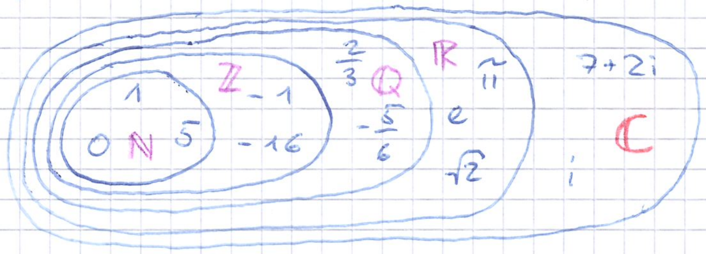
Komplexe Zahlen I

Einführung

Bisher kennen wir die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Mit diesen kann man sehr viele mathematische Probleme lösen, doch bei der Gleichung $x^2 = -1$ stösst selbst die Menge der reellen Zahlen auf ihre Grenzen. Deshalb wird $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$, der Menge an komplexen Zahlen, erweitert.



Imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit i ist eine Variable, welche die Gleichung $i \cdot i = -1$ löst.

Normalform

Eine komplexe Zahl z in Normalform besteht aus einem Realteil und einem Imaginärteil

Bsp.

$z = x + yi \qquad Re(z) = Re(x+yi) = x$

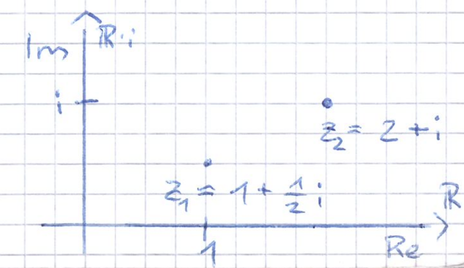
$\qquad\qquad\qquad Im(z) = Im(x+yi) = y$

$z = 2 + 3i \qquad Re(z) = 2$

$\qquad\qquad\qquad Im(z) = 3$

Zahlenebene

Da eine komplexe Zahl durch ihren Realteil und Imaginärteil eindeutig bestimmt ist, kann sie in einer Zahlenebene dargestellt werden.



Addition und Subtraktion

Bsp.: $(2-3i) + (-1+i) = 1-2i$

Multiplikation

Bsp.: $(3-2i)\cdot(-5+7i) = 3\cdot(-5) + 3\cdot 7i - 2i\cdot(-5) - 2i\cdot 7i = -1 + 31i$

Division

Eine Division kann man auch als Bruch darstellen. Damit der Nenner keinen Imaginärteil enthält, erweitert man mit der Konjugierten des Nenners. (siehe unten)

Bsp.: $(5-5i) : (1-3i) = \frac{5-5i}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = 2+i$

Konjugierte

Bsp.: $\overline{10+4i} = 10-4i$

Konjugierte von z : $\bar{z}$

Norm

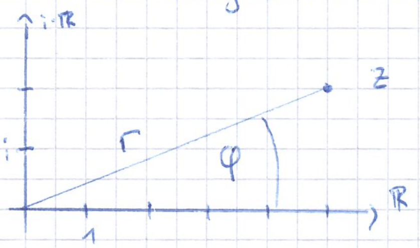
Abstand vom Ursprung. Bei $\mathbb{R}$ ist es der Betrag.

Norm von z: $\|z\|$

Bsp. $\|1+2i\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

Polarform

Die trigonometrische Polarform besteht aus dem radialen Abstand r von z zum Ursprung und dem Zentriwinkel φ, der gegen den Uhrzeigersinn von der reellen Achse bis zu z gemessen wird.



