

```
geom = (a = 2.473, L = 3.995)
```

```
• geom = (  
•   a = 2.473,  
•   L = 3.995  
• )
```

belastingsgevallen =

	naam	waarde	beschrijving
1	"g1"	32.09	"Perm. last - lastendaling"
2	"g2"	19.39	"Perm. last - lastendaling"
3	"gp"	0.715	"Perm. last - profiel"
4	"q1_vloer"	13.3	"Var. last - nuttige overlant"
5	"q2_vloer"	7.96	"Var. last - nuttige overlant"
6	"q1_sneeuw"	3.86	"Var. last - sneeuwlast"
7	"q2_sneeuw"	2.03	"Var. last - sneeuwlast"

Definieer in onderstaande tabel de verschillende combinaties. Voor **GGT** wordt gerekend met het ψ_1 gelijk aan 0.5 voor de **nuttige overlant** in de *frequente* combinatie, dit volgens Categorie A volgens NBN EN 1990.

combinaties =

	check	naam	formule
1	:GGT	"p1"	"g1 + gp + 0.5 * q1_vloer"
2	:GGT_K	"p1"	"g1 + gp + q1_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"
3	:UGT	"p1"	"1.35 * (g1 + gp) + 1.5 * (q1_vloer +
4	:GGT	"p2"	"g2 + gp + 0.5 * q2_vloer"
5	:GGT_K	"p2"	"g2 + gp + q2_vloer + 0.5 * q2_sneeuw"
6	:UGT	"p2"	"1.35 * (g2 + gp) + 1.5 * (q2_vloer +

resultaatklasse =

	check	naam	formule	uitkomst
1	:GGT	"p1"	"g1 + gp + 0.5 * q1_vloer"	39.455
2	:GGT_K	"p1"	"g1 + gp + q1_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"	48.035
3	:UGT	"p1"	"1.35 * (g1 + gp) + 1.5 * (q1_vloer +	67.1318
4	:GGT	"p2"	"g2 + gp + 0.5 * q2_vloer"	24.085
5	:GGT_K	"p2"	"g2 + gp + q2_vloer + 0.5 * q2_sneeuw"	29.08
6	:UGT	"p2"	"1.35 * (g2 + gp) + 1.5 * (q2_vloer +	40.6043

maatgevend =

	check	p1	p2
1	:GGT	39.455	24.085
2	:GGT_K	48.035	29.08
3	:UGT	67.1318	40.6043

rvw =

	check	p1	p2	a	L
1	:GGT	39.455	24.085	2.473	3.995
2	:GGT_K	48.035	29.08	2.473	3.995
3	:UGT	67.1318	40.6043	2.473	3.995

```
• rvw = begin
•   maatgevend[!, "a"] := geom[:a]
•   maatgevend[!, "L"] := geom[:L]
•   maatgevend
• end
```

Twee hulpvariabelen voor later...

```
isGGT = BitVector: [true, false, false]
```

```
isUGT = BitVector: [false, false, true]
```

Voor de vervorming en hoekverdraaiing moet de stijfheid in acht genomen worden

Eigenschappen van het profiel

Eigenschappen van het gekozen profiel - type HE 220 B

Haal informatie van het profiel op en bewaar het in info

profiel =

	name	G	h	b	tw	tf	r	hi	mor
1	"HE 220 B"	71.5	220.0	220.0	9.5	16.0	18.0	188.0	

buigstijfheid = 16989.0

```
• buigstijfheid = 210000 * profiel[1, "Iy"] / 10^5 # kNm2
```

```
f_yd = 235.0
```

```
W_el = 735.5
```

```
• W_el = profiel[1, "Wel.y"] # cm3
```

```
M_Rd = 172.8425
```

```
• M_Rd = W_el * f_yd / 1000 # kNm
```

```
V_Rd = 656.1200000000001
```

```
• V_Rd = profiel[1, "Avz"] * f_yd / 10 # kN
```

Oplossing belastingsschema

Met behulp van het **superpositiebeginsel** generaliseren we het probleem door een samenstel van de effecten, V , M , α en v , door de afzonderlijke aangrijpende belastingen te nemen.

Opgepast!

Bij het gebruiken van de syntax `R11(deel...)` moet je opletten hoe `deel` is opgebouwd, immers worden de substituties niet gelijktijdig uitgevoerd, maar één voor één, en telkens wordt de formule geëvalueerd en vereenvoudigd. Dus pas je $a \Rightarrow b$ (a naar b) aan en dan $b \Rightarrow L$ (b naar L), dan wordt de eerder omzetting dus ook verder doorgevoerd.

(p_1, p_2)

`deel1 = (a , b , p)`
 $\Rightarrow 0$
 $\Rightarrow a \Rightarrow p_1$

`deel2 = (b , p)`
 $\Rightarrow L \Rightarrow p_2$

Reactiekrachten

Opstellen vergelijkingen

Bij het opstellen van de vergelijkingen maak je gebruik van de functies $R11$, $R12$, $V1$, $M1$, $\alpha1$ en $v1$ voor **gespreide lasten** en van de formules $R21$, $R22$, $V2$, $M2$, $\alpha2$ en $v2$ voor een **geconcentreerde last**

R1 =

$$-\frac{ap_1(-2L+a)}{2L} + \frac{p_2(-L+a)^2}{2L}$$

• $R1 = R11(\text{deel1}...) + R11(\text{deel2}...)$

R2 =

$$\frac{a^2 p_1}{2L} + \frac{p_2(L^2 - a^2)}{2L}$$

• $R2 = R12(\text{deel1}...) + R12(\text{deel2}...)$

Dwarskracht en momenten

Oplossing neerschrijven van de dwarskracht en het buigend moment

V =

$$\frac{p_1(-a^2(\theta(-L+t) - \theta(-a+t)) - (1 - \theta(-a+t))(2L(a-t) - a^2))}{2L} + \frac{p_2(-(-L+a)(L -$$

• $V = V1(\text{deel1}...) + V1(\text{deel2}...)$

M =

$$\frac{p_1(-a^2(L-t)(\theta(-L+t) - \theta(-a+t)) - (1 - \theta(-a+t))(Lt^2 - at(2L-a)))}{2L} + \frac{p_2(t(-L$$

• $M = M1(\text{deel1}...) + M1(\text{deel2}...)$

Hoekverdraaiing en doorbuiging

Oplossing neerschrijven van de hoekverdraaiing en de doorbuiging

α =

$$\frac{p_2(-(-L+a)(\theta(-a+t) - 1)(-L^4 + 4L^2a^2 - 4La^3 + a^4 + 6t^2(L^2 - 2La + a^2)) + (-\theta(-$$

