Die Geschichte der Kreiszahl Pi

Vorwissenschaftliche Arbeit

eingereicht von

Adrian Vinojcic

8B

betreut von

Mag. Felix Ecker

Ried im Innkreis, 28. Februar 2019

Abstract

Die einfachste geometrische Form im ganzen Universum, welches fast ausschließlich durch die Mathematik beschreibbar ist, ist der Kreis. Dieser wird ganz genau durch die einzigartige Konstante Pi beschrieben. Die folgende Arbeit dreht sich ausschließlich um diese Konstante.

Ziel dieser VWA ist es, **die Geschichte der Kreiszahl Pi** so einfach wie möglich zu erklären und ein allgemeines Verständnis zu dieser Zahl aufzubauen. Neben Fragen zur Irrationalität oder der Verwendung in der Mathematik sind Zufallsversuche und Selbstexperimente im zweiten Teil der Arbeit beschrieben.

Zu lesen ist noch viel mehr dazu, als dass der Kreis nun schon seit über 4.000 Jahren eine wichtige Form für den Menschen ist, die ein Mysterium darstellt.

Den Beweis zur Irrationalität von Pi finden Sie in dieser Arbeit, genauso wie die Antwort auf die Frage ob man den Kreis Quadrieren kann. Auf diese erhält man ein „unmöglich“ als Antwort, obwohl es durch den alleinigen Beweis der Irrationalität nicht glücken kann.

Vorwort

Vorweg möchte ich „Danke“ sagen. Danke an alle, die mir geholfen haben, diese Schule zu meistern und sogar gerne ins BORG Ried gegangen zu sein.

Ganz besonders möchte ich zuerst meinen Eltern danken, die mir stets zur Seite gestanden sind und ab und zu auf die Füße gestiegen sind, was das Schreiben der VWA angeht. Sie wissen zwar sicher noch immer nicht, was nun eine VWA genau sein soll, aber dass sie extrem wichtig ist und ich Pi als Thema gewählt habe, habe ich glaube ich genug oft erwähnt.

Ein großer Dank geht noch an Lukas Aichhorn, ohne den diese VWA nicht das wäre, was sie ist. Ohne sein Programm für die Berechnung von Pi wäre ich sicher in die Informatikwelt eingetaucht, sodass ich die VWA völlig aus den Augen verloren hätte und erst den Herbsttermin zur Abgabe in Erwägung gezogen hätte.

Auch eine wichtige Rolle – wenn nicht die wichtigste - zur Fertigstellung dieser Arbeit spielte mein Betreuungslehrer Hr. Mag. Felix Ecker, ohne den ich gar kein mathematisches Thema gewählt hätte. Auch wenn ich ihn nur in der achten Klasse als Mathematikprofessor genießen durfte bin ich froh, dass er mir so viel beibringen konnte. Ich kann mich noch erinnern wie stolz ich war, als er mich zum Mathematikwettbewerb NABOJ mitgenommen hat und zum Kurs Mathematische Knobeleien eingeladen hat. Wäre das nicht passiert, möchte ich mir gar nicht ausmalen was ich jetzt über mein Zweitthema schreiben müsste.

Ried im Innkreis, 28. Februar 2019 Adrian Vinojcic

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wieso feiern wir am 14. März - an jenem Tag, an dem Albert Einstein Geburtstag hat, und Stephen Hawking verstarb - den Pi-Tag? Ganz einfach: In der klassisch-amerikanischen Schreibweise schreibt man dieses Datum als 3/14, welche eine der ersten Annäherungen von Archimedes für Pi war und die Zahl so darstellt, wie sie die meisten erkennen. „Die meisten“ deshalb, weil es z. B. einen interessanten Verein gibt: „Die Freunde der Zahl Pi“ die sich zur Aufgabe gemacht haben, den Geist der Zahl Pi zu bewahren und als Aufnahmeritual 100 Ziffern wiedergeben können müssen.

Eine weitaus interessantere Frage ist jedoch, wieso jemand eine Vorwissenschaftliche Arbeit zu einer Zahl schreibt, zu der man vermeintlich nicht mehr schreiben kann, als dass man die ersten 50.000 Ziffern von Abermillion die bekannt sind auflistet. Zur Überraschung der einen oder des anderen kann man aber mit Leichtigkeit genug über Pi schreiben um ganze Bücherbände zu füllen. Aber zurück zur Frage: Für mich ist Mathematik ein spannendes Fach bzw. die wichtigste Wissenschaft. Ohne Mathematik gäbe es keine der anderen Naturwissenschaften wie z. B. Biologie, Chemie oder ganz besonders Physik. Mathematik ist die Sprache für all diese Wissenschaften und generell für das ganze Universum. Sie ist eine Sprache die mir leicht fällt. Mir war es daher sehr wichtig ein mathematisches Thema zu wählen und Pi ebnete mir den Weg in den Bereich der Zahlentheorie, da mich diese Zahl einfach fasziniert hat. In dieser Arbeit geht es aber schlichtweg darum, Pi jeder Leserin und jedem Leser zugänglich zu machen, ohne sich vorher andere Literatur durchlesen zu müssen. Da diese Arbeit von einem kurzen selbstgemachten Fragenkatalog ausgegangen ist soll es Ihnen nicht verwehrt bleiben zu wissen, was der Autor selbst über die Zahl wissen wollte und was ich der Leserschaft hier gerne mitteilen will.

Dem Titel ist zu entnehmen, dass es um die Geschichte der Kreiszahl geht, womit sich der größte Teil dieser Arbeit auseinandersetzt. Darauf aufbauend wird erörtert, welche Verhältnisse Pi aufweist und wie man in ganz einfachen Schritten auf die Fläche eines Kreises kommt. Es wird Verständnis aufgebaut, wie man Pi im Dreidimensionalen Raum behandelt und wie man selber auf Ideen kommen kann, neue Formeln für sich selbst zu entdecken, die man so in der Schule nicht lernt. Eine vermeintlich triviale Frage ist, ob Pi in der Natur vorkommt, jedoch mit der

Ausnahme, dass die Planeten und Sterne „rund“ sind und deren Umfang deswegen mit Pi leicht zu berechnen ist.

Weitere Fragen, wie zum Beispiel „Ist Pi jetzt irrational oder nicht?“ werden für Sie im Kapitel 5 „Die Ziffernfolge“ genau erörtert und ausgeweitet. Um für etwas Abwechslung in dieser sonst rein literarischen Zusammenführung zu sorgen, sind für diese Arbeit auch zwei Zufallsversuche durchgeführt worden, um Pi auf eine bestimmte Genauigkeit zu berechnen bzw. zu „schätzen“. Im letzten Kapitel können Sie lesen, wie es ist, bis zu 300 Nachkommastellen von Pi zu lernen und wiederzugeben. Aufgebaut ist diese Arbeit auf dem Wissen, welches man in zwölf Jahren Allgemeinbildung lernt und einer Auswahl von neun Büchern bzw. Websites an Basisliteratur.

Für den Anfang dieser Vorwissenschaftlichen Arbeit ist es wichtig zu wissen, wie man überhaupt auf die Kreiszahl Pi gestoßen ist und warum der Wert 3,141592653589793238462643383279… eine solche Bedeutung hat. Diese Frage wird gleich im ersten Kapitel nach der Einleitung mit einer Definition beantwortet und legt einen Grundbaustein für die ganze Arbeit.

2 „Drei und etwas mehr“

2.1 Definition

Mit π wird die Konstante bezeichnet, welche sich ergibt, wenn man den Durchmesser eines Kreises mit seinem Umfang in ein Verhältnis setzt. Man teilt also den Umfang durch den Durchmesser – äquivalent zweimal dem Radius - und erhält bei jedem beliebigen Kreis den Wert von etwa 3,14159.

