ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра математического анализа

Н.П. Андреева, Р.В. Арутюнян, М.Н. Зубова, А.Р. Лакерник, А.М. Райцин

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Москва 2011

План УМД 2011/2012 уч. г.

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Авторы: Н.П. Андреева, канд. физ-мат наук, доцент
Р.В. Арутюнян, канд. физ-мат наук, доцент
М.Н. Зубова, ст. преподаватель
А.Р. Лакерник, канд. физ-мат наук, профессор
А.М. Райцин, канд. техн. наук, доцент

Издание утверждено методическим советом ОТФ. Протокол № от 27.03.2012г.

Рецензент: Зайцев А.А. , доцент кафедры ВТ и АОАИ МИИГАиК
Рецензент: Данилов В.Г., доктор физ.мат. наук, профессор МТУСИ

Введение

Предлагаемое учебное пособие «Практикум по высшей математике для бакалавров Дифференциальное и интегральное исчисление» направлен на получение практических навыков по математике в соответствии с первым семестром рабочей программы по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Каждый раздел практикума содержит опорный конспект, отражающий в сжатой форме основные теоретические сведения изучаемой темы, необходимые для практического применения материала. В каждый раздел включены типовые задачи для аудиторных занятий с решениями и задачи для самостоятельной работы. Структура практикума такова, что каждому его разделу соответствует тема рабочей программы, что представляется полезным, так как позволяет самостоятельно изучать материал, в случае пропуска студентом аудиторного занятия и, что отличает, дано пособие от существующих. Кроме того, практикум позволяет при уменьшении числа аудиторных часов по программе для бакалавров уделять большее внимание самостоятельной работе, разбирая типовые решения и выполняя предлагаемые задания. Задачи, предлагаемые к решению взяты из Бермана Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 20-е изд.;
М.: Наука,1985. 384с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАНЯТИЕ 1.

1. ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ ЗАДАНИЯ

1.1. Функция

Определение 1.1 Величину y называют функцией переменной величины x, если каждому числовому значению x, принадлежащему некоторой области его изменения D $\left(x \in D\right)$, соответствует по данному закону (правилу) единственное определенное значение величины y.

Переменную величину x называют независимой переменной (или аргументом x).

Область изменения аргумента x *называют областью определения функции* y, а множество числовых значений функции y *называют областью ее значений* и обозначают E.

Тот факт, что величина y является функцией величины x, обозначают символической записью $y = f(x)$, $x \in D$, где буква f – обозначение закона (правила), применив который к аргументу x, находят соответствующее ему значение функции y. Говорят также, что функция f отображает множество D на множество Е. Область определения функции D должна быть задана. Если этого нет, то в таких случаях подразумевают так называемую естественную область определения, т.е. множество тех значений аргумента x, при которых функция y будет существовать.

Например, пусть $y = \log_2\left(x-1\right)$. Из элементарной математики, известно, что $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Это и будет естественная область определения $D: x \in \left(1;\infty\right)$.

Если функция f отображает множество D на множество E, а функция g отображает множество E на множество G, то можно рассматривать функцию $z = g\left(f\left(x\right)\right)$, которую называют *сложной функцией* переменной z от аргумента x, или *суперпозицией* функций f и g. Она определена на D и отображает D на G.

Определения 1.2

а) Функцию $y = f\left(x\right)$ называют четной, если $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$.

б) Функцию $y = f\left(x\right)$ называют нечетной, если $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ или $\left(-f\left(-x\right) = f\left(x\right)\right)$.

в) Функцию $y = f\left(x\right)$, определенную на всей числовой оси, называют периодической, если существует такое постоянное число l, что при всяком x будет верно $f\left(x+l\right) = f\left(x\right)$. Наименьшее из таких положительных значений l называют *основным периодом* T функции или просто периодом.

1.2. Основные способы задания функции

К ним относятся: табличный, описательный, графический, аналитический (явное, неявное), параметрическое задание функций. Рассмотрим два из них.

<u>*Описательный способ*</u>

При таком способе зависимость между аргументом x и функцией y выражается словесным описанием. Например, $y-$наибольшее целое число, не превосходящее x. Эту функцию обозначают $y=[x]$ и называют функция *антье* (*entier*), т.е. целый.

Так имеем: $\begin{cases} x=2 \\ y=[2]=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=4,2 \\ y=[4,2]=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1,5 \\ y=[-1,5]=-2 \end{cases}$

<u>*Параметрический способ*</u>

При таком способе и аргумент x и функция y связаны между собой через третью переменную величину – параметр t (наиболее употребительное обозначение).

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in[\alpha;\beta]$$

Здесь каждому числовому значению параметра t_0 из области его изменения $t\in[\alpha;\beta]$ ставятся в соответствие числовые значения $\begin{cases} x_0=\varphi(t_0) \\ y_0=\psi(t_0) \end{cases}$ величин x и y. Это соответствие можно рассматривать как функцию y от x (или x как функцию y). Предлагается следующий способ схематического (эскизного) построения такого графика. Пусть $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$.

1-ый шаг: строим график $x=t^2$. Это известная парабола (Рис. 1.1) .

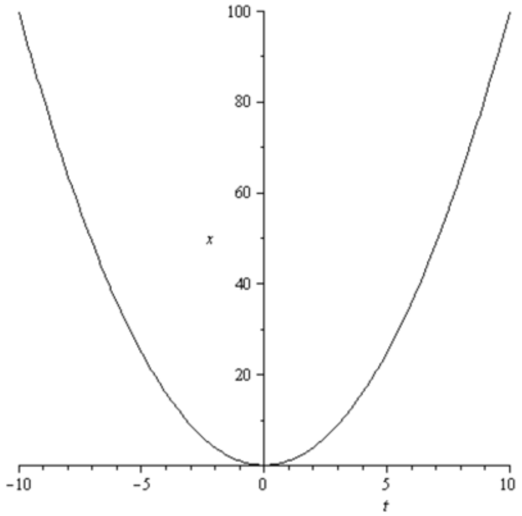


Рис. 1.1

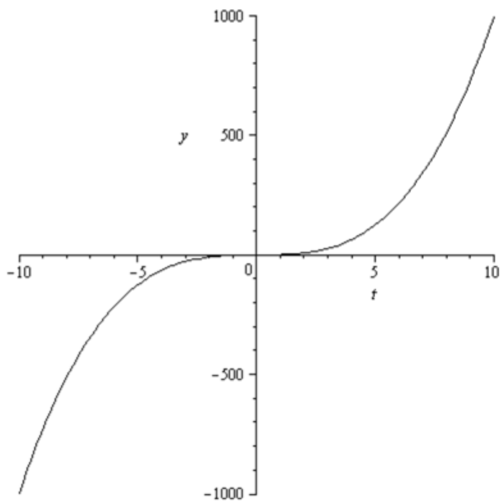


Рис. 1.2

2-ой шаг: строим график $x = t^2$. (Кубическая парабола) (Рис.1.2).

3-ий шаг: составляем таблицу изменений всех переменных

t	x	y
$(-\infty;0]$	$(\infty;0]$	$(-\infty;0]$
Возрастает	Убывает	Возрастает
$[0;\infty)$	$[0;\infty)$	$[0;\infty)$
Возрастает	Возрастает	Возрастает

Замечаем также, что $x \geq 0$ при всех значениях t, а значит, при двух противоположных значениях t (т.е. при одном и том же значении x) будем получать два противоположных значения y.

Следовательно, график зависимости y от x будет представлять так называемую двузначную функцию и будет симметричен относительно оси OX. Рассматривая только два последних столбца таблицы (тем самым изменение y от x), можно построить следующий схематический график зависимости y от x (Рис. 1.3).

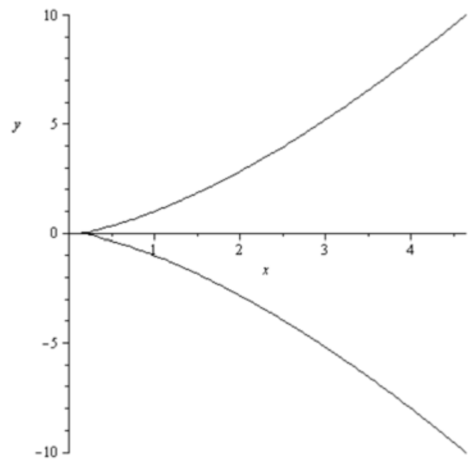


Рис. 1.3

1.3. Бесконечные числовые последовательности

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n. Тогда говорят, что задана бесконечная числовая последовательность $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$, где числа (члены последовательности) отделяются друг от друга запятыми и число x_n $n = 1, 2, \dots$ стоит в этой строке на $n-$ом месте. Очевидно, что последовательности можно считать функциями. Их принято называть функциями целочисленного аргумента.

Аргумент x в такой функции – это номер места. Область определения – множество N (или часть его) натуральных чисел. Функция y - это число x_n, стоящее на месте n. Общепринятое функциональное равенство $y = f(x)$ в этом случае будет иметь вид $x_n = f(n)$ (формула общего члена). Обозначают последовательность $\{x_n\}$. Члены последовательности не обязательно должны только возрастать или убывать или быть связанными друг с другом, связь членов последовательности определяется только номером места, которые они занимают, т.е. аргументом. Некоторые последовательности (как и функции) можно задать только описательным способом.
Например, $\{x_n\}$: $1,4,1,5,9,2,6...$

Здесь каждый член последовательности, стоящей на месте n, совпадает с числом, стоящем на месте n после запятой в разложении числа π $(\pi = 3{,}1415926...)$

Например, для последовательности 0,3,8,15,24…, нетрудно найти формулу общего члена $x_n = f(n) \Rightarrow x_n = n^2 - 1$.

1.4. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

1.4.1. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$.

Решение. $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x \neq 1 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x \neq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2;0) \cup (0;1).$

1.4.2. Определить, какие из указанных функций являются четными, нечетными или общего вида.

а) $y = f(x) = x - x^2$

Решение. $f(-x) = -x - (-x)^2 = -(x + x^2); -f(-x) = x + x^2$.

Замечаем, что $f(x) \neq f(-x); f(x) \neq -f(-x)$, следовательно, заданная функция – функция общего вида.

1.4.3. Какие из указанных функций периодические

а) $y = \sin^2 x$

Решение. Найдем наименьшее (не зависящее от x) положительное действительное число T, для которого $f(x+T) = f(x)$.

Пусть $\sin^2(x+T) = \sin^2 x$.

Тогда $\sin^2(x+T) - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin T \cdot \sin(2x+T) = 0$.

Отсюда $\sin T = 0 \Rightarrow T = \pi n; n = 1; T = \pi$, либо $\sin(2x+T) = 0 \Rightarrow 2x + T = \pi k.$

Замечаем, что только в первом случае найденное T удовлетворяет определению периода функции. Итак, $y = \sin^2 x$ - периодическая функция с периодом $T = \pi$.

б) $y = \sin x^2$

Решение.

Пусть $\sin\left(x+T\right)^2 = \sin x^2 \Rightarrow 2\sin\left(\dfrac{\left(x+T\right)^2 - x^2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\left(x+T\right)^2 + x^2}{2}\right) = 0.$

Откуда следует: $\sin\left(\dfrac{\left(x+T\right)^2 - x^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(x+T\right)^2 - x^2 = 2\pi n \Rightarrow 2xT + T^2 = 2\pi n$,

Либо $\cos\left(\dfrac{\left(x+T\right)^2 + x^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(x+T\right)^2 + x^2 = \pi + 2\pi k \Rightarrow 2x^2 + 2xT = \pi + 2\pi k$,

$n, k \in Z$. Замечаем, что в обоих случаях T зависит от x, следовательно, функция не может быть периодической.

в) $y = x \cdot \sin x$

Решение. Пусть существует период T, тогда $\left(x+T\right)\cdot\cos\left(x+T\right) = x\cdot\cos x$,

при всяком x и при, следовательно, при $x = 0$. Но тогда $T\cdot\cos T = 0$, Так как $T \neq 0$, то $\cos T = 0 \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{2}$ (наименьший период).

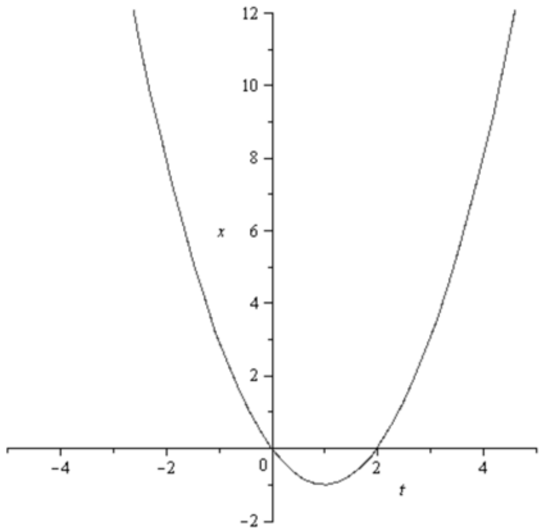
Получим, что $\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = x\cdot\cos x$, данное равенство должно быть верно, для любого x, а, следовательно, и для $x = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда получим выражение $\pi\cos\pi = \dfrac{\pi}{2}\cdot 0$, которое не является верным равенством.

Следовательно, функция не является периодической.

1.4.4. Построить схематический график функции

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$$

Решение. Построим графики $x = t^2 - 2t$ (Рис. 1.4) и $y = t^2 + 2t$ (Рис. 1.5)



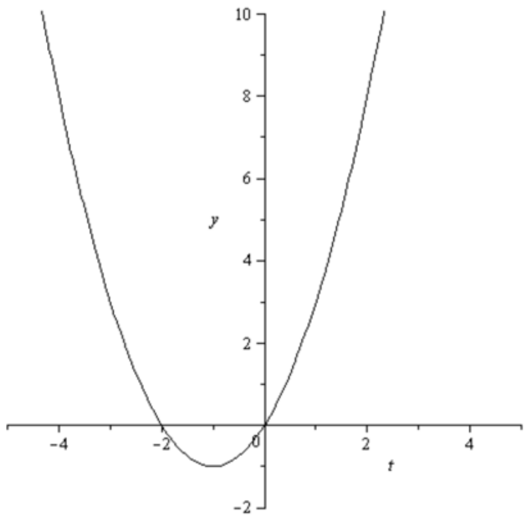


Рис. 1.4 Рис. 1.5

Составим таблицу, которая позволит построить схематический график функции в координатах xoy (Рис. 1.6).

t	x	y
$(-\infty;-2]$ возрастает	$(\infty;8]$ убывает	$(\infty;0]$ убывает
$[-2;-1]$ возрастает	$[8,3]$ убывает	$[0;-1]$ убывает
$[-1;0]$ возрастает	$[3,0]$ убывает	$[-1;0]$ возрастает
$[0;1]$ возрастает	$[0;-1]$ убывает	$[0;3]$ возрастает
$[1;2]$ возрастает	$[-1;0]$ возрастает	$[3;8]$ возрастает
$[2;\infty)$ возрастает	$[0;\infty)$ возрастает	$[8;\infty)$ возрастает

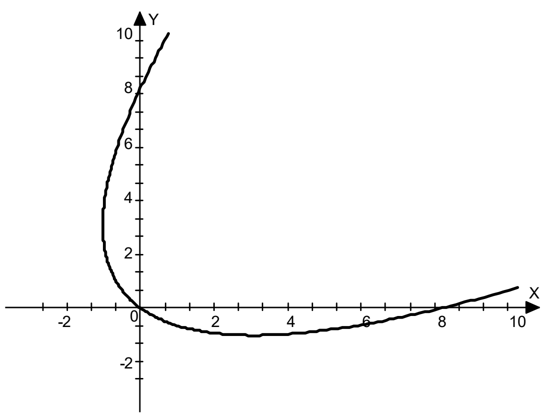


Рис. 1.6

1.4.5. Дана последовательность $0,1,0,1,0,1...$ Найти формулу $x_n = f(n)$.

Здесь ответ допускает разные формы $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ или $x_n = \left|\sin\dfrac{\pi}{2}(n-1)\right|$, или $x_n = \left|\cos\dfrac{\pi}{2}(n-2)\right|$.

1.5. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 16; 48(4,5,6); 54(12,13,14); 57; 59(4,5,6,7);

построить схематический график $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$;

дана последовательность $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{24}...$ Найти формулу для $x_n = f(n)$

(ответ: $x_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$).

ЗАНЯТИЕ 2

2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1 Предел последовательности

В основе математического анализа лежит важнейшее понятие предела переменной величины. Рассмотрим это понятие на простейшем случае, когда переменной величиной является функция целочисленного аргумента, т.е. числовая последовательность.

Пусть задана некоторая бесконечная числовая последовательность $\{x_n\}$. Изобразив ее члены точками на числовой прямой, в некоторых случаях можно заметить, что с возрастанием номера членов последовательности эти точки начинают все ближе и ближе «подбираться» к одной точке, изображающей некоторое постоянное число «a» (не обязательно являющееся членом последовательности), т.е. расстояние на числовой прямой между числом «a» и членами последовательности становится все меньше. Известно, что расстояние на числовой прямой между точками, изображающими числа x и a, равно $|x-a|$, $|x-a| = \begin{cases} x-a, \text{если } x \geq a \\ a-x, \text{если } x < a \end{cases}$.

Определение 2.1. Число a называют пределом бесконечной числовой последовательности $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такой номер M, зависящий от ε $\left(M = M(\varepsilon)\right)$, начиная с которого все члены x_n с номерами большими $M\,(n > M)$, будут удовлетворять неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ (т.е. окажутся в ε - окрестности точки a).

$a-\varepsilon \quad x_n \quad a \quad\quad a+\varepsilon$

На языке логико-математической символики это определение записывают:

$$x_n = f(n), n \in N; \lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M\left(M = M(\varepsilon)\right): n > M \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения и соотношения

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n;$ например, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$;

$(n+1)! = n!(n+1)$;

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!};\ \text{например, } C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$$

2.2 Предел функции

Несмотря на тот факт, что последовательность – частный случай функции (функция целочисленного аргумента), определение предела функции в общем смысле будет несколько другим, так как аргумент x у функции $y = f(x)$ может стремиться к любому числу (тогда как у последовательности n стремится только к ∞). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a ,кроме, быть может самой точки a .

Определение 2.2. Число b называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такое число $\delta\left(\delta = \delta(\varepsilon)\right) > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon): 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$,

т.е. $x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, это геометрически означает, что для аргументов, попавших в $\delta -$окрестность точки a, значения функции попадают в $\varepsilon -$окрестность точки b.

Рассмотрим понятия односторонних пределов функции.

Определение 2.3. Если $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$ только с одной стороны (справа $(x > a)$ или слева $(x < a)$), то b называют пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ справа или слева и обозначают:
$b = f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $b = f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Существует понятие о бесконечном пределе, хотя это и означает отсутствие предела как числа.

Определение 2.4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, если для любого числа $M > 0$ можно указать такое число $\delta(\delta = \delta(M)) > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$

Приведите в качестве иллюстраций к ниже приведенным равенствам графики функций $f(x)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty;\ \lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty; \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Приведенные выше определения пределов не являются рабочими правилами для их отыскания. Поэтому, рекомендуется использовать следующие основные теоремы о пределах переменных величин, а также известные пределы, их следствия и некоторые распространенные приемы алгебраических преобразований, например, освобождение от иррациональности в знаменателе или в числителе дроби и др.

Теоремы о пределах

Теорема 2.1 $\lim\limits_{x \to a} c = c, c - const$,

Теорема 2.2 $\lim\limits_{x \to a}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$,

Теорема 2.3 $\lim\limits_{x \to a}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$,

Теорема 2.4 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)},\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$.

При этом предполагается, что пределы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ существуют.

Таблица известных пределов

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел).

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, $e\approx 2,71828...$ (второй замечательный предел).

Следствия из первого и второго замечательных пределов (3 – 6)

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc}\,tgx}{x}=1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{x}=1$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0\ \left(a>1\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0.$

9. $$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+...+a_{p-1}x+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+...+b_{q-1}x+b_q}=\begin{cases}0, \textit{если } p<q\\ \infty, \textit{если } \mathrm{p}>\mathrm{q}\\ \dfrac{a_0}{b_0}, \textit{если } p=q\end{cases}$$

10. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

11. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=\infty;\ \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty.$

Условные, но вполне понятные символические выражения $\dfrac{\to 0}{\to 0};\dfrac{\to\infty}{\to\infty};\left(\to 1\right)^{\to\infty};\left(\to\infty-\to\infty\right);\left(\to 0\cdot\to\infty\right);\left(\to 0^{\to 0}\right);\left(\to\infty\right)^{\to 0}$ - обозначают кратко $\dfrac{0}{0};\dfrac{\infty}{\infty};1^{\infty};\left(\infty-\infty\right);\left(0\cdot\infty\right);0^0;\infty^0$ и называют неопределенностями.

Неопределенности

$\dfrac{0}{0};\dfrac{\infty}{\infty};\left(\infty-\infty\right);\left(0\cdot\infty\right);1^{\infty};0^0;\infty^0$

Для раскрытия неопределенности типа 1^{∞}

12. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=1; \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty\right)$

имеет место известное соотношение $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-1\right)g(x)}$.

Далее рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей (т.е. доведение их до вполне определенного ответа).

2.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

2.3.1. Показать, что последовательность $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{(-1)^n}{n^2}, \ldots$ имеет своим пределом нуль.

Решение. Зададимся некоторым малым положительным числом ε (тем самым зададим окрестность точки 0) и определим, с какого номера все члены последовательности окажутся в ε-окрестности точки 0.

Имеем $\left|x_n - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Объявим искомым номером N ближайшее натуральное число, лежащее правее числа $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (или совпадающее с ним, если оно окажется целым). Тогда при $n \geq N$, т.е. при $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$,

следовательно, по определению $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

2.3.2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

Решение. Применяя теорему 2.2 о пределах и предел 9 из таблицы известных пределов, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+7} - \lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^3}{2+5n^3} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0.$$

2.3.3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\infty-\infty$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0.$$

2.3.4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n^k, где $k-$наибольший показатель степени, из показателей степеней числителя и знаменателя. В данном примере $k=1$ $\left(\sqrt{n^3+2n-1}\sim n\right)$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}}{1+\dfrac{2}{n}}=1$.

2.3.5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение. Применяя свойство факториала $(n+1)!=n!(n+1)$, запишем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)}=0$$

2.3.6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

Решение. В числителе выражения стоит арифметическая прогрессия, сумма которой равна $1+2+3+...+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)\left(\dfrac{n+1}{n+2}-1\right)=$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=-\frac{1}{2}.$$

ЗАНЯТИЕ 3.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

3.1. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории.