• $\alpha = \alpha1(\text{deel1}...) + \alpha1(\text{deel2}...)$

v =

$$\frac{p_2(-t(-L+a)(\theta(-a+t) - 1)(-L^4 + 4L^2a^2 - 4La^3 + a^4 + 2t^2(L^2 - 2La + a^2)) + (-\theta(-$$

• $v = v1(\text{deel1}...) + v1(\text{deel2}...)$

Maximale interne krachten

Maximale interne krachten en hun voorkomen (x abscis)

lambdify

lambdify wordt gebruikt om de formules om te zetten van hun SymPy vorm naar een pure Julia vorm

```
fn (generic function with 1 method)
```

```
• function fn(r)
•     rvw = Dict{collect(keys(r)) .|> eval .=> collect(values(r))}
•     return i -> lambdify(i(
•         rvw...,
•         EI => buigstijfheid
•     ))
• end
```

```
rnd = #1 (generic function with 1 method)
```

Onderstaande tabel bevat de **gesubstitueerde** generieke oplossingen

opl =	check	p1	p2	a	L	V	M	α	v
1	:GGT	39.455	24.085	2.473	3.995	#101	#101	#101	#101
2	:GGT_K	48.035	29.08	2.473	3.995	#101	#101	#101	#101
3	:UGT	67.1318	40.6043	2.473	3.995	#101	#101	#101	#101

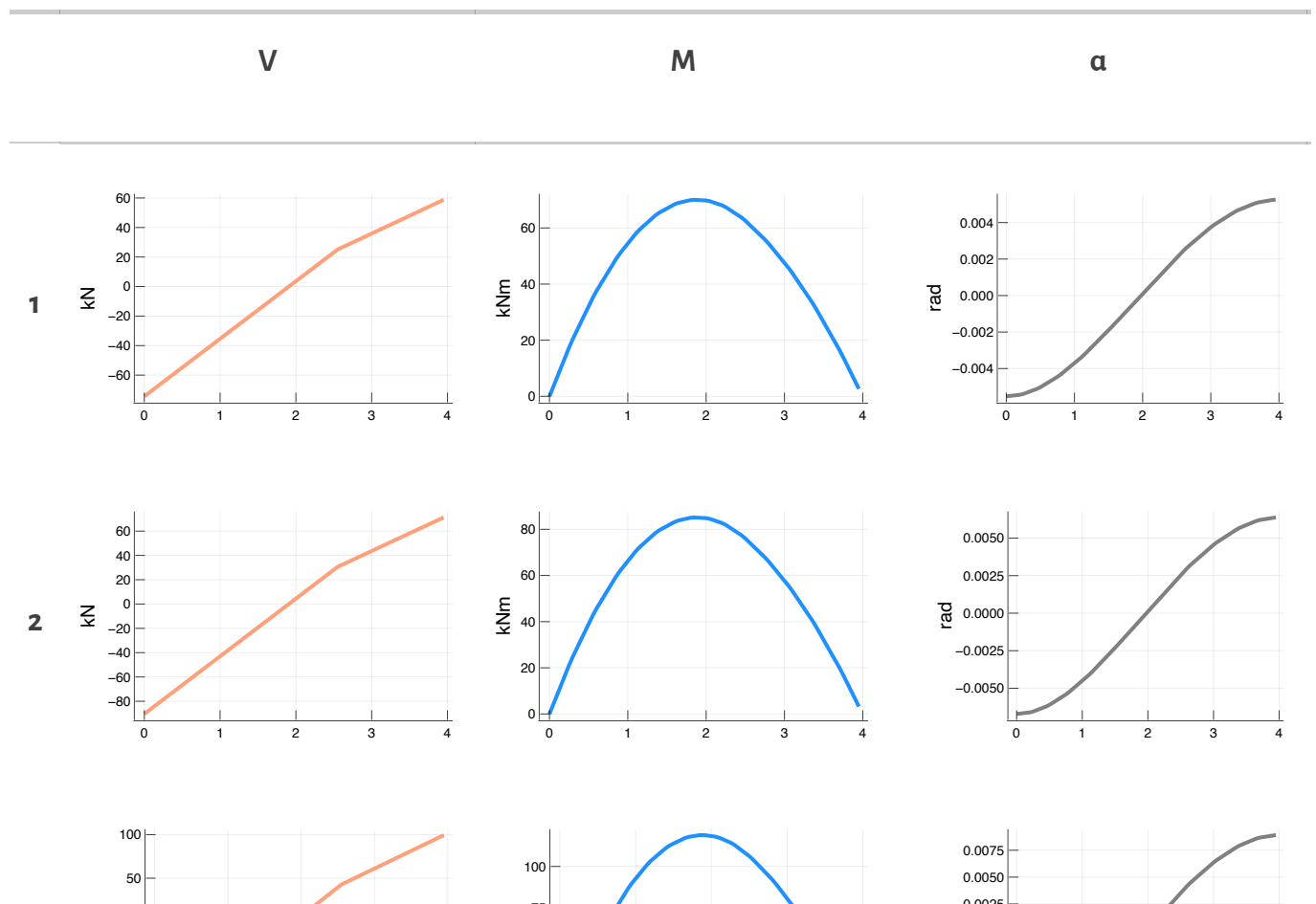
Hieronder wordt een **overzicht tabel** weergegeven, waarbij de minimum en maximum waardes van de verschillende effecten, zijnde V , M , α en v worden weergegeven

overzicht =

	check	L	V	M	α	v
1	:GGT	3.995	(-74.355, 57.586)	(0.0, 70.059)	(-0.006, 0.005)	(-0.007
2	:GGT_K	3.995	(-90.454, 69.833)	(0.0, 85.16)	(-0.007, 0.006)	(-0.008
3	:UGT	3.995	(-126.405, 97.554)	(0.0, 118.996)	(-0.009, 0.009)	(-0.011

Maak grafieken aan

grafieken =



grafiek (generic function with 1 method)

Controle

Aftoetsen van de interne krachten en vervormingen

Controles

Maak gebruik van *enumerate* Check met waarde *false* of *true*.