2.2 Die ursprünglichen Annäherungen

Es muss einen Grund dafür geben, dass sich die Menschen von dieser Zahl angezogen fühlen. Pi kann doch nicht einfach vom Himmel gefallen sein. Natürlich ist sie durch Beobachtungen entstanden, wie alles andere in der Mathematik auch. Im Falle π stellten die Menschen aber schnell fest, dass wenn man ein Rad vergrößert, das Verhältnis vom Durchmesser zum Umfang immer gleich ist und wie eben definiert circa 3,14… eine feste Größe im Kreis sein muss. Aber die Genauigkeit fehlte, anders als bei anderen Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder e, für die es sofort einen Rechenweg gab um sie zu berechnen, sehr lange.

2.2.1 Babylonien und Ägypten

Bereits um etwa 2000 vor Christus verwendeten die Babylonier einen Wert von $3\,{}^{1}/_{8}$ für π, während die Ägypter zu dieser Zeit ${}^{256}/_{81} \approx 3{,}1605$ hernahmen.

Beide Kulturen hatten ihre kreativen Ideen zur Annäherung an die schwer verständliche Kreiszahl. Die Babylonier näherten sich zuerst mit einem 12-eck an π heran, wobei der Wert 3 herauskam. Im Jahr 1936 wurden in Susa (Italien) Keilschrifttexte auf einer Tafel entdeckt, welche 3,125 für Pi überliefern.

In etwa zur gleichen Zeit meinen die Ägypter im „Papyrus Rhind“, geschrieben vom Schreiber Ahmes, welche mit etwa 3.500 Jahren eine der ältesten mathematischen Schriften ist, mit $({}^{16}/_{9})^2$ für eine gute Approximation für π gefunden zu haben.

Hergeleitet hat er den Wert in der Aufgabe 50 von 87, in der die Fläche eines kreisförmigen Feldes mit einem Durchmesser von 9 khet (ägyptische Längeneinheit) berechnet werden soll. Auf dieser Rolle steht glücklicherweise eine Methode für die Lösung dieser Aufgabe bereit. Nämlich: $A = {}^{64}/_{81}\, d^2$

Da heutzutage die richtige Lösung $(A = r^2\pi)$ bereitsteht, lässt sich der ägyptische Wert für π leicht berechnen.

Einfach die ägyptische und die moderne Formel gleichsetzen, was durch einfache Umformung zum gesuchten ägyptischen Pi führt:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 * \pi = \frac{64}{81}\, d^2$$

$$\frac{d^2}{4} * \pi = \frac{64}{81}\, d^2$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$$

$$\pi = 4 * \frac{64}{81} = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605 \ldots$$

(vgl. Blatner, 2001, S. 56), (vgl. Navarro, 2016, S. 18f.), (vgl. Scholz, 2001, S. 4ff.)

2.2.2 Die Bibel

Im Alten Testament lässt sich noch darauf rückschließen, dass die Ordensleute in der Zeit, in welcher das alte Testament geschrieben wurde, für den Umfang des Kreises dreimal mehr vermaßen als für den Durchmesser. Folgende Passage ist

> „…beispielsweise in Könige (I, 7, 23):
>
> „Dann machte er das Meer. Es wurde aus Bronze gegossen und maß zehn Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreißig Ellen konnte es rings umspannen.“

(Navarro, 2016, S. 18f.)

2.2.3 Archimedes

Der Mensch, dem die Berechnung von π am nächsten gelegt wird, ist kein geringerer als Archimedes. Im dritten Jahrhundert vor Christus entwickelte Archimedes eine Methode, um die Kreiszahl auf einen kleinen Bereich einzugrenzen, da er wusste, dass π irrational sein muss und nicht ${}^{22}/_{7}$ entsprechen kann. Mit der Hilfe von bis zu 96-eckigen Polygonen konnte er beweisen, dass Pi zwischen ${}^{223}/_{71}$ und ${}^{22}/_{7}$ liegen muss. Der Vorgang, wie Archimedes diese zwei Grenzwerte bestimmt hat, nennt man heute die Exhaustationsmethode. Diese Methode wurde noch lange Zeit später verwendet und sogar verbessert. (vgl. Bentley, 2008, S. 142f.)

Gut zusammenfassen konnte (Steffens, 2018) die Arbeit von Archimedes folgendermaßen:

> „Er schachtelte einen Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) mit regelmäßigen Vielecken ein. Angefangen mit einem regelmäßigen Sechseck, das einmal den Kreis umfasste und einmal in ihn einbeschrieben war. Über das 12-, 24- und 48-Eck gelangte er schlussendlich zum 96-Eck. Auf diese Weise erhielt er eine untere und eine obere Grenze für den Kreisumfang und damit auch für die Zahl Pi.“

2.2.4 Der Osten

Mit der Kreisrechnung lag man in China lange Zeit weit zurück. Bis ins erste Jahrhundert nach Christus verwendeten die Chinesen einfach 3 für eine der schönsten mathematischen Konstanten. Dort wartete man auf Zhang Heng um π mit $\sqrt{10}$ in einem seiner Bücher anzunähern.

Etwa 250 n. Chr. näherte sich Wang Fang mit dem Bruch $\pi = \frac{145}{45} = 3{,}1555$ ... der Kreiszahl. Wer aber die Kreisrechnung in China dann wirklich antrieb, war der Mathematiker Liu Hui, welcher im Jahr 263 n. Chr. sein Buch „Neun Kapitel über die Kunst der Mathematik“ veröffentlichte. Anhand einer Rekursivformel, die an die Methode von Archimedes anlehnte, konnte er unter bestimmten Umständen Pi berechnen. Tatsächlich berechnete er mit einem 3072-Seitigen Polygon auch den Wert $\pi = 3{,}141592104$, empfohl aber eine Annäherung mit zwei Dezimalstellen.

Chongzhi empfahl um diese Zeit bei einfachen Rechnungen 22/7 und bei schweren 355/113 für Pi einzusetzen.

In Indien begann es auch mit $\sqrt{10}$ als Annäherung für Pi, jedoch aber sogar bis ins 12. Jahrhundert, obwohl den Indern seit Aryabhata (ca. 476-550 n. Chr.) die ersten drei Ziffern bekannt sein sollten. Ab dem ersten Jahrhundert gibt Bhaskara II nämlich in seinem Buch „Schönheit“ eine Annäherung von $\pi = \frac{3917}{1250} = 3{,}1336$.

Sehr fortgeschritten waren auch die Menschen im arabischen Raum, die um 800 n. Chr. $\pi = 3{,}14$ für allgemeine Kreisrechnungen verwendeten, und $\pi = 3{,}1416$ für Berechnungen in astronomischer Größe.

(vgl. Navarro, 2016, S. 26ff.)

2.2.5 Ludolph van Ceulen

Auf die höchste Stufe wurde die Exhaustationsmethode später von Ludolph van Ceulen gehoben. Dieser berechnete im Laufe von 30 Jahren (bis 1610) mit einem

5.611.686.018.427.387.904-Eck

Pi auf **3,14159265358979323846264338327950288**

genau. Pi wurde daher bis ins 19. Jahrhundert auch als Ludolph’sche Zahl bezeichnet.

(vgl. Bentley, 2008, S. 146)

Um sich ein Bild darüber zu machen wie genau 35 Nachkommastellen bei π sind, werden gerne Beispiele angeführt. Für die schönste und eindeutigste Erklärung sind aber nicht einmal van Ceulens 35 Stellen nötig. Es reichen nämlich zehn Ziffern völlig aus, um den Umfang auf einen Millimeter genau zu berechnen, wenn man als Radius die Entfernung von der Erde zur Sonne verwendet.

(vgl. McWasi, o. J.)