$r = \|z\|$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arg(z)$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

Umrechnen: - Normalform zu Polarform $r = \|z\|$ $\varphi = \arg(z)$

- Polar- zu Normalform $z = r\cdot\cos\varphi + r\cdot\sin\varphi\cdot i$

Bogenmass

Beim Gradmass wurden willkürlich 360 Einheiten ausgewählt. Beim Bogenmass hingegen, wird der Umfang (in Bezug zum Einheitskreis) angegeben. So sind $180° = \pi$

$360° = 2\pi$

$90° = \frac{\pi}{2}$

$60° = \frac{\pi}{3}$

Multiplikation

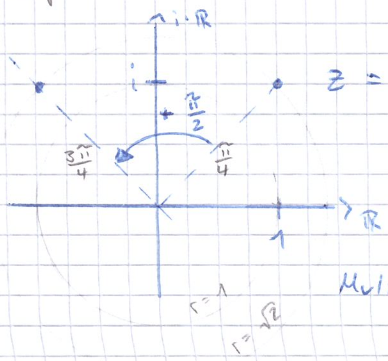
Die Radien werden multipliziert und die Polarwinkel addiert.

Bsp.: $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} e^{i\pi}$

Division

Die Radien werden dividiert und die Polarwinkel subtrahiert.

Bsp.: $2e^{i\frac{3\pi}{2}} : e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\pi}$



$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z \cdot i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Multiplikation

Komplex lineare Gleichungen

Bei einer komplex linearen Gleichung wird z gesucht. Das Verfahren entspricht einer reellen linearen Gleichung:

1. z isolieren
2. gegebenenfalls mit Konjugierter erweitern

Bsp.:

$$iz + 2 = 3z + i \qquad | -2 - 3z$$

$$(-3+i)z = -2 + i \qquad | : (-3+i)$$

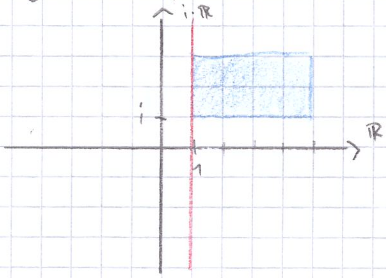
$$z = \frac{-2+i}{-3+i} \cdot \frac{-3-i}{-3-i}$$

$$z = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} i$$

Zahlenmengen

Bsp.: • $\{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = 1 \}$

• $\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq Re(z) \leq 5 \} \wedge \{ 1 \leq Im(z) \leq 3 \}$



$\wedge$ und

$\vee$ oder

Variablenseparation

$z \Rightarrow x + yi$

Bsp.: $z + 2i\bar{z} = 8 + 7i$ $z := x + yi$

$(x + yi) + 2xi + 2y = 8 + 7i$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{I} & x + 2y = 8 \\ \mathrm{II} & 2x + y = 7 \end{vmatrix}$$

$\leftarrow Re(z)$

$\leftarrow Im(z)$

$2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \mid \quad 3y = 9 \quad | :3$

$y = 3$

$\xrightarrow{\text{in I}}$

$x + 6 = 8 \quad | -6$

$x = 2$

$\underline{\underline{z = 2 + 3i}}$

Gleichungssysteme

Bsp.:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{I} & 3z_1 + 2z_2 = 7 + i \\ \mathrm{II} & 5z_1 - 3z_2 = -1 + 8i \end{vmatrix}$$

$3 \cdot \mathrm{I} + 2\mathrm{II} \mid \quad 19z_1 = (21 + 3i) + (-2 + 16i)$

$19z_1 = 19 + 19i \quad | :19$

$z_1 = 1 + i$

$\xrightarrow{\text{in I}}$

$3 + 3i + 2z_2 = 7 + i \quad | -3 - 3i$

$2z_2 = 4 - 2i \quad | :2$

$z_2 = 2 - i$

Potenzen

$z^n = re$

Bsp.: z^4

z_1

z_2

z_3

z_4

Matr

Einführung

Matrizen sin

buchstaben

Bsp.: Tab

Entfernung

Beromünste

Menziken

Sursee

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.7 \\ 9.8 \end{pmatrix}$

Spalte

Ordnung

Potenzen

$z^n = re^{i\varphi}$ → n-Lösungen

→ Lösungen befinden sich auf Kreis

→ Radius $r = \sqrt[n]{r}$

→ Winkel $\frac{\varphi}{3} \Rightarrow \frac{\varphi + 2\pi}{n}$

Bsp.: $z^4 = 4e^{i\pi}$ $\quad \sqrt[4]{}$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad + \frac{\pi}{2}$