3.1.1. Доказать, что $f(x)=3x-2$ в точке $x=1$ имеет предел, равный 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Решение. $\forall\varepsilon>0$ $|3x-2-1|=|3(x-1)|=3|x-1|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\varepsilon/3$, если взять $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{3}$, то из $|x-1|<\delta\Rightarrow|(3x-2)-1|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

3.1.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+3}{2x+4}$.

Решение. Пользуясь теоремами о пределах для нахождения данного предела достаточно подставить в функцию предельное значение аргумента: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+3}{2x+4}=\dfrac{5\cdot 1+3}{2\cdot 1+4}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

3.1.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5x+3}{x^2-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5x+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5\cdot 1+3}{1-1}=\left|\dfrac{8}{0}\right|=\infty$

3.1.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в функцию получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

3.1.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в функцию также получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

В этом случае можно ее раскрыть:

а) умножением числителя и знаменателя на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2};$$

б) заменой переменной $\sqrt{x+1}=t \Rightarrow x=t^2-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}.$$

3.1.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2-5}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, которую можно раскрыть, используя предел 9 в таблице известных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^2-5}=\left\{\begin{array}{l}\text{степень числителя } p=3\\ \text{степень знаменателя } q=2\end{array}\right\}=\infty.$$

3.1.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

Решение. Приводя выражение к общему знаменателю, получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, далее воспользуемся пределом 9 в таблице известных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\left\{\begin{array}{l}\text{степень числителя } p=1\\ \text{степень знаменателя } q=2\end{array}\right\}=0.$$

3.1.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

Решение. Определяем, что этот предел содержит неопределенность типа 1^∞.

($\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)=1; \lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$). Воспользуемся формулой (12) таблицы неопределенностей.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}\right)}=e^2.$$

Можно также решить данный пример, сведя его к второму замечательному пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-2}{x^2-4x+2}\right)^x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^2$$ (см. выражение 9 таблицы известных пределов).

3.1.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение. Данную задачу можно свести к первому замечательному пределу, если сделать замену $y=x-\pi\Rightarrow x=y+\pi$. Тогда

$$\lim_{y\to0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)}=\lim_{y\to0}\frac{-\sin 3y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to0}\frac{(2y)\sin 3y}{(3y)\sin 2y}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to0}\frac{\sin 3y}{3y}\cdot\lim_{y\to0}\frac{2y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}.$$

3.1.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$.

Решение. Имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$. Можно преобразовать данное выражение в неопределенность типа $\frac{0}{0}$ и свести задачу к первому замечательному пределу. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}$. Сделаем замену $y=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y$. Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{tgy}=1.$

3.2. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 177, 178,185, 250-255, 257-262,266,267, 273,277,286,287,292,294,315, 320, 325,333,345,346,358,366,375,376,382,389,401.

ЗАНЯТИЕ 4.

4. СРАВНЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Бесконечно малые функции и их сравнение

Определение 4.1. Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x\to a$ или при $x\to\infty$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \text{ или } \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0.$$

Если $\lim_{a\to 0}\alpha(x)=0$, то это значит, что для любого наперед заданного произвольно малого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, будет удовлетворяться неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Например, функция $\alpha(x)=(x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x\to 1$, так как $\lim_{x\to 1}\alpha(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$.

Функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ есть бесконечно малая при $x\to\infty$, так как $\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

4.1.1.Основные свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций – функция бесконечно малая.
2. Произведение ограниченной функции (или константы) на функцию бесконечно малую - функция бесконечно малая.
3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций - функция бесконечно малая.

4.1.2. Сравнение бесконечно малых функций

Заметим, что частное двух бесконечно малых функций, может быть какой угодно функцией, даже – бесконечно большой.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые (б.м.) функции при $x\to a$.

Определение 4.1. Если $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ - б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Определение 4.2. Если $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ называют б.м. более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Определение 4.3. Если $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=q\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м. одного порядка малости.

Если $q=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными (или равносильными) б.м. и обозначают знаком $\sim$, т.е. $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Определение 4.4. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – не существует (конечный или бесконечный), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми б.м.

Пример. $\alpha(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x)=x$ - б.м. при $x\to 0$. Но их отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $x\to 0$.

В этом случае $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы.

Определение 4.5. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=q\neq 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ - б.м. $k-$го порядка малости относительно $\beta(x)$.

4.1.3. Связь бесконечно малых функций с функциями бесконечно большими

Теорема 4.1. Если функция $f(x)$- бесконечно-большая при $x\to a$, то функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ при $x\to a$ - будет бесконечно малой.

Теорема 4.2. Если $\alpha(x)$ - б.м. функция при $x\to a$ и в некоторой окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ точки a(кроме, быть может, самой точки a) $\alpha(x)\neq 0$, то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}-$ бесконечно большая при $x\to a$.

4.1.4. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях

Теорема 4.3. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x),\beta_1(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to a$ и $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$; $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Теорема 4.4. Для того, чтобы две б.м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность при $x\to a$ была бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем каждая из них.

Заметим, что теорема 4.3. имеет место не только для б.м. функций. Так, при вычислении предела частного двух функций полезна следующая обобщающая теорема

Теорема 4.5. Если при $x \to a$ и $f(x) \sim f_1(x)$; $g(x) \sim g_1(x)$, и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ (конечный или бесконечный) то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Таблица наиболее известных эквивалентных б.м. функций при $x \to 0$

$\sin x \sim x$

$tgx \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$arctgx \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$

$e^x - 1 \sim x$

$(1+x)^m - 1 \sim mx$

$\cos(x) \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$

4.1.5. О символе o (символ Ландау)

Пусть $f(x)$ определена на некотором интервале (a,b), содержащем точку a и $f(x) \neq 0$ в точках этого интервала, кроме может быть самой точки a. Тогда под символом $o(f(x))$, $x \to a$ (читают: «о малое от $f(x)$ при $x \to a$) понимают такую функцию, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{o(f(x))}{f(x)} = 0$. Очевидно, таких функций будет не одна. Например, это будет и $(x-a)f(x)$ и $(x-a)^2 f(x)$ при $x \to a$ и т.д. Таким образом, $o(f(x))$ при $x \to a$ это собирательный образ множества всех функций, которые удовлетворяют условию $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{o(f(x))}{f(x)} = 0$. В частном случае, когда $f(x) = 1$, символ $o(1)$ выражает б.м. функцию при $x \to a$. Если $f(x)$ - б.м. функция при $x \to a$, то $o(f(x))$ будет представлять множество б.м. функций более высокого порядка малости при $x \to a$ по сравнению с $f(x)$.

При обращении с символом $o\left(f(x)\right)$ полезно иметь в виду следующие правила.

$$o\left(cf(x)\right)=o\left(f(x)\right)$$
$$o\left(f(x)\right)\cdot o\left(g(x)\right)=o\left(f\cdot g\right)$$
$$o\left(f(x)\right)+o\left(g(x)\right)=o\left(f(x)\right)$$
$$o\left(o\left(f(x)\right)\right)=o\left(f(x)\right)$$

Пользуясь таблицей эквивалентных б.м. функций и теоремой 4.4, можно получить полезные формулы, справедливые при $x\to 0$

$$\sin(x)=x+o(x)$$
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x)$$
$$tg(x)=x+o(x)$$
$$e^x=1+x+o(x)$$
$$\ln(1+x)=x+o(x)$$
$$(1+x)^m=1+mx+o(x)$$

Эти формулы называют асимптотическими, поскольку эти равенства имеют место лишь при $x\to 0$.

4.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

4.2.1. Доказать утверждение $\sin x^3=o\left(x^2\right)$ при $x\to 0$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}=0$, ч.т.д.

4.2.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^3 3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o\left(x^2\right)}{\left(3x+o(3x)\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{6o(3x)}{x}+\frac{o^2(3x)}{x^2}\right)}=\frac{1}{9}$.

Обратите внимание, что в случае разности бесконечно малых, отдельные слагаемые менять на эквивалентные при вычислении предела отношения в общем случае нельзя.
Такая замена может привести к неправильному результату.

4.2.3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$.

Решение. Если использовать эквивалентности из таблицы известных эквивалентностей, то при $x \to 0$, получим

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0$, что неправильно.

Если записать $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x + o_1(x)\right) - \left(x + o_2(x)\right)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o_1(x) - o_2(x)}{x^3}$,

то видно, что последний предел не обязательно равен нулю, так как числитель не является бесконечно малой более высокого порядка, чем x^3.

На самом деле $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx\left(1 - \cos x\right)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

4.2.4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin 3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\sin 3x\left(1 + \sqrt{\cos x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 / 2}{3x\left(1 + \sqrt{\cos x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{6 \cdot 2} = 0.$

4.2.5. Определить порядок относительно x функции $f(x) = \sqrt{1 + 2x} - 1 - \sqrt{x}$, бесконечно малой при $x \to 0$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1 - \sqrt{x}}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x - 1 - 2\sqrt{x} - x}{x^k\left(\sqrt{1 + 2x} + 1 + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x^k} =$$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right)}{x^k} = -\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x^k} = -1$ при $k = \dfrac{1}{2}$; в других случаях предел равен 0 или ∞.

Таким образом, порядок малости функции относительно x равен $\dfrac{1}{2}$.

4.2.6. Исходя из эквивалентности при $x \to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$, вычислить приближенно $\sqrt{1632}$.

Решение. Представим $\sqrt{1632} = \sqrt{1600+32} = 40\sqrt{1+\frac{32}{1600}}$.

Так как $\sqrt{1+x} \sim 1+\frac{x}{2}$, $40\sqrt{1+\frac{32}{1600}} \approx 40\left(1+\frac{16}{1600}\right) = 40(1+0.01) = 40,4$.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 425 (1-3), 414, 321 - 327, 363 - 366, 368 – 375.

ЗАНЯТИЕ 5.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

5.1 Непрерывность функции в точке

Определение 5.1.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1. существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
2. этот предел равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

При определении предела подчёркивалось, что $f(x)$ может быть не определена в точке x_0, а если она определена в этой точке, то значение $f(x_0)$ никак не участвует в определении предела. При определении непрерывности принципиально, что $f(x_0)$ существует, и это значение должно быть равно $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Определение 5.1.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует положительное число δ, такое что для всех x из $\delta-$ окрестности точки x_0 (т.е. $|x - x_0| < \delta$) выполняется неравенство
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Здесь учитывается, что значение предела должно быть равно $f(x_0)$, поэтому, по сравнению с определением предела, снято условие проколотости

$\delta-$окрестности $0<|x-x_0|$.

Дадим ещё одно (равносильное предыдущим) определение в терминах приращений. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, эту величину будем называть приращением аргумента. Так как $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$, т.е. Δx – б.м. (бесконечно малая) величина. Обозначим $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, эту величину будем называть приращением функции, так как $|\Delta y|$ должно быть (при достаточно малых $|\Delta x|$) меньше произвольного числа $\varepsilon > 0$, то $\Delta y -$ тоже б.м. величина, поэтому

Определение 5.1.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Ещё одно равносильное определение на языке последовательностей:

Определение 5.1.4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x_0}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек области определения, сходящейся к $\boldsymbol{x_0}$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$.

Определение 5.1.5. Функция $f(x)$ не являющаяся непрерывной в точке x_0, называется разрывной в этой точке.

Определение 5.1.6. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

5.2. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 5.2.1. (О непрерывности суммы, произведения, частного). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (частное - в случае, когда $g(x_0) \neq 0$).

Теорема 5.2.2. (О переходе к пределу под знаком непрерывной функции). Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)$, равный x_0. Пусть точка $x_0=\varphi(t_0)$ принадлежит области определения функции $y=f\left(x\right)$, и $f\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0.

Тогда существует $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t))$, и $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t))=f\left(\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)\right)=f(x_0)$.

Теорема 5.2.3. (О непрерывности суперпозиции непрерывных функций). Пусть функция $x=\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0. Пусть точка $x_0=\varphi(t_0)$ принадлежит области определения функции $y=f\left(x\right)$ и $f\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0. Тогда сложная функция $y=f\left(\varphi(t)\right)$ непрерывна в точке t_0.

5.3. Односторонняя непрерывность

Определение 5.3.1. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$ слева, если $\exists f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Определение 5.3.2. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$ справа, если $\exists f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Определение 5.3.3. Если одно из этих условий не выполнено, то функция $f\left(x\right)$ имеет в точке x_0 разрыв, соответственно, слева или справа.

Если функция определена на отрезке $\left[a,b\right]$, то в левом конце отрезка $x_0=a$ можно говорить только о непрерывности справа, в правом конце $\left(x_0=b\right)-$ о непрерывности слева. Для внутренней точки отрезка функция $f\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа (доказать самостоятельно).

5.4. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 5.4.1. Пусть функция $f\left(x\right)$ определена на отрезке $\left[a,b\right]$ и монотонна на этом отрезке. Тогда $f(x)$ может иметь на этом отрезке только точки разрыва первого рода.

Следствие 1. Если множество значений монотонно возрастающей на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ полностью заполняет отрезок $[f(a),f(b)]$ (т.е. для $\forall y\in[f(a),f(b)]$ $\exists x\in[a,b]$ такой, что $f(x)=y$), то эта функция непрерывна, легко доказать теперь от противного. Если в точке x_0 имеется скачок, то $f(x)$ не может принимать значений, попадающих в интервал $\left(f(x_0-0),f(x_0)\right)$.

Теорема 5.4.2. (Об обращении функции в нуль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения **разных** знаков, то найдётся точка $c\in[a,b]$, в которой функция обращается в нуль: $f(c)=0$, $a<c<b$.

Теорема 5.4.3. (О промежуточном значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, и в двух точках a и $b\,(a<b)$ принимает **неравные** значения $A=f(a)\neq B=f(b)$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдётся точка $c\in[a,b]$, в которой значение функции равно C: $f(c)=C$.

Теорема 5.4.4. (Об ограниченности непрерывной функции на отрезке). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5.4.5. (О достижении минимального и максимального значений). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свои нижнюю и верхнюю грани.

Следствие 2. Из предыдущих теорем следует: множество значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции заполняет весь отрезок $[m,M]$, где $M=\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}=\max\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, а $m=\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}=\min\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$.

Теорема 5.4.6. (О непрерывности обратной функции). Пусть функция $y=f\left(x\right)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $\left[a,b\right]$. Тогда на отрезке $\left[m,M\right]$ существует обратная функция $x=g\left(y\right)$, также монотонно возрастающая (убывающая) на $\left[m,M\right]$ и непрерывная.

5.5. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

5.5.1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x^2, & 1<x\le 2.\end{cases}$

Решение. Функция непрерывна при $0\le x<1$ и при $1<x\le 2$, а так как $f\left(1-0\right)=f\left(1+0\right)=f\left(0\right)=1$, то функция непрерывна и при $x=1 \Rightarrow$ Функция непрерывна на всей числовой оси.

5.5.2. Построить пример функции, определенной для всех значений x и непрерывной только при $x=0$.

Решение. Функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x, \text{ если } x-\text{рационально},\\ -x, \text{ если } x-\text{иррационально}\end{cases}$

будет непрерывна при $x=0$ и разрывна во всех остальных точках, т.к. $f\left(0\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=0$, следовательно функция непрерывна при $x=0$.

Пусть $x=x_0-$любое рациональное число. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=x_0$, если x стремясь к x_0 принимает рациональные значения, и $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=-x_0$, если x стремясь к x_0 принимает иррациональные значения. Но т.к. $x_0\ne -x_0$, то функция разрывна в точке $x_0 \quad \Rightarrow$

функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x, \text{ если } x-\text{рационально},\\ -x, \text{ если } x-\text{иррационально}\end{cases}$ непрерывна только при $x=0$.

5.5.3. При каком значении числа a функция $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0\end{cases}$

будет непрерывной?

Решение. Очевидно, что функция $f\left(x\right)$ непрерывна при $x<0$ и при $x>0$, а так как $f\left(+0\right)=1$, $f\left(-0\right)=a$, $f\left(0\right)=a$, то функция $f\left(x\right)$ будет непрерывной и в точке $x=0$, если $a=1$.

5.5.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}0,2\cdot\left(2x^2+3\right), & -\infty<x\le 1,\\ 6-5x, & 1<x<3\\ x-3\ , & 3\le x<\infty\end{cases}$$

Решение. На интервалах $(-\infty,1)$, $(1,3)$ и $(3,\infty)$ функция непрерывна. Поэтому разрывы возможны только в точках $x=1$и $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. В точке $x=1$ имеем: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{5}\left(2x^2+3\right)=1$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(6-5x)=1$, поэтому в точке $x=0$ функция непрерывна. Рассмотрим точку $x=3$: $f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3-0}(6-5x)=-9$ и $f(3+0)=\lim\limits_{x\to 3+0}(x-3)=0$, поэтому в точке $x=3$ функция терпит разрыв первого рода (односторонние пределы в точке $x=3$конечны, но не равны между собой). Скачок функции в точке разрыва $x=3$ равен $f(3+0)-f(3-0)=0-(-9)=9$.

5.5.5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases}4\cdot 3^x, & x<0,\\ 2a+x, & x\ge 0\end{cases}$

Решение. Так как $f(-0)=4$, а $f(+0)=2a$, то равенство

$f(-0)=f(+0)=f(0)$ будет выполнено, если положить $2a=4$, т.е. $a=2$.

5.5.6. При каком значении числа *a* функция $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\ge 5,\\ x^2-3x, & x<5\end{cases}$

будет непрерывной?

Решение. Областью определения функции является все множество действительных чисел, причем по обе стороны точки $x = 5$ функция является элементарной, то есть непрерывной. Для обеспечения непрерывности в точке $x = 5$ поставим условие $5+a=25-15\Rightarrow a=5$.

5.5.7. Каким числом можно доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. Найдем предел данной функции в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=3\Rightarrow$

если принять $f(0) = 3$, функция станет непрерывной точке $x = 0$.

5.5.8. Каким числом можно доопределить функцию $f(x)=x\sin\dfrac{x^2-3x+2}{x}$ при x = 0, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. При $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}x=0\Rightarrow x-б.м.$, $\left|\sin\dfrac{x^2-3x+2}{x}\right|\le 1\Rightarrow \sin\dfrac{x^2-3x+2}{x}$ – ограниченная функция.

Как известно, произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{x^2-3x+2}{x}\right)=0$, то есть предел существует и конечен. Поэтому можно доопределить функцию так: $f(0) = 0$.

5.5.9. Каким числом можно доопределить функцию $f(x)=arcctg\dfrac{3}{x}$ при x = 0, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение.

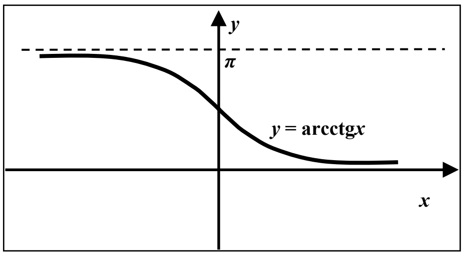


Рис. 5.1

Найдем односторонние пределы данной функции в точке x = 0:

$$\lim_{x\to -0}arcctg\frac{3}{x}=\lim_{t\to -\infty}arcctgt=\pi \quad \left(t=\frac{3}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to +0}arcctg\frac{3}{x}=\lim_{t\to +\infty}arcctgt=0\neq\lim_{x\to -0}arcctg\frac{3}{x}.$$

Следовательно, предел данной функции в точке x = 0 в обычном смысле не существует, поэтому добиться ее непрерывности в этой точке невозможно.

5.5.10. Определить значения параметров s и t, при которых функция

$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1,\\ x^2+sx+t, & |x|>1\end{cases}$$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если предел справа равен пределу слева и равен значению функции в этой точке:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$. Данная функция неэлементарная и на трех интервалах меняет свое аналитическое выражение: при $|x| \le 1$ $(-1 \le x \le 1)$ задана функция вида x, на интервалах $|x| > 1$ ($x > 1$ и $x < -1$) функция имеет вид $x^2 + sx + t$ (см. схему на рис. 5.1).

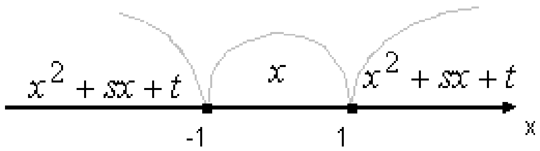


Рис. 5.2

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to -1-0}\left(x^2 + sx + t\right) = 1 - s + t$,

$$\lim_{x\to -1+0} x = -1,\ \lim_{x\to 1-0} x = 1,\ \lim_{x\to 1+0}\left(x^2 + sx + t\right) = 1 + s + t.$$

Так как для непрерывной функции выполняются условия

$$\lim_{x\to -1-0}\left(x^2 + sx + t\right) = \lim_{x\to -1-0} x \text{ и } \lim_{x\to 1+0}\left(x^2 + sx + t\right) = \lim_{x\to 1+0} x,$$

то, приравнивая значения односторонних пределов, получим систему

$\begin{cases} 1 - s + t = -1, \\ 1 + s + t = 1, \end{cases}$ решив которую получим $s = 1$, $t = -1$.

5.6. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 221,223, 224, 226, 228, 230-232, 234, 237-239.

ЗАНЯТИЕ 6.

6. ТОЧКИ РАЗРЫВА

6.1.Точки разрыва и их классификация

Определение 6.1.1. Точка разрыва x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и они равны между собой (т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$).

Определение 6.1.2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода (иногда применяется термин «скачок»), если существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, но они не равны между собой.

Определение 6.1.3. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0), f(x_0+0)$ не существует (в частности, он может быть бесконечным).

6.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

6.2.1. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

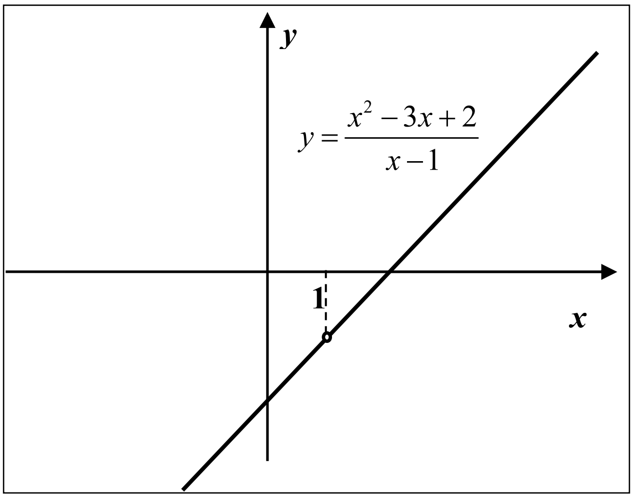


Рис. 6.1

Решение. Функция не определена при $x=1$, а для остальных значений аргумента может быть представлена как $y=x-2$. Следовательно,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=1-2=-1,$$

то есть $x=1$ – устранимая особенность.

6.2.2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{|x|}{x}$.

Решение.

