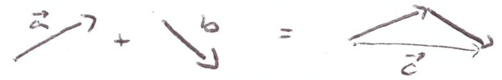
Vektorgeometrie

Addition:



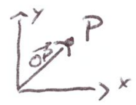
Vektor: Pfeil mit Länge & Richtung (+ Richtungssinn)

-> richtig: Menge aller Pfeile

nur einer: Repräsentant

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ <- Komponenten

Ortsvektor:



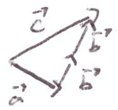
Verbindungsvektor:

Nullvektor: $\vec{0}$

kollinear:

normal:

Linearkombination:

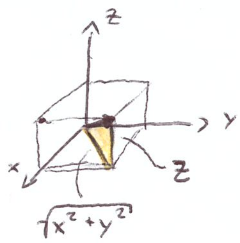


$\vec{c} = \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

↳ linear abhängig

Betrag:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Skalarprodukt:

Cosinussatz: $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\varphi = c^2$ (Herleitung siehe nächste Seite)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Herleitung: $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \underbrace{|\vec{b}-\vec{a}|^2}_{c^2} = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - \left((b_x-a_x)^2 + (b_y-a_y)^2 + (b_z-a_z)^2\right) = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos$

$\ldots - \left(b_x^2 - 2b_xa_x + a_x^2 + b_y^2 - 2b_ya_y + a_y^2 + b_z^2 - 2b_za_z + a_z^2\right) = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$2b_xa_x + 2b_ya_y + 2b_za_z = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad |:2$

$b_xa_x + b_ya_y + b_za_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

Winkelformel: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Geraden: $g: \vec{r} = \vec{p} + t\cdot\vec{u} \qquad (t \in \mathbb{R})$

$\vec{p}$: Stützvektor

$\vec{u}$: Richtungsvektor

gegenseitige Lage: parallel, identisch, schneidend

identisch → kollinear → Stützpunkt einsetzen

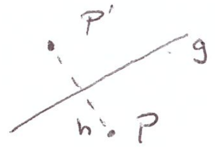
schneidend → Schnittpunkt

im Raum: + windschief

→ kein Schnittpunkt

Schnittwinkel: Richtungsvektoren in Winkelformel

Spiegelung:



1. $h: \vec{r} = \vec{OP} + t\cdot\vec{u}$

   $\vec{u}$: negativer Kehrbruch von g

2. Schnittpunkt g und h

3. $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\cdot\vec{PS}$

Spurpunkt: Durchstosspunkt einer Koordinatenebene

$S_{xy}(x \mid y \mid 0)$

Ebene: $E: \; ax + by + cz + d = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

oder

$E: \vec{r} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$

Punktprobe: einsetzen

Achsenabschnitte: p, q, r

Achsenab.-Form: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

gegenseitige Lage Ebenen: parallel, identisch, schneidend

-> Normalenvektoren vergleichen

Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

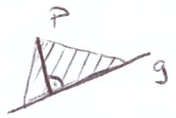
$a_1 \qquad b_1$

Betrag: Fläche Parallelogramm

Schnittpunkt Gerade Ebene: $90^\circ - \beta = \alpha$

$\vec{n} \cap g$

Abstand Punkt Gerade: $d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$



oder

Ebene durch P => Durchstosspunkt

Spurgerade: Ebene $\cap$ Koordinatenebene

$\rightarrow$ Achsenabschnitte ablesen

$\rightarrow$ $P(x|0|0)$, $Q(0|y|0)$, $R(0|0|z)$

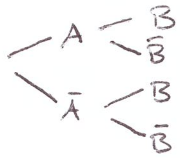
$\rightarrow$ $g: \vec{r} = \vec{OP} + s \cdot \vec{PQ}$ oder ...

