Prüfungsvorbereitung

Dienstag, 16. November 2021 18:42

Norm

$\|x + yi\|$ ← ohne i

$= \sqrt{x^2 + y^2}$

Konjugierte

$\overline{x+yi} = x - yi$

Bruchrechnen

$$\frac{a}{x+yi} = \frac{a(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{ax-ayi}{x^2+y^2} = \frac{ax}{x^2+y^2} - \frac{ay}{x^2+y^2}i$$

mit Konjugierten erweitern

Geom. Abbildungen

- Verschiebungen $+z$
- Drehung (Punktespiegelung) $\cdot i$ $(90°)$ $-z$ $(180°)$ $-zi$ $(-90°)$
- Spiegelung
  - ↳ Achsenspiegelung $\overline{z}$ (an reeller Achse) $\overline{-z}$ (an imaginärer Achse)

Komplex lineare Gleichungen

$iz + 2 = 3z + i \quad | -2 + 3z$ z isolieren

$iz + 3z = 2 + i$ z ausklammern

$z(3+i) = 2+i \quad | : 3+i$

$z = \frac{2+i}{3+i}$ mit Konjugierter erweitern

$z = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

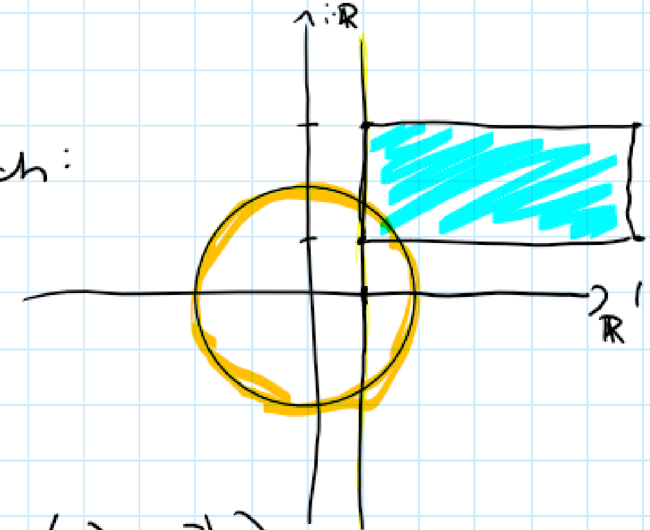
$z = \frac{6+1+i}{9+1}$

$z = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$

Zahlenmengen

- $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = 1\}$

graphisch:



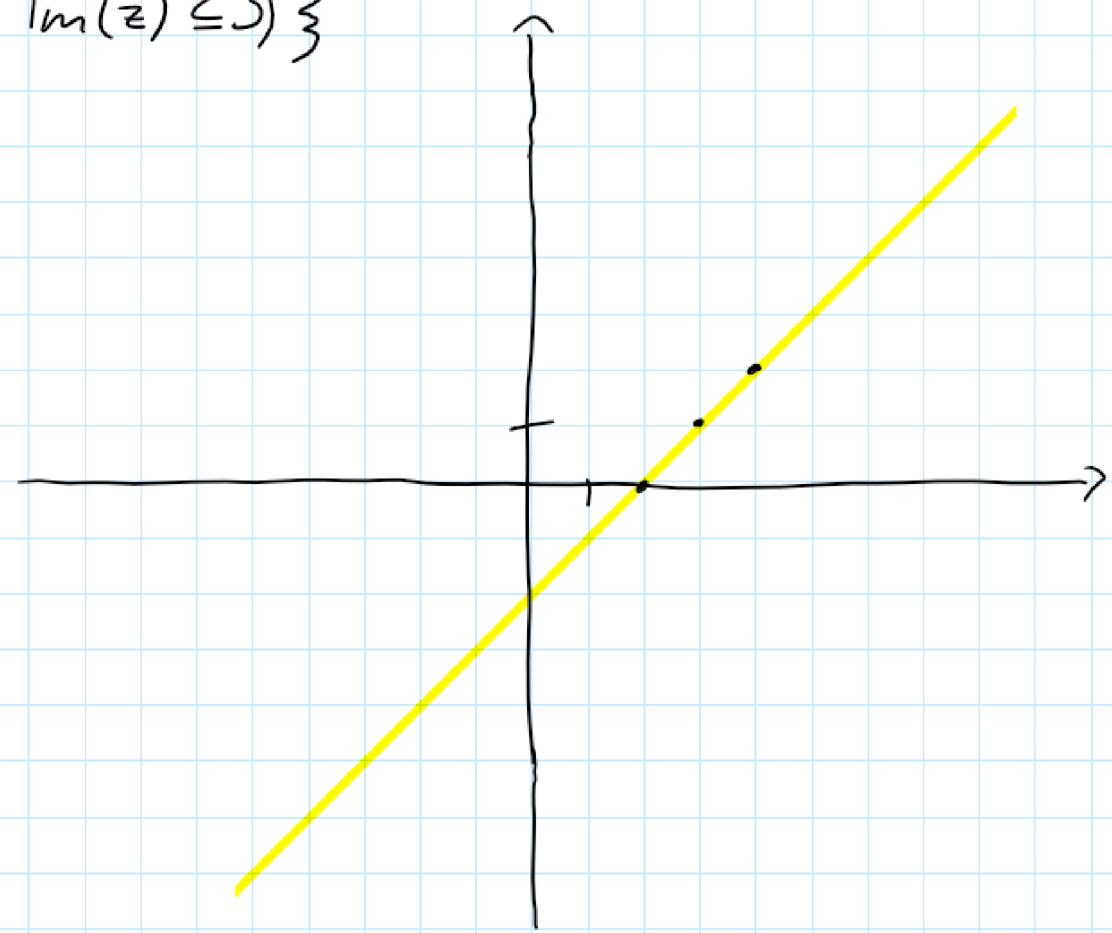
"und" => $\wedge$

"oder" => $\vee$

- $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le Re(z) \le 5) \wedge (1 \le Im(z) \le 3)\}$

- $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 2\}$

- $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) - Im(z) = 2\}$



Variablenseparation

$z \Rightarrow x + yi$

$z + 2i\bar{z} = 8 + 7i$

$(x+yi) + 2xi + 2y = 8 + 7i$

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{I} & x + 2y = 8 \\ \mathrm{II} & 2x + y = 7 \end{array}$$

$2\cdot\mathrm{I} - \mathrm{II} \;|\; 3y = 9 \quad |:3$

$y = 3$

in I $\Rightarrow$

$x + 6 = 8 \quad |-6$

$x = 2$

$\underline{\underline{z = 2 + 3i}}$

Gleichungssysteme

$$\left| \begin{array}{l} 3z_1 + 2z_2 = 7 + i \\ 5z_1 - 3z_2 = -1 + 8i \end{array} \right|$$

$3\cdot\mathrm{I} + 2\cdot\mathrm{II} \;|\; 19z_1 = (21+3i) + (-2+16i)$

$19z_1 = 19 + 19i \quad |:19$

$z_1 = 1 + i$

in I $\Rightarrow$

$3 + 3i + 2z_2 = 7 + i \quad |-3-3i$

$2z_2 = 4 - 2i \quad |:2$

$z_2 = 2 - i$

Anleitung

1. z durch $(x+yi)$ ersetzen
2. Multiplizieren und zusammenrechnen
3. Realteil und Imaginärteil trennen
4. Gleichungssystem aufstellen
5. Gleichungssystem lösen
6. "x" und "y" bei "x+yi" einsetzen

Wann ist ...

$\bar{z} = z$: $\{ z \in \mathbb{R} \}$

$-z = z$: $\{ z = 0 \}$

$z^{-1} = z$:

$$z^{-1} = (x+yi)^{-1} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

Polarkoordinaten

Abstand zum Ursprung + Winkel

Winkel in Bogenmass: $180° = \pi$

Normalform zu Polarkoordinaten

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Polarkoordinaten zu Normalform

$$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i$$

Polarform

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Multiplikation

Radien multiplizieren

Polarwinkel addieren

Division

Radien dividieren

Polarwinkel subtrahieren

$z^n = r e^{i\varphi}$

1. Wieviele Lösungen? n-Lösungen

2. Geometrie? n-Lösungen befinden sich auf Kreis, bilden regelmässiges n-Eck

3. Radius? n. Wurzel $\sqrt[n]{\ }$

4. Winkel? $\frac{\varphi}{2} \to \frac{\varphi + 2\pi}{n} \to \frac{\varphi + (3-1)\,2\pi}{n} \to \frac{\varphi + (n-1)\,2\pi}{n}$

$w(z) = z \cdot c$	zentrische Streckung
$w(z) = z \cdot e^{i\varphi}$	Drehung am Ursprung (Drehwinkel φ)
$w(z) = z + z_1$	Verschiebung
$w(z) = \bar{z}$	Achsenspiegelung an reellen Achse
$w(z_1) = z_0 \cdot z_1$	Drehstreckung um Ursprung (Drehwinkel φ, Streckungsfaktor r)

Anleitung (z^4):

$$z^4 = 4e^{i\pi} \qquad z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} \qquad z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

4. Wurzel ziehen

$+\frac{\pi}{2}$ $+\frac{\pi}{2}$ $+\frac{\pi}{2}$