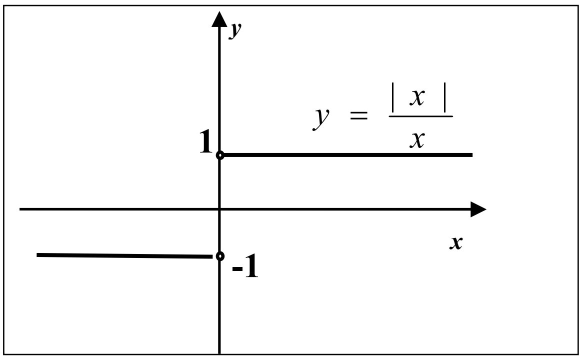


Рис. 6.2

Решение. Из определения модуля следует, что $y=1$ при $x>0$, $y=-1$ при $x<0$, а при $x=0$ функция не определена. При этом

$$\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=-1.$$

Следовательно, $x = 0$ –точка разрыва 1-го рода.

6.2.3. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{x^2}$.

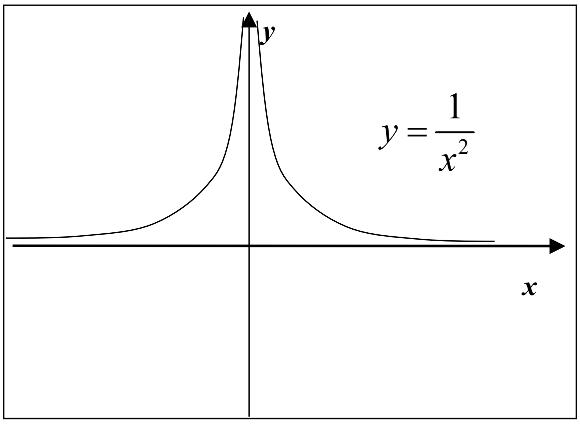


Рис. 6.3

Решение. Функция не определена при $x=0$, и

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Поэтому $x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

6.2.4. Исследовать на непрерывность функцию $y=e^{\frac{1}{x}}$.

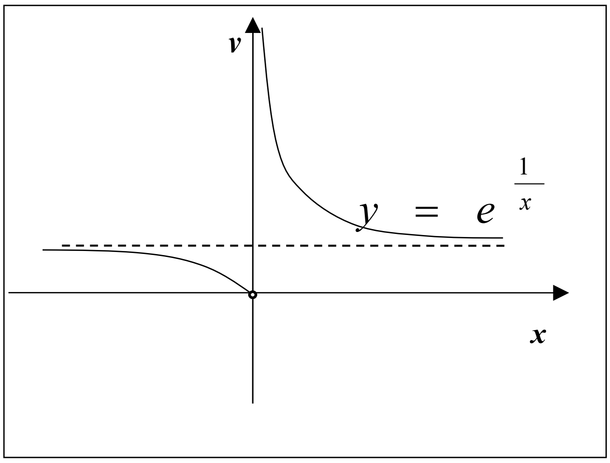


Рис. 6.4

Решение. $\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=\infty,$

то есть правосторонний предел не является конечным. Значит, $x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

6.2.5. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin\frac{1}{x}$.

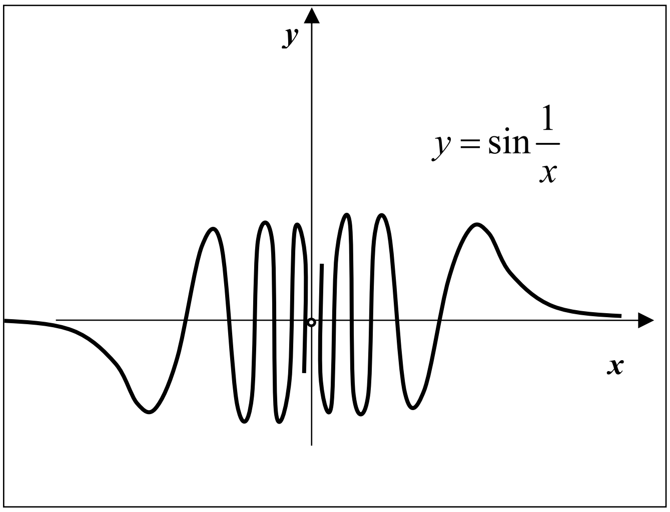


Рис. 6.5

Решение. Функция не определена при $x = 0$ и не имеет предела при $x \to 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

6.2.6. Найти количество точек разрыва функции $y = \dfrac{2x-3}{\log_2|x|}$.

Решение. Функция не существует при трех значениях аргумента: $x = 0$ (знаменатель не существует) и $x = \pm 1$ (он равен 0). Все три точки являются внутренними точками области определения и, поэтому, точками разрыва.

Исследуем характер точек разрыва:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{\log_2|x|} = \lim\limits_{x\to 0}(2x-3)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2|x|} = -3\cdot 0 = 0.$

Следовательно, $x = 0$ – устранимая особенность.

2) *При* $x \to \pm 1$ $|x| \to 1 \Rightarrow \log_2|x| \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2|x|} \Rightarrow \infty.$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{2x-3}{\log_2|x|} = \infty$, и $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода

$\Rightarrow$ 3 точки разрыва.

6.2.7. Среди функций 1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, 2) $f(x) = \dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$, 3) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$, 4) $f(x) = \dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ точки разрыва 1-го рода имеют?

Решение. Найдем точки разрыва каждой функции и исследуем их характер.

1) Функция $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ не определена при $x = 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, следовательно, единственная точка разрыва этой функции – это точка разрыва 2-го рода.

2) Функция $f(x)=\dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ не определена при $x = 0$ (заметим, что знаменатель основной дроби не равен нулю ни при каком значении x).

Найдем односторонние пределы $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to -0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{-\infty}}=\frac{5}{1-0}=5;\quad \lim_{x\to +0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{+\infty}}=\frac{5}{-\infty}=0\neq 5.$$

Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 1-го рода.

3) Функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ не определена при $x = 5$. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}=\infty$,

следовательно, точка $x = 5$ – точка разрыва 2-го рода.

4) Функция $f(x)=\dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ не определена при $x = -0{,}5$. При этом

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x+1}=1,\quad x>-0{,}5 \text{ и } =-\frac{2x+1}{2x+1}=-1, x<-0{,}5.$$

Таким образом, односторонние пределы в точке $x = -0{,}5$ равны соответственно 1 и -1, то есть эта точка – точка разрыва 1-го рода $\Rightarrow$ 2,4.

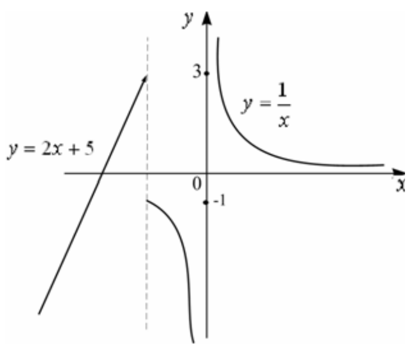


Рис. 6.6

6.2.8. Найти точки разрыва функции
$$f\left(x\right)=\begin{cases}2x+5 & \text{при} \quad -\infty<x<-1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad -1\le x<+\infty\end{cases}$$
и определить их характер.

Решение. Неэлементарная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$ (Рис. 6.6).

Так как $f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)= =\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)= =\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, то в точке $x=0$ функция терпит разрыв второго рода. Исследуем поведение функции в точках, где меняется аналитическое выражение функции:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(2x+5)=3,\ f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{x}=-1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечны, но не равны между собой, поэтому в точке $x=-1$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва равен

$$f(-1+0)-f(-1-0)=\lim_{x\to -1+0} f(x)-\lim_{x\to -1-0} f(x)=-4.$$

6.2.9. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x-a|}{x-a}$ и определить их характер.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{|x-a|}{x-a}=\begin{cases}1, & x>a,\\ -1, & x<a,\end{cases}$ следовательно, функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=a$. Так как $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=1$, $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-1$, то в точке $x=a$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва $x=a$ равен

$$f(a+0)-f(a-0)=\lim_{x\to a+0} f(x)-\lim_{x\to a-0} f(x)=1-(-1)=2.$$

6.2.10. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной. Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}x-1, x<0,\\ x^2-1, 0\le x\le 1,\\ 2, x>1.\end{cases}$$

Решение. Функция $y_1 = x - 1$ непрерывна для $x < 0$, функция $y_2 = x^2 - 1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3 = 2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1,\infty)$. Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x = 0$ и $x = 1$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} y = \lim\limits_{x\to 0-0}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-1) = -1$, $y(0) = -1 \Rightarrow$ точка $x = 0$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}(x^2-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} 2 = 2$, $y(1) = 0$.

Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x = 1$ равен $d = \left|\lim\limits_{x\to 1+0} y - \lim\limits_{x\to 1-0} y\right| = |2 - 0| = 2$.

Сделаем схематический чертеж

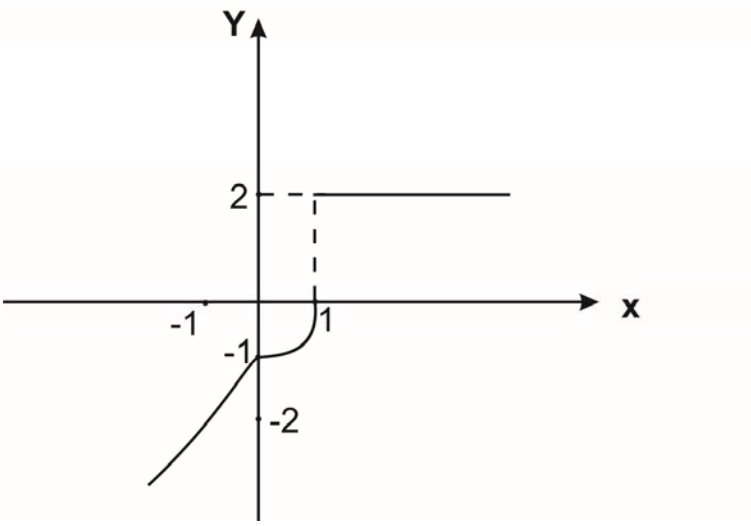


Рис. 6.7

6.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 225, 227, 229, 233, 234, 235.

ЗАНЯТИЕ 7.

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

7.1. Производная

Определение 7.1.1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если этот предел существует и конечен (если предел бесконечен, то иногда говорят про бесконечную производную).

Обозначение: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента**, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – **приращением функции**. Таким образом, можно определить производную как $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной

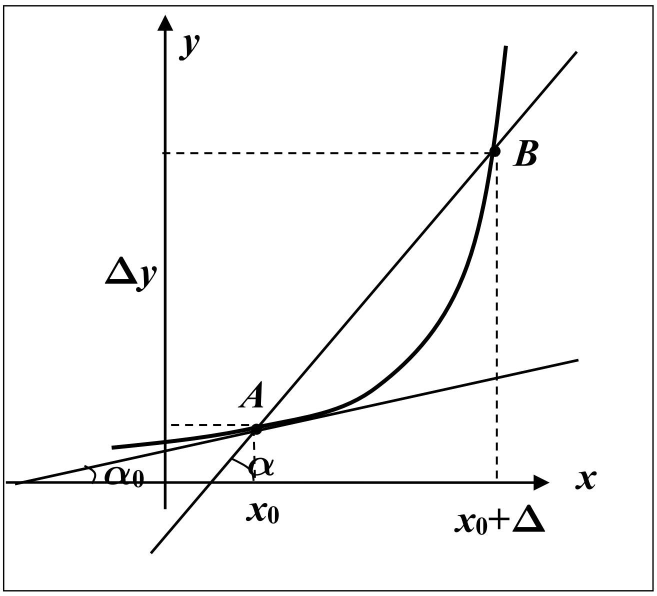


Рис. 7.1

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и проведем секущую через точки A с абсциссой x_0 и B с абсциссой $x_0 + \Delta x$. Если обозначить разность ординат этих точек Δy, то тангенс угла α, образованного секущей с осью Оx, можно представить так: $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $\Delta x \to 0$, точка B перемещается по кривой, приближаясь к точке A, и секущая при совпадении точек B и A превращается в касательную к графику функции, образующую с осью Ox угол α_0.

При этом $$tg\alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Значение производной при данном значении x равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением x с положительным направлением оси *Ox*.

Механический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение тела, для которого пройденное расстояние есть функция от времени: $s = f(t)$. Среднюю скорость за время Δt можно определить по формуле: $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Для определения мгновенной скорости тела в данный момент времени устремим Δt к нулю. Получим: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} = s'(t_0)$.

Таким образом, **производная от расстояния в данный момент времени равна мгновенной скорости движения в этот момент.** Соответственно,

Производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом x.

Необходимое условие существования производной

Теорема 7.1.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$. Тогда эта функция непрерывна в точке x_0.

Основные правила дифференцирования

Теорема 7.1.2. Пусть в некоторой точке существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, тогда в этой точке справедливы следующие равенства:

1) $c' = 0$, где $c = const$.

2) $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$

3) $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) $\left(c\cdot u\left(x\right)\right)'=c\cdot u'\left(x\right)$, при $c=const$ 5) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ в любой точке, в которой $v\left(x\right)\neq 0$.

Теорема 7.1.3. (Производная обратной функции). Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет конечную и отличную от 0 производную $f'(x_0)$; пусть для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=f^{-1}\left(y\right)$, непрерывная в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$. Тогда в точке y_0 эта обратная функция имеет производную, равную $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Или $x'_y(y_0)=\dfrac{1}{y'_x(x_0)}\Leftrightarrow x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Теорема 7.1.4. (О производной сложной функции). Пусть дана сложная функция $z=f\left(g\left(x\right)\right)$. Пусть функция $y=g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z=f\left(y\right)$ имеет производную в точке $z_0=f\left(y_0\right)$. Тогда сложная функция $z=f\left(g\left(x\right)\right)$ также имеет производную в точке x_0 и $z'_x(x_0)=f'(y_0)g'(x_0)$. Или $z'_x=z'_y y'_x$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

№	$y\left(x\right)$	$y'\left(x\right)$		№	$y\left(x\right)$	$y'\left(x\right)$
1	$y=C$	**0**		**12**	$y=\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$y=x^n$	nx^{n-1}		**13**	$y=\mathrm{arctg}x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
3	$y=a^x$	$a^x\ln a$		**14**	$y=\mathrm{arcctg}x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
4	$y=e^x$	e^x		**15**	$y=\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$
5	$y=\log_a x$	$\dfrac{\log_a e}{x}$		**16**	$y=\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$
6	$y=\ln x$	$\dfrac{1}{x}$		**17**	$y=\mathrm{th}x$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$
7	$y=\sin x$	$\cos x$		**18**	$y=\mathrm{cth}x$	$-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$
8	$y=\cos x$	$-\sin x$		**19**	$y=\mathrm{arcsh}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

9	$y=\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$		**20**	$y=\mathrm{arcch}x$ $\lvert x\rvert>1$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
10	$y=\mathrm{ctg}x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$		**21**	$y=\mathrm{arcth}x$ $\lvert x\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
11	$y=\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		**22**	$y=\mathrm{arccth}x$ $\lvert x\rvert>1$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

7.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

7.2.1. Найти приращение функции $y=2x^2-5$

в точке $x_0=-3$, если приращение независимой переменной $\Delta x = 0{,}3$.

Решение.

$$\Delta y = y(x_0+\Delta x)-y(x)=y(-3+0{,}3)-y(-3)=y(-2{,}7)-y(-3)=$$
$$=\left(2\cdot(-2{,}7)^2-5\right)-\left(2\cdot(-3)^2-5\right)=2\left(2{,}7^2-3^2\right)=2(7{,}29-9)=-3{,}42.$$

7.2.2. Найти приращение независимой переменной Δx, для которого приращение функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$ равно $\dfrac{1}{18}$.

Решение. По определению приращения функции

$$\Delta y = y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}}-\frac{1}{2}$$ $\Rightarrow \Delta x$ можно найти из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}}=\frac{5}{9}\Rightarrow 4+\Delta x=\frac{81}{25}=3{,}24\Rightarrow\Delta x=3{,}24-4=-0{,}76.$$

7.2.3. Вычислить производную функции $y=3\sin x-2\ln x$.

Решение. $y'=3(\sin x)'-2(\ln x)'=3\cos x-\dfrac{2}{x}$.

7.2.4. Продифференцировать функцию $y=2x^4+\sqrt{x}+3$.

Решение. Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций, постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$y'=\left(2x^4+\sqrt{x}+3\right)'=2\left(x^4\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'+\left(3\right)'=8x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

7.2.5. Продифференцировать функцию $y=x^2e^x$.

Решение. Для вычисления производной данной функции применим правило дифференцирования произведения двух функций:

$$y'=\left(x^2e^x\right)'=\left(x^2\right)'e^x+x^2\left(e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=xe^x\left(2+x\right).$$

7.2.6. Продифференцировать функцию $y=\frac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Применим правило вычисления производной частного от деления двух функций:

$$y'=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)'=\frac{\left(\arcsin x\right)'x-x'\arcsin x}{x^2}=\frac{x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{x^2}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

7.2.7. Продифференцировать функцию $y=\cos\left(\ln^{12}2x\right)$.

Решение. Функцию $y=\cos\left(\ln^{12}2x\right)$ представим в виде цепочки

элементарных функций: $y=\cos u$, $u=t^{12}$, $t=\ln z$, $z=2x$. Производную данной функции вычислим по правилу дифференцирования сложной функции: $y'_x=y'_u u'_t t'_z z'_x$, так как $y'_u=-\sin u$, $u'_t=12t^{11}$, $t'_z=\frac{1}{z}$, $z'_x=2$, тогда $y'_x=-\sin u\cdot 12t^{11}\frac{1}{z}2$. Подставляя вместо u, t и z их выражения через переменную x, окончательно получим: $y'_x=-\frac{12}{x}\sin\left(\ln^{12}2x\right)\ln^{11}2x$.

7.2.8. Продифференцировать функцию $y=\ln^5\left(\operatorname{tg}3x\right)$.

Решение. Сложную функцию $y=\ln^5\left(\operatorname{tg}3x\right)$ представим в виде цепочки элементарных функций: $y=u^5$, $u=\ln t$, $t=\operatorname{tg}z$, $z=3x$. По правилу вычисления производной сложной функции имеем $y'=y'_u u'_t t'_z z'_x$, т. е. $y'=5u^4\frac{3}{t\cos^2 z}$, так как $y'_u=5u^4$, $u'_t=\frac{1}{t}$, $t'_z=\frac{1}{\cos^2 z}$, $z'_x=3$. Подставив вместо u, t и z их выражения через переменную x, получим: $y'=30\ln^4\left(\operatorname{tg}3x\right)\frac{1}{\sin 6x}$

7.2.9. Продифференцировать функцию $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$.

Решение. Сложную функцию $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$ представим в виде цепочки элементарных функций: $y=u^3$, $u=\sin t$, $t=\dfrac{x}{3}$. По правилу вычисления производной сложной функции имеем $y'=y'_u u'_t t'_x$, так как $y'_u=3u^2$, $u'_t=\cos t$, $t'_x=\dfrac{1}{3}$, то $y'=3u^2\dfrac{\cos t}{3}$. Подставив вместо u и t их выражения через переменную x, получим: $y'=\sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$.

7.2.10. Продифференцировать функцию $y=\arcsin x$.

Решение. $y=\arcsin x\Rightarrow x=\sin y$.

$$y'_x=\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\left(\sin y\right)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin x\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7.2.11. Продифференцировать функцию $y=\ln x$.

Решение. $y'_x=\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x'_y}=\dfrac{1}{\left(e^y\right)'}=\dfrac{1}{y'\cdot e^y}=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}.$

7.2.12. Вычислить производную функции $y=\cos\ln(3x^2-2)$.

Решение. $y'=-\sin\ln(3x^2-2)\cdot(\ln(3x^2-2))'=-\sin\ln(3x^2-2)\cdot\dfrac{1}{3x^2-2}(3x^2-2)'=$

$$=-\sin\ln(3x^2-2)\cdot\frac{6x}{3x^2-2}.$$

7.2.13. Продифференцировать функцию $y=x^2\cdot e^{\sin x}$.

Решение. $y'=\left(x^2\right)'e^{\sin x}+x^2\left(e^{\sin x}\right)'=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\left(\sin x\right)'=$

$=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\cos x.$

7.2.14. Продифференцировать функцию $y=\cos^2 x\cdot e^{tgx}$.

Решение. $y'=\left(\cos^2 x\cdot e^{tgx}\right)'=2\cos x\cdot\left(-\sin x\right)\cdot e^{tgx}+\cos^2 x\cdot e^{tgx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

7.2.15. Исходя из определения, найти производную функции

$$f(x)=\begin{cases}1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad \text{в точке } x=0.$$

Решение. По определению производная функции $f(x)$ в точке $x=0$ равна $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Подставим значения функции в данный предел:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right)-0}{x}.$$

Так как функция $\sin\frac{1}{x}$ – ограниченная, а x – бесконечно малая функция при $x\to 0$, то по теореме о произведении бесконечно малой функции на ограниченную имеем бесконечно малую величину $x\sin\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to 0$. Заменяя в числителе бесконечно малую функцию $1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ эквивалентной функцией $\frac{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}{2}$ и снова используя упомянутую теорему, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2\frac{1}{x}}{2x}=0.$$

7.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 483; 487; 492; 498(8, 11); 510; 512; 522; 524; 528; 534; 544; 551; 555; 567; 577; 581; 591; 599; 603.

ЗАНЯТИЕ 8.

8. ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

8.1. Дифференцирование неявных функций, функций заданных параметрически. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование неявных функций

Пусть значения переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое, если все его члены перенести в левую часть, может быть записано в виде $F(x,y)=0$, где $F(x,y)-$ некоторая функция двух переменных. Если для каждого значения x, принадлежащего некоторому множеству X, существует одно значение y, принадлежащее некоторому множеству Y, такое, что $F(x,y)=0$, то этим определяется некоторая функция $y=y(x)$. Такая функция называется *неявной функцией*, заданной уравнением $F(x,y)=0$. Тогда $F(x,y)=0$ $(\forall x\in X)\Rightarrow$ $F'_x(x,y(x))=0$.

Дифференцирование функций заданных параметрически

Если функция $y=f(x)$ задана в виде: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,

причем функция $\psi(t)$ имеет обратную функцию $t=\Phi(x)$, то $y=\psi(\Phi(x))$

и имеет место формула

$$\boxed{y'(x)=\psi'(t)\Phi'(x)=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.}$$

Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости y от x.