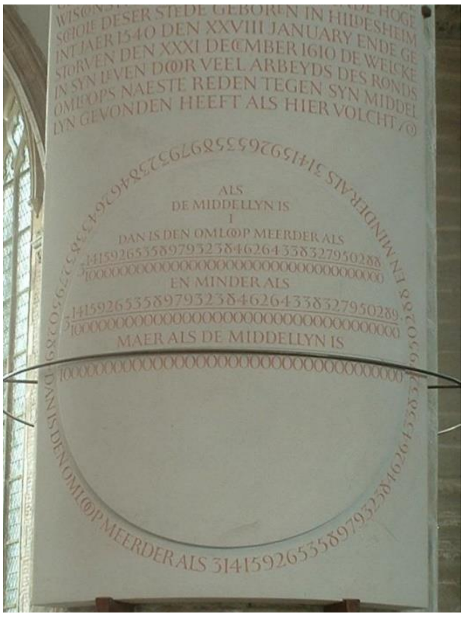

Abbildung 1: Grab Ceulens mit 35 Ziffern von Pi

2.2.6 Verbesserung der Methoden

Nach bzw. schon während den Berechnungen Ceulens ging es bei den Berechnungen von Pis Nachkommastellen nicht mehr um den physikalischen Aspekt oder ähnliches. Mit 35 Ziffern waren mehr als genug Stellen bekannt. Die Mathematiker rechneten jedoch stets weiter, um einen noch genaueren Wert für π zu finden oder eine neue, einfachere Methode zu entwickeln. Eine neue Methode zu entwickeln ist den Mathematikern Snell und Huygens gelungen, welche das Verfahren von Archimedes mithilfe der Trigonometrie verfeinerten.

(vgl. Navarro, 2016, S. 31)

2.3 Pi zum Rekorde aufstellen

Da ab 1610 kein Sinn darin mehr besteht noch mehr Ziffern der Ludolph’schen Zahl zu berechnen, könnte man meinen, dass sich die schlauen Köpfe wichtigeren Themen widmen, als Ziffern eine Ordnung zu geben um eine Zahl zu generieren, welche den Kreis unnötig genau beschreibt. Aber dem ist nicht so. Eben wegen dieser Sinnlosigkeit haben sich einige Mathematiker zur Aufgabe gemacht Pi zu berechnen.

Zwanzig Jahre später wurde nämlich Ceulens Rekord schon gebrochen. Der bekannte Astronom Christoph Grienberger berechnete 1630 schon 39 Ziffern. Daher wurde ein Mondkrater für seine Leistung nach ihm benannt.

Der nächste Rekord wurde 1699 von Abraham Sharp mit 72 Dezimalstellen aufgestellt, welcher sich immerhin 20 Jahre lang hielt, bis er von Thomas Fantet de Lagny mit stolzen 127 Ziffern abgelöst wurde.

Ab da gehen die Rechnungen ziemlich schnell und neue Rekorde werden stetig veröffentlicht. 1794 berechnet Georg Vega 140 Stellen von Pi, um 40 Jahre später von L.K Schulz von Strassnitzky und Johann Martin Zacharias Dase überboten zu werden. Das Besondere an diesen zwei Mathematikern ist, dass sie für die Berechnung keine zwei Monate benötigten.

Aber selbst dieser Rekord wird schnell von einem neuen abgelöst. 1855, 11 Jahre später berechnet Richter sagenhafte 500 Stellen der magischen Zahl.

Im Jahre 1874 veröffentlicht William Shanks eine beeindruckende Berechnung von Pi‘s ersten 707 Stellen, die aber ab der 527. Stelle falsch sind. Entdeckt wurde dieser Fehler jedoch erst nach dem zweiten Weltkrieg von D. F. Ferguson welcher selbst 730 Ziffern berechnete.

(vgl. Blatner, 2001, S. 57f.)

(vgl. Navarro, 2016, S. 31)

(vgl. Scholz, 2001, S. 45)

2.4 Pi im Zeitalter von Computern

Wie bekannt ist, kamen Menschen auf die Idee, dass sie Maschinen für sich arbeiten lassen können. Genau so geschah es natürlich auch mit der Berechnung von π.

G. W. Reitwieser berechnet nämlich 1949 mit seinem Rechner ENIAC π auf über **2.030** Stellen und ist somit der erste Mensch, der π in einer solch großen Dimension ausrechnet. Für diesen Rechenaufwand benötigte seine Maschine aber ganze siebzig Stunden.

Man erkennt den technologischen Fortschritt sehr gut, wenn man vergleicht, wie lange NORC, ein neuerer Rechner von S. C. Nicholson und J. Jeenel im Jahr 1954 gebraucht hat, um **3.089** Ziffern zu berechnen. Da in der Zahlenbasis 10 jede Nachkommastelle eine zehnmal genauere Darstellung einer Zahl bedeutet, heißt dass, das ENIAC nur dreizehn Minuten brauchte um eine 10^{1000}-mal (eine eins mit Tausend Nullen) genauere Berechnung als die NORC zu machen. Nur weitere vier Jahre später wurden schon **16.167** Nachkommastellen durch den IBM704 berechnet, um von einem seiner Nachfolger, dem IBM7090, 1961 mit **100.265** Ziffern geschlagen zu werden.

Die Computer werden immer besser und erreichen immer genauere Kalkulationen von der gesuchten Zahl. Den Programmierern ist es egal, dass sie wertvolle Rechenzeit, Ressourcen und Arbeitszeit verschwenden, ihnen ist nur wichtig, den Geist der magischen Zahl π aufrecht zu erhalten. Natürlich erfreuen sich die Ersteller der Computer, wenn sie einen neuen Rekord stellen, weil sie dadurch beweisen können, was ihre Maschinen sozusagen „alles“ können.

Schon im Jahr 1989 waren den Menschen über eine Milliarde Ziffern bekannt. Wenn man sich vorstellt, wie genau zehn Ziffern waren, die z.B. Ceulen gerade so berechnete und den Vergleich mit dem Abstand zwischen der Erde und der Sonne hernimmt, kann man sich doch kaum vorstellen, wie genau diese **1.000.000.000** Ziffern sein müssen.

Unvorstellbar groß ist daher der jüngste Rekord im November 2016 mit 22,4 Billionen Nachkommastellen in unserer Zahlenbasis 10 von Peter Trüb.

(vgl. McWasi, o. J.)

(vgl. Blatner, 2001, S. 58f.)

(vgl. Scholz, 2001, S. 45f.),

(vgl. Navarro, 2016, S. 91)

2.4.1 Ramanujan

Zu verdanken sind diese Rekorde aber nur sehr effizienten Formeln, die eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit haben. Die Informatiker hätten natürlich eine Formel von Euler oder Newton verwenden können, die exemplarisch im Kapitel 4.3 zu sehen sind. Aber mit einer Verwendung von sieben Gliedern bzw. Rechenschritten für drei Ziffern würde schlichtweg zu viel Rechenleistung verbraucht werden.

Im Jahr 1910 veröffentlichte der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887-1920), welcher einer der erstaunlichsten Mathematiker war, 16 Formeln zur Berechnung von Pi. Darunter befindet sich die folgende:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1.103 + 26.390k)}{(k!) \cdot 396^{4k}}$$

Bei dieser Formel ist die Berechnung mit jedem Rechenschritt 100 Mio. mal genauer. Das heißt, dass mit jedem weiteren Schritt acht neue Nachkommastellen berechnet werden.

Nochmal verbessert werden konnte diese Leistung von acht auf vierzehn Stellen. Die folgende Formel stammt von den Chudnovsky-Brüdern:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6n)! \cdot (13.591.406 + 545.140.134n)}{(n!)^3 \cdot (3n)! \cdot (640.320^3)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Dank diesen Formeln können Computer nun in kurzer Zeit sehr viele Stellen von Pi berechnen.

(vgl. Navarro, 2016, S. 89)

Auch wenn die Formel kompliziert aussieht, ist sie durch einfache Multiplikation und Addition einfach zu lösen.

Auf der linken Seite erhält man den Kehrwert von Pi, welcher von der rechten Seite genau definiert wird.

Generell muss der Computer im ersten Schritt 0 für „n“ verwenden, dann 1, dann 2 usw. bis in die Unendlichkeit. Addiert der Rechner nun alle Werte, die bei einzelnen Schritten im Bruch entspringen zusammen und multipliziert den neuen Wert schlussendlich mit 12, dann enthält man als Lösung den soeben genannten Kehrwert für Pi.