Check(*true*) resulteert in de uitdraai: OK::Check = 1

Check(*false*) resulteert in de uitdraai: NOK::Check = 0

controle (generic function with 1 method)

```
• function controle(r::NamedTuple)
•   checks = Array{Union{Missing, UC}}(missing, 4)
•   if r.check == :GGT
•       # Check 1 - Controleer de spanning in het staal
•       M_ggt = maximum(r.M .|> (abs)) # kNm
•       σ_ggt = (M_ggt / W_el) * 1000 # MPa
•       checks[1] = check1(σ_ggt, 0.8 * f_yd)
•       # Check 2 - Controleer de doorbuiging van de balk
•       v_lim = r.L / 500 * 1000 # mm
•       v_max = maximum(r.v .|> (abs)) * 1000 # mm
•       checks[2] = check2(v_max, v_lim)
•   elseif r.check == :UGT
•       # Check 3 - Controle doorsnede
•       M_Ed = maximum(r.M .|> (abs))
•       checks[3] = check3(M_Ed, M_Rd)
•       # Check 3 - Controle doorsnede
•       V_Ed = maximum(r.V .|> (abs))
•       checks[4] = check4(V_Ed, V_Rd)
•   end
•   return checks
• end
```

controles =		check	nummer	unity check
1	:GGT	"Check 1"	$UC = \frac{\sigma_s}{0.8 f_{yd}} = \frac{95.3}{188.0} = 0.51 \rightarrow \text{OK}$	
2	:GGT	"Check 2"	$UC = \frac{v_{max}}{v_{lim}} = \frac{7.0}{8.0} = 0.88 \rightarrow \text{OK}$	
3	:UGT	"Check 3"	$UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{119.0}{172.8} = 0.69 \rightarrow \text{OK}$	
4	:UGT	"Check 4"	$UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{126.4}{656.1} = 0.19 \rightarrow \text{OK}$	

Achterliggende berekeningen

Hieronder wordt de algemene uitwerking van de balkentheorie behandeld.

Dependencies en hulpfuncties

Hieronder worden de *dependencies* geladen en de hulpfuncties gedefinieerd

```
• using PlutoUI, ImageView, Images, Conda, PyCall, SymPy, Roots,
  Plots, HTTP, JSON, Luxor, DotEnv, SQLite, DataFrames, UUIDs
```

Laad de *environment variables* met `DotEnv.config()`

```
db = SQLite.DB("assets/db/db.sqlite")
```

Start de `plotly` backend

```
PlotlyBackend()
```

- `plotly()`

Herschaal het font

- `begin`
- `Plots.scalefontsizes()` *# Reset the font*
- `Plots.scalefontsizes(2/3)` *# Make the font 2 times smaller*
- `end`

Symbolische notatie wordt gehanteerd om de basis op te stellen. Het opstellen van de vergelijken doen we via `SymPy`, bekend vanuit **Python**. Het pakket kun je aanroepen via `PyCall`, wat we ook zullen doen voor enkele functies, maar kan ook via `SymPy.jl` dat wat *Julia* specifieke syntax toevoegd om gebruik te maken van het pakket. Doordat in de *backend* verbinding wordt gelegd met een *Python* omgeving, is snelheid beperkt:

`SymPy` oproepen via `PyCall` doe je als volgt:

```
import Pkg; Pkg.add("Conda")
import Pkg; Pkg.add("PyCall")
# Install SymPy using Conda
using Conda, PyCall
Conda.add("sympy")
# PyCall uses the python interpreter included in the Conda.jl package
sympy = pyimport("sympy")
```

Naast bovenstaande roepen we ook `SymPy.jl` op om gebruik te maken van `SymPy` via *Julia* specifieke syntax:

```
import Pkg; Pkg.add("SymPy")
```

`_heaviside` (generic function with 1 method)

- `function _heaviside(t)`
- *# Bij t=0 is sign(t) = 0 of deze functie 0.5*
- `0.5 .* (sign.(t) .+ 1)`
- `end`

Ook `SymPy` heeft een methode `Heaviside` - functie te gebruiken via `PyCall`

```
heaviside = PyObject Heaviside
```

- *# Bij deze definitie is de waarde bij t=0 gelijk aan 'onbestaande'*
- `heaviside = sympy.functions.special.delta_functions.Heaviside`

interval (generic function with 1 method)

- `function interval(t, a, b)`
- `# Bij t=b wordt een waarde van 0.5 geretourneerd (limitatie)`
- `heaviside(t-a,0) .- heaviside(t-b,0)`
- `end`

Naast Heaviside is er ook een methode Piecewise via PyCall aan te roepen. Helaas ondersteunen deze functie wel geen Array calls, dus moet je de `map` functie in *Julia* gaan gebruiken om bijvoorbeeld te gaan plotten

`piecewise = PyObject Piecewise`

- `# Functie roep je aan met f(t) = piecewise((5, t < 2), (10, t <= 4))`
- `piecewise = sympy.functions.elementary.piecewise.Piecewise`

Eigen Check type met ook een eigen uitdraai

- `@enum Check OK=true NOK=false`

- `function Base.show(io::IO, mime::MIME"text/html", c::Check)`
- `id = UUIDs.uuid4().value`
- `color = (c == Check(false)) ? "crimson" : "yellowgreen"`
- `Base.write(io, """`
- `<style>`
- `.marked-$id {`
- `color: white;`
- `background-color: $(color);`
- `padding: 0 2px;`
- `}`
- `</style>`
- `<mark class="marked-$id">$(string(c))</mark>`
- `""")`
- `end`

Definieer een nieuwe type getiteld *Unity Check* of *UC*

- `function Base.show(io::IO, mime::MIME"text/html", uc::UC)`
- `afronden = t -> (d -> round(d, digits=t))`
- `subs = Dict(`
- `"beschrijving" => uc.beschrijving.content[1].formula,`
- `"waarde" => uc.waarde |> afronden(1),`
- `"limiet" => uc.limiet |> afronden(1),`
- `"uc" => (uc.waarde / uc.limiet) |> afronden(2)`
- `)`
- `format = raw"\text{UC} = beschrijving = \dfrac{waarde}{limiet} =`
- `uc\rightarrow"`
- `Base.write(io, """<div style="display: flex; align-items: center; justify-`
- `content: center;"><div>""")`
- `Base.show(io, mime, Markdown.parse(replace(format,`
- `r"beschrijving|waarde|limiet|uc" => s -> subs[s])))`
- `Base.write(io, """/div><div style="flex: 1; padding-left: 2px;">""")`
- `Base.show(io, mime, uc.check)`
- `Base.write(io, """/div></div>""")`
- `end`


```

• mutable struct UC
•     beschrijving::Markdown.MD
•     waarde::Float64 # teller
•     limiet::Float64 # noemer
•     check::Check
•     UC(beschrijving, waarde, limiet) = (uc = new(beschrijving, waarde, limiet);
uc.check = Check(waarde / limiet <= 1); uc)
• end

