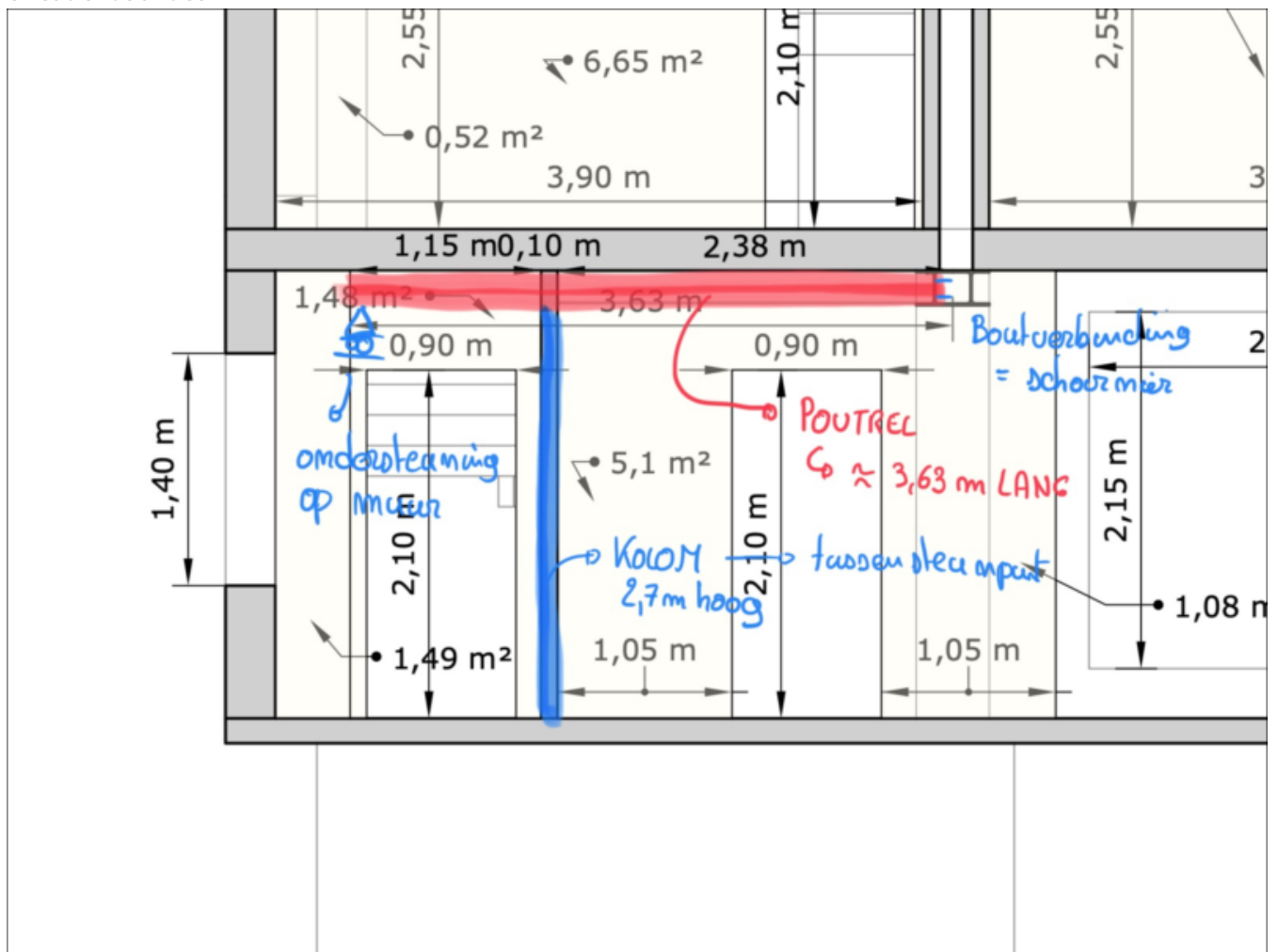


Berekening Profiel 3 - IPE 180

Berekening van **Profiel 3**, een eenvoudig opgelegde ligger **onder muur 10**. Het profiel hoort in theorie de vloer van de badkamer niet te ondersteunen, gezien deze afdraagt van muur 1 naar muur 4 en 5. Veiligheidshalve rekenen we 20% mee van de last t.g.v. de vloer van de badkamer. Verder wordt wel de vloer van de hal gedragen door de muur. De krachtsafdracht bedraagt zo'n 40% van last t.g.v. de vloer van de hal.

Lasten zijn afkomstig van het dak tot het eerste verdiep. Er wordt gerekend met een **nuttige belasting** van 200 kN/m^2 en een krachtsafdracht van de vloeroppervlaktes tussen de draagmuren (dus **krachtsafdracht in 1 richting**), tenzij hier uitdrukkelijk van afgeweken wordt.

situatieschets =



Berekening Profiel 3

Berekening Profiel 3 - IPE 180

Indeling

Probleemstelling: Hyperstatische ligger met 1 tussensteunpunt

Controle

Beschrijving belastingsschema

Eigenschappen van het profiel

Keuze steun

Oplossing belastingsschema

Reactiekrachten

Dwarskracht en momenten

Hoekverdraaiing en doorbuiging

Maximale interne krachten

Maak grafieken aan

Controle

Achterliggende berekeningen

Dependencies en hulpfuncties

Interne krachtswerking

Steunpunten

Kinematische randvoorwaarden

Oplossing basisschema's

Dwarskracht V en buigend moment M

Hoekverdraaiing α en doorbuiging v

Schema 1. Verdeelde belasting p van a tot b

1.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

1.2 Bepalen moment $M(t)$

1.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

1.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

1.5 Kinematische randvoorwaarden

Schema 2. Puntlast F ter hoogte van abscis a

2.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

2.2 Bepalen moment $M(t)$

2.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

2.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

2.5 Kinematische randvoorwaarden

Schema 3. Variabele verdeelde belasting p_a van a tot p_b ter hoogte van b

3.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

3.2 Bepalen moment $M(t)$

3.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

3.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

3.5 Kinematische randvoorwaarden

Voorbeelden

Vb. Schema 1 - Verdeelde belasting p

Vb. Schema 2 - Puntbelasting F

Vb. Schema 3 - Lineair variërende lijnbelasting p_a tot p_b

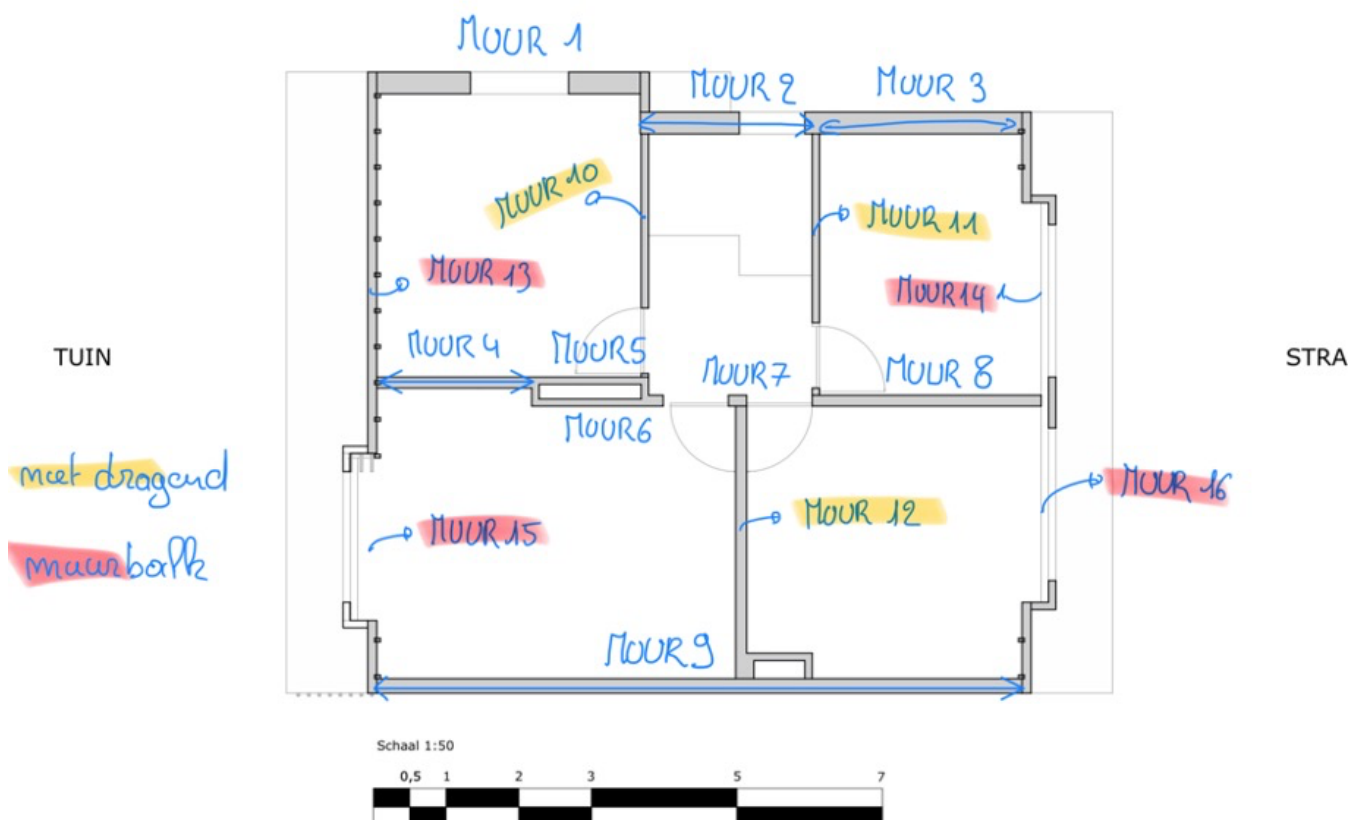
3.4 Samenstel krachten

Indeling

De krachtsafdracht is bepaald voor volgende indeling. In de lastendaling zijn de resulterende belasting begroot ter hoogte van de bovenzijde van de muren van het gelijkvloers. Op onderstaande figuur wordt een onderscheid gemaakt tussen muren met een **dragende functie (rood)** en deze met een **niet dragende functie (geel)**.