Логарифмическое дифференцирование

Иногда полезно использовать так называемую формулу логарифмического дифференцирования. Пусть $f(x)>0$ на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции имеем $(\ln f(x))'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x),$ откуда

$$\boxed{f'(x)=f(x)\left(\ln f(x)\right)'}$$

8.2. Приложения производной

Уравнение касательной к графику $y=f(x)$ функции при $x=x_0$

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{или} \quad y=y_0+f'(x_0)(x-x_0).}$$

Уравнение нормали к графику $y = f(x)$ функции при $x = x_0$

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке $M_0(x_0, y_0)$. Этот угол находится по формуле:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}}$$

8.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

8.3.1. Продифференцировать функцию, используя правило логарифмического дифференцирования: $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{5-x}}}$.

Решение. Для дифференцирования данной функции использовать правила дифференцирования неэффективно. Применим метод логарифмического дифференцирования. Логарифмируя данную функцию и применяя свойства логарифмов, получим:

$$\ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{|x|^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{|5-x|}}} = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{15}\ln|5-x|.$$

Продифференцируем обе части выражения и выразим y':

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{15}\frac{1}{5-x}, \quad y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{15(5-x)}\right).$$

Подставив выражения для y, получим производную заданной функции:

$$y' = \sqrt[3]{\frac{|x|^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{|5-x|}}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{15(5-x)}\right).$$

8.3.2. Продифференцировать функцию, используя правило логарифмического дифференцирования: $y = \left(\cos x\right)^{\sin 2x}$.

Решение. Функция $y=(\cos x)^{\sin 2x}$ является показательно-степенной. Применим метод логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем данную функцию $\ln y=\sin 2x \ln\cos x$, затем дифференцируем ее и выразим y':

$$\frac{y'}{y}=2\cos 2x\ln\cos x+\sin 2x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right),\quad y'=2(\cos x)^{\sin 2x}\left(\cos 2x\ln\cos x-\sin^2 x\right).$$

Таким образом, $\left((\cos x)^{\sin 2x}\right)'=2(\cos x)^{\sin 2x}\left(\cos 2x\ln\cos x-\sin^2 x\right)$.

8.3.3. Продифференцировать функцию, используя правило логарифмического дифференцирования: $y=x^{x^2}$.

Решение. Функция является показательно-степенной, ее производная вычисляется методом логарифмического дифференцирования. Логарифмируя данную функцию, получим $\ln y=x^2\ln x$. Дифференцируем обе части равенства по x и выразим y':

$$\frac{y'}{y}=x^2\frac{1}{x}+2x\ln x=x(1+2\ln x),\quad y'=xx^{x^2}(1+2\ln x)=x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

8.3.4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$x=\sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}},\ \ y=\left(\frac{2}{3}\sqrt{t}+1\right)t.$$

Решение. Производная y'_x для параметрически заданной функции следующим образом выражается через y'_t и x'_t: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$. Дифференцируем функции $x(t)$ и $y(t)$ по аргументу t:

$$x'_t=\left(\sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}\right)'_t=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{t}\right),$$

$$y'_t=\left(\frac{2}{3}\sqrt{t}\cdot t+t\right)'_t=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{t}+1=\sqrt{t}+1.$$

Подставив полученные выражения в формулу, получим

$$y'_x=\frac{\sqrt{t}+1}{\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{t}\right)}=\frac{2\sqrt{t}}{e^{\sqrt{t}}}.$$

8.3.5. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$x=a\cos^3 t,\ \ y=b\sin^3 t.$$

Решение. Вычислим производную параметрически заданной функции по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Так как $y'_t = 3b\sin^2 t\cos t$, $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, то

$$y'_x = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t \quad \text{при} \quad t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

8.3.6. Продифференцировать функцию, заданную неявно: $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Продифференцируем по x обе части данного уравнения, считая y зависящим от x: $2x + 2yy' = 0$, отсюда выразим y': $y' = -\dfrac{x}{y}$.

8.3.7. Продифференцировать функцию, заданную неявно: $x^2 - xy + y^3 = 1$, вычислить y'_x в точке $x = 0$, $y = 1$.

Решение. Продифференцируем по x обе части данного уравнения, считая y зависящим от x: $2x - (y + xy') + 3y^2 y' = 0$,

отсюда выразим y': $y'_x = \dfrac{y - 2x}{3y^2 - x}$. Подставив значения $x = 0$, $y = 1$ в выражение производной, получим $y'_x\big|_{x=0,\ y=1} = \dfrac{1}{3}$.

8.3.8. Продифференцировать функцию, заданную неявно: $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения и имея в виду, что y есть функция от x, получим $3x^2 + \dfrac{1}{y}y' - x^2 e^y y' - 2xe^y = 0$, откуда

$$y' = \frac{\left(2xe^y - 3x^2\right)y}{1 - x^2 y e^y}.$$

8.3.9. Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox?

Решение. За направление кривой $y = f(x)$ в данной точке принимают направление ее касательной в этой точке. Угол наклона кривой к оси Ox в данной точке есть угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к линии в этой точке. Угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, равен $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox в точке, где $y = 0$: $\ln x = 0$ при $x_0 = 0$.

Вычислим значение производной $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 1$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, следовательно, кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox под углом $45°$.

8.3.10. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1, -1)$.

Решение. Уравнения касательной и нормали к кривой $f(x)$ в точке $M(x_0, y(x_0))$ имеют следующий вид:

$$y - y(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),\ y - y(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Уравнение кривой задано неявно. Продифференцируем заданное уравнение, считая y зависящим от x, и выразим y':

$$2x + 2y^2 + 4xy\,y' + 12y^3 y' = 0,\quad y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Вычислим значение производной в точке $M(1, -1)$:

$$y'(1) = -\frac{1 + (-1)^2}{2\cdot 1(-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Так как точка $M(1, -1)$ принадлежит кривой, то имеем $y(x_0) = \ = y(1) = -1$. Уравнение касательной имеет вид $y + 1 = \dfrac{1}{4}(x - 1)$ или $x - 4y - 5 = 0$. Уравнение нормали имеет вид $y + 1 = -4(x - 1)$ или $4x + y - 3 = 0$.

8.3.11. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ в точке $M(2, -1)$.

Решение. Производная функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0. Вычислим производную заданной кривой: $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{4t - 2}{2t + 3}$. Каждому значению параметра t на плоскости (x, y) соответствует точка $(x(t), y(t))$. Определим значение параметра t, соответствующее точке $M(2, -1)$. Так как точка $M(2, -1)$ принадлежит кривой, то значение параметра удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} 2 = t^2 + 3t - 8, \\ -1 = 2t^2 - 2t - 5. \end{cases}$$

Значение $t = 2$ есть решение данной системы уравнений. Вычислим значение производной в точке $M\left(2, -1\right)$:

$$y'\big|_{x=2} = \left.\frac{4t-2}{2t+3}\right|_{t=2} = \frac{6}{7}.$$

8.4. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 650 – 666, 792 – 813, 936 – 945, 826, 829, 837, 840, 848,859(2), 454 – 463

ЗАНЯТИЕ 9.

9. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

9.1. Дифференциал функции. Приложение к приближенным вычислениям

Определение 9.1.1. Если приращение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, где $A = const$, то $y = f(x)$ **называется дифференцируемой при** $x = x_0$, а $A\Delta x$ **называется главной линейной частью приращения или дифференциалом функции. Обозначение:** $dy = A\Delta x$**.**

Замечание 1. Т.к. при $y = x$ получаем $dx = 1\cdot\Delta x$, можно обозначать $\Delta x = dx$.

Теорема 9.1.1. Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.

Следствие. Дифференциал функции можно представить в виде $dy = f'(x_0)dx,$ а производную – в виде $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}.$

Теорема 9.2.2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Замечание 2. Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Например, $y = |x|$ непрерывна при $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала

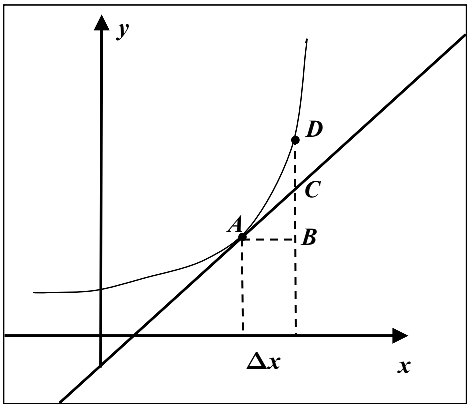


Рис. 9.1

Рассмотрим график функции $y = f\left(x\right)$ и проведем касательную к нему при $x = x_0$. Тогда при приращении аргумента Δx приращение функции Δy равно длине отрезка *BD*, а приращение ординаты касательной

$f'(x_0)\Delta x = dy$

равно длине отрезка *CD*. Следовательно,

Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.

Так как истинное значение приращения функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, при приближенных вычислениях можно заменять Δy на dy, то есть считать, что

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом функция $f(x)$ для значений x, близких к x_0, приближенно заменяется линейной функцией. Эта операция называется **линеаризацией** функции.

9.2. Производных высших порядков. Формула Лейбница

Пусть функция $y = f\left(x\right)$ дифференцируема на некотором отрезке $\left[a,b\right]$.

В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию *x*. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции $f\left(x\right)$. Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом $f'(x)$ будем называть производной первого порядка.

Определение. Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной) от функции $y=f(x)$ называется производная (первого порядка) от ее $(n-1)-$ой производной.

Обозначение: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y''' и т.д.

Основные свойства производных высших порядков следуют из соответствующих свойств первой производной:

1. $\left(c\cdot f(x)\right)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$, где $c-$const.
2. $\left(f(x)\pm g(x)\right)^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$.
3. Для $y=x^m \Rightarrow y^{(n)}=n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)$.

   Если $m-$ натуральное число, то при $n>m \Rightarrow y^{(n)}=0$.

4. **Формула Лейбница**, позволяющая найти производную $n-$го порядка от произведения функций $f(x)\cdot g(x)$:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}v^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}.$$

Заметим, что коэффициенты в этой формуле совпадают с соответствующими коэффициентами формулы бинома Ньютона, если заменить производные данного порядка той же степенью переменной. Для *n*=1 эта формула была получена при изучении первой производной, для производных высших порядков ее справедливость можно доказать с помощью метода математической индукции.

5. Пусть $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$

Следовательно,

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\quad y''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}\quad \text{и т.д.}$$

9.3. Дифференциалы высших порядков. Свойства дифференциалов высших порядков

Определение 9.2.2. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) называется дифференциал от дифференциала функции.
Обозначение: $d^2y = d\left(dy\right)$.

При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель.

Итак, $d^2y = d\left(dy\right) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx = \left(f'(x)\right)'\left(dx\right)^2 = f''(x)dx^2$.

Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции: $d^3y = d\left(d^2y\right) = f'''(x)dx$

и дифференциалы более высоких порядков.

Дифференциалом *n*-го порядка называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка: $d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = \left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)' = f^{(n)}(x)dx^n$.

Свойства дифференциалов высших порядков

1. Производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:
$f'(x) = \dfrac{dy}{dx},\ f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}, ..., f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}.$

2. Дифференциалы высших порядков **не обладают свойством инвариантности**.

Покажем это на примере второго дифференциала. Если $y = F\left(\varphi\left(x\right)\right) = F\left(u\right)$, где $d^2y = d\left(F'\left(u\right)du\right)$. Но $u = \varphi'\left(x\right)dx$ зависит от x, поэтому

$$d^2y = d\left(F'(u)\right)du + F'(u)d\left(du\right) = F''_{uu}(u)\left(du\right)^2 + F'_u(u)d^2u,$$

где $d^2u = \varphi''(x)dx^2$.

Таким образом, форма второго дифференциала изменилась при переходе к аргументу u.

9.4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке x_0 производную, то $f'(x_0) = 0$.

Замечание 1. В теореме Ферма важно, что x_0 – внутренняя точка для данного промежутка. Например, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке $[0,1]$, принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно при $x = 1$ и $x = 0$, но ее производная в этих точках в ноль не обращается.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$.

То внутри интервала (a,b) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

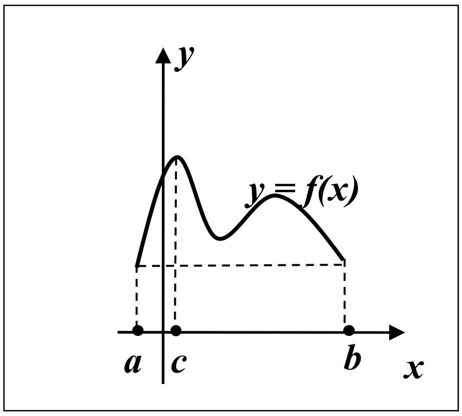
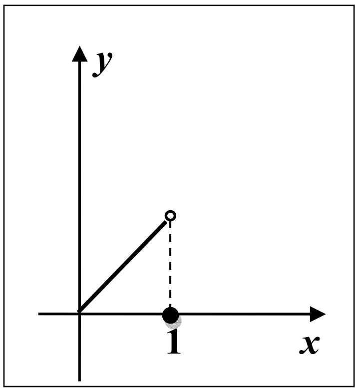
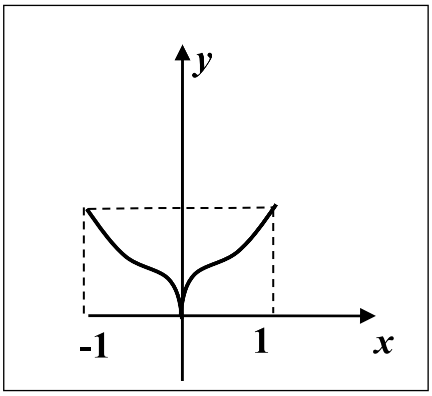


Рис. 9.2

Замечание 2. В теореме Ролля существенно выполнение всех трех условий. Приведем примеры функций, для каждой из которых не выполняется только одно из условий теоремы, и в результате не существует такой точки, в которой производная функции равна нулю.





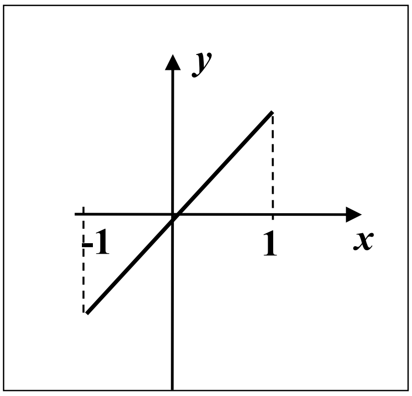


Рис. 9.3 Рис. 9.4 Рис. 9.5

Действительно, у функции, график которой изображен на рис. 9.3, $f(0)=f(1)=0$, но $x=1$ – точка разрыва, то есть не выполнено первое условие теоремы Ролля. Функция, график которой представлен на рис. 9.2, не дифференцируема при $x=0$, а для третьей функции $f(-1)\neq f(1)$.

Замечание 3. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

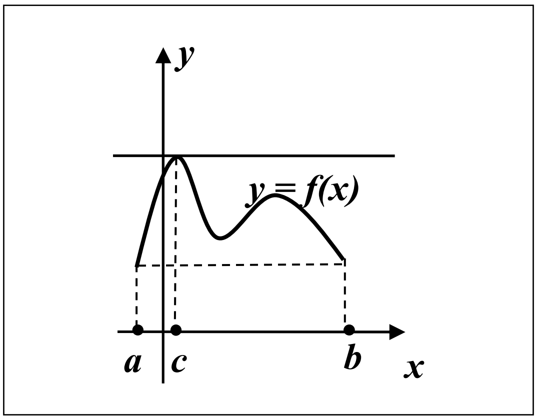


Рис. 9.6

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка c, $a<c<b$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Замечание 4. Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y=f(x)$ найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами *a* и *b*.

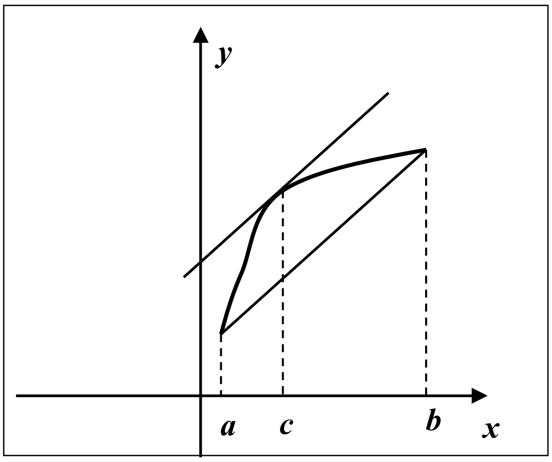


Рис. 9.7

Теорема Коши. Если $f(x)$ и $g(x)$ – функции, непрерывные на $[a,b]$ и дифференцируемые на (a,b), и $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то на (a,b) найдется такая точка $x = c$, $a < c < b$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

9.5. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории.

9.5.1. Найти дифференциал функции $y = x^3 - x^2 + 1$ в точке x.

Решение. Дифференциал функции $y = y(x)$ в точке x есть $dy(x) = y'(x)dx$, тогда для заданной функции дифференциал в точке x:

$$dy = \left(x^3 - x^2\right)' dx = \left(3x^2 - 2x\right)dx.$$

В приведенных ниже примерах приближенные значения выражений вычисляются по формуле $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. Эта формула получена из определения дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$, или в других обозначениях $y(x) = = y(x_0) + dy(x_0) + o(x - x_0)$, $\Delta x = x - x_0$.

9.5.2. Вычислить приближенное значение $\sqrt{10}$.

Решение. Для вычисления $\sqrt{10}$ рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$, найдем рядом с точкой $x = 10$ точку x_0, в которой значение $\sqrt{x_0}$ вычислялось бы точно. Этой точкой является точка $x_0 = 9$. Производная функции $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке

$x_0=9$ равна $y'(9)=\dfrac{1}{6}$, и значение функции $f(9)=3$, тогда по формуле вычисления приближенных значений получим: $\sqrt{10}\approx 3+\dfrac{1}{6}(10-9)\approx 3{,}16$.

9.5.3. Вычислить приближенное значение $\operatorname{arctg}1{,}05$.

Решение. Для вычисления $\operatorname{arctg}1{,}05$ рассмотрим функцию $y=\operatorname{arctg}x$. Подберем $x_0=1$, тогда $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$ и значение производной $y'=(\operatorname{arctg}x)'=$ $=\dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $x_0=1$ равно $y'(1)=0{,}5$. По формуле вычисления приближенных значений имеем: $\operatorname{arctg}1{,}05\approx\dfrac{\pi}{4}+0{,}5\cdot 0{,}05=0{,}81$.

9.5.4. Вычислить приближенное значение $\cos 31^\circ$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\cos x$. Так как $31^0=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{180}$, то положим $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ и вычислим в этой точке значения функции и ее производной:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ y'=(\cos x)'=-\sin x,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$$

По формуле для приближенных вычислений получим:

$$\cos 31^0\approx\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{180}=0{,}851.$$

9.5.5. Найти производную второго порядка функции $y=x^2-3x+3$.

Решение. Производная второго порядка y'' явно заданной функции вычисляется дифференцированием первой производной. Вычислим первую производную функции: $y'=2x-3$ и, повторно дифференцируя, получим:

$$y''=(y')'=2.$$

9.5.6. Найти производную второго порядка функции $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

Решение. Производная второго порядка y'' параметрически заданной функции вычисляется по формуле $y''_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

$$y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t \quad \text{при} \quad t\neq(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x'_t=-3a\cos^2 t\,\sin t.$$

Вычислим $\left(y'_x\right)'_t = -\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 t}$ и подставим $\left(y'_x\right)'_t$ и x'_t в формулу для производной второго порядка параметрически заданной функции:

$$y''_{xx} = \frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{b}{3a}\frac{1}{\cos^4 t\sin t}.$$

9.5.7. Найти производные y'' и x'', если $y = x + \ln y$.

Решение. Для нахождения второй производной y'' продифференцируем функцию по x, считая y зависящим от x: $y' = 1 + \frac{1}{y}y'$, и выразим y' из полученного выражения $y' = \frac{y}{y-1}$. Затем повторно продифференцируем последнее равенство по x, считая y зависящим от x:

$$y'' = \left(\frac{y}{y-1}\right)' = \frac{y'(y-1) - y'y}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставив в это равенство вместо производной y' ее выражение, получим:

$$y'' = -\frac{y}{(y-1)^3}.$$

Найдем производную x'' функции $y = x + \ln y$. Полагая x зависящим от y, дифференцируем по аргументу y и определяем x': $1 = x' + \frac{1}{y}$, затем выражаем x': $x' = \frac{y-1}{y}$. Продифференцируем полученное выражение x' по y и, подставив вместо производной x' его значение, получим:

$$x'' = \frac{1y - 1(y-1)}{y^2} = \frac{1}{y^2}.$$

9.5.8. Укажите, для каких функций выполняется теорема Ролля: а) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1,\ 1]$; б) $f(x) = \ln\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$; в) $f(x) = 1 - |x|$ на отрезке $[-1,\ 1]$.

Решение.

а) Функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на отрезке $[-1,\ 1]$ и $f(-1)=f(1)=0$. Производная функции $f'(x)=\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)'=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ существует во всех точках, кроме точки $x=0$, которая принадлежит отрезку $[-1,\ 1]$, следовательно, условия теоремы Ролля не выполняются.

б) Функция $f(x)=\ln\sin x$ непрерывна на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$ и $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\ln 2$. Производная функции $f'(x)=(\ln\sin x)'=\operatorname{ctg} x$ существует во всех точках отрезка $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$. Условия теоремы Ролля выполняются: $f'(x)=0$ в точке $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

в) Функция $f(x)=1-|x|=\begin{cases}1-x \text{ при } x\geq 0,\\ 1+x \text{ при } x<0\end{cases}$ непрерывна на отрезке $[-1,\ 1]$ и $f(-1)=f(1)=2$. Производная функции $f'(x)$ в точке $x=0$ не существует, так как односторонние производные функции в точке $x=0$ не равны: $f'(0-0)=1$, $f'(0+0)=-1$. Следовательно, условия теоремы Ролля не выполняются.

9.5.9. Удовлетворяют ли функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ условиям теоремы Коши на отрезке $[1,\ 4]$? Найти соответствующее значение ξ.

Решение. Функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ непрерывны на $\mathbf{R}$, значит, и на отрезке $[1,\ 4]$. Функции являются дифференцируемыми $f'(x)=2x-2$ и $g'(x)=3x^2-14x+20$ для всех $x\in\mathbf{R}$ и $g'(x)\neq 0$. Определим ξ из уравнения $\dfrac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ или $\dfrac{11-2}{27-9}=\dfrac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20}$ для $\xi\in[1,\ 4]$. Решив последнее уравнение, получим $\xi_1=2\in(1,\ 4)$, $\xi_2=4\notin(1,\ 4)$.

Ответ. Функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1,\ 4]$, значение $\xi=2$.

9.6. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1006, 1007, 1019 – 1028, 1059 – 1062, 1069 – 1079, 790 – 791, 877 – 902, 1318 – 1321.