```

Interne krachtswerking

Superpositiebeginsel

Wanneer een lichaam onderworpen is aan verschillende krachtsverwerkingen (F , M , ΔT ...) mag men het effect (σ , ϵ , v , α ...) van elk van die belastingen, waarbij ze afzonderlijk op het lichaam inwerken, optellen of superponeren indien een aantal geldigheidsvoorwaarden vervuld zijn:

- De (veralgemeende) verplaatsingen zijn klein
- De materialen zijn lineair elastisch en kunnen met andere woorden door de wetten van *Hooke* worden beschreven
- Er is **geen** energiedissipatie in de verbindingen door wrijving

Gebruik `@syms` om *SymPy symbols* te definiëren of gebruik de functie `symbols`. De laatste optie heeft het voordeel dat je nadien je invoergegevens nog kan wijzigen. Bij het gebruik van `@syms` kan je dit niet langer. Ook heb je flexibiliteit over de naam bij het gebruik van `symbols`

Steunpunten

Bepaal de krachten in de steunpunten door het momentenevenwicht uit te schrijven in de steunpunten. Het moment ter hoogte van de steunpunten is 0, dus uit dit gegeven bereken je eenvoudig de krachten ter hoogte van de steunpunten. Bij een **statisch** bepaalde constructie bepaal je dus in 1 tijd je reactiekrachten.

Hyperstatische constructie?

Een **hyperstatische** constructie kun je oplossen door het *snijden* in de krachten en het te vervangen door onbekende krachten. Je gaat door met *snijden* tot je een statisch bepaalde constructie bekomt. Bij de oplossing leg je nadien bijkomende beperkingen op. Ter hoogte van het steunpunt zal bijvoorbeeld de vervorming er gelijk moeten zijn aan 0 of de rotatie 0 indien je *gesneden* hebt in een momentvaste verbinding

Kinematische randvoorwaarden

Leg de kinematische randvoorwaarden op om de constanten te gaan bepalen. Deze voorwaarden bestaan onderander uit $v(t \Rightarrow 0) = 0$ en $v(t \Rightarrow L) = 0$. De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

Hyperstatische constructie?

Bij een **hyperstatische** constructie worden extra randvoorwaarden opgelegd. Zo zal bijvoorbeeld naar de verticale kracht van een steunpunt *gesneden* zijn en dien nu opgelegd te worden dat de vervorming er gelijk is aan 0.

Oplossing basisschema's

Bepaal de dwarskrachten $V(t)$ en momenten $M(t)$ voor een eenvoudig opgelegde ligger met twee verdeelde belastingen. Nadien bepalen we ook de hoekverdraaiing $\alpha(t)$ en de doorbuiging $v(t)$.

Dwarskracht V en buigend moment M

Berekening van de interne krachten. Bij een **statisch** bepaalde constructie zijn deze niet afhankelijk van de *stijfheid*, bij een **hyperstatische** constructie wel en volgt het dwarskrachtverloop pas uit het oplossen van een stelsel

Hoekverdraaiing α en doorbuiging v

Deze worden berekend uit de kromming χ .

We wensen de **vervormingen** $v(t)$ te kennen van de ligger, hiervoor grijpen we terug naar de volgende theorie. De kromming χ is gelijk aan de verhouding tussen het moment en de buigstijfheid, dit bij kleine vervormingen.

$$\chi = \frac{M}{EI} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2}$$

Merk op dat we hier t hanteren als indicatie voor de positie op de ligger.

De ligger wordt opgeknipt in een aantal delen, een *piecewise* functie. Elk deel wordt geïntegreerd. Constanten komen op de proppen die nadien via een stelsel bepaald dienen te worden. Voor elk deel wordt een **unieke** constante gedefinieerd.

$t =$

t

$(a, b, p, p_a, p_b, F, L, EI)$

Schema 1. Verdeelde belasting p van a tot b

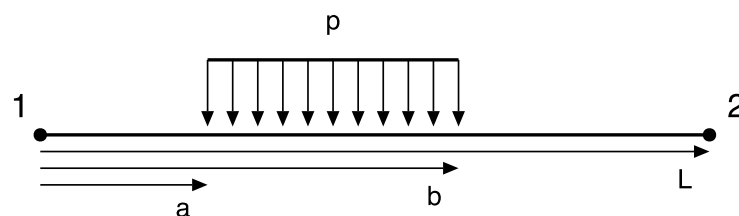
Eenvoudig opgelegde ligger, opwaartse kracht = positief (steunpunten). Aangrijpende kracht p is neerwaarts gericht.

Toelichting

Dit is een speciaal geval van paragraaf §3 Variabele verdeelde belasting p_a van a tot p_b ter hoogte van b , waarbij p_a gelijk wordt gesteld aan p_b . De waarde van de verdeelde belasting wordt gelijk gesteld aan p . De *mapping* wordt vastgelegd in BC31, de *boundary condition* toegepast op §3 ter beking van de oplossing van §1

$$\text{BC31} = (p_a, p_b)$$

$$\Rightarrow p \Rightarrow p$$



Moment in de steunpunten = 0 → evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

$$\text{R11} =$$

$$\frac{p(a-b)(-2L+a+b)}{2L}$$

$$\text{R12} =$$

$$\frac{p(-a^2+b^2)}{2L}$$

1.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$\text{V1} =$$

$$\frac{p((a-b)(a+b)(\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) - (a-b)(\theta(-a+t) - 1)(2L-a-b) - (2L(b -$$

$$2L$$

1.2 Bepalen moment $M(t)$

M1 =

$$\frac{p \left(t(a-b)(\theta(-a+t) - 1)(2L - a - b) + (L-t)(a-b)(a+b)(\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) - \right)}{2L}$$

1.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

α_1 =

$$\frac{p \left(-(a-b) \left((\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) (4L^2a^2 - 4L^2b^2 - 12Lt(a^2 - b^2)) + a^4 - b^4 + 6t^2(a^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \right) \right) \right)}{2L}$$

1.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

v_1 =

$$\frac{p \left(-(a-b) \left(t(\theta(-a+t) - 1) (4L^2a^2 - 4L^2b^2 - 4La^3 + 4Lb^3 + a^4 - b^4 + 2t^2(-2La + 2Lb \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \right) \right) \right)}{2L}$$

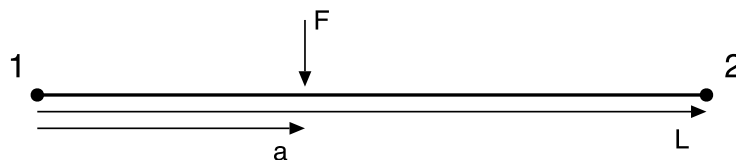
1.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

De kinematische randvoorwaarden hoeven echter niet meer opgelegd te worden, omdat de oplossing volgt uit de generieke situatie met een lineair variërende belasting p_a tot p_b .