3 Pi in der Mathematik und Physik

Da nun die Definition der Konstante Pi und unnötigerweise ihre ersten paar Trillionen Stellen bekannt sind, können andere Formeln der Kreisrechnung herleitet werden.

3.1 Fläche des Kreises

Der Umfang des Kreises ist laut Definition bekanntlich $U_k = d * \pi = 2r\pi$.

Werden jetzt, wie in Abb. 2 und 3, einige Polygone in einen Kreis einsetzt, kann wie folgt die Fläche berechnet werden:

Die Fläche des (in diesem Fall) Hexagons wird mit $A_{Hex} = 6 * \frac{h_c * c}{2}$ berechnet, wobei der Umfang des Hexagons $U_{Hex} = 6 * c$ entspricht.

Werden diese zwei Formeln verallgemeinert indem man die Anzahl der Ecken mit „n“ bezeichnet erhält man $A_{Pol} = n * \frac{h_c * c}{2}$ und $U_{Pol} = n * c$.

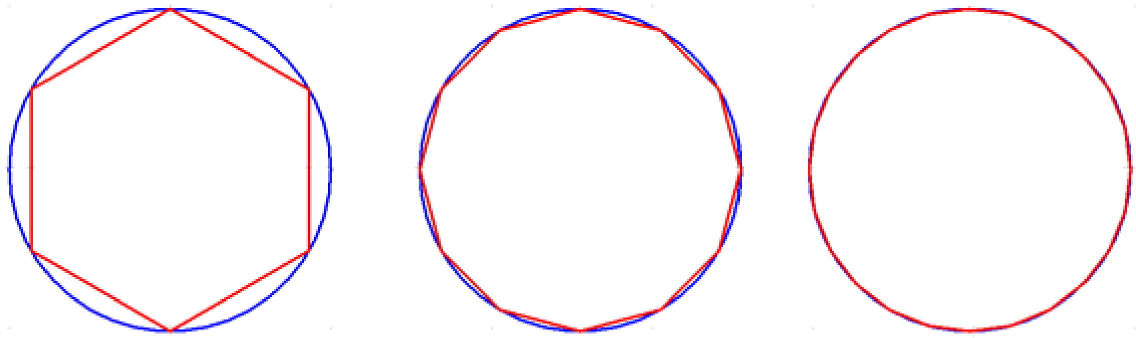

Abbildung 2: Zunehmende Eckenanzahl der Polygone

Sobald „n“ die Unendlichkeit anstrebt nähern sich der Umfang und die Fläche des Polygons dem Umfang und der Fläche des Kreises. Darüber hinaus nähert sich h_c an r, weil c sich an Null annähert. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} U_{Pol} = n * c = U_K = 2r * \pi$ und $\lim_{n\to\infty} h_c = r$. Wird alles in $A_{Pol} = \frac{n * h_c * c}{2}$ eingesetzt, ergibt sich schlussendlich $\lim_{n\to\infty} A = \frac{n * h_c * c}{2} = \frac{2r\pi * r}{2} = \underline{\underline{r^2\pi}}$. (vgl. KhanAcademyDeutsch, Fläche eines Kreises - Zusammenhänge verstehen, 2017)

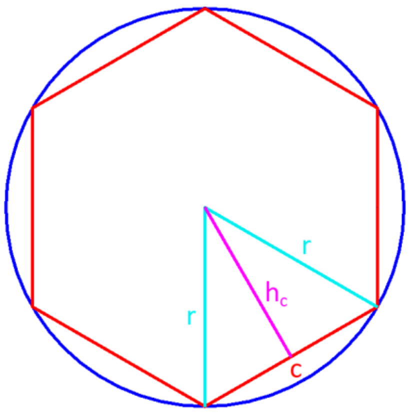

Abbildung 3: Hexagon im Kreis

3.2 Rechnungen mit Kreisen in R³

Das einfachste dreidimensionale Objekt mit einem Kreis nennt man einen Kreiszylinder, dieser besteht aus zwei parallelen Kreisen und einer Mantelfläche, welche im rechten Winkel auf die zwei Kreise steht. Um sein Volumen zu berechnen, ist es nötig wie bei den Prismen die Grundfläche mit der Höhe zu multiplizieren.

$$V = r^2\pi * h$$

Die Oberfläche dieses Kreiszylinders berechnet sich wie folgt:

$$O = G + D + M = 2 * r^2\pi + d\pi * h$$

Wobei „h" für die Höhe des Zylinders steht und „M" für die Mantelfläche. „G" und „D" stehen jeweils für Grund- bzw. Deckfläche.

Da Pi - wie zu erkennen ist - hier nurmehr eine Konstante ist, welche in die entsprechenden Formeln eingesetzt wird, werden die folgenden Formeln nicht mehr hergeleitet, sondern nur noch aufgelistet um ein Verständnis zu entwickeln.

Volumen des Kegels: $\frac{1}{3} * r^2\pi * h$

Oberfläche des Kegels: $2 * r\pi + \sqrt{r^2 + h^2} * r\pi$

Volumen der Kugel: $\frac{4}{3} r^3\pi$

Oberfläche der Kugel: $4r^2\pi$

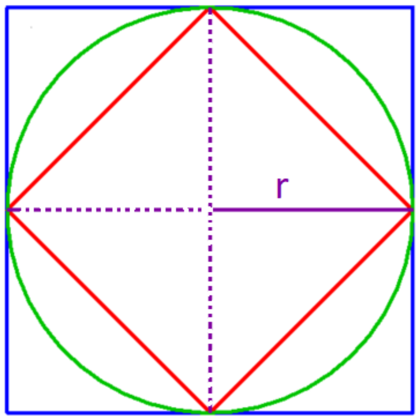

Abbildung 4: Quadrat im Kreis im Quadrat

3.3 Verhältnisse

3.3.1 Kreis zu Quadrat

Schreibt man ein Quadrat in einen Kreis so ein, dass alle Ecken des Quadrates den Kreis berühren, verhalten sich die Flächen immer gleich,nämlich π:2. Schreibt man den Kreis jedoch in das Quadrat, diesmal so, dass der Kreis alle Seiten in der Mitte halbiert, verhalten sich Kreis zu Quadrat π:4. Begründen werden kann diese Aussage wie folgt: Die Fläche des Kreises lautet bekanntlich $r^2\pi$. Das kleine Quadrat hat folglich einen Flächeninhalt von $2r^2$ und das große einen von $4r^2$. Nun werden die Flächen von Kreis und kleinem Quadrat in einen Bruch geschrieben und wie folgt vereinfacht: $\frac{r^2\pi}{2r^2} = \frac{r*r*\pi}{r*r*2} = \frac{\pi}{2}$. Weil aber das große Quadrat um das Doppelte größer ist, als das Kleine, ist auch die zweite Annahme bestätigt.

(vgl. Navarro, 2016, S. 16)

3.3.2 Kreisumfang zu Kreisfläche

Vergleicht man den Umfang des Kreises mit seiner Fläche, stellt man schnell fest, dass diese auch in einem Verhältnis sein müssen.

Da π durch den Umfang bestimmt ist, lautet die Formel für den Umfang $U = 2r * \pi$ und anhand von Kapitel 3.1 beträgt der Kreisflächeninhalt $A = r^2 * \pi$.

Um auf ein Verhältnis zwischen den Umfang und Fläche zu kommen, muss eine Zahl oder Variable herausgehoben werden und weil π eine Konstante ist, ist es für später einfacher die Gleichungen auf r umzuformen um Pi wegzukürzen. Nach dem Umformen stehen die Gleichungen $\frac{U}{2\pi} = r$ und $\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$ da, welche nur noch gleichgesetzt werden müssen

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{U}{2\pi}$$

$$\frac{A}{\pi} = \left(\frac{U}{2\pi}\right)^2$$

und auf die gesuchte Größe U bzw. A umgeformt werden:

$$A = \pi * \frac{U^2}{4\pi * \pi}$$

Somit Lautet die Fläche bei gegebenem Umfang

$$A = \frac{U^2}{4\pi}$$

und umgekehrt.

$$4\pi * A = U^2$$

$$U = \sqrt{4\pi * A}$$

(vgl. KhanAcademyDeutsch, Kreisumfang und Kreisfläche in Beziehung setzen, 2017)

3.4 Eulers Identität

Es gibt für Schüler nichts schöneres, als wenn in der Mathematik schöne Zahlen für die Lösung einer Rechnung hervorkommen – vor allem, wenn sie etwas im komplexen Bereich berechnen.

