# Normalizing Flow

- 앞절의 background 참고

$$\mathbf{z}_{i-1} \sim p_{i-1}(\mathbf{z}_{i-1})$$
$$\mathbf{z}_i = f_i(\mathbf{z}_{i-1}), \text{ thus } \mathbf{z}_{i-1} = f_i^{-1}(\mathbf{z}_i)$$
$$p_i(\mathbf{z}_i) = p_{i-1}(f_i^{-1}(\mathbf{z}_i)) \left| \det \frac{d f_i^{-1}}{d \mathbf{z}_i} \right|$$

## 역함수 기호가 빠지는 이유

**역함수 이론**에서, 만약 $y = f(x)$ 와 $x = f^{-1}(y)$ 가 있다면,

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^{-1}$$

가 됩니다. 즉, 역함수의 미분과 함수의 미분은 inverse 관계라는 것이죠. 따라서 위에서도 우리는 역함수의 자코비안을 함수의 자코비안의 역으로 표현이 가능합니다.

## determinant 특성 4번

1. $\det(1_{n\times n}) = 1.$
2. $\det(MN) = \det M \det N.$
3. 행렬 $M$이 **가역행렬(invertible matrix, 역행렬이 있는 행렬)**인 경우, $\det M \neq 0.$
4. 행렬 $M$이 **가역행렬**인 경우, $\det M^{-1} = (\det M)^{-1}.$
5. $\det(M^\top) = \det M.$

## 자코비안 행렬 이용해 미분의 행렬식 계산

**가역함수의 자코비안** 은 결국 가역행렬인 경우의 행렬식 특성들을 갖습니다.

$$\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$$
$$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(M \cdot M^{-1}) = \det(I) = 1$$

따라서 우리는 빨간색 부분을 좀 더 보기 좋게 정리할 수 있게 됩니다.

$$
\begin{aligned}
p_i(\mathbf{z}_i) &= p_{i-1}(f_i^{-1}(\mathbf{z}_i)) \left| \det \frac{d f_i^{-1}}{d \mathbf{z}_i} \right| \\
&= p_{i-1}(\mathbf{z}_{i-1}) \left| \det \left( \frac{d f_i}{d \mathbf{z}_{i-1}} \right)^{-1} \right| \\
&= p_{i-1}(\mathbf{z}_{i-1}) \left| \det \frac{d f_i}{d \mathbf{z}_{i-1}} \right|^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\log p_i(\mathbf{z}_i) = \log p_{i-1}(\mathbf{z}_{i-1}) - \log \left| \det \frac{d f_i}{d \mathbf{z}_{i-1}} \right|$$

# Normalizing Flow

- 앞 장의 식

$$\log p_i(\mathbf{z}_i) = \log p_{i-1}(\mathbf{z}_{i-1}) - \log\left|\det \frac{df_i}{d\mathbf{z}_{i-1}}\right|$$

- 앞 장에서 계산 편의를 위해 취한 log 덕분에 역변환 과정을 확률분포의 합으로 나타낼 수 있다.

드디어 우리는 $\mathbf{z}_0$ 의 확률분포에서부터 시작해 $K$ 번의 역변환을 통해 $\mathbf{x}$ 의 확률분포를 구하는 수식을 앞에서 배웠던 것들을 활용하여 정리할 수 있게 되었습니다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{z}_K = f_K \circ f_{K-1} \circ \cdots \circ f_1(\mathbf{z}_0)$$

$$\begin{aligned}
\log p(\mathbf{x}) = \log \pi_K(\mathbf{z}_K) &= \log \pi_{K-1}(\mathbf{z}_{K-1}) - \log\left|\det \frac{df_K}{d\mathbf{z}_{K-1}}\right| \\
&= \log \pi_{K-2}(\mathbf{z}_{K-2}) - \log\left|\det \frac{df_{K-1}}{d\mathbf{z}_{K-2}}\right| - \log\left|\det \frac{df_K}{d\mathbf{z}_{K-1}}\right| \\
&= \dots \\
&= \log \pi_0(\mathbf{z}_0) - \sum_{i=1}^{K} \log\left|\det \frac{df_i}{d\mathbf{z}_{i-1}}\right|
\end{aligned}$$