Controleer de lastendaling

Alvorens het rekenblad verder aan te vullen, is het belangrijk dat met de correcte uitgangspunten gewerkt wordt. Controleer aldus je resulterende krachten. Bekijk in de lastendaling of de **nuttige last** van $2kN/m^2$ werd meegenomen, alsook de sneeuwlast en in welke situatie (*oud* of *nieuw*) de lasten zijn doorgerekend.



Probleemstelling: Hyperstatische ligger met 1 tussensteunpunt

Hyperstatische ligger met 1 tussensteunpunt en 3 variabele belastingen. Uit de berekening moet blijken dat de kracht direct wordt opgenomen door het steunpunt indien het zich ∞ stijf gedraagt. In realiteit heeft het steunpunt een axiale stijfheid, deze wordt becijferd en meegenomen in de berekening.

Veerstijfheid van het steunpunt

Om enige veiligheid in de berekening mee te nemen, wordt het tussensteunpunt als een veer gemodelleerd, hierbij is de volgende wet van kracht: $F = k \cdot v$ waarbij k voor de veerconstante staat, die op zich gelijk is aan $k = EA/L$, de axiale stijfheid van de ondersteunende kolom. Een vork van stijfheden wordt toegepast in de berekening, waarbij de axiale stijfheid wordt vermenigvuldigd met $\left[1/\sqrt{2}; 1; \infty\right]$.

naam = "Profiel 3"

• naam = "Profiel 3"

Naam van het profiel; naam = Profiel 3

Lijst met beschikbare profielen: IPE 180 in kwaliteiten S235

Lijst met beschikbare kolommen: SHS 90/5 in kwaliteiten S235

	name	G	b	h	tw	tf	W _{ely}	I _y
1	"HE 140 A"	24.7	140.0	133.0	5.5	8.5	155.3	1033.0
2	"IPE A 180"	15.4	91.0	177.0	4.3	6.5	120.0	1062.0
3	"HE 100 M"	41.8	106.0	120.0	12.0	20.0	190.4	1142.0
4	"HE 160 AA"	23.8	160.0	148.0	4.5	7.0	173.3	1282.0
5	"IPE 180"	18.8	91.0	180.0	5.3	8.0	146.3	1316.0
6	"HE 120 C"	39.2	123.0	130.0	9.5	16.0	213.5	1388.0
7	"IPE O 180"	21.3	92.0	182.0	6.0	9.0	165.4	1505.0
8	"HE 140 B"	33.7	140.0	140.0	7.0	12.0	215.6	1509.0
9	"IPE AA 200"	18.0	100.0	196.4	4.5	6.7	156.1	1533.0
10	"IPE A 200"	18.4	100.0	197.0	4.5	7.0	161.5	1591.0

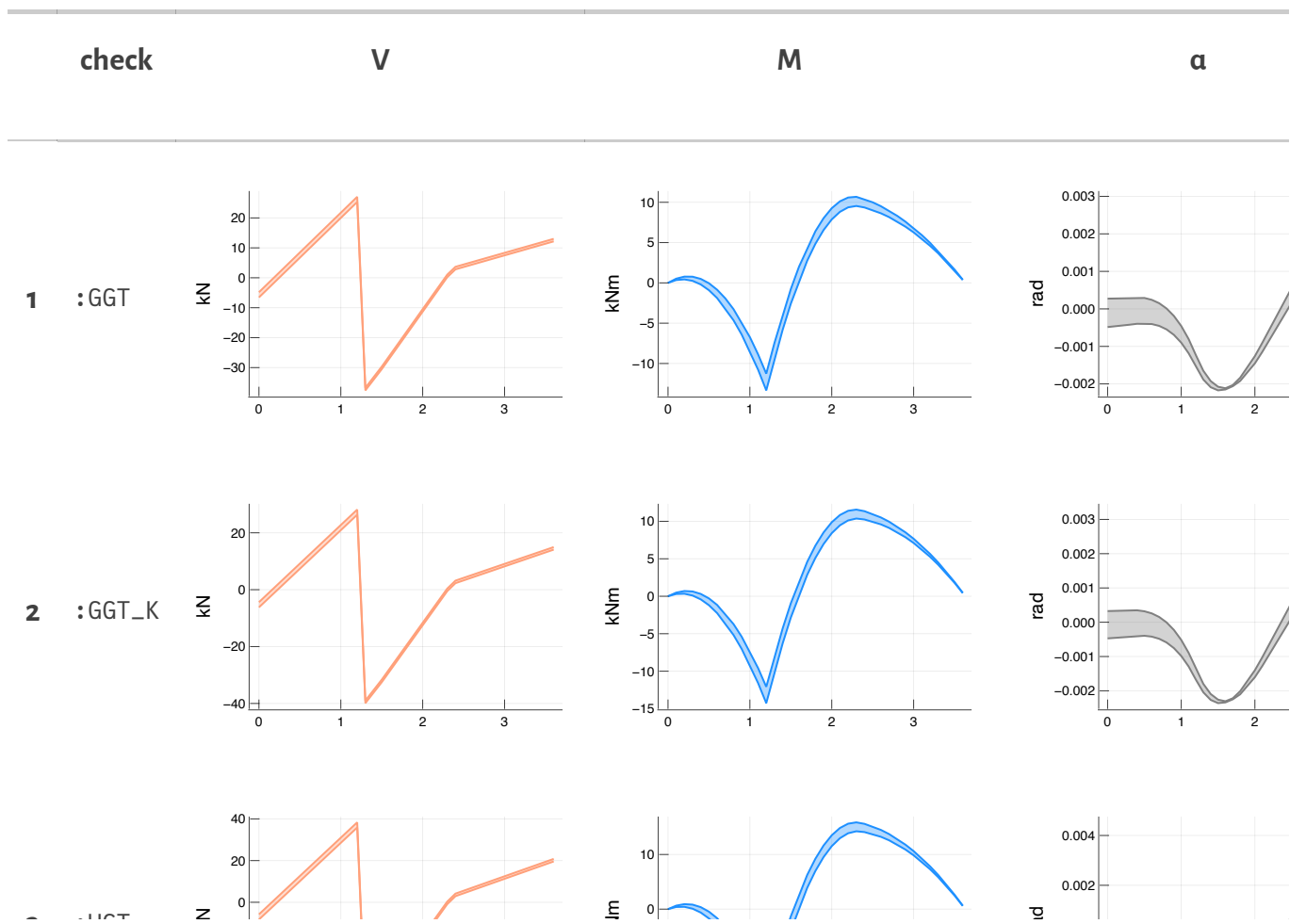
```
ligger = (naam = "IPE 180", kwaliteit = "S235")
```

```
• ligger = (  
•   naam = "IPE 180",  
•   kwaliteit = "S235"  
• )
```

```
kolom = (naam = "SHS 90/5", kwaliteit = "S235")
```

```
• kolom = (  
•   naam = "SHS 90/5",  
•   kwaliteit = "S235"  
• )
```

	check	L	V	M	a	
1	:GGT	3.63	(-37.605, 27.046)	(-13.335, 10.677)	(-0.002, 0.003)	(-0.002, 0.003)
2	:GGT_K	3.63	(-39.891, 28.158)	(-14.262, 11.564)	(-0.002, 0.003)	(-0.002, 0.003)
3	:UGT	3.63	(-54.538, 38.346)	(-19.532, 15.877)	(-0.003, 0.005)	(-0.003, 0.005)



	check	nummer	unity check
1	:GGT	"Check 1"	$UC = \frac{\sigma_s}{0.8 f_{yd}} = \frac{91.1}{188.0} = 0.48 \rightarrow \text{OK}$
2	:GGT	"Check 2"	$UC = \frac{v_{max}}{v_{lim}} = \frac{2.0}{7.3} = 0.28 \rightarrow \text{OK}$
3	:UGT	"Check 3"	$UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{19.5}{34.4} = 0.57 \rightarrow \text{OK}$
4	:UGT	"Check 4"	$UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{54.5}{264.4} = 0.21 \rightarrow \text{OK}$

Opmerking

Bij de controle in **UGT** wordt de momentweerstand niet verminderd in functie van de dwarskracht. Er wordt op toegezien dat de Check 4 de waarde van 0.50 niet overschrijdt. Indien de *Unity Check* groter is, dan grijpen we terug naar NBN EN 1993 om een aangepaste controle uit te voeren.

Resulterende krachten ter hoogte van de steunpunten voor afdracht naar **kolom 1** en **kolom 2**

	check	R1_maximum	R2_maximum	R3_minimum
1	:GGT	6.549	13.248	-67.3065
2	:GGT_K	6.205	15.274	-70.7605
3	:UGT	8.273	21.227	-96.5629

Controle

Controle van de voorwaarden in **GGT** en **UGT**. Bepalend zijn in het desbetreffende geval de doorsnedecontroles in **GGT**. Geen stabiliteitscontrole (*Torsional Lateral Buckling*, *Web Crippling*, ...) zijn momenteel uitgevoerd.