Schema 2. Puntlast F ter hoogte van abscis a

Eenvoudig opgelegde ligger, reactiekracht opwaarts = positief, aangrijpende kracht neerwaarts = negatief



Moment in de steunpunten = 0 \rightarrow evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

R21 =

$$\frac{F(L-a)}{L}$$

R22 =

$$\frac{Fa}{L}$$

2.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$-\frac{F(1 - \theta(-a + t))(L - a)}{L} + \left(F - \frac{F(L - a)}{L}\right)(-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))$$

2.2 Bepalen moment $M(t)$

$$\frac{Fa(L - t)(-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))}{L} + \frac{Ft(1 - \theta(-a + t))(L - a)}{L}$$

2.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

(C_1, C_2)

$$(1 - \theta(-a + t))\left(C_1 + \frac{t^2(FL - Fa)}{2L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))\left(C_2 + Fat - \frac{Fat^2}{2L}\right)$$

$EI\alpha_2 =$

$$(1 - \theta(-a + t))\left(\frac{t^2(FL - Fa)}{2L} + \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))$$

$\alpha_2 =$

$$\frac{(1 - \theta(-a + t))\left(\frac{t^2(FL - Fa)}{2L} + \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))\left(Fat - \frac{Fat^2}{2L}\right)}{EI}$$

2.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

(D_1, D_2)

$$(1 - \theta(-a + t))\left(C_1t + D_1 + \frac{t^3(FL - Fa)}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))\left(C_2t + D_2 + \frac{F}{6L}\right)$$

EIV2 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3(FL - Fa)}{6L} + \frac{t(-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3)}{6L} \right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a -$$

v2 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3(FL - Fa)}{6L} + \frac{t(-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3)}{6L} \right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t)) \left(\frac{Fa^3}{6} + \frac{Fa^2}{2} \right)$$

$$EI$$

2.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

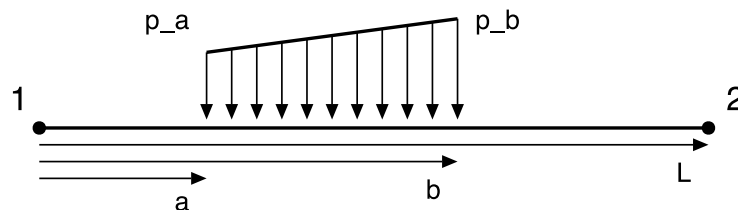
$$\mathbf{rvw2} = [D_1, \frac{Ca - C_2a + D_1 - D_2}{L} + \frac{Fa^2}{2L}, \frac{C_2L + D_2 + \frac{FL^2a}{3}}{L}, \frac{C_1 - C_2 - Fa^2 + \frac{Fa^3}{2L} + \frac{a^2(FL - Fa)}{2L}]$$

$$\mathbf{opl2} = \text{Dict}(D_2, C_2, C_1, D_1)$$

$$\Rightarrow \frac{Fa^3}{6}, \Rightarrow \frac{-2FL^2a - Fa^3}{6L}, \Rightarrow \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}, \Rightarrow 0$$

Schema 3. Variabele verdeelde belasting p_a van a tot p_b ter hoogte van b

Eenvoudig opgelegde ligger, opwaartse kracht = positief (steunpunten). Aangrijpende kracht p_a en p_b is neerwaarts gericht.



Moment in de steunpunten = 0 → evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

R31 =

$$(-a + b) \left(\frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L}$$

R32 =

$$\frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L}$$

3.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(-(-a + b) \left(\frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) + \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) + (\theta(-a +$$

3.2 Bepalen moment $M(t)$

$$t(1 - \theta(-a + t)) \left((-a + b) \left(\frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) + \left(t \left((-a +$$

3.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

$$(C_1, C_2, C_3)$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(C_1 + \frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2a$$

EI α_3 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b +$$

α_3 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2p_a - 4b^2p_b)}{12L} + \frac{20L^2a^2p_a + 40L^2a^2p_b}{12L} \right)$$

3.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

$$(D_1, D_2, D_3)$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(C_1 t + D_1 + \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a - 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L} \right)$$

$$EIv3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L} \right)$$

$$v3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L} \right) + \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}$$

3.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

$$rvw3 = [D_1, \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}, \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}, \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}]$$

$$opl3 =$$

$$\text{Dict}(C_3, D_2, C_2, C_1, D_1, D_3)$$

$$\Rightarrow \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \Rightarrow \frac{-4a^5 p_b - a^5 p_b + 5a^4 b p_a}{120a - 120b}, \Rightarrow \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}, \Rightarrow \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \Rightarrow 0, \Rightarrow \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}$$