ЗАНЯТИЕ 10

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

10.1. Формулировка теоремы

Теорема 10.1. Пусть:
а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности конечной или бесконечной точки a; б) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=0$ или $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=\infty$;
в) в нашей окрестности точки a (кроме, разве что, самой точки a) существуют конечные производные $f^{'}(x)$ и $g^{'}(x)$, причем $g^{'}\left(x\right)\neq 0$;
г) существует (конечный или нет) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=k$.
Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k,$ *т.е.* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечания:

1. Если применение правила Лопиталя опять приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно опять применить теорему 10.1., и в итоге, при соответствующих условиях, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ может существовать и тогда, когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ не существует.

10.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

10.2.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{-2\alpha x}}{\ln(1+x)}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая равна

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}+2\alpha e^{-2\alpha x}}{\frac{1}{1+x}}=\alpha+2\alpha=3\alpha$. Условия теоремы 10.1. верны; т.к. предел отношения производных существует, то наша цепочка равенств действительно имеет место.

10.2.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}$.

Решение. Имеем, опять-таки, неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая равна

$$-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(2x^2-x)\cos 3x^2\, 6x}{\sin(2x^2-x)(4x-1)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{4x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x^2-x\right)}=$$

$$=6\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x^2-x)}=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x^2-x)(4x-1)}=6\left(-1\right)=-6.$$

Легко проверить, что все наши действия законны.

10.2.3. При $x\to+\infty$ $x^k\,(k>1), \log_a x\ (a>1)$ и $a^x\,(a>1)$ являются бесконечно большими функциями. Сравним их между собой.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\log_a e}{kx^{k-1}}=\frac{\log_a e}{k}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^x(\ln a)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}{a^x(\ln a)^3}=\ldots=0$$

(т.к. x из числителя “уйдет”) $\Rightarrow$ при $x\to+\infty$ степенная функция растет быстрее логарифмической, а показательная функция быстрее степенной.

10.2.4. Правило Лопиталя при всем его удобстве не является панацеей от всех бед, что показывает следующий пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Неверное решение (правило Лопиталя не применимо, т.к. предел отношения производных не существует): $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{-\sin x}=-1$.

Верное решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$ (произведение б.м. функции $\frac{1}{x}$ на ограниченную функцию $\sin x$ есть функция б.м.).

Неопределенности другого вида (не $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$) тем или иным образом сводят к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

10.2.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$, которая равна

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\ln x+x\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

В общем случае неопределенности вида $\infty-\infty$ поступают так:

$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left[1-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$. Теперь раскроем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Если она не равна 1, то ответ ∞, если равна 1, то

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)-f_2(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}.$$ Это уже $\dfrac{0}{0}$.

10.2.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x$ (n - натуральное число).

Решение. Это неопределенность вида $0\cdot\infty$, которая равна

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{nx^{-n}}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0.$$

Неопределенности вида 1^∞, ∞^0, 0^0 сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью предварительного логарифмирования:

10.2.7. Найти $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида ∞^0. Пусть $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}\Rightarrow$

$$\ln y=\sin x\ln\frac{1}{x}.\ \lim_{x\to +0}\ln y=\lim_{x\to +0}\sin x\ln\frac{1}{x}=-\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\sin x\cos x=1\cdot 0\cdot 1=0\ \Rightarrow\ \ln y\to 0\Rightarrow\ y\to 1\Rightarrow\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1.$$

Из этого примера видно, что правило Лопиталя стоит комбинировать с уже известными способами нахождения пределов.

10.2.8. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\text{tg}x)^{\text{ctg}x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида ∞^0. Запишем логарифмирование чуть по-другому:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\text{tg}x)^{\text{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\text{ctg}x\ln\text{tg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\exp\left\{\frac{\ln\text{tg}x}{\text{tg}x}\right\}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\text{tg}x}{\text{tg}x}\right\}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\text{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right\}=\exp 0=e^0=1.$$

10.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1324, 1328, 1330, 1331, 1335, 1338, 1341, 1345, 1347, 1352, 1353, 1357, 1358, 1359, 1361.

ЗАНЯТИЕ 11

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

11.1. Формулировка теоремы

Теорема 11.1. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a все производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда в этой окрестности справедлива следующая формула (Тейлора):

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$

$$+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)-\textit{остаточный член в форме Лагранжа}}\text{, где } \xi \text{ между } a \text{ и } x.$$

Замечания:

1. Формула Маклорена – это формула Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{R_n(x)}_{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\,0<\theta<1}$$

2. При условии ограниченности (n+1)ой производной f (x) остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде $o(x-a)^n$, и тогда формулы Тейлора и Маклорена примут вид
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(x-a)^n,\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$
соответственно. На самом деле, для справедливости этих формул достаточно существование всех производных функции $f(x)$ до порядка n включительно в точке a.
3. Разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций имеют вид:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

В частности $(\alpha=-1)$, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

Или, заменяя x на $-x$, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+o(x^n)$

11.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

11.2.1. Разложить многочлен $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $x-2$ (т.е. $a=2$).

Решение. $P(2)=11; P'(x)=3x^2-4x+3; P'(2)=7; P''(x)=6x-4; P''(2)=8;$

$P'''(x)=6; P'''(2)=6; P^{\mathrm{IV}}(x)=0 \Rightarrow$

$$P(x)=P(2)+\frac{P'(2)}{1!}(x-2)+\frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3+\underbrace{\frac{P^{\mathrm{IV}}(\xi)}{4!}}_{0}(x-2)^4=$$

$$=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$$

11.2.2. Пусть $f(x)=\ln(1+x)$, $x \in [0,1]$. Разложить по формуле Маклорена. Оценить погрешность, допускаемую при сохранении 10 членов.

Решение. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}; f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}; f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}; f^{\mathrm{IV}}(x)=-\dfrac{2\cdot 3}{(1+x)^4};$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k};\ \frac{f^{(k)}(x)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k(1+x)^k};\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Rightarrow$$

$$\ln(1+x)=0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\underbrace{\frac{x^{10}}{(1+\xi)^{10}\cdot 10}}_{\textit{остаточный член}}$$

Если остаточный член отбросить, то погрешность $\left|-\dfrac{x^{10}}{(1+\xi)^{10}10}\right| \le \dfrac{1}{10}\left|\dfrac{1}{(1+\xi)^{10}}\right| \le \dfrac{1}{10}.$

11.2.3. Пусть $f(x)=e^x$. Сколько нужно взять членов в формуле Маклорена, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию на $[-1,1]$ с точностью до 0.001?

Решение. $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$; обозначая точку ξ в формуле Тейлора как $\xi=\theta x,\ 0<\theta<1$, имеем: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Нам надо, чтобы $\left|e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \dfrac{1}{1000}$; т.к. $\left|e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \dfrac{e}{(n+1)!}$ то достаточно

потребовать, чтобы $\dfrac{e}{(n+1)!} \le \dfrac{1}{1000}$ Т.е. достаточно найти такое n, чтобы $(n+1)! \ge 1000e$.

$1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24; 5! = 120; 6! = 720; 7! = 720 \cdot 7 > 1000e.$

Т.е. $n = 6 \Rightarrow$ достаточно взять 7 членов (перед остаточным членом стоит $n+1$ член).

11.2.4. Пусть $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$. Написать разложение по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до 4го порядка малости включительно.

Решение. $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) - x^2 e^{-x}$. Используя готовые разложения функций $\cos 2x$ (с заменой x на $2x$) и e^x (с заменой x на $-x$), имеем:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}) + o(x^4)\right) - x^2\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

11.2.5. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче.

Решение. $$f(x) = \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - 1} =$$

$$= \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}_{q}} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 + o(x)^4 =$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + 2\frac{x}{2}\frac{x^2}{6} + 2\frac{x}{2}\frac{x^3}{24}\right) -$$

$$-\left(\frac{x^3}{8} + 3\frac{x^2}{4}\frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^4}{16} + o\left(x^4\right) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).$$

11.2.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}\dfrac{x^4}{\operatorname{tg}^4 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4} =$

(разложим числитель по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^4\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)x^4}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

11.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1502, 1503, 1507, 1527; вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

ЗАНЯТИЕ 12

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМ

12.1. Определения и формулировки теорем

Предполагается, что $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого отрезка.

Теорема 12.1. $f(x) = \text{const}, x \in [a,b] \Leftrightarrow f'(x) = 0,\ x \in (a,b)$.

Определение 12.1. $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на $[a,b]$, если $f(x_1) > f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$ при $x_1 > x_2$ $\left(x_1, x_2 \in [a,b]\right)$.

Теорема 12.2. $f(x)$ возрастающая (убывающая) на $[a,b] \Rightarrow f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$, $x \in (a,b)$.

$f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$, $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ возрастающая (убывающая) на $[a,b]$.

Пример. $y = x^3$; $y'(0) = 0,$ но функция возрастает на всей числовой оси.

Определение 12.2. $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если существует такая окрестность точки x_0, что в этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума этой функции.

Теорема 12.3. (необходимое условие экстремума). Пусть $f(x)$ имеет

экстремум в точке $x_0 \in (a,b)$ $\Rightarrow$ $f^{'}(x_0)$ равна 0 или не существует (в частности равна ∞).
Точки, где производная функции равна 0 или не существует, называются критическими точками функции. Вышеприведенный пример $y = x^3$ показывает, что критические точки не обязательно являются точками экстремума.
Теорема 12.4. (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, разве что, самой точки x_0) имеет конечную производную $f^{'}(x)$. Тогда, если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f^{'}(x)$ меняет знак с $+$ на $-$ (с $-$ на $+$), то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (минимум); если при переходе через точку x_0 производная $f^{'}(x)$ знака не меняет, то в точке x_0 экстремума у функции $f(x)$ нет.
Теорема 12.5. (достаточное условие экстремума в терминах второй производной).
Пусть $f^{'}(x)$ существует в окрестности точки x_0 и $f^{'}\left(x_0\right) = 0$, и существует $f^{''}\left(x_0\right)$. Тогда если $f^{''}\left(x_0\right) < 0$, то x_0 – точка максимума $f(x)$; если $f^{''}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума $f(x)$.
Теорема 12.6. (достаточное условие экстремума в терминах производных высших порядков). Пусть $f^{'}\left(x_0\right) = f^{''}\left(x_0\right) = \ldots = f^{(n-1)}\left(x_0\right) = 0$, а $f^{(n)}\left(x_0\right) \neq 0.$ Тогда если n четно и $f^{(n)}\left(x_0\right) < 0,$ то x_0 – точка максимума $f(x),$ а если n четно и $f^{(n)}\left(x_0\right) > 0,$ то x_0 – точка минимума $f(x)$; если же n нечетно, то экстремума у $f(x)$ в точке x_0 нет.
Теорема 12.7. (метод нахождения наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке). Для этого нужно найти все критические точки функции на этом отрезке, вычислить значения функции в этих точках и на краях отрезка и взять наибольшее и наименьшее из этих значений.

12.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

12.2.1. Найти интервалы возрастания/убывания и точки экстремума функции $f\left(x\right) = x^2 e^{-x}$.

Решение. $f^{'}\left(x\right) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} x(2-x) \Rightarrow f^{'}\left(x\right) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$. Т.к. $f^{'}(x)$ всюду непрерывна, знак $f^{'}(x)$ может меняться лишь при переходе через эти точки. Знаки $f^{'}(x)$:

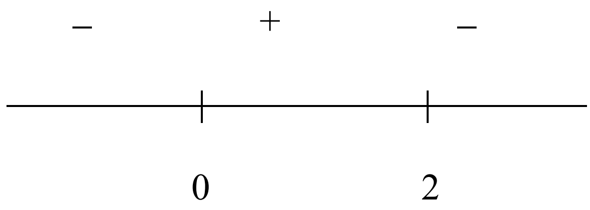


Рис. 12.1

$\Rightarrow$ $(-\infty,0)$ – функция убывает; $(0,2)$ – функция возрастает; $(2,+\infty)$ – функция убывает; $x=0$ – точка минимума; $x=2$ – точка максимума функции.

12.2.2. Найти точки экстремума функции $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

Решение. $y' = 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = 2\frac{1-x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}}$; $1-x^{\frac{4}{3}}=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow$ $x=\pm1$. Критические точки: $x=\pm1$, $x=0$ (в этой точке производная не существует. Знаки производной:

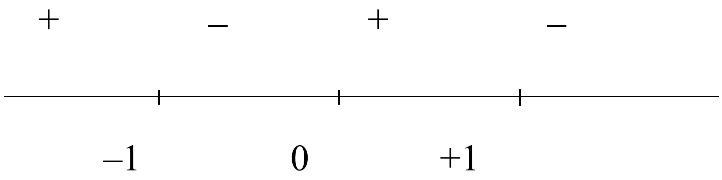


Рис. 12.2

$\Rightarrow x=-1$ – точка максимума $\{f(-1)=2\}$; $x=0$ – точка минимума, в которой касательная вертикальна $\{f(0)=0\}$; $x=1$ – точка максимума $\{f(1)=2\}$.

12.2.3. Найти точки экстремума функции $y=2\sin x+\cos 2x$.

Решение. В силу периодичности $f(x)$ рассмотрим только отрезок $[0,2\pi]$. $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 0$; $2\cos x - 4\sin x\cos x = 0$; $\cos x(1-2\sin x)=0$. Критические точки: $\cos x = 0$ $\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{3\pi}{2}$; $1-\sin x=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x_3=\frac{\pi}{6}$, $x_4=\frac{5\pi}{6}$. Используем теорему 12.5.:

$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x = -2(\sin x + 2\cos 2x)$; $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2(1-2)>0$;

$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2(-1-2)>0 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{2}$ и $x_2=\frac{3\pi}{2}$ – точки минимума функции; $y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)<0$; $y''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)<0 \Rightarrow x_3=\frac{\pi}{6}$ и $x_4=\frac{5\pi}{6}$ – точки максимума данной функции.

12.2.4. Пусть $y=f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$. $f'(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x \Rightarrow x=0$ - стационарная точка, т.е. $f'(0)=0$ (могут быть и другие стационарные точки). Исследуем функцию на экстремум в этой точке.

Решение. $f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$; $f''(0)=0$ – теорема 12.5. ответа на вопрос не дает; применим теорему 12.6.: $f'''(x)=e^x+e^{-x}+2\sin x$; $f'''(0)=0$; $f^{IV}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$; $f^{IV}(0)=4>0 \;\Rightarrow\; x=0$ – точка минимума.

12.2.5. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

Решение. Пусть R – радиус шара. Нужно найти r – радиус основания цилиндра и h – высоту цилиндра.

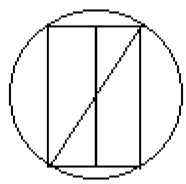


Рис. 12.3

$$\frac{h^2}{4}+r^2=R^2 \Rightarrow r^2=\frac{4R^2-h^2}{4},\; 0\le h\le 2R;$$
$$S(h)=2\pi rh=\pi h\sqrt{4R^2-h^2}=\pi\sqrt{4R^2h^2-h^4}.$$

Достаточно найти значение $h\in[0,2R]$, при котором подкоренное выражение $f(h)=4R^2h^2-h^4$ достигает наибольшего значения на $[0,2R]$. $f'(h)=8R^2h-4h^3$; критические точки: $h=0$ *и* $h^2=2R^2 \Rightarrow h=R\sqrt{2}$; $f(0)=0$; $f(2R)=0$; $f(R\sqrt{2})>0 \;\Rightarrow f(h)$ достигает своего наибольшего значения при $h=R\sqrt{2}$ и $r=\frac{\sqrt{4R^2-h^2}}{2}=\frac{\sqrt{4R^2-2R^2}}{2}=\frac{R}{\sqrt{2}}$.

12.2.6. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^2 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение. Пусть размеры бассейна $x \times x \times h.$ $V = x^2 h = 32 \;\Rightarrow\; h = \frac{32}{x^2}.$ Площадь облицовываемой поверхности $S(x) = \underbrace{x^2}_{\text{площадь дна}} + \underbrace{4xh}_{\text{площадь боковой поверхности}} = x^2 + 4x\frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$ Нужно найти такое $x > 0$, что при этом x $S(x)$ принимает наименьшее значение.

$S' = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 2\frac{x^3 - 4^3}{x^2} = 2\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2}.$ Критическая точка: $x = 4$, знак производной при переходе через эту точку слева направо меняется с – на + , значит это точка минимума функции. Т.к. на всем промежутке изменения переменной $x \in \left(0;\infty\right)$ других критических точек у функции нет, в этой точке функция принимает наименьшее значение. $h = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{16} = 2 \Rightarrow$ искомые размеры бассейна это $4 \times 4 \times 2$.

12.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1177, 1178, 1181, 1271, 1274, 1275, 1276; 1209, 1214, 1221, 1231, 1238, 1246.

ЗАНЯТИЕ 13

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

13.1. Определения и формулировки теорем

Определение 13.1. Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) в точке $M_0(x_0, f\left(x_0\right))$, если в некоторой окрестности точки M_0 все точки кривой лежат под (над) касательной, проведенной в точке M_0 (то есть ординаты точек кривой $\leq$ $(\geq)$ ординат соответствующих, точек касательной). Кривая выпукла (вогнута) на интервале, если она выпукла (вогнута) в каждой точке этого интервала.

Определение 13.2. Точка $M_0(x_0, f\left(x_0\right))$ называется точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если в каждой ее окрестности есть и точки кривой, лежащие над касательной, и точки кривой, лежащие под касательной (проведенной в точке M_0). В точке перегиба кривая пересекает касательную.

Теорема 13.1. Пусть существует $f''(x_0)$. Если $f''(x_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ кривая $y = f(x)$ вогнута; если $f''(x_0) < 0$, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ кривая $y = f(x)$ выпукла.

Теорема 13.2. Пусть $f''(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0). Если при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то $M_0 = M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

Определение 13.3. Пусть дана кривая, которая в том или ином направлении удаляется в бесконечность. Прямая линия называется асимптотой этой кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой стремится к 0 при движении M вдоль кривой в бесконечность.

Теорема 13.3. (нахождение вертикальных, наклонных и горизонтальных асимптот). Прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или то и другое сразу. Прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty \Leftrightarrow k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

Аналогично при $x \to -\infty$.

Примерная схема исследования функции

1. Найти область определения функции и выяснить поведение функции на ее границе.
2. Выяснить, не является ли функция четной (график симметричен относительно оси *OY)*, нечетной (график симметричен относительно начала координат) или периодической (график строится на интервале длиной в период, а затем продолжается по периодичности).
3. Исследовать функцию на непрерывность.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти точки экстремума функции, выяснить значения функции в этих точках. Установить интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти точки перегиба графика, вычислить значения функции и ее первой производной в этих точках. Установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
7. Используя результаты исследования, построить график функции.

При необходимости можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения с осями OX и OY).

13.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

13.2.1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Решение. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$; $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}} \neq 0$ и не существует при $x = -2$.

$y'' < 0$ при $x > -2$ и $y'' > 0$ при $x < -2$ $\Rightarrow$ при $x \in (-\infty, -2)$ кривая вогнута, при $x \in (-2, +\infty)$ кривая выпукла, $M_0(-2, 0)$ – точка перегиба исходной кривой.

13.2.2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{3x^2}{x-1}$.

Решение. Вертикальная асимптота: $x = 1$ ($\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{3x}{x-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{3x}{x-1} = -\infty$).

Наклонные и горизонтальные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$;

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x \right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3 \Rightarrow$ $y = 3x + 3$ – асимптота (при $x \to \pm\infty$).

13.2.3. Исследовать функцию из задачи 13.2.2. и построить ее график.

Решение. Функция определена для $x \neq 1$, в точке $x = 1$ имеет разрыв второго рода, график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и наклонную асимптоту $y = 3x + 3$ при $x \to \pm\infty$.

$y' = \frac{6x(x-1) - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$; из знаков y' видно, что функция

возрастает на $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ и убывает на $(0, 2)$, $x = 0$ – точка максимума (в ней $y = 0$), $x = 2$ – точка минимума (в ней $y = 12$).

$$y'' = 3\left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = 3\frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = 6\frac{(x-1)^2 - (x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$

$= \frac{6}{(x-1)^3}$; $y'' > 0$ при $x > 1$ (кривая вогнута) и $y'' < 0$ при $x < 1$ (кривая выпукла), точек перегиба график не имеет, т.к. наша функция разрывна в точке $x = 1$. График функции имеет вид:

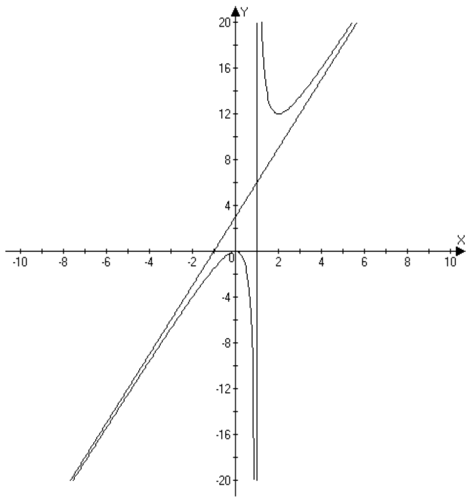


Рис. 13.1

График не пересекает наклонную асимптоту (в противном случае он бы имел точки перегиба при $x > 1$ или при $x < 1$, а таких точек нет).

13.2.4. Исследовать функцию $y = x/2 - arctg\ x$ и построить ее график.

Решение. Функция определена для всех *x*; является нечетной; она всюду непрерывна (значит, график не имеет вертикальных асимптот). Ищем наклонные и горизонтальные асимптоты:

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{arctgx}{x}\right) = \frac{1}{2} - \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}arctgx = \frac{1}{2}$ (т.к. произведение бесконечно малой на ограниченную есть б.м.; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x/2 - arctgx - x/2\right) = -\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctgx$, что равно $-\pi/2$ при $x \to +\infty$ и $\pi/2$ при $x \to -\infty$; значит, асимптотами графика будут прямые $y = x/2 \mp \pi/2$ при $x \to \pm\infty$ соответственно.

$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$; из знаков y' видно, что функция возрастает на $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ и убывает на $(-1,1)$; $x = -1$ – точка максимума, в ней $y = -1/2 + \pi/4$; $x = 1$ – точка минимума, в ней $y = 1/2 - \pi/4$.