Definitie (zie ook NBN B03-003):

- δ_0 : tegenpijl balk in onbelaste toestand
- δ_1 : ogenblikkelijke verandering t.g.v. perm. belastingen
- δ_2 : toename onder invloed van variabele belasting (kar. geval)
- $\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_0$

Controles in **GGT**

1. **Check 1:** Max 80% van f_{yd} in de meest getrokken/gedrukte vezel
2. **Check 2:** Vervormingen van de ligger beperkt tot $L/500$ voor δ_2 en $L/400$ voor δ_{max} .
 - Toegelaten vervorming v_{lim} en optredende v_{max} in **GGT** Karakteristiek

Controles in **UGT**

3. **Check 3:** Doorsnedecontrole $UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}$ met $M_{Rd} = W_{el,y} f_{yd}$
4. **Check 4:** Dwarskrachtcontrole $UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}}$ met $V_{Rd} = A_V \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$

`check1 = #9 (generic function with 1 method)`

- `check1 = (t, n) -> UC(md"$\frac{\sigma_s}{0.8 f_{yd}}$", t, n)`

`check2 = #11 (generic function with 1 method)`

- `check2 = (t, n) -> UC(md"$\frac{v_{max}}{v_{lim}}$", t, n)`

`check3 = #13 (generic function with 1 method)`

- `check3 = (t, n) -> UC(md"$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}$", t, n)`

`check4 = #15 (generic function with 1 method)`

- `check4 = (t, n) -> UC(md"$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd}}$", t, n)`

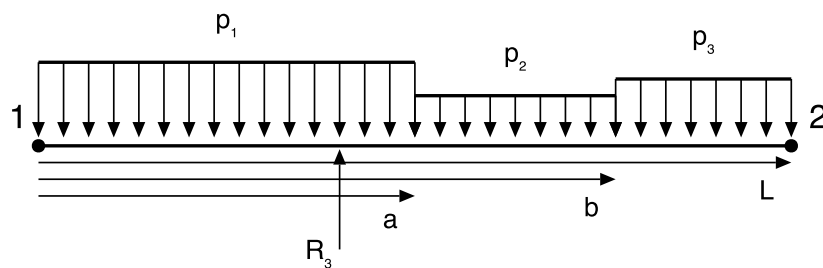
Beschrijving belastingsschema

Definieer de randvoorwaarden of *Boundary Conditions* (BC). Voor een **verdeelde belasting** geef je de parameters a , b , L en p in waarbij een *positieve* waarde van p een neerwaartse belasting is. Voor een **puntbelasting** geef je de parameters a , L en p in. Ook de stijfheid EI .

In het desbetreffende geval waarbij er **drie verdeelde belastingen** aangrijpen naast elkaar, herleidt het aantal paramaters zich tot a , b , x_{steun} , L , p_1 , p_2 en p_3 . De ondersteuning ter hoogte van het tussensteunpunt wordt vervangen door een kracht R_3 .

De ondersteuning ter hoogte van het tussensteunpunt wordt vervangen door een kracht R_3 , een kracht die afhankelijk is van de vervorming ter hoogte van het steunpunt $v_{x_{steun}}$. Mits het opleggen van een bijkomende kinematische randvoorwaarde, dat de vervorming er ter hoogte van dit punt gelijk moet zijn aan de verhouding tussen de te berekenen kracht R_3 en de axiale stijfheid, kan een oplossing bekomen worden voor het belastingsschema.

$$R_3 = \frac{EA}{L} v(x_{steun}) \longrightarrow v(x_{steun}) = \frac{L}{EA} R_3$$



Te definiëren parameters

In de tabel met de **randvoorwaarden** (rvw) geef je de parameters a , x_{steun} , L , p_1 en p_2 in, alsook de grenstoestand (:UGT of :GGT). De parameters die je moet invullen volgen uit de **generalisering** dat in een volgende paragraaf is opgesteld.

Definieer in onderstaande tabel de verschillende belastinggevallen

```
schema = (a = 1.35, b = 2.36, x_steun = 1.2, L = 3.63)
```

```
. schema = (
.   a = 3.63 - 2.28,
.   b = 3.63 - 1.27,
.   x_steun = 1.20,
.   L = 3.63
. )
```

```
geom = (l1 = 1.35, l2 = 1.01, l3 = 1.27, L = 3.63)
```

```
. geom = (
.   l1 = (@_ schema |> __[:a]),
.   l2 = (@_ schema |> __[:b] - __[:a]),
.   l3 = (@_ schema |> __[:L] - __[:b]),
.   L = schema[:L]
. )
```

```
verh_m10_1 = 0.5720338983050848
```

```
. verh_m10_1 = @_ schema |> __[:a] / __[:b] # Verhouding deel 1 t.o.v deel 1 + 2
```


verh_m10_2 = 0.4279661016949152

• verh_m10_2 = 1 - verh_m10_1 # Verhouding deel 2 t.o.v deel 1 + 2

belastingsgevallen =

	naam	waarde	beschrijving
1	"g1"	25.8016	"Perm. last - lastendaling"
2	"g2"	36.5839	"Perm. last - lastendaling"
3	"g3"	5.55505	"Perm. last - lastendaling"
4	"gp"	0.188	"Perm. last - profiel"
5	"q1_vloer"	1.13132	"Var. last - nuttige overlaster"
6	"q2_vloer"	3.25209	"Var. last - nuttige overlaster"
7	"q3_vloer"	4.08926	"Var. last - nuttige overlaster"
8	"q1_sneeuw"	0.0	"Var. last - sneeuwlast"
9	"q2_sneeuw"	0.0	"Var. last - sneeuwlast"
10	"q3_sneeuw"	0.0	"Var. last - sneeuwlast"

Definieer in onderstaande tabel de verschillende combinaties. Voor **GGT** wordt gerekend met het ψ_1 gelijk aan 0.5 voor de **nuttige overlaster** in de *frequente* combinatie, dit volgens Categorie A volgens NBN EN 1990.

combinaties =

	check	naam	formule
1	:GGT	"p1"	"g1 + gp + 0.5 * q1_vloer"
2	:GGT_K	"p1"	"g1 + gp + q1_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"
3	:UGT	"p1"	"1.35 * (g1 + gp) + 1.5 * (q1_vloer +
4	:GGT	"p2"	"g2 + gp + 0.5 * q2_vloer"
5	:GGT_K	"p2"	"g2 + gp + q2_vloer + 0.5 * q2_sneeuw"
6	:UGT	"p2"	"1.35 * (g2 + gp) + 1.5 * (q2_vloer +
7	:GGT	"p3"	"g3 + gp + 0.5 * q3_vloer"
8	:GGT_K	"p3"	"g3 + gp + q3_vloer + 0.5 * q3_sneeuw"
9	:UGT	"p3"	"1.35 * (g3 + gp) + 1.5 * (q3_vloer +

resultaatklasse =

	check	naam	formule	uitkomst
1	:GGT	"p1"	"g1 + gp + 0.5 * q1_vloer"	26.5552
2	:GGT_K	"p1"	"g1 + gp + q1_vloer + 0.5 * q1_sneeuw"	27.1209
3	:UGT	"p1"	"1.35 * (g1 + gp) + 1.5 * (q1_vloer + q1_sneeuw)"	36.7829
4	:GGT	"p2"	"g2 + gp + 0.5 * q2_vloer"	38.3979
5	:GGT_K	"p2"	"g2 + gp + q2_vloer + 0.5 * q2_sneeuw"	40.024
6	:UGT	"p2"	"1.35 * (g2 + gp) + 1.5 * (q2_vloer + q2_sneeuw)"	54.5202
7	:GGT	"p3"	"g3 + gp + 0.5 * q3_vloer"	7.78768
8	:GGT_K	"p3"	"g3 + gp + q3_vloer + 0.5 * q3_sneeuw"	9.83231
9	:UGT	"p3"	"1.35 * (g3 + gp) + 1.5 * (q3_vloer + q3_sneeuw)"	13.887

maatgevend =

	check	p1	p2	p3
1	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768
2	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231
3	:UGT	36.7829	54.5202	13.887

rvw =

	check	p1	p2	p3	a	b	x_steun	L
1	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63
2	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63
3	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63

```

• rvw = begin
•   maatgevend[!, "a"] .= schema[:a]
•   maatgevend[!, "b"] .= schema[:b]
•   maatgevend[!, "x_steun"] .= schema[:x_steun]
•   maatgevend[!, "L"] .= schema[:L]
•   maatgevend
• end

```

Twee hulpvariabelen voor later...

isGGT = BitVector: [true, false, false]

isUGT = BitVector: [false, false, true]

Voor de vervorming en hoekverdraaiing moet de stijfheid in acht genomen worden

Eigenschappen van het profiel

Eigenschappen van het gekozen profiel - type IPE 180

Haal informatie van het profiel op en bewaar het in `info`

`profiel =`

	name	G	h	b	tw	tf	r	hi	more
1	"IPE 180"	18.8	180.0	91.0	5.3	8.0	9.0	164.0	

`buigstijfheid = 2763.6`

```
• buigstijfheid = 210000 * (profiel[!, "Iy"] |> first) / 10^5 # kNm2
```

`f_yd = 235.0`

`W_el = 146.3`

```
• W_el = profiel[1, "Wel.y"] # cm3
```

`M_Rd = 34.3805`

```
• M_Rd = W_el * f_yd / 1000 # kNm
```

`V_Rd = 264.375`

```
• V_Rd = (profiel[!, "Avz"] |> first) * f_yd / 10 # kN
```

Keuze steun

De stijfheid is bepaald uit de materiaal karakteristieken van de de steun.

Keuze = *SHS 90/5*

`steun =`

	name	b	t	ro	ri	G	P	A	more
1	"SHS 90/5"	90	5	7.5	5	13.1	0.347	1673	

`A = 1673`

```
• A = steun[!, :A] |> first # mm2
```

`E = 210000`

```
• E = 210_000 # N/mm2 of 106 N/m2
```

`L_kolom = 2.8`

• `L_kolom = 2.8 # m`

`k = 125475.000000000001`

• `k = E * A / L_kolom / 1000 # kN/m`

Oplossing belastingsschema

Met behulp van het **superpositiebeginsel** generaliseren we het probleem door een samenstel van de effecten, V , M , α en v , door de afzonderlijke aangrijpende belastingen te nemen.

Opgepast!

Bij het gebruiken van de syntax `R11(deel...)` moet je opletten hoe `deel` is opgebouwd, immers worden de substituties niet gelijktijdig uitgevoerd, maar één voor één, en telkens wordt de formule geëvalueerd en vereenvoudigd. Dus pas je $a \Rightarrow b$ (a naar b) aan en dan $b \Rightarrow L$ (b naar L), dan wordt de eerder omzetting dus ook verder doorgevoerd.