Was aber jeden verblüffte war das, was Euler 1738 in seinem Werk „Introducito in analysin infinitorum“ bewies. Unter anderem nämlich die Eulersche Identität und insbesondere ihren Sonderfall:

$$e^{ix} = \cos(x) + i * \sin(x)$$

Im Spezialfall $x = \pi$ lautet die Gleichung

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i * \sin(\pi)$$

$$e^{i\pi} = -1 + i * 0$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Diese Gleichung gilt als eine der schönsten aller mathematischen Formeln.

> „Sie verbindet fünf Basisgrößen der Mathematik (π, e, i, 0 und 1) und vier Basisoperatoren (+, -, · und Exponentiation) zu einem einzigen Ausdruck:
>
> $$e^{i\pi} + 1 = 0$$
>
> Diese Formel hat die Menschen immer wieder entzückt. Vielleicht deshalb, weil sie zwar schön anzuschauen, aber überhaupt nicht anschaulich ist. Sie besagt nämlich nichts weniger, als daß [sic!] die transzendente Zahl e, potenziert mit der transzendenten Zahl π, und dann wiederum potenziert mit der imaginären Zahl i, schlicht und genau -1 ergibt.“

(Blatner, 2001, S. 38)

3.5 Gradmaß und Bogenmaß

Um den Winkel eines Kreises zu berechnen und anzugeben, kann man traditionell auf zwei Arten vorgehen, wenn man das Gon, welches im Bau verwendet ausschließt. Ein Vollwinkel mit 400gon entspricht nämlich im Gradmaß einem Winkel von 360°.

Der Kreis wird in der Mathematik daher meist in 360 Einheiten aufgeteilt, oder im Bogenmaß, bei welchem eine Umrundung dem Umfang $2\pi\, rad$ entspricht, angegührt. Beide Winkelmaße haben ihre Vor- und Nachteile und eine eigene Entstehungsgeschichte.

Beginnend mit dem viel älteren Gradmaß, welches auf der Zahlenbasis 60 basiert und von den Babyloniern stammt, wurde dieses Maß geschaffen um eine Teilung für den Kreis zu schaffen, welche möglichst viele ganzzahlige Teiler hat. So kann man den Kreis nicht nur in 360 Grad (°), sondern auch in Minuten (‘) und Sekunden (“) unterteilen. Wobei immer gilt: 1° = 60‘ und 1‘ = 60“

Als aber die Infinitesimalrechnung erfunden wurde, konnte dieses gebastelte Maß nicht mehr herhalten. Sie forderte eine natürliche Einheit. So entschloss man sich dazu, den Radianten (rad) zu erfinden, bei welchem eine Umrundung $2\pi\, rad$ groß ist. Ein einziger Radiant ist so groß, wie der Radius, der auf dem Umfang entlang aufgelegt wird und umgerechnet in Grad etwa 57,295° entspricht.

(vgl. Navarro, 2016, S. 18)

„Die gebräuchlichsten Äquivalenzen sind:

30° = $\frac{\pi}{6}$, 60° = $\frac{\pi}{3}$, 90° = $\frac{\pi}{2}$, 180° = π, 360° =2π“

(Navarro, 2016, S. 18)

3.6 Pi in der Natur – Das Sekundenpendel

Pi steckt in der Formel für die Schwingungsdauer eines Pendels. Diese lautet:

$$T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Der Meter ist ursprünglich durch ein solches Pendel definiert gewesen. Ein Meter wurde nämlich am Anfang, statt der Strecke welche das Licht im Vakuum während einer 299.792.458tel Sekunde fortschreitet, durch die Länge mit der ein Pendel, für eine Periode zwei Sekunden benötigte definiert.

Also wird für die Schwingungsdauer T 2sek und für die Länge l 1m eingesetzt und durch einfaches umformen folgt die Gleichung:

$$2 = 2\pi * \sqrt{\frac{1}{g}}$$

$$1 = \pi^2 * \frac{1}{g}$$

$$g\ (9{,}81) = \pi^2 (9.87)$$

Das Interessante ist nun, dass die Erdbeschleunigung g, die man damals noch nicht kannte, laut dieser Formel Pi ins Quadrat entspricht. Mit einer Differenz, die erst ab der zweiten Nachkommastelle auftritt sind sich diese zwei Konstanten wirklich sehr nahe. Die Differenz ist vermutlich nur aus Messfehlern, die sehr schnell entstehen können, entstanden. Weil dieser Fehler geschehen ist, misst der Meter heute sozusagen um ca. 6mm zu wenig.

(vgl. Westphal, 2013, S. 39)

4 Annäherungsversuche an Pi

4.1 Lazzerinis Versuch

Was Lazzerini bekannt gemacht hat, war sein Versuch mithilfe von 3408 Nadeln einige Nachkommastellen von π zu berechnen. „Erstaunlicherweise“ gelang es ihm tatsächlich diese auf sechs Stellen genau zu berechnen. Allgemein bekannt ist diese Methode als das „Nadel-Problem von Buffon“ und bezeichnet die Wahrscheinlichkeit p, dass eine willkürlich fallengelassene Nadel mit der Länge l, eine Linie in einem Raster aus Parallelen, welche den Abstand d haben kreuzt.

Das Verhältnis von kreuzenden Nadeln (K) zu geworfenen Nadeln (W) wird mit $\frac{K}{W}$ bezeichnet). In seinem Versuch verwendete Lazzerini die Formel

$$\frac{K}{W} = p = \frac{2}{\pi} * \frac{l}{d}$$

, formte sie auf $\pi = \frac{2lW}{dK}$ und verwendete für die Nadellänge 5LE und für die Distanz der Linien 6LE. Bei 1808 geglückten Kreuzungen der Nadel mit dem Raster erhält jener $\pi = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} \approx 3{,}1415929$. Unglaublich genau finden andere Mathematiker und unterstellen ihm eine Schummelei aufgrund der Wahl der verdächtigen Zahlen. Sein Ergebnis ist nämlich genau das 96-fache des Annäherungsbruches $\pi = \frac{355}{113}$.

(vgl. Aigner & Ziegler, 2015, S. 191f.)

> „In einer ziemlich frechen Arbeit zeigte der Mathematiker Norman T. Gridgeman, wie eine derartige Schummelei aussehen könnte: Wenn man eine Nadel mit der Länge von 0,7857 genau zweimal fallen lässt und sie die Kante einer Fliese einmal trifft, dann gibt die Formel einen guten Näherungswert von π an, denn
>
> **2 · 0.7857 / π = ½**
>
> **also π = 3,1428**
>
> Mit seinem Spott über die experimentellen Versuche zum Berechnen von π hatte Gridgeman an einem Punkt recht: Wenn man den Wert von π schon mit einer gewissen Genauigkeit kennt, kann man leicht einen Versuch vortäuschen, der π mit dieser (oder einer etwas schlechteren) Genauigkeit anzugeben scheint.“

(Bentley, 2008, S. 148)

Wie aber π in dieser Gleichung vorkommt löst man für kurze Nadeln ($d \geq l$) ganz einfach mit Hilfe der Integralrechnung.

Ausgehend von der Frage:

„Wenn man eine kurze Nadel auf liniertes Papier fallen lässt – wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel so liegen bleibt, dass sie eine der Linien kreuzt?“ (Aigner & Ziegler, 2015, S. 191)

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt lautet also $p = \frac{K}{W}$

Wenn man davon ausgeht, dass die Nadeln wie in dem noch folgenden Versuch für diese Arbeit gleich lang sind wie der Abstand der Linien, lassen sich alle möglichen Lagen mit den folgenden Ungleichungen ausdrücken.

