Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot a & y \cdot b \\ x \cdot c & y \cdot d \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix-Multiplikation

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ R \\ R \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} E & E \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} E & E \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ R \\ R \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \\ 1 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 28 & 63 \\ 31 & 65 \\ 36 & 74 \\ 34 & 54 \end{pmatrix}$$

4×3 3×2 4×2

Gauss-Jordan : lineares Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \end{array}$$

zu 1 machen

← $\mathbb{E}_n$ bekommen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

von I aus eliminieren

$$\begin{array}{r} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ 2\mathrm{I}+\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{2}{5} \\ \\ \end{array}$$

zu 1 machen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

von II aus eliminieren

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2}\mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \\ -2\mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \dots \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{5}{2} \end{array}$$

zu 1 machen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{array}\right)$$

von III aus eliminieren

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{5}\mathrm{III}+\mathrm{I} \\ -\frac{3}{5}\mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 \end{array}\right)$$

Schnittpunkt Ebenen

kein gemeinsamer Schnittpunkt bei: $\triangle$ $\overline{\underline{Z}}$ $\equiv$

Inverse

$M \to M^{-1}$

$M^{-1} \cdot M = \mathbb{E}_n$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \end{array}\right)$$

Für 2x2 Matrixen:

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Gleichungen

$$A \cdot B \cdot X = C$$
$$X = (A \cdot B)^{-1} C$$

$$X \cdot A + X \cdot 4\mathbb{E}_n = C$$
$$X = C(A + 4\mathbb{E}_n)^{-1}$$

$$A \cdot X \cdot B = C$$
$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Determinante

$ad - bc = 0 \rightarrow$ keine eindeutige Lösung

$\mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longrightarrow \det(M)$

Inverse existiert, falls $ad - bc \neq 0$

1. Multilinear
2. $\det(E_n) = 1$
3. Falls zwei Zeilen oder 2 Spalten gleich sind: $\det(M) = 0$
4. Falls zwei Zeilen vertauscht: Vorzeichenwechsel

so viele λ, wie Zeilen mit λ

Multilinear: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

linear in jeder Zeile und oder Spalte

$$\det\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

① Wenn gleicher Faktor in Spalte, dann vorzu setzen

$$\det\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} = 9 \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

② $\det\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c & d \end{pmatrix} = (a+x)d - (b+y)c = ad + dx - bc - cy = (ad-bc) + (dx - cy)$

oder

$$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix} =$$

③ Wenn obere / untere Dreiecksmatrix: Produkt der Hauptdiagonale

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = ad - 0$$

④ Wenn vertauscht: Vorzeichenwechsel

$$\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

Vorzeichenwechsel

⑤ Vielfaches addieren: ändert nichts

$$\det\begin{pmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{pmatrix} = (ad - bc)$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{pmatrix}$$

$$= (ad - bc) + (2ac - 2ac)$$

Regel von Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

"Diagonalen bilden"

Eigenwerte / vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8$$

$\lambda_1 = 7$ $\xrightarrow{\text{einsetzen}}$ $\begin{pmatrix} 5-7 & -8 \\ -1 & 3-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\quad \left| \begin{matrix} -2x - 8y = 0 \\ -x - 4y = 0 \end{matrix} \right|$

$-2x = 8y \rightarrow k\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eigenvektor

$\lambda_2 = 1$ $\xrightarrow{\text{einsetzen}}$ ...

Eigenwerte

λ ist ein Skalar/die Richtung ändert sich nicht, nur die Länge

Kongruenzabbildungen

Verschiebung: $\vec{z}' = \vec{z} + \vec{v}$

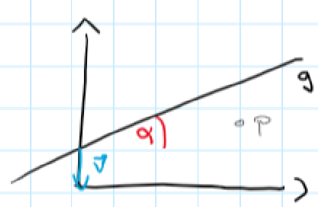
Achsenspiegelung: an x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

an y-Achse: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Drehung am Ursprung: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Punktspiegelung am Ursprung: $z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Achsenspiegelung an Geraden:



$$(\text{Rot } \alpha)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(\text{Rot}(-\alpha))\begin{pmatrix} x - \vec{v} \\ y - \vec{v} \end{pmatrix} + \vec{v}$$

Punktspiegelung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Punktspiegelung am Punkt $P(a|b)$

Ähnlichkeitsabbildungen

zentrische Streckung: $z' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Komplexe Funktionen

Verschiebung: $w(z) = z + a$

Achsenspiegelung: an reeller-Achse: $w(z) = \bar{z}$

an imaginäres-A.: $w(z) = -\bar{z}$

Punktspiegelung : $w(z) = -z$

Drehung am Ursprung : $w(z) = z \cdot e^{i\varphi}$

zentrische Streckung : $w(z) = k(z-a) + a$