Hessesche Normalform: $\underbrace{\frac{ax+by+cz+d}{|\vec{n}|}}_{\text{Distanz D zu irgendeinem Punkt}} = 0$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ergebnismenge: Ω Ergebnis: ω

Pfadregeln:



$P(A) \cdot P(B)$ + anderer Pfad

Laplace: alle Ergebnisse gleich Wahrscheinlich

$P(A) = \frac{\text{Gewünschte}}{\text{Mögliche}}$

Axiome von Kolmogorow:
1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. falls $A \cap B = 0$

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Kombinatorik:

alle → **Permutation**
- oW.: $n!$
- mW.: $\frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots}$

Teil:
- Reihenfolge → **Variation**
  - oW.: $\frac{n!}{(n-k)!}$
  - mW.: n^k
- keine/egal → **Kombination**
  - oW.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
  - mW.: $\binom{n+k-1}{k}$

Lotto: (6 aus 49) W'keit für Sechser: $\binom{49}{6} = 13'983'816$

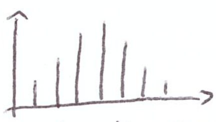
$$P(6) = \frac{1}{13'983'816}$$

W'keit für 3: $\frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765$

Zufallsvariable: Funktion $\omega \to x$

Bsp. $X(23) = 5$

W'keitsverteilung: Funktion $X \to P(X = x_i)$



Säulendiagramm

Erwartungswert: $E(x) = \mu = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots$

$E(x) = 0 \to$ fair

Standardabweichung: $Var(x) = \sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(x_1) + \dots$

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Bernoulli-Experiment: nur Erfolg / Misserfolg

$p \qquad q = 1-p$

Binomialverteilung: $P(X=k) = \binom{n}{k} \, p^k \cdot q^{n-k}$

$E(x) = n \cdot p$

$Var(x) = n \cdot p \cdot q$

Herleitung Kombinatorik:

Permutation: Bsp. BIEL $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 4!$

Bsp. $\text{SO}\underbrace{\text{NN}}_{2!}\text{E}$ $\quad \frac{5!}{2!}$

Variation: Bsp. 100 Teilnehmer → Anzahl Möglichkeiten Podest

$\underline{100} \cdot \underline{99} \cdot \underline{98} = \frac{100!}{97!}$

Bsp. Anzahl möglicher 4stellige Wörter

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4$

Kombination: 8 GAs auf 20 Pers.

$\left.\frac{20!}{12!}\right\}$ mit Reihenfolge $\xrightarrow{\text{ohne}}$ $: 8! \rightarrow \frac{20!}{12! \, 8!}$

Bsp. 5 Gummibärchen

weiss gelb orange rot grün

$* \mid * \mid * \mid * \mid * \rightarrow \frac{9!}{5! \cdot 4!}$

Mengendia

Kolmogorov

Formel vo

Funktion

Was: ordn

von

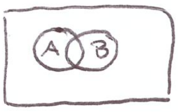
Definitions

Wertemen

NST: y

Umkehrf

Trigonom

Mengendiagram: 

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Kolmogorow: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Formel von Bernoulli: $\binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k}$

Anzahl Pfade   Treffer   Daneben

Funktionen

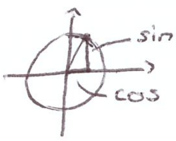
Was: ordnet jedem Element von $\mathbb{D}$ eindeutig ein Element von $\mathbb{W}$ zu.

