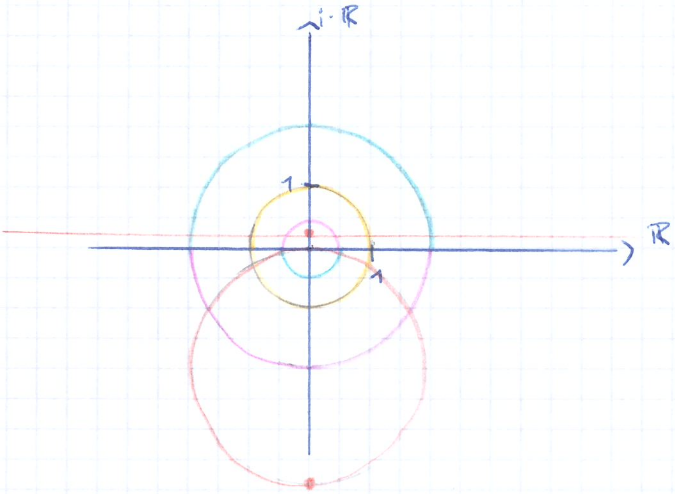
Komplexe Funktionen

Reziprokfunktion

$w(z) = \frac{1}{z}$



Gerade:
$y = ax + b$

$\bar{s}z + s\bar{z} + c = 0$

Kreis:
$r = |z - m|$

$z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$

Gerade durch Ursprung $\rightarrow$ Gerade durch Ursprung

Gerade nicht Ursprung $\rightarrow$ Kreis

Kreis MP: Ursprung $\rightarrow$ Kreis

Kreis MP: nicht Ursprung & nicht Peripherie $\rightarrow$ Kreis

Kreis Ursprung Peripherie $\rightarrow$ Gerade

$z_0 = \frac{b}{1-a}$

$c = m\bar{m} - r^2$

Was ist Reziprokfkt.?

- Inversion am EHK
- Spiegelung an reeller Achse

Beispiele: ① $(5+2i)z + (5-2i)\bar{z} + 4 = 0$ $\leftarrow$ Gerade

In Form $y = ax + b$ $\rightarrow$ $(5+2i)(x+yi) + (5-2i)(x-yi) + 4 = 0$

$10x - 4y + 4 = 0$

$y = \frac{5}{2}x + 1$

$\xrightarrow{\text{Reziprokfkt.}}$ $\frac{5+2i}{w} + \frac{5-2i}{\bar{w}} + 4 = 0 \quad | \cdot w\bar{w}$

$(5+2i)\bar{w} + (5-2i)w + 4w\bar{w} = 0 \quad | : 4$

$w\bar{w} + \frac{5-2i}{4}w + \frac{5+2i}{4}\bar{w} = 0$ $\quad m': \frac{5}{4} + \frac{1}{2}i$ $\quad r' = \sqrt{(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}i) \cdot (\frac{5}{4} - \frac{1}{2}i)} = \frac{\sqrt{29}}{4}$

② $z\bar{z} - (5-i)z - (5+i)\bar{z} + 1 = 0$ $\quad m: (5+i)$ $\quad r = 5$ $\leftarrow$ Kreis / Parameter bestimmen

$\xrightarrow{\text{Reziprokf.}}$ $\frac{1}{w\bar{w}} - \frac{5-i}{w} - \frac{5+i}{\bar{w}} + 1 = 0 \quad | \cdot w\bar{w}$

$w\bar{w} - (5+i)w - (5-i)\bar{w} + 1 = 0$ $\quad m': (5-i)$ $\quad r' = 5$

Möbius Tranoformationen

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

3 Teile :

1. Drehstreckung $cz+d$
2. Reziprokfkt. $\frac{1}{cz+d}$
3. Drehstreckung $\frac{bc-ad}{c} z + \frac{a}{c}$

Beispiel 1 : $w(z) = \frac{z-i}{z+1}$

1. $z+1$ -> 1 nach rechts
2. $\frac{1}{z+1}$ -> Inversion & Spiegelung an reeller Achse
3. a) $\frac{-i-1}{1} z + 1$ -> $k = \sqrt{2}$ $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

   b) 1 nach rechts

$k = |a|$ $\varphi = \arg(a)$

$\downarrow$

$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

falls x negativ, dann $+\pi$

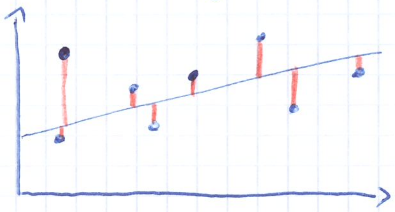
Herleitung 3. Teil :

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$= (az+b) : (cz+d)$$

$$= \frac{a}{c} - \left(az + \frac{ad}{c}\right) = \frac{bc-ad}{c} + \frac{a}{c}$$

Lineare Regression



Für was : Eine Gerade die die Daten beschreibt und Voraussagen machen kann

Methode der kleinsten Quadrate : Quadratsumme der vertikalen Abstände soll minimal sein

Beispiel 1 : Daten $(x_i | y_i)$

Punkte auf Gerade $(x_i | v_i)$

Quadratsumme : $\sum_{i=1}^{n} (v_i - y_i)^2$

$v = a + bx_i$

$\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2$

partielle Ableitung : 1. nach a ableiten

2. nach b ableiten

$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (a + bx_i - y_i) \cdot 1 \overset{!}{=} 0$$

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$na + nb\bar{x} - n\bar{y} = 0 \quad | : n$$

$$a + b\bar{x} - \bar{y} = 0$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (a + bx_i - y_i) \cdot x_i \overset{!}{=} 0$$

$$na\bar{x} + nb\bar{x}^2 - n\bar{x}\bar{y} = 0 \quad | : n$$

$$a\bar{x} + b\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} = 0$$

$$b = \frac{-a\bar{x} + \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2}$$

Mittelwert : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$

Varianz : $Var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ => $Var(y)$

Standard-abweichung : $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ => σ_y