$y'' = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$, что > 0 при $x > 0$ (вогнутость) и < 0 при $x < 0$ (выпуклость), (0;0) – точка перегиба графика. График функции:

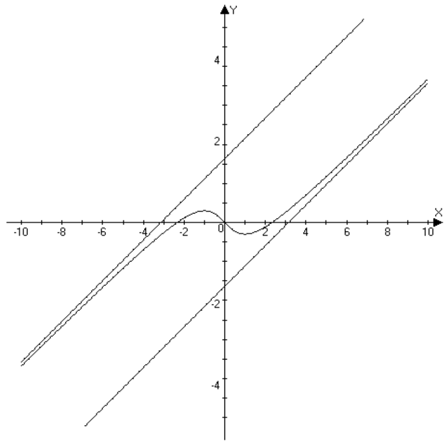
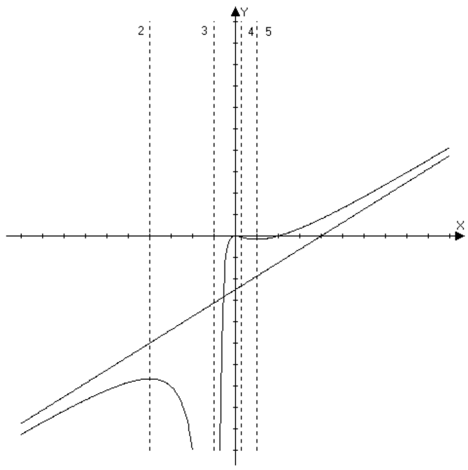


Рис. 13.2

13.2.5. По данному графику функции построить график ее производной.

Решение.



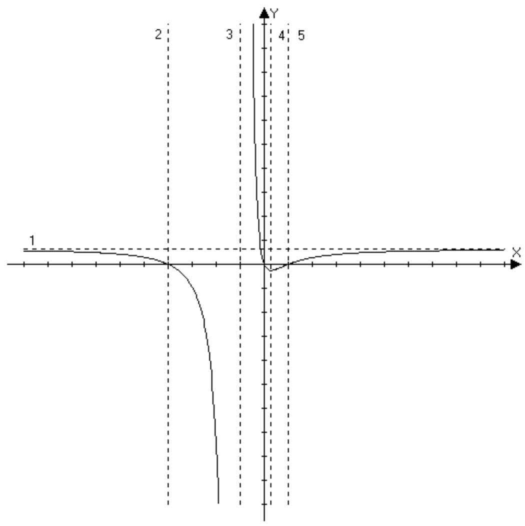


Рис. 13.3

Пояснения: там, где функция возрастает (убывает), ее производная положительна (отрицательна); в трех точках экстремума функции (двух точках максимума и одной точке минимума) ее производная равна 0; точки перегиба графика функции являются точками экстремума ее производной (т.к. при переходе через эти точки вторая производная, т.е. производная от первой производной, меняет знак); в точках бесконечного разрыва функции ее производная тоже имеет бесконечный разрыв; если $y = kx + b$ наклонная асимптота графика функции, то график ее производной будет иметь горизонтальную асимптоту $y = (kx+b)' = k$.

13.3. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1293, 1296, 1299, 1305, 1309, 1311, 1312, 1375, 1386, 1390, 1411, 1422, 1427, 1431, 1457.

ЗАНЯТИЕ 14.
14. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
14.1. Основные понятия

Определение 14.1.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка выполняется $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Определение 14.1.2. Множество (семейство) первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

14.2. Свойства неопределенного интеграла.

14.2.1. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$

14.2.2. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

14.2.3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$ **14.2.4.** $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

14.2.5. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

14.2.6. $\int d(f(x)) = f(x) + C.$ Частный случай: $\int dx = x + C.$

14.2.7. Инвариантность формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ **то** $\int f(u(x))d(u(x)) = F(u(x)) + C.$

14.3. Таблица основных интегралов

(переменная u может быть независимой переменной или функцией)

14.3.1. $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\left(\alpha\neq-1\right).$	**14.3.2.** $\int\frac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+C.$
14.3.3. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C.$	**14.3.4.** $\int e^{u}du=e^{u}+C.$
14.3.5. $\int\sin u\,du=-\cos u+C.$	**14.3.6.** $\int\cos u\,du=\sin u+C.$
14.3.7. $\int\frac{du}{\cos^{2}u}=tg\,u+C.$	**14.3.8.** $\int\frac{du}{\sin^{2}u}=-ctg\,u+C.$
14.3.9. $\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2}\right)\right\rvert+C.$	**14.3.10.** $\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C.$
14.3.11. $\int tg\,u\,du=-\ln\lvert\cos u\rvert+C.$	**14.3.12.** $\int ctg\,u\,du=\ln\lvert\sin u\rvert+C.$
14.3.13. $\int ch\,u\,du=sh\,u+C.$	**14.3.14.** $\int sh\,u\,du=ch\,u+C.$
14.3.15. $\int\frac{du}{u^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C.$	**14.3.16.** $\int\frac{du}{u^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+C.$
14.3.17. $\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}+a}}=\ln\left\lvert u+\sqrt{u^{2}+a}\right\rvert+C.$	**14.3.18.** $\int\frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\arcsin\frac{u}{a}+C.$
14.3.19. Если $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$, то $\int f\left(\alpha x+\beta\right)dx=\frac{1}{\alpha}F\left(\alpha x+\beta\right)+C.$	
14. 3.20. $\int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx=\ln\left\lvert f\left(x\right)\right\rvert+C.$	

14.4. Методы интегрирования. Решение некоторых типовых задач

Непосредственное использование свойств неопределенного интеграла

14.4.1. Вычислить $\int\frac{x^{3}+4x^{2}-7x+1}{\sqrt[3]{x}}dx.$

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{x^{3}+4x^{2}-7x+1}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{8}{3}}+4x^{\frac{5}{3}}-7x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$\int\left(x^{\frac{8}{3}}+4x^{\frac{5}{3}}-7x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\int x^{\frac{8}{3}}dx+4\int x^{\frac{5}{3}}dx-7\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1}+4\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{x^{\frac{11}{3}}}{11/3}+4\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{8/3}-7\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2/3}+C=$$

$$=\frac{3x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{11}+\frac{3x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2}-\frac{21x\cdot\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+C=3\cdot\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{x^3}{11}+\frac{x^2}{2}-\frac{7x}{5}+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Замечание. При вычислении интеграла суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных заменяют одной произвольной постоянной, которая обозначается буквой C .

14.4.2. Вычислить $\int\frac{\sqrt{x}+xe^x+1}{x}dx.$

Решение. $\int\frac{\sqrt{x}+xe^x+1}{x}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+e^x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+e^x+\ln|x|+C=$

$=2\sqrt{x}+e^x+\ln|x|+C.$

14.4.3. Вычислить $\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx$.

Решение. $\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx=\int\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int dx\right)=\frac{(-ctgx+x)}{2}+C.$

14.4.4. Вычислить $\int(tgx-3ctgx)^2\,dx.$

$$\int(tgx-3ctgx)^2\,dx=\int\left(tg^2x-6tgx\cdot ctgx+9ctg^2x\right)dx=\int\left(tg^2x-6+9ctg^2x\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx-6x+9\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\underline{tgx-9ctgx-16x+C}.$$

Метод внесения под знак дифференциала

Основой метода является использование инвариантности формулы интегрирования 14.2.7.

14.4.5. Вычислить $\int(2x+7)^5dx.$

Решение.

$$\int(2x+7)^5dx=\int(2x+7)^5\cdot\frac{1}{2}d(2x+7)=\frac{1}{2}\int(2x+7)^5d(2x+7)=\frac{(2x+7)^6}{12}+C.$$

14.4.6. Вычислить $\int\left(\cos\left(\frac{5x}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{9}\right)+\frac{1}{\cos^2(3-2x)}\right)dx$.

Решение. $I=\frac{3}{5}\int\cos\left(\frac{5x}{3}\right)d\left(\frac{5x}{3}\right)x-\int\sin\left(x+\frac{\pi}{9}\right)d\left(x+\frac{\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{d(3-2x)}{\cos^2(3-2x)}=$

$=\frac{3}{5}\sin\left(\frac{5x}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}tg(3-2x)+C.$

14.4.7. Вычислить $\int\left(e^{\frac{5x^3+1}{3}}x-7^{4x^2+1}\right)x\cdot dx.$

Решение. $\int\left(e^{\frac{5x^3+1}{3}}x-7^{4x^2+1}\right)\cdot x\cdot dx=\int e^{\frac{5x^3+1}{3}}x^2\cdot dx-\int 7^{4x^2+1}x\cdot dx=$

$=\frac{1}{5}\int e^{\frac{5x^3+1}{3}}d\left(\frac{5x^3+1}{3}\right)dx-\frac{1}{8}\int 7^{4x^2+1}d\left(4x^2+1\right)x=\frac{1}{5}e^{\frac{5x^3+1}{3}}-\frac{7^{4x^2+1}}{8\ln 7}+C.$

14.4.8. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2-12x-8}}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2-12x-8}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+3)}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}==\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)+C.$

14.5. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1686,1694, 1697, 1701, 1710, 1713, 1718, 1720, 1723, 1724,1740-1743, 1747, 1749, 1759.

ЗАНЯТИЕ 15.

15. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ «ПО ЧАСТЯМ»

15.1. Замена переменной в неопределенном интеграле. Решение типовых задач

Первый метод подстановки. $\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$

($x=\varphi(t)-$монотонная и непрерывно дифференцируемая функция)

Порядок вычисления интеграла:

1) Независимую переменную x заменяют по формуле $x=\varphi(t)$.

2) Дифференциал записывают в виде: $dx=d(\varphi(t))=\varphi'(t)dt.$

3) Вычисляют полученный интеграл.

4) В полученном значении первообразной осуществляют обратную замену: $t=\psi(x)$,где функция ψ является обратной для функции $\varphi.$ $\left(\psi=\varphi^{-1}\right)$

Второй метод подстановки. $\varphi(x)=z$ и $\varphi'(x)dx=dz$.

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(z)dz.}$$

15.1.1. Вычислить $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx.$

Решение. Подстановка: $x=3tgt;\ dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}.$

$$\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\cdot dx=\left\langle x=3tgt;\ dx=\frac{3dt}{\cos^2 t};\ \sqrt{x^2+9}=\frac{3}{\cos t};\ \ x^2=\frac{9}{\cos^2 t}-9=9tg^2t\right\rangle=$$

$$=\int\frac{3}{9tg^2t\cdot\cos t}\cdot\frac{3dt}{\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\sin^2 t\cdot\cos t}=\int\frac{\overbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}^{1}}{\sin^2 t\cdot\cos t}dt=\int\frac{dt}{\cos t}+\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}==\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin t}+C.$$

Обратная подстановка: $t=arctg\frac{x}{3};\ \sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$

$$\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\cdot dx=\ln\left|tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}+C.$$

15.1.2. Вычислить $\int\frac{dx}{2+\sqrt[3]{2x+1}}.$

Решение. Подстановка: $\sqrt[3]{2x+1}=z$

$$\int\frac{dx}{2+\sqrt[3]{2x+1}}=\left\langle 2x+1=z^3;x=\frac{z^3-1}{2};\ dx=\frac{3}{2}z^2dt\right\rangle=\int\frac{\frac{3}{2}z^2dt}{(2+z)}=\frac{3}{2}\int\frac{z^2-4+4}{(2+z)}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\cancel{z^2-4}^{(t-2)}}{\cancel{2+z}}dt+\frac{3\cdot 4}{2}\int\frac{dz}{(2+z)}=\frac{3}{2}\left(\frac{z^2}{2}-2z\right)+6\ln|z+2|+C=$$

$$=\left\langle z=\sqrt[3]{2x+1}\right\rangle=\frac{3\cdot\sqrt[3]{(2x+1)^2}}{4}-3\cdot\sqrt[3]{(2x+1)}+6\ln\left|\sqrt[3]{(2x+1)}+2\right|+C.$$

15.1.3. Вычислить $\int\frac{dx}{2\sin^2 x-3}.$

Решение. Подстановка имеет вид $tgx=z.$

$$\int\frac{dx}{2\sin^2 x-3}=\left\langle\begin{matrix} tgx=z\Rightarrow\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{z^2}{1+z^2} \\ x=arctgz;\ dx=\frac{dz}{1+z^2}\end{matrix}\right\rangle=\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{2z^2}{1+z^2}-3}=-\int\frac{dz}{\left(3+z^2\right)}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\langle z=tgx\rangle=-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{3}}+C.$$

15.2. Описание метода интегрирования «по частям»

Пусть u и v – функции, которые непрерывны вместе со своими производными, тогда имеет место **формула интегрирования «по частям»:**

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Выбор того, какая функция принимается за $u(x)$, а какое выражение составит $dv(x)$, определяется требованием, чтобы интеграл, к которому приводит применение формулы, был проще, чем данный. Иногда удобно пользоваться таблицей (здесь $P(x)$ – многочлен):

u	dv	u	dv
$P(x)$	$\cos mx \cdot dx$ $\sin mx \cdot dx$ $a^{mx} \cdot dx$	$\arcsin mx$ $\arccos mx$ $arctg\, mx$ $\log_a x$	$P(x)dx$

15.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

15.3.1. Вычислить $\int (3x-1)\sin 2x \cdot dx$.

Решение. $u(x) = 3x - 1$, $dv(x) = \sin 2x \cdot dx \Rightarrow du(x) = d(3x-1) = 3dx$.

$v(x) = \int \sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Замечание. При нахождении $v(x)$ постоянную интегрирования полагают равной 0.

$$\int \underbrace{(3x-1)}_{u} \underbrace{\sin 2x \cdot dx}_{dv} = \left\langle \begin{array}{c|c} u = (3x-1) & \underline{dv = \sin 2xdx} \\ du = 3dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right\rangle = \underbrace{(3x-1)}_{u} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}_{v} -$$

$$-\int \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}_{v} \cdot \underbrace{3dx}_{du} = \frac{1-3x}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x \cdot dx = \frac{1-3x}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

15.3.2. Вычислить $\int \arcsin 4x \cdot dx$.

Решение.

$$\int \underbrace{\arcsin 4x}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\arcsin 4x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}}}_{du} = x \cdot \arcsin 4x - \int \frac{4x \cdot dx}{\sqrt{1-16x^2}} =$$

$$= x \cdot \arcsin 4x + \frac{1}{8}\int \frac{-32x \cdot dx}{\sqrt{1-16x^2}} = x \cdot \arcsin 4x + \frac{1}{8}\int \frac{d\left(1-16x^2\right)}{\sqrt{1-16x^2}} =$$

$$= x \cdot \arcsin 4x + \frac{1}{8}\int \left(1-16x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-16x^2\right) = x \cdot \arcsin 4x + \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(1-16x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= x \cdot \arcsin 4x + \frac{\sqrt{1-16x^2}}{4} + C.$$

15.3.3. Вычислить $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot dx$.

Решение. В этой задаче проводится двукратное интегрирование по частям:

1) $$\int \underbrace{e^{\alpha x}}_{u} \underbrace{\sin \beta x \cdot dx}_{dv} = \underbrace{-\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \cos \beta x}_{uv} - \int \underbrace{-\frac{1}{\beta} \cos \beta x}_{v} \cdot \underbrace{a e^{\alpha x} dx}_{du}.$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot dx = I = -\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \cos \beta x + \frac{a}{\beta} \boxed{\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx} (*)$$

(Искомый интеграл удобно обозначить через I).

2) Интеграл $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ вычисляют по частям, опять обозначая $u(x) = e^{\alpha x}$:

$$\int \underbrace{e^{\alpha x}}_{u} \underbrace{\cos \beta x \cdot dx}_{dv} = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx.$$

3) Если результат вычисления пункта 2) подставить в (*), то получится

$$I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot dx = -\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \cos \beta x + \frac{a}{\beta} \left(\boxed{\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \overbrace{\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx}^{I}} \right).$$

Двукратное применение интегрирования по частям привело к уравнению относительно исходного интеграла:

$$I = -\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} I \right).$$

Решение этого уравнения относительно $I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot dx$:

$$I\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)=-\frac{e^{\alpha x}}{\beta}\cos\beta x+\frac{\alpha e^{\alpha x}}{\beta^2}\sin\beta x\Rightarrow I=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int e^{\alpha x}\sin\beta x\cdot dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

15.3.4. Вычислить $\int x\ln^2 xdx$.

Решение. $\int x\ln^2 xdx=\int\underbrace{\ln^2 x}_{u}\underbrace{xdx}_{dv}=\underbrace{\frac{x^2}{2}\ln^2 x}_{uv}-\int\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\cdot\underbrace{\frac{2\ln x}{x}dx}_{du}=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int\overbrace{\ln x}^{u}\overbrace{xdx}^{dv}=$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\frac{dx}{\cancel{x}}\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

15.3.5. Вычислить $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}=\int\underset{u}{x}\underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{dv}=\left\langle\begin{array}{l|l}x=u & \frac{dx}{\sin^2 x}=dv\\ dx=du & -ctgx=v\end{array}\right\rangle=-x\cdot ctgx+\int ctgx\cdot dx=$

$$=-x\cdot ctgx+\ln\left|\sin x\right|+C.$$

15.4. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1834, 1837, 1839, 1840, 1844, 1846, 1849, 1853, 1854, 1856, 1858, 1864, 1869, 1879, 1890, 1891.

ЗАНЯТИЕ 16.

16. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

16.1. Интегрирование элементарных дробей. Решение типовых примеров

Элементарными дробями называются дроби:

$1)\frac{A}{x-a}$; $2)\frac{A}{(x-a)^n},(n\in N)$; $3)\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\left(p^2-4q<0\right)$;

$4)\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}\left(n\in N,\ p^2-4q<0\right)$.

$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln\left\|x-a\right\|+C.$	$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$

$$\boxed{\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}+C.}$$

Рекуррентная формула для вычисления интеграла $I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$.

$$\boxed{I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}},\ I_{n-1}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}.$$

Вычисление интеграла от элементарной дроби четвертого типа

$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx,\ \left(n\in N,\ p^2-4q<0\right)$:

Решение. В интеграле производится замена: $x+\frac{p}{2}=t;\ x=t-\frac{p}{2};\ dx=dt;$

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-n}d\left(t^2+a^2\right)dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{M}{2}\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-n+1}}{-n+1}+$$

$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$. Обозначение $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ возможно, так как, по условию $p^2-4q<0$, то есть $q-\frac{p^2}{4}>0$. Здесь интеграл $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ вычисляется с помощью этой рекуррентной формулы и формулы 14.3.15 таблицы основных интегралов.

16.1.1. Вычислить $\int\frac{6dx}{(2-5x)^3}$.

Решение. $\int\frac{6dx}{(2-5x)^3}=-\frac{6}{5}\int\frac{d(2-5x)}{(2-5x)^3}=-\frac{6}{5}\int(2-5x)^{-3}d(2-5x)=$

$-\frac{6}{5}\cdot\frac{(2-5x)^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{0,6}{(2-5x)^2}+C.$

16.1.2. Вычислить $\int \frac{2x^3+3x^2+4x+8}{2x+3}dx.$

Решение. Дробь не является правильной, поэтому ее нужно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби (выделить целую часть). Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Использовать деление числителя на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+3x^2+4x+8 & \underline{2x+3} \\ 2x^3+3x^2 & x^2+2 \\ \hline \qquad\qquad 4x+8 & \\ \qquad\qquad \underline{4x+6} & \\ \qquad\qquad\quad 2 & \end{array} \Rightarrow \frac{2x^3+3x^2+4x+8}{2x+3} = \underbrace{x^2+2}_{\text{частное}} + \frac{\overbrace{2}^{\text{остаток}}}{\underbrace{2x+3}_{\text{делитель}}}$$

Второй способ. Преобразовать числитель определенным образом в сумму и разделить каждое слагаемое числителя на знаменатель:

$$\frac{2x^3+3x^2+4x+8}{2x+3} = \frac{\left(2x^3+3x^2\right)+\left(4x+6\right)+2}{2x+3} = \frac{\left(2x+3\right)x^2+2\left(2x+3\right)+2}{2x+3} =$$

$$= \frac{\left(2x+3\right)x^2}{2x+3} + \frac{2\left(2x+3\right)}{2x+3} + \frac{2}{2x+3} = x^2+2+\frac{2}{2x+3} = x^2+2+\frac{1}{x+1,5}.$$

Вычисление интеграла.

$$\int \frac{2x^3+3x^2+4x+8}{2x+3}dx = \int\left(x^2+2+\frac{1}{x+1,5}\right)dx = \int x^2dx + 2\int dx + \int\frac{dx}{x+1,5} =$$

$$= \frac{x^3}{3}+2x+\int\frac{d\left(x+1,5\right)}{x+1,5} = \frac{x^3}{3}+2x+\ln\left|x+1,5\right|+C.$$

16.1.3. Вычислить $\int \frac{\left(x+4\right)dx}{x^2+4x+14}.$

Решение.

(1) В знаменателе интеграла выделяется полный квадрат:

$x^2+4x+14=\left(x^2+4x+4\right)+10=\left(x+2\right)^2+10$ и производится замена:

$$\int\frac{\left(x+4\right)dx}{x^2+4x+14} = \int\frac{\left(x+4\right)dx}{\left(x+2\right)^2+10} = \left\langle \begin{array}{l} x+2=t; \\ x=t-2; \\ dx=dt \end{array} \right\rangle = \int\frac{\left(t+2\right)dt}{t^2+10}.$$

(2) Интеграл представляем в виде суммы двух интегралов и вычисляем (см.14.3.20 и 14.3.15.):

$$\int\frac{\left(t+2\right)dt}{t^2+10} = \frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+10} + 2\int\frac{dt}{t^2+10} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+10\right)+\frac{2}{\sqrt{10}}arctg\frac{t}{\sqrt{10}}+C\ .$$

(3) После обратной замены получим

$$\int\frac{(x+4)dx}{x^2+4x+14}=\ln\left|(x+2)^2+10\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C=\ln\left(x^2+4x+14\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{10}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C.$$

16.1.4. Вычислить $\int\frac{(2x-1)dx}{\left(x^2+6x+10\right)^2}$.