Voorbeelden

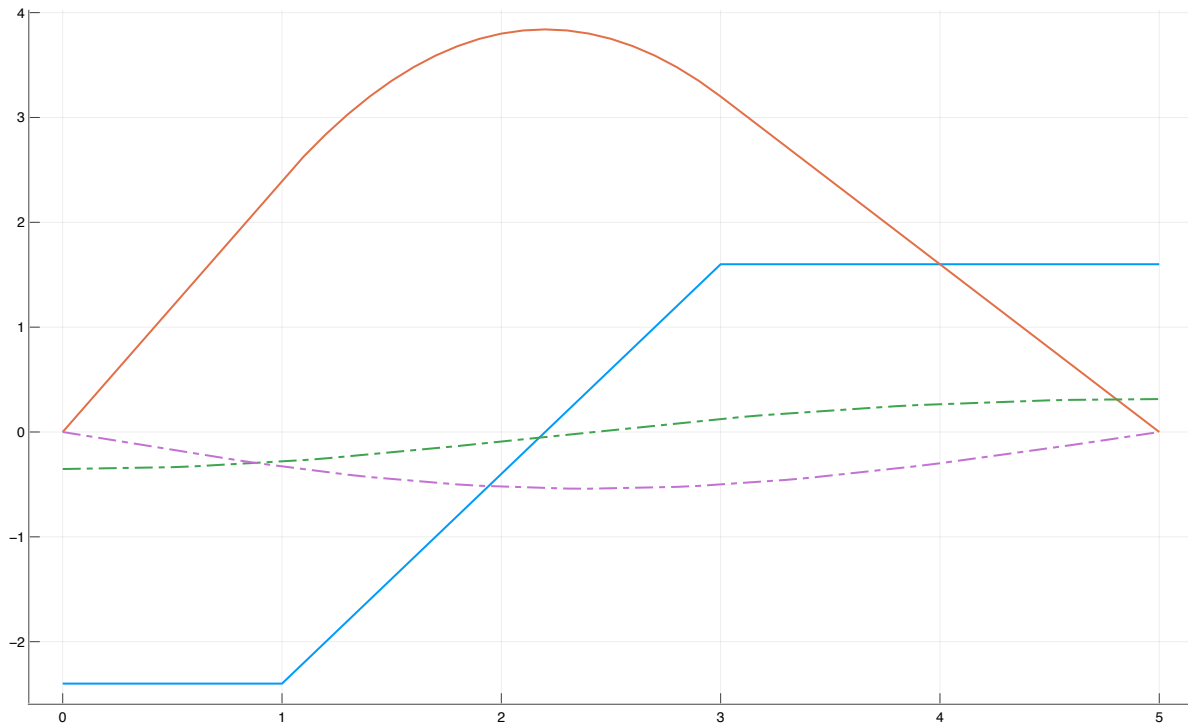
Vb. Schema 1 - Verdeelde belasting p

Verdeelde belasting volgens (a => 1, b => 3, L => 5, p => 2, EI => 16989.0)

Waarde voor p : 2 kN/m

$$BC1 = (a, b, L, p, EI)$$

$$\Rightarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2 \Rightarrow 16989.0$$



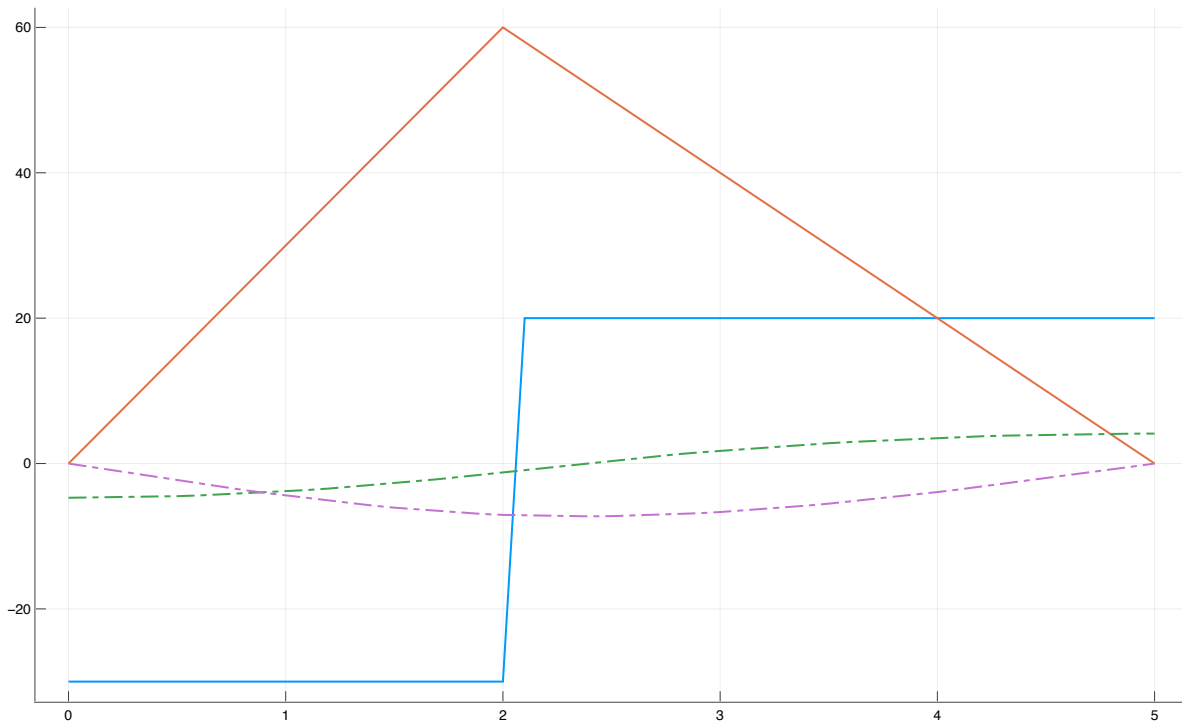
Vb. Schema 2 - Puntbelasting F

Puntbelasting volgens ($a \Rightarrow 2$, $L \Rightarrow 5$, $F \Rightarrow 50$, $EI \Rightarrow 16989.0$)

Waarde voor a : **2.0** m

Waarde voor F : **50** kN

BC2 = (a , L , F , EI)
 $\Rightarrow 2 \Rightarrow 5 \Rightarrow 50 \Rightarrow 16989.0$