Definitionsmenge $\mathbb{D}$: mögliche x-Werte

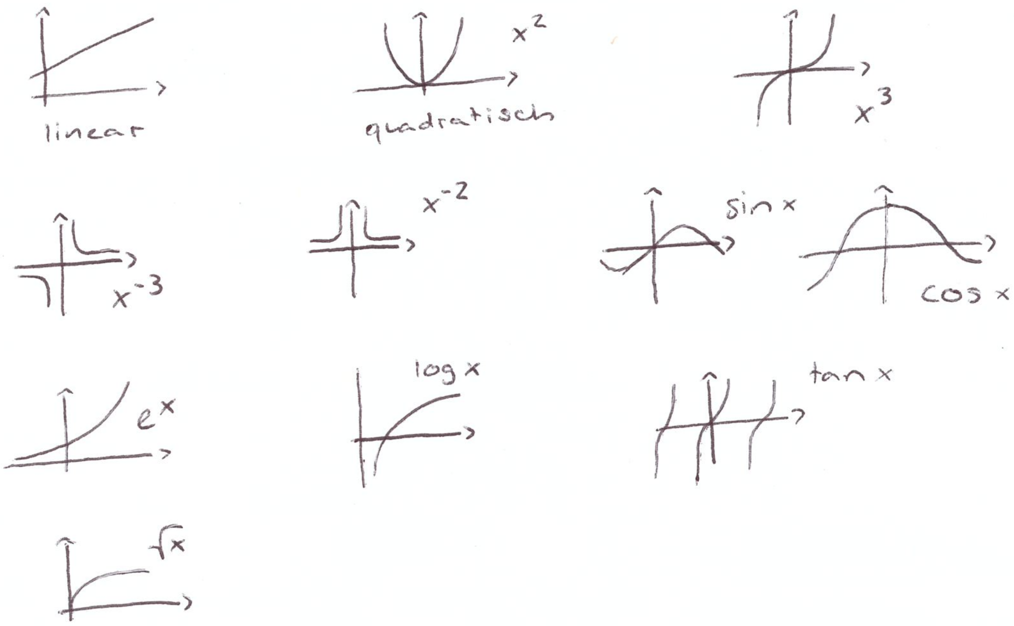
Wertemenge $\mathbb{W}$: mögliche y-Werte

NST: $y = 0$ x-Achse schneiden

Umkehrfkt.: Spiegelung an Identität $x = y$

Trigonometrie: 

Typen:



Logarithmengesetze: $a^x = b \rightarrow x = \log_a(b)$

Produktregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad | \log_a$

$\log_a(a^m \cdot a^n) = \log_a(a^{m+n})$

$\log_a(a^m \cdot a^n) = m+n$

$\downarrow \begin{matrix} x = a^m \\ z = a^n \end{matrix}$

$\log_a(x \cdot z) = m+n$

$\downarrow a^m = x$

$\log_a(x \cdot z) = \log_a(x) + \log_a(z)$

Quotientenregel: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad | \log_a$

$\log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = m-n$

$\downarrow \begin{matrix} x = a^m \\ z = a^n \end{matrix}$

$\log_a\left(\frac{x}{z}\right) = \log_a(x) - \log_a(z)$

Potenzreg

Basiswech

$a^x = b$

$x \cdot \log_c$

Different

Differenzen

Differential

Näherung

Potenzregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad | \log$

$$\log_a((a^m)^n) = m \cdot n$$

$$\downarrow \begin{array}{l} x = a^m \\ z = n \end{array}$$

$$\log_a(x^z) = \log_a(x) \cdot z$$

Basiswechsel:

$$a^x = b \quad | \log_c$$

$$x \cdot \log_c(a) = \log_c(b) \quad | : \log_c(a)$$

$$x = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \log_a(b)$$

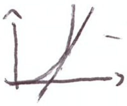
Differentialrechnung

Differenzenquotient:

– Sekante

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

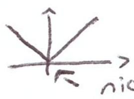
Differentialquotient:



– Tangente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

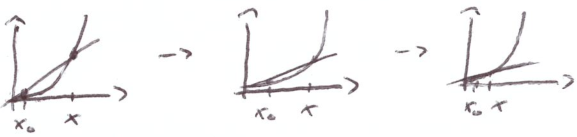
Differenzierbarkeit:



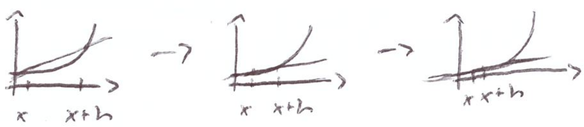
nicht diffbar

Näherungsverfahren:

x-Methode:



h-Methode:



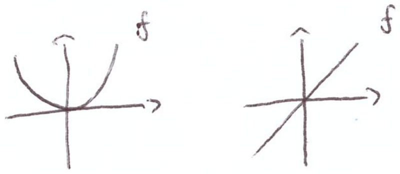
Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Bedingungen:
- Funktionswert muss existieren
- Grenzwert muss existieren
- Funktionswert = Grenzwert

Zusammenhang Stetigkeit & Differenzierbarkeit:

diffbar $\to$ stetig

graphische Ableitung:



Summenregel: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) + v'(x_0)$$

Faktorregel: $c \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} c \cdot \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$

$$= c \cdot u'(x_0)$$

Produktregel: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) \overbrace{- u(x_0)v(x) + u(x_0)v(x)}^{+0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{v(x)\left(u(x) - u(x_0)\right)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{u(x_0)\left(v(x) - v(x_0)\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} v(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} u(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$= v(x_0$

Kettenregel

Ableitung

Kurvendisk

WP: f

Symme

$$= v(x_0) \cdot u'(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

Kettenregel: $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{v(x) - v(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$$

Ableitungen:

$\sin \to \cos$

$\cos \to -\sin$

$\tan \to \frac{1}{\cos^2}$

$x^n \to n \cdot x^{n-1}$

$\frac{u(x)}{v(x)} \to \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)}$

$e^x \to e^x$

$\ln(x) \to \frac{1}{x}$

1. Ableitung
↳ Steigung

2. Ableitung
↳ Krümmung

Kurvendiskussion: Extrema: $f'(x_0) = 0$ (notw.) $f''(x_0) \neq 0$ (hinr.)

WP: $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$

Symmetrien: Achsensymmetrisch -> nur gerade Exponenten

Punktsymmetrisch -> nur ungerade Exponenten

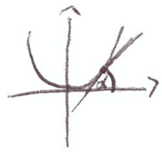
Extremalaufgaben: Zielfunktion $\rightarrow f(x) \leftarrow$ Nebenbed.

$f'(x) = 0$

Schnittwinkel:

Tangente: $y = ax + b$

$\arctan(a) = \alpha$

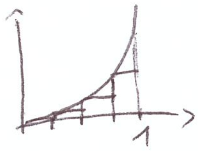


Integralrechnung

Obersumme:

$$O_4 = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{i}{4}\right)$$

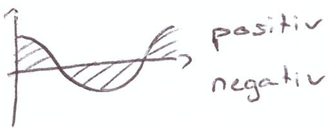
Untersumme:



$$U_4 = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{i}{4}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} O_n = \lim_{n \to \infty} U_n = \int f(x)\,dx$$

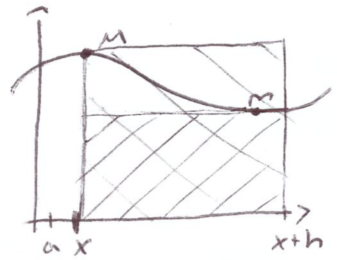
Flächenbilanz:



Integralfkt.: $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

unbestimmtes Integral: $\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{Stammfkt.}} + c$

HDI:



$$m \cdot h \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq M \cdot h \quad | :h$$

$$m \leq \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq M \quad | h \to 0$$

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \text{ '' } \leq f(x)$$

$$f(x) \leq I_a'(x) \leq f(x) \to f(x) = I_a'(x)$$

Summenregel: $\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = [F(x) + G(x)]_a^b$

$= \underline{F(b)} + G(b) - \underline{F(a)} - G(a)$

$= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$

Faktorregel: $\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = [c \cdot F(x)]_a^b = c \cdot F(b) - c \cdot F(a)$

$= c(F(b) - F(a)) = c[F(x)]_a^b = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$

Fläche zwischen x-Achse: über NST

Fläche zwischen 2 Kurven: obere minus untere

Rotationskörper: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx$

Uneigentliche Integrale: $\lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x) \, dx$

Bsp. $\lim_{u \to \infty} \left(-\frac{2}{u} + 2\right) \overset{u \to \infty}{=} 2$