Решение. Решение такого интеграла рассмотрено в общем виде выше.
(1) В знаменателе выделяем полный квадрат и производим замену:

$$\int\frac{(2x-1)dx}{\left(x^2+6x+10\right)^2}=\int\frac{(2x-1)dx}{\left((x+3)^2+1\right)^2}=\left\langle\begin{matrix}x+3=t;\\ x=t-3;\\ dx=dt.\end{matrix}\right\rangle=\int\frac{2t-7}{\left(t^2+1\right)^2}dt\,.$$

(2) Результат записываем в виде суммы двух интегралов: $\int\frac{2t-7}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt-7\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$

(3) При вычислении первого интеграла используем формулу 14.3.1 таблицы основных интегралов при $\alpha=-2$:

$$\int\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int\left(t^2+1\right)^{-2}d\left(t^2+1\right)=\frac{\left(t^2+1\right)^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{1}{\left(t^2+1\right)}.$$

(4) Второй интеграл вычисляем по рекуррентной формуле (при $n=2$) и 14.3.15 таблицы основных интегралов:

$$-7\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=-7\left(\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctgt\right).$$

(5) Для получения ответа нужно сложить результаты (3) и (4) и сделать обратную замену: $t=x+3$.

$$\int\frac{(2x-1)dx}{\left(x^2+6x+10\right)^2}=-\frac{7t+2}{2\left(t^2+1\right)}-\frac{7}{2}arctgt+C=-\frac{7x+23}{2\left(x^2+6x+10\right)}-\frac{7}{2}arctg(x+3)+C.$$

16.1.5. Вычислить $\int\frac{dx}{x^3+24x^2+192x+512}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x^3+24x^2+192x+512}=\int\frac{dx}{(x+8)^3}=\int(x+8)^{-3}d(x+8)=$

$$=-\frac{1}{2(x+8)^2}+C.$$

16.1.6. Вычислить $\int \frac{x+7}{\left(x^2+9\right)^3}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x+7}{\left(x^2+9\right)^3}dx=\int \frac{xdx}{\left(x^2+9\right)^3}+7\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}=\frac{1}{2}\int \left(x^2+9\right)^{-3}d\left(x^2+9\right)+7\underbrace{\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}}_{I_3}=$$

$$=-\frac{1}{4\left(x^2+9\right)^2}+7I_3=-\frac{1}{4\left(x^2+9\right)^2}+\frac{7x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{7}{12\cdot 54}\left(\frac{3x}{\left(x^2+9\right)}+arctg\frac{x}{3}\right)=$$

$$=\frac{9+7x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{7x}{216\left(x^2+9\right)}+\frac{7}{648}arctg\frac{x}{3}+C.$$

$$I_1=\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)}=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3};$$

$$I_2=\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{x}{18\left(x^2+9\right)}+\frac{1}{18}I_1=\frac{x}{18\left(x^2+9\right)}+\frac{1}{54}arctg\frac{x}{3};$$

$$I_3=\frac{x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{3}{36}I_2=\frac{x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{1}{12\cdot 54}\left(\frac{3x}{\left(x^2+9\right)}+arctg\frac{x}{3}\right)$$

16.2. Разложение рациональной дроби на элементарные. Решение некоторых типовых задач.

Теорема 16.1. (о разложении рациональной дроби на элементарные).

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная несократимая рациональная дробь. Знаменатель ее после разложения на множители имеет вид:

$$Q(x)=b_0\left(x-a_1\right)^{m_1}\left(x-a_2\right)^{m_2}..\left(x-a_k\right)^{m_k}...\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1}...\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l},$$

где $a_1, a_2,...a_k$ – действительные корни многочлена $Q(x)$ соответственно кратности $m_1,m_2,...m_k$, а трехчлены $\left(x^2+p_1x+q_1\right),...\left(x^2+p_lx+q_l\right)$ не имеют действительных корней.

Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы элементарных дробей. В этой сумме каждому множителю вида $\left(x-a\right)^m$ знаменателя соответствует выражение вида

$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_m}{(x-a)^m}$ (1), а каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^n$ – выражение вида

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\frac{M_nx+N_n}{\left(x^2+px+q\right)^n} \quad (2),$$ где

$A_1,A_2,\ldots,A_{m-1},A_m,\ M_1,M_2,\ldots M_{n-1},M_n,\ N_1,N_2,\ldots N_{n-1},N_n$ – числа, подлежащие определению.

Замечание. **Если дробь не является правильной** (старшая степень числителя дроби больше или равна старшей степени знаменателя), необходимо предварительно представить дробь в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной дроби («выделить целую часть»).
Для этого числитель делится на знаменатель до тех пор, пока старшая степень остатка не станет меньше старшей степени делителя:

$$\boxed{\frac{\text{делимое}}{\text{делитель}}=\text{частное}+\frac{\text{остаток}}{\text{делитель}}}.$$

16.2.1. Разложить рациональную дробь $\frac{x^2+3x+1}{(x-1)x(x+3)}$ на элементарные.

Решение. Данная дробь является правильной, так как старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя. В знаменателе рациональной дроби каждый из трех линейных множителей находится в первой степени, поэтому она представляется в виде суммы трех элементарных дробей вида $\frac{A}{x-a}$: $\frac{x^2+3x+1}{(x-1)x(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x+3)}$.

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)x(x+3)}=\frac{Ax(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)x}{(x-1)x(x+3)}.$$

Числители этих дробей тождественно равны:

$$x^2+3x+1=Ax(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)x=$$

$$=(A+B+C)x^2+(3A-B+3B-C)x+(-3B).$$

Систему для нахождения коэффициентов A,B и C можно составить двумя способами.

1) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x:

$$\begin{array}{l\|l} x^2 & A+B+C=1 \\ x & 3A+2B-C=3 \\ x^0 & -3B=1. \end{array}$$

2) Подставить вместо x любые значения (наиболее «удобными» являются корни знаменателя):

$$\begin{array}{l||l} x=0 & 1=-3B \\ x=-3 & 1=12C \\ x=1 & 5=4A. \end{array}$$

Решив любую из систем, получаем $A=\frac{5}{4};\ B=-\frac{1}{3};\ C=\frac{1}{12}$.

Замечание. При нахождении коэффициентов рекомендуется составлять систему, применяя оба способа.

Таким образом, $\frac{x^2+3x+1}{(x-1)x(x+3)}=\frac{5}{4(x-1)}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{12(x+3)}$.

16.2.2. Представить рациональную дробь $\frac{5x^4-x^3+54x^2-5x+80}{(4x-1)\left(x^2+9\right)^2}$ в виде суммы элементарных дробей.

Решение. Дробь правильная. По теореме 16.1. ее можно представить в виде:

$$\frac{5x^4-x^3+54x^2-5x+80}{(4x-1)\left(x^2+9\right)^2}=\frac{A}{(4x-1)}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+9\right)}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Приводим правую часть разложения к общему знаменателю и приравниваем числители левой и правой части.

$$5x^4-x^3+54x^2-5x+80=$$

$$=A\left(x^2+9\right)^2+(Bx+C)(4x-1)\left(x^2+9\right)+(Mx+N)(4x-1)=$$

$$=x^4(A+4B)+x^3(-B+4C)+x^2(18A+36B-C+4M)+$$

$$+x(-9B+36C+4N-M)+(81A-9C-N)$$

Составляем систему относительно A, B, C и D, комбинируя метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной x и метод подстановки корней знаменателя.

$$\begin{array}{l||l|l} x=\frac{1}{4} & 5\cdot\frac{1}{4^4}-\frac{1}{4^3}+\frac{54}{16}-\frac{5}{4}+80=A\left(\frac{1}{16}+9\right)^2 & A=1 \\ x^4 & A+4B=5 & B=1 \\ x^3 & -B+4C=-1 & C=0 \\ x^2 & 18A+36B-C+4M=54 & M=0 \\ x & -9B+36C+4N-M=-5 & N=1 \\ 1 & 81A-9C-N=80 & \end{array}$$

Искомое разложение данной дроби на элементарные:

$$\frac{5x^4-x^3+54x^2-5x+80}{(4x-1)\left(x^2+9\right)^2}=\frac{1}{(4x-1)}+\frac{x}{\left(x^2+9\right)}+\frac{1}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

16.2.3. Представить рациональную дробь $\dfrac{2x^4+3x}{x^3+1}$ в виде суммы элементарных.

Решение.

1) Дробь не является правильной, поэтому предварительно выполним деление числителя на знаменатель, и представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби («выделим целую часть») (см. замечание к теореме 16.1).

$$\begin{array}{r||l} 2x^4+\ \ 3x & \underline{x^3+1} \\ -\ \ 2x^4+\ \ 2x & 2x \leftarrow \text{частное} \\ \hline \text{остаток} \rightarrow x & \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{2x^4+3x}{x^3+1}=2x+\frac{x}{x^3+1}.$$

Правильную дробь $\dfrac{x}{x^3+1}$ представим в виде суммы элементарных:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Mx+N}{\left(x^2-x+1\right)}$$

$$x=A\left(x^2-x+1\right)+(Mx+N)(x+1)=x^2(A+M)+x(-A+M+N)+(A+N)$$

$$\begin{array}{l||l|l} x^2 & A+M=0 & A=-\dfrac{1}{3}; \\ x & -A+M+N=1 & M=\dfrac{1}{3}\ ;\Leftrightarrow \dfrac{x}{\left(x^3+1\right)}=-\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{x+1}{3\left(x^2-x+1\right)}. \\ 1 & A+N=0 & \\ x=-1 & -1=3A & N=\dfrac{1}{3} \end{array}$$

Окончательно получаем:

$$\frac{2x^4+3x}{x^3+1}=2x-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{x+1}{3\left(x^2-x+1\right)}.$$

Пример интегрирования рациональной дроби

Прежде, чем приступать к интегрированию дроби, нужно

1) убедиться, что дробь несократимая и правильная, в противном случае нужно предварительно сократить и выделить целую часть.

2) Разложить знаменатель дроби на множители и представить правильную дробь в виде суммы элементарных дробей с неопределенными коэффициентами и найти коэффициенты разложения.

4) Выполнить вычисление интегралов.

16.2.4. Вычислить $\int \frac{x^2-x+6}{2x^3+x^2-x}dx$.

Решение.

1) Дробь является правильной.

2) Разложение знаменателя дроби на множители:

$$2x^3+x^2-x=x\left(2x^2+x-1\right)=2x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x(x+1)(2x-1).$$

Замечание. В этой задаче коэффициент при x^3 в знаменателе не равен единице. Можно представить дробь $\frac{x^2-x+6}{x(x+1)(2x-1)}$ в виде суммы элементарных дробей с неопределенными коэффициентами так, как это сделано ниже:

$$\frac{x^2-x+6}{x(x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(2x-1)}.$$

3) Нахождение коэффициентов:

$$\frac{x^2-x+6}{x(x+1)(2x-1)}=\frac{A^{\underline{|(x+1)(2x-1)}}}{x}+\frac{B^{\underline{|x(2x-1)}}}{(x+1)}+\frac{C^{\underline{|x(x+1)}}}{(2x-1)}.$$

$$x^2-x+6=A(x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(x+1)$$

$$\begin{array}{r||l} x=0 & 6=-A \\ x=-1 & 8=3B \\ x=\frac{1}{2} & \frac{23}{4}=\frac{3C}{4} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-6 \\ B=\frac{8}{3} \\ C=\frac{23}{3} \end{cases} \qquad \frac{x^2-x+6}{x(x+1)(2x-1)}=-\frac{6}{x}+\frac{8}{3(x+1)}+\frac{23}{3(2x-1)}.$$

4) Вычисление интеграла:

$$\int \frac{x^2-x+6}{2x^3+x^2-x}dx=-6\int\frac{dx}{x}+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{23}{3}\int\frac{dx}{2x-1}=$$

$$=-6\ln|x|+\frac{8}{3}\ln|x+1|+\frac{23}{6}\ln|2x-1|+C=\ln\frac{\sqrt[6]{(x+1)^{16}|2x-1|^{23}}}{x^6}+C.$$

16.3. Задачи для самостоятельного решения

Представить рациональную дробь $\frac{2x^4+x^3+1}{x^2(2x+1)}$ в виде суммы элементарных дробей. Ответ: $x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{2x+1}$.

[1] №№ 2012, 2016, 2028, 2039, 2041, 2042, 2049.

ЗАНЯТИЕ 17.

17. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

17.1. Вычисление интегралов вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx; \ \int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx; \ \int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx.$$

Для преобразования подынтегральных выражений в этих интегралах используют формулы, преобразующие произведение тригонометрических функций в сумму:

17.1.1. $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)$

17.1.2. $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$

17.1.3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$

17.2. Интегрирование тригонометрических функций с помощью подстановок

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (под символом $R(\sin x, \cos x)$ понимается рациональная функция синуса и косинуса) могут быть преобразованы в рациональную дробь **с помощью** универсальной тригонометрической **подстановки:** $\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$.

$$\boxed{x = 2arctgt; \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.}$$

Замечание. В ряде случаев применение универсальной тригонометрической подстановки значительно усложняет вычисления интегралов, и поэтому предпочтительнее **другие методы решения**:

$a)$ Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$), то применяется подстановка $\boxed{\cos x = t}$.

$b)$ Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$), то применяется подстановка $\boxed{\sin x = t}$.

$c)$ Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, в частности, когда подынтегральная функция имеет вид $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x, \sin 2x, tgx)$, применяется подстановка $\boxed{tgx = t}$.

17. 3. Вычисление интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$

1. m или n – нечетное положительное число.

$a)\ m=2k+1$ или $b)\ n=2l+1$.

$$a)\int \sin^{2k+1}x\cdot\cos^n x\cdot dx=\int \underbrace{\sin^{2k}x}_{\left(\sin^2 x\right)^k}\cdot\cos^n x\cdot\underbrace{\sin x\cdot dx}_{-d(\cos x)}=$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^k\cos^n x\cdot d\left(\cos x\right).$$

Замечание. Можно применить подстановку: $\boxed{\cos x=z;\ \sin x\cdot dx=-dz.}$

$$b)\int \sin^m x\cdot\cos^{2l+1}x\cdot dx=\int \sin^m x\cdot\underbrace{\cos^{2l}x}_{\left(\cos^2 x\right)^l}\cdot\underbrace{\cos x\cdot dx}_{d(\sin x)}=-\int\left(1-\sin^2 x\right)^l\sin x\cdot d\left(\sin x\right).$$

Замечание. Можно применить подстановку: $\boxed{\sin x=z;\ \cos x\cdot dx=dz.}$

2. $m+n=-2k\le 0$ (четное неположительное число).

а) Если в числителе находится степень $\sin x$, решение находится с помощью подстановки:

$$\boxed{\boxed{tgx=t};\ x=arctgt;dx=\frac{dt}{1+t^2};\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}},$$

б) если в числителе находится степень $\cos x$, решение находится с помощью подстановки:

$$\boxed{\boxed{ctgx=t};\ x=arcctgt;dx=-\frac{dt}{1+t^2};\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

3. Интегралы вида $\int\sin^{2n}x\cdot dx;\ \int\cos^{2n}x\cdot dx;\int\sin^{2m}x\cdot\cos^{2n}x\cdot dx\left(m,n\in N\right)$

Для преобразования подынтегральных выражений в этих интегралах используют формулы: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, применение которых позволит понизить степень тригонометрических функций.

17.4. Примеры вычисления интегралов от тригонометрических функций

17.4.1. Вычислить $\int\sin\frac{3x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}dx$.

Решение. С помощью формулы 17.1.1. можно представить заданный интеграл в виде суммы интегралов:

$\int\sin\frac{3x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\sin\left(\frac{x}{4}\right)dx+\frac{1}{2}\int\sin\left(\frac{5x}{4}\right)dx.$ Каждый из интегралов вычисляется по формуле 14.3.5. таблицы основных интегралов с использованием инвариантности формулы интегрирования (см.14.2.7.):

$$\frac{1}{2}\cdot 4\int\sin\left(\frac{x}{4}\right)d\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\int\sin\left(\frac{5x}{4}\right)d\left(\frac{5x}{4}\right)=-2\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{5x}{4}\right)+C.$$

17.4.2. Вычислить $\int\frac{2\sin x-5\cos x}{1+\sin x}dx$.

Решение. 1) В этом интеграле нужно применить универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}=t$ (см. 17.2.):

$$\int\frac{2\sin x-5\cos x}{1+\sin x}dx=\left\langle tg\frac{x}{2}=t;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right\rangle=$$

$$=\int\frac{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{5\left(1-t^2\right)}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{4t-5+5t^2}{1+t^2+2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{5t^2+4t-5}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}dt.$$

2) Замена привела к интегралу от правильной рациональной дроби, которую нужно разложить на элементарные дроби:

$$\frac{5t^2+4t-5}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}=-\frac{5}{(1+t)}-\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{5t+2}{1+t^2}.$$

3) Вычисление интеграла (см. выше):

$$\int\frac{5t^2+4t-5}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}dt=-5\int\frac{dt}{1+t}-2\int\frac{dt}{(1+t)^2}+\frac{5}{2}\int\frac{2tdt}{\left(1+t^2\right)}+2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)}=$$

$$=-5\ln|1+t|+\frac{2}{(1+t)}+\frac{5}{2}\ln\left(1+t^2\right)+2arctgt+C.$$

4) Окончательный ответ получится после обратной замены $t=tg\frac{x}{2}$, $arctgt=\frac{x}{2}$ и умножения на два:

$$\int\frac{2\sin x-5\cos x}{1+\sin x}dx=-10\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+\frac{4}{\left(1+tg\frac{x}{2}\right)}+5\ln\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)+2x+C.$$

17.4.3. Вычислить $\int\frac{\cos^2 3x\cdot dx}{4-3\sin^2 3x}$

Решение. 1) Так как в подынтегральной функции $\sin 3x$ и $\cos 3x$ находятся в четной степени, то она удовлетворяет условию 17.2.*c*), и для вычисления интеграла нужно применить подстановку $tg3x=t$.

$$\int\frac{\cos^2 3x\cdot dx}{4-3\sin^2 3x}=\left\langle\begin{matrix}tg3x=t;\ 3x=arctgt;\quad x=\frac{1}{3}arctgt;\\ dx=\frac{dt}{3\left(1+t^2\right)};\ \cos^2 3x=\frac{1}{1+t^2};\ \sin^2 3x=\frac{t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\int\frac{1}{\left(1+t^2\right)}\cdot\frac{dt}{3\left(1+t^2\right)\left(4-\dfrac{3t^2}{1+t^2}\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4+t^2\right)}.$$

2) Для вычисления интеграла подынтегральную дробь нужно разложить на элементарные: $\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)\left(4+t^2\right)}=\dfrac{1}{3\left(1+t^2\right)}-\dfrac{1}{3\left(4+t^2\right)}$.

3) Вычисление интеграла:

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4+t^2\right)}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{9}\int\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{9}arctgt-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C.$$

4) Ответ получится после обратной замены: $t=tg3x$; $arctgt=3x$:

$$\int\frac{\cos^2 3x\cdot dx}{4-3\sin^2 3x}=\frac{1}{3}x-\frac{1}{18}arctg\frac{tg3x}{2}+C.$$

17.4.4. Вычислить $\int\sqrt{\dfrac{\sin x}{\cos^5 x}}\cdot dx$.

Решение. 1) В этом случае $m=\dfrac{1}{2}$, $n=-\dfrac{5}{2}$, и интеграл удовлетворяет условию $m+n=-2\le 0$ (17.3., случай 2). Применяется подстановка: $tgx=t$; $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$; $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Замечание. В этом примере требование, чтобы m и n были целыми, не является обязательным.

$$\int\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}}\cdot dx=\int\sqrt{\frac{t\Big/\sqrt{1+t^2}}{1\Big/\sqrt{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\sqrt{t}\cdot dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(tgx\right)^3}+C.$$

17.4.5. Вычислить $\int\cos^4 x\cdot\sin^2 xdx$.

Решение. Интеграл содержит произведение четных степеней функций $\cos x$ и $\sin x$, поэтому здесь применяются тригонометрические формулы понижения степени и формулы, преобразующие произведение тригонометрических функций в сумму (17. 3., случай 3 и 17.1.3).

Преобразование подынтегрального выражения:

$$\cos^4 x\cdot\sin^2 x=\cos^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x=\cos^2 x\cdot\left(\cos x\cdot\sin x\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\cdot\frac{1}{4}\underbrace{\sin^2 2x}_{\frac{1-\cos 4x}{2}}\Rightarrow\cos^4 x\cdot\sin^2 x=\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)$$

Вычисление интеграла:

$$\frac{1}{16}\int\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C.$$

17.5. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 1818, 1823, 2093, 2110, 2119, 2124.

17.6. Вычисление интегралов вида

$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots\right)dx,$ где $R-$рациональная функция и $p_1,q_1,p_2,q_2\ldots-$целые числа

Подынтегральная функция преобразуется в рациональную с помощью подстановки $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^n$, где $n=Н.О.К.(q_1,q_2,\ldots)$ ($n-$наименьшее из целых чисел, которые делятся на числа $q_1,q_2,\ldots$).

Частным случаем таких интегралов являются интегралы вида $\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots\right)dx,$ которые приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой $x=t^n$, где $n=Н.О.К.(q_1,q_2,\ldots)$.

17.7. Вычисление интегралов вида

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ где $R-$рациональная функция

В интегралах вида $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$ проводятся следующие преобразования:

1) Выделение полного квадрата в знаменателе:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=a\left(\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{z^2}-\frac{b^2-4ac}{2a}\right)$$

2) Замена $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=z;\ dx=dz.$ Возможны следующие случаи:

$a)\ a>0,$ $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+m}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|z+\sqrt{z^2+m}\right|}$, где $m=-\frac{b^2-4ac}{2a}$.

Интеграл вычисляется с помощью формулы 14.3.17 таблицы основных интегралов, если $m \neq 0$ или по формуле 14.3.2, если $m = 0$.

$b)$ $a < 0$, в этом случае $-\dfrac{b^2-4ac}{2a} = n^2$ должно быть положительным.

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{n^2-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{z}{n}.}$$

Интеграл вычисляется по формуле 14.3.18. таблицы основных интегралов.

Интегралы вида $\int \dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, преобразуются следующим образом:

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (*)}.$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ – многочлен, степень которого на единицу меньше степени числителя искомого интеграла. Для нахождения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и числа λ выполняют следующие операции:

1) Обе части равенства $(*)$ дифференцируют и приводят к общему знаменателю:

$$\left(\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \right)' = \left(Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \left(Q_{n-1}(x)\right)' \sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x) \cdot \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2P_n(x)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2\left(Q_{n-1}(x)\right)'\left(ax^2+bx+c\right) + Q_{n-1}(x)\cdot(2ax+b) + 2\lambda}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

2) Числители полученных дробей тождественно равны:

$$2P_n(x) \equiv 2\left(Q_{n-1}(x)\right)'\left(ax^2+bx+c\right) + Q_{n-1}(x)\cdot(2ax+b) + 2\lambda.$$

Систему для нахождения неизвестных коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и числа λ составляют, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x или подставляя вместо нее любые значения так, как это делалось при разложении рациональной дроби на элементарные.

3) Найденные значения подставляют в $(*)$, вычисляют интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (см. 17.7.1.), входящий в правую часть, и получают ответ.

Интегралы вида $\boxed{\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}}$, где $m \in N$ приводятся к предыдущему интегралу подстановкой $\boxed{(x-\alpha)=\frac{1}{t};\ x=\frac{1}{t}+\alpha;\ dx=-\frac{dt}{t^2}.}$

Тригонометрические и гиперболические подстановки при вычислении интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ где $R-$рациональная функция

После преобразования подкоренного выражения с помощью выделения полного квадрата и замены эти интегралы будут сведены к одному из следующих видов и смогут быть вычислены с помощью указанных подстановок:

1) $\boxed{\int R\left(t,\sqrt{m^2-t^2}\right)dx,}$ подстановка: $\boxed{t=m\cdot\sin x;\ dt=m\cdot\cos z\cdot dz}$.