$0 \leq \alpha \leq \pi$ und $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$, wobei um einen Schnittpunkt zu generieren immer gelten muss, dass $\sin(\alpha) \geq \frac{x}{d/2}$.

In den Ungleichungen bezeichnet α den Winkel zu den horizontalen Linien und x die Entfernung zu der nächstgelegenen Linie.

Anhand dieser Ungleichungen lässt sich eine Funktion aufstellen, von der einfach das Integral ausgerechnet werden muss, um dann diese Fläche mit der Gesamtfläche zu vergleichen.

$$f(\alpha) = \frac{d}{2} * \sin(\alpha)$$

$$K_A = \int_0^\pi \frac{d}{2} * sin\,(\alpha) d\alpha$$

$$= \frac{d}{2} * \int_0^\pi sin\,(\alpha) d\alpha = \frac{d}{2} * (-1) * \cos(\alpha)\Big|_0^\pi = \frac{d}{2} * (-1)[(-1) - (1)] = d$$

Die Fläche für alle Möglichkeiten lautet dabei einfach:

$$W_A = \frac{d}{2} * \pi$$

Bildet man nun einen Quotienten aus den beiden, ist das die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nadel die Linie kreuzt schnell ausgerechnet.

$$\frac{K_A}{W_A} = \frac{d}{\frac{d * \pi}{2}} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Will man nun noch die Möglichkeit einbauen dass $l < d$ ist, berechnet man die Wahrscheinlichkeit wie folgt:

$$p = \frac{2}{\pi} * \frac{l}{d}$$

Womit man wieder bei der Ausgangsgleichung ankommt, die Lambert auch verwendet hatte.
(vgl. Navarro, 2016, S. 67ff.)

4.1.1 Durchführung des Experimentes

Der Wert, welcher bei der Versuchsreihe für diese Arbeit entstanden ist, lautet in etwa 3,1545. Nach tausend Nadelwürfen mit 3cm langen Nadeln und Linien, welche 3cm voneinander entfernt sind, wurde das Gitter 634mal gekreuzt. Somit ist das Ergebnis leider nur eine Nachkommastelle lang genau. Mit echten Nadeln sollte man das Experiment aber nicht machen, da es oft Streitfälle gibt, ob die Linie nun gekreuzt worden ist oder nicht.

Abbildung 5: Nadelproblem von Buffon

4.2 Computerprogramm

Ein weiterer Zufallsversuch wäre, einem Programm zu befehlen eine bestimmte Anzahl an Punkten zufällig auf einer quadratischen Fläche zu generieren. Bei jedem erstellten Punkt wird die Distanz zur Mitte in der d2-Metrik ($d = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$) berechnet. Beträgt der Abstand d zur Mitte weniger als den Radius r, addiert man diesen Punkt zu einer Gruppe (in diesem Fall s).
Allein anhand dieser Daten kann man einen Näherungswert für π berechnen, indem man die Gruppe s in ein Verhältnis zu allen generierten Punkten p setzt.

$$\pi \approx \frac{s}{p}$$

Einen Kreis auf ein quadratisches Stück Papier zu malen und Steinchen zufällig auf das Quadrat fallen zu lassen wäre ein dazu analoges Experiment. Jedoch kann man die Steinchen kaum zufällig fallenlassen. Deshalb wird der Versuch am Rechner ein genaueres Ergebnis liefern, obwohl dieser nur ganzzahlige Punkte generieren kann.
Für diese Arbeit entsprang bei zehn Versuchen mit je 10.000.000 Punkten und einer Seitenlänge von 1200 Pixeln ein Durchschnittswert von $\pi = 3{,}1416 \ldots$.

4.3 Verschiedene Reihen und Produkte

Die Kreiszahl lässt sich nicht durch einen endlichen Bruch, wie sich im Beweis der Irrationalität im Kapitel 5.1 zeigt, darstellen. Für eine Berechnung von π benötigt man eine unendliche Reihe an Brüchen, die man aneinanderfügt. Man nähert sich also der Zahl an, erreicht sie jedoch nie wirklich. Trotzdem konvergiert die Zahl je nach Bruch schneller oder langsamer an den gegebenen Wert (siehe Kapitel 2.4.1).

Die erste Reihe, welche in der Geschichte aufgekommen ist, ist die Reihe von Vieta aus dem Jahr 1592. $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} * \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} * \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} * \ldots$ Welche schon nach sieben Gliedern die dritte Dezimalstelle von Pi genau angibt.

Sir Isaac Newton veröffentlichte 1666 ebenfalls eine Möglichkeit zur Annäherung an die Kreiszahl mit: $\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 * (\frac{1}{12} - \frac{1}{5*2^5} - \frac{1}{28*2^7} - \frac{1}{72*2^9} - \cdots)$

Ein schönes Beispiel liefert Leibniz im Jahr 1673 mit seiner Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Der Klassiker unter diesen Reihen ist aber jene von Euler

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler machte sich zur Aufgabe das Basler Problem zu lösen, in welcher alle Kehrwerte der Quadratzahlen zu addieren sind. Darüber hinaus konnte Euler eine allgemeine Formel für geradzahlige Exponenten in den Riemannschen ζ(Zeta)-Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ erstellen, welche zu seinen Lebzeiten noch nicht existierten.

Weitere Zeta-Funktionen sind folgende:

$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ $\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ $\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$

Natürlich gibt es viele weitere Wege, um sich so der Kreiszahl anzunähern. Aber die schönsten und einfachsten genügen, bevor man unnötig lange Formeln mit einem hohen Rechenaufwand und niedriger Konvergenzgeschwindigkeit auflistet.

(vgl. Navarro, 2016, S. 79ff)

(vgl. Scholz, 2001, S. 32)

5 Die Ziffernfolge

5.1 Irrationalität von Pi

Warum π so bekannt ist liegt daran, dass man die Zahl schon früh in der Schulzeit kennenlernt. Entweder man mag sie nicht, da sie in der Trigonometrie mit dem Sinus und Cosinus kombiniert wird, oder sie kommt einem magisch vor, da sie den Kreis so schön beschreibt und sogar einen eigenen griechischen Buchstaben bekommt. Aber wieso bekommt Pi denn eigentlich einen eigenen Buchstaben von Leonhard Euler?
Es liegt daran, dass π irrational ist und nicht durch einen endlichen Bruch dargestellt werden kann. Bewiesen konnte dies zuallererst von Johann Heinrich Lambert im Jahr 1761 werden. Die Erklärung gab er in Berlin wie folgt ab:
Da bei jedem rationalen $x \neq 0$ der $\tan(x)$-Wert irrational ist und umgekehrt und die Gleichung $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ =1 aber selbst sichtbar eine rationale Zahl ergibt, heißt das, dass $\frac{\pi}{4}$ und somit auch π selbst irrational sein müssen.
(vgl. Boyer, 1968, S. 505)

5.2 Normalität von Pi

Dezimalziffer	Anzahl, wie oft die Ziffer vorkommt
0	99.999.485.134
1	99.999.485.134
2	100.000.480.057
3	99.999.787.805
4	100.000.357.857
5	99.999.671.008
6	99.999.807.503
7	99.999.818.723
8	100.000.791.469
9	99.999.854.780
Gesamt	1.000.000.000.000

Abbildung 6: Tabelle zu Pis Ziffernverteilung

„Eine irrationale Zahl wird als normal in der Basis 10 bezeichnet, wenn die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 mit derselben Häufigkeit in ihrer Dezimalisierung erscheinen, und dasselbe gilt für Kombinationen aus zwei Zahlen 00 bis 99, drei Zahlen 000 bis 999 usw.

Wenn eine Zahl normal in allen Zahlenbasen ist, wird sie als absolut normal bezeichnet."

(Navarro, 2016, S. 125)

In der Tabelle (links) wurden die ersten Billionen Ziffern von Pi analysiert und mit ihrer Häufigkeit gelistet. Die Abweichungen der Häufigkeiten befinden sich im zehntausendstel-Prozent-Bereich.