$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\quad + \frac{\pi}{2}$

$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $\quad + \frac{\pi}{2}$

$z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Matrizen

Einführung

Matrizen sind tabellenähnliche Zahlenschemen. Sie werden mit Grossbuchstaben dargestellt.

Bsp.: Tabelle zu Matrix B

Entfernung in km

	Beromünster	Menziken	Sursee
Beromünster	0	5.7	9.8
Menziken	5.7	0	13.1
Sursee	9.8	13.1	0

← symmetrisch

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5.7 & 9.8 \\ 5.7 & 0 & 13.1 \\ 9.8 & 13.1 & 0 \end{pmatrix}$$ ← Zeile n

Element der Matrix

Spalte m

Ordnung: $n \times m$ (Zeilen × Spalten)

Addition und Subtraktion

Sind zwei Matrizen gleicher Ordnung gegeben, so kann man sie elementweise addieren und subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Bsp. :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 14 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

Multipliziert man eine $m \times n$ Matrix A mit einem reellen Skalar λ, so gilt folgende Rechenregel für die skalare Multiplikation:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechengesetze (Addition und skalare Multiplikation)

Kommutativgesetz	$A + B = B + A$
Assoziativgesetz	$A + (B + C) = (A + B) + C$ (auch bei Multi.)
Inverses Element	$A + (-A) = (-A) + A = 0$ (Nullmatrix)

Vektor-Matrix Multiplikation

Die Zahl der Spalten der gegebenen Matrix muss der Anzahl Einträge des Spaltenvektors entsprechen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + \dots + a_{1n} b_n \\ \dots \\ a_{m1} \cdot b_1 + \dots + a_{mn} b_n \end{pmatrix}$$

Eselsbrücke: Vektor über Matrix hinlegen

$$\begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix Multiplikation

Zwei Matrizen dürfen multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix der Zeilenanzahl der zweiten Matrix entspricht.

$m \times n \cdot n \times l \rightarrow m \times l$

Falk-Schema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & A \cdot B & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & b_{m1} & \dots & b_{mn} \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{array}$$

Rechengesetze (Matrix-Matrix Multiplikation)

Assoziativgesetz $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Distributivgesetz $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

Neutrales Element $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \dots & & \end{pmatrix}$ (von passender Ordnung)

~~Kommutativgesetz~~ $A \cdot B \neq B \cdot A$

stochastische Matrizen

Diese stellen Prozentsätze dar. Die Elemente haben einen Wert zwischen 0 und 1. Elemente einer Spalte aufaddiert ergibt die Summe 1

Bsp.: $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

Gauss-Jordan Algorithmus

Es ist ein stabiles Vektor gesucht, der die Gleichung $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ erfüllt.

Möglichkeiten: - Ausprobieren
- Brute Force $(M^{40} \to M^{100} \to \ldots)$
- Gleichungssystem (Gauss-Jordan)

Bsp.: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$-2 \to 0$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{I}+\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$-1 \to 0$

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I}+2\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$2 \to 0$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2\mathrm{II}-5\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{array}\right)$$

$-4 \to 1$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}:(-4) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$1 \to 0$
$3 \to 0$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-3\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 5 & 0 & 12.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 \end{array}\right)$$

$1 \to 0$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}-5\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 12.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 \end{array}\right) \begin{array}{c} :2 \\ :5 \\ \\ \end{array}$$

$2 \to 1$
$5 \to 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 \end{array}\right)$$

Lösungsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle:

① $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

↳ gleichung für beliebige Werte korrekt.