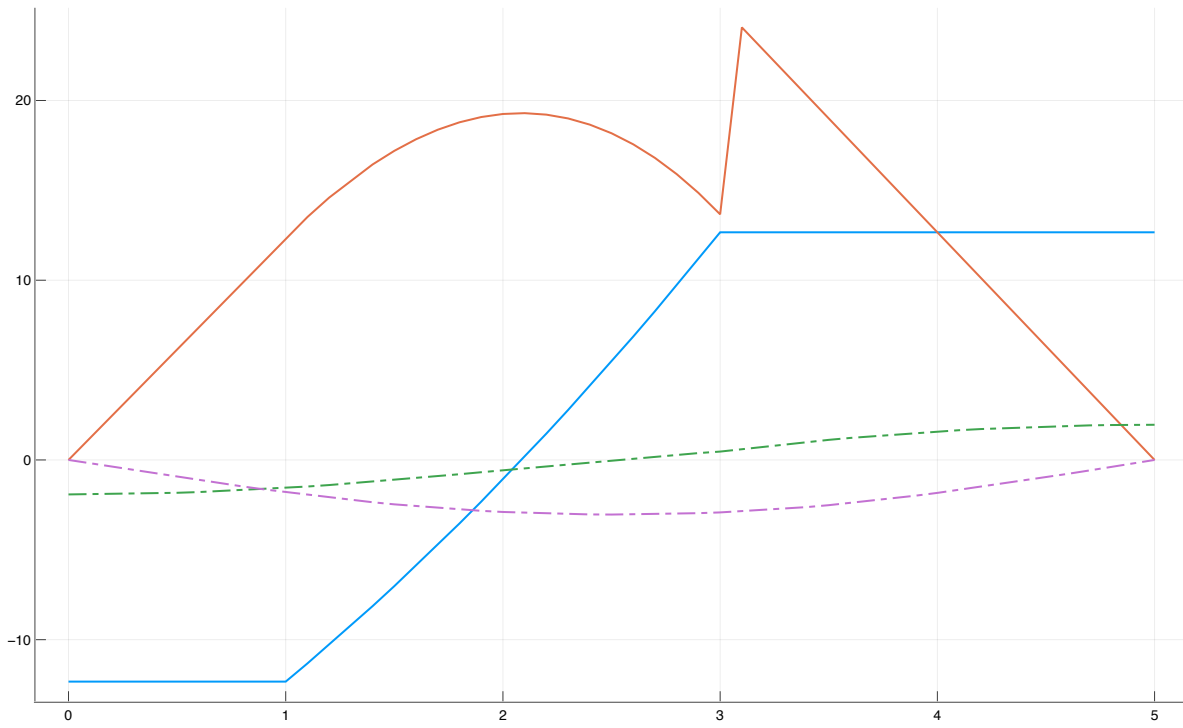
Vb. Schema 3 - Lineair variërende lijnbelasting p_a tot p_b

Puntbelasting volgens ($a \Rightarrow 1$, $b \Rightarrow 3$, $L \Rightarrow 5$, $p_a \Rightarrow 10$, $p_b \Rightarrow 15$, $EI \Rightarrow 16989.0$)

Waarde voor p_a : **10** kN

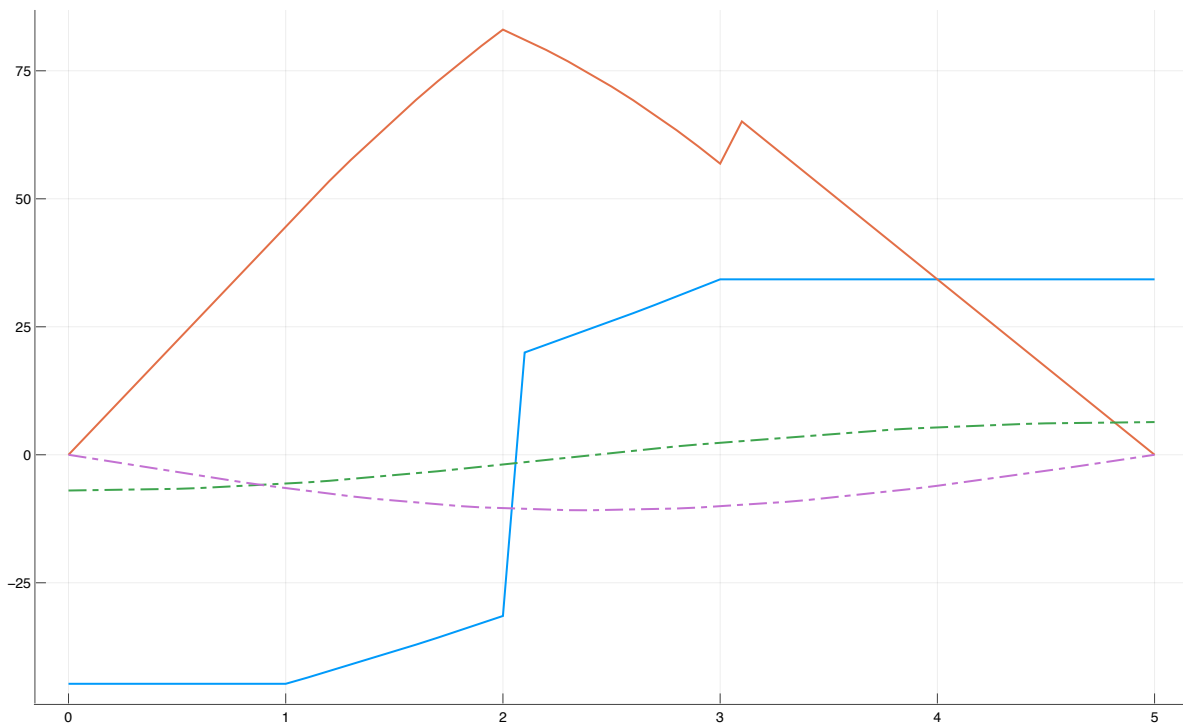
Waarde voor p_b : **15** kN

BC3 = (a , b , L , p_a , p_b , EI)
 $\Rightarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 10 \Rightarrow 15 \Rightarrow 16989.0$



3.4 Samenstel krachten

Samenstel van krachten uit **3.1**, **3.2** en **3.3**



Theorie

Virtuele arbeid

Virtuele **rek**

Op een infinitesimaal deeltje van een staaf dx worden uitwendige normaalkrachten n opgelegd. Indien er geen samengang in het materiaal zou bestaan, dan wordt het mootje uiteengereten. Een virtuele, axiale verplaatsing δu wordt opgelegd, en een vervorming $(\delta x)'$ of $d\delta x/dx$ wat ook wel gelijk is aan $\delta \varepsilon$ (virtuele **rek**) wordt aan de rechterzijde opgeteld bij de translatie.

$$-n \delta u + n (\delta u + \delta \varepsilon dx) + \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{u}_i = 0$$

Virtuele **kromming**

Op een infinitesimaal deeltje van een staaf dx worden uitwendige krachtenkoppel m opgelegd. Indien er geen samengang in het materiaal zou bestaan, dan wordt het mootje uiteengereten. Een virtuele, axiale rotatie $\delta \alpha$ wordt opgelegd, en een vervorming $(\delta \alpha)'$ of $d\delta \alpha/dx$ wat ook wel gelijk is aan $\delta \chi$ (virtuele **kromming**) wordt aan de rechterzijde van de moot opgeteld bij de rotatie.