Somit kann von einer Normalität von Pi ausgegangen werden, aber ganz sicher kann man sich nie sein ob eine Zahl normal ist oder nicht, außer sie wurde extra dafür konstruiert.

5.3 Transzendenz von Pi

Über das, was transzendente Zahlen überhaupt sind waren sich Mathematiker sehr lange selbst nicht im Klaren. Ihnen war natürlich bewusst, dass es solche Zahlen geben muss, aber wie sie aussehen war ihnen verborgen, da sie sich über die Abzählbarkeit verschiedener Mengen nicht viele Gedanken machten. Es dauerte bis ins Ende des 19. Jahrhunderts bis Georg Cantor folgende Untersuchungen (hier ohne Beweise, da es den Rahmen der Arbeit sprengen würde) zu den reellen Zahlen veröffentlichte.

Die Menge der **reellen** Zahlen ist **unendlich** und **nicht abzählbar**, mit unendlich-abzählbar vielen algebraischen Zahlen. Das heißt, dass sich in dieser Menge trotzdem **unendlich-unzählbar** viele transzendente Zahlen befinden müssen.

Heute werden transzendente Zahlen so definiert, dass sie nicht Nullstelle einer Polynomfunktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

sein können. Also das Gegenteil von den algebraischen Zahlen, welche eben schon die Nullstelle eines Polynoms sein können. Zum Beispiel sind $\pm\sqrt{2}$ algebraische Zahlen, da die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ umgeformt $x^2 = 2$ und somit $x = \pm\sqrt{2}$ ergibt.

Wie gesagt, hat es länger gedauert eine transzendente Zahl zu finden, da sie nicht gesucht worden sind. Die erste Zahl dieser Form welche mit Beweis gefunden worden ist, ist die Liouvillezahl welche ungekürzt dem Wert $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ entspricht.

(vgl. Toenniessen, 2010, S. 200, 209)

Diese übersimplifizierte Kurzerklärung der transzendenten Zahlen diente nur dem Zweck um zu verstehen was Pi ist.

Bewiesen werden kann dies, indem man zuerst beweist, dass e transzendent ist und jede algebraische Zahl $x \neq 0$ in der Eulerschen Identität $y = e^{ix}$ ein transzendentes y ergibt und umgekehrt. Um den Rahmen nicht zu überlasten, wird dieser Part übersprungen. Da nun dank Kapitel 3.4 bekannt ist, dass $e^{i\pi} = -1$ ergibt und -1 eindeutig eine algebraische Zahl ist, lässt sich daraus schließen, dass π eine transzendente Zahl ist.

Mit diesem Beweis wurde die Quadratur des Kreises (Allein mit Lineal und Zirkel ein Quadrat zu erstellen, welches dieselbe Fläche hat wie ein Kreis) nach etwa 2000 Jahren entgültig für unmöglich erklärt.

(vgl. Toenniessen, 2010, S. 403f.)

6 Selbstversuch

6.1 Pi-Manie

Bevor dieses Selbstexperiment beginnt, wäre es gut etwas über die Pi-Sucht zu berichten.
Unter Pi-Manie versteht man nicht einmal unbedingt etwas Schlechtes, wie es mit Manien so oft nicht der Fall ist. Diese Sucht reicht von kleinen Pi-Törtchen (engl.: pie) zum Verzehr am Pi-Tag bis zum Auswendiglernen von abertausenden Ziffern der Kreiszahl.

> „Den aktuellen Weltrekord im Memorieren der Zahl PI hält der Inder Suresh Kumar Sharma mit aufgesagten 70.030 Nachkommastellen. Aufgestellt wurde der Rekord am 21 Oktober 2015. Die Vortragsdauer lag bei gut 17 Stunden. Er löst damit den vorherigen Rekord-Inhaber Rajveer Meena ab, der 70.000 Stellen im Rahmen eines Wettbewerbes an der VIT University von Vellore aufsagte.“

(Steffens, 2018)

Pi-Shirts, Pi-Tassen, und viele andere Produkte sind in Pi-Shops zu erwerben. Sobald man sich mit der Kreiszahl etwas näher beschäftigt, stößt man unbedingt auf den Verein „Freunde der Zahl Pi“, welche ihre Liebe zu Pi damit ausdrücken, dass sie den Geist der Zahl bewahren und diverse Aktionen starten.
Informatiker basteln an PCs, die Trillionen Nachkommastellen berechnen.
Künstler widmen ganze Räume einzig und allein der Kreiszahl, indem sie zum Beispiel ein riesiges Mosaik anfertigen, um Pi versteckt in der U-Bahnstation von Downsview (Toronto) erscheinen zu lassen. Fast unwillkürlich scheinen die Platten aufgelegt, aber wer sich damit beschäftigt erkennt das Muster schnell.
Wer es offensichtlich haben will, lässt sich einfach eine zwanzig Meter hohe Statue vom Buchstaben Pi von vor der Schule bauen.
Einer der frühesten Pi-Süchtigen war Ludolph van Ceulen, welcher Pi einige Jahrhunderte ihren Beinamen verlieh, weil er 30 Jahre seines Lebens damit verbrachte die Zahl genauer zu berechnen. Sein Lebenswerk ließ er sich natürlich auch in seinen Grabstein eingravieren. So schmückten 35 Nachkommastellen von Pi bis zum ersten Weltkrieg sein Grab.
(vgl. Navarro, 2016, S. 97ff.)

Auch für eine solche Vorwissenschaftliche Arbeit braucht es einen Menschen der von Pi begeistert ist und bereit ist, sich das Ziel zu setzen 300 Stellen zu lernen.

6.2 Aufgabenstellung

Im folgenden Kapitel wird der Selbstversuch protokolliert, möglichst viele Ziffern der Kreiszahl π zu memorisieren. In diesem Projekt sind sechs Ziele mit steigender Schwierigkeit gesetzt, mit dem Endziel am 15. Februar 2019 dreihundert Ziffern der Zahl fehlerfrei, auswendig, mündlich wiederzugeben.

- Ziel 1: 50 Ziffern wiedergeben
- Ziel 2: 100 Ziffern wiedergeben (dem Verein „Freunde der Zahl Pi“ beitreten)
- Ziel 3: 150 Ziffern wiedergeben
- Ziel 4: 200 Ziffern wiedergeben
- Ziel 5: 250 Ziffern wiedergeben
- Ziel 6: 300 Ziffern wiedergeben

6.3 Protokoll

27. März 2018: von 6 auf 50 Nachkommastellen verbessert

28. März 2018: von 50 auf 70 Nachkommastellen verbessert

29. März 2018: von 70 auf 72 Nachkommastellen verbessert

4. Januar 2019: Wissensstand: 12 Ziffern. Nach drei Durchgängen wieder bei 50 Nachkommastellen angelangt.

5. Januar 2019: von 50 auf 70Nachkommastellen verbessert

6. Januar 2019: von 70 auf 110 Nachkommastellen verbessert

7. Januar 2019: 110 Ziffern in 50 Sekunden tippen

8. Januar 2019: von 110 auf 130 Nachkommastellen verbessert

29. Januar 2019: Seit dem letzten Eintrag irgendwie bei 140 Ziffern angelangt. Jedoch herrscht sehr starke Enttäuschung, da die Freunde der Zahl Pi nicht auf wiederholte E-Mails antworten.

14. Februar 2019: Wiederholen der 140 bisher gelernten Ziffern

15. Februar 2019: von 140 auf 150 Nachkommastellen verbessert

6.4 Evaluation des Versuches

6.4.1 Allgemeines

Wie dem Protokoll zu entnehmen ist, war es leider nicht möglich das Endziel „300 Ziffern“ zu erreichen. Am letzten Tag des Experimentes war es jedoch schon möglich Pi bis zur 150ten Stelle anzuführen.

Die Lerngeschwindigkeit wäre aber in jedem Fall ausreichend gewesen, da an einem Protokollierten Tag mindestens zehn Ziffern gelernt wurden, was bedeutet, dass es theoretisch möglich sein sollte 300 Ziffern in einem Monat zu lernen.