2) $\boxed{\int R\left(t,\sqrt{m^2+t^2}\right)dx,}$ подстановка: $\boxed{t=m\cdot tgz;\ dt=\frac{mdz}{\cos^2 z}}$.

или $\boxed{t=m\cdot shz;\ dt=m\cdot chz\cdot dz}$.

3) $\boxed{\int R\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dx,}$ подстановка: $\boxed{t=\frac{m}{\sin z};\ dt=-\frac{m\cdot\cos zdt}{\sin^2 z}}$.

или $t=m\cdot chz;\ dt=m\cdot shz\cdot dz$.

17.8. Примеры интегрирования иррациональных функций

17.8.1. Вычислить $\int \frac{\sqrt[6]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{2x+1}}dx$.

Решение.

1. Интеграл разбирался в параграфе 17.6., поэтому применяется подстановка $2x+1=t^6;\ x=\frac{t^6-1}{2};\ dx=3t^5dt$.

$$\int \frac{\sqrt[6]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{2x+1}}dx=\left\langle 2x+1=t^6; dx=3t^5dt\right\rangle=\int \frac{t}{\sqrt[3]{t^6}-\sqrt{t^6}}\cdot 3t^5dt=3\int \frac{t^4dt}{1-t}$$

2. Интеграл $\int \frac{t^4 dt}{1-t}$ можно вычислить, выделив целую часть в подынтегральной функции: $\frac{t^4}{1-t} = -t^3 - t^2 - t - 1 + \frac{1}{1-t} \Rightarrow$

$$\int \frac{t^4}{1-t} dt = -\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t| + C,$$

3. После обратной подстановки результат имеет вид:

$$\int \frac{\sqrt[6]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt{2x+1}} dx =$$

$$= -3\left(\frac{\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^4}{4} + \frac{\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^3}{3} + \frac{\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^2}{2} + \sqrt[6]{2x+1} + \ln\left|\left(\sqrt[6]{2x+1}\right) - 1\right| \right) + C.$$

17.8.2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1}}$.

Решение.

1. Выделение полного квадрата в знаменателе:

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right) = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right)$$

2. Результат подставляется в исходный интеграл и делается подстановка:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \left\langle \begin{array}{l} \left(x + \frac{3}{4}\right) = z; \\ dx = dz. \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}}.$$

3. Интеграл вычисляется с помощью формулы 14.3.17 таблицы основных интегралов:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| z + \sqrt{z^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \right|.$$

4. После обратной подстановки $z = x + \frac{3}{4}$ результат имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| \left(x + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2 + 3x + 1} \right| + C.$$

17.8.3. Вычислить $\int \frac{12x^3 + 15x^2 + 4x - 1}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1}} dx$

Решение.

1) Искомый интеграл нужно представить в виде:

$$\int \frac{\left(12x^3+15x^2+4x-1\right)dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x^2+3x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}.$$

Коэффициенты a, b, c и число λ определяют с помощью операций, указанных выше:

$$\left(\int \frac{\left(12x^3+15x^2+4x-1\right)dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}\right)'=\left(ax^2+bx+c\right)'\sqrt{2x^2+3x+1}+$$

$$+\left(ax^2+bx+c\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+1}\right)'+\lambda\left(\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}\right)'\Rightarrow$$

$$\frac{12x^3+15x^2+4x-1}{\sqrt{2x^2+3x+1}}=\left(2ax+b\right)\cdot\sqrt{2x^2+3x+1}+\left(ax^2+bx+c\right)\frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}+$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{2x^2+3x+1}}.$$

Последнее тождество приводят к общему знаменателю, который здесь равен $2\sqrt{2x^2+3x+1}$ и приравнивают числители полученных дробей

2) Получается тождество:

$$2\left(12x^3+15x^2+4x-1\right)\equiv 2\left(2ax+b\right)\left(2x^2+3x+1\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(4x+3\right)+2\lambda$$

$$\Leftrightarrow 24x^3+30x^2+8x-2\equiv$$

$$\equiv x^3\left(8a+4a\right)+x^2\left(4b+12a+4b+3a\right)+x\left(6b+4a+4c+3b\right)+\left(2b+3c+2\lambda\right).$$

Его используют при составлении системы для нахождения a, b, c и λ:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 24=12a \\ x^2 & 30=15a+8b \\ x & 8=4a+9b+4c \\ 1 & -2=2b+3c+2\lambda \end{array}\quad\Rightarrow a=2;\ b=0;\ c=0;\ \lambda=-1.$$

3) Значения $a=2;\ b=0;\ c=0;\ \lambda=-1$ подставляют в выражение 1):

$$\int\frac{12x^3+15x^2+4x-1}{\sqrt{2x^2+3x+1}}dx=2x^2\sqrt{2x^2+3x+1}-\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}.$$

Так как $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2+3x+1}\right|+C$ (см. 17.8.2.), то решение данного интеграла имеет вид:

$$2x^2\sqrt{2x^2+3x+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2+3x+1}\right|+C.$$

17.8.4. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+4x+1}}$.

Решение. Для решения можно применить подстановку $x=\frac{1}{t}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+4x+1}} = \left\langle x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2} \right\rangle = -\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}+\frac{4}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+5}}.$$

Полученный интеграл равен

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+5}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2+1}} = -\int \frac{d(t+2)}{\sqrt{(t+2)^2+1}} = -\ln\left(t+2+\sqrt{t^2+4t+5}\right)+C =$$

$$= \left\langle t=\frac{1}{x} \right\rangle = -\ln\left(\frac{1+2x+\sqrt{5x^2+4x+1}}{x}\right)+C.$$

17.8.5. Вычислить $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$.

Решение. Этот интеграл вычисляется с помощью подстановки $x=3\sin z;\ dx=3\cos z\cdot dz$:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \left\langle \begin{matrix} x=3\sin z; & dx=3\cos z dz \\ \sin z=\frac{x}{3}; & z=\arcsin\frac{x}{3} \end{matrix} \right\rangle = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 z}}{9\sin^2 z}\cdot 3\cos z dz =$$

$$= \int \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\cdot dz = \int \frac{1-\sin^2 z}{\sin^2 z}\cdot dz = \int \frac{dt}{\sin^2 z} - \int dz = -ctgz - z + C.$$

При обратной подстановке учитывается, что из равенства $x=3\sin z$ следует:

$$\sin z=\frac{x}{3},\quad z=\arcsin\frac{x}{3} \text{ и } ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

После обратной подстановки результат имеет вид:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3}+C.$$

17.9. Задачи для самостоятельного решения

$\int \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}dx.$ Ответ. $\sqrt{x^2-x-2}-1{,}5\ln\left|x-0{,}5+\sqrt{x^2-x-2}\right|+C.$

Указание. Преобразовать подынтегральную функцию следующим образом:

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}.$$

[1] №№ 1879, 1891, 1940, 2151, 2156, 2160, 2169.

ЗАНЯТИЕ 18.

18. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

18.1. Основные понятия

Определение. Определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ называется предел последовательности интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $n = 1, 2, 3...$ при условии, что $n \to \infty$ и $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ ($[a,b]$ разбивается на части точками x_i и $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$):

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

18.2. Свойства определенного интеграла

18.2.1. $\int_a^b dx = b - a.$ **18.2.2.** $\int_a^a f(x)dx = 0.$ **18.2.3.** $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

18.2.4. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$ **18.2.5.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

18.2.6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$ **18.2.7.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

18.3. Вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница. Решение типовой задачи

Теорема. Если функция $F(x)$ является <u>первообразной</u> функции $f(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

18.3.1. Вычислить $\int_{1-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

Решение.

$$\int_{1-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_{1-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 + 1} = \int_{1-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \int_{1-\sqrt{3}}^{1} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + 1} =$$

$$= arctg(x-1)\Big|_{1-\sqrt{3}}^{1} = arctg0 - arctg\left(1 - \sqrt{3} - 1\right) = arctg0 + arctg\sqrt{3} = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

18.4. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 2232, 2237, 2239, 2240, 2252, 2255, 2257.

18.5. Замена переменной (метод подстановки) в определенном интеграле. Решение типовой задачи.

Правило замены переменной в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Пусть функция $x=\varphi(t)$ монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha;\beta]$. Пусть $a=\varphi(\alpha); b=\varphi(\beta)$, и при $t\in[\alpha;\beta]$ значения функции $x=\varphi(t)$ принадлежат отрезку $[a;b]$.

Тогда при замене переменной меняются пределы интегрирования:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

18.5.1. Вычислить $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$.

Решение. В этом интеграле можно применить подстановку $x=\frac{4}{t}$.

Старые пределы интегрирования от 2 до 4, поэтому новые – от 2 до 1.

$$\int\limits_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}=\left\langle \begin{array}{l} x=\frac{4}{t};\ \sqrt{x^2+16}=\frac{4\sqrt{1+t^2}}{t}; \\ dx=-\frac{4dt}{t^2}; x\in[2;4]\Rightarrow t\in[2;1] \end{array}\right\rangle=-\frac{1}{4}\int\limits_2^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Bigg|_2^1=-\frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=-\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}.$$

18.6. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 2275, 2279, 2286, 2302, 2309, 2310, 2312.

18.7. Интегрирование «по частям» в определенном интеграле. Решение некоторых типовых задач

Пусть u и v – функции, которые непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;\ b]$, тогда имеет место формула:

$$\boxed{\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu}$$

При выборе, какая функция принимается за $u(x)$ и какое выражение составит $dv(x)$, следует руководствоваться теми же соображениями, что и при вычислении неопределенных интегралов (см. 15.2.).

18.7.1. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin\frac{x}{3}\cdot dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\sin\frac{x}{3}\cdot dx}_{dv} = -3x^2\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-3\cos\frac{x}{3}\right)\left(2xdx\right) =$

$$= -3x^2\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos\frac{x}{3}dx}_{dv} = -\frac{3\sqrt{3}\pi^2}{8} + 6\left(3x\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{3}dx\right) =$$

$$-\frac{3\sqrt{3}\pi^2}{8} + 6\left(\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6} - 0 + 3\cdot 3\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{3\sqrt{3}\pi^2}{8} + \frac{9\pi}{2} + 27\sqrt{3} - 54.$$

18.7.2. Вычислить $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctg2x\cdot dx.$

Решение. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctg2x\cdot dx = x\cdot arctg2x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2x}{1+4x^2}\cdot dx =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot arctg\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot arctg\left(-1\right) - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

18.8. Задачи для самостоятельного решения

[1] №№ 2260, 2264, 2267, 2269, 2310, 2312, 2313.

18.9. Геометрические приложения определенного интеграла. Решение некоторых типовых задач

Площадь плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции в прямоугольных координатах:

а) $\boxed{S = \left|\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\right|}$. б) $\boxed{S = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} y\left(t\right)\cdot x'\left(t\right)dt\right|}$.

Площадь в полярных координатах:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta\left(r\left(\varphi\right)\right)^2 d\varphi}.$$

Длина дуги кривой

Длина дуги в прямоугольных координатах:

а) $\boxed{s = \int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx}$. б) $\boxed{s = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2 + \left(y'\left(t\right)\right)^2}\cdot dt}$.

Длина дуги кривой в полярных координатах:

$$\boxed{s=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi}.$$

Объем тела

Вычисление объема тела по площадям поперечных сечений:

$\boxed{V=\int\limits_a^b S(x)dx}$. Объем тела вращения: $\boxed{V=\pi\int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$.

Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением дуги гладкой кривой $y=f(x)\ x\in[a;\,b]$ вокруг оси Ox, вычисляется по формуле:

$$\boxed{S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot dx}.$$

Решение типовых примеров

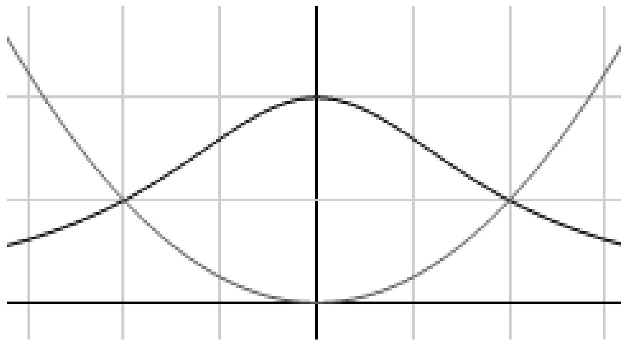


Рис.18.1

18.9.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и параболой $y=\dfrac{x^2}{2}$.

Решение. Предварительно находим точки пересечения графиков:

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=\{-2;\,1\}\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Числа -1 и 1 являются пределами интегрирования.

Площадь S фигуры равна модулю разности площадей, выражаемых интегралами, то есть модулю разности интегралов.

$$S=\left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}-\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{2}\right|=\left|arctgx\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}\right|=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\text{(кв. ед.)}.$$

18.9.2. Вычислить площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

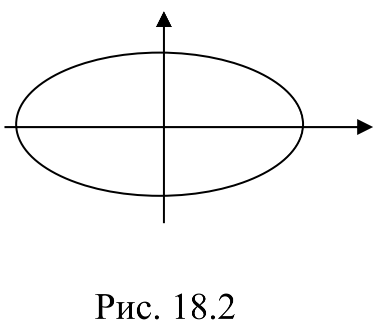


Рис. 18.2

Решение. Эллипс является фигурой, симметричной относительно осей Ox и Oy.

Площадь эллипса S равна $4S_1$, где S_1-площадь криволинейной трапеции, ограниченной осями Ox, Oy и графиком $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$; $x\in[0;\,a]$.

$$S=4S_1=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot dx=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx=\left\langle\begin{matrix}x=a\sin t;dx=a\cos tdt\\ x\in[0;\,a]\Rightarrow t\in\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2abt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+0=\pi ab(\text{кв.ед.}).$$

18.9.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме $x=\cos^3 t;\ \ y=2\sin^3 t.$

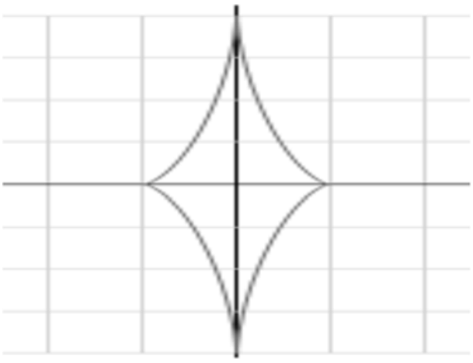


Рис. 18.3

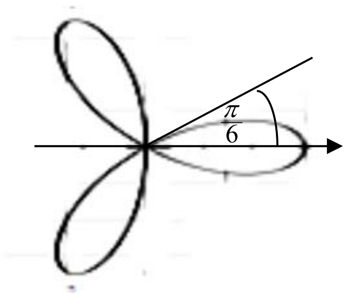
Решение. Фигура является симметричной относительно осей координат.
Граница фигуры задана в параметрической форме, поэтому площадь вычисляется по формуле $S=\left|\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x'(t)dt\right|$.

$$\frac{1}{4}S=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt\right|=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\cdot dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}_{\sin^2 2t}(1-\cos 2t)dt=\frac{3}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin^2 2t}_{\frac{1-\cos 4t}{2}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\underbrace{\cos 2tdt}_{\frac{1}{2}d(\sin 2t)}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\cdot dt}_{0}-\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}\right)=\frac{3\pi}{16}\Rightarrow S=\frac{3\pi}{4}(\text{кв.ед.}).$$

18.9.4. Найти площадь фигуры, определяемой уравнением $r=2\cos 3\varphi$ (трех лепестковая роза).
Решение. Фигура состоит из шести одинаковых криволинейных секторов. Площадь одного из них, который представляет половину «лепестка», определяется по формуле $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(r(\varphi))^2 d\varphi$, где $\alpha=0$ и $\beta=\frac{\pi}{6}$.



$$\frac{1}{6}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(2\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\cdot d\varphi=$$

$$=\cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cancel{2}}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\underbrace{\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}}_{0}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \underline{S=\pi}.$$

Рис. 18.4

18.9.5. Найти длину дуги параболы $y=3x^2$ от вершины до точки с абсциссой $x=1$.

Решение. Длина дуги определяется по формуле $S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$, где координата начала дуги $x=0$, а координата ее конца $x=1$.

$$s=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(3x^2\right)'\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(6x\right)^2}dx.$$

Первообразная в интеграле может быть вычислена с помощью метода, представленного в параграфе 17.7.

$$\int\sqrt{1+\left(6x\right)^2}dx=\int\frac{1+36x^2}{\sqrt{1+36x^2}}dx=\left(ax+b\right)\sqrt{1+36x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+36x^2}}.$$

$$\frac{1+36x^2}{\sqrt{1+36x^2}}=a\sqrt{1+36x^2}+\frac{\left(ax+b\right)\cdot 36\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+36x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+36x^2}}.$$

$$1+36x^2=a\left(1+36x^2\right)+\left(ax+b\right)\cdot 36\cdot x+\lambda.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 36=72a \\ x & 0=36b \\ 1 & 1=a+\lambda \end{array}\ \Rightarrow a=\lambda=0,5;\ b=0\ \Bigg|\Rightarrow\int\sqrt{1+\left(6x\right)^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1+36x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+36x^2}}.$$

$$\int_0^1\sqrt{1+\left(6x\right)^2}dx=0,5\,x\sqrt{1+36x^2}\Big|_0^1+\frac{1}{12}\int_0^1\frac{d\left(6x\right)}{\sqrt{1+36x^2}}=\frac{\sqrt{37}}{2}+\frac{1}{12}\ln\left|6x+\sqrt{1+36x^2}\right|\Big|_0^1=$$

$$=\frac{\sqrt{37}}{2}+\frac{1}{12}\ln\left(6+\sqrt{37}\right).$$

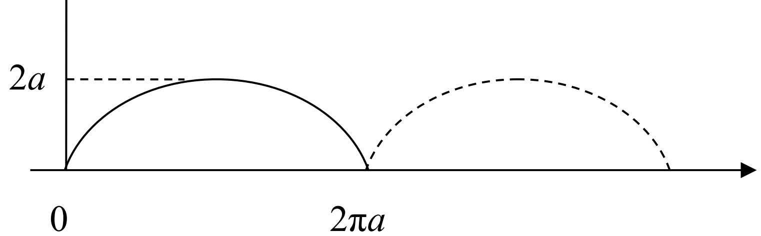


Рис. 18.5

18.9.6. Определить длину одной арки циклоиды $x=a\left(t-\sin t\right);\ y=a\left(1-\cos t\right)$

Решение. Циклоидой называется кривая, которую описывает точка окружности, которая катится без скольжения по неподвижной прямой. В данном уравнении a – это радиус окружности, параметр t – угол, на который поворачивается окружность. Начало координат совпадает с начальным положением фиксированной точки окружности $(t=0)$, а ось Ox направлена по заданной прямой. Циклоида состоит из бесчисленного множества повторяющихся арок, каждая из которых соответствует одному обороту окружности. Первая арка начинается в точке $O(0;0)$, которой соответствует значение $t=0$, а заканчивается в точке $(2\pi a;\,0)$ (значение t равно 2π).

Длина дуги определяется по формуле $s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\cdot dt$:

$$s=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(a(t-\sin t)'\right)^2+\left(a(1-\cos t)'\right)^2}\cdot dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\cdot dt$$

$$s=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a.$$

18.9.7. Найти объем части конуса $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, ограниченной плоскостями $x=-K$ и $x=K$.

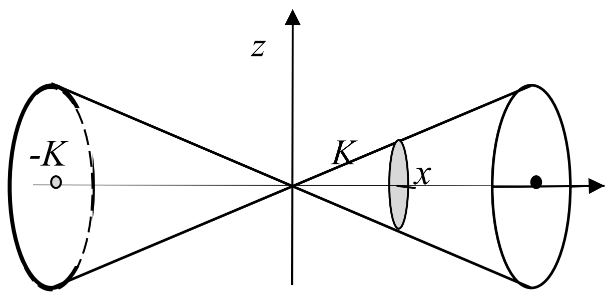


Рис. 18.6

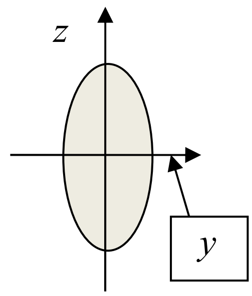


Рис. 18.7

Решение.

1. В сечении конуса, перпендикулярном оси Ox, получается эллипс, который определяется уравнениями:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\\ x=\text{const}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2\cdot\dfrac{x^2}{a^2}}+\dfrac{z^2}{c^2\cdot\dfrac{x^2}{a^2}}=1\\ x=\text{const}\end{cases}$$

. Его полуоси равны: $\dfrac{bx}{a}$ и $\dfrac{cx}{a}$. Так как площадь эллипса равна произведению полуосей на число π, то $S(x)=\pi\cdot\dfrac{bx}{a}\cdot\dfrac{cx}{a}$ (см. задачу 18.9.2.).

2. Объем части конуса, ограниченной плоскостями $x=-K$ и $x=K$, равен

$$V=\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_{-K}^{K}\pi\cdot\frac{bx}{a}\cdot\frac{cx}{a}dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int\limits_{-K}^{K}x^2dx=\frac{\pi bc}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-K}^{K}=\frac{2\pi bcK^3}{3a^2}\text{ (куб. ед.).}$$

18.9.8. Найти объем и поверхность шара, рассматривая его как тело вращения.

Решение. Будем считать, что сфера образована вращением окружности $x^2 + y^2 = r^2$, расположенной в плоскости xOy, вокруг оси Ox.

1. Объем шара определяем по формуле $V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$

Из уравнения окружности получаем $\left(f(x) \right)^2 = y^2 = r^2 - x^2$, $x \in [-r;\ r]$.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 \right) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{r} = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ (куб. ед.)}.$$

2. Для нахождения площади поверхности сферы применяем формулу $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} \cdot dx.$

В данной задаче $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $\left(f(x) \right)' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ $x \in [-r;\ r]$.

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \cdot dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r \cdot dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^{r} = 4\pi r^2 \left(\text{кв.ед.} \right).$$

18.10. Задачи для самостоятельного решения

Определить длину окружности, используя ее уравнение в декартовых координатах: $x^2 + y^2 = R^2$, в параметрической форме: $x = R\cos t;\ y = R\sin t;$ $\left(t \in [0;\ 2\pi] \right)$ и в полярных координатах: $r = R\ \left(\varphi \in [0; 2\pi] \right)$. Ответ. $2\pi R$.

[1] №№ 2455, 2461, 2492, 2495, 2519, 2536, 2546, 2555, 2579.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 20-е изд.; М.: Наука,1985. 384с.

[2] Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дегтярева О.М. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М,2011. - 372 с. (Высшее образование).