$(p_1, p_2, p_3, R_3, x_{steun})$

• `p1, p2, p3, R3, x_steun = symbols("p_1 p_2 p_3 R_3 x_{steun}", real=True)`

`deel1 = (a , b , p)`
 $\Rightarrow 0$
 $\Rightarrow a \Rightarrow p_1$

`deel2 = (p)`
 $\Rightarrow p_2$

`deel3 = (b , a , p)`
 $\Rightarrow L \Rightarrow b \Rightarrow p_3$

Omdat de ligger **hyperstatisch** is, wordt er *gesneden* naar het steunpunt en wordt een fictieve kracht R_3 in rekening gebracht, deze kracht wordt als een externe belasting ingerekend

`deel4 = (a , F)`
 $\Rightarrow x_{steun} \Rightarrow R_3$

Reactiekrachten

Opstellen vergelijkingen

Bij het opstellen van de vergelijkingen maak je gebruik van de functies R_{11} , R_{12} , V_1 , M_1 , α_1 en v_1 voor **gespreide lasten** en van de formules R_{21} , R_{22} , V_2 , M_2 , α_2 en v_2 voor een **geconcentreerde last**

$R_1 =$

$$\frac{R_3(L - x_{steun})}{L} - \frac{ap_1(-2L + a)}{2L} + \frac{p_2(a - b)(-2L + a + b)}{2L} + \frac{p_3(-L + b)^2}{2L}$$

$$\bullet R_1 = R_{11}(\text{deel1...}) + R_{11}(\text{deel2...}) + R_{11}(\text{deel3...}) + R_{21}(\text{deel4...})$$

$R_2 =$

$$\frac{R_3 x_{steun}}{L} + \frac{a^2 p_1}{2L} + \frac{p_2(-a^2 + b^2)}{2L} + \frac{p_3(L^2 - b^2)}{2L}$$

$$\bullet R_2 = R_{12}(\text{deel1...}) + R_{12}(\text{deel2...}) + R_{12}(\text{deel3...}) + R_{22}(\text{deel4...})$$

Dwarskracht en momenten

Oplossing neerschrijven van de dwarskracht en het buigend moment

$V =$

$$\left(R_3 - \frac{R_3(L - x_{steun})}{L} \right) (-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun})) - \frac{R_3(1 - \theta(t - x_{steun}))(L - x_{steun})}{L}$$

$$\bullet V = V_1(\text{deel1...}) + V_1(\text{deel2...}) + V_1(\text{deel3...}) + V_2(\text{deel4...})$$

$M =$

$$\frac{R_3 t(1 - \theta(t - x_{steun}))(L - x_{steun})}{L} + \frac{R_3 x_{steun}(L - t)(-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun}))}{L} + \frac{p_1(-$$

$$\bullet M = M_1(\text{deel1...}) + M_1(\text{deel2...}) + M_1(\text{deel3...}) + M_2(\text{deel4...})$$

Hoekverdraaiing en doorbuiging

Oplossing neerschrijven van de hoekverdraaiing en de doorbuiging

$\alpha =$

$$\frac{(1 - \theta(t - x_{steun})) \left(\frac{t^2(LR_3 - R_3x_{steun})}{2L} + \frac{-2L^2R_3x_{steun} + 3LR_3x_{steun}^2 - R_3x_{steun}^3}{6L} \right) + (-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun}))}{EI}$$

- $\alpha = \alpha_1(\text{deel1...}) + \alpha_1(\text{deel2...}) + \alpha_1(\text{deel3...}) + \alpha_2(\text{deel4...})$

$v =$

$$\frac{(1 - \theta(t - x_{steun})) \left(\frac{t^3(LR_3 - R_3x_{steun})}{6L} + \frac{t(-2L^2R_3x_{steun} + 3LR_3x_{steun}^2 - R_3x_{steun}^3)}{6L} \right) + (-\theta(-L + t) + \theta(t - x_{steun}))}{EI}$$

- $v = v_1(\text{deel1...}) + v_1(\text{deel2...}) + v_1(\text{deel3...}) + v_2(\text{deel4...})$

Maximale interne krachten

Maximale interne krachten en hun voorkomen (x abscis)

lambdify

lambdify wordt gebruikt om de formules om te zetten van hun SymPy vorm naar een pure Julia vorm

Substitueer alle parameters en los op naar R_3

$R3_{opl} =$

$$\frac{-L^4p_3x_{steun}\theta(-L + x_{steun}) + L^4p_3x_{steun} - 4L^2a^2p_1x_{steun}\theta(-L + x_{steun}) + 4L^2a^2p_1x_{steun} + \dots}{EI}$$

vergelijking = #9 (generic function with 1 method)

```
• vergelijking = rvw -> Eq.(  
•     v(  
•         t=>x_steun, # Evalueer de vervorming ter hoogte van x_steun  
•         Dict(collect(keys(rvw)) .|> eval .=> collect(values(rvw))),...,  
•         EI=>buigstijfheid # Substitueer de buigstijfheid van de balk  
•     ),  
•     R3 ./ (k * [1/sqrt(2), 1, oo]) # De vervorming ter hoogte van de steun  
• )
```

rvw_volledig =

	check	p1	p2	p3	a	b	x_steun	L	R3
1	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63	-64.7245
2	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63	-65.46
3	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63	-67.3065
4	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63	-68.046
5	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63	-68.8193
6	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63	-70.7605
7	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63	-92.8586
8	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63	-93.9138
9	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63	-96.5629

fn (generic function with 1 method)

```
• #fn = r -> (i -> lambdify(i(mapping(r)...)))
• function fn(r)
•   sol = Dict(collect(keys(r)) .|> eval .=> collect(values(r)))
•   return i -> lambdify(i(
•     sol...,
•     EI => buigstijfheid
•   ))
• end
```

rnd = #1 (generic function with 1 method)

Onderstaande tabel bevat de **gesubstitueerde** generieke oplossingen

opl =

	check	p1	p2	p3	a	b	x_steun	L	R3	
1	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63	-64.7245	#
2	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63	-65.46	#
3	:GGT	26.5552	38.3979	7.78768	1.35	2.36	1.2	3.63	-67.3065	#
4	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63	-68.046	#
5	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63	-68.8193	#
6	:GGT_K	27.1209	40.024	9.83231	1.35	2.36	1.2	3.63	-70.7605	#
7	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63	-92.8586	#
8	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63	-93.9138	#
9	:UGT	36.7829	54.5202	13.887	1.35	2.36	1.2	3.63	-96.5629	#

Hieronder wordt een **overzicht tabel** weergegeven, waarbij de minimum en maximum waardes van de verschillende effecten, zijnde V , M , α en v worden weergegeven

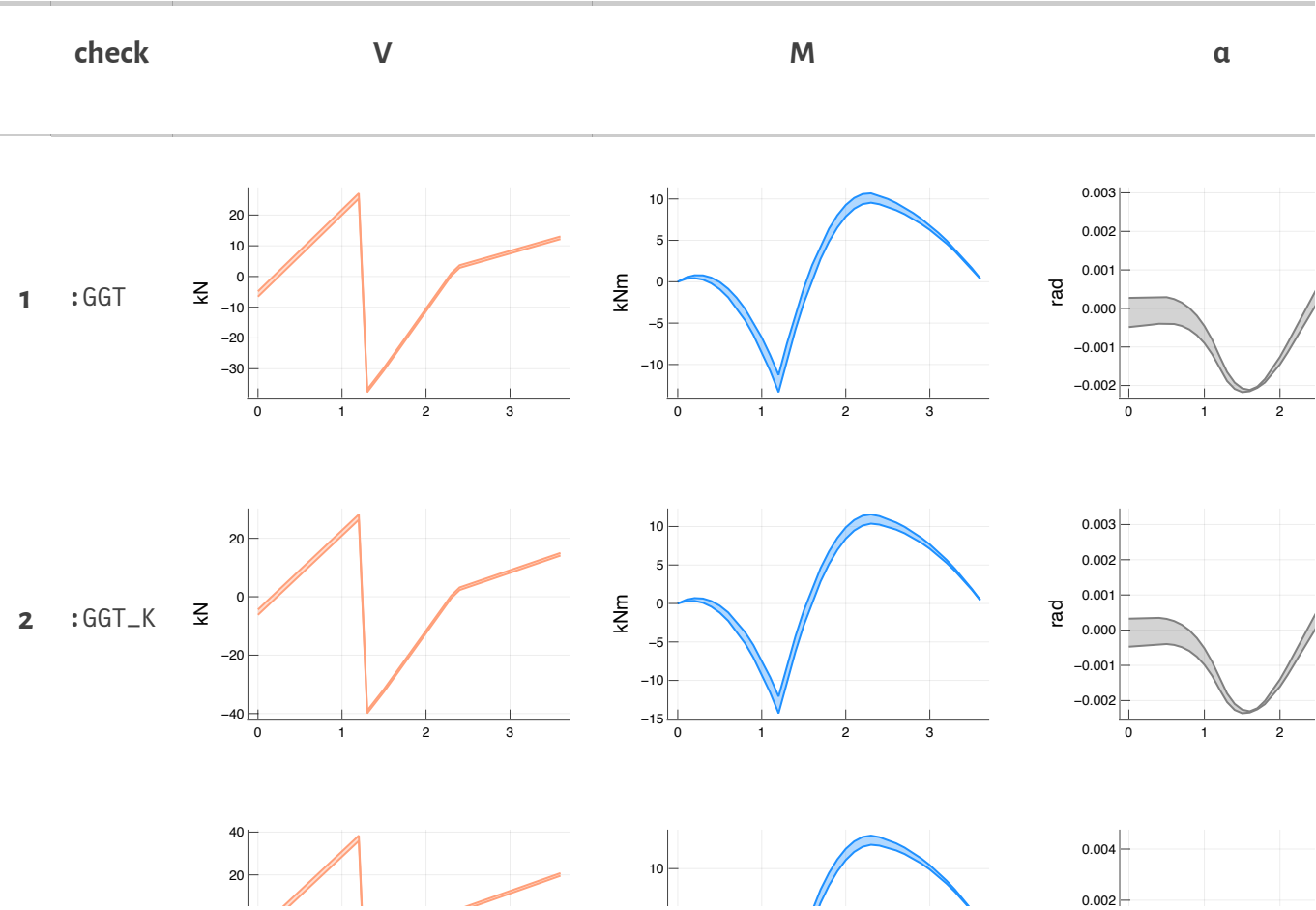
overzicht =

	check	L	V	M	α	v
1	:GGT	3.63	(-37.605, 27.046)	(-13.335, 10.677)	(-0.002, 0.003)	(-0.001, 0.001)
2	:GGT_K	3.63	(-39.891, 28.158)	(-14.262, 11.564)	(-0.002, 0.003)	(-0.001, 0.001)
3	:UGT	3.63	(-54.538, 38.346)	(-19.532, 15.877)	(-0.003, 0.005)	(-0.002, 0.002)

Maak grafieken aan

minmax (generic function with 1 method)

grafieken =



grafiek (generic function with 1 method)

Controle

Aftoetsen van de interne krachten en vervormingen

Controles

Maak gebruik van *enumerate* Check met waarde *false* of *true*.

Check(true) resulteert in de uitdraai: OK::Check = 1

Check(false) resulteert in de uitdraai: NOK::Check = 0

controle (generic function with 1 method)

```
• function controle(r::NamedTuple)
•   checks = Array{Union{Missing, UC}}(missing, 4)
•   if r.check == :GGT
•       # Check 1 - Controleer de spanning in het staal
•       M_ggt = maximum(r.M .|> (abs)) # kNm
•       σ_ggt = (M_ggt / W_el) * 1000 # MPa
•       checks[1] = check1(σ_ggt, 0.8 * f_yd)
•       # Check 2 - Controleer de doorbuiging van de balk
•       v_lim = r.L / 500 * 1000 # mm
•       v_max = maximum(r.v .|> (abs)) * 1000 # mm
•       checks[2] = check2(v_max, v_lim)
•   elseif r.check == :UGT
•       # Check 3 - Controle doorsnede
•       M_Ed = maximum(r.M .|> (abs))
•       checks[3] = check3(M_Ed, M_Rd)
•       # Check 3 - Controle doorsnede
•       V_Ed = maximum(r.V .|> (abs))
•       checks[4] = check4(V_Ed, V_Rd)
•   end
•   return checks
• end
```

controles =

	check	nummer	unity check
--	-------	--------	-------------

1	:GGT	"Check 1"	$UC = \frac{\sigma_s}{0.8 f_{yd}} = \frac{91.1}{188.0} = 0.48 \rightarrow \text{OK}$
---	------	-----------	--

2	:GGT	"Check 2"	$UC = \frac{v_{max}}{v_{lim}} = \frac{2.0}{7.3} = 0.28 \rightarrow \text{OK}$
---	------	-----------	---

3	:UGT	"Check 3"	$UC = \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{19.5}{34.4} = 0.57 \rightarrow \text{OK}$
---	------	-----------	---

4	:UGT	"Check 4"	$UC = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{54.5}{264.4} = 0.21 \rightarrow \text{OK}$
---	------	-----------	--

Achterliggende berekeningen

Hieronder wordt de algemene uitwerking van de balkentheorie behandeld.

Dependencies en hulpfuncties

Hieronder worden de *dependencies* geladen en de hulpfuncties gedefinieerd

```
• using PlutoUI , ImageView , Images , Conda , PyCall , SymPy , Roots ,  
  Plots , HTTP , JSON , Luxor , DotEnv , SQLite , DataFrames , UUIDs ,  
  Underscores
```

Laad de *environment variables* met `DotEnv.config()`

```
db = SQLite.DB("assets/db/db.sqlite")
```

Start de plotly backend

```
PlotlyBackend()
```

```
• plotly()
```

Herschaal het font

```
• begin  
•   Plots.scalefontsizes()      # Reset the font  
•   Plots.scalefontsizes(2/3)  # Make the font 2 times smaller  
• end
```

Symbolische notatie wordt gehanteerd om de basis op te stellen. Het opstellen van de vergelijken doen we via `SymPy`, bekend vanuit **Python**. Het pakket kun je aanroepen via `PyCall`, wat we ook zullen doen voor enkele functies, maar kan ook via `SymPy.jl` dat wat *Julia* specifieke syntax toevoegd om gebruik te maken van het pakket. Doordat in de *backend* verbinding wordt gelegd met een *Python* omgeving, is snelheid beperkt:

`SymPy` oproepen via `PyCall` doe je als volgt:

```
import Pkg; Pkg.add("Conda")
import Pkg; Pkg.add("PyCall")
# Install SymPy using Conda
using Conda, PyCall
Conda.add("sympy")
# PyCall uses the python interpreter included in the Conda.jl package
sympy = pyimport("sympy")
```

Naast bovenstaande roepen we ook `SymPy.jl` op om gebruik te maken van `SymPy` via *Julia* specifieke syntax:

```
import Pkg; Pkg.add("SymPy")
```

`_heaviside` (generic function with 1 method)

```
• function _heaviside(t)
•     # Bij t=0 is sign(t) = 0 of deze functie 0.5
•     0.5 .* (sign.(t) .+ 1)
• end
```

Ook `SymPy` heeft een methode `Heaviside` - functie te gebruiken via `PyCall`

`heaviside` = `PyObject Heaviside`

```
• # Bij deze definitie is de waarde bij t=0 gelijk aan 'onbestaande'
• heaviside = sympy.functions.special.delta_functions.Heaviside
```

`interval` (generic function with 1 method)

```
• function interval(t, a, b)
•     # Bij t=b wordt een waarde van 0.5 geretourneerd (limitatie)
•     heaviside(t-a,0) .- heaviside(t-b,0)
• end
```

Naast `Heaviside` is er ook een methode `Piecewise` via `PyCall` aan te roepen. Helaas ondersteunen deze functie wel geen `Array` calls, dus moet je de `map` functie in *Julia* gaan gebruiken om bijvoorbeeld te gaan plotten

`piecewise` = `PyObject Piecewise`

```
• # Functie roep je aan met f(t) = piecewise((5, t < 2), (10, t <= 4))
• piecewise = sympy.functions.elementary.piecewise.Piecewise
```

Eigen `Check` type met ook een eigen uitdraai

```
• @enum Check OK=true NOK=false
```

```
• function Base.show(io::IO, mime::MIME"text/html", c::Check)
•     id = UUIDs.uuid4().value
•     color = (c == Check(false)) ? "crimson" : "yellowgreen"
•     Base.write(io, """
•         <style>
•         .marked-$id {
•             color: white;
•             background-color: $(color);
•             padding: 0 2px;
•         }
•     </style>
•     <mark class="marked-$id">$(string(c))</mark>
•     """)
• end
```

Definieer een nieuwe *type* getiteld *Unity Check* of UC

```
• struct TwoColumn{L, R}
•     left::L
•     right::R
• end
```

```
• function Base.show(io, mime::MIME"text/html", tc::TwoColumn)
•     write(io, """<div style="display: flex; align-items: center; justify-content:
• center;"><div>""")
•     show(io, mime, tc.left)
•     write(io, """/div><div style="flex: 1; padding-left: 2px;">""")
•     show(io, mime, tc.right)
•     write(io, """/div></div>""")
• end
```

```
• function Base.show(io::IO, mime::MIME"text/html", uc::UC)
•     afronden = t -> (d -> round(d, digits=t))
•     subs = Dict(
•         "beschrijving" => uc.beschrijving.content[1].formula,
•         "waarde" => uc.waarde |> afronden(1),
•         "limiet" => uc.limiet |> afronden(1),
•         "uc" => (uc.waarde / uc.limiet) |> afronden(2)
•     )
•     format = raw"\text{UC} = beschrijving = \dfrac{waarde}{limiet} =
uc\rightarrow$"
•
•     Base.write(io, """/div><div>""")
•     Base.show(io, mime, Markdown.parse(replace(format,
r"beschrijving|waarde|limiet|uc" => s -> subs[s])))
•     Base.write(io, """/div><div style="flex: 1; padding-left: 2px;">""")
•     Base.show(io, mime, uc.check)
•     Base.write(io, """/div></div>""")
• end
```

```
• mutable struct UC
•     beschrijving::Markdown.MD
•     waarde::Float64 # teller
•     limiet::Float64 # noemer
•     check::Check
•     UC(beschrijving, waarde, limiet) = (uc = new(beschrijving, waarde, limiet);
uc.check = Check(waarde / limiet <= 1); uc)
• end
```

Interne krachtswerking

Superpositiebeginsel

Wanneer een lichaam onderworpen is aan verschillende krachtsverwerkingen (F , M , ΔT ...) mag men het effect (σ , ϵ , v , α ...) van elk van die belastingen, waarbij ze afzonderlijk op het lichaam inwerken, optellen of superponeren indien een aantal geldigheidsvoorwaarden vervuld zijn:

- De (veralgemeende) verplaatsingen zijn klein
- De materialen zijn lineair elastisch en kunnen met andere woorden door de wetten van *Hooke* worden beschreven
- Er is **geen** energiedissipatie in de verbindingen door wrijving

Gebruik `@syms` om *SymPy symbols* te definiëren of gebruik de functie `symbols`. De laatste optie heeft het voordeel dat je nadien je invoergegevens nog kan wijzigen. Bij het gebruik van `@syms` kan je dit niet langer. Ook heb je flexibiliteit over de naam bij het gebruik van `symbols`

Steunpunten

Bepaal de krachten in de steunpunten door het momentenevenwicht uit te schrijven in de steunpunten. Het moment ter hoogte van de steunpunten is 0, dus uit dit gegeven bereken je eenvoudig de krachten ter hoogte van de steunpunten. Bij een **statisch** bepaalde constructie bepaal je dus in 1 tijd je reactiekrachten.

Hyperstatische constructie?

Een **hyperstatische** constructie kun je oplossen door het *snijden* in de krachten en het te vervangen door onbekende krachten. Je gaat door met *snijden* tot je een statisch bepaalde constructie bekomt. Bij de oplossing leg je nadien bijkomende beperkingen op. Ter hoogte van het steunpunt zal bijvoorbeeld de vervorming er gelijk moeten zijn aan 0 of de rotatie 0 indien je *gesneden* hebt in een momentvaste verbinding

Kinematische randvoorwaarden

Leg de kinematische randvoorwaarden op om de constanten te gaan bepalen. Deze voorwaarden bestaan onderander uit $v(t \Rightarrow 0) = 0$ en $v(t \Rightarrow L) = 0$. De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

Hyperstatische constructie?

Bij een **hyperstatische** constructie worden extra randvoorwaarden opgelegd. Zo zal bijvoorbeeld naar de verticale kracht van een steunpunt *gesneden* zijn en dien nu opgelegd te worden dat de vervorming er gelijk is aan 0.

Oplossing basisschema's

Bepaal de dwarskrachten $V(t)$ en momenten $M(t)$ voor een eenvoudig opgelegde ligger met twee verdeelde belastingen. Nadien bepalen we ook de hoekverdraaiing $\alpha(t)$ en de doorbuiging $v(t)$.

Dwarskracht V en buigend moment M

Berekening van de interne krachten. Bij een **statisch** bepaalde constructie zijn deze niet afhankelijk van de *stijfheid*, bij een **hyperstatische** constructie wel en volgt het dwarskrachtverloop pas uit het oplossen van een stelsel

Hoekverdraaiing α en doorbuiging v

Deze worden berekend uit de kromming χ .

We wensen de **vervormingen** $v(t)$ te kennen van de ligger, hiervoor grijpen we terug naar de volgende theorie. De kromming χ is gelijk aan de verhouding tussen het moment en de buigstijfheid, dit bij kleine vervormingen.

$$\chi = \frac{M}{EI} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2}$$

Merk op dat we hier t hanteren als indicatie voor de positie op de ligger.

De ligger wordt opgeknipt in een aantal delen, een *piecewise* functie. Elk deel wordt geïntegreerd. Constanten komen op de proppen die nadien via een stelsel bepaald dienen te worden. Voor elk deel wordt een **unieke** constante gedefinieerd.

$t =$

t

$(a, b, p, p_a, p_b, F, L, EI)$

Schema 1. Verdeelde belasting p van a tot b

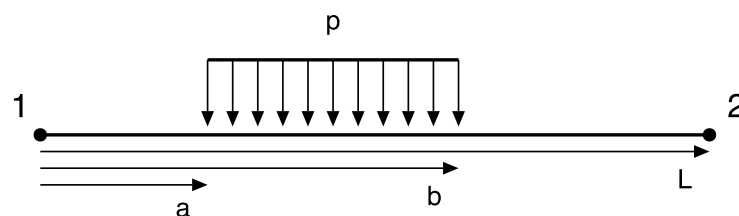
Eenvoudig opgelegde ligger, opwaartse kracht = positief (steunpunten). Aangrijpende kracht p is neerwaarts gericht.

Toelichting

Dit is een speciaal geval van paragraaf §3 Variabele verdeelde belasting p_a van a tot p_b ter hoogte van b , waarbij p_a gelijk wordt gesteld aan p_b . De waarde van de verdeelde belasting wordt gelijk gesteld aan p . De *mapping* wordt vastgelegd in BC31, de *boundary condition* toegepast op §3 ter beking van de oplossing van §1

$$\text{BC31} = (p_a, p_b)$$

$$\Rightarrow p \Rightarrow p$$



Moment in de steunpunten = 0 → evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

$$\text{R11} =$$

$$\frac{p(a-b)(-2L+a+b)}{2L}$$

$$\text{R12} =$$

$$\frac{p(-a^2+b^2)}{2L}$$

1.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$\text{v1} =$$

$$\frac{p((a-b)(a+b)(\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) - (a-b)(\theta(-a+t) - 1)(2L-a-b) - (2L(b -$$

$$2L$$

1.2 Bepalen moment $M(t)$

M1 =

$$\frac{p \left(t(a-b)(\theta(-a+t) - 1)(2L - a - b) + (L-t)(a-b)(a+b)(\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) - \right)}{2L}$$

1.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

α_1 =

$$\frac{p \left(-(a-b) \left((\theta(-L+t) - \theta(-b+t)) (4L^2a^2 - 4L^2b^2 - 12Lt(a^2 - b^2)) + a^4 - b^4 + 6t^2(a^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \right) \right)$$

1.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

v_1 =

$$\frac{p \left(-(a-b) \left(t(\theta(-a+t) - 1) (4L^2a^2 - 4L^2b^2 - 4La^3 + 4Lb^3 + a^4 - b^4 + 2t^2(-2La + 2Lb \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \right) \right)$$

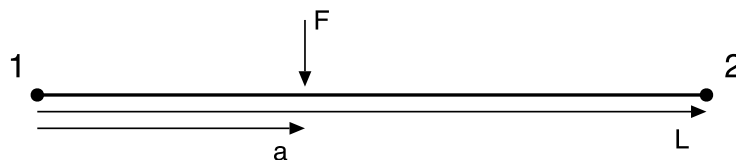
1.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

De kinematische randvoorwaarden hoeven echter niet meer opgelegd te worden, omdat de oplossing volgt uit de generieke situatie met een lineair variërende belasting p_a tot p_b .

Schema 2. Puntlast F ter hoogte van abscis a

Eenvoudig opgelegde ligger, reactiekracht opwaarts = positief, aangrijpende kracht neerwaarts = negatief



Moment in de steunpunten = 0 \rightarrow evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

R21 =

$$\frac{F(L-a)}{L}$$

R22 =

$$\frac{Fa}{L}$$

2.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$-\frac{F(1 - \theta(-a + t))(L - a)}{L} + \left(F - \frac{F(L - a)}{L}\right)(-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))$$

2.2 Bepalen moment $M(t)$

$$\frac{Fa(L - t)(-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))}{L} + \frac{Ft(1 - \theta(-a + t))(L - a)}{L}$$

2.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

(C_1, C_2)

$$(1 - \theta(-a + t))\left(C_1 + \frac{t^2(FL - Fa)}{2L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))\left(C_2 + Fat - \frac{Fat^2}{2L}\right)$$

$EI\alpha_2 =$

$$(1 - \theta(-a + t))\left(\frac{t^2(FL - Fa)}{2L} + \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))$$

$\alpha_2 =$

$$\frac{(1 - \theta(-a + t))\left(\frac{t^2(FL - Fa)}{2L} + \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))\left(Fat - \frac{Fat^2}{2L}\right)}{EI}$$

2.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

(D_1, D_2)

$$(1 - \theta(-a + t))\left(C_1t + D_1 + \frac{t^3(FL - Fa)}{6L}\right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t))\left(C_2t + D_2 + \frac{F}{6L}\right)$$

EIV2 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3(FL - Fa)}{6L} + \frac{t(-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3)}{6L} \right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a -$$

v2 =

$$\frac{(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3(FL - Fa)}{6L} + \frac{t(-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3)}{6L} \right) + (-\theta(-L + t) + \theta(-a + t)) \left(\frac{Fa^3}{6} + \frac{Fa^2}{2} \right)}{EI}$$

2.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

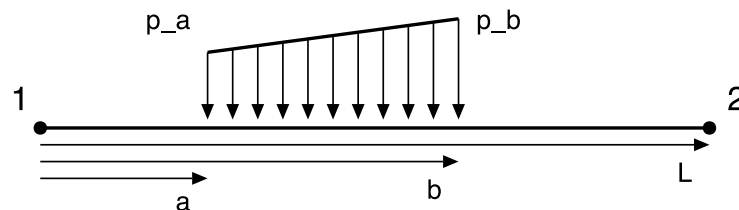
$$\mathbf{rvw2} = [D_1, \frac{Ca - C_2a + D_1 - D_2}{L} + \frac{Fa^2}{2L} + \frac{C_2L^2 - FaL}{6L}, C_2L + D_2 + \frac{FL^2a}{3}, C_1 - C_2 - Fa^2 + \frac{Fa^3}{2L} + \frac{a^2(FL - Fa)}{2L}]$$

$$\mathbf{opl2} = \text{Dict}(\quad C_2 \quad D_2 \quad D_1 \quad C_1 \quad)$$

$$\Rightarrow \frac{-2FL^2a - Fa^3}{6L}, \Rightarrow \frac{Fa^3}{6}, \Rightarrow 0, \Rightarrow \frac{-2FL^2a + 3FLa^2 - Fa^3}{6L}$$

Schema 3. Variabele verdeelde belasting p_a van a tot p_b ter hoogte van b

Eenvoudig opgelegde ligger, opwaartse kracht = positief (steunpunten). Aangrijpende kracht p_a en p_b is neerwaarts gericht.



Moment in de steunpunten = 0 → evenwicht er rond uitschrijven ter bepalen van de steunpuntsreacties

R31 =

$$(-a + b) \left(\frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L}$$

R32 =

$$\frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L}$$

3.1 Bepalen dwarskracht $V(t)$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(-(-a + b) \left(\frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) + \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) + (\theta(-a +$$

3.2 Bepalen moment $M(t)$

$$t(1 - \theta(-a + t)) \left((-a + b) \left(\frac{p_a}{2} + \frac{p_b}{2} \right) - \frac{\frac{p_a(-a+b)(a+b)}{2} + \frac{(-a+b)(a+2b)(-p_a+p_b)}{3}}{L} \right) + \left(t \left((-a +$$

3.3 Bepalen hoekverdraaiing $\alpha(t)$

$$(C_1, C_2, C_3)$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(C_1 + \frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2a$$

EI α_3 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b +$$

α_3 =

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^2(-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2p_a + 2a^2p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2p_a - 4b^2p_b)}{12L} + \frac{20L^2a^2p_a + 40L^2a^2p_b}{12L} \right)$$

3.4 Bepalen doorbuiging $v(t)$

$$(D_1, D_2, D_3)$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(C_1 t + D_1 + \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a - 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L} \right)$$

$$EIv3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L} \right)$$

$$v3 =$$

$$(1 - \theta(-a + t)) \left(\frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L} \right) + \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}$$

3.5 Kinematische randvoorwaarden

De ligger heeft een continue vervorming en ook de hoekverdraaiing verloopt continu.

$$rvw3 = [D_1, \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}, \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}]$$

$$opl3 =$$

$$\text{Dict}(C_2, D_2, D_1, C_1, D_3, C_3)$$

$$\Rightarrow \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}, \Rightarrow \frac{-4a^5 p_b - a^5 p_b + 5a^4 b p_a}{120a - 120b}, \Rightarrow 0, \Rightarrow \frac{t(20L^2 a^2 p_a + 40L^2 a^2 p_b - 20L^2 a b p_a - 20L^2 a b p_b + 10L^2 b^2 p_a + 20L^2 b^2 p_b)}{36L}, \Rightarrow \frac{t^3 (-3Lap_a - 3Lap_b + 3Lbp_a + 3Lbp_b + a^2 p_a + 2a^2 p_b - 2abp_a + 2abp_b + b^2 p_a + 4b^2 p_b)}{36L}$$

Voorbeelden

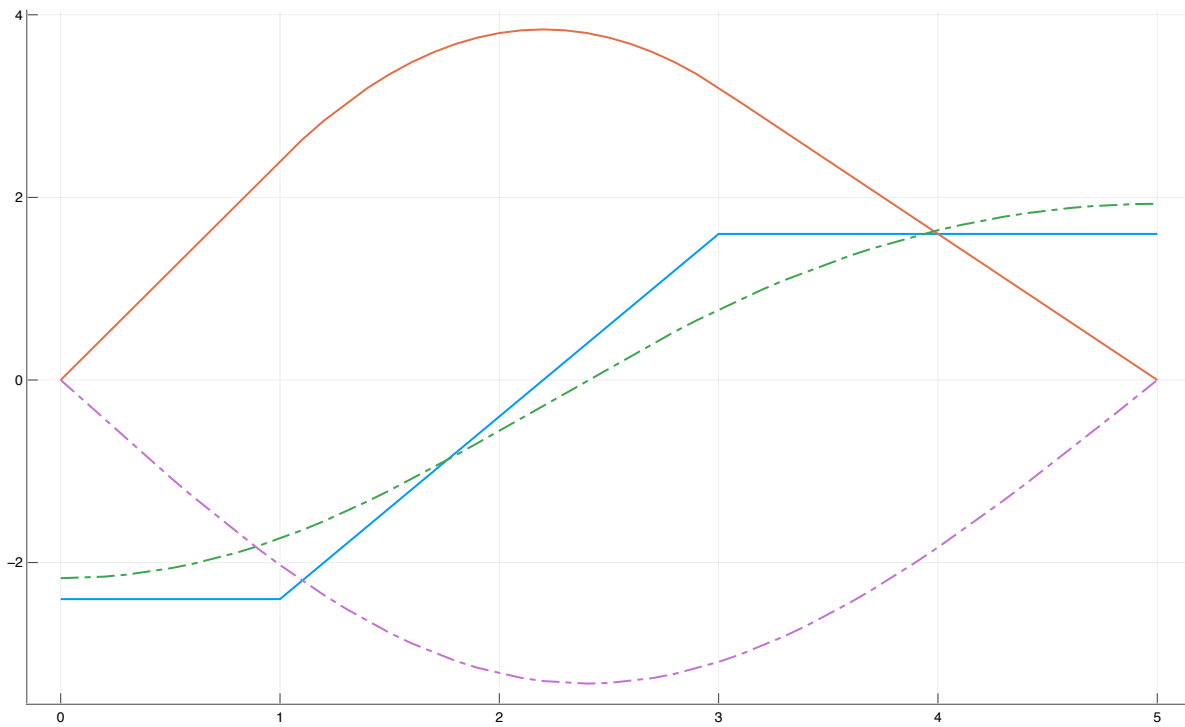
Vb. Schema 1 - Verdeelde belasting p

Verdeelde belasting volgens ($a \Rightarrow 1$, $b \Rightarrow 3$, $L \Rightarrow 5$, $p \Rightarrow 2$, $EI \Rightarrow 2763.6$)

Waarde voor p : **2** kN/m

$$BC1 = (a, b, L, p, EI)$$

$$\Rightarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2 \Rightarrow 2763.6$$



Vb. Schema 2 - Puntbelasting F

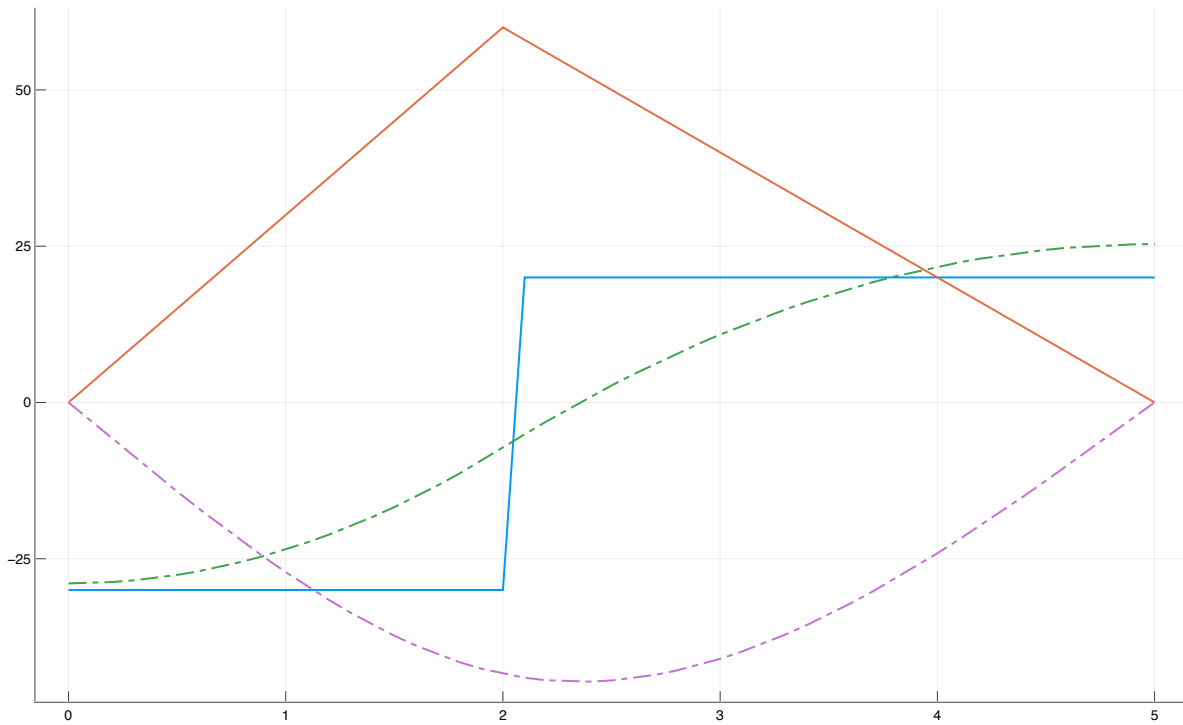
Puntbelasting volgens ($a \Rightarrow 2$, $L \Rightarrow 5$, $F \Rightarrow 50$, $EI \Rightarrow 2763.6$)

Waarde voor a : **2.0** m

Waarde voor F : **50** kN

BC2 = (a , L , F , EI)

$\Rightarrow 2 \quad \Rightarrow 5 \quad \Rightarrow 50 \quad \Rightarrow 2763.6$



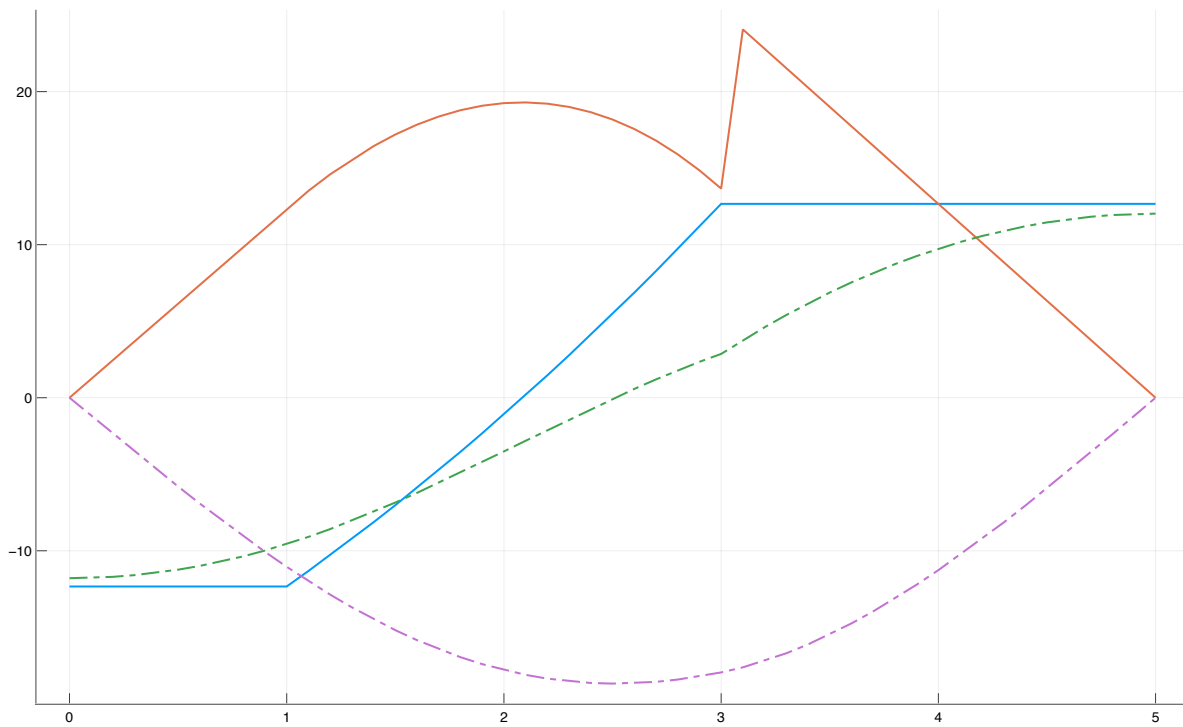
Vb. Schema 3 - Lineair variërende lijnbelasting p_a tot p_b

Puntbelasting volgens (a \Rightarrow 1, b \Rightarrow 3, L \Rightarrow 5, p_a \Rightarrow 10, p_b \Rightarrow 15, EI \Rightarrow 2763.6)

Waarde voor p_a : **10** kN

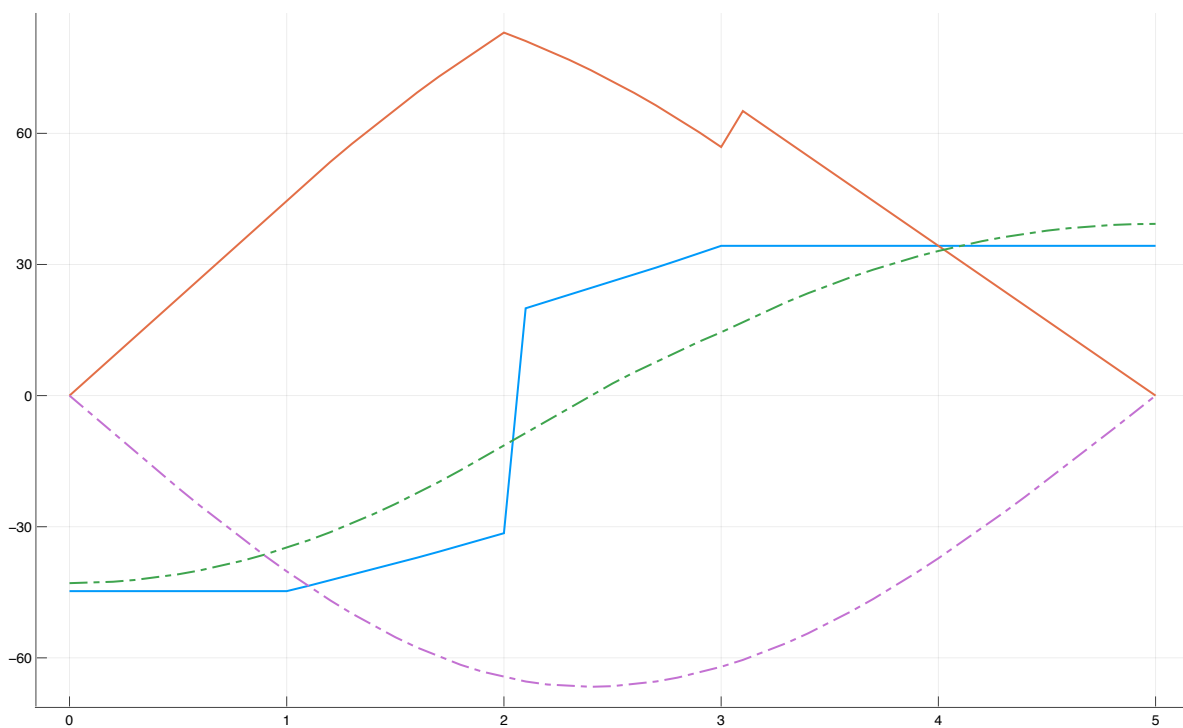
Waarde voor p_b : **15** kN

BC3 = (a , b , L , p_a , p_b , EI)
 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 10 \Rightarrow 15 \Rightarrow 2763.6



3.4 Samenstel krachten

Samenstel van krachten uit **3.1**, **3.2** en **3.3**



Theorie

Virtuele arbeid

Virtuele **rek**

Op een infinitesimaal deeltje van een staaf dx worden uitwendige normaalkrachten n opgelegd. Indien er geen samengang in het materiaal zou bestaan, dan wordt het mootje uiteengereten. Een virtuele, axiale verplaatsing δu wordt opgelegd, en een vervorming $(\delta x)'$ of $d\delta x/dx$ wat ook wel gelijk is aan $\delta \varepsilon$ (virtuele **rek**) wordt aan de rechterzijde opgeteld bij de translatie.

$$-n \delta u + n (\delta u + \delta \varepsilon dx) + \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{u}_i = 0$$

Virtuele **kromming**

Op een infinitesimaal deeltje van een staaf dx worden uitwendige krachtenkoppel m opgelegd. Indien er geen samengang in het materiaal zou bestaan, dan wordt het mootje uiteengereten. Een virtuele, axiale rotatie $\delta \alpha$ wordt opgelegd, en een vervorming $(\delta \alpha)'$ of $d\delta \alpha/dx$ wat ook wel gelijk is aan $\delta \chi$ (virtuele **kromming**) wordt aan de rechterzijde van de moot opgeteld bij de rotatie.

$$-m \delta \alpha + m (\delta \alpha + \delta \chi dx) + \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{u}_i = 0$$

Wens je bijvoorbeeld het moment te kennen ten gevolge van een last F , dan pas je het principe van virtuele arbeid toe waarbij je snijdt ter hoogte van het aangrijpingspunt van F en dit vervangt door een koppel met waarde M en een scharnier. De vervormingen zijn klein. De virtuele verplaatsing in C is gelijk aan x . Volgend evenwicht schrijven we uit.

$$F \cdot x = M \delta\theta_{AC} + M \delta\theta_{CB}$$

Omdat de vervormingen klein zijn, kunnen we volgende hanteren:

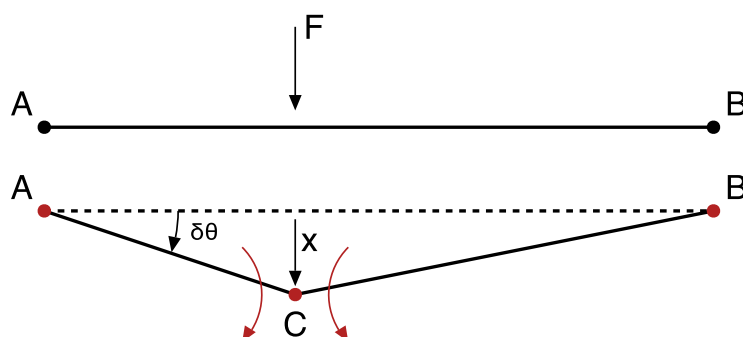
$$\delta\theta_{AC} = \arctan\left(\frac{x}{|AC|}\right) \stackrel{\text{kleine vervormingen}}{\approx} \frac{x}{|AC|}$$

Dus vergelijking kan omgevormd tot volgende oplossing:

$$F \cdot x = M \frac{x}{|AC|} + M \frac{x}{|CB|} = M \cdot x \left(\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|CB|} \right)$$

Vervang $|AC|$ door a en $|CB|$ door b en los op naar M :

$$M = F \cdot \frac{a b}{a + b}$$



Afhankelijk van het gegeven die je zoekt, ga je anders gaan snijden in je constructie

Integralen en analogiën van Mohr

Berekening volgens KOORDE

Bij de integralen van Mohr wordt de hoekverdraaiing en de vervorming berekend volgens een koorde tussen twee punten (dus onafh. van de elastica)

Berekenen **doorbuiging** ten opzichte van een koorde

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Doorbuiging a in punt P t.o.v. koorde AB
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AB , eenvoudig opgelegd
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken **moment** hulplichaam in P

Definitie: De verticale verplaatsing van een punt P , gelegen tussen de punten A en B van een al dan niet doorgaande, al dan niet prismatische balk, en gemeten ten opzichte van de koorde AB in de belaste en dientengevolge vervormde stand, is gelijk aan het buigend moment in het punt P van een eenvoudig opgelegde hulpligger AB , die een fictieve, gespreide belasting draagt, waarvan de amplitude in ieder punt gelijk is aan het plaatselijke, gereduceerde moment in het oorspronkelijk gestel.

Berekenen **hoekverdraaiing** ten opzichte van een koorde

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Hoekverdraaiing α in punt P t.o.v. koorde AB
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AB , eenvoudig opgelegd
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken **dwarskracht** hulplichaam in P

Definitie: De wenteling van de raaklijn in een punt P , gelegen tussen de punten A en B van een al dan niet doorgaande, al dan niet prismatische balk, en gemeten ten opzichte van de koorde AB in de belaste en dientengevolge vervormde stand, is op het teken na gelijk aan de dwarskracht in het punt P van een eenvoudig opgelegde hulpligger AB , die een fictieve, gespreide belasting draagt, waarvan de amplitude in ieder punt gelijk is aan het plaatselijke, gereduceerde moment in het oorspronkelijke gestel.

Stelling van Green

Berekening volgens RAAKLIJN

Bij de stelling van *Green* wordt de hoekverdraaiing en de vervorming berekend volgens een raaklijn in een bepaald punt van de elastica

Elastische **verticale verplaatsing** van een doorsnede ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede

1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Verplaatsing a in punt P t.o.v. doorsnede A
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AP , ingeklemd in A
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken het **moment** in A van het hulplichaam

Definitie: Om de elastische doorbuiging van een doorsnede P ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede A te bepalen, neemt men het statisch moment van het gereduceerde momentenvlak tussen A en P om het punt waar men de verplaatsing wenst te kennen.

Elastische **draaiing** van een doorsnede ten opzichte van de raaklijn aan de elastica in een andere doorsnede

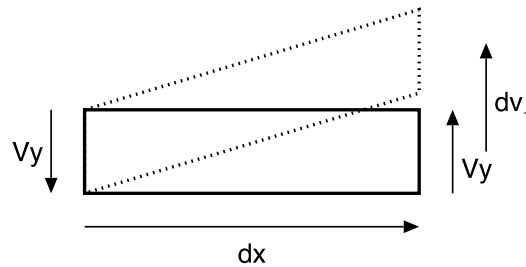
1. Gereduceerd momentenvlak of kromming: $\chi = \frac{M}{EI}$
2. Draaiing θ in punt P t.o.v. doorsnede A
3. Stel **hulplichaam** op met lengte = koorde AP , ingeklemd in A
4. Belast hulplichaam met kracht $q = \frac{M}{EI}$
5. Bereken het **dwarskracht** in A van het hulplichaam / oppervlakte onder het gereduceerde momentenvlak

Definitie: De elastische draaiing van een doorsnede van een balk ten opzichte van een andere doorsnede wordt gegeven door de oppervlakte van het gereduceerde momentenvlak begrepen tussen beide doorsneden.

Doorbuiging door dwarskrachten

Bijkomende doorbuiging t.g.v. dwarskrachten

Schuifspanningen τ_{xy} zijn vergezeld van glijdingen $\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \rightarrow$ deze zijn **maximaal** t.h.v. de **staafas**, waarbij τ_{max} gelijk is aan $\frac{V_y S_{max}}{e_0 I_z}$ met S_{max} gelijk aan het statisch moment rond de staafas en e_0 de breedte ter hoogte van de staafas.



Uitschrijven van bovenstaande vervorming waarbij de doorbuiging v_1 een gevolg is van de dwarskracht V_y

$$\frac{dv_1}{dx} = \gamma = \frac{\lambda V_y}{G A} = -\frac{\lambda}{G A} \cdot \frac{dM_z}{dx}$$

Bij een prismatische doorsnede resulteert dit in:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{\lambda p}{G A}$$

Mohr en **Greene**: analogieën van *Mohr* en stelling van *Greene* nog steeds toepasbaar, mits het gereduceerd moment wordt vervangen door bovenstaande formulering.