Was aber das Problem war, sind die großen Pausen zwischen den Lernphasen. Diese sind mit anderem vorrangigeren Schulaufwand verbunden. Das führte dazu, dass diese - für uns – willkürlichen Ziffern vergessen wurden. Glücklicherweise sind sie trotzdem irgendwo im Gehirn gespeichert worden und die Muster waren schnell wieder da.

6.4.2 Lernmethode

Natürlich ist es nicht möglich Zufällige Ziffern ohne ein System zu lernen.

Viele Menschen schlagen einem die Mnemotechnik vor, bei welcher man sich ein Bild zu etwas einprägt und somit anhand des Bildes das wiedergibt, was man mit dem Bild im Kopf in Verbindung gesetzt hat.

Diese Methode wurde hier nur Teils angewendet, da anfangs einfach nur die ersten 50 Ziffern im Buch schön mit einem Leerzeichen in einer Reihe standen. So konnten die Ziffern leicht in 10er-Blocks gelernt werden, wobei immer Paare aus zwei Ziffern gebildet wurden.

Später half eine App auf dem Smartphone Pi zu memorieren, wobei dann eine gedachte Linie im Kopf entstand, welche man verfolgen musste um die nächste Ziffer zu tippen. Ist auch der Rekord mit 110 Ziffern in 50 Sekunden entstanden.

6.4.3 Fazit zum Selbstversuch

Abschließend lässt sich zu diesem Experiment sagen, dass es nicht schwer ist etwas zu lernen, wenn man dahintersteht und Lust darauf hat. Besonders motivierend ist eine Belohnung, wie etwa der Eintritt in den Verein „Freunde der Zahl Pi“. Da jedoch keine Antwort kam, ist auch die Lust vergangen noch mehr Ziffern zu lernen. Vielleicht wird die Arbeit daran irgendwann wieder mehr Spaß machen, aber im Laufe dieser Arbeit wird sie nicht mehr Platz finden können.

7 Schluss

Inwiefern ist uns die Geschichte rund um Pi nun bekannt? Wir können bestätigen, dass es die Zahl schon seit über 4.000 Jahren bei den Ägyptern gegeben hat. Auch wenn sie nicht so genau beschrieben wurde. Die Kreiszahl ist schon lang im asiatischen Raum verbreitet und im Westen sowieso. Seit Archimedes kennt man zwei Nachkommastellen von Pi, was eigentlich für die wichtigsten Berechnungen genügte. Außerdem erfuhren wir von Chongzhi, dass $^{355}/_{133}$ eine gute Annäherung für Pi ist, wenn man genaue Rechnungen durchzuführen hat. Im 17. Jahrhundert angelangt hörten wir von Ceulen, dass er 35 Ziffern von Pi berechnet hat. Später wurden neue Methoden zur Berechnung von Pi erfunden, die heute nur mehr auf Computern stattfinden. Eine große Hilfestellung leistete uns Ramanujan mit seiner Formel, die mit einem Glied acht weitere Stellen von Pi berechnet.

Die vermutlich genialste Antwort auf eine Frage bekamen wir im Kapitel 3.6 „Pi in der Natur - Das Sekundenpendel“. In diesem Kapitel konnte bewiesen werden, dass die Fallbeschleunigung auf der Erde eng mit Pi verknüpft ist.

Die Zufallsexperimente liefern eine unerwartet hohe Genauigkeit für die Annäherung an Pi, wenn man bedenkt, dass sie zufällig sind. Jedoch bemerkt man schnell, dass diese im Laufe der Zeit gefälscht worden sein könnten, weil man die Ziffern bis zu einem bestimmten Grad kennt.

Im Kapitel 6 konnten wir die Irrationalität und Transzendenz von Pi beweisen, für die Normalität wird das wohl leider nie funktionieren. Die Quadratur des Kreises ist somit nur mit Lineal und Zirkel leider nicht möglich.

Schlussendlich aber ist die wichtigste Frage der Arbeit: „Was ist die Geschichte von Pi?“ beantwortet worden, da sie genug Stoff zum Arbeiten mit sich bringt. Die Quellen hatten oft etwas abweichende Jahreszahlen, aber zum größten Teil passen sie zusammen. Während dem Arbeitsprozess musste die Basisliteratur vervielfacht werden, weil für bestimmte Fragen einfach kein Stoff da war, um sich wirklich Wissen anzueignen, damit man es verständlich erklären kann und jeder die Aussagen in dieser Arbeit nachvollziehen kann. Mit dem Zusatz klappte die Ausarbeitung aber hervorragend.

Literaturverzeichnis

Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2015). *Das BUCH der Beweise.* Berlin: Springer-Verlag.

Bentley, P. (2008). Das Buch der Zahlen: das Geheimnis der Zahlen und wie sie die Welt veränderten. Darmstadt: Primus.

Blatner, D. (2001). *π: Magie einer Zahl.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verlag.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics.* New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc.

KhanAcademyDeutsch (Hrsg.). (09. 06 2017). Fläche eines Kreises - Zusammenhänge verstehen. Abgerufen am 20. 10 2018 von https://www.youtube.com/watch?v=xVaHDWXFL7g

KhanAcademyDeutsch (Hrsg.). (13. 06 2017). Kreisumfang und Kreisfläche in Beziehung setzen. Abgerufen am 29. 01 2019 von https://www.youtube.com/watch?v=Yzq4W62NS5Q&feature=youtu.be&t=15

McWasi, A. (o. J.). *Freunde der Zahl Pi*. (M. W. Albert, Herausgeber) Abgerufen am 28. 01 2019 von Die Sinnlosigkeit von Pi: http://pi314.at/math/sinnlos.html

Navarro, J. (2016). *Das Geheimnis von π: Verhältnisse in der Mathematik.* Kerkdriel: Librero.

Scholz, W. (03. 11 2001). Die Geschichte der Approximation der Zahl /Pi. *Freunde der Zahl Pi*. Wenzgasse. Abgerufen am 03. 01 2019 von http://www.cwscholz.net/projects/fba/fba.html

Steffens, G. (2018). *π - Faszination in Ziffern*. Abgerufen am 20. Oktober 2018 von https://3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74944592.eu/

Toenniessen, F. (2010). *Das Geheimnis der transzendenten Zahlen.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Westphal, W. H. (2013). *Die Grundlagen des physikalischen Begriffssystems: Physikalische Größen und Einheiten.* Braunschweig: Friedr. Vieweg + Sohn.

Abbildungsverzeichnis

Anhang

Folgendes Programm in processing:

```
int Genauigkeit=1000000; // Je größer die Zahl desto genauer das Ergebnis aber desto länger braucht das Programm
int x = 0;
float y = 0;
void setup() {size(1200, 1200);}

void draw() {background(255);
float Pi = aPi(Genauigkeit, width/2, true );
println( "Die Kreiskonstante PI ist ungefähr " + Pi );
noLoop();}
float aPi( int z, int r, boolean i) {
stroke(0);
noFill();
strokeWeight(1);
translate(width/2, height/2);
ellipse(0, 0, r, r);
while (x < z) {x=x+1;
float rY =  random(-height/2, height/2);
float rX =  random(-width/2, width/2);
if (dist(rX, rY, 0, 0) < r) {stroke(255, 255, 255); //Farbänderung nach r,g,b Kanälen
y=y+1;} else {stroke(0, 0, 0);//Farbänderung nach r,g,b Kanälen
}
if (i == true) {strokeWeight(2);
point(rX, rY);}}
float apPi = (y * width * height)/(z * sq(r));
return( apPi );}
```

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Adrian Vinojcic, versichere, dass ich die Vorwissenschaftliche Arbeit „Die Geschichte der Kreiszahl Pi. “ selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alles aus ungedruckten Quellen, gedruckter Literatur oder aus dem Internet im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt übernommenen Formulierungen und Konzepte gemäß den Richtlinien wissenschaftlicher Arbeiten zitiert, durch Fußnoten beziehungsweise mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Ried im Innkreis, 28. Februar 2019

Ort, Datum Adrian Vinojcic