$$-m \delta \alpha + m (\delta \alpha + \delta \chi dx) + \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{u}_i = 0$$

Wens je bijvoorbeeld het moment te kennen ten gevolge van een last F , dan pas je het principe van virtuele arbeid toe waarbij je snijdt ter hoogte van het aangrijpingspunt van F en dit vervangt door een koppel met waarde M en een scharnier. De vervormingen zijn klein. De virtuele verplaatsing in C is gelijk aan x . Volgend evenwicht schrijven we uit.

$$F \cdot x = M \delta\theta_{AC} + M \delta\theta_{CB}$$

Omdat de vervormingen klein zijn, kunnen we volgende hanteren:

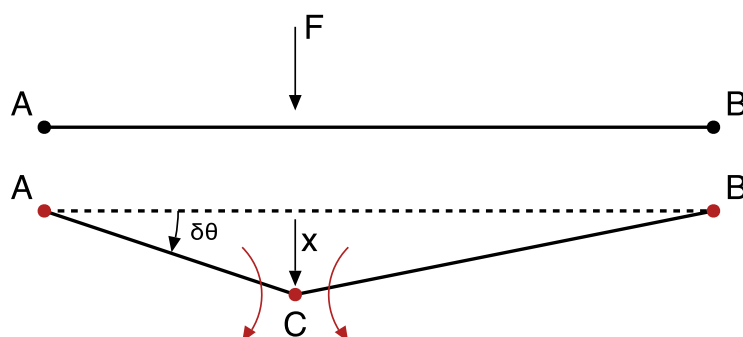
$$\delta\theta_{AC} = \arctan\left(\frac{x}{|AC|}\right) \stackrel{\text{kleine vervormingen}}{\approx} \frac{x}{|AC|}$$

Dus vergelijking kan omgevormd tot volgende oplossing:

$$F \cdot x = M \frac{x}{|AC|} + M \frac{x}{|CB|} = M \cdot x \left(\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|CB|} \right)$$

Vervang $|AC|$ door a en $|CB|$ door b en los op naar M :

$$M = F \cdot \frac{a b}{a + b}$$



Afhankelijk van het gegeven die je zoekt, ga je anders gaan snijden in je constructie

Integralen en analogiën van Mohr

Berekening volgens KOORDE

Bij de integralen van Mohr wordt de hoekverdraaiing en de vervorming berekend volgens een koorde tussen twee punten (dus onafh. van de elastica)

Berekenen **doorbuiging** ten opzichte van een koorde

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Doorbuiging a in punt P t.o.v. koorde AB
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AB , eenvoudig opgelegd
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken **moment** hulplichaam in P

Definitie: De verticale verplaatsing van een punt P , gelegen tussen de punten A en B van een al dan niet doorgaande, al dan niet prismatische balk, en gemeten ten opzichte van de koorde AB in de belaste en dientengevolge vervormde stand, is gelijk aan het buigend moment in het punt P van een eenvoudig opgelegde hulpligger AB , die een fictieve, gespreide belasting draagt, waarvan de amplitude in ieder punt gelijk is aan het plaatselijke, gereduceerde moment in het oorspronkelijk gestel.

Berekenen **hoekverdraaiing** ten opzichte van een koorde

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Hoekverdraaiing α in punt P t.o.v. koorde AB
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AB , eenvoudig opgelegd
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken **dwarskracht** hulplichaam in P

Definitie: De wenteling van de raaklijn in een punt P , gelegen tussen de punten A en B van een al dan niet doorgaande, al dan niet prismatische balk, en gemeten ten opzichte van de koorde AB in de belaste en dientengevolge vervormde stand, is op het teken na gelijk aan de dwarskracht in het punt P van een eenvoudig opgelegde hulpligger AB , die een fictieve, gespreide belasting draagt, waarvan de amplitude in ieder punt gelijk is aan het plaatselijke, gereduceerde moment in het oorspronkelijke gestel.

Stelling van Green

Berekening volgens RAAKLIJN

Bij de stelling van *Green* wordt de hoekverdraaiing en de vervorming berekend volgens een raaklijn in een bepaald punt van de elastica

Elastische **verticale verplaatsing** van een doorsnede ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Verplaatsing a in punt P t.o.v. doorsnede A
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AP , ingeklemd in A
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken het **moment** in A van het hulplichaam

Definitie: Om de elastische doorbuiging van een doorsnede P ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede A te bepalen, neemt men het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak tussen A en P om het punt waar men de verplaatsing wenst te kennen.

Elastische **draaiing** van een doorsnede ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede

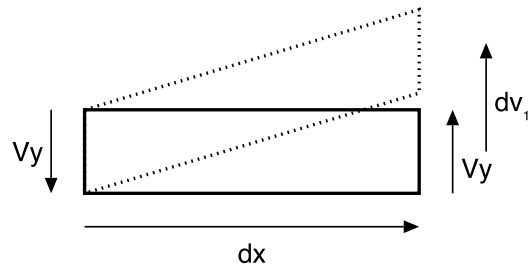
1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Draaiing θ in punt P t.o.v. doorsnede A
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AP , ingeklemd in A
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken het **dwarskracht** in A van het hulplichaam / oppervlakte onder het gereduceerde momentenvlak

Definitie: De elastische draaiing van een doorsnede van een balk ten opzichte van een andere doorsnede wordt gegeven door de oppervlakte van het gereduceerde momentenvlak begrepen tussen beide doorsneden.

Doorbuiging door dwarskrachten

Bijkomende doorbuiging t.g.v. dwarskrachten

Schuifspanningen τ_{xy} zijn vergezeld van glijdingen $\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \rightarrow$ deze zijn **maximaal** t.h.v. de **staafas**, waarbij τ_{max} gelijk is aan $\frac{V_y S_{max}}{e_0 I_z}$ met S_{max} gelijk aan het statisch moment rond de staafas en e_0 de breedte ter hoogte van de staafas.



Uitschrijven van bovenstaande vervorming waarbij de doorbuiging v_1 een gevolg is van de dwarskracht V_y

$$\frac{dv_1}{dx} = \gamma = \frac{\lambda V_y}{G A} = -\frac{\lambda}{G A} \cdot \frac{dM_z}{dx}$$

Bij een prismatische doorsnede resulteert dit in:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{\lambda p}{G A}$$

Mohr en **Greene**: analogieën van *Mohr* en stelling van *Greene* nog steeds toepasbaar, mits het gereduceerd moment wordt vervangen door bovenstaande formulering.