↳ $z = t$

$x = 7$

$y = 20 - t$

→ Ergibt Gerade / Ebene

② $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

↳ Widerspruch ↯

$\mathbb{L} = \{\}$

Inverse

Gegeben is

zu dividie

die Gleich

automatis

$A \cdot A^{-1} =$

Berechn

$(A \mid$

Bsp.: Gege

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hier m

die Ei

haben

Spezialfa

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

↳ Es e

Keine In

Bsp.: Gleic

Inverse einer Matrix

Gegeben ist eine Matrixgleichung $A \cdot X = B$. Statt durch A zu dividieren, sucht man eine Inverse von A (A^{-1}), sodass die Gleichung $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ wegen $A^{-1} \cdot A = E_n$, automatisch $X = A^{-1} \cdot B$ ergibt.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \quad \text{(Einheitsmatrix)}$$

Berechnung: Gauss-Jordan Algorithmus

$$(A \mid E_n) \qquad\qquad (E_n \mid A^{-1})$$

Bsp.: Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Gesucht wird A^{-1}!

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}}_{\text{Hier möchte man die Einheitsmatrix haben}} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Spezialfall:

$$\left(\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

↳ Es existiert keine Inverse

Inverse einer 2×2 Matrix

$$\left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$cI - aII \quad \left(\begin{matrix} a & b \\ 0 & (cb-ad) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ c & -a \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} a(bc-ad) & 0 \\ 0 & bc-ad \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -ad & ab \\ c & -a \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{matrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp.: Gleichung

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad | \cdot A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

man muss von rechts multiplizieren da die Matrix-Multiplikation nicht kommutativ ist.

Determinante

2x2 Matrix : $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

3x3 Matrix : $\det(B) = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - (ceg + hfa + bdi)$

beliebige Matrix: 1. obere oder untere Dreiecksmatrix bilden.
2. Diagonale multiplizieren

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{19}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Andere Möglichkeit:
– Subdeterminante

$$\det(A) = \frac{19}{5} \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 2 = -76$$

Eigenwerte / vektoren

Definition: Vektoren $\vec{v}$, die bei der Multiplikation mit einer Matrix die Gleichung $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ erfüllen, heissen Eigenvektoren. Die reelle Zahl λ heisst Eigenwert.

charakteristische Gleichung:

$$\det \underbrace{(A - \lambda E)}_{\text{charakteristisches Polynom}} = 0$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor (ist Vielfaches von $\vec{v}$)

Wichtig: Der Nullvektor kann KEIN Eigenvektor sein

Berechnung von Eigenwerten / vektoren:

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad | - \lambda \cdot \vec{v}$

$A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

Matrix darf nicht invertierbar sein, da sonst $\vec{v} = \vec{0}$

$\det(A - \lambda E) = 0$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \dots = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -3 & 1 \\ 3 & 1-0 & 3 \\ -5 & 2 & -4-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ -5x + 2y - 4z = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} -3x + 10y = 0 \\ 3x - 10y = 0 \end{array}\right|$$

$x = 10$

$y = 3$

$z = -2x + 3y = -11$

$$\vec{v} = k\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Abbildungen

Matrizen als geometrische Abbildungen

Verschiebung

$\vec{z}\,' = \vec{z} + \vec{v}$

Achsenspiegelung

an x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

an y-Achse: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Punktspiegelung am Ursprung

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Drehung am Ursprung

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

zentrische Streckung

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Drehstreckung am Ursprung

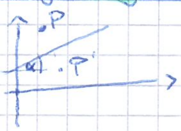
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Parallelstreckung

in x-Richtung: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

in y-Richtung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Spiegelung an Geraden



$y = \frac{4}{5}x + 1$

1. 1 nach unten
2. $-\alpha$ rotieren $\quad \alpha = \arctan\left(\frac{4}{5}\right)$
3. Spiegelung x-Achse
4. α rotieren
5. 1 nach oben

Punktspiegelung an P(a | b)

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Scherung

$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad m = \tan(\alpha)$

Schrägspiegelung

$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad p = -\frac{2}{\tan(\alpha)}$

Abbildung

Determina

det(M) =

det(M) =

det(M) =

Eigenwerte

$\lambda = 1$

$\lambda_{1,2} = \pm$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda$

Kompl

Verschiebu

w(z) = z

Achsenspieg

reelle-Achs

imaginäre-

Punktspiege

w(z) = -

Drehung a

w(z) = z

zentrische

w(z) = k

Drehstreck

w(z) = a·

Abbildung herausfinden

Determinanten:

$\det(M) = -1 \rightarrow$ Spiegelung

$\det(M) = \sin^2 - \cos^2 = 1 \rightarrow$ Drehung

$\det(M) = k^2 \rightarrow$ Streckung

Eigenwerte:

$\lambda = 1 \rightarrow$ Scherung & Fixpunktgerade

$\lambda_{1,2} = \pm 1 \rightarrow$ Schrägspiegelung & Fixgerade

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = a \rightarrow$ Parallelstreckung

Komplexe Funktionen

Verschiebung

$w(z) = z + a$

Achsenspiegelung

reelle-Achse: $w(z) = \bar{z}$

imaginäre-Achse: $-\bar{z}$

Punktspiegelung am Ursprung

$w(z) = -z$

Drehung am Ursprung

$w(z) = z \cdot e^{i\varphi}$

zentrische Streckung

$w(z) = k \cdot z \qquad k \in \mathbb{R}$

Drehstreckung am Ursprung

$w(z) = a \cdot z \qquad a \in \mathbb{C}$

Allgemein

$w(z) = az + b$

$z_0 = \frac{b}{1-a}$

$k = |a|$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y_a}{x_a}\right)$

Reziprokfunktion

$w(z) = \frac{1}{z}$

- Inversion am EHK
- Spiegelung an reeller-Achse

Kreis: $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$ $\quad c = m\bar{m} - r^2$

Gerade: $\bar{s}z + s\bar{z} + c = 0$

Möbiustransformation

$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

1. $cz + d$ — Drehstreckung
2. $\frac{1}{cz+d} = z_2$ — Reziprokfunktion
3. $\frac{bc-ad}{c} z_2 + \frac{a}{c}$ — Drehstreckung

Integralrechnung

Umkehrfunktionen

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad F(x) = \arcsin$

$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad F(x) = \arccos$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad F(x) = \arctan$

Partielle Integration

- Produktregel $\quad \int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

Vorgehen: $f(x)$ & $g'(x)$ bestimmen

Substitution

- Verkettungsregel

Bsp.: $\int x\,(x^2-1)^3\, dx = \int \frac{x}{2x} u^3\, du = \frac{1}{2} \int u^3\, du = \frac{1}{8} u^4 + c$

$u = x^2 - 1$ $\quad = \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + c$

$dx = \frac{du}{2x}$

Partialbr

1. Nenner
2. Auftei

Ansätz

3. Koeffizi

Mehrfachi

Kreis:

Kugelvolum

Aufgabe mi

Schwerpu

2D: $x =$

$y =$

$\frac{1}{A} \int$

$x = 0$

Partialbruchzerlegung

1. Nenner Faktorisieren
2. Aufteilen

   Ansätze: einfache NST : $\frac{A}{x}$

   doppelte NST : $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$

   komplexe NST : $\frac{Ax+B}{x^2+1}$

3. Koeffizientenvergleich

Mehrfachintegrale

Kreis : $\int_0^r \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr$

Kugelvolumen: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} r^2 \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

Aufgabe mit Breitengraden :

α <- dieser Winkel messen

$\int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{r} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

Schwerpunkt

2D: $x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$\frac{1}{A} \int_0^r \int_0^{\pi} r \cdot \sin\varphi \cdot r \, d\varphi \, dr$

$x = 0$ <- Symmetrie

3D: $x = r \cdot \cos\varphi \sin\theta$

$y = r \cdot \sin\varphi \cos\theta$

$z = r \cdot \cos\theta$

$\frac{1}{V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{3} r \cdot \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

Differentialgleichungen

gewöhnliche homogene lineare Diff'gleichungen mit konstanten Koeffizienten

(gewöhnliche: eine Variable; homogene: $=0$)

Bsp.: $3y''' - 2y'' + 4y' - 5y = 0$

$3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

Ansatz: reelle NST: $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots$

mehrfache: $c_1 e^{\lambda x} + c_2 \cdot x e^{\lambda x}$

komplexe: $c_1 e^{(a+bi)x} = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$

Inhomogene gewöhnliche lin. Diff'gleichungen

Form: $ay'' + by' + cy = f(x) \quad \leftarrow \quad y = y_{homogen} + y_{partikulär}$

Ansätze: $y = ax^2 + bx + c$

$y = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$

$y = a e^x$

Vorgehen:
1. $y_{homogen}$
2. $y_{partikulär} =$ Ansatz

   $y'_{part.} =$

   $y''_{part.} =$
3. y_p, y_p', y_p'' einsetzen $= f(x)$
4. Koeffizientenvergleich
5. Zusammensetzen $y = y_h + y_p$

W'ke

Vierfeld

Bsp.:

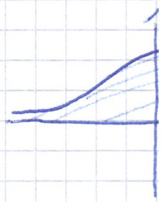
Bedingte

$P_B(A)$

$P(A \cap$

$P(B$

Normal



Approxim

Tabellen

W'keit

Vierfeldertafel

Bsp.:

	I	$\bar{I}$	
+	19	6	25
−	1	74	75
	20	80	100

$P_I(+) = P(+ | I)$

↑ Bedingung

Hier $P_I(+) = \dfrac{P(+ \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0.19}{0.2}$

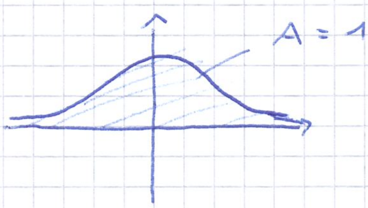
$= 0.95 \rightarrow 95\%$

Bedingte W'keit

$$P_B(A) = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \underbrace{\frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}}_{\text{Satz von Bayes}} = \underbrace{\frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}}_{\text{Satz der totalen W'keit}}$$

Normalverteilung



$N(\mu, \sigma)$ — μ: Erwartungsw., σ: Standardabweichung

$N(0, 1)$ ← Standardnormalverteilung

$P(x = 1) = 0$ ← keine Fläche

Approximation: $N(np, npq)$

Tabellen: $\cancel{\phi(1) - \phi(-1)} = 0.6827$

HELLO

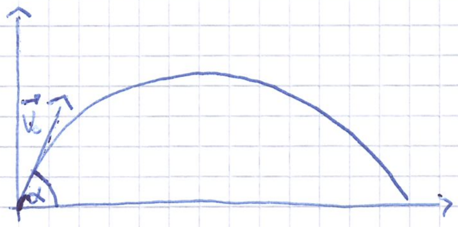
Physik

Zentripetalkraft

$\vec{F}_z = \frac{mv^2}{r}$ $\quad a_z = \frac{v^2}{r}$ $\quad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ $\quad v = r\omega$

$\vec{F}_z = mr\omega^2$

Schiefer Wurf



$x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t + x_0$

$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t + y_0$

Impuls

Impulssatz

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

elastischer Stoss: $\quad$ O→ ←O $\quad | \quad$ ←OO→

E_{kin} erhalten & $\vec{p}$

unelastischer Stoss: $\quad$ O$\xrightarrow{v_1}$ $\xleftarrow{v_2}$O $\quad | \quad$ OO$\xrightarrow{u}$

Impulserhaltung: $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{F}\Delta t + \vec{p}_2 + (-\vec{F}\Delta t) = \vec{p}_v$

Drehimpuls

$M = J\alpha$ ← Winkelbeschleunigung

Trägheitsmoment

Drehmoment

$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

↳ umformen: $\Delta L = J\omega$ $\qquad E_{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2$

Satz von

$J = J_s +$

Elekt

Elektrisch

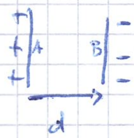
$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

Potential

$\varphi = \frac{E_{pot}}{q}$

Nutzen: L

Bsp. Platt



Kirchhoffs

1. Knoten

2. Masche

① $I_3 = I$

② $U_1 - U$

U

Satz von Steiner

$J = J_S + md^2$

Elektrizität & Magnetismus

Elektrisches Feld

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ $\qquad [\vec{E}] = \frac{V}{m}$

Feldlinien: von + zu -

↑

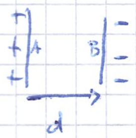
technische Stromrichtung

Potential

$\varphi = \frac{E_{pot}}{q}$ $\qquad [\varphi] = V$

Nutzen: Ladung verschieben

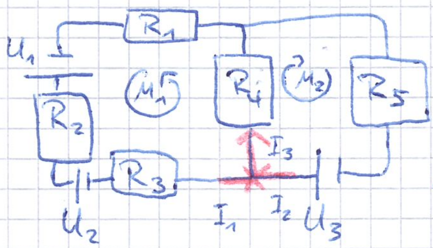
Bsp. Plattenkondensator



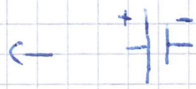
$\varphi_B - \varphi_A = -E \cdot d$

Kirchhoffsche Gesetze

1. Knotensatz
2. Maschensatz



von - zu +



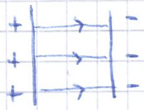
① $I_3 = I_1 + I_2$

② $U_1 - U_2 = I_1 R_1 + I_1 R_2 + I_1 R_3 + I_3 R_4$

$U_3 = I_3 R_4 + I_2 R_5$

Kondensator

Plattenkondensator



C : Kapazität $[C] = F$

$$Q = C \cdot U$$

$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

Elektrischer Fluss

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{A}_i$$

„Feldlinien durch eine Fläche A"

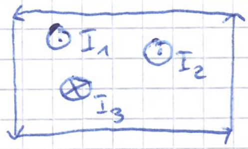
Satz von Gauss: $\varphi = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0}$

Magnetfeld

Feldlinien: von Nord zu Süd

rechte Faust

Durchflutungsgesetz



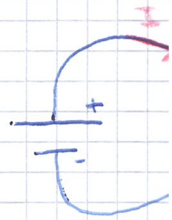
$$\sum_{i=1}^{4} \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

Spulen

Zylindersp

Ringspule

Elektroma



Induktion

Spannung

Spulen

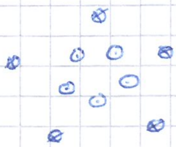
Zylinderspule:

$$\sum_{i=1}^{4} \Delta\vec{s}_i \cdot \vec{B}_i = \underbrace{\vec{s}_1 \vec{B}_1}_{\approx 0} + \underbrace{\vec{s}_3 \vec{B}_3}_{\approx 0} + \underbrace{\vec{s}_4 \vec{B}_4}_{=0} + \underbrace{\vec{s}_2 \vec{B}_2}_{\vec{B}_2 = B,\ s_2 = l} = Bl$$

$$Bl = \mu_0 \cdot N \cdot I \quad | : l$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Ringspule:



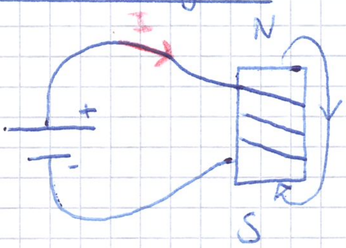
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = B \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{s}_i = B 2\pi r$$

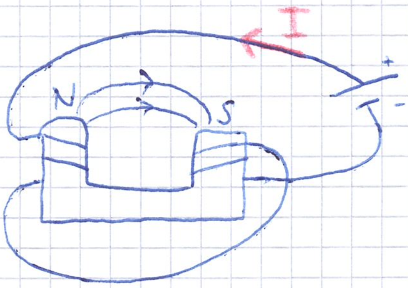
$B_i \parallel s_i$

$$B 2\pi r = \mu_0 N I \quad | : 2\pi r$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

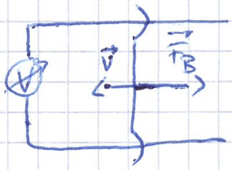
Elektromagnet





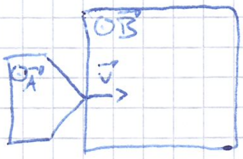
Induktion

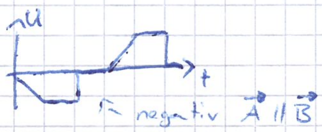
Spannung wird erzeugt



$\vec{F}_B = l\, \vec{I} \times \vec{B}$

↳ muss in Gegenrichtung zeigen





magnetischer Fluss

$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A}$ wie el. Fluss

Induktionsgesetz: $U_{ind} = -\dot{\Phi}$

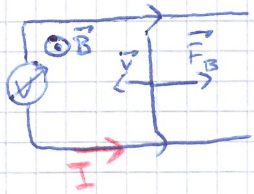
$A = (x_0 - vt) l$

$\Phi(t) = B(x_0 - vt) l$

$\Phi'(t) = vBl = U_{ind}$

Lenz'sche Regel

Induktionsstrom so gerichtet, dass er mit seinem Magnetfeld der Flussänderung entgegenwirkt.



$\vec{F}_B = l \vec{I} \times \vec{B}$

rechte-Hand-Regel

Lorentzkraft

Kraft auf bewegte Ladung

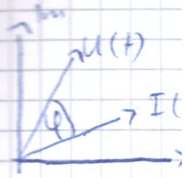
$\vec{F}_L = Q \vec{v} \times \vec{B}$

Herleitung: $\vec{F} = l \vec{I} \times \vec{B}$

$= \frac{\Delta Q}{\Delta t} l \times \vec{B}$

$= Q \vec{v} \times \vec{B}$

Wechs



Impedan

$Z_R = R$

serielle S

Parallel s

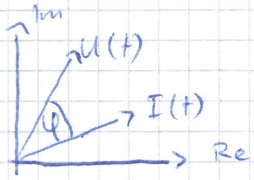
Effektiv

$I_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}$

$U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}$

$\bar{P} = U_{eff}$

Wechselstrom



|Z| : Streckungsfaktor

arg(Z) : Drehwinkel

Impedanz Z

$Z_R = R \qquad Z_L = i\omega L \qquad Z_C = -\frac{i}{\omega C}$

serielle Schaltung : addieren

Parallelschaltung : Kehrwerte addieren

Effektivwerte:

$I_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}\,|Z|} \qquad I_{eff} = \frac{U_{eff}}{|Z|} \qquad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

$\bar{P} = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi$

Spezielle Relativitätstheorie

Zeitdilatation

$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ „Bewegte Uhren gehen langsamer"

$\Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t'$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Längenkontraktion

$l' = \frac{1}{\gamma} l$ „Distanz in Bewegung kürzer"

$l' = \gamma l$

Lorentztransformation

$x = \gamma (x' + vt')$ $x' = \gamma (x - vt)$

$t = \gamma (t' + \frac{v}{c^2} x')$ $t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x)$

Impuls und Energie

$E = \gamma mc^2 - mc^2$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\rightarrow \vec{F}_z = \gamma \frac{